T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE MANİFOLDLARDA DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLER ÜZERİNE

FEYZA ESRA ERDOĞAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Eylül 2012

Tezin Başlığı: **Dejenere Manifoldlarda Düzlemsel Normal Kesitler Üzerine**

Tezi Hazırlayan: **Feyza Esra ERDOĞAN**

Sınav Tarihi: Eylül 2012

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu ——————————

Prof. Dr. Sadık Keleș ——————————

Prof. Dr. Rıfat Güneș ——————————

Prof. Dr. Bayram Șahin ——————————

Yrd. Doç. Dr. Fatih Özcan ——————————

——————————

Prof. Dr. Rıfat Güneș

Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

——————————

Prof.Dr.Mehmet Alparslan

Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum "Dejenere Manifoldlarda Düzlemsel Normal Kesitler Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sevgili Eşim Hüseyin'e, prensesim Simay'a doktora süresinde bebekliğine doyamadığım canım oğlum Paşama ve her zaman benim yanımda olan anne ve babama...

ÖZET

Doktora Tezi
DEJENERE MANİFOLDLARDA DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLER ÜZERİNE

Feyza Esra ERDOĞAN
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

88+v sayfa
2012
Danışman: Prof. Dr. Rıfat Güneş

Bu tez dört bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar; vektör demetleri, distribüsyonlar, Riemann ve semi-Riemann manifoldlar, lightlike altmanifoldlar ve half-lightlike altmanifoldlar ele alındı.

İkinci bölümde daha önce Riemann ve semi-Riemann manifoldların altmanifoldların düzlemsel normal kesitlere sahip olmaları için gerekli ve yeterli şartlar verildi.

Üçüncü bölümde R_1^3 semi-Riemann manifoldunun bir lightlike yüzeyinin dejenere ve non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerekli ve yeterli şartları elde edildi. Ayrıca bir takım karakterizasyonlar ve bir örnek verildi.

Dördüncü bölümde R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldunun dejenere ve non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerekli ve yeterli şartları verildi. Non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip half-lightlike altmanifoldlarla ilgili karakterizasyonlar oluşturuldu ve örnekler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Lightlike altmanifold, Half-Lightlike altmanifold, Dejenere normal kesit, Non-dejenere düzlemsel normal kesit, Dejenere düzlemsel normal kesitler, Non-dejenere düzlemsel normal kesitler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON THE PLANAR NORMAL SECTİONS İN DEJENERE MANİFOLDS

Feyza Esra ERDOĞAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

88+v pages

2012

Supervisor: Assoc. Prof. Rıfat Güneş

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, we give basic materials such as half-lightlike submanifolds, lightlike submanifolds, degenerate subspaces, semi-Riemannian manifolds, Riemannian manifolds, distributions, vector bundles which will be useful for other chapters.

In the second chapter , We give necessary and sufficient condition for subsmanifold and semi-Riemannian manifolds to have planar normal sections we also give some characterizations.

In the third chapter, we give certain conditions for a lightlike submanifold of R_1^3 to have degenerate or non-degenerate planar normal sections. Then we give some characterizations and gives examples.

Finally, in the fourth chapter, we give necessary and sufficient conditions for a half-lightlike submanifold of R_2^4 to have degenerate or non-degenerate planar normal sections. We also give some characterizations and gives examples.

KEY WORDS: Lightlike submanifold, Half-lightlike submanifold, Degenerate normal section, Non-degenerate normal section,Degenerate planar normal section, Non-degenerate planar normal section

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik eden, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren, tez danışmanım Prof. Dr. Rıfat Güneş'e, makale çalışmalarımda, doktora çalışmalarımda değerli vaktini ayırıp yardımlarını esirgemeyem hocam Prof. Dr. Bayram Şahin' e, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sadık Keleş' e, ders aşamasında bizlerle değerli bilgilerini paylaşan Doç. Dr. Erol Kılıç'a ve Doç. Dr. Bayram Karadağ'a karşılaştığım sorunlarda yardımlarını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Cumali Yıldırım'a ve Yrd.Doç.Dr. Selcen Yüksel Perktaş'a, manevi desteklerini herzaman yanımda hissettiğim anneme, babama ve sevgili eşim Hüseyin'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Altmanifoldların geometrisi incelenirken altmanifolların sınıflandırılması uygulamada önemli bir yer teşkil etmektedir.

Bir çok yazar altmanifoldları sınıflandırma yoluna giderken; altmanifoldlar üzerindeki distribüsyonlardan faydalanmıştır. Daha sonra bu distribüsyonlara tamamen geodeziklik, tamamen umbiliklik, integrallenebilirlik şartlarını yükleyip yapılan işlemleri kolaylaştırmaya çalışmışlar ve buldukları sonuçlarla altmanifoldların özelliklerini araştırmışlardır. Bu işlevsel bir yöntem olmakla birlikte uygulamada zaman alıcıdır. Altmanifold geometrisini incelemede en temel ve en basit yöntem eğri üzerinde çalışmaktır. Bu doğrultuda Chen düzlemsel normal kesitleri tanımladı ve bunları altmanifoldların geometrisini incelemede kullandı. Chen, Young Ho Kim, Shi-Jie Li vs. normal kesit eğrisi kavramıyla altmanifoldları sınıflandırma yoluna gitmişlerdir.

M, E^m öklid uzayının m-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $p \in M$ noktasında $x \in T_pM$ birim tanjant vektörü için, x vektörü ve $p \in M$ ' de M' nin $T_p^{\perp}M$ normal uzayı p boyunca E^mde bir $(m-n+1)$-boyutlu $E\left(p,x\right)$ afin uzayını tanımlar. M ve $E\left(p,x\right)$' in arakesiti p' nin komşuluğunda bir γ eğrisidir. Bu eğriye x-doğrultusunda M' nin p noktasındaki normal kesiti adı verilir. Genel olarak γ normal kesiti $E\left(p,x\right)$' te bir bükülmüş uzay eğrisidir.

Bir M manifoldun $p \in M$' deki normal kesit eğrisi γ

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge ... \wedge \gamma^{(k+1)} = 0$$

şartını sağlıyor ise M manifolduna noktasal k-düzlemsel $(2 \leq k \leq m-n)$ normal kesitlere denir.

Noktasal (pointwise) düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar ilk kez 1981'de [24]' te B.Y. Chen tarafından çalışılmıştır. Özellikle Chen [24] de E^m' nin bir altmanifoldunun 2-düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şart elde etmiştir. Bu sonuç ve Chen' nin [24] de elde ettiği diğer sonuçlar kullanılarak Chen ve diğer yazarlar E^m' de noktasal 2-düzlemsel normal kesitli bütün yüzeyleri sınıflandırdılar. Daha doğrusu, onlar böyle bir yüzeyin E^m' nin E^3 lokal uzayında lokal olarak kalmak zorunda olduğunu gösterdiler. Yani iki düzlemsel dairenin çarpım yüzeyinin bir açık parçası veya E^m' nin E^5' deki bir Veronese yüzeyinin bir açık parçası gibi. Daha sonra Shi-Jie Li kürenin ikinci standart immersiyonu yardımıyla kürede noktasal 2 veya 3-düzlemsel normal kesitli altmanifoldları incelemiş ve daha önce verilen durumdan oldukça farklı bir durum olduğunu göstermiştir. Buradan $m-$boyutlu S^m birim küresinin n-boyulu bir alt manifoldunun noktasal 2 veya 3-düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şartın M' nin S^m birim küresinde tamamen geodezik, yani, M' nin S^m' de n-boyutlu S^n birim küresinin bir açık parçası olması gerektiğini göstermiştir.

Chen [24] bulduğu sonuçları kullanılarak daha sonraki çalışmalarda ikinci temel formu paralel olan altmanifoldlar için geometrik açıklamalar yaptı ve ikinci temel formu paralel olan altmanifoldların düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu ve düzlemsel normal kesit oldukları noktanın normal kesit eğrisi için bir köşe noktası olduğu sonucuna vardı.

Takip eden yıllarda düzlemsel geodezik altmanifoldlarla düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar arasında bir takım ilişkiler bulundu. M, E^m öklid uzayının m-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere eğer p' deki normal kesit $\gamma(s)$, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay değilse bu durumda $t=\gamma(0)$ olmak üzere

$$h\left(t,t^{\perp}\right)\wedge h(t,t)=0,$$

eğer geodezik yay ise

$$\left\langle h\left(t,t^{\perp}\right),h(t,t)\right\rangle=0$$

olması gerektiği bulundu.

Öklid ve Riemann manifoldlarda yapılan bu çalışmalar ilerliyen yıllarada semi-Riemann manifoldlarda da çalışıldı. Chen' in [24] de yaptığı normal kesit eğrisi tanımı kullanıldı ve bir pseudo öklidyen uzayın bir pseudo Riemann altmanifoldunun düzlemsel normal kesitlere sahip olması için t, M' de tanjant herhangi birim vektör olduğu yerde

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$$

olması gerektiği bulundu [40].

Pseudo-Riemann altmanifoldlarda çalışırken normal kesit eğrilerinin dejenere ve non-dejenere olma durumları söz konusuydu. Eğer her normal kesit non dejenere ise pseudo-Riemann altmanifolda ya timeliketir ya da spaceliketır denildi. Bir pseudo öklidyen uzayın bir pseudo Riemann altmanifoldunun normal kesiti düzlemsel ise

$$\bigcup_p M_r^n = \left\{ t \in T_p M_r^n \mid \langle t,t \rangle^{\frac{1}{2}} = 1 \right\}$$

olmak üzere $\bigcup_p M_r^n$ üzerinde

$$L(p,t) = L_p(t) = \langle h(t,t), h(t,t) \rangle$$

şeklinde tanımlanan bir L fonksiyonu yardımıyla normal kesit eğrileri sınıflandırıldı.

Bir pseudo öklidyen uzayın bir pseudo Riemann altmanifoldu düzlemsel geodeziklere sahipse pseudo-Riemann altmanifoldunun her normal kesiti düzlemsel ve aynı κ sabit eğriliğine sahiptir sonucuna ulaşıldı[40] . Aynı çalışmada pointwise düzlemsel normal kesitli pseudo izotropik alt manifoldlar incelendi. Yukarıda tanımlanan L_p fonksiyonunun her birim tanjant vektörü seçiminden bağımsız olması durumunda pseudo-Riemann altmanifoldunu pseudo izotropik olduğu tanımı yapıldı[40]. Buradan hareketle pseudo-Riemann altmanifoldunun noktasal düzlemsel normal kesitlere sahipse sabit pseudo izotropik olacağı gösterildi. Ayrıca noktasal düzlemsel normal kesite sahip olma kullanılarak pseudo-Öklidyen uzayın minimal yüzeyleri araştırıldı.

Ayrıca Kadri Arslan [44]' de yaptğı Yüksek Lisans çalışmasında düzlemsel normal kesitli immersiyonları ele aldı. Sonraki yıllarda bu konuyla ilgili birçok çalışma yapmıştır[45].

Günümüzde lightlike geometri önemli bir inceleme alanı olmakla beraber lightlike manifoldlar üzerindeki ayrışım Riemann ve semi-Riemanndan oldukça farklıdır. Bu farklılık bu tür manifoldların geometrisini incelerken uygulamada bir takım güçlükler çıkarmaktadır.

Yukarıda bahsedilen tüm çalışmalar Riemann ve semi-Riemann' da yapılmış ve Riemann ve semi-Riemann altmanifoldların sınıflandırılmalarında önemli bir kolaylık sağlamıştır. Bu verilenlerden hareket ederek bizde aynı çalışmayı bir semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldunda ve bir lightlike manifoldun half-lightlike altmanifoldunda yapmaya çalıştık.

Tezin ikinci bölümde daha önce Riemann ve semi-Riemann manifoldların altmanifoldların düzlemsel normal kesitlere sahip olmaları için gerekli ve yeterli şartlar verildi.

Tezin üçüncü bölümünde R_1^3' ün bir lightlike manifoldunun dejenere ve non-dejenere düzlemsel normal kesitlerinden faydalanarak R_1^3' ün bir lightlike altmanifoldlarını sınıflandırdık.

Dördüncü bölümde ise lightlike manifoldlardan biraz daha karmaşık bir yapıya sahip half-lightlike altmanifoldu üzerinde çalıştık. Half-lightlike altmanifoldların dejenere ve non-dejenere normal kesitlerini tanımladıktan sonra half-lightlike altmanifoldlarını sınıflandırdık ve bunlara birer örnek verdik.

Bu tezin orjinal kısımları üçüncü ve dördüncü bölümlerdir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

III. ve IV. Bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu bölümde temel kavramlara yer verilmiştir. Bu bölümde teoremlerin ispatlarına girmeden, tanımlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölüm beş altbölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik bilineer dönüşümün bilinen özellikleri verilmiştir. İkinci alt bölümde lightlike altmanifoldlar teorisinde önemli rol oynayan vektör demeti ve distribüsyon kavramları tanıtılmıştır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci alt bölümlerde sırasıyla semi-Riemann manifoldlar, semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ve lightlike manifoldların half-lightlike altmanifoldlarının bazı karakteristik özellikleri verildi. Lightlike altmanifold ve half-lightlike altmanifold tanımı yapıldı.

1.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.1.1. *V reel m-boyutlu bir vektör uzayı ve $g : V \times V \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa g dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.*

$a, b \in R$ ve $\forall u, v, z \in V$ için,

1- $g(au + bv, z) = ag(u, z) + bg(v, z)$

2- $g(u, av + bz) = ag(u, v) + bg(u, z)$

dir[9].

Tanım 1.1.2. *V reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall u, v \in V$ için,*

$$g(u, v) = g(v, u)$$

sağlanırsa g' ye simetriktir denir.

Tanım 1.1.3. *V reel m-boyutlu bir vektör uzayı ve $g : V \times V \to R$ simetrik bilineer* *dönüşüm olsun.* $0 \neq \xi \in V$ *olmak üzere*

$$g(\xi, v) = 0, \forall v \in V$$

ise simetrik bilineer dönüşümüne V *üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g' ye non-dejeneredir denir. Buradan görülür ki g dönüşümünün non-dejenere olması için gerek ve yeter şart* $v \in V$ *olmak üzere*

$$g(u, v) = 0, \forall u \in V \Rightarrow v = 0$$

olmasıdır[7]. Bir V *reel vektör uzayı üzerindeki simetrik bilineer form,* V *uzayının alt uzayı üzerine dejenere veya non-dejenere bir bilineer form indirger.*

Tanım 1.1.4. V *bir reel vektör uzayı ve* V *üzerinde simetrik bilineer dönüşüm* g *olsun.* V *uzayının*

$$RadV = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

ile tanımlı altuzayına, g simetrik bilineer dönüşümüne göre V *uzayının radikal uzayı (veya null uzayı) denir[3].*

Tanım 1.1.5. V *bir reel vektör uzayı ve* V *üzerinde simetrik bilineer dönüşüm* g *olsun. Her* $v \in V$ *için*

1- $g(v, v) < 0$ *ise g' ye negatif tanımlıdır denir[16].*

2- $g(v, v) > 0$ *ise g' ye pozitif tanımlıdır denir[16].*

Tanım 1.1.6. V *bir reel vektör uzayı ve* W *da* V *vektör uzayının alt uzayı olsun. Bu durumda* $W \times W$ *üzerinde g dönüşümünün kısıtlanmışıda* W *üzerinde simetrik bilineer formdur. Simetrik bilineer formun negatif olduğu en büyük* W *altuzayının boyutuna* V *uzayı üzerinde, bilineer formun indeksi denir[16].*

Teorem 1.1.1. V *bir reel vektör uzayı ve* V *üzerinde simetrik bilineer dönüşüm* g *olsun. Bu durumda vektör uzayı üzerinde*

1- $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0,\ i \neq j$

2- $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p$

3- $g(\alpha_j, \alpha_j) = -1,\ p + 1 \leq j \leq r$

4- $g(\alpha_k, \alpha_k) = 0,\ r + 1 \leq k \leq n$

olacak şekilde $\{\alpha_1, ...\alpha_n\}$ *bazı vardır[14].*

Tanım 1.1.7. *V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde non-dejenere simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda g' ye bir skaler çarpım ve vektör uzayına da semi-Öklidyen uzay denir. p, ortonormal bazdaki spacelike vektör sayısı q, ortonormal bazdaki timelike vektör sayısı olmak üzere $p, q \neq 0$ durumunda V' ye proper semi-Öklidyen uzay denir. Simetrik bilineer formun dejenere olması durumunda vektör uzayına lightlike uzay denir[16].*

Tanım 1.1.8. *V bir semi-Öklidyen uzay olsun ve $x \in V$ olsun.*

$1-g(x,x) > 0$ *veya* $x = 0$ *ise* x *vektörüne spacelike*

$2-g(x,x) < 0$ *ise* x *vektörüne timelike*

ve

$3-g(x,x) = 0$ *ise* x *vektörüne lightlike denir[16].*

Önerme 1.1.1. *Boştan farklı her semi-Öklidyen uzayının ortonormal bir bazı vardır.*

Önerme 1.1.2. *(W, g) reel n-boyutlu lightlike vektör uzayı $RadW$, W vektör uzayının radikali olsun. Bu durumda radikal uzayn tümleyeni olan alt uzay non -dejeneredir. Bu uzaya ekran uzay denir[3].*

Tanım 1.1.9. *(V, g) reel m-boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W da onun alt uzayı olsun. Eğer $g\mid_W$ dejenere ise alt uzaya lightlike (dejenere) altuzay denir. Aksi halde W' ya non-dejenere denir.*

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \forall w \in W\}$$

alt uzayına W uzayının diki denir[3]. Önemle belirtelim ki genelde

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dır.

Önerme 1.1.3. *(V, g) reel m-boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W da onun alt uzayı olsun. Bu durumda*

1- $boyW + boyW^{\perp} = m$

2- $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

3- $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dır.

Tanım 1.1.10. (V,g) n- *boyutlu bir proper semi-Öklidyen uzay olsun.* V *uzayının* $\{e_1,...,e_q\}$ *birim timelike ve* $\{e_{q+1},...,e_n\}$ *birim spacelike olacak şekilde* $\{e_1,...,e_n\}$, $p+q=n$ *ortonormal bazını gözönüne alalım. Lightlike vektörleri ihtiva eden üç durumu inceliyelim.*

Durum 1.1.1. $(q<p)$ *Bu durumda*

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}+e_i\}, f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}-e_i\}, i \in \{1,...,q\} \tag{1.1.1}$$

vektörlerini inşa edelim. Buradan görülür ki

$$g(f_i,f_j) = g\left(f_i^*,f_j^*\right) = 0$$

ve

$$g(f_i,f_i^*) = \delta_{ij}, i,,j \in \{1,...,q\} \tag{1.1.2}$$

dır. Böylece

$$\left\{f_1,...,f_q,f_1^*,...,f_q^*,e_{2q+1},...,e_{p+q}\right\},$$

V *uzayının* $2q$ *tane lightlike vektörünü ve* $p-q$ *tane spacelike vektörünü ihtiva eden bir bazdır.*

Durum 1.1.2. $(p<q)$ *Bu durumda*

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a}+e_a\}, f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a}-e_a\}, a \in \{1,...,p\} \tag{1.1.3}$$

olur. Böylece (1.1.1) ve (1.1.2) de i,j *yerine* $a,b \in \{1,...,p\}$ *alınırsa* V *uzayının* $2p$ *tane lightlike vektörler ve* $q-p$ *tane timelike vektörler ihtiva eden*

$$\left\{f_1,...,f_p,f_1^*,...,f_p^*,e_{2p+1},...,e_{p+q}\right\}$$

bazı elde edilir.

Durum 1.1.3. $(p=q), n=2q=2p$ *olduğundan (1.1.1) veya (1.1.3) te tanımlanan*

$$\left\{f_1,...,f_p,f_1^*,...,f_p^*\right\}$$

lightlike bazı elde edilir.

Tanım 1.1.11. *(V, g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın*

$$\begin{aligned} g(f_i, f_j) &= g\left(f_i^*, f_j^*\right) = 0, g\left(f_i, f_j^*\right) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, ..., q\} \\ g(u_\alpha, f_i) &= g(u_\alpha, f_i^*) = 0, g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \{1, ..., t\}, \epsilon_\alpha = \pm 1 \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\{f_1, ..., f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ..., u_t\}$$

bazına semi-Öklidyen uzayının ortonormal bazı vardır bu baza quasi ortonormal baz denir[7].

Önerme 1.1.4. *V semi-Öklidyen uzay ve W da bu uzayın bir alt uzayı olsun. Bu durumda W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır[3].*

1.2 Vektör Demetleri ve Manifoldlar Üzerindeki Distribüsyonlar

Genel olarak bir vektör demeti, her p noktasında vektör uzayı tayin eden bir diferensiyellenebilir manifolddur. Vektör demeti kavramına geçmek için öncelikle lif demetinin tanımını veriyoruz.

Tanım 1.2.1. *E, B, F, C^∞-manifoldlar ve $\pi : E \longrightarrow B$ bir C^∞-dönüşüm olsun. B' nin açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere, eğer*

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x, x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak biçimde

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \quad & U_\alpha \subset B \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \xrightarrow{\pi} B \\ & (x, y) \longrightarrow \psi_\alpha(x, y) \longrightarrow (\pi \circ \psi_\alpha)(x) = x \end{aligned}$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π, F' ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π' nin lokal ayrışması denir. Eğer $C^\infty(E, B) = \{\pi \mid \pi : E \longrightarrow B\}$ modülünün herhangi bir elemanı lokal çarpım özelliğine sahipse ozaman bu dönüşüm örten ve açık bir dönüşümdür[19].

