T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMI-RIEMANNIAN UZAYLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Mehmet GÖÇMEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2012

Tezin Başlığı : Semi-Riemannian Uzaylarında Bazı Özel Eğrilerin Geometrisi

Tezi Hazırlayan : Mehmet GÖÇMEN

Sınav Tarihi : 20.06.2012

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŞ (Danışman)	(İnönü Üniversitesi)	____________
Prof. Dr. Bayram ŞAHİN	(İnönü Üniversitesi)	____________
Doç. Dr. Erol KILIÇ	(İnönü Üniversitesi)	____________
Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ	(Fırat Üniversitesi)	____________
Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ	(İnönü Üniversitesi)	____________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Semi-Riemannian Uzaylarında Bazı Özel Eğrilerin Geometrisi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet GÖÇMEN

Bu çalışmayı, matematikçi olma yolunda beni cesaretlendiren ve onure eden değerli hocam Prof.Dr Sadık KELEŞ'e ithaf ediyorum.

ÖZET

Doktora Tezi

SEMI-RIEMANIAN UZAYLARINDA BAZI ÖZEL
EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Mehmet GÖÇMEN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

65+v sayfa

2012

Danışman: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. İkinci bölümde R_1^4 uzayında yeni bir Bertrand eğrisi tanımı yapıldıktan sonra bu tanıma bağlı kalınarak Minkowski-4 uzayındaki null bir eğrinin hangi şartlar altında bir Bertrand eğrisi olduğu araştırıldı. Daha sonra R_1^5 uzayındaki null küresel eğriler eğrilik fonksiyonları yardımıyla karakterize edildi. Bu bölümde son olarak R_1^3 ve R_1^4 uzaylarındaki Bertrand eğrilerinin açık bir şekilde sınıflandırılması yapıldı.

Üçüncü bölümde İkinci bölümdeki Bertrand eğrisi fikri tekrar kullanılarak R_1^4 uzayındaki bir spacelike eğrinin (2-dejenere eğri) hangi şartlar altında bir Bertrand eğrisi olduğu incelendi.

Son bölümde iki indeksli ve düşük boyutlu pseudo Öklid uzaylarındaki null Bertrand eğrileri ve n-boyutlu ve iki indeksli pseudo Öklid uzaylarındaki null küresel eğriler incelendi. Ayrıca R_2^6 uzayındaki null bir eğrinin evalütü ve spacelike bir eğrinin involütü tanımlanıp, düzlemsel bir eğri için evalüt ve involüt kavramları arasındaki ilişkinin bu eğriler içinde geçerli olduğu görüldü.

ANAHTAR KELİMELER: Bertrand eğrisi, null Cartan eğri, 2-dejenere eğri, dejenerasyon derecesi, indeks dizisi, nulluk derece dizisi, kongruens.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE GEOMETRY OF SOME SPECIAL CURVES
IN SEMI-RIEMANNIAN SPACES

Mehmet GÖÇMEN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

65+v pages

2012

Supervisor: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

This work consists of four chapters. In the first chapter, the basic concepts of differential geometry relating to the subjects in the main chapters of this thesis are introduced.

In the second chapter, a new idea of Bertand curves is presented. Abiding by this idea the conditions are investigated for a null curve to be a Bertrand curve. After that, null spherical curves in R_1^5 are characterized by their curvature functions. Finally in this chapter, we obtained a classification of Bertrand curves in R_1^3 and R_1^4.

In the third chapter, by using the same notion of Bertrand curve in the second chapter, we established the conditions for a spacelike curve in R_1^4 so that it would be a Bertrand curve.

In the last chapter, null Bertrand curves in a low dimensional pseudo-Euclidean space of index two and null spherical curves in R_2^n are determined. After defining the evolute of a null curve and the involute of a spacelike curve in R_2^6, a correspondence between them which is similar to that between the plane evolute and the involute is shown.

KEY WORDS: Bertrand curves, null Cartan curves, 2-degenerate curve, degeneration degree, index sequence, nullity degree sequence, congruence.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e ve karşılaştığımız zorluklar esnasında bana zamanını ve bilgisini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Bayram Şahin'e ve Sayın Doç. Dr. Erol Kılıç'a teşekkürlerimi sunarım. LaTeX yazılım programının inceliklerini bana öğreten ve bu programla ilgili ardı gelmeyen sorularıma hiç sıkılmadan cevap veren Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Kemal Özdemir'e ve yine gerek yazılım gerekse tez ve makale yazım kuralları ile ilgili bilgi ve donanımını benimle paylaşan sayın Yrd. Doç. Dr Selcen Yüksel Perktaş'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Öklid düzlemi günümüze kadar bir çok değişik bakış açılarıyla değerlendirilmiştir. Bu bakış açılarından birine göre düzlem geometri, noktaları, doğruları ve çemberleri kendisine konu eden ve bu figürlerin aşikar olan özelliklerini aksiyom olarak kullanarak elde edilen daha az aşikar özellikteki teoremleri içerir. Bu klasik bakış açısına sentetik bakış açısı denir. Bu görüş, geometrinin asıl uzayı tanımladığı fikrini temel kabul eder. Bu bakış açısında doğrular ve çemberler teorisi cetvel ve pergelle yapılan işleri açıklar. Bu teoriyi geliştirmek için Öklid (M. Ö. 300) doğrular ve çemberlerle ilgli bir takım özellikleri aksiyom olarak ifade edip, sadece saf mantık kullanarak bazı teoremler ifade etti. Öklid ara sıra hiç o ana kadar ifade edilmemiş aksiyomlara da başvurdu, fakat onun bu yaklaşımı uygulanabilir bir bakış açısına sahipti. Bu bakış açısı daha sonra Hilbert (1899) tarafından daha titiz ve dikkatli bir çalışmayla ele alındı. Öklid'in bakış açısının inkar edilemez avantajları vardır. Her şeyden önce bu bakış açısı geometriyi, geometriye ait olmayan kavramları kullanmadan saf ve kendi kendine yeten bir şekilde ortaya koymuştur. Bu bakış açısına göre geometrik teoremlerin gerçek nedeni ancak böyle bir sistemde anlaşılabilir. Bu bakış açısının ihtiva ettiği görsel önsezi sadece gerekli aksiyomları sağlamakla kalmaz aynı zamanda ispatların kısa, şık ve zarif olması için ispatın aşamalarını da düzenler [1].