Tanım 1.2.2. *$\pi : E \to B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir. Bu lif demetinde E' ye total uzay B' ye baz (taban) uzay, F' ye lif modeli ve π ' ye de projeksiyon (fibrasyon) denir. Ayrıca $rank\zeta = boyF$ olarak tanımlanır. Biz lif demetini E ile göstereceğiz [7].*

Tanım 1.2.3. *$\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için*

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \mid \pi(u) = x\}$$

cümlesine x üzerinde lif denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir. Yani

$$E = \bigcup_{x \in B} F_x$$

dır[43].

Örnek 1.2.1. *Bir M C^∞-manifoldunun herhangi bir tanjant uzayı $T_p(M)$ ile gösterilecek olursa ve M' nin tüm p noktalarındaki $T_p(M)$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimine TM denilirse*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \pi_M : TM \to M \\ Z \to \pi_M(Z) = p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \in TM, \exists p \in M \\ Z_p \in T_p(M) \Rightarrow Z(p) = Z_p \end{pmatrix}$$

ile tanımlı dönüşüm sürekli ve örten bir dönüşümdür. π_M dönüşümüne kanonik projeksiyon denir. π_M kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\zeta = (TM, \pi_M, M, R^n)$$

dörtlüsü bir lif demetidir. Buna manifoldun tanjant demeti denir[19].

Tanım 1.2.4. *$\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ' ye vektör demeti denir.*

1-) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzaylarıdır.

2-) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha x} : F \longrightarrow F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ 'nin bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır. Buna göre örnek1.2.1 bir vektör demetidir.[43].

Tanım 1.2.5. *$\zeta = (E, \pi, B, F)$ ve $\zeta' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olsun.Eğer*

a) $B = B'$

b) $\forall x \in B'$ için F'_x lifi F_x lifinin bir altvektör uzayı

c) $\imath : E' \longrightarrow E$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir

şartları sağlanıyorsa ζ' vektör demetine ζ vektör demetinin bir altvektör demeti denir [43].

Tanım 1.2.6. *$\pi : E \to B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda $\pi \circ S = I$ (I, B' nin birim dönüşümü) olacak şekilde*

$$S : B \longrightarrow E$$

C^∞ $-$dönüşümüne lif demetinin kesiti denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir[43].

Tanım 1.2.7. *E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için $T_p(E)$ tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti denir. E' nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin cümlesi K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Vektör demetlerinin kesitine M üzerinde bir alan denir. TM tanjant demetinin kesitine M üzerinde vektör alanı denir. Vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir[43].*

Tanım 1.2.8. *E_1 ve E_2 birer vektör demeti ve $f : E_1 \longrightarrow E_2, C^\infty -$ dönüşüm olsun. π_1, π_2 sırasıyla E_1 ve E_2 vektör demetlerinin projeksiyonları olmak üzere f; $\pi_2 \circ f = \pi_1$ ve E_1 vektör demetinin her lifinde f lineer şartlarını sağlıyorsa f' ye bir vektör demeti homomorfizmi denir. Eğer $\forall p \in M$ için $f : E_1 \mid_p \longrightarrow E_2 \mid_p$ bir izomorfizma ise f' ye bir vektör demeti izomorfizmi denir[43].*

Tanım 1.2.9. *E bir reel vektör demeti olsun. $\pi : E^c \longrightarrow M$, V^c standart lifi ile birlikte bir kompleks vektör demetidir denir. $p \in M$ üzerinde $(E^c)_p$ lifi E_p lifinin kompleksleştirilmişidir[43].*

Tanım 1.2.10. *$\bar{M}$, m-boyutlu bir manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde bir distribüsyon, her $p \in \bar{M}$ noktasına $T_p\bar{M}$' nin D_p alt uzayını karşılık getiren bir dönüşümdür, yani,*

$$\begin{aligned} D : \bar{M} &\to \bigcup T_p\bar{M}, \\ p &\to D_p \subset T_p\bar{M} \end{aligned}$$

dir. $X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için $X_p \in D_p$ ise D distribüsyonuna differensiyellenebilir denir. Eğer $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tabanı var ve her biri diferensiyellenebilir ise bu durumda D ye $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir distribüsyon denir[19].

Tanım 1.2.11. *$\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Ayrıca M, $\bar{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer D_p uzayı ile M manifoldunun bu noktadaki tanjant uzayı aynı ise D' ye integrallenebilir ve M' ye de D' nin integral manifoldu denir[20].*

Tanım 1.2.12. *$\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutive denir[19].*

Teorem 1.2.1. *$\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Bu durumda D distribusyonunun integral manifoldu vardır. Diğer tüm integral manifoldlar, bu integral manifoldunun altmanifoldudur[19].*

Tanım 1.2.13. *$\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için*

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna paraleldir denir[20].

1.3 Riemann Manifoldlar

M bir n-boyutlu manifold olsun. $\forall p \in M$ noktasında $\forall \vec{U}_p, \vec{V}_p \in T_pM$ için bir

$$\left\langle \vec{U}_p, \vec{V}_p \right\rangle = g_p\left(\vec{U}_p, \vec{V}_p\right)$$

pozitif tanımlı iç çarpım verilmiş olsun. p' nin M' deki bir U komşuluğundaki bir $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ lokal koordinat sistemi için

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}|_q, \frac{\partial}{\partial x_j}|_q \right\rangle = g_{ij}(q), q \in U$$

diyelim.

$$g_{ij} : U \to R$$

olduğu ve

$$[g_{ij}(q)] \in R_n^n$$

matrisinin pozitif tanımlı ve simetrik olduğu açıktır. Eğer U üzerinde bir diğer koordinat sistemi $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n\}$ ise

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}|_q, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}|_q \right\rangle = \bar{g}_{ij}(q), q \in U$$

olmak üzere

$$\bar{g}_{ij}(q) = \sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}(q) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_i}(q) g_{ki}(q)$$

ve

$$g_{ij}(q) = \sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}(q) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i}(q) \bar{g}_{ki}$$

yazılabilir. Böylece şu sonuca varılmış olur.

Eğer bütün $\bar{g}_{ij} : U \to R$ fonksiyonları C^r sınıfından iseler $g_{ij} : U \to R$ fonksiyonlarıda C^r sınıfındandır; bunun terside doğrudur. Demek ki

$$g_{ij} : U \to R$$

fonksiyonlarının C^r sınıfından olmaları özelliği lokal koordinat sisteminin U' daki seçiminden bağımsızdır.

Tanım 1.3.1. *M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir $p \in M$ noktası için*

$$\begin{aligned} g : M &\to Ł(T_pM \times T_pM, R) \\ p &\to g_p : T_pM \times T_pM \to R \end{aligned}$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir bilineer form tanımlanmış ise g' ye M' de Riemann metriği denir [9].

Eğer bir M manifoldunun $\forall p \in M$ noktasının bir U komşuluğu üzerinde g formu C^r sınıfından ise g Riemann metriğine C^r sınıfındandır denir. Literatürde daha çok C^∞ sınıfından Riemann metriği ile ilgilenilmektedir. Bu nedenle, sadeliğin hatırı için, C^∞ sınıfından Riemann metriği ifadesi yerine sadece Riemann metriği diyeceğiz.

Bir Riemann metriği verildiğinde bir $\overrightarrow{V}_p \in T_pM$ tanjant vektörünün boyu

$$g_p\left(\overrightarrow{V}_p, \overrightarrow{V}_p\right) = \left\|\overrightarrow{V}_p\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\, dx_i\mid_p \left(\overrightarrow{V}_p\right) dx_j\mid_p \left(\overrightarrow{V}_p\right)$$

olarak tanımlanır. Eğer $\overrightarrow{V}_p$' nin $\{x_i\}$ koordinat sistemine göre bileşenleri $(v_1, ..., v_n)$ ise

$$g_p\left(\overrightarrow{V}_p, \overrightarrow{V}_p\right) = \left\|\overrightarrow{V}_p\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\, v_i v_j$$

dir ve dolayısıyla Riemann metriği literatürde

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

notasyonu ile görülmektedir.

Tanım 1.3.2. *Bir M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanmış ise bu (M, g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir[9].*

Tanım 1.3.3. *(a, b), R' nin bir açık aralığı olsun. R bir boyutlu manifold ve (a, b), R' nin açık altmanifoldudur. M bir manifold ve*

$$\varphi : (a, b) \to M$$

içine bir dönüşüm olsun. φ diferensiyellenebilir dönüşümüne (a, b) üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir eğri denir [9].

Diferensiyellenebilir eğri bir φ dönüşümüdür ve φ, (a, b) aralığının $(\varphi(a, b))$ görüntüsü değildir. Bununla birlikte $t \in (a, b)$ için $\varphi(t)$' ye eğri üzerinde bir nokta denir [9].

Tanım 1.3.4. *$\varphi : (a, b) \to M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $t_0 \in (a, b)$ ve $(x^1, ..., x^n)$ de $\varphi(t_0)$ noktasının bir komşuluğunda M' nin bir lokal koordinat sistemi olsun. Ayrıca*

$$\left(\varphi^* x^i\right)(t) = \varphi^i(t), 1 \leq i \leq n$$

diyelim. Herbir $\varphi^i(t)$, t_0 noktasının bir komşuluğunda bir C^∞ fonksiyondur.

$$\left(\left(\frac{d\varphi^1}{dt}\right)_{t=t_0}, ..., \left(\frac{d\varphi^n}{dt}\right)_{t=t_0}\right)$$

ile verilen n-boyutlu vektöre $\varphi(t_0)$ noktasında, φ eğrisinin tanjant veya hız vektörü denir [9].

1.4 Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 1.4.1. *Reel m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M ve g de bu manifold üzerinde $(0,2)$ mertebeden simetrik tensör alanı olsun. Böylece g, manifoldun her x noktasındaki T_xM tanjant uzayı üzerine bilineer form taşır. Bunu g_x ile gösterelim. Eğer manifoldun her x noktası için g_x bilineer formunun indeksi aynı ve g_x, T_xM uzayı üzerinde non-dejenere ise bu durumda bilineer forma semi-Riemann metrik ve manifolda da semi-Riemann manifoldu denir. Manifoldun indeksinin sıfır(bir) olduğu durumda manifolda Riemann(Lorentz) manifold adı verilir[21].*

Tanım 1.4.2. *M semi-Riemann manifold ve E' de , $x \in M$ için her E_x lifi üzerinde non-dejenere bilineer form g_x olacak şekilde M manifoldu üzerinde vektör demeti olsun. Ayrıca g_x bilineer formunun indeksinin her $x \in M$ için aynı olduğunu kabul edelim. Eğer g_x, M üzerinde diferensiyellenebilir ise bu durumda E' ye semi-Riemann vektör demeti denir. Manifoldun indeksinin sıfır(bir) olduğu durumda E' ye Riemann(Lorentz) vektör demeti denir[21].*

Tanım 1.4.3. *E, M üzerinde rankı n olan bir vektör demeti olsun. Eğer ∇_x operatörü, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $S, S' \in \Gamma(E)$ ve f diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,*

1-) $\nabla_{fX+Y}(S) = f\nabla_X S + \nabla_Y S$

2-) $\nabla_X(fS + S') = f\nabla_X S + X(f)S + \nabla_X S'$

şartları sağlanıyorsa E üzerinde bir lineer konneksiyondur denir. Eğer $E = TM$ ise ∇, M üzerinde lineer konneksiyondur[3].

(M, g) semi-Riemann manifold üzerinde ∇ lineer konneksiyonu olduğunu kabul edelim. Metrik tensör alanı g, ∇' ya göre paralel ise yani $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

ise ∇' ya metrik konneksiyon(Riemann konneksiyon) denir.

Tanım 1.4.4. *M bir manifold ve ∇, M üzerinde konneksiyon olsun. Bu durumda ∇ nın torsiyon tensörü, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ile tanımlıdır.

Teorem 1.4.1. *Semi-Riemann manifold üzerinde tek bir torsiyonsuz metrik konneksiyonu vardır. Her semi-Riemann metrik*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

ile verilen Koszul özdeşliğini sağlar[3].

Tanım 1.4.5. *(M,g) semi-Riemann manifold olsun. Buradan M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,*

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{1.4.2}$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için,

$$\left\langle \bar{R}(X,Y)Z, W \right\rangle = g\left(\bar{R}(X,Y)Z, W\right)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christofell eğrilik tensörü denir.

Levi-Civita konneksiyonun R eğrilik tensörü birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerini sağlar. Ayrıca, diğer özellikler aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 1.4.2. *Bir semi-Riemann manifoldu M ve M üzerindeki metrik konneksiyon ∇ olsun. Aşağıdaki bağıntılar, geçerlidir:*

(a) $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(Y,X,Z,W) = 0$

(b) $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(X,Y,W,Z) = 0$

(c) $\bar{R}(X,Y,Z,W) - \bar{R}(Z,W,X,Y) = 0.$

Semi-Riemann manifoldların Önerme1.1.1' e göre ortonormal bir tabana sahip olduğunu biliyoruz. Buradan M manifoldunun ortonormal bir tabanı

$$\{E_1, E_2, ..., E_m\} \tag{1.4.3}$$

olsun. Böylece ϵ_i, $\{E_i\}$ bazının işareti ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(E_i, E_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$$

ve

$$X = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(X, E_i) E_i$$

olmak üzere

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(X, E_i) g(Y, E_i) \tag{1.4.4}$$

yazılır.

Semi-Riemann manifoldu M' nin Ricci tensör alanı

$$Ric(X, Y) = izZ \to R(X, Y) Z \tag{1.4.5}$$

tanımlanır. Yerel olarak,

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \bar{R}(X, E_i, Y, E_i) \tag{1.4.6}$$

olur.

Tanım 1.4.6. *(M, g) bir semi-Riemann manifoldu ve bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P alt uzayının bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere*

$$K(p) = \frac{\bar{R}(X, Y, X, Y)}{g(X, X) g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{1.4.7}$$

olarak tanımlanan $K(p)$ reel sayısına P' nin Riemann anlamındaki kesit eğriliği denir. Eğer $K(p) = c\,(sbt)$ ise M manifolduna c sabit kesit eğrilikli semi-Riemann manifold denir ve $M(c)$ ile gösterilir. Bu durumda M' nin R eğrilik tensör alanı

$$R(X, Y) Z = c\{g(Y, Z) X - g(X, Z) Y\} \tag{1.4.8}$$

ile verilir[3].

Tanım 1.4.7. *$\bar{M}$' nin bir semi-Riemann hiperyüzeyi co-dimension' u 1 olan semi-Riemann altmanifolddur [3].*

Tanım 1.4.8. *$\bar{M}$, $m+2$ boyutlu bir semi-Riemann manifold, $\bar{g}$, $\bar{M}$' nin Riemann metriği iken*

$$\dot{I}^{*}\bar{g} = g$$

ile tanımlanan g, M' nin non-dejenere metriği ise (M, g) ikilisine semi-Riemann hiperyüzey denir. Burada $\forall X, Y \in \chi(M), \dot{I}_{*}(X) = X$ için

$$\left(\dot{I}^{*}\bar{g}\right)(X, Y) = \bar{g}\left(\dot{I}_{*}(X), \dot{I}_{*}(Y)\right)$$

dir. Aynı zamanda (M, g) bir semi-Riemann manifolddur [3].

1.5 Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Tanım 1.5.1. *$\bar{M}$, $m+2$ boyutlu bir semi-Riemann manifold ve M de $\bar{M}$' nin bir hiperyüzeyi olsun. Eğer indirgenmiş*

$$g = \dot{I}^{*}\bar{g}$$

simetrik bilineer form dejenere ise M' ye lightlike hiperyüzey denir. boy$M = m+1$ dir [3].

Tanım 1.5.2. *$\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ reel $(m+n)$-boyutlu semi-Riemann manifold $m > 1$, $n > 1$ ($m > 1, n > 1$, yani M, $\bar{M}$ de ne bir eğri ne de bir hiperyüzeydir.) ve $\bar{g}$, $q \in \{1, ..., m+n-1\}$ sabit indeksli semi-Riemann metrik olsun. M, $\bar{M}$ manifoldunun ek boyutu n olan bir altmanifold olsun. Ayrıca $\bar{g}$' nin M üzerine indirgenmiş tensör alanı g ile tanımlanırsa, $\forall u \in M$ de $\forall X_u, Y_u \in T_u M$ için*

$$g(X_u, Y_u) = \bar{g}(X_u, Y_u)$$

elde edilir [3].

Şimdi $u \in M$ noktasında

$$T_u M^{\perp} = \left\{V_u \in T_u \bar{M} \mid \bar{g}(V_u, W_u) = 0, \forall W_u \in T_u M\right\}$$

cümlesini gözönüne alalım. g_u, T_uM üzerinde non-dejenere olması durumunda, hem T_uM hemde $T_uM^{\perp}$, non-dejeneredirler. Ayrıca T_uM ve $T_uM^{\perp}$, $T_u\bar{M}$' nin ortogonal tamamlayan vektör altuzaylarıdırlar. Aksi taktirde, hem T_uM hem de $T_uM^{\perp}$ dejenere, ortogonal ancak tamamlayan altuzay değildirler ve

$$RadT_uM = RadT_uM^{\perp} = T_uM \cap T_uM^{\perp}$$

dir.

M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun ve M üzerinde

$$RadTM : u \in M \to RadT_uM$$

dönüşümünün rankı r olsun. Eğer $r > 0$ ise $RadTM$ ye radikal distribüsyon ve altmanifold M' ye de lightlike altmanifold denir. g' ye de M üzerinde r- lightlike ($r-$dejenere, $r-$null) metrik denir[3].

Teorem 1.5.1. (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

1-) M, $r-$lightlike altmanifoldudur.

2-) $U \subset M$ her koordinat komşuluğunda

$$RadTU : u \in U \to RadT_uU$$

dönüşümü, U üzerinde rank $RadTM = r > 0$ olan diferensiyellenebilir bir distribüsyona sahiptir.

3-) $U \subset M$ her koordinat komşuluğunda g tarafından indirgenmiş g tensörü, sabit $m-r$ rankına sahiptir[3].

Tanım 1.5.3. (M',g'), $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifoldu ve*

$$f : M' \to \bar{M}$$

bir immersiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $\forall X,Y \in \Gamma(TM')$ için

$$g'(X,Y) = \bar{g}(f_*X, f_*Y)$$

oluyorsa f ' ye $r-$lightlike izometrik immersiyon ve $M = f(M')$' ye de $\bar{M}$ manifoldunun $r-$lightlike altmanifoldu denir.

$\bar{M}$ manifoldunun bir M lightlike altmanifoldu $RadTM$' nin rankına, M' nin ekboyutuna ve boyutuna göre dört durumda incelenecektir.

Durum 1.5.1. $(0 < r < \min\{m, n\})$. *M manifoldunun tanjant demeti TM' de $RadTM$' nin tamamlayanı olan $S(TM)$ distribüsyonunu gözönüne alalım. M' nin parakompakt olduğunu kabul ettiğimizden dolayı böyle bir distribüsyon her zaman vardır. Önerme1.1.2' den $S(TM)$, $RadTM$' ye ortogonal ve $\bar{g}$' ye göre non-dejeneredir. M üzerinde $S(TM)$ sabit indeksli olur ve tanjant demeti*

$$TM = RadTM \perp S(TM) \tag{1.5.1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan alt manifoldun tanjant demetine ortogonal olan $TM^{\perp}$

$$TM^{\perp} = \bigcup T_u M^{\perp}$$

ile tanımlanırsa M lightlike olduğu için $TM^{\perp}$, $T\bar{M}_{|M}$ de TM' ye tamamlayan değildir, çünkü $RadTM = TM \cap TM^{\perp}$ ve M üzerinde $rankRadTM = r > 0$ olan bir distribüsyondur. $TM^{\perp}$' de $RadTM$' ye ortogonal tamamlayan bir vektör demetini $S(TM^{\perp})$ ile tanımlı-
yalım. Önerme1.1.2' ye göre $\bar{g}$ metriği $S(TM^{\perp})$ üzerinde non-dejenere olduğundan, $TM^{\perp}$ demeti

$$TM^{\perp} = RadTM \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.5.2}$$

ortogonal direkt toplam olacak şekilde yazılabilir. Burada $S(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ vektör demetlerine, sırasıyla, M altmanifoldunun ekran distribüsyonu ve transversal ekran distribüsyonu denir. Buradan $S(TM)$ demeti, $T\bar{M}_{|M}$ demetinin non-dejenere alt vektör demeti olduğundan $T\bar{M}_{|M}$ demeti

$$T\bar{M}_{|M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{1.5.3}$$

ortogonal tamamlayan olacak şekilde yazılabilir, burada $S(TM)^{\perp}$ demeti, $T\bar{M}_{|M}$' de $S(TM)$ demetine ortogonal tamamlayan vektör demetidir. Ayrıca $S(TM^{\perp})$ demeti, $S(TM)^{\perp}$' in altvektör demeti ve her ikiside non-dejenere olduğundan

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp} \tag{1.5.4}$$

ortogonal direkt ayrışımı elde edilir.

Bundan sonra bir lightlike altmanifoldu $\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$ ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılacak indisler

$$i, j, k \in \{1, ..., r\}, a, b, c \in \{r+1, ..., m\}, \alpha, \beta \in \{r+1, ..., n\}$$

şeklindedir.

Lemma 1.5.1. *$\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ semi-Riemann manifoldunun r- lightlike altmanifoldu $\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$ olsun. Bu altmanifoldun bir koordinat komşuluğu U ve $\{\xi_i\}$' de $\Gamma\left(RadTM_{|U}\right)$ uzayının bir tabanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $S(TM^{\perp})^{\perp}_{|U}$ alt vektör demetinin,*

$$g\left(N_i, \xi_j\right) = \delta_{ij} \tag{1.5.5}$$

ve

$$g\left(N_i, N_j\right) = 0 \tag{1.5.6}$$

olacak şekilde $\{N_1, ..., N_r\}$ diferensiyellenebilir vektör alanları vardır.

Lightlike altmanifoldlar teorisi ve Riemann ya da semi-Riemann altmanifoldlar teorisi arasındaki temel fark, lightlike durumunda $TM^{\perp}$ demetinin bir kısmı alt manifoldun teğet kısmında kalırken, Riemann ya da semi-Riemann durumunda TM ile $TM^{\perp}$ vektör demetlerinin arakesiti sıfırdır. Böylece lightlike durum için temel problem, TM demetine teğet olmayan alt vektör demetlerinin var olup olmadığıdır. Duggal-Bejancu,[3] daki makalelerinde böyle bir demetin varlığını gösterdiler. Bu teoremi ispatsız olarak sunuyoruz:

Teorem 1.5.2. *$\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$, $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ semi-Riemann manifoldunun r- lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $i \in \{1, ...r\}$ için $\{N_1, ..., N_r\}$ tabanı olan $S(TM^{\perp})^{\perp}$ demetinde $RadTM$' ye komplemant olan bir vektör demeti vardır.*

Bu vektör demeti ile altmanifoldun tanjant demetinin arakesiti sıfırdır. Bu vektör demetine $\left(S(TM), S(TM^{\perp})\right)$ çiftine göre M' nin lightlike transversal vektör demeti denir ve $ltr(TM)$ ile gösterilir.

Şimdi

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.5.7}$$

vektör demetini göz önüne alalım. $ltr(TM)$, M manifoldunun keyfi bir lightlike transversal vektör demetidir. Burada $tr(TM)$ demetinin rankı n ve TM demeti ile arakesiti sıfırdır. Böylece $tr(TM)$, $T\bar{M}_{|M}$' de TM demetine komplemant ancak ortogonal olmayan bir vektör demetidir. $tr(TM)$ vektör demetine M manifoldunun transversal vektör demeti denir. (1.5.1) ve (1.5.3) denklemlerinden

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus tr(TM) \\ T\bar{M} &= RadTM \perp S(TM) \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \\ T\bar{M} &= S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp (RadTM \oplus ltr(TM)) \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

elde edilir. Buradan, M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $i \in \{1, ..., r\}$, $a \in \{r+1, ..., m\}$ ve $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ olmak üzere

$$\{\xi_i, N_i, X_\alpha, W_\alpha\} \tag{1.5.9}$$

dir. $\{\xi_i\}$ ve $\{N_i\}$ sırasıyla $\Gamma\left(RadTM\;|_U\right)$ ve $\Gamma\left(ltr(TM_{|U}\right)$ vektör demetlerinin tabanlarıdır. $\forall i \in \{1, ..., r\}$ için $span\{\xi_i, N_i\}$, U' nun herhangi noktasında hiperbolik bir düzlem olduğundan dolayı $RadTM \oplus ltr(TM)$ non-dejeneredir ve M manifoldu üzerinde sabit r indekslidir[2].

Durum 1.5.2. $(1 < r = n < m)$. *Bu durumda* $RadTM = TM^{\perp}$, *yani* $S(TM^{\perp}) = 0$ *dır. Böylece normal demet lightlike altmanifold üzerinde bir distribüsyon olur. Bu durumdaki altmanifolda co-izotropik altmanifold denir ve*

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{1.5.10}$$

olacak şekilde ortogonal direkt toplam şeklinde yazılabilir. Bu durumda (1.5.3) denklemi

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus ltr(TM) \\ T\bar{M} &= S(TM) \perp \left(TM^{\perp} \oplus ltr(TM)\right) \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

olur, burada $ltr(TM)$, $S(TM)$ *demetine göre* M *manifoldunun lightlike transversal vektör demetidir. Ayrıca,* M *boyunca* $\bar{M}$ *manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatı*

$$\{\xi_1, ..., \xi_n, N_1, ..., N_n, X_{n+1}, ...X_m\} \tag{1.5.12}$$

dir. Burada $\{X_{n+1}, ...X_m\}$ *kümesi* $\Gamma\left(S(TM)_{|U}\right)$ *' nun ortonormal bir tabanıdır[2].*

Durum 1.5.3. $(1 < r = m < n)$. *Bu durumda* $RadTM = TM$, *yani* $S(TM) = \{0\}$ *dır. Böylece* M *manifoldunun tanjant demeti* TM, $TM^{\perp}$ *demetinin altvektör demeti olur. Bu yapıdaki* M *manifolduna,* $\bar{M}$ *manifoldunun izotropik bir altmanifoldu denir ve*

$$TM^{\perp} = TM \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.5.13}$$

dır. Bu durumda (1.5.3) denklemi

$$T\bar{M} = TM \oplus tr(TM) \tag{1.5.14}$$

olur. (1.5.14) denkleminde (1.5.3) denklemi kullanılırsa

$$T\bar{M} = TM \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.5.15}$$

ayrışımı elde edilir. Ayrıca, M *boyunca* $\bar{M}$ *manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatı*

$$\{\xi_1, ..., \xi_n, N_1, ..., N_n, W_{m+1}, ...W_n\} \tag{1.5.16}$$

dir. Burada $\{W_{m+1}, ...W_n\}$ *kümesi* $\Gamma\left(S(TM^{\perp})_{|U}\right)$ *' nun ortonormal bir tabanıdır[2].*

Durum 1.5.4. $(1 < r = m = n)$. *Bu durumda* $RadTM = TM = TM^{\perp}$, *yani* $S(TM) = \{0\}$ *ve* $S(TM^{\perp}) = \{0\}$ *dır. Buradan da görüleceği gibi ne bir ekran distribüsyonu ne de transversal ekran distribüsyonu vardır. Bu yapıdaki bir* M *manifolduna,* $\bar{M}$ *manifoldunun tamamen lightlike alt manifoldu denir ve*

$$T\bar{M} = TM \oplus ltr(TM) \tag{1.5.17}$$

direkt ayrışımı elde edilir. Ayrıca, M *boyunca* $\bar{M}$ *manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatısı*

$$\{\xi_1, ..., \xi_n, N_1, ..., N_n\} \tag{1.5.18}$$

ile verilir[2].

$\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$, $(m+n)-$boyutlu $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ semi-Riemann manifoldunun m- boyutlu lightlike altmanifoldu olsun. $tr(TM)$, $\left(S(TM), S(TM^{\perp})\right)$ çiftine göre M manifoldunun transversal vektör demeti ve $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ manifoldu üzerinde Levi-civita konneksiyon olduğunu kabul edelim. TM ve $tr(TM)$, $T\bar{M}_{|M}$ demetinin tamamlayan alt vektör demetleri olduğundan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{1.5.19}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V \tag{1.5.20}$$

olur. Burada $\{\nabla_X Y, A_V X\}$ ve $\{h(X, Y), \nabla^t_X V\}$ sırasıyla $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(tr(TM))$ uzaylarına aittir. ∇ ve ∇^t sırasıyla M manifoldu ve $tr(TM)$ demetinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca ∇ torsiyonsuz lineer konneksiyon ve h, $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ uzayı üzerinde $\Gamma(tr(TM))$ değerli simetrik bilineer formdur. Buradan h' ya $tr(TM)$ demetine göre M manifoldunun ikinci temel formu denir. A' da $\Gamma(tr(TM)) \times \Gamma(TM)$ uzayı üzerinde tanımlanmış $\Gamma(TM)$ değerli bilineer formdur. A' ya da V' ye göre M manifoldunun şekil operatörü denir. ∇ ve ∇^t' ye sırasıyla M manifoldu üzerinde indirgenmiş lineer konneksiyon ve transversal lineer konneksiyon denir[2].

Şimdi

$$T\bar{M}\,|_M = TM \oplus tr(TM)$$

ayrışımını kullanarak TM' nin $S(TM)$ üzerine projeksiyonu P ile tanımlanırsa,

$$\tau(X) = g(X, N)$$

ile verilen τ, M üzerinde lokal diferensiyel 1-form olduğunda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = PX + \tau(X)\xi$$

bulunur. Buradan Gauss ve Weingarten denklemlerini yazacak olursak, B simetrik bilineer form ve τ da 1-form olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) N \tag{1.5.21}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X) N \tag{1.5.22}$$

elde edilir. Burada indirgenmiş konneksiyon ∇ her zaman levi-civita konneksiyon değildir.

Önerme 1.5.1. *İndirgenmiş konneksiyon* ∇*' nın levi-civita konneksiyon olması için gerek ve yeter şart* $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *için* $B(X,Y) = 0$ *olmasıdır.*

(1.5.1) ayrışımında P, TM' den $S(TM)$' ye projeksiyon olsun. ∇ levi-civita konneksiyon iken $S(TM)$'nin konneksiyonu ∇^*, h^*, $RadTM$' nin ikinci temel formu, A^*, $S(TM)$' nin şekil operatörü olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in RadTM$ için

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h^*(X, PY) \\ \nabla_X \xi &= -A^*_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

$$C(X, PY) = \bar{g}(h^*(X, PY), N)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \bar{g}\left(\nabla^\perp_X \xi, N\right) = -\tau(X)$$

ile C ve ε fonksiyonları tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + C(X, PY)\,\xi && (1.5.23) \\ \nabla_X \xi &= -A^*_\xi X - \tau(X)\,\xi && (1.5.24) \end{aligned}$$

elde edilir. (1.5.23) ve (1.5.24) sırasıyla $S(TM)$' nın Gauss ve Weingarten formülleridir.

$$B(X,Y) = \bar{g}\left(Y, A^*_\xi X\right) \qquad (1.5.25)$$

ifadesi M' nin ikinci temel formu ile $S(TM)$' nin şekil operatörü arasındaki ilişkidir. Buradan

$$B(\xi, Y) = 0 \Rightarrow A^*_\xi \xi = 0 \qquad (1.5.26)$$

olur.

$$C(X, PY) = \bar{g}(PY, A_N X) \qquad (1.5.27)$$

ifadesi $S(TM)$' nin ikinci temel formu ile M' nin şekil operatörü arasındaki ilişkidir.

Önerme 1.5.2. M, $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda şu özellikler vardır.*

1-) M*' nin* A_N *şekil operatörü* 0 *öz-değerine sahiptir.*

2-) $S(TM)$*' nin ikinci temel formu dejeneredir.*

3-) ∇^* *konneksiyonu* $S(TM)$ *üzerinde levi-civita.*

4-) $S(TM)$*' nin* A^*_ξ *şekil operatörü* M*' nin ikinci temel formuna göre simetriktir[41].*

Önerme 1.5.3. M, $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1-) $S(TM)$ *integrallenebilir.*

2-) $h^*(X,Y) = h^*(Y,X)$ *dir.*

3-) $g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$ $X,Y \in \Gamma(S(TM))$ *ve* $N \in \Gamma(tr(TM))$ *[41].*

Tanım 1.5.4. M, $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer* $\forall p \in M$ *noktasında* $X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$B(X,Y) = \varrho g(X,Y)$$

olacak şekilde bir ϱ *diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa* M*' ye tamamen umbilik hiperyüzey denir. Yani*

$$A^*_\xi X = \varrho X$$

bulunur [41].

Tanım 1.5.5. M *lightlike hiperyüzeyindeki bir geodezik,* M*' nin immersed olduğu* $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldunda da geodezik ise* M*' ye tamamen geodezik lightlike hiperyüzey denir [41].*

Önerme 1.5.4. *Üç boyutlu* $\bar{M}$ *lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ya tamamen umbiliktir ya da tamamen geodeziktir [41].*

Tanım 1.5.6. M, $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun.* $\Gamma(TM)$*' de bir* D *distribüsyonu ve* L *(lie türev) fonksiyonu verilsin.* $\forall X,Y,Z \in \Gamma(D)$ *için*

$$(L_X g)(Y,Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) = 0$$

yani

$$Xg(Y,Z) = g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z)$$

oluyorsa X *vektör alanına killing vektör alanı denir. Eğer* D*' nin her* X *vektör alanı killing vektör alanı ise* D *distribüsyonuna killing distribüsyon denir[41].*

Teorem 1.5.3. *M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1-) M tamamen geodeziktir.

2-) $h = 0$ dır.

3-) A_ξ^*, M üzerinde sıfırdır.

4-) M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ∇ levi-civita konneksiyondur.

5-) $RadTM$ paraleldir.

6-) $RadTM$ killing distribüsyondur [41].

Teorem 1.5.4. *M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1-) $S(TM)$ paraleldir.

2-) $C\left(X, PY\right) = 0$, $\forall X, Y \in \Gamma\left(S(TM)\right)$

3-) $A_N = 0$[41].

Tanım 1.5.7. *M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M üzerinde tanımlı bir φ diferensiyellenebilir fonksiyonu var öyleki*

$$A_N = \varphi A_\xi^* \tag{1.5.28}$$

ise M' ye ekran konform lightlike hiperyüzey denir. Buradan $\forall X, Y \in \Gamma\left(S(TM)\right)$ için

$$B\left(X, Y\right) = \varphi C\left(X, Y\right)$$

dir. Ayrıca

$$C\left(X, \xi\right) = 0 \tag{1.5.29}$$

elde edilir [41].

Teorem 1.5.5. *M Lorentz manifoldu, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M' nin ekran konform lightlike hiperyüzey olması için gerek ve şart M' nin ekran distribusyonunun değişimli şekil operatörüne sahip olması ve pozitif fonksiyon farkıyla özdeğerlerinin eşit olmasıdır [41].*

Önerme 1.5.5. *M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki $S(TM)$ integrallenebilir ve $S(TM)$' nin herhangi bir integral manifol-*

du, ortalama eğrilik vektör alanı spacelike olacak şekilde tamamen umbilik olsun. Bu şartlar altında eğer ekran distribüsyon radikal distribüsyonun integral eğrileri boyunca paralel ise M ekran konformaldir[41].

1.6 Half Lightlike Altmanifoldlar

2-ekboyutlu lightlike altmanifold M' nin iki durumu vardır. $RadTM$ radikal distribüsyonun boyutu ya birdir ya da ikidir. Eğer $boyRadTM = 1$ ise 2- ekboyutlu lightlike altmanifold half-lightlike altmanifold diye isimlendirilir [41].

$(\bar{M}, \bar{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+2)$-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve (M, g) $\bar{M}$' nin 2-ekboyutlu bir lightlike alt manifoldu olsun. g dejenere olduğundan $\xi \neq 0$, $\xi \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır öyleki $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $g(\xi, X) = 0$ dır. O zaman $T_X M$ tanjant uzayı için

$$T_x M^{\perp} = \left\{ u \in T_x \bar{M} \mid \bar{g}(u, v) = 0, \forall v \in T_x M \right\}$$

olacak şekilde $T_x \bar{M}$' nin 2-boyutlu dejenere alt uzayını düşünebiliriz. M lightlike olduğundan $T_x M$ ve $T_x M^{\perp}$' in ikisi de dejenere ortogonal altuzaylardır, fakat birbirinin tamamlayanı değillerdir. Bu durumda $RadT_x M$' nin boyutu,

$$RadT_x M = T_x M \cap T_x M^{\perp}$$

$x \in M$ noktasına bağlıdır. $RadTM$ ile M' nin TM tanjant demetinin bir radikal distribüsyonu ifade edilir. $RadT_x M$ radikal altuzayı $T_x M$' nin 1 ya da 2-boyutlu bir altuzayıdır. TM' de $RadTM$' ye tamamlayan non-dejenere bir $S(TM)$ distribüsyonu vardır. Bu distribüsyona M' nin ekran distribüsyonu denir. Ortogonal distribüsyonla

$$TM = RadTM \oplus_{orth} S(TM)$$

dır. Eğer $boyRadTM = 1$ ise $(M, g, S(TM))$ altmanifoldu half-lightlike altmanifold diye isimlendirilir. $(TM)^{\perp}$ de half-lightliketır. Diğer taraftan eğer $boyRadTM = 2$

ise $RadTM = TM^{\perp}$ dir ve $(M, g, S(TM))$ co-izotropik altmanifold diye isimlendirilir. Bu tezde

$$\bar{g}(\xi, v) = 0, \bar{g}(u, u) \neq 0, \forall v \in T_xM^{\perp}, \xi, u \in T_xM^{\perp}$$

olan half-lightlike altmanifoldlar üzerine sonuçlar verilecektir.

Yukarıdaki ilişki $\xi \in T_xM$ olduğundan $\xi \in RadT_xM$ olduğunu ima eder. Bununla beraber M üzerinde lokal olarak bir ξ lightlike vektör alanı vardır. Öyleki

$$\bar{g}(\xi, X) = \bar{g}(\xi, u) = 0, \forall X \in \Gamma(TM), u \in \Gamma(TM^{\perp})$$

dir. Böylece half-lightlike altmanifold M' nin 1-boyutlu $RadTM$' si lokal olarak ξ ile gerilir. Bu durumda TM' de $RadTM$' yi tamamlayan $S(TM)$ distribüsyonu vardır. $T\bar{M}$ de $S(TM)$' ye ortogonal tamamlayan $S(TM)^{\perp}$' i gözönünde bulunduralım. Kesinlikle $\xi, u \in \Gamma\left(S(TM)^{\perp}\right)$ dir. Böylece $\epsilon = \pm 1$ olduğundan $\bar{g}(u, u) = \epsilon$ olacak şekilde bir birim vektör alanı seçebiliriz. Buradan $RadTM$, $TM^{\perp}$' in bir boyutlu altvektör demeti olur. $RadTM$' yi tamamlayan ve u ile oluşturulan bir D distribüsyonu düşünelim. D' yi M' nin ekran transversal demeti olarak isimlendiririz. Böylece $S(TM)^{\perp}$ de D' ye ortogonal komplemant distribüsyon $D^{\perp}$ olduğu yerde

$$S(TM)^{\perp} = D \perp D^{\perp}$$

ortogonal parçalanmasına sahip oluruz. $D^{\perp}$' in non-dejenere olduğu ve $\xi \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğunun hesaba katılmasıyla

$$\bar{g}(N, \xi) \neq 0, \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, u) = 0$$

şartını sağlayan bir tek $N \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vardır gerek ve yeter şart $\bar{g}(\xi, v) \neq 0$ olduğu yerde

$$N = \frac{1}{\bar{g}(v, \xi)}\left\{v - \frac{\bar{g}(v, v)}{2\bar{g}(v, \xi)}\xi\right\}, v \in \Gamma\left(F_{|U}\right)$$

ile verilir. Burada F, $D^{\perp}$ de $RadTM$' nin tamamlayanıdır. Böylece N lightlike vektör alanı ne M' ye tanjanttır ne de $\bar{g}(\xi, u) = 0$ olduğundan u ile co-lineerdir. Eğer biz bir diğer koordinat komşuluğu üzerinde $\xi^* = \alpha\xi$ seçersek o zaman $N^* = \frac{1}{\alpha}N$

bulunur. Buradan M üzerinde

$$tr(TM) = D \oplus_{orth} ltrTM$$

olacak şekilde $tr(TM)$ vektör demetini tanımlayabiliriz. Burada $ltr(TM)$, N ile lokal olarak oluşturulan 1- boyutlu vektör demetidir. Buna $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre M' nin lightlike transversal vektör demeti denir[41]. Bununla beraber

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= S(TM) \perp (RadTM \oplus tr\,(TM)) \\ &= S(TM) \perp D \perp (RadTM \oplus ltr\,(TM)) \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

dır. Yukarıdaki ayrışımla $\{F_1, ..., F_{m-1}\}$, $\Gamma\,(S(TM))$' nin bir ortonormal bazı olduğu yerde M ve $\bar{M}$' ye göre sırasıyla $\{\xi, F_1, ..., F_{m-1}\}$ ve $\{\xi, F_1, ..., F_{m-1}, u, N\}$ vektör alanlarının çatısını seçebiliriz. Yukarıdaki ayrışıma göre TM' nin $S(TM)$ üzerine projeksiyonu P ile tanımlanırsa,

$$\tau\,(X) = g\,(X, N)$$

ile verilen τ, M üzerinde lokal diferensiyel 1-form olduğunda $\forall X \in \Gamma\,(TM)$ için

$$X = PX + \tau\,(X)\,\xi$$

bulunur. $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde metrik konneksiyon olsun. (1.6.1) ayrışımını kullanarak $h\,(X, Y), \nabla_X N, \nabla_X u \in \Gamma\,(tr(TM))$ ve $\nabla_X Y, A_N X, A_u X \in \Gamma\,(TM)$ iken $\forall X, Y \in \Gamma\,(TM)$ ve $N, u \in \Gamma\,(tr(TM))$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{1.6.2}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X N \tag{1.6.3}$$

$$\bar{\nabla}_X u = -A_u X + \nabla_X u \tag{1.6.4}$$

elde edilir. Burada ∇, M üzerinde torsiyonsuz lineer konneksiyondur. h, $\Gamma\,(TM)$ üzerinden $\Gamma\,(tr(TM))$' ye bilineer formdur. Böylece $\{\xi, N\}$, $U \subset M$ üzerinde lokal lightlike kesit olduğundan $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
D_1(X,Y) &= \bar{g}(h(X,Y),\xi),\\
D_2(X,Y) &= \epsilon\bar{g}(h(X,Y),u),\\
\rho_1(X) &= \bar{g}(\nabla_X N,\xi),\\
\rho_2(X) &= \epsilon\bar{g}(\nabla_X N,u)\\
\varepsilon_1(X) &= \bar{g}(\nabla_X u,\xi),\\
\varepsilon_2(X) &= \epsilon\bar{g}(\nabla_X u,u)
\end{aligned}$$

ile U üzerinde ρ_1, ρ_2, ε_1, ε_2 1-formları ve D_1, D_2 simetrik $F(M)$ bilineer formları tanımlanabilir ki

$$h(X,Y) = D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u \tag{1.6.5}$$

$$\nabla_X N = \rho_1(X)N + \rho_2(X)u \tag{1.6.6}$$

$$\nabla_X u = \varepsilon_1(x)N + \varepsilon_2(X)u \tag{1.6.7}$$

dir. Böylece U üzerinde (1.6.2), (1.6.3), (1.6.4) denklemleri

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u \tag{1.6.8}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u \tag{1.6.9}$$

$$\bar{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(x)N + \varepsilon_2(X)u \tag{1.6.10}$$

olur. h, D_1, D_2 sırasıyla $tr(TM)$' ye göre M' nin ikinci temel formu, lightlike ikinci temel formu ve ekran ikinci temel formu denir. A_N ve A_u, $\Gamma(TM)$ üzerinde lineer operatörlerdir. A_N, $\Gamma(S(TM))$ değerli olup M' nin şekil operatörü olarak adlandırılır. (1.6.10) ifadesinde $\varepsilon_2(X)=0$ sağlanır. (1.6.8) ve (1.6.10) ifadelerinden

$$D_1(X,\xi) = 0 \tag{1.6.11}$$

$$\bar{g}(A_N X,N) = 0 \tag{1.6.12}$$

$$\bar{g}(A_u X,Y) = D_2(X,Y)\epsilon + \varepsilon_1(x)\tau(Y) \tag{1.6.13}$$

$$\rho_1(X) = -\bar{g}(\nabla_X\xi,N) \tag{1.6.14}$$

$$\rho_2(X) = \epsilon\bar{g}(A_u X,N) = \epsilon\tau(A_u X) \tag{1.6.15}$$

$$\varepsilon_1(x) = -\epsilon D_2(X,\xi) \tag{1.6.16}$$

denklemleri elde edilir.