Bununla birlikte son iki yüzyılda matematikteki büyük gelişmelerden dolayı Öklid'in yaklaşımı yalnız ve etkisiz kaldı. Etkisiz kalmasının sebebi ise Öklid geometrisi bundan böyle uzayın geometrisi değildi ve matematiğin diğer alanları içinde bir temel teşkil etmiyordu. Günümüzde sayılar ve kümeler, sadece geometri için değil matematiğin tamamı için daha geniş bir temel oluşturduğundan nokta ve doğrulardan daha büyük bir önem arzetmektedir. Ayrıca bu bakış açısı cebir ve analizin teknik olanaklarını geometri içinde kullanmaya imkan tanıdığından daha etkilidir. Küme ve sayıların kullanımıyla inşa edilen geometri Descartes'in koordinat geometrisinde kapalı halde sunulduğundan pek anlaşılmaz. Aslında Descartes klasik görüşü savunup nokta, doğru ve eğrilerin varlığının öncelikli önem arzettiğine inandığından, koordinatlar ve denklemlerin sadece bunları daha iyi anlamamıza yardım ettiğini belirtmiştir. Koordinat yaklaşımının anlamını derinlemesine anlayan ilk kişi Riemann (1854) olmuştur. Riemann'a göre geometri uzay kavramını varsaymakla kalmaz aynı zamanda bu uzaydaki yapının temel esaslarınıda kabul ederek, bu esaslar hakkında aksiyom niteliğinde sözde tanımlar verir. Sonuç olarak bu varsayımlar arasındaki ilişkiler karanlıkta kalır. Bu ilişkilerin gerekli olup olmadığı veya ne derece gerekli olduğu, hatta bu varsayımlar arasındaki ilişkilerin öncelikle mümkün olup olmadığı tam olarak anlaşılmaz. Riemann, geometriye daha geniş bir bakış açısının ana hatlarını ortaya koymak için n-boyutlu uzaydaki noktaları n-tane bileşeni olan sayılar olarak görüp bu uzaydaki bütün geometrik ilişkileri herhangi iki nokta arasındaki mesafeyi veren ve diferensiyellenebilir bir fonksiyon olan metrik kavramı ile belirler. Bu analitik yaklaşım çok değişik çeşitlilikteki uzayların aynı anda düşünülebilmesine olanak sağladı. Riemann, uzayların geometrik özelliklerinin metriğin özelliklerinden biri olan ve kendisinin de uzayın eğriliği (curvature) diye adlandırdığı bir kavramla büyük oranda kontrol edildiğini saptadı. Eğrilik kavramı, Öklid geometrisinin aksiyomlarını, onların ancak eğriliğin sıfır olduğu durumda geçerli oduğunu göstererek aydınlatır. Öklid düzlemi eğriliği sıfır olan iki boyutlu bir uzaydır. Bu durumda Öklid uzayının doğal alternatifleri olan sabit pozitif ve sabit negatif eğrilikli uzayların varlığıda aşikar hale gelir. Bu durumda eğrilikteki değişimin, aksiyomun neresinde bir değişime yol açacağı tam olarak saptanabilir. Riemann, eğrilikleri noktadan noktaya değişen uzayları incelemek için analitik bir yöntem oluşturdu. Sabit eğrilikli yüzeylerden oluşan uzaylar için basit yöntemler yeterlidir. Bunun sebebi bu uzayların geometrisinin izometrilerle belirlenebilmesi ve izometrilerin kolay anlaşılabilmesidir. Bu bakış açısını Klein (1872) ortaya koymuştur. İzometri kavramı Öklid'in geometriye bakışındaki bir boşluğu doldurur. Bu bakış açısına göre bir şekil diğeriyle çakışıncaya kadar hareket ettirilir. Buradanda anlaşılacağı gibi izometri ve koordinat kavramları üzerine oturtulmuş geometride analitik ve sentetik yaklaşımlardan yararlanılabilir [1].

Riemann manifoldunun teorik tanımı 1930'lu yılların sonuna doğru yapılır. 1936 yılında Whitney'in çalışmasına kadar teorik anlamda manifoldların tam olarak ne anlama geldiği henüz anlaşılamamıştır. Başka bir deyişle o zamana kadar matematikçiler manifoldları sadece Öklid uzayının bir alt manifoldu olarak görüyorlardı. Riemann'ın kendisi bile Riemann metriğini Öklid uzayının bölgelerinde tanımladı. Bu bakış açısına göre, Riemann manifoldları her tanjant uzayı için bir iç çarpımla tanımlanan yapılar olmaktan çok Öklid uzayının yerel bir bölgesinde genel bir metrik kullanılarak ifade edilen yapılardı. Riemann'dan önce Gauss ve diğerleri sadece iki boyutlu geometri üzerine çalıştılar. Riemann geometrisinin icadının ilginç bir hikayesi vardır. Gauss o dönemler Riemann'ın üstün doktora programının savunma komitesindeki jürilerden biridir. O günlerde jüri, sınava girecek adaylardan üç tane konu başlığı içeren çalışmasını önceden sunmasını ister. Üstü kapalı olarak bilinsede, adaylara genelde birinci başlıkla ilgili sorular sorulurdu. Riemann'ın esas çalışması da Riemann integral ve Fourier serileri üzerine idi. Riemann'ın üçüncü çalışması geometrinin esaslarını konu eden bir hipotez üzerine idi. Riemann sınav esnasında jüriden kendisine ilk iki konu başlığıyla ilgili soru sormasını bekliyordu. Zaten kendiside bu iki konu başlığına iyi hazırlanmıştı. Çok meraklı bir yaradılışa sahip olan Gauss sınav esnasında Riemann'a üçüncü konu başlığıyla ilgili söyleyecek birşeyi olup olmadığını sordu. Bilindiği üzere o dönemde bu konunun uzmanı Gauss idi. Bunun üzerine Riemann, Gauss'un bu konu hakkındaki merakını gidermek için birazda endişeli ve korkuyla eve giderek Riemann geometrisini icat etti. Gauss kolay etkilenecek bir kişiliğe sahip olmamasına rağmen Riemann'ın çalışması onu da büyülemişti. Riemann çalışmalarında değişen metrikler kullandı. Bilinen anlamdaki Öklid metriğini uygun şekilde değiştirerek (conformal change) sabit eğrilikli üç geometriyi bir çırpıda ve ilk defa inşa etti. Riemann'ın keşiflerinden kısa bir süre sonra kutupsal koordinatların kullanıldığı ve bugün karışık çarpım (warped product) olarak bilinen farklı türde bir çarpım elde edildi [2].

Bütün disiplinlerde olduğu gibi diferensiyel geometrinin gelişimi de uzun ve karmaşık oldu. Burdaki esas fikir manifold kavramıydı. Manifold, koordinatları belli bir dönüşüme göre tanımlanmış ve bundan dolayıda değişmez (intrinsic) bir anlama sahip olmayan uzaydır. Hiç şüphesiz bu düşünce orijinal, cesur ve güçlü idi. Dolayısıyla bunun algılanması zaman gerektiriyordu. Örneğin büyük matematkçi Jacques Hadamard [3] Lie grup teorisi fikri üzerinde çalışırken çok zorlandığını ifade etmiştir. Öte yandan Einstein'da 1908 yılında ispatladığı özel izafiyet teorisinden (special relativity) 1915 yılında ispatladığı genel izafiyet (general relativity) teorisine geçerken yedi yılını harcamıştır [4]. Bu yedi yıllık gecikmenin sebebini soranlara 'koordinatların metriksel bir anlama sahip olması gerektiği fikrinden insanın kendini alıkoyması kolay olmuyor' demiştir [5].

Eintsein'ın genel izafiyet teorisini, daha sınırlı bir yapıya sahip olan özel izafiyet (special relativity) teorisine göre daha özel kılan, bu bakış açısının sadece sabit bir hızla düzgün doğrusal hareket yapan nesnelerle ilgilenmekten çok ivme kavramıyla ilgilenmesidir. Fakat Einstein'ın en büyük düşüncesi yer çekimi ile ivmenin birbirinden farklı şeyler olmadığını anlaması olmuştur. Bu düşüncenin Bern'deki patent ofisinde otururken aklına birden geldiğini ifade etmiştir. Bununla ilgili şöyle bir açıklama yapar: Çatıdan aşağı düşen bir adam ağırlıksızdır ve yer çekimini hissetmez. Aşağı düşerkenki ivmesi ağırlık hissini siler, çünkü bu ikisi tam olarak birbirine eşittir. Aslında bizler de asansördeyken ivme ve yerçekiminin eşitliğini hissederiz ; asansör yukarı doğru çıkmaya başladığında asansörün tabanına daha şiddetli bir baskı uygularız ve kendimizi daha ağır hissederiz, asansör durduğunda ve yavaşlamaya başladığında daha hafif hissederiz. Ekspres asansörler çok hızlı olduğundan bunlara bindiğimizde ayak parmaklarımızın ucuna kalkarız. Einstein'ın en büyük dehası ivme ve yerçekimi kavramlarını aynı pakette açıkladığı bir takım denklemler bulabilmiş olması ve Newton mekaniğini bütün ayrıntılarıyla genel izafiyet teorisinin özel bir durumu olarak ortaya koyabilmiş olmasıdır. Britanyalı astrofizikçi Arthur Eddington'un tutulma keşfinden (eclipse expedition) hemen sonra bütün gazetelerin hep bir ağızdan söyledikleri "Einstein'ın teorisi Newton teorisini alt üst etti" gibi söylemlere rağmen Newton'un yerçekimi izahı çok uç şartlar dışında evren'in işleyişini hala yeterince açıklayabliyordu. Newton'un teorisinden daha üstün bir teori mevcutsa, oda Newton'un teorisinin bütün kazanımlarını onaylamak zorunda kalıyordu. Newton'un teorisi için şu notuda düşelimki; o zamana kadar Einstein'ın teorisinden daha iyi bir teori üretilmediği için, Newton'un teorisinin Eistein'ın genel izafiyet teorisini bütün yönleriyle açıklamasını beklemek Newton'a karşı haksızlık olur. 1905-1915 yılları arasında başka bir çok iş yapmış olmakla birlikte, Einstein bu yıllar arasındaki bütün zamanını genel izafiyet teorisini geliştirmeye ayırmıştır. 1909 yılında patent ofisini terkederek (Zürich) Zürih üniversitesinde tam zamanlı akademisyen olmuştur. Buradayken bütün zamanını kuantum fiziğine ayırmıştır. Bu çalışmaları 1911 yılına kadar sürmüştür. 1914 yılında Berline yerleşmiştir. Genel görecelilik teorisini destekleyen matematiksel anahtar kendisine 1912 yılında Zürihte eski bir arkadaşı olan Marcel Grossmann (1878-1936) tarafından verilmiştir. Einstein derslere girmeyi sıkıcı bulduğu için Grosmann kendi ders notlarının bir kopyasını alması için Einstein'a göndermiştir. 1912 yılında Einstein, Hermann Minkowski'nin dört boyutlu uzayda düzgün (flat) geometriler için açık ve net bir şekilde ifade ettiği özel izafiyet teorisini kabul eder. Einstein şunu iyi biliyordu; daha genel fiziksel yapılar için daha genel geometrik yapılara iytiyaç vardı. Tam bu noktada yine Grossmann devreye girdi ve Einstein'a Bernhard Riemann'ı (1826-1866) işaret etti. Riemann o zamana kadar eğri yüzeylerin geometrisini çalışmış ve bu geometriyi değişik ve yüksek boyutlarda tarif etmek için matematiksel araçlar geliştirmişti. Bu geometriye (Non Euclidean) Öklid olmayan geometri deniyordu, çünkü Öklid düz yüzeylerle uğraşıyordu. Öklid olmayan geometrinin uzun bir soyağacı vardır. Gauss (1777-1855) paralel doğruların birbiriyle kesişeceğini, dünyanın yüzeyindeki enlemlerin ekvatorda birbirine paralel olmasına rağmen kutuplarda kesişmesiyle göstermiştir. Çevirisi Non Euclidean olarak bilinen ifadeyi ilk icat eden kişi olmasına rağmen, Gauss bu konuyla ilgili eserlerinin sadece bir kısmını yayınlamıştır. Gauss'un yaptığı bazı buluşlar birbirinden bağımsız çalışan Janos Bolyai (1802-1860) ve Rus Nikolai Lobachevsky (1793-1856) tarafından yeniden keşfedilmiştir. Bu matematikçilerin yaptıkları aslında Gauss'un yaptıklarının bir tekrarıydı, fakat Gauss'un Öklidyen olmayan geometri ile ilgili olarak yaptığı çalışmalar o dönemde anlaşılamadığından Bolyai