Şimdi (1.6.1) ayrışımını ve $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\nabla^*_X PY$, $A^*_\xi \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X, PY)$, $\nabla^\perp_X \xi \in \Gamma(RadTM)$ olduğu yerde

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h^*(X, PY) \\ \nabla_X \xi &= -A^*_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \end{aligned}$$

ifadelerini gözönünde bulunduralım. ∇^* ve $\nabla^\perp$ sırasıyla ekran ve radikal distribüsyonların lineer konneksiyonları olsunlar. A^*_ξ da $\Gamma(TM)$ üzerinde lineer operatör h^* da $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ üzerinde bilineer form ve ∇^*, $S(TM)$ üzerinde metrik konneksiyonlar olsunlar. Lokal olarak U üzerinde $U \subset M$ için

$$\begin{aligned} E_1(X, PY) &= \bar{g}(h^*(X, PY), N), \forall X, Y \in \Gamma(TM) \\ u_1(X) &= \bar{g}\left(\nabla^\perp_X \xi, N\right), \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

tanımlıyalım. Buradan anlaşılır ki, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} h^*(X, PY) &= E_1(X, PY)\xi, \\ \nabla^\perp_X \xi &= u_1(X)\xi, \end{aligned}$$

dır. Böylece U üzerinde lokal olarak

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + E_1(X, PY)\xi \qquad (1.6.17)$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + u_1(X)\xi \qquad (1.6.18)$$

elde edilir. h^* ve E_1' e, $RadTM$' ye göre $S(TM)$' nin sırasıyla ikinci temel formu ve lokal ikinci temel formu denir ve A^*_ξ' da ekran distribüsyonun şekil operatörü olarak isimlendirilir. Buradan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} E_1(X, PY) &= g(A_N X, PY) \\ D_1(X, PY) &= g\left(A^*_\xi X, PY\right) \\ u_1(X) &= -\rho_1(X) \end{aligned}$$

bulunur[41].

Teorem 1.6.1. *M, $\bar{M}$' nin half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.*

1-) $S(TM)$ ekran distribüsyonu integrallenebilirdir.

2-) $S(TM)$' nin ikinci temel formu $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir.

3-) $\bar{M}$' nin M immersiyonunun A_N şekil operatörü $\Gamma(S(TM))$ üzerinde $\bar{g}$' e göre simetriktir [41].

Teorem 1.6.2. *M, $\bar{M}$' nin half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.*

1-) M üzerindeki ∇ konneksiyonu metrik konneksiyondur.

2-) M üzerinde $D_1 = 0$ dır.

3-) M üzerinde $A^*_\xi = 0$ dır.

4-) $RadTM$ bir killing ditribüsyondur.

5-) $TM^\perp$, ∇' ya göre paralel distribüsyondur[41].

Tanım 1.6.1. *Bir $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ semi-Riemann manifoldunun bir (M, g) altmanifoldu için, M üzerinde $Z \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$ normal vektör alanı var öyleki $\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ olduğunda*

$$h(X, Y) = Z\bar{g}\left(X, Y\right)$$

ise bu altmanifolda tamamen umbiliktir denir. Özel olarak (M, g), $\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$h(X, Y) = 0$$

ise tamamen geodeziktir. Bu taktirde M üzerindeki sırasıyla lightlike ve ekran ikinci temel tensörler D_1 ve $D_2, \forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$D_1\left(X, Y\right) = D_2(X, Y) = 0$$

olur. (1.6.11)-(1.6.16) ifadelerinden

$$\varepsilon_1 = A^*_\xi = A_u = \rho_2 = 0$$

bulunur. (1.6.5)' in kullanılmasıyla U koordinat komşuluğuda sırasıyla $ltr(TM)$ ve D üzerinde H_1 ve H_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ olmak *üzere*

$$\begin{aligned} D_1(X,Y) &= H_1\bar{g}(X,Y) \\ D_2(X,Y) &= H_2\bar{g}(X,Y) \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcut ise M' ye tamamen umbiliktir denir. Bu tanım M' nin ekran distribüsyonuna bağlı değildir[41].

Teorem 1.6.3. *(M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M tamamen umbiliktir gerek ve yeter şart her U üzerinde H_1 ve H_2 var öyle ki*

$$\begin{aligned} A^*_\xi X &= H_1 PX, \\ P(A_u X) &= \epsilon H_2 PX, \\ \varepsilon_1(X) &= 0, \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

[41].

Uyarı 1.6.1. *M' nin tamamen umbilik olması durumunda*

$$\begin{aligned} D_2(X,\xi) &= 0, \\ \rho_2(\xi) &= 0, \\ A_u\xi &= 0, \\ \epsilon A_u X &= H_2 PX + \rho_2(X)\xi, \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

dir [41].

Tanım 1.6.2. *M, $\bar{M}$ semi-Riemann manifoldun half-lightlike altmanifoldu olsun. M' nin üzerindeki her U koordinat komşuluğunda tanımlı sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir φ fonksiyonu var öyleki her null $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ vektör alanı için M ve $S(TM)$' nin şekil operatörleri arasında $\forall X \in \Gamma(TM_{|U})$ için*

$$A_N X = \varphi A^*_\xi X$$

ilişkisi varsa M lokal ekran konformaldir denir[41].

Önerme 1.6.1. (M,g), $\bar{M}$ *semi-Riemann manifoldun half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M' nin ekran konformal olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için*

$$E_1(X,PY)=\varphi D_1(X,PY)$$

olmasıdır [41].

Tanım 1.6.3. $(M,g,S(TM))$, $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $tr_{|S(TM)}h=0$ ve $\varepsilon_1(\xi)=0$ ise M' ye minimal half-lightlike altmanifold denir[41].*

Teorem 1.6.4. $(M,g,S(TM))$, $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. $S(TM)$' nin bir lifi M' için*

1-) M tamamen geodeziktir.

2-) M tamamen umbiliktir.

3-) M minimaldir [41].

Tanım 1.6.4. $(M,g,S(TM))$, $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. $\xi\in\Gamma(RadTM)$ olduğu yerde $\forall X\in\Gamma(TM)$ için $D_2(X,\xi)=0=\varepsilon_1(X)$ ise M' ye irrotational dir denir [41].*

Sonuç 1.6.1. $(M,g,S(TM))$, $(\bar{M},\bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun irrotational ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman*

1-) M tamamen geodeziktir.

2-) M tamamen umbiliktir.

3-) M minimaldir.

ancak ve ancak $S(TM)$' nin her M' lifi $\bar{M}$' nin bir altmanifoldudur [41].

Teorem 1.6.5. M, $\bar{M}$' *nin ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.*

1-) $S(TM)$' nin her lifi M' de total geodeziktir.

2-) M' , $S(TM)$' nin bir lifi olduğu yerde M, L ve M'' nün lightlike çarpım manifoldudur. Burada M' non-dejenere ve L 1-boyutlu altmanifolddur.

3-) M üzerinde $D_1=0$ dır,

4-) M üzerindeki ∇ konneksiyonu metrik konneksiyondur [41].

Teorem 1.6.6. *M, $\bar{M}$' nin ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M tamamen umbiliktir ancak ve ancak*

$$\begin{aligned} P\left(A_u X\right) &= H_2 P X \\ \varepsilon_1\left(X\right) &= 0, \forall X \in \Gamma\left(TM\right) \end{aligned}$$

ve $S(TM)$' nin her M' lifide M de tamamen umbiliktir [41].

Teorem 1.6.7. *M, $\bar{M}$' nin ekran konformal tamamen umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun.*

1-) M', M de tamamen umbiliktir.

2-) M tamamen geodeziktir gerek ve yeter şart M', $\bar{M}$ de total geodeziktir [41].

BÖLÜM 2

Riemann ve Semi-Riemann Manifoldlarda Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldlar

Bu bölümde üçüncü ve dördüncü bölümlerde yaptığımız çalışmaların Riemann ve semi-Riemannda yapılmış olanlarını inceliyeceğiz. Pointwise düzlemsel normal kesitli alt manifoldlar ilk kez 1976' da J.A. Little tarafından çalışılmıştır. Özellikle Chen [24] te E^m' nin bir altmanifoldunun pointwise 2-düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şartı elde etmiştir. B.Y. Chen , Y. H. Kim, Shi-Jie Li v.s gibi matematikçiler takip eden yıllarda normal kesitleri kullanarak, bir hiperyüzeyin düzlemsel normal kesitlere sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşullarla birlikte hiperyüzeyleri sınıflandırdılar. [23]' te Shi-Jie Li kürenin ikinci standart immersiyonu yardımıyla kürede pointwise 2- veya 3- düzlemsel normal kesitli altmanifoldları inceledi. [39]' te Young Ho Kim geodezik normal kesitli pseudo-Öklidyen uzayın minimal yüzeylerini inceledi. 5-boyutlu geodezik normal kesitli pseudo-Öklidyen uzayın minimal yüzeylerinin ya tamamen geodezik ya da düz quadratik olduğunu gösterdi.

2.1 Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldlar

E^m' nin $n-$ boyutlu altmanifoldu M ve M' nin herhangi bir p noktasındaki sıfırdan farklı tanjant vektörü t olsun.

$$T_p^{\perp}M \cup \{t\} = E\left(p,t\right)$$

$m-n+1$-boyutlu altuzayını tanımlıyalım. Buradan

$$E\left(p,t\right) \cap M = \gamma$$

olup, γ, $p \in M$ noktasında M' nin normal kesit eğrisi olarak isimlendirilir. Genel olarak p noktasında γ eğrisi için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \neq 0$$

ifadesi geçerlidir. Burada $''\wedge''$ cross çarpımı göstermektedir. Eğer p noktası için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

ise M altmanifolduna pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir. Yani her normal kesit için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

dir. Genel olarak γ, $E(p,t)$' de bükümlü bir uzay eğrisidir. Burada E^m' nin bir altmanifoldunun düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmişti. Bu gerek ve yeter şartlar kullanılarak ikinci temel formu paralel olan altmanifoldlar için gerekli açıklamalar yapılmıştı, düzlemsel geodezik altmanifoldlar ve düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar arasında ilişkiler kurulmuştu [24].

Teorem 2.1.1. *M, E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir altmanifoldu olsun. M' nin düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart h ve $\bar{\nabla} h$ için M' de teğet herhangi bir t tanjant vektörü verildiğinde*

$$\left(\bar{\nabla}_t h\right)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$$

ifadesinin sağlanmasıdır [24].

Bu teoreme dayanarak ikinci temel formu paralel olan altmanifoldlar için geometrik açıklamalar yapalıdı.

Teorem 2.1.2. *M, E^m' nin $n \geq 2$ boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1- İkinci temel form h için $\left(\bar{\nabla}_t h\right)(t,t) = 0$ sağlanır.

2- İkinci temel form h paraleldir.

3- $p \in M$ noktasında M' nin normal kesiti p' de bir köşe noktasına sahip düzlemsel bir eğridir [24].

γ' nın $p = \gamma(0)$' da bir köşe noktasına sahip olması için γ' nın eğriliği

$$\kappa^2 = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle$$

olmak üzere $\frac{d\kappa^2(p)}{ds} = 0$ olmalıdır [24].

Teorem 2.1.3. *M, E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir altmanifoldu olsun. M düzlemsel geodeziklere sahiptir ancak ve ancak M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahipse, yani onlar aynı yarıçapılı çemberlerdir ya da düz çizgilerin bir parçasıdır [24].*

Teorem 2.1.4. *E^m nin içinde düzlemsel normal kesitli bir yüzey M olsun. Eğer M, E^m' nin 3-boyutlu E^3 uzayının içinde kalmazsa, M, E^m' nin 5-boyutlu Veronese yüzeyinin bir açık altkümesidir [24].*

Lemma 2.1.1. *M, E^m' nin düzlemsel normal kesitlere sahip bir yüzeyi olsun. Eğer p' deki her normal kesit γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay değil ise bu durumda $t = \gamma(0)$ olmak üzere*

$$h\left(t^{\perp}, t\right) \wedge h(t, t) = 0$$

dır [24].

Lemma 2.1.2. *M, E^m' nin düzlemsel normal kesitlere sahip bir yüzeyi olsun. Eğer p' deki her normal kesit γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay ise bu durumda $t = \gamma(0)$ olmak üzere*

$$\left\langle h\left(t^{\perp}, t\right), h(t, t) \right\rangle = 0$$

dır [24].

Lemma 2.1.3. *M, E^m' nin düzlemsel normal kesitlere sahip bir yüzeyi olsun. Şayet*

$$boy\,(Imh) \leq 1$$

ise o zaman lokal olarak M, E^m' nin 3-boyutlu E^3 uzayında kalır [24].

2.2 Bir Kürede Pointwise Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldlar

Bu kısımda S^m' nin bir altmanifoldunun S^m' nin ikinci standart immersiyonu yardımıyla 2 veya 3- düzlemsel normal kesitlere sahip olmasının gerek ve yeter şartı araştırıldı[33].

2.2.1 Bir Riemann Manifoldunun Bir Altmanifoldunun Altmanifoldları

K bir Riemann manifoldu, M' de K' nin bir N altmanifoldunun altmanifoldu olsun. M, N ve K üzerinde levi-civita konneksiyonları sırasıyla ∇', ∇'' ve $\bar{\nabla}$ olsun. M' nin N ve K' daki normal konneksiyonları sırasıyla D' ve D, N' nin K' daki normal konneksiyonu da D'' olsun.

X, Y, Z tanjant vektör alanları, $u \in T_p^{\perp}M$, $u \in T_pN$ ve $\zeta \in T_p^{\perp}N$ vektör alanları olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \nabla''_X Y &= \nabla'_X Y + h'(X,Y), && (2.2.1) \\ \bar{\nabla}_X Y &= \nabla'_X Y + h(X,Y), \\ &= \nabla''_X Y + h''(X,Y) && (2.2.2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada h' ve h, M' nin N ve K' daki ikinci temel formları, h''' de N' nin K' daki ikinci temel formudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \nabla''_X u &= -A'_u X + D'_X u, && (2.2.3) \\ \bar{\nabla}_X u &= -A_u X + D_X u = \nabla''_X u + h''(X,u), && (2.2.4) \\ \bar{\nabla}_X \zeta &= -A_\zeta X + D_X \zeta = -A''_\zeta X + D''_X \zeta && (2.2.5) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada A' ve A sırasıyla, M' nin N ve K' daki Weingarten dönüşümüdür. Bu taktirde (2.2.1) ve (2.2.2) den

$$h(X,Y) = h'(X,Y) + h''(X,Y) \quad (2.2.6)$$

elde edilir. (2.2.3) ve (2.2.4)' ten

$$\begin{aligned} A_u &= A'_u, && (2.2.7) \\ D_X u &= D'_X u + h''(X,Y) && (2.2.8) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.5) ifadesinden

$$D_X \zeta - D''_X \zeta = A_\zeta X - A''_\zeta X \qquad (2.2.9)$$

bulunur. h, h' ve h''' nün birinci kovaryant türevleri sırasıyla $\bar{\nabla} h$, $\bar{\nabla} h'$ ve $\bar{\nabla} h''$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) &= D_X h(Y,Z) - h\left(\nabla'_X Y, Z\right) - h(Y, \nabla'_X Z) && (2.2.10) \\ \left(\bar{\nabla}_X h'\right)(Y,Z) &= D'_X h'(Y,Z) - h'\left(\nabla'_X Y, Z\right) - h'(Y, \nabla'_X Z) && (2.2.11) \\ \left(\bar{\nabla}_X h''\right)(Y,Z) &= D''_X h''(Y,Z) - h''\left(\nabla''_X Y, Z\right) - h''(Y, \nabla''_X Z) && (2.2.12) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.Benzer şekilde h, h' ve h''' nün ikinci kovaryant türevleri sırasıyla $\bar{\nabla}\bar{\nabla} h$, $\bar{\nabla}\bar{\nabla} h'$ ve $\bar{\nabla}\bar{\nabla} h''$ tanımlanabilir. (2.2.6) ve (2.2.8) denklemleri (2.2.10)' a uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) &= D'_X h'(Y,Z) + h''(X, h'(Y,Z)) \\ &\quad + D_X h''(Y,Z) - h'\left(\nabla'_X Y, Z\right) \\ &\quad - h''\left(\nabla''_X Y, Z\right) - h'(Y, \nabla'_X Z) \\ &\quad - h''(Y, \nabla''_X Z) && (2.2.13) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.11) ve (2.2.12) kullanılırsa (2.2.13)' den

$$\begin{aligned} \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) &= \left(\bar{\nabla}_X h'\right)(Y,Z) + \begin{bmatrix} D_X h''(Y,Z) \\ -D''_X h''(Y,Z) \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(\bar{\nabla}_X h''\right)(Y,Z) && (2.2.14) \\ &\quad + \begin{bmatrix} h''(X, h'(Y,Z) \\ +h''(Y, h'(Z,X) + h''(Z, h'(X,Y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.2.1. *m-boyutlu E^m öklid uzayının bir $n-$ boyutlu alt manifoldu M olsun. M noktasal 2-düzlemsel normal kesite sahiptir gerek ve yeter şart herhangi bir $x \in T_pM$ tanjant vektörü için E^m' de M' nin ikinci temel formu*

$$\left(\bar{\nabla}_X h\right)(X,X) \wedge h(X,X) = 0 \tag{2.2.15}$$

şartını sağlar [33].

Lemma 2.2.2. *m-boyutlu E^m öklid uzayının bir $n-$ boyutlu alt manifoldu M olsun. M noktasal 3-düzlemsel normal kesite sahiptir ancak ve ancak herhangi bir $x \in T_pM$ tanjant vektörü için E^m' de M' nin ikinci temel formu*

$$\left[\left(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_X h\right)(X,X) + 3h\left(X, A_{h(X,X)}X\right)\right] \wedge \left(\bar{\nabla}_X h\right)(X,X) \wedge h(X,X) = 0 \tag{2.2.16}$$

şartını sağlar [33].

2.2.2 S^m' nin İkinci Standart İmmersiyonu

$$\begin{aligned} SM(m) &= \left\{\wp \in gl(m;R) \mid \wp^t = \wp\right\} \\ g(\wp, Q) &= \frac{1}{2} iz(\wp Q), \wp, Q \in SM(m) \end{aligned}$$

metriği ile belirlenen R üzerinde m matrisli m simetrik uzay olsun.

$$\begin{aligned} f : S^m &\rightarrow SM(m+1) \\ u &\rightarrow f(u) = u^t u \end{aligned}$$

dönüşümünü gözönüne alalım. Bu şekilde tanımlanan f izometrik immersiyonuna S^m' nin ikinci standart immersiyonu denir. $f(S^m)$, $\left[m + \frac{1}{2}m(m+1)\right]$-boyutlu bir reel projektif uzaydır. $f(S^m)$' ye Veronese altmanifoldu denir. f immersiyonu ile belirlenen S^m immersedi $\frac{1}{m+1}I$ merkezli, $\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$ yarıçaplı $SM(m+1)$ hiperküresinin bir minimal altmanifoldudur. Üstelik f' nin ikinci temel formu h'' paralel ve

$$g(h''(X,Y), h''(Z,W)) = 2\langle X,Y\rangle \langle Z,W\rangle + \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle + \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle \tag{2.2.17}$$

şartını sağlar [33].

Tanım 2.2.1. *$\bar{M}$, m-boyutlu bir manifold ve M ' de $\bar{M}$ ' nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. T_pM ' nin bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olmak üzere*

$$H_p = \frac{1}{n} iz\,(h_p) = \sum h\,(e_i, e_i)\,, i = 1, ..., n$$

vektörüne $p \in M$ ' de M ' nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M ' ye minimal altmanifold denir [37].

2.3 Pointwise Düzlemsel Normal Kesitli Semi-Riemann Altmanifoldlar

M_r^n, $(s, m-s)$ işaretli m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının $(r, n-r)$ işaretli n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun [40].

Teorem 2.3.1. *M_r^n, m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. M_r^n pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir ancak ve ancak h ve $\bar{\nabla}h$ için M ' de teğet herhangi bir t tanjant vektörü verildiğinde*

$$\left(\bar{\nabla}_t h\right)(t, t) = \left(\bar{\nabla} h\right)(t, t, t)$$

için

$$\left(\bar{\nabla} h\right)(t, t, t) \wedge h\,(t, t) = 0$$

olmasıdır [40].

Lemma 2.3.1. *M_r^n, $(s, m-s)$ işaretli m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının $(r, n-r)$ işaretli n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer M_r^n, pointwise düzlemsel normal kesitlere sahipse o zaman $t \in T_pM_r^n$ non-dejenere vektörü için γ, t yönünde normal kesit olduğu yerde $T = \gamma'(s)$ için*

$$\nabla_t T = 0$$

elde edilir [40].

Tanım 2.3.1. *$p \in M_r^n$ de normal kesit γ, $\gamma'(p) = t$ için*

$$\gamma'(p) \wedge ... \wedge \gamma^{(k)}(p) \neq 0$$

ve

$$\gamma'(p) \wedge ... \wedge \gamma^{(k+1)}(p) = 0$$

oluyorsa, $\gamma'(p), ..., \gamma^{(k)}(p)$, $E(p,t)$ *nin non-dejenere bir alt uzayını geriyorsa* γ *' ya non-dejeneredir denir [40].*

Önerme 2.3.1. M_r^n, *m-boyutlu* E_s^m *pseudo-Öklidyen uzayının düzlemsel normal kesitlere sahip, n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer her normal kesit* γ *non-dejenere ise* M_r^n *timeliketır ya da spaceliketır [40].*

Tanım 2.3.2.

$$\bigcup_p M_r^n = \left\{ t \in T_pM_r^n \mid \langle t,t \rangle^{\frac{1}{2}} = 1 \right\}$$

olmak üzere $\bigcup_p M_r^n$ *de*

$$L(p,t) = L_p(t) = \langle h(t,t), h(t,t) \rangle$$

şeklinde tanımlanan bir L fonksiyonunu gözönünde bulunduralım. Eğer $L = 0$ *ise* M_r^n, *non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip değildir denir [40].*

Teorem 2.3.2. M_r^n, *m-boyutlu* E_s^m *pseudo-Öklidyen uzayında* $L \neq 0$ *ile timelike ya da spacelike n-boyutlu bir alt manifold olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.*

1- Her $t \in T_pM_r^n$ *için* $\left(\bar{\nabla}_t h\right)(t,t) = 0$

2- $\bar{\nabla} h = 0$

3- M_r^n *non-dejenere pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir ve* $p \in M_r^n$ *de her normal kesit bir köşe noktasına sahiptir [40].*

Teorem 2.3.3. M_r^n, *m-boyutlu* E_s^m *pseudo-Öklidyen uzayının düzlemsel normal kesitlere sahip, n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer* M_r^n *' nin non-dejenere normal kesiti düzlemsel ve aynı sabit eğriliğe sahipse, o zaman birim tanjant demet üzerinde tanımlanan L fonksiyonu sabit ve normal kesit aşağıdakilerden birini sağlar;*

a- $L > 0$*:* $1/\sqrt{L}$ *yarıçaplı* $S^1 \subset E^2$ *çemberinin bir parçasıdır.*

b- $L > 0$*:* $1/\sqrt{L}$ *yarıçaplı* $S_1^1 \subset E_1^2$ *nin bir parçasıdır.*

c- $L < 0$*:* $1/\sqrt{-L}$ *yarıçaplı* $H^1 \subset E_1^2$ *nin bir parçasıdır.*

d- $L<0$*:* $1/\sqrt{-L}$ *yarıçaplı* $H_1^1 \subset E_2^2$ *nin bir parçasıdır*

e- $L=0$ *ise dejenere düzlem* $E_{0,1}^2$ *ya* $E_{1,1}^2$ *de bir eğri ya da düz bir çizginin bir parçasıdır [40].*

Sonuç 2.3.1. *M_r^n, $L \neq 0$ ile E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. Eğer M_r^n' nin her non-dejenere normal kesiti düzlemsel ve aynı κ sabit eğriliğine sahipse, o zaman M_r^n bir paralel altmanifoldtur [40].*

Teorem 2.3.4. *M_r^n, m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının non-dejenere n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. O zaman M_r^n' nin düzlemsel geodeziklere sahip olması için gerek ve yeter şart M_r^n' nin her non-dejenere normal kesiti düzlemsel ve aynı κ sabit eğriliğine sahip olmasıdır[40].*

2.3.1 Pointwise Düzlemsel Normal Kesitli Pseudo-İzotropik Altmanifoldlar

L_p, $p \in M_r^n$ de her birim tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise M_r^n $p \in M_r^n$ de pseudo-izotropiktir. Özellikle eğer L noktadan bağımsızsa M_r^n' ye sabit pseudo-izotropiktir denir [40].

Lemma 2.3.2. *M_r^n pseudo-izotropiktir ancak ve ancak herhangi t , $t^\perp$ ortonormal teğet vektörleri için*

$$\left\langle h\left(t^{\perp},t\right), h\left(t,t\right)\right\rangle = 0$$

dır [40].

Uyarı 2.3.1. *Eğer M_r^n düzlemsel geodeziklere sahipse, M_r^n sabit pseudo-izotropiktir [40].*

Önerme 2.3.2. *M_r^n, E_s^m de n-boyutlu pseudo-izotropik pseudo-Riemann altmanifold olsun. Eğer M_r^n pointwise düzlemsel normal kesitlere sahipse, M_r^n sabit pseudo-izotropiktir [40].*

Teorem 2.3.5. *M_r^n pointwise düzlemsel normal kesitli E_s^m' nin pseudo-izotropik non-dejenere altmanifoldu ise M_r^n düzlemsel geodeziklere sahiptir [40].*

2.4 Geodezik Normal Kesitli Pseudo Öklidyen Uzayının Minimal Yüzeyleri

Tanım 2.4.1. *M_r^n, $(s, m-s)$ işaretli m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının $(r, n-r)$ işaretli n-boyutlu pseudo-Riemann altmanifoldu olsun.*

$$\dot{I} : M_r^n \to E_s^m$$

izometrik immersiyonu M_r^n' nin her geodeziğinin görüntüsünü E_s^m' nin 2-düzlem-inin içine resmediyorsa bu izometrik immersiyona düzlemsel geodezik denir [38].

Tanım 2.4.2. *h, M_r^n' nin ikinci temel formu ve $\langle .,. \rangle$, E_s^m' nin skaler çarpımı olsun.*

$$\langle h(x,x), h(x,x) \rangle$$

$p \in M_r^n$ de birim tanjant vektörü seçiminden bağımsız ise M_r^n' ye $p \in M_r^n$' de pseudo izotropiktir denir. M_r^n, $\forall\ p \in M_r^n$ de pseudo izotropik ise M_r^n' nin pseudo izotropik olduğu söylenir. Yani

$$\|h(x,x)\|$$

her noktada invaryanttır [38].

Tanım 2.4.3. *$E_{s,t}^m$' nin simetrik bilineer formu $\langle .,. \rangle$ metriğine göre, s- tane bileşeni negatif, t-tane bileşeni sıfır ve m-s-t-tane bileşeni pozitif olan E^m' yi gösterir. Eğer t=0 oluyorsa pseudo öklidyen uzay E_s^m' yi elde ederiz [38].*

Tanım 2.4.4. *M_r^n, $E_{s,t}^m$' nin bir altmanifoldu ve M' nin ikinci temel formu h olsun. Eğer $\bar{\nabla} h = 0$ ise ikinci temel form paraleldir denir. İkinci temel formu paralel olan $\dot{I} : M_r^n \to E_{s,t}^m$ izometrisine tamdır denir [38].*

Önerme 2.4.1. *M_r^n, $s-$indeksli E_s^m pseudo öklidyen uzayında indeksi r olan geodezik normal kesitli altmanifoldu ve γ, $\gamma(0) \in M_r^n$ de M_r^n' nin normal kesiti olsun. M_r^n' nin normal kesiti $\gamma'(0)$ doğrultusunda kalır [38].*

Teorem 2.4.1. *E_s^m' nin geodezik normal kesitli altmanifoldları sabit pseudo-izotropiktirler.*

Teorem 2.4.2. *M_r^n, m-boyutlu E_s^m pseudo-Öklidyen uzayının non-dejenere n-boyutlu geodezik normal kesitli pseudo-Riemann altmanifoldu olsun. M_r^n üzerinde*

$$\left\langle \left(\bar{\nabla}h\right)\left(t^3\right), \left(\bar{\nabla}h\right)\left(t^3\right)\right\rangle$$

M_r^n' nin $\bigcup M$ birim tanjant demetinde sabittir[38].

2.4.1 Geodezik Normal Kesitli E_s^5' in Minimal Yüzeyleri

Geodezik normal kesitli E_s^5' in r-indeksli bağlantılı bir yüzeyi M_r^n olsun. Teorem2.4.1' den M_r^n pseudo izotropiktir. Şimdi $t \in M_r^n$ birim tanjant vektörü için

$$L = \langle h(t,t), h(t,t)\rangle \neq 0$$

kabul edilsin.

$$\left\langle \left(\bar{\nabla}h\right)\left(t^3\right), \left(\bar{\nabla}h\right)\left(t^3\right)\right\rangle,$$

$\bigcup M$ birim tanjant demeti üzerinde sabit olduğundan M_r^n' nin ortalama eğrilik vektörü H, $\{e_1, e_2\}$, M_r^n' nin ortonormal çatısı olmak üzere

$$H = \frac{1}{2}\{e_1 h(e_1,e_1) + e_2 h(e_2,e_2)\}$$

ile tanımlanır. M_r^n pseudo-izotropik olduğundan t ve z herhangi ortonormal vektörler olmak üzere

$$(-1)^r \langle h(t,t), h(t,t)\rangle = \langle h(t,t), h(z,z)\rangle + 2\langle h(t,z), h(t,z)\rangle$$

olur. E_s^5' te M_r^n' nin minimal olduğunu kabul edelim. Buradan t ve z herhangi ortonormal vektörler olmak üzere

$$h(t,t) = -(-1)^r h(z,z)$$

ifadesi elde edilir [38].

Lemma 2.4.1. *M_r^n, E_s^5' in geodezik normal kesitli bir minimal yüzeyi olmak üzere $\langle h(t,z), h(t,z)\rangle$, M_r^n' nin ortonormal her tanjant vektörü için sabittir. Buradan*

$$\langle h(t,z), h(t,z)\rangle = -(-1)^r \langle h(t,t), h(t,t)\rangle$$

olur [38].

Lemma 2.4.2. *M_r^n, E_s^5' in geodezik normal kesitli bir minimal yüzeyi olmak üzere $L \neq 0$ ise M_r^n' ye tanjant her t birim vektörü için*

$$\left\langle \left(\bar{\nabla} h\right)\left(t^3\right), \left(\bar{\nabla} h\right)\left(t^3\right)\right\rangle = 0$$

olur [38].

Önerme 2.4.2. *M_r^n, E_s^5' in geodezik normal kesitli bir minimal yüzeyi olmak üzere aşağıdakiler denktir.*

1- M_r^n paralel pseudo izotropiktir.

2- M_r^n düzlemsel geodeziklere sahiptir.

3- M_r^n flattır [38].

Önerme 2.4.3. *Önerme2.4.2 te kabul edilen varsayımla normal uzay Imh tamamen dejenere vektörlerden oluşmuştur ve boy $(Imh) = 1$ dir [38].*

Teorem 2.4.3. *M_r^n, E_s^5' in geodezik normal kesitli, tam bağlantılı bir minimal yüzeyi olmak üzere M_r^n, $E_{r,1}^3$' te flat quadratik yüzey ya da tamamen geodezik yüzeydir [38].*

BÖLÜM 3

R_1^3 Semi-Riemann Manifoldunun Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldları

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde R_1^3 semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldunun dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartları ve bir örnek verildi. İkinci altbölümde R_1^3 semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldunun non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartları, karakterizasyonlar ve bir örnek verildi.

3.1 R_1^3 Semi-Riemann Manifoldunun Dejenere Düzlemsel Normal Kesitli Lightlike Altmanifoldları

Tanım 3.1.1. *M, R_1^3 semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde $\xi \in RadTM$ ve $p \in M$ olmak üzere*

$$E(p, \xi) = \{\xi\} \cup tr(TM)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E(p, \xi) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma(0) = p \in M$ noktasında $\xi = \gamma'(0)$ doğrultusunda dejenere bir eğridir. Bu eğriye M lightlike altmanifoldunun dejenere normal kesit eğrisi denir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1. *R_1^3 semi-Riemann manifoldunun her lightlike altmanifoldu dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.*

İspat. $\{\xi, N\}$'nin gerdiği düzlem hiperbolik düzlem olup $S(TM)$ bir Riemann manifolddur. γ null bir eğri olduğundan

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= \xi \\
\gamma''(s) &= \bar{\nabla}_{\xi}\xi = -\tau(\xi)\xi \\
\gamma'''(s) &= \left[-\xi(\tau(\xi)) + \tau^2(\xi)\right]\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan γ', γ'' ve γ''' ' nin ξ doğrultusunda kaldığı görülür. Dolayısıyla $\forall p \in M$ noktasında

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

bulunur. □

Örnek 3.1.1. *R_1^3 semi-Riemann manifoldunun $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ null konisini M yüzeyi olarak ele alalım.Bu null koninin parametrizasyonunu*

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

olsun. Yüzeyi geren vektörler

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(\frac{x_2}{x_1}, 1, 0\right), \\
X_2 &= \left(\frac{x_3}{x_1}, 0, 1\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
Z_1 &= (x_2, x_2, 0), \\
Z_2 &= (x_3, 0, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. M lightlike altmanifoldunun $RadTM = TM^{\perp}$ radikal distribüsyonu

$$\xi = (x_1, x_2, x_3)$$

ile gerilir. Böylece M' nin lightlike transversal vektör demeti

$$Itr(TM) = Span\left\{N = \frac{1}{2(-x_1^2 + x_2^2)}(x_1, x_2, -x_3)\right\}$$

ile verilir. Buradan ekran distribüsyonu $S(TM)$, Z_1 ile gerilir [41]. Sonuç olarak $\forall p \in M$ noktasında

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \xi \\ \gamma''(s) &= \xi \\ \gamma'''(s) &= \xi \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall p \in M$ noktasında

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

dir. Buna göre R_1^3 semi-Riemann manifoldunun null konisinin dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu görülür.

3.2 R_1^3 Semi-Riemann Manifoldunun Non-Dejenere Düzlemsel Normal Kesitli Lightlike Altmanifoldları

Tanım 3.2.1. *M, R_1^3 semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde $w \in S(TM)$ ve $p \in M$ olmak üzere*

$$E(p, w) = \{w\} \cup tr(TM)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E(p, w) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma(0) = p \in M$ noktasında $w = \gamma'(0)$ doğrultusunda spacelike bir eğridir. Bu eğriye M lightlike altmanifoldunun non-dejenere normal kesit eğrisi denir.

Teorem 3.2.1. *M, R_1^3 semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. M tamamen umbilik ekran konform lightlike altmanifold ya da tamamen geodezik lightlike altmanifoldudur ancak ve ancak M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.*

İspat. $(M, g, S(TM))$, $(\bar{g}, R_1^3)$' ün tamamen umbilik ekran konform lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ∇^*, $S(TM)$' nin integral altmanifoldu M'' nün konneksiyonu, t, $\alpha, \beta \in IR$ ve $\gamma'(0) = w$ olmak üzere $w \in S(TM)$ olduğundan $\forall p = \gamma(0) \in M$ için

$$C(w,w)\xi + B(w,w)N = \bar{g}(w,w)\{\alpha\xi + \beta N\} = \{\alpha\xi + \beta N\}$$

olup M' nin normal kesit eğrisi γ, w doğrultusunda spacelike bir eğri olduğundan

$$\gamma'(s) = w \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= \nabla_w^* w + C(w,w)\xi + B(w,w)N \\ &= \nabla_w^* w + \alpha\xi + \beta N \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned} \gamma'''(s) &= \nabla_w^* \nabla_w^* w + C(w, \nabla_w^* w)\xi + w(C(w,w))\xi - C(w,w)A_\xi^* w \\ &\quad + w(B(w,w))N - B(w,w)A_N w + B(w, \nabla_w^* w)N \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\gamma'''(s) = \nabla_w^* \nabla_w^* w + t\{\alpha\xi + \beta N\} - \alpha A_\xi^* w - \beta A_N w \tag{3.2.4}$$

$$\tag{3.2.5}$$

dır. Düzlemsel normal kesit tanımından, $S(TM) = Sp\{w\}$ olduğundan ve M' nin tamamen umbilik ekran konform lightlike altmanifold olmasından

$$w \wedge \nabla_w^* w = 0 \tag{3.2.6}$$

ve

$$w \wedge (\nabla_w^* \nabla_w^* w - C(w,w)A_\xi^* w - B(w,w)A_N w) = 0 \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) ifadelerinden (3.2.6) ve (3.2.7)'in gözönünde bulundurulmasıyla $\forall p \in M$ noktasında

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$$

elde edilir. Böylece M lightlike altmanifoldu non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.

Eğer M tamamen geodezik lightlike altmanifold ise M' nin ikinci temel formu $B = 0$ olup

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= w \\
\gamma''(s) &= \nabla^*_w w + \alpha\xi \\
\gamma'''(s) &= \nabla^*_w \nabla^*_w w + t\alpha\xi - \alpha A^*_\xi w
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$$

elde edilir.

Tersine M lightlike altmanifoldunun düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerden

$$(C(w,w)\xi + B(w,w)N) \wedge \big(C(w,w)A^*_\xi w + B(w,w)A_N w\big) = 0$$

elde edilir. $C(w,w)A^*_\xi w + B(w,w)A_N w$ ile $C(w,w)\xi + B(w,w)N$' nin bulundukları demetlerden dolayı lineer bağımlı olamayacakları açık olup, burada ya

$$C(w,w)A^*_\xi w + B(w,w)A_N w = 0$$

ya da

$$C(w,w)\xi + B(w,w)N = 0$$

olmalıdır. Eğer $C(w,w)A^*_\xi w + B(w,w)A_N w = 0$ ise o zaman $\forall p \in M$ de

$$A^*_\xi w = -\frac{B(w,w)}{C(w,w)}A_N w$$

olup $M, C \neq 0$ ile tamamen umbilik ekran konform lightlike altmanifolddur.

$$C(w,w)\xi + B(w,w)N = 0$$

ise M tamamen geodeziktir. □

Teorem 3.2.2. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{g}, IR^3_1)$ semi-Riemann manifoldunun bir ekran konform lightlike altmanifoldu, $S(TM)$ integrallenebilir ve M', $S(TM)$' nin integral* *altmanifoldu olsun.* ∇^*, M *nin konneksiyonu olmak üzere* $T(w,w) = C(w,w)\xi + B(w,w)N$ *için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1-)$\forall w \in S(TM)$ *spacelike vektörü için* $\left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w) = 0$,

2-)$\bar{\nabla} T = 0$

3-)M *non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip ve* M*' nin her normal kesiti* p *noktasında bir köşe noktasına sahiptir.*

İspat. (3.2.6) ve $< \nabla^*_w w, w >= 0$ denklemleri kullanılırsa

$$\left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w) = \bar{\nabla}_w T(w,w)$$

elde edilir. Böylece (1) $\Leftrightarrow$ (2) sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Farz edelim ki $\bar{\nabla} T = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) &= w \wedge \left(\nabla^*_w w + C(w,w)\xi + B(w,w)N\right) \\ &\quad \wedge \left(\nabla^*_w \nabla^*_w w + tC(w,w)\xi + tB(w,w)N + \bar{\nabla}_w T\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir. γ, $p \in M$ noktasında $w \in S(TM)$ doğrultusunda M' nin normal kesit eğrisi olduğundan

$$\gamma''(s) = \nabla^*_w w + C(w,w)\xi + B(w,w)N \tag{3.2.8}$$

ifadesi γ' nin eğriliği $\kappa(s)$' de yerine yazılırsa, $w = \gamma'(s)$ olduğu yerde

$$\begin{aligned} \kappa^2(s) &= \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \\ &= 2C(w,w)B(w,w) \\ &= \langle T(w,w), T(w,w) \rangle \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

dır. Buradan,

$$\frac{d\kappa^2(p)}{ds} = 2\left\langle \bar{\nabla}_w T(w,w), T(w,w) \right\rangle = \left\langle \left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w), T(w,w) \right\rangle$$

ve

$$\bar{\nabla}_w T(w,w) = 0$$

olduğundan $p = \gamma(0)$ da

$$\frac{d\kappa^2(0)}{ds} = 0$$

olup $p \in M$ noktasında $\gamma(s)$ bir köşe noktasına sahiptir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Eğer M düzlemsel normal kesitlere sahipse

$$\begin{aligned} \gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) &= w \wedge (\nabla^*_w w + T(w,w)) \\ &\quad \wedge \left(\nabla^*_w \nabla^*_w w + tT(w,w) + \left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w)\right) = 0 \\ \gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) &= T(w,w) \wedge \left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w) = 0 \qquad (3.2.10) \end{aligned}$$

olur. p noktası γ' nin bir köşe noktası ise

$$\frac{d\kappa^2(0)}{ds} = 0$$

ifadesine sahip olduğumuzdan ve (3.2.9) denkleminden

$$\left\langle \left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w), T(w,w) \right\rangle = 0 \qquad (3.2.11)$$

elde edilir. (3.2.10) ve (3.2.11) denklemlerinden de $\left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w) = 0$ ya da $T(w,w) = 0$ olduğu görülür.

$$U = \{w \in S(TM) \mid T(w,w) = 0\}$$

kümesini tanımlıyalım. Eğer $int(U) \neq \varnothing$, olduğundan $int(U)$ üzerinde $\left(\bar{\nabla}_w T\right)(w,w) = 0$ bulunur. Buradan da $\bar{\nabla} T = 0$ ifadesine sahip oluruz. $\square$