ve Lobachevsky'nin yaptıkları yeniymiş gibi algılandı. Bolyai ve Lobachevsky Öklidyen olmayan geometrinin özel bir durumu olan küre üzerindeki yüzeyler üzerinde çalışmışlardır. Riemann kendisini farklı kılan yaklaşımını 1854 yılında Göttingen üniversitesinde verdiği bir derste ortaya koymuştur. Riemann burada farklı geometrilerin farklı matematiksel tariflerine olanak tanıyacak ve geometrinin bir bütün olarak ayaklarını yere sağlam basmasını sağlayacak genel bir matematiksel yaklaşım ortaya koydu. Ortaya koyduğu bu yaklaşımların hepsi geçerli olmakla birlikte, bu gün çok yakından bildiğimiz Öklidyen geometriyi de açıklayacak şekildeydi. Riemann'ın bu düşünceleri ingilizlere Britanyalı matematikçi William Clifford (1845-1879) tarafından, Riemann'ın tüberkülozdan ölümünden bir yıl sonra (1867) duyurulmuştur. Clifford, evreni en büyük ölçekde anlamanın en iyi yolunun eğri uzay yapısını kullanmaktan geçtiğini ifade etmiştir. Bu görüşünü desteklemesi ve bu görüşe temel teşkil etmesi açısından Riemann'ın yönteminden büyük ölçüde istifade etmiştir. Clifford 1870 yılında Cambridge felsefe topluluğuna karşı okuduğu makalesinde "uzayın eğriliğinin değişimi" (variation in the curvature of space) hakkında konuşmuştur. Clifford uzayın küçük parçalarının doğal olarak ortalama düzlükteki bir yüzeyin üzerindeki küçük tepelere benzediğini söylemiştir. Başka bir deyişle, geometrinin normal kuralları bu durumu açıklamak için geçerli değildir. Einstein'dan sonra benzer bir bakış açısıyla güneş benzeri madde yoğunlaşmalarının aslında düz olan bir evrenin uzayında küçük gamzeler meydana getirdiği görülmüştür. Einstein'ın doğduğu yıl ölen Clifford (1879) tüberkülozdan ölmüştür. Maalesef oda çalışmalarını tam olarak tamamlayamamıştır. Einstein sahneye çıktığında genel izafiyet teorisi için artık herşey yeteri kadar olgunlaşmıştı ve zamanı gelmişti. Şunu belirtelimki Eistein'ın katkısı küçümsenemeyecek derecede etkili ve özeldi, fakat bu işi tek başına yaptığı şekilde çizilen portre'de biraz abartılmıştır. Genel izafiyet teorisi uzayla madde arasındaki ilişkiyi, bu ikisini birbirine bağlayan yerçekimi olayınıda işin içine katarak açıklar. Maddenin varlığı uzayı büker, ve maddenin uzayda bu kavis yada bükülmeyi takip etmesi bizi yerçekimine götürür. Bütün bu söylemleri en hararetli şekilde ifade eden aforizma: ‘Madde uzaya nasıl bükülmesi gerektiğini söyler, uzayda maddeye nasıl hareket etmesi gerektiğini’. Einstein denklemlerini madde, uzay ve zamanı yani evreni kapsayacak şekilde düzenlemek istiyordu. Genel izafiyet teorisini tamamlar tamamlamaz bunu başardı ve yaptığı çalışmaları 1917 yılında yayınlattı. Einstein'ın bulduğu denklemlerin garip ve beklenmedik özellikleri vardı. Denklemlerin orijinal hali durgun bir evrenin varlığına izin vermiyordu. Denklemlerin ifade ettiği şey; uzay ya genişler ya da küçülür ama asla hareketsiz kalmaz. O zamanlarda (milky way) saman yolu evrenin kendisi olarak düşünülüyordu ve bu saman yolu ne genişleme nede küçülme belirtisi göstermişti. Bir ışık tayfının kırmızı bölgesine yaklaştıkça ışığın dalga boyunun artması sonucu, görülebilen ışığın rengindeki değişime ingilizce redshift diyoruz. Nebulae galaksisinin redshift'lerinin ilk bir kaçı ölçülmüştü, fakat bunların ne anlama geldiği bilinmiyordu. Ayrıca Einstein'ın Slipher'ın çalışmalarından da haberi yoktu. Einstein evreni açıklayan denklemlerine evreni hareketsiz kılacak bir terim daha ekledi. Kozmolojik sabit olarak bilinen bu terim yunan alfabesinin λ (lambda) harfiydi. Einstein'ın deyimiyle bu sabit, yıldızların küçük hızlarından dolayı maddenin sözde hareketsiz dağılımını mümkün kılmak içindi. Aslında burda bir tane kozmolojik sabitten bahsetmekte yanlış olur. Einstein'ın denklemleri farklı lambda sabitleri gerektiriyordu. Bunlardan bazıları model evreni genişleten, en az bir tanesi sabit bırakan ve bazılarıda küçülten türdendi. Fakat Einstein'a göre kendisi uzayı açıklayan eşsiz bir matematiksel tarif bulmuştu ve bu tarif de 1917 yılının bilinen evreniyle tam anlamıyla örtüşüyordu. Einstein'ın genel izafiyet teorisini yayınlamasından sonra başka matematikçiler de başka evren modelleri geliştirmeye başladı. 1917 yılında Hollandalı Willem De Sitter Einstein'ın denklemlerine başka bir çözüm buldu. Onun bulduğu çözümlerde üstel olarak genişleyen bir evren vardı. Şöyleki; belli bir süre içinde iki parçacık arasındaki mesafe iki katına çıktığında aynı süre içinde bir süre sonra bu iki parçacık arasındaki mesafe dört katına çıkıyor, bir sonraki aynı süre diliminde sekiz katına çıkıyor ve sonraki zaman diliminde onaltı katına çıkıyor. Aleksandr Friedmann (1888-1925) Einstein'ın denklemlerine ait bütün çözümleri elde etti. Bu çözümlerden bazıları genişleyen bazılarıda küçülen evrenleri tarif etmiştir. Bu çalışmalarını da 1922 yılında yayınladı. Einstein kendi denklemlerinin evreni açıklayan yegane tarif olduğuna inandığından Friedmann'in bu çalışmaları onu çok sinirlendirmiştir [6].

Teknoloji alanındaki büyük gelişme Ricci hesabının tensör analiziyle gerçekleşti. Burdaki ana tema Riemann'ın 1854 yılında formüle ettiği Riemann geometriydi. Temel problem ise şekil problemiydi, başka bir deyişle koordinatlardaki değişikliğin verilen iki Riemann metriğinde ne zaman değişikliğe yol açacağını saptamakdı. Bu problemde 1870 yılında E. Christoffel ve R. Lipschitz tarafından çözüldü. Christoffel'ın çözümündeki kovaryant türev fikri Levi Civita'nın paralellik kavramıyla daha açık ve net bir anlam kazanır. Tensör analizi çok etkili bir şekilde bir yüzyıl boyunca diferensiyel geometriye hakim olmuştur. Hakettiği itibarı görmeyen başka bir teknik araç ise Elie Cartan'ın dış türev hesabıdır (exterior derivative). Bu teknik Frobenius ve Darboux'un çalışmalarının ardından 1922 yılında Elie Cartan tarafından (1922) yılında icat edilmiştir. Manifold üzerindeki bütün dış diferensiyel yapılar bir halka yapısı oluşturur. Bu halka yapısı sadece manifoldun diferensiyellenebilir yapısına bağlı olup Riemann metrik ve affine konneksiyon (affine connection) gibi ek yapılara bağlı değildir. Topolojik olarak bu yapı daha sonra de Rham teorisinin doğmasına yol açmıştır [4].

Riemann'ın 1854 yılında keyfi n-boyutlu bir manifold için icat ettiği geometriye göre her tanjant uzayı mutlaka bir iç çarpıma sahip olmalıdır. Bu teknik çok küçük miktardaki mesafe ölçümlerini yapmaya olanak sağladı. Basit olarak açıklamak gerekirse p ve $p + dp$ çok yakın iki nokta olmak üzere bunlar arasındaki mesafe 'dp' tanjant vektörünün normuna eşittir. Einstein'ın (1915) genel izafiyet teorisinden alınan güçle teknik fakat daha geniş kapsamlı bir genelleştirme yapıldı. Bu genelleştirmeye göre iç çarpım üzerindeki pozitif tanımlılık şartı nondejenere olarak yumuşatıldı [7].

Yirminci yüzyılın ikinci yarısından itibaren Riemannian geometri ve semi-Riemannian geometri, diferensiyel geometri ve onun matematik ve fizikteki bir çok uygulama alanı için aktif çalışma alanları olmuştur. Marcel Berger'in kitabı [8] o dönemdeki geometricileri de kaynak göstererek 1950 yılından itibaren Riemannian geometrideki önemli gelişmeleri anlatan bir kitaptır.

70'li yılların ortalarından itibaren bu konudaki ilgi matematiksel teorinin izafiyet teorisinde kullanıldığı Lorentzian geometriye kaydı. Bu dönemden itibaren modern diferensiyel geometri ve matematiksel izafiyet teorilerinin birbirlerine olan bağlılıklarının derinliklerinde hem yerel hemde global anlamda çok şaşırtıcı sıçramalar oldu. Global Lorentzian alanda yapılan çalışmaların büyük bölümü Beem ve Ehrlich'in kitabında yayınlanmıştır [9]. Bu kitap Lorentzian manifoldları için jeodezik, metrik tamlık, Lorentzian uzaklık fonksiyonu ve Morse indeks teorisi konularında yoğunlaşmıştır. Ehrlich ve arkadaşları [10] halen, Bishop ve O' Neill [11] tarafından 1969 yılında icat edilen karışık çarpım (warped product) tekniğini kullanarak Lorentzian manifoldları için hacim kıyaslama teoremleri üzerinde çalışmalarına devam etmektedirler.

1996 yılında Duggal ve Bejancu [12] altmanifoldlar teorisindeki önemli bir boşluğu doldurmak için lightlike altmanifoldlar geometrisi üzerine bir kitap yayınladılar. Bu kitap, bir lightlike alt manifolddaki Gauss-Jodazzi denklemlerini elde etmek için, lineer konneksiyon, ikinci temel form gibi indirgenmiş geometrik nesneleri bir nondejenere ekran dağılımı sunarak tanımlayan belirli bir teknik üzerine yazılmış makaleleri içermektedir. O zamandan günümüze kadar bu alanda çalışanlar doğrudan Duggal-Bejancu tekniğini kullanarak lightlike geometri üzerine daha büyük çalışmalar yaptılar. Bunun yanısıra null eğriler ve hiperyüzeylerin geometrisi ve fiziği üzerine yazılan makalelerde artış olmuştur.