Örnek 3.2.1. *R^3_1' ün $\wedge^2_0$ null konisi $-(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$, denklemiyle verilsin. $\wedge^2_0$ lightlike altmanifoldunun $RadTM = TM^{\perp}$ radikal distribüsyonu $\xi = (x_0, x_1, x_2)$*

ile gerilir.M' nin lightlike transversal vektör demeti

$$N = \frac{1}{2(x_0)^2}\left(-x_0, x_1, x_2\right)$$

ile gerilir.$\forall X \in \Gamma(TM)$ *yer vektörü olarak alınırsa*

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi = X, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

olur. O zaman

$$A^*_\xi X + \tau(X)\xi + X = 0$$

elde edilir. A^*_ξ, $\Gamma(S(TM))$ *değerli olarak alınırsa*

$$A^*_\xi X = -PX, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \tag{3.2.12}$$

bulunur. $X \in \Gamma\left(S(T\wedge^2_0)\right)$, (X_1, X_2) *için*

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 = 0 \tag{3.2.13}$$

olduğu yerde

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

şeklinde ifade edilirse ve (3.2.13) *denklemi sırasıyla* x_0, x_1, x_2*' ye göre türevlenirse*

$$\nabla_\xi X = \bar{\nabla}_\xi X = \sum_{A=0}^{2}\sum_{a=1}^{2} x_A \frac{\partial X_a}{\partial x_A}\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{3.2.14}$$

$$\bar{g}\left(\nabla_\xi X, \xi\right) = \sum_{A=0}^{2}\sum_{a=1}^{2} x_a x_A \frac{\partial X^a}{\partial x_A} = -\left(x_1 X_1 + x_2 X_2\right) = 0 \tag{3.2.15}$$

elde edilir. (3.2.14) *ve* (3.2.15) *denklemlerinden* $\nabla_\xi X \in \Gamma\left(S(T\wedge^2_0)\right)$ *olarak bulunur. Böylece* $X, Y \in \Gamma\left(S(T\wedge^2_0)\right)$ *için* $A_N \xi = 0$ *olur.* $S(TM)$*' nin ikinci temel formunda* N*' nin değeri ve* (3.2.14) *denklemi kullanılırsa*

$$C(X,Y) = g\left(\nabla_X Y, N\right) = g\left(\bar{\nabla}_X Y, N\right) = -\frac{1}{2(x_0)^2} g(X,Y),$$

buluruz. Böylece

$$g\left(A_N X, Y\right) = -\frac{1}{2(x_0)^2} g(X, Y) \quad X; Y \in \Gamma\left(S(T\wedge_0^2)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$A_N X = -\frac{1}{2(x_0)^2} PX, \quad X \in \Gamma\left(T\wedge_0^2\right) \tag{3.2.16}$$

elde ederiz. (3.2.12) *ve* (3.2.16) *denklemlerinden de*

$$A_N X = \frac{1}{2(x_0)^2} A_\xi^* X, \quad \Gamma\left(T\wedge_0^2\right)$$

olup böylece $\wedge_0^2$ *üzerinde tanımlanan* $\varphi = \frac{1}{2(x_0)^2}$ *pozitif konformal fonksiyonu ile* $\wedge_0^2$ *null konisi* R_1^3*'ün ekran konform lightlike bir altmanifoldudur. Şimdi Gauss ve Weingarten formüllerini kullanarak*

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi X, \xi\right) &= g\left(\nabla_\xi X, \xi\right) = g\left(X, \xi\right) = 0 \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi X, \xi\right) &= 0 \Rightarrow \bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_\xi \xi\right) = 0 \Rightarrow g\left(X, A_\xi^* \xi\right) = 0 \\
A_\xi^* \xi &= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi X, N\right) &= g\left(\nabla_\xi X, N\right) = g\left(X, N\right) = 0 \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi X, N\right) &= 0 \Rightarrow \bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_\xi N\right) = 0 \\
\bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_\xi N\right) &= 0 \Rightarrow \bar{g}\left(X, -A_N \xi\right) = 0 \\
A_N \xi &= 0
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X \xi, N\right) &= g\left(\nabla_X \xi, N\right) = g\left(X, N\right) = 0 \\
&\Rightarrow \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X \xi, N\right) = 0 \\
&\Rightarrow \bar{g}\left(\xi, \bar{\nabla}_X N\right) = 0 \\
&\Rightarrow \bar{g}\left(\xi, -A_N X + \tau\left(X\right) N\right) = 0 \\
&\Rightarrow \bar{g}\left(\xi, A_N X\right) = 0
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Şimdi X*' in* $\nabla_X X$ *türevini hesaplıyalım*

$$\nabla_X X = \left(X\left[0\right], X\left[-x_2\right], X\left[x_1\right]\right) = \left(0, -x_1, -x_2\right).$$

Gauss denkleminden

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X X &= \nabla_X X + B\left(X,X\right)N \\
&= \nabla^*_X X + C\left(X,X\right)\xi + B\left(X,X\right)N \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X X, N\right) &= g\left(\nabla_X X, N\right) = -\frac{1}{2} \\
C\left(X,X\right) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X X, N\right) = -\bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_X N\right) = g\left(X, A_N X\right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X X &= \nabla_X X + B\left(X,X\right)N \\
&\Rightarrow B\left(X,X\right) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X X, \xi\right) \\
&\Rightarrow B\left(X,X\right) = -\bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_X \xi\right) \\
&\Rightarrow B\left(X,X\right) = -\bar{g}\left(X,X\right) \\
&\Rightarrow B\left(X,X\right) = -x_0^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $C\left(X,X\right)$ ile $B\left(X,X\right)$ arasındaki ilişki

$$C\left(X,X\right) = \frac{1}{2}x_0^2 B\left(X,X\right)$$

olup M nin ekran konform olduğu rahatça görülür. Şimdi γ', γ'' ve γ''' ifadelerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\gamma' &= X = \left(0, -x_2, x_1\right) \\
\gamma'' &= \nabla_X X + B\left(X,X\right)N \\
&= \left(0, -x_1, -x_2\right) - x_0^2 \frac{1}{2(x_0)^2}\left(-x_0, x_1, x_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_0, -3x_1, -3x_2\right) \\
\gamma''' &= \bar{\nabla}_X \nabla_X X + X\left(B\left(X,X\right)\right)N + B\left(X,X\right)\bar{\nabla}_X N \\
&= \nabla_X \nabla_X X + B\left(X, \nabla_X X\right)N + X\left(B\left(X,X\right)\right)N - B\left(X,X\right)A_N X
\end{aligned}$$

dır. $\nabla_X X$ ifadesinin tekrar X doğrultusunda kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_X \nabla_X X = \left(0, x_2, -x_1\right)$$

elde edilir. Şimdi $B(X,\nabla_X X)$ ifadesini hesaplarsak

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\nabla_X X &= \nabla_X\nabla_X X + B(X,\nabla_X X)N \\ &\Rightarrow \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X\nabla_X X,\xi\right) = B(X,\nabla_X X) \\ &\Rightarrow -\bar{g}\left(\nabla_X X,\bar{\nabla}_X\xi\right) = B(X,\nabla_X X) \\ &\Rightarrow -(0+x_1.x_2-x_1.x_2) = B(X,\nabla_X X) \\ &\Rightarrow B(X,\nabla_X X) = 0\end{aligned}$$

bulunur. $X(B(X,X))$ türevini hesaplarsak

$$X(B(X,X)) = X\left[-x_0^2\right] = 0$$

elde edilir.Şimdi de $A_N X$ ifadesinin değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}g(X,A_N X) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow A_N X \in \Gamma(S(TM)) \Rightarrow A_N X = tX \\ g(X,A_N X) &= g(X,tX) = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2x_0^2} \\ A_N X &= -\frac{1}{2x_0^2}(0,-x_2,x_1)\end{aligned}$$

bulunur. Bulduklarımızı γ''' ifadesinde yerlerine yazarsak

$$\gamma''' = 2(0,x_2,-x_1)$$

elde edilir. Böylece γ''' ile γ' ifadeleri lineer bağımlı olup $\forall p \in \wedge_0^2$ noktasında

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

olup R_1^3 semi-Riemann manifuldunun $\wedge_0^2$ konisi non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.

BÖLÜM 4

R_2^4 Semi-Riemann Manifoldunun Bir Half-Lightlike manifoldunun Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldları

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half lightlike altmanifoldunun dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartları araştırıldı ve bir örnek verildi. İkinci altbölümde ise R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half lightlike altmanifoldunun non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartları araştırıldı ve bir takım karakterizasyonlar ayrıca konu ile ilgili iki tane örnek verildi.

4.1 R_2^4 Semi-Riemann Manifoldunun Dejenere Düzlemsel Normal Kesitli Half-Lightlike Altmanifoldları

Tanım 4.1.1. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde $\xi \in RadTM$ ve $p \in M$ olmak üzere*

$$E\left(p, \xi\right) = \{\xi\} \cup tr\left(TM\right)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E\left(p, \xi\right) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma\left(0\right) = p \in M$ noktasında $\xi = \gamma'\left(0\right)$ doğrultusunda null bir eğridir. Bu eğriye M half-lightlike altmanifoldunun dejenere normal kesit eğrisi denir.

Teorem 4.1.1. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu ve γ, $\xi = \gamma'\left(0\right)$ doğrultusunda, $\gamma\left(0\right) = p \in M$ noktasında M' nin normal kesit eğrisi olsun. $\xi \in RadTM$ olmak üzere M' nin düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$D_2\left(\xi, \xi\right) u \wedge \bar{\nabla}_\xi D_2\left(\xi, \xi\right) u = 0 \tag{4.1.1}$$

olmasıdır.

İspat. γ, $\xi = \gamma'(0)$ doğrultusunda $\gamma(0) = p \in M$ noktasında M' nin normal kesit eğrisi olduğundan

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= \xi \\
\gamma''(s) &= \bar{\nabla}_\xi \xi = \nabla_\xi \xi + D_2(\xi,\xi)\, u \\
\gamma'''(s) &= \nabla_\xi \nabla_\xi \xi + D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u + \xi\left(D_2(\xi,\xi)\right) u + D_2(\xi,\xi)\left(-A_u \xi + \varepsilon_1(\xi)\, N\right)
\end{aligned}$$

olur. Normal kesit tanımından $p = \gamma(0)$ da γ, ξ yönünde normal kesit olmak üzere $\nabla_\xi \xi$ ve $\nabla_\xi \nabla_\xi \xi$ de ξ doğrultusundadır. Gerçekten

$$\nabla_\xi \xi = -A^*_\xi \xi + u_1(\xi)\, \xi = u_1(\xi)\, \xi \tag{4.1.2}$$

$$\bar{\nabla}_\xi \nabla_\xi \xi = \xi(u_1(\xi))\xi + u_1^2(\xi)\, \xi + u_1(\xi)\, D_2(\xi,\xi)\, u \tag{4.1.3}$$

$$= \nabla_\xi \nabla_\xi \xi + D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u$$

$$= \nabla_\xi \nabla_\xi \xi + u_1(\xi)\, D_2(\xi,\xi)\, u \tag{4.1.4}$$

olup, (4.1.3) ve (4.1.4) ifadelerinden

$$\nabla_\xi \nabla_\xi \xi = \xi\left(u_1(\xi)\right) \xi + u_1^2(\xi)\, \xi$$

bulunur. Buradan da

$$\nabla_\xi \xi \wedge \xi = 0 \tag{4.1.5}$$

ve

$$\nabla_\xi \nabla_\xi \xi \wedge \xi = 0 \tag{4.1.6}$$

sonucuna varılır. Şimdi R_2^4' te M half-lightlike altmanifoldunun düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu kabul edelim. O zaman düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartından

$$\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\xi \wedge (\nabla_\xi \xi + D_2(\xi,\xi)\, u\ ) \wedge \begin{pmatrix} \nabla_\xi \nabla_\xi \xi + D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u \\ +\xi\,(D_2(\xi,\xi))\, u + D_2(\xi,\xi)\,(-A_u \xi + \varepsilon_1(\xi)\, N) \end{pmatrix} = 0$$

olur. Burada $(4.1.5), (4.1.6)$ ifadeleri göz önüne alınırsa

$$D_2(\xi,\xi)\, u$$

ve

$$D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u + \xi\,(D_2(\xi,\xi))\, u + D_2(\xi,\xi)\,(-A_u \xi + \varepsilon_1(\xi)\, N)$$

lineer bağımlı olmalıdır. $D_2(\xi,\xi)\, u$' nin kovaryant türevi

$$\bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u = \xi\,(D_2(\xi,\xi))\, u + D_2(\xi,\xi)\,(-A_u \xi + \varepsilon_1(\xi)\, N) \tag{4.1.7}$$

dır. Lineer bağımlılıktan dolayı

$$D_2(\xi,\xi)\, u \wedge (D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u + \xi\,(D_2(\xi,\xi))\, u + D_2(\xi,\xi)\,(-A_u \xi + \varepsilon_1(\xi)\, N)) = 0$$

ifadesinden

$$D_2(\xi,\xi)\, u \wedge \bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u = 0$$

elde edilir.

Şimdi tersini kabul edelim. $D_2(\xi,\xi)\, u \wedge \bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u = 0$ olsun. Eğer $D_2(\xi,\xi)\, u$ ile $\bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u$ lineer bağımlı ise ispat aşikardır. Diğer iki duruma bakalım. O zaman ya $D_2(\xi,\xi)\, u = 0$ dır ya da $\bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u = 0$ dır. Eğer $D_2(\xi,\xi)\, u = 0$ ise $D_2(\xi,\xi) = 0$ olup M, $RadTM$ de tamamen geodeziktir ve aynı zamanda tamamen umbiliktir. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \xi \\ \gamma''(s) &= u_1(\xi)\,\xi \\ \gamma'''(s) &= \nabla_\xi \nabla_\xi \xi = \xi\,(u_1(\xi)\,\xi) + u_1^2(\xi)\,\xi \end{aligned}$$

olup, $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) = 0$ dan M dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir. Eğer diğer durum söz konusu ise o zaman $\bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\,u = 0$ ile γ boyunca paraleldir dolayısıyla ekran konformdur. γ, ξ yönünde normal kesit olduğunda (4.1.1) ifadesi geçerli olup

$$\gamma'(s)\wedge\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s) = \xi\wedge D_2(\xi,\xi)\,u\wedge D_2(\nabla_\xi\xi,\xi)\,u+\xi\wedge D_2(\xi,\xi)\,u\wedge\bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\,u = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi

$$\begin{aligned} L_p : RadT_pM &\rightarrow R \\ \xi &\rightarrow L_p(\xi) = D_2^2(\xi,\xi)\,\epsilon, \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlıyalım. $p \in M$ ve $\gamma(0) = p$ olsun. Eğer $p \in M$ de $L_p = 0$ yani $D_2(\xi,\xi) = 0$ ise bu durumda da M dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \xi \\ \gamma''(0) &= \nabla_\xi\xi = u_1(\xi)\,\xi \\ \gamma'''(0) &= \bar{\nabla}_\xi u_1(\xi)\,\xi = \xi(u_1(\xi)\,\xi) + u_1^2(\xi)\,\xi \end{aligned}$$

den $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) = 0$ olup M dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir. Şimdi de $p \in M$' de γ' nın eğriliğini hesaplıyalım. $p \in M$' de $\epsilon = \pm 1$ olmak üzere $\epsilon\kappa^2 = \langle\gamma'', \gamma''\rangle$ olarak tanımlıyalım. Eğer $p \in M$ noktasında $\gamma(0) = p$ olmak üzere $\frac{d\kappa^2(0)}{ds} = 0$ ise γ eğrisi bir köşe noktasına sahiptir denir.

M' nin radikal uzayında tanımlanan L_p fonksiyonu için $L_p = 0$, yani $D_2(\xi,\xi) = 0$ olsun. Bu taktirde $\xi \in RadTM$ için

$$\begin{aligned} h(\xi,\xi) &= D_1(\xi,\xi)\,N + D_2(\xi,\xi)\,u = D_2(\xi,\xi)\,u = 0 \\ \bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla $\bar{\nabla} h = 0$ elde edilir. Buradan

$$\epsilon\kappa^2(s) = \langle\gamma''(s), \gamma''(s)\rangle = \langle u_1(\xi)\,\xi, u_1(\xi)\,\xi\rangle = 0$$

olup $\forall p \in M$ noktasında $\kappa = 0$ dır. O halde bu sonuçlardan şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.2. *M, R_2^4 semi Riemann manifoldunda $L_p : RadT_pM \to R$, $L_p(\xi) = D_2^2(\xi,\xi)\,\epsilon = 0$ ile dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1. *M' nin radikal uzayında $D_2 = 0$ dır.*
2. *$h(\xi,\xi) = D_2(\xi,\xi)\,u$ ile $\left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0$*
3. *$\bar{\nabla} h = 0$*
4. *$\forall p = \gamma(0) \in M$ noktasında $\kappa = 0$ dır.*

M, R_2^4' ün dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $p \in M$' deki normal kesit γ için

$$\langle \xi,\xi \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \bar{\nabla}_\xi \xi,\xi \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_\xi \xi,\xi \rangle = 0$$

dır ve düzlemsel normal kesit tanımından $\nabla_\xi \xi \wedge \xi = 0$ dır. Bu ikisinin var olması $\nabla_\xi \xi = 0$ olmasını gerektirmez. Ama $\nabla_\xi \xi = 0$ olacak şekilde bir parametre bulunabilir. Bu parametreye distinguish parametresi denir, bu parametre null eğrilerde yay parametresinin oynadığı rolu oynar. $\nabla_\xi \xi \neq 0$ ise yani γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay değil ise

$$\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \xi \\
\gamma''(0) &= \bar{\nabla}_\xi \xi = \nabla_\xi \xi + D_2(\xi,\xi)\,u = u_1(\xi)\,\xi + D_2(\xi,\xi)\,u && (4.1.8)\\
\gamma'''(0) &= \xi(u_1(\xi))\,\xi + u_1^2(\xi)\,\xi + u_1(\xi)\,D_2(\xi,\xi)\,u && (4.1.9)\\
&\quad + \xi(D_2(\xi,\xi))\,u - D_2(\xi,\xi)\,A_u\xi + D_2(\xi,\xi)\,\varepsilon_1(\xi)\,N
\end{aligned}$$

elde edilir. γ düzlemsel bir eğri olduğundan $\gamma'(0) \wedge \gamma''(0) \wedge \gamma'''(0) = 0$ olup $\forall\, p \in M$ noktasında $a(s), b(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma'''(s) = a(s)\,\gamma''(s) + b(s)\,\gamma'(s)$$

ifadesinde karşılıklı demetler eşitlenirse

$$D_2(\xi,\xi) = \varepsilon_1(\xi) = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 4.1.3. *M, R_2^4' ün dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip bir half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $p \in M$' nin yeterince küçük bir komşuluğunda γ geodezik yay değil ise o zaman $RadTM$ de $D_2 = 0$ dır.*

Şimdi farz edelim ki γ distinguish parametresiyle verilsin yani γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay olarak verilsin. O zaman $\nabla_\xi \xi = 0$ olup buradan $u_1(\xi) = \rho_1(\xi) = 0$ elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \xi \\ \gamma''(0) &= D_2(\xi,\xi)u = h(\xi,\xi) \qquad (4.1.10) \\ \gamma'''(0) &= \xi(D_2(\xi,\xi))u - D_2(\xi,\xi)A_u\xi - \epsilon D_2^2(\xi,\xi)N \\ \bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)u &= \xi(D_2(\xi,\xi))u - D_2(\xi,\xi)A_u\xi - \epsilon D_2^2(\xi,\xi)N \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. M' nin $p \in M$ de dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\gamma'(0) \wedge \gamma''(0) \wedge \gamma'''(0) = 0$ olup $\xi \wedge h(\xi,\xi) \wedge \bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi) = 0$ bulunur. Burada ya $\bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi) = 0$ dır ya da $h(\xi,\xi) = 0$ dır. Eğer $\bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi) = 0$ ise

$$\begin{aligned} \langle h(\xi,\xi), h(\xi,w)\rangle &= \left\langle h(\xi,\xi), \bar{\nabla}_\xi w\right\rangle - \langle h(\xi,\xi), \nabla_\xi w\rangle \\ &= -\left\langle \bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi), w\right\rangle \\ &= 0 \qquad (4.1.11) \end{aligned}$$

elde edilir. D_1, D_2, $\Gamma(TM)$ de simetrik bilineer form olduğundan

$$\begin{aligned} \langle h(\xi,\xi), h(\xi,w)\rangle &= \left\langle h(\xi,\xi), \bar{\nabla}_w \xi\right\rangle - \langle h(\xi,\xi), \nabla_w \xi\rangle \\ &= \epsilon D_2(\xi,\xi) D_2(w,\xi), \qquad (4.1.12) \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.1.11) ve (4.1.12) ifadelerinden $w = w(p) \in \Gamma(TM)$ için $\Gamma(TM)$ de $D_2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\bar{\nabla}_w \xi \in \Gamma(TM)$, $\xi \in RadTM$ ve $w \in \Gamma(TM)$ olduğundan M irrotationaldir. Böylece şu teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 4.1.4. *M, R_2^4' ün dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip bir half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $p \in M$' nin yeterince küçük bir komşuluğunda γ geodezik yay ise o zaman $\xi \in RadTM$ ve $w \in \Gamma(TM)$ için $\bar{\nabla}_w \xi \in \Gamma(TM)$ olduğundan M irrotationaldir(irrotasyonel).*

Sonuç 4.1.1. *M, R_2^4' ün dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip bir half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $A_u\xi$, $RadTM$ değerlidir.*