H. Matsuda ve S. Yorozu [13] özel Frenet eğrisini tanımlayarak, R^n $(n \geqslant 4)$ uzayındaki bir özel Frenet eğrisinin Bertrand eğrisi olamayacağını gösterdiler. Daha sonra R^4 uzayında genelleştirilmiş bir Bertrand eğrisi tanımı yapıp, bu tanım kapsamında R^4 uzayında (1,3)-Bertrand eğrilerini karakterize ederek bu tip eğriler için bir örnek sundular. K. Honda ve J. Inoguchi [14] , J. Inoguchi ve S. Lee [15] null Bertrand eğri çiftleri üzerinde çalışıp R_1^3 uzayındaki null Bertrand eğriler ile null helisler arasındaki ilişkiyi incelediler. A. Ferrandez, A. Gimenez, P. Lucas [16] Minkowski n-uzayındaki null bir eğrinin türev vektörlerinin oluşturduğu kümenin lineer bağımsız olması durumunda tek bir Cartan çatıya sahip olacağını gösterdiler. Öte yandan M. Sakaki [17] Minkowski n-uzayındaki null bir eğrinin tek bir Cartan çatıya sahip olması için daha önce [16] numaralı makaledeki ön koşulları birazcık yumuşattı. A. Ceylan Çöken ve Ü. Çiftçi [18] Minkowski 4-uzayındaki null Bertrand eğrileri ve bu uzaydaki küresel eğrileri karakterize ettiler.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde temel tanım ve teoremler hatırlatıldı. Çalışmanın orijinal kısımlarından birini oluşturan ikinci bölümde R_1^4 uzayındaki Cartan çatılı null Bertrand eğrileri ve R_1^5 uzayındaki null küresel eğriler incelendi. Bu bölümde R_1^4 uzayında türev vektörleri lineer bağımsız olan null Cartan bir eğrinin Bertrand eğrisi olamayacağı gösterildi. Bu durumda R_1^4 uzayında bilinen anlamda Bertrand eğri kavramı ancak eğrinin türev vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda mevcuttur. Bu aşamada yeni bir Bertrand eğrisi tanımı yapılıp bu tanıma bağlı kalınarak R_1^4 uzayındaki null bir eğrinin hangi şartlar altında Bertrand eğrisi olduğu incelendi. Bu bölümde ayrıca R_1^3 ve R_1^4 uzaylarındaki Bertrand eğrilerinin açık bir sınıflandırılması yapıldı. Üçüncü bölümde, ikinci bölümdeki Bertrand eğri kavramı fikrine bağlı kalınarak R_1^4 uzayındaki 2-dejenere Bertrand eğrileri karakterize edildi. Dördüncü bölümde iki indeksli pseudo öklid uzaylarında dejenerasyon derecesi iki olan eğriler üzerinde çalışıldı. R_2^5 uzayındaki null Bertrand eğriler ve R_2^n uzayındaki küresel null eğriler eğrilik fonksiyonları yardımıyla belirlendi. Düzlemsel bir eğri için evalüt ve involüt kavramları arasındaki ilişkinin R_2^6 uzayında null bir eğrinin evalütü ile spacelike bir eğrinin involütü arasında da mevcut olduğu görüldü.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm ikinci, üçüncü, ve dördüncü bölümlerin daha anlaşılır olması için gerekli olan tanım ve kavramları içerir. Bu bölüm on kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda pseudo Öklid uzaylarda s-dejenere eğri, ikinci kısımda pseudo Öklid uzaylarda dejenere eğri ve dejenerasyon derecesi, üçüncü kısımda n-boyutlu Öklid uzayındaki E^n özel Frenet eğrisi (special Frenet curves), dördüncü kısımda Öklid uzaylarındaki Bertrand eğri kavramları hatırlatılmıştır. Beşinci kısımda Loretzian uzayındaki null bir eğri için Cartan çatı kavramı ve R_q^n uzayındaki pseudo-ortonormal baz tanımı verilmiştir. Altıncı kısımda pseudo Öklid uzayda Bertrand eğri kavramı incelenmiştir. Yedinci ve sekizinci kısımda sırasıyla Öklid uzayındaki küresel eğri ve R_1^4 uzayındaki küresel eğri kavramları sunulmuştur. Dokuzuncu ve onuncu kısımda Öklid uzayındaki bir eğrinin involüt ve evalüt tanımları verilmiştir. On birinci kısımda pseudo Riemannian uzaydaki bir eğri için yay uzunluğu ve regüler eğri kavramları hatırlatılmıştır.

1.1 s-Dejenere Eğriler

E reel vektör uzayı $g : E \times E \to R$ simetrik bilineer dönüşümüyle birlikte verilmiş olsun. E uzayındaki sıfırdan farklı bir $\xi \neq 0$ vektörü için

$$g(\xi, \nu) = 0 \quad \forall \nu \in E$$

şartı sağlanıyorsa g dönüşümüne E üzerinde dejeneredir denir. Aksi taktirde g dönüşümüne nondejenere denir. E uzayının g metriğine göre radikali (başka bir deyişle null uzayı) Rad(E) ile gösterilir ve bu uzay E uzayının bir alt uzayıdır.

$$\mathrm{Rad}(E) = \{\xi \in E \ \mid \ g(\xi, \nu) = 0, \quad \nu \in E\}$$

Daha basit olsun diye g yerine $\langle , \rangle$ notasyonunu kullanacağız. ν vektörüne timelike, lightlike, veya spacelike diyeceğiz sırasıyla, $g(\nu, \nu) < 0$, $g(\nu, \nu) = 0$ (ve $\nu \neq 0$), veya $g(\nu, \nu) > 0$ koşulları sağlanıyorsa. $\nu = 0$ vektörü spacelike bir vektördür. $g(u, u) = \mp 1$ şartını sağlayan u vektörüne birim vektör denir. $g(u, v) = 0$ şartını sağlayan u ve v vektörleri ortogonaldir $(u \perp v)$.

(M_1^n, ∇) yönlendirilmiş Lorentz manifoldu ve $C : I \to M_1^n$ eğrisi de M_1^n uzayında diferensiyellenebilir bir eğri olsun. C boyunca herhangi bir V vektör alanı için V' vektörüde C boyunca V vektör alanının türevi olsun. Şimdi $t \in I$ ve $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$E_i(t) = sp\left\{c'(t), c''(t), ..., c^{(i)}(t)\right\}$$

ve d

$$d = maks\{i : boyE_i(t) = i, \ \forall t \in I\}$$

şeklinde tanımlanan bir sayı olsun. Yukarıdaki notasyona bağlı kalmak üzere, her $1 \leqslant i \leqslant d$, ve her t için $boyRad(E_i(t)) = sabit$, $0 \leqslant s \leqslant d$ aralığında $Rad(E_s) \neq \{0\}$ şartını sağlayacak şekilde bir s var ve $j < s$ için $Rad(E_j) = \{0\}$ ise $C : I \to M_1^n$ eğrisine *s-dejenere* (veya *s-lightlike*) denir. Tanımdanda anlaşılacağı gibi 1-dejenere eğriler null eğrilerdir (lightlike eğriler). Bu çalışmada Minkowski uzay zamanında 2-dejenere eğriler incelendi ($s = 2$). Bu tezin üçüncü bölümünde çalışılan 2-dejenere eğriler spacelike eğrilerdir [19].

Uzay zamanı ile kastedilen, bağlantılı, zaman yönelimli, 4-boyutlu Lorentz manifoldudur. M notasyonuyla gösterilen *Minkowski uzay zamanı* Minkowski 4-uzayına (R_1^4) izometriktir [7]. R_1^4, $\langle , \rangle$ metriğiyle

$$\langle x, y\rangle = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$
$$x, \ y \in R_1^4; \ x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right), \ y = \left(y^0, y^1, y^2, y^3\right), \ x^i, \ y^i \in R, \ 0 \leq i \leq 3$$

tanımlanan 4-boyutlu Lorentz manifoldudur.

C eğrisi R_1^4 uzayında 2-dejenere bir Cartan eğri olsun. Bu eğri için Cartan denklemleri

$$\begin{aligned} c' &= W_1, \\ W_1' &= L, \\ L' &= k_1 W_2, \\ W_2' &= -k_2 L + k_1 N, \\ N' &= W_1 - k_2 W_2. \end{aligned}$$

şeklindedir [19]. Yukarıda L, N vektörleri null, $\langle L, N\rangle = -1$, $\{L, N\}$ ve $\{W_1, W_2\}$ ortogonal, $\{W_1, W_2\}$ ortonormal, $\{L, N, W_1, W_2\}$ pozitif yönlendirilmiştir. Ayrıca

$\left\{c', c'', c''', c^{(4)}\right\}$ kümesi $\{L, N, W_1, W_2\}$ kümesiyle aynı yönlendirmeye sahip ise $k_1 < 0$ olur.

1.2 Pseudo Öklid Uzaylarda Dejenere Eğriler

n-boyutlu reel vektör uzayı V ve $g : V \times V \to R$ simetrik bilineer formu verilsin. $Rad\ V = \{0\}$ olması durumunda V nondejeneredir. Pseudo Öklid uzayı olarak adlandırılan (V, g) yapısı n-boyutlu V reel vektör uzayı ile birlikte onun üzerinde tanımlanan simetrik nondejenere bilineer g metriğinin oluşturduğu bir yapıdır. $W \subset V$ olmak üzere $g\,|_W$ ifadesini negatif tanımlı yapan en büyük W alt uzayının boyutuna g'nin V üzerindeki indeksi denir ve q ile gösterilir. (V, g) yapısı R^n_q ile ifade edilir.

$B = \{V_1, ..., V_n\}$ kümesi bir pseudo Öklid uzayı için sıralı baz ve her i için r_i, q_i değerleride sırasıyla, $span\{V_1, ..., V_i\}$ kümesinin radikal ve indeksinin boyutu olsun. $r_0 = q_0 = 0$ olmak üzere $\{r_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ ve $\{q_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ dizilerine sırasıyla B bazının *nulluk derece dizisi* ve *indeks dizisi* denir. Her $i = 1, 2, ..., n$, için $|r_i - r_{i-1}|$ ve $q_i - q_{i-1}$ ifadeleri 0 veya 1 değerini alır, bununla birlikte $r_n = 0$ ve $q_n = q$ durumu mevcuttur [20].

Tanım 1.2.1. *$B = \{V_1, ..., V_n\}$ kümesi bir pseudo Öklid uzayı için sıralı baz ve $\{r_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ kümeside* nulluk derece dizisi *olsun. Bu durumda*

$$r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |r_i - r_{i-1}|$$

şeklinde tanımlanan pozitif sayıya B bazının dejenerasyon derecesi *denir [20].*

Lemma 1.2.1. *$(E, \langle , \rangle)$ bir bilineer uzay ve F'de bir hiper düzlem olsun. $F_1 = sp\{L_1, .., L_r\}$ totally lightlike, F_2 nondejenere olmak üzere $F = F_1 \perp F_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar mevcuttur.*

(i) $boyRad(E) = r + 1$ ($F_1 \subsetneq Rad\,(E)$) ise, bu durumda

$$E = F_1 \perp F_2 \perp sp\{L\}$$

şartını sağlayacak şekilde tek olmayan bir L null vektörü vardır.

(ii) $boyRad(E) = r$ ($F_1 = Rad\,(E)$) ise,

$$E = F_1 \perp F_2 \perp sp\{V\}$$

şartını sağlayacak şekilde null olmayan birim V vektörü vardır. Ayrıca $Rad\,(E) = \{0\}$ olması durumunda ise V vektörü (işaret farkıyla) tektir.

(iii) $boyRad\,(E) = r - 1$ ($Rad\,(E) \subsetneq F_1$) ise, $\langle L_j, N_j\rangle = \eta$, $\eta = \mp 1$ ve

$$E = (sp\{L_j\} \oplus sp\{N_j\}) \perp sp\left\{L_1, ..., \widehat{L_j}, ..., L_r\right\} \perp F_2$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir N_j vektörü mevcuttur. $Rad(E) = \{0\}$ olması durumunda N_j vektörü tektir [20].

Sonuç 1.2.1. *$B = \{V_1, ..., V_n\}$ bir pseudo Öklid uzayı için sıralı bir baz ve r sayısıda B bazının dejenerasyon derecesi olsun. Bu durumda*
(i) r iyi tanımlı bir sayma sayısıdır.
(ii) q, B bazının indeksini gösteren bir sayı olmak üzere $r \leqslant q$'dur.

R_2^n iki indeksli pseudo Öklid uzayı ve $\alpha : I \to R_2^n$ eğrisi bu uzayda bir diferensiyellenebilir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\mathcal{A} = \left\{\alpha'(t), ..., \alpha^{(n)}(t)\right\}$ lineer bağımsız bir küme, $\{r_i(t); 0 \leqslant i \leqslant n\}$ ve $\{q_i(t); 0 \leqslant i \leqslant n\}$ sırasıyla $\mathcal{A}$ bazının *nulluk derece dizisi* ve *indeks dizisi* olmak üzere her i ve her $t \in I$ için $r_i(t)$ ve $q_i(t)$ değerleri sabit olsun. Bu durumda bu dizilere α eğrisinin sırasıyla *nulluk derece dizisi* ve *indeks dizisi* denir. $\mathcal{A}$'nın *dejenerasyon derecesi* r sabitine α eğrisinin *dejenerasyon derecesi* denir [20].

Tanım 1.2.2. *Yukarıdaki notasyona bağlı kalarak bir $\alpha : I \to R_2^n$ eğrisi için $r > 0$ ise bu eğriye* dejenere eğri *denir [20].*

R_2^n uzayındaki eğrileri çalışırken

$$\langle x, y\rangle = -x^1y^1 - x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + ... + x^nx^n$$

şeklinde tanımlanan $\langle , \rangle$ metriğini kullanacağız. Burada $x, y \in R_2^n$; $x = (x^1, x^2, x^3, ..., x^n)$, $y = (y^1, y^2, y^3, ..., y^n)$, $x^i, y^i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

1.3 E^n Uzayında Özel Frenet Eğrileri

n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve bu uzayın $(x^1, x^2, ...x^n)$ kartezyen koordinatları verilsin. C^∞ sınıfından bir $c : L \to E^n$ eğrisi

$$c(t) = \left(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\right), \qquad \forall t \in L$$

şeklinde parametrelendirilmiş olsun. Eğer $\forall t \in L$ için

$$\left\|\frac{dc(t)}{dt}\right\| = \left\langle \frac{dc(t)}{dt}, \frac{dc(t)}{dt}\right\rangle^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

ise C eğrisi E^n uzayında regüler bir eğridir. Buradaki $\langle ., .\rangle$, E^n uzayındaki Öklid iç çarpımıdır. Regüler bir C eğrisi s yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş olsun $(c : I \to E^n (s \in I,\ s \to c(s) \in E^n))$. Bu durumda $\frac{dc}{ds}$ tanjant vektör alanı her $s \in I$ için C boyunca birim uzunlukludur, yani $\left\| \frac{dc(s)}{ds} \right\| = 1$'dir. Matsuda ve Yorozu [13] eğri kavramını incelerken E^n uzayında yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş, regüler ve C^∞ sınıfından eğrileri kullandılar. C, E^n uzayında bir eğri (her $s \in I$ için $c(s) \in E^n$) olmak üzere her $s \in I$ için $t(s) = \frac{dc(s)}{ds}$ olsun. t vektör alanına C boyunca birim tanjant vektör alanı denir. C eğrisinin $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ şartlarını sağladığını varsayalım:

C_1 : Her $s \in I$ için

$$k_1(s) = \left\| \frac{dt(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2 c(s)}{ds^2} \right\| > 0$$

olsun. Bu durumda C boyunca her $s \in I$'de iyi tanımlı n_1 vektör alanı

$$n_1(s) = \frac{1}{k_1(s)} \frac{dt(s)}{ds}$$

ile tanımlıdır, ayrıca

$$\langle t(s), n_1(s) \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \langle n_1(s), n_1(s) \rangle = 1$$

şartları sağlanır.

C_2 : Her $s \in I$ için

$$k_2(s) = \left\| \frac{dn_1(s)}{ds} + k_1(s)\, t(s) \right\| > 0$$

olsun. Bu durumda C boyunca her $s \in I$'de iyi tanımlı n_2 vektör alanı

$$n_2(s) = \frac{1}{k_2(s)} \left(\frac{dn_1(s)}{ds} + k_1(s)\, t(s) \right)$$

şeklindedir, ayrıca

$$\langle t(s), n_i(s) \rangle = 0 \ \text{ ve } \ \langle n_i(s), n_j(s) \rangle = \delta_{ij}$$

şartları sağlanır. Aynı metodla $\ell = 3, 4, ..., n-2$ olmak üzere

C_ℓ : Her $s \in I$ için

$$k_\ell(s) = \left\| \frac{dn_{\ell-1}(s)}{ds} + k_{\ell-1}(s)\, n_{\ell-2}(s) \right\| > 0$$

olsun. Bu durumda C boyunca iyi tanımlı vektör alanı n_ℓ, $\ell = 3, 4, ..., n-2$, ve $\forall s \in I$ için

$$n_\ell(s) = \left(\frac{dn_{\ell-1}(s)}{ds} + k_{\ell-1}(s)\, n_{\ell-2}(s) \right)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\langle t(s), n_i(s)\rangle = 0, \ldots \ , \langle n_i(s), n_j(s)\rangle = \delta_{ij} \ ; \quad i,\ j = 1, 2, ..., n-2$$

şartları sağlanır.

C_{n-1} : Her $s \in I$ için

$$k_{n-1}(s) = \left\langle \frac{dn_{n-2}(s)}{ds} + n_{n-1}(s) \right\rangle \neq 0$$

olsun. Burada $n_{n-1}(s)$ tanjant vektör alanı $\{t, n_1, n_2, ..., n_{n-1}\}$ çatısını ortonormal ve pozitif yönlendirilmiş