İspat. γ düzlemsel bir eğri olduğundan $a(s), b(s)$, $p \in M$ de diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma'''(s) = a(s)\gamma''(s) + b(s)\gamma'(s) \tag{4.1.13}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifadeyi sırasıyla N ve u ile çarparsak, N ile çarptığımızda

$$\xi(u_1(\xi)) + u_1^2(\xi) - D_2(\xi,\xi)\langle A_u\xi, N\rangle = a(s)u_1(\xi) + b(s)$$

u ile çarptığımızda

$$u_1(\xi)\epsilon D_2(\xi,\xi) + \xi(D_2(\xi,\xi))\epsilon = a(s)\epsilon D_2(\xi,\xi)$$

buluruz. Buradan

$$\begin{aligned} a(s) &= u_1(\xi) + \xi(\ln(D_2(\xi,\xi))) \\ b(s) &= \xi(u_1(\xi)) - D_2(\xi,\xi)\rho_2(\xi)\epsilon - u_1(\xi)\xi(\ln(D_2(\xi,\xi))) \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bulunan $a(s)$ ve $b(s)$ ifadeleri

$$\gamma'''(s) = a(s)\gamma''(s) + b(s)\gamma'(s)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \gamma'''(s) &= u_1^2(\xi)\xi + u_1(\xi)D_2(\xi,\xi)u \\ &\quad + \xi(\ln(D_2(\xi,\xi)))D_2(\xi,\xi)u \\ &\quad + \xi(u_1(\xi))\xi - \epsilon D_2(\xi,\xi)\rho_2(\xi)\xi \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Bu ifade de $\gamma'''(s)$ nin (4.1.9)' deki değeri kullanılırsa ve (4.1.13)' de $a(s)$, $b(s)$ fonksiyonlarının değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \xi(u_1(\xi)\xi) + u_1^2(\xi)\xi \\ +u_1(\xi)D_2(\xi,\xi)u + \xi(D_2(\xi,\xi))u \\ -D_2(\xi,\xi)A_u\xi + D_2(\xi,\xi)\varepsilon_1(\xi)N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2(\xi)\xi + u_1(\xi)D_2(\xi,\xi)u \\ +\xi(\ln(D_2(\xi,\xi)))D_2(\xi,\xi)u \\ +\xi(u_1(\xi)\xi) - \epsilon D_2(\xi,\xi)\rho_2(\xi)\xi \end{pmatrix} \tag{4.1.15}$$

elde edilir. Bu ifade de karşılıklı $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(tr(TM))$ demetleri eşitlenirse

$$A_u\xi = \epsilon\rho_2(\xi)\xi \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) &= \bar{\nabla}_\xi h(\xi,\xi) - 2h(\nabla_\xi\xi,\xi)\\ &= \xi\left(D_2(\xi,\xi)\right)u - D_2(\xi,\xi)A_u\xi\\ &\quad +D_2(\xi,\xi)\varepsilon_1(\xi)N - 2u_1(\xi)D_2(\xi,\xi)u\end{aligned}$$

ifadesinde (4.1.15)' deki eşitlenen $tr(TM)$ kısımlarının eşitlenen bölümleri ve (4.1.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) + 2u_1(\xi)D_2(\xi,\xi)u &= \xi\left(\ln\left(D_2(\xi,\xi)\right)\right)D_2(\xi,\xi)u\\ &\quad -\epsilon D_2(\xi,\xi)\rho_2(\xi)\xi\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

eşitliği elde edilir. M half-lightlike düzlemsel normal kesitlere sahip bir altmanifold olsun. Eğer γ normal kesit eğrisi $p \in M$' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay değilse $\nabla_\xi\xi = u_1(\xi)\xi \neq 0$ olup M düzlemsel normal kesitlere sahip olduğundan $\gamma'(s)\wedge\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s) = 0$ ifadesinde (4.1.8), (4.1.14) ve (4.1.17) kullanılırsa

$$D_2(\xi,\xi)u \wedge \left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0 \tag{4.1.18}$$

denklemini elde ederiz. Eğer M' nin sıfırdan farklı her dejenere tanjant vektörü ξ için $D_2(\xi,\xi)u \wedge \left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0$ olduğunu kabul edersek, o zaman ya $h(\xi,\xi) = D_2(\xi,\xi)u = 0$ dır ya da $\left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0$ ile γ boyunca paraleldir. Eğer $h(\xi,\xi) = D_2(\xi,\xi)u = 0$ ise

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \xi\\ \gamma''(s) &= \nabla_\xi\xi = u_1(\xi)\xi\\ \gamma'''(s) &= \nabla_\xi\nabla_\xi\xi = \xi\left(u_1(\xi)\right)\xi + u_1^2(\xi)\xi\end{aligned}$$

den $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) = 0$ elde edilir. Eğer $\left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0$ ise

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) &= \xi \wedge D_2(\xi,\xi)\, u \wedge D_2(\nabla_\xi \xi, \xi)\, u \\
&\quad + \xi \wedge D_2(\xi,\xi)\, u \wedge \bar{\nabla}_\xi D_2(\xi,\xi)\, u \\
&= \xi \wedge D_2(\xi,\xi) u \wedge \left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu taktirde aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

Teorem 4.1.5. *M, R_2^4' ün dejenere normal kesitlere sahip bir half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $p \in M$' nin yeterince küçük bir komşuluğunda γ geodezik yay değil ise M half-lightlike altmanifoldunun düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$D_2(\xi,\xi) u \wedge \left(\bar{\nabla}_\xi h\right)(\xi,\xi) = 0$$

olmasıdır.

M, R_2^4' nin screen konformal düzlemsel normal kesitlere sahip bir half-lightlike altmanifoldu olsun.$\bar{\nabla}$' nin $(0,4)$ tipindeki Riemann eğriliğini düşünelim.

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X.Y)Z &= R(X,Y)Z + D_1(X,Z)A_N Y - D_1(Y,Z)A_N X \\
&\quad + D_2(X,Z)A_u Y - D_2(Y,Z)A_u X + \\
&\quad \{(\nabla_X D_1)(Y,Z) - (\nabla_Y D_1)(X,Z) + \rho_1(X) D_1(Y,Z) \\
&\quad - \rho_1(Y) D_1(X,Z) + \varepsilon_1(X) D_2(Y,Z) \\
&\quad - \varepsilon_1(Y) D_2(X,Z)\}N + \{(\nabla_X D_2)(Y,Z) - (\nabla_Y D_2)(X,Z) \\
&\quad - \rho_2(X) D_1(Y,Z) - \rho_2(Y) D_1(X,Z)\}u
\end{aligned}$$

denkleminin kullanılmasıyla ve eğrilik tensörünün tanımıyla

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X.Y)Z,PW) &= \bar{g}(R(X,Y)Z,PW)+D_1(X,Z)\bar{g}(A_NY,PW) \\
&\quad -D_1(Y,Z)\bar{g}(A_NX,PW) \\
&\quad +D_2(X,Z)\bar{g}(A_uY,PW)-D_2(Y,Z)\bar{g}(A_uX,PW)+ \\
&\quad \{(\nabla_X D_1)(Y,Z)-(\nabla_Y D_1)(X,Z)+\rho_1(X)D_1(Y,Z) \\
&\quad -\rho_1(Y)D_1(X,Z)+\varepsilon_1(X)D_2(Y,Z) \\
&\quad -\varepsilon_1(Y)D_2(X,Z)\}\bar{g}(N,PW)+ \\
&\quad \{(\nabla_X D_2)(Y,Z)-(\nabla_Y D_2)(X,Z) \\
&\quad -\rho_2(X)D_1(Y,Z)-\rho_2(Y)D_1(X,Z)\}\bar{g}(u,PW) \\
&= D_1(X,Z)\varphi D_1(Y,PW)-D_1(Y,Z)\varphi D_1(X,PW) \\
&\quad +\epsilon D_2(X,Z)D_2(Y,PW)-\epsilon D_2(Y,Z)D_2(X,PW)
\end{aligned}
$$

bulunur. $p\in M$ de T_pM' nin null vektörü ξ olmak üzere T_pM' nin bir null düzlemi ξ doğrultusunda null bir düzlem olarak isimlendirilir. Eğer $v\in H$ için $\bar{g}(v,\xi)=0$ ve $v_0\in H$ var öyle ki $\bar{g}(v_0,v_0)\neq 0$ ise. O zaman $\bar{\nabla}$ ve ξ ye göre null kesit eğriliği

$$K_\xi(H)=\frac{\bar{R}_p(v,\xi,\xi,v)}{g_p(v,v)}$$

ile tanımlanır. Buradan $v\in\Gamma(S(TM))$ ve $\xi\in\Gamma(RadTM)$ için

$$
\begin{aligned}
K_\xi(H) &= \varphi(D_1(v,\xi)D_1(\xi,v)-D_1(\xi,\xi)D_1(v,v)) \\
&\quad +\epsilon(D_2(v,\xi)D_2(\xi,v)-D_2(\xi,\xi)D_2(v,v))
\end{aligned}
$$

elde edilir[41].$D_1(v,\xi)=0$ ifadesinin kullanılmasıyla

$$K_\xi(H)=\epsilon(D_2(v,\xi)D_2(\xi,v)-D_2(\xi,\xi)D_2(v,v))$$

bulunur. Eğer M minimal dejenere normal kesitlere sahip half-lightlike altmanifold ise $\forall p\in M$ noktasında

$$K_\xi(H)=0$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.6. *M, $R_2^4(c)$' ün dejenere normal kesitlere sahip ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M minimal ise sıfır null kesit eğriliğine sahiptir.*

Örnek 4.1.1. *R_2^4' ün*

$$x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1+x^2\right);$$
$$x^4 = \frac{1}{2}\log\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)$$

denklemi ile verilen M altmanifoldunu düşünelim. O zaman

$$\left(x^1, x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1+x^2\right), \frac{1}{2}\log\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\right)$$

ifadesini sırasıyla x^1 ve x^2' ye göre türevlersek

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sqrt{2}\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_1+\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_3+\sqrt{2}\left(x^1-x^2\right)\partial_4, \\
U_2 &= \sqrt{2}\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_2+\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_3-\sqrt{2}\left(x^1-x^2\right)\partial_4, \\
\xi &= \left(x^1, x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1+x^2\right), \frac{1}{2}\log\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

olup ξ ifadesinde $x^1 = x^2 = 1$ alınırsa

$$\xi = \left(1, 1, \sqrt{2}, 0\right)$$

bulunur.

$$u = 2\left(x^2-x^1\right)\partial_2+\sqrt{2}\left(x^2-x^1\right)\partial_3+\left(1+\left(x^1-x^2\right)\right)\partial_4$$

olup $TM = Span\{U_1, U_2\}$ ve $TM^\perp = Span\{\xi, u\}$ bulunur. M üzerindeki radikal distribüsyon $RadTM$, ξ tarafından gerildiği için rankı 1 olup M bir half-lightlike altmanifoldudur. $S(TM)$ ve D sırasıyla timelike ve spacelike olan U_2 ve u vektörleri ile gerilir. Buradan null kanonical afin normal demet için

$$Itr(TM) = span\left\{N = -\frac{1}{2}\partial_1+\frac{1}{2}\partial_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3\right\}$$

bulunur. Böylece afin normal demet $ltr(TM) = Span\{N, u\}$ şeklinde elde edilir. R_2^4 üzerindeki levi-civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile tanımlıyalım. O zaman direkt hesaplamayla

$\forall X \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{U_2} U_2 &= \nabla_{U_2} U_2 + D_1 (U_2, U_2) N \\
&\quad + D_2 (U_2, U_2) u \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{U_2} U_2, \xi\right) &= D_1 (U_2, U_2) \\
-\bar{g}\left(U_2, \bar{\nabla}_{U_2} \xi\right) &= D_1 (U_2, U_2) \\
-\bar{g}\left(U_2, \nabla_{U_2} \xi + D_1 (U_2, \xi) N + D_2 (U_2, \xi) u\right) &= D_1 (U_2, U_2) \\
-\bar{g}\left(U_2, \nabla_{U_2} \xi\right) &= -\bar{g}(U_2, \xi) = 0 = D_1 (U_2, U_2)
\end{aligned}$$

$D_1(U_2, U_2) = 0$ *ve* $D_1(U_2, \xi) = 0$ *olduğundan* $D_1 = 0$ *bulunur. Buradan Gauss ve Weingartien formüllerini kullanarak* M *' ye tanjant her* $X = X^1\xi + X^2 U_2$ *için*

$$\begin{aligned}
D_1 &= 0; \\
A_\xi &= 0; \\
A_N &= 0; \\
\nabla_X \xi &= 0; \\
\rho_1 (X) &= 0; \\
D_2 (X, \xi) &= 0; \\
D_2 (U_2, U_2) &= 2; \\
\nabla_X U_2 &= \frac{2\sqrt{2}\left(x^2 - x^1\right)^3}{1 + \left(x^1 - x^2\right)^2} X^2 U_2
\end{aligned}$$

elde edilir. $D_1 = 0$ *olduğu için* ∇ *konneksiyonu bir metrik konneksiyon olur.*

$$\bar{g}(U_2, U_2) = -\left(1 + \left(x^1 - x^2\right)^4\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
D_2 (U_2, U_2) &= H_2 \bar{g} (U_2, U_2), \\
H_2 &= -\frac{2}{\left(1 + (x^1 - x^2)^4\right)}
\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece M, R_2^4 *' ün tamamen umbilik bir half-lightlike altmanifoldu olur[41].*

$$\bar{\nabla}_\xi U_2 = \nabla_\xi U_2 + D_2 (\xi, U_2) u$$

ifadesindeki $D_2(\xi, U_2)$ *' nin değerini hesaplarsak*

$$\begin{aligned} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi U_2, u\right) &= D_2(\xi, U_2)\,\epsilon \\ H_2\bar{g}(\xi, U_2) &= 0 = D_2(\xi, U_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Direkt hesaplamayla

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\xi U_2 &= \nabla_\xi U_2 + D_2(\xi, U_2)\,u \\ \bar{\nabla}_\xi U_2 &= \nabla_\xi U_2 \\ &= \left(\xi[0], \xi\left[\sqrt{2}\left(1 + \left(x^1 - x^2\right)^2\right)\right], \xi\left[\left(1 + \left(x^1 - x^2\right)^2\right)\right], \xi\left[-\sqrt{2}\left(x^1 - x^2\right)\right]\right) \\ &= \left(0, 2\sqrt{2}\left(x^1 - x^2\right)^2, 2\left(x^1 - x^2\right)^2, -\sqrt{2}\left(x^1 - x^2\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X\xi &= \bar{\nabla}_X N = 0 \\ D_2(\xi, \xi) &= 0 \\ \bar{\nabla}_\xi\xi &= 0 \end{aligned}$$

olduğuda gösterilebilir. M, R_2^4 *semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun.* M *üzerinde* $\xi \in RadTM$ *ve* $p \in M$ *olmak üzere*

$$E(p, \xi) = \{\xi\} \bigcup tr(TM)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E(p, \xi) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma(0) = p \in M$ *noktasında* $\xi = \gamma'(0)$ *doğrultusunda null bir eğridir.*

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \xi \\ \gamma''(0) &= \bar{\nabla}_\xi\xi = 0 \end{aligned}$$

$\gamma'''(0) \wedge \gamma''(0) \wedge \gamma'(0) = 0$ *bulunur. Böylece* M *half-lightlike altmanifoldu dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.*

4.1.1 R_2^4 Semi-Riemann Manifoldunun Non-Dejenere Düzlemsel Normal Kesitli Half-Lightlike Altmanifoldları

Tanım 4.1.2. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde $v \in S(TM)$ ve $p \in M$ olmak üzere*

$$E\left(p,v\right) = \{v\} \cup tr\left(TM\right)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E\left(p,v\right) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma\left(0\right) = p \in M$ noktasında $v = \gamma'\left(0\right)$ doğrultusunda non-null bir eğridir. Bu eğriye M half-lightlike altmanifoldunun non-dejenere normal kesit eğrisi denir.

$(M, g, S(TM))$, $(\bar{g}, R_2^4)$ semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. $S(TM)$ ekran distribusyonu integrallenebilir, M', $S(TM)$' nin integral altmanifoldu ve M, ekran konformal half-lightlike altmanifold olsun. ∇^*, M'' nün Levi-civita konneksiyonu olduğu yerde, $\gamma'\left(s\right) = v$, $\gamma'\left(0\right) = v$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma'\left(s\right) &= v && (4.1.19)\\
\gamma''\left(s\right) &= \bar{\nabla}_v v = \nabla_v^* v + E_1\left(v,v\right)\xi + D_1\left(v,v\right)N + D_2\left(v,v\right)u && (4.1.20)\\
\gamma'''\left(s\right) &= \nabla_v^*\nabla_v^* v + E_1\left(v,\nabla_v^* v\right)\xi \\
&\quad + D_1\left(v,\nabla_v^* v\right)N + D_2\left(v,\nabla_v^* v\right)u \\
&\quad + v\left(E_1\left(v,v\right)\right)\xi + v\left(D_1\left(v,v\right)\right)N \\
&\quad + v\left(D_2\left(v,v\right)\right)u - E_1\left(v,v\right)A_\xi^* v \\
&\quad + E_1\left(v,v\right)u_1\left(v\right)\xi + E_1\left(v,v\right)D_2\left(v,\xi\right)u \\
&\quad - D_1\left(v,v\right)A_N v + D_1\left(v,v\right)\rho_1\left(v\right)N \\
&\quad + D_1\left(v,v\right)\rho_2\left(v\right)u - D_2\left(v,v\right)A_u v \\
&\quad + D_2\left(v,v\right)\varepsilon_1\left(v\right)N && (4.1.21)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Normal kesit tanımından ve $S(TM) = Sp\left\{v\right\}$ olduğundan

$$v \wedge \nabla_v^* v = 0 \qquad (4.1.22)$$

ve

$$v \wedge \nabla_v^* \nabla_v^* v = 0 \tag{4.1.23}$$

ifadeleri geçerlidir.

Teorem 4.1.7.

$$T(v,v) = E_1(v,v)\,\xi + D_1(v,v)\,N + D_2(v,v)\,u$$

olmak üzere M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun bir ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. γ, $\gamma'(s) = v \in S(TM)$ doğrultusunda $p \in M$ noktasında M' nin non-dejenere normal kesit eğrisi olsun. M' nin non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart

$$T(v,v) \wedge \bar{\nabla}_v T(v,v) = 0 \tag{4.1.24}$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olsun. O zaman

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$$

ifadesine sahip oluruz. Burada (4.1.22) ve (4.1.23) denklemleri kullanılırsa

$$E_1(v,v)\,\xi + D_1(v,v)\,N + D_2(v,v)\,u$$

ifadesiyle

$$\begin{aligned}
&E_1(v,\nabla_v^* v)\,\xi + D_1(v,\nabla_v^* v)\,N + D_2(v,\nabla_v^* v)\,u \\
&+v(E_1(v,v))\,\xi + v(D_1(v,v))\,N + v(D_2(v,v))\,u \\
&-E_1(v,v)\,A_\xi^* v + E_1(v,v)\,u_1(v)\,\xi + E_1(v,v)\,D_2(v,\xi)\,u \\
&-D_1(v,v)\,A_N v + D_1(v,v)\,\rho_1(v)\,N + D_1(v,v)\,\rho_2(v)\,u \\
&-D_2(v,v)\,A_u v + D_2(v,v)\,\varepsilon_1(v)\,N
\end{aligned}$$

ifadesi lineer bağımlı olmak zorundadır. γ' nın yay parametresiyle verildiğini kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} T(v,v) &= E_1(v,v)\xi + D_1(v,v)N + D_2(v,v)u \\ \bar{\nabla}_v T(v,v) &= v(E_1(v,v))\xi + v(D_1(v,v))N + v(D_2(v,v))u \\ &\quad -E_1(v,v)A^*_\xi v + E_1(v,v)u_1(v)\xi + E_1(v,v)D_2(v,\xi)u \\ &\quad -D_1(v,v)A_N v + D_1(v,v)\rho_1(v)N + D_1(v,v)\rho_2(v)u \\ &\quad -D_2(v,v)A_u v + D_2(v,v)\varepsilon_1(v)N \end{aligned}$$

ifadelerinden

$$T(v,v) \wedge \bar{\nabla}_v T(v,v) = 0$$

elde edilir. Şimdi tersini kabul edelim. Yani $T(v,v) = E_1(v,v)\xi + D_1(v,v)N + D_2(v,v)u$ olmak üzere (4.1.24) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde $T(v,v) = 0$ veya $\bar{\nabla}_v T(v,v) = 0$ dır. Ya da $\bar{\nabla}_v T(v,v)$ ile $T(v,v)$ lineer bağımlı olmalıdır. Eğer $T(v,v) = 0$ ise $E_1 = D_1 = D_2 = 0$ olup M tamamen geodeziktir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= v \\ \gamma''(s) &= \nabla^*_v v \\ \gamma'''(s) &= \nabla^*_v \nabla^*_v v \end{aligned}$$

olup $\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$ bulunur. Eğer $\bar{\nabla}_v T(v,v) = 0$ ise M, γ boyunca paraleldir. Normal kesit tanımından (4.1.22) ve (4.1.23) denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) &= v \wedge T(v,v) \wedge \bar{\nabla}_v T(v,v) \\ &\quad + v \wedge T(v,v) \wedge (E_1(\nabla^*_v v, v)\xi \\ &\quad + D_1(\nabla^*_v v, v)N + D_2(\nabla^*_v v, v)) \\ \gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna, buradanda M' nin non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu kanısına varılır. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 4.1.2. *M örnek4.1.1' de verilen 4-boyutlu 2-indeksli* $(R_2^4, \bar{g})$ *semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun.* $p \in M$*' de* $U_2 \in S(TM)$ *olmak üzere* M*' ye tanjant spacelike vektör* U_2 *verilsin.* U_2 *ve transversal uzay* $tr(TM)$*' nin birleşimi* R_2^4*' te* $p \in M$ *noktasında* $E(p, U_2)$ *altuzayını tanımlar.* $E(p, U_2)$ *altuzayı ile* M*' nin arakesiti* $p \in M$*' nin bir komşuluğunda* U_2 *spacelike vektörü doğrultusunda* M*' nin non-dejenere düzlemsel normal kesiti diye adlandırılan* γ *eğrisini tanımlar. Şimdi biz* R_2^4 *semi-Riemann manifoldunun bu half-lightlike altmanifoldunun non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olma şartlarını araştıralım [41].*

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= U_2 = \sqrt{2}\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_2 + \left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_3 - \sqrt{2}\left(x^1-x^2\right)\partial_4 \\
\gamma''(s) &= \bar{\nabla}_{U_2}U_2 = 2\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right).\left\{2\left(x^2-x^1\right)\partial_2 + \sqrt{2}\left(x^2-x^1\right)\partial_3 + \partial_4\right\} \\
\gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_{U_2}\bar{\nabla}_{U_2}U_2 = \nabla_{U_2}\bar{\nabla}_{U_2}U_2 + D_2\left(U_2, \bar{\nabla}_{U_2}U_2\right)u \\
&= \sqrt{2}\left(1+\left(x^1-x^2\right)^2\right)\begin{bmatrix} 4\left(1+3\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_2 \\ 2\sqrt{2}\left(1+3\left(x^1-x^2\right)^2\right)\partial_3 - 4\left(x^1-x^2\right)\partial_4 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{4\sqrt{2}(1+\left(x^2-x^1\right)^2)}{\left(1+\left(x^1-x^2\right)^4\right)}\left(x^1-x^2\right)^3\begin{bmatrix} 2\left(x^2-x^1\right)\partial_2 \\ +\sqrt{2}\left(x^2-x^1\right)\partial_3 \\ +\left(1+x^1-x^2\right)\partial_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

türevlerini bulduktan sonra direkt hesaplamayla $D_1(U_2, U_2) = 0$ *olduğu gözönünde bulundurulursa*

$$\gamma''(s) = \nabla^*_{U_2}U_2 + E_1(U_2, U_2)\xi + D_2(U_2, U_2)u$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
E_1(U_2, U_2) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{U_2}U_2, N\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

ve

$$\nabla^*_{U_2}U_2 = 4\left(x^2-x^1\right)^3\partial_2 + \sqrt{2}\left(x^2-x^1\right)^3\partial_3 + 2\left(x^2-x^1\right)\partial_4$$

bulunur. Buradan $\nabla^*_{U_2}U_2$ *ile* U_2*' nin lineer bağımlı olduğu görülür.* γ''' *ifadesinden*

$$E_1\left(U_2, \nabla^*_{U_2}U_2\right) = \bar{g}\left(\gamma''', N\right) = 0 \tag{4.1.26}$$

olduğundan $E_1(U_2,U_2)\xi + D_2(U_2,U_2)u$ *ile* $E_1\left(U_2,\nabla^*_{U_2}U_2\right)\xi + D_2\left(U_2,\nabla^*_{U_2}U_2\right)u$ *ifadelerininde lineer bağımlı olduğu sonucuna varılır. Böylece (4.1.25) ve (4.1.26) ifadelerinden* $\bar{\nabla}_v T(v,v)$ *ile* $T(v,v)$*' nin lineer bağımlı olduğu görülür. Böylece* M*' nin non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu sonucuna varılır.*

Örnek 4.1.3. R^4_1*'ün*

$$x_1 = x_3, x_2 = (1-x_4)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilen M *altmanifoldunu gözönüne alalım.* $\left(x_1,(1-x_4)^{\frac{1}{2}},x_1,x_4\right)$ *ifadesinin sırasıyla* x_1 *ve* x_4*' e göre kısmi türevleri alınırsa*

$$\begin{aligned} X_{x_1} &= (1,0,1,0) \\ X_{x_4} &= \left(0,-\frac{x_4}{x_2},0,1\right) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} TM &= Sp\{\xi = \partial x_1 + \partial x_3, v = -x_4\partial x_2 + x_2\partial x_4\} \\ TM^{\perp} &= Sp\{\xi = \partial x_1 + \partial x_3, u = x_2\partial x_2 + x_4\partial x_2\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $RadTM = Sp\{\xi\}$, $S(TM) = Sp\{v\}$, $S(TM^{\perp}) = Sp\{u\}$ *ve* $ltr(TM) = Sp\left\{N = \frac{1}{2}(\partial x_1 + \partial x_3)\right\}$ *olup* M, R^4_1*' ün bir half-lightlike altmanifoldudur [41].*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_v\xi &= \nabla_v\xi + D_2(v,\xi)u = -A^*_\xi v + D_2(v,\xi)u \\ \bar{g}(\nabla_v\xi,v) &= -\bar{g}\left(A^*_\xi v,v\right) \end{aligned}$$

olup $\nabla_v\xi = 0$ *olduğu gözönünde bulundurulursa*

$$\bar{g}\left(A^*_\xi v,v\right) = 0 \Rightarrow A^*_\xi v = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_v N &= -A_N v + \rho_1(v)N + \rho_2(v)u \\ \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v N,v\right) &= -\bar{g}(A_N v,v) \\ \bar{g}\left(N,\bar{\nabla}_v v\right) &= \bar{g}(A_N v,v) \\ \bar{g}(N,\nabla_v v) &= \bar{g}(A_N v,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_v v &= (v[0], v[-x_4], v[0], v[x_2]) = (0, -x_2, 0, -x_4) \\
\bar{g}(N, \nabla_v v) &= \bar{g}\left(\frac{1}{2}(-1,0,1,0), (0,-x_2,0,-x_4)\right) = \bar{g}(A_N v, v) = 0 \\
&\Rightarrow A_N v = 0
\end{aligned}$$

ya da $A_N v \in RadTM$ ifadelerini elde ederiz. Şimdi $D_1(v,v)$ ifadesini hesaplıyalım.

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_v v &= \nabla_v v + D_1(v,v) N + D_2(v,v) u \\
&\Rightarrow D_1(v,v) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v v, \xi\right) = -\bar{g}\left(v, \bar{\nabla}_v \xi\right) \\
&\Rightarrow D_1(v,v) = \bar{g}\left(A^*_\xi v, v\right) = 0
\end{aligned}$$

olup $D_1(v,\xi) = 0$ olduğuda göz önünde bulundurulursa $D_1 = 0$ bulunur.

$$D_2(v,v)\,\epsilon = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v v, u\right) = -\bar{g}\left(v, \bar{\nabla}_v u\right) = \bar{g}(v, A_u v)$$

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v v, N) = \bar{g}(A_u v, N) = 0$$

olduğundan $A_u v \in S(TM)$ olup

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v v &= \nabla_v \nabla_v v + D_2(v, \nabla_v v) u + A_u v - \varepsilon_1(u) N \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v v, u\right) &= D_2(v, \nabla_v v)\,\epsilon = -\bar{g}(v, \nabla_v v) = 2x_2 x_4 \\
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v v, \xi\right) &= -\varepsilon_1(u) \\
\rho_1(v) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v N, \xi\right) = -\bar{g}(A_N v, \xi) = 0 \\
\rho_2(v) &= \epsilon \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v N, u\right) = -\epsilon \bar{g}(A_N v, u) = 0 \\
\varepsilon_1(u) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v v, \bar{\nabla}_v \xi\right) = 0 \Rightarrow D_2(v, \xi) = 0 \\
\epsilon D_2(v,v) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_v v, u\right) = -\bar{g}(v, A_u v) = -\bar{g}(v,v) = -1
\end{aligned}$$

M üzerinde $v \in S(TM)$ ve $p \in M$ olmak üzere

$$E(p,v) = \{v\} \cup tr(TM)$$

afin uzayını oluşturalım.

$$E(p,v) \cap M = \gamma$$

olup γ, $\gamma(0) = p \in M$ noktasında $v = \gamma'(0)$ doğrultusunda M' nin non-dejenere *normal kesit eğrisidir. Buradan*

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= v = (0, -x_4, 0, x_2)\\ \gamma''(s) &= \bar{\nabla}_v v = \nabla_v v + D_2(v,v)\,u = (0, -2x_2, 0, -2x_4)\\ \gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v v = \left(0, 2x_4 + 4x_2^2 x_4, 0, -2x_2 + 2x_2 x_4^2\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$$

olup M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir.

Önerme 4.1.1. *M, R_2^4' semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahipse γ, $v \in \Gamma(S(TM))$ için $v = \gamma'(s)$ doğrultusunda M' nin non-dejenere normal kesiti olduğu yerde*

$$\nabla_v^* v = 0 \tag{4.1.27}$$

ifadesi elde edilir.

İspat. $v \in S(TM)$ olduğu için normal kesit tanımından

$$\langle v, v\rangle = 1 \Rightarrow \langle v, \nabla_v^* v\rangle = 0 \tag{4.1.28}$$

ifadesini elde ederiz, (4.1.22) ve (4.1.23) ifadeleri ile (4.1.28) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$\nabla_v^* v = 0$$

elde edilir. □

Tanım 4.1.3. *Şimdi*

$$\bigcup_p M = \left\{ v \in \Gamma(TM) \mid \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \epsilon \right\}$$

ile verildiğinde $\bigcup_p M$ üzerinde

$$L_p : T_pM \longrightarrow R$$

$$L(p, v) = L_p(v) = \langle R(v,v), R(v,v)\rangle$$

şeklinde bir L fonksiyonu tanımlıyalım. Eğer $L \neq 0$ ise o zaman M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir. γ üzerindeki bir p noktasında γ eğrisinin κ eğriliği için $\frac{\epsilon d\kappa^2(0)}{ds} = 0$ sağlanıyorsa $p = \gamma(0)$ noktasına γ eğrisinin bir köşesi denir.

M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahipse γ, $v \in \Gamma(S(TM))$ için $v = \gamma'(s)$ doğrultusunda M' nin normal kesiti olduğu yerde

$$\nabla_v^* v = 0$$

ifadesi geçerliydi. Bu ifadeyi göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned} \epsilon\kappa^2(s) &= 2E_1(v,v)\,D_1(v,v) + D_2^2(v,v)\,\epsilon \\ \frac{1}{2}\epsilon\frac{d\kappa^2(0)}{ds} &= v(E_1(v,v)\,D_1(v,v)) + v(D_2(v,v))D_2(v,v)\,\epsilon \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Eğer M tamamen geodezik ise $D_1 = D_2 = 0$ olup buradan

$$\frac{1}{2}\epsilon\frac{d\kappa^2(0)}{ds} = 0$$

elde edilir. Yani γ bir köşe noktasına sahiptir. Bu bulduklarımızdan faydalanarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.1.8. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip, $\gamma(0) = p \in M$ de tamamen geodezik ise normal kesit eğrisi γ, $p \in M$ de bir köşe noktasına sahiptir.*

Teorem 4.1.9. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip ekran konform half-lightlike altmanifoldu olsun. Normal kesit eğrisi γ, $\gamma(0) = p \in M$ de bir köşe noktasına sahiptir gerek ve yeter şart M half-lightlike altmanifoldu minimaldir.*

İspat. Eğer non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip M half-lightlike altmanifoldu tamamen geodezik ise

$$tr\mid_{S(TM)} h = 0$$

ve

$$\varepsilon_1(\xi) = 0$$

ifadelerinden kolayca M' nin minimal olduğunu söylüyebiliriz. Teoremin tersi zaten aşikardır. $\square$

Teorem4.1.6 ve Teorem4.1.9 birleştirilirse aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.10. *M, $R_2^4(c)$ ' ün non-dejenere düzlem normal kesitlere sahip half-lightlike altmanifoldu olsun. M ' nin $\forall v \in \Gamma(S(TM))$ ve $\forall \xi \in \Gamma(RadTM)$ için*

$$K_\xi(H) = \epsilon\left[D_2(v,\xi)D_2(\xi,v) - D_2(\xi,\xi)D_2(v,v)\right]$$

şeklinde verilen dejenere kesit eğriliği sıfırdır gerek ve yeter şart non-dejenere normal kesit eğrisi γ, $p \in M$ de bir köşe noktasına sahiptir.

İspat. M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahipse minimaldir$\Leftrightarrow$ M tamamen geodeziktir $\Leftrightarrow$ $K_\xi(H) = 0$ dır$\Leftrightarrow$ Non-dejenere normal kesit eğrisi γ, $p \in M$' de bir köşe noktasına sahiptir. $\square$

Teorem 4.1.11. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M ' nin non-null normal kesit eğrisi γ, p nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay olsun. M ' nin non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart $h(v,v) = D_1(v,v)N + D_2(v,v)u$ olmak üzere*

$$h(v,v) \wedge (\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat. γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay olsun. Bu durumda

$\nabla_v v = 0$ olup

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= v \\
\gamma''(s) &= D_1(v,v)N + D_2(v,v)u \\
\gamma'''(s) &= v(D_1(v,v))N + v(D_2(v,v))u \\
&\quad -D_1(v,v)A_N v + D_1(v,v)\rho_1(v)N \\
&\quad +D_1(v,v)\rho_2(v)u - D_2(v,v)A_u v \\
&\quad +D_2(v,v)\varepsilon_1(v)N
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer γ düzlemsel bir eğri ise yani M non-dejenere düzlemsel normal kesitlere sahipse

$$v \wedge (D_1(v,v)N + D_2(v,v)u) \wedge \begin{pmatrix} v(D_1(v,v))N + v(D_2(v,v))u \\ -D_1(v,v)A_N v + D_1(v,v)\rho_1(v)N \\ +D_1(v,v)\rho_2(v)u - D_2(v,v)A_u v \\ +D_2(v,v)\varepsilon_1(v)N \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır.

$$h(v,v) = D_1(v,v)N + D_2(v,v)u$$

ifadesinin kovaryant türevinden

$$(\bar{\nabla}_v h)(v,v) = \bar{\nabla}_v h(v,v) = \gamma'''(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = v \wedge h(v,v) \wedge (\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$$

denkleminden

$$h(v,v) \wedge (\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$$

bulunur. Şimdi tersini kabul edelim yani $h(v,v) \wedge (\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$ olsun. Bu durumda ya $h(v,v) = 0$ olmalıdır ya da $(\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$ olmalıdır. Eğer $h(v,v) = 0$ ise $D_1(v,v) = 0$ ve $D_2(v,v) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\gamma''(s) = h(v,v)$$

olup

$$\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$$

bulunur. Eğer $(\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$ ise $(\bar{\nabla}_v h)(v,v) = \bar{\nabla}_v h(v,v) = \gamma'''(s) = 0$ ifadesinden $\gamma'''(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'(s) = 0$ olduğu böylece M' nin non-null düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu görülür. □

Teorem 4.1.12. *M, R_2^4 semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M' nin non-null normal kesit eğrisi γ, p' nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1. $(\bar{\nabla}_v h)(v,v) = 0$
2. $\bar{\nabla} h = 0$
3. *M, $p \in M$' de non-null düzlemsel normal kesitlere sahiptir ve p noktasında γ bir köşe noktasına sahiptir.*
4. *$S(TM)$ 'de $D_2 = 0$.*

İspat. γ üzerindeki bir p noktasında γ eğrisinin κ eğriliği için

$$\begin{aligned}
\epsilon\kappa^2(s) &= \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \\
&= D_2^2(v,v)\,\epsilon \\
\frac{1}{2}\epsilon\frac{d\kappa^2(s)}{ds} &= v\left(D_2(v,v)\right) D_2(v,v)\,\epsilon
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon\frac{d\kappa^2(s)}{ds} &= \langle \gamma'''(s), \gamma''(s) \rangle \\
&= \left\langle (\bar{\nabla}_v h)(v,v), h(v,v) \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $D_2(v,v) = 0$ bulunur. Buradan yukarıdaki ifadelerin birbirine denk olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] Arnold, V.I. *Contact geometry: The geometrical method of Gibbs's Thermodynamics*, Proc. Gibbs Symposium, Yale University, 1989, 163-179.

[2] Bejancu, A. *Lightlike Curves in Lorentz manifolds*, Publications Math. Debrecen, 44, (1994), 145-155

[3] Bejancu, A. and Duggal, K.L. *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian Manifolds*, Acta Appl. Math. 38, (1995), 197-215

[4] Bootby, W.M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc, (1986)

[5] Beem, J.K. and Ehrlich, P.E. *Global Lorentzian Geometry*, Marcell Dekker Inc., (1981)

[6] Chen, B.Y. *Geometry of Submanifolds. Pure and Apllied Mathematics*, No.22, Marcell Dekker.,Inc., New York, (1973)

[7] Duggal, K.L. and Bejancu, A. *Lightlike submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 364, (1996)

[8] Duggal, K.L. and Jin, D.H. *Totally umbilical lightlike submanifolds*, Acta Math. H, 106(1-2)(2005),137-165

[9] Hacisalihoglu,H.H. *Diferensiyel Geometri cilt I.II.III*, (1993), Ankara.

[10] Ioan, C.I. *Degenerate Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds*, N.S. 58.(1997),1-7

[11] Ioan, C.I. *Totally umbilical lightlike submanifolds*, N.S. 58.(1997),18-30

[12] Ikawa, D. *On curves and submanifolds*, Indian J. pure appl. Math.,34(9) (2003),1369-1380

[13] Katsuno, K. *Null hypersurfaces in Lorentzian Manifolds*.II. Math. Proc. Cambridge Philos.Soc.88(1980),no.1,175-182

[14] K. Nomizu*Fundamental of Linear Algebra*, McGrow-Hill Book Com.(1996)

[15] Kupeli, D.N. *Singular semi-Riemannian geometry*, Kluwer Academic Publishers,366,1996

[16] Neil, B.O. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press. 1971.

[17] Perlick, V. *On totally umbilic submanifolds of semi-Riemannian manifolds*, Nonlienaer Anal.,63/5-7(2005),511-518.

[18] Sabuncuoğlu, A. *Lineer Cebir*, Nobel Yayın,(2004)

[19] Sahin, B. *CR- Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi,(1996)

[20] Sahin, B. *Lightlike Manifoldların AltmanifoldlarıÜzerine* Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi,(2000)

[21] Yildirim, C. *Belirsiz Sasakiyan Manifoldlarının Dejenere AltmanifoldlarıÜzerine* Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi,(2009)

[22] Yano, K. and Kon, M. *Structures on Manifolds*, World Scientific, (1984)

[23] Shi-Jie Li. *Submanifolds with Pointwise Planar Normal Sections in Sphere*, J.geom.70(2001)101-107

[24] Chen, B.Y. *Submanifolds with planar normal sections*, Soochow J. Math. 7(1981),19-24

[25] Chen, B.Y. *Differential geometry of submanifolds with planar normal sections*, Ann. Mat. Pura Appl.130(1982),59-66

[26] Li, S. J. *Spherical submanifolds with pointwise 3-or 4-planar normal sections*, Yokohama Math. J. 35(1987), 22-31

[27] Chen, B.Y and Li, S. J. *Classification of surfaces with pointwise planar normal sections and its application to Fomenko's conjecture*, J.Geom. 26(1986),21-34

[28] Blomstrom, C.*Planar geodesic immersions in pseudo-Euclidean Space*, Math. Ann. 274(1986),585-589

[29] Chen, B.Y. *Classification of surfaces with planar normal sections*, J. of Geometry 20(1983), 122-127

[30] Deprez, J. and Verheyen, P. *Immersions with circular normal sections and normal sections of product immersions*, Geometriae Dedicate 20(1986), 335-344.

[31] Erbacher, J. *Reduction of codimension of isometric immersions*, J. Differential Geom. 5(1971), 333-340

[32] Hong, S.L. *Isometric immersions of manifolds with plane geodesics into Euclidean space*, J. Differential Geom. 8 (1973), 259-278

[33] Hong,Y. *On submanifolds With planar normal Sections*, Mich. Math. J. 32(1985), 203-210

[34] Houh, C.-S. and Wang, G.-Q. *Isotropic submanifolds with pointwise planar normal sections*, J. Geometry 20 (1986), 99-104

[35] Little, J.A. *Manifolds with planar geodesics, J. Differential Geometry*, 11(1976), 265-285

[36] Sakamoto, K.*Planar geodesic immersions*, Tohoku Math. J. 229 (1977), 25-56.

[37] Kim, Y.H.*Minimal surfaces of pseudo-Euclidean spaces with geodesic normal sections*, Differential Geometry and its Applications 5(1995) 321-329

[38] Chen, B.Y and P. Verheyen. *Submanifolds with geodesic normal sections*, Math.Ann.269(1984)417-429

[39] Kim, Y.H. *Surfaces in a pseudo-Euclidean space with planar normal sections*, J. Geom. 35(1989)120-131

[40] Kim, Y.H. *Pseudo-Riemannian submanifolds with pointwise planar normal sections*, Math J. Okayama Univ. 34(1992),249-257

[41] Krishan L. Duggal and Bayram Sahin. *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Springer Bighause,(2010)

[42] Krishan L. Duggal and Dae Ho Jin.*Null Curves and hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific,(2007)

[43] Leop,M.D.,Rotriques,P.R.*Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, Elsevier S.C., 1989

[44] Kadri Arslan.*Noktasal düzlemsel normal kesitlerle immersiyonlar*, Geometri ABD. Uludağ Ünv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa Y.L.Tezi,1988

[45] Kadri Arslan.*Non-spherical submanifolds with pointwise 2-planar normal sections*, Bulletin of the London Math. Soc. (1996) 28 (1):88-92

ÖZGEÇMİŞ

8 Nisan 1977 tarihinde Konya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kıbrıs ve İzmir' de tamamladı.1994 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 1998' de mezun oldu. 1999' da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 2003 yılında Yüksek Lisans eğitimini tamamladı. 2001 yılında İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak işe başladı. 2008 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora programına kayıt yaptırdı. Evli ve iki çocuk sahibi olup halen Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesinde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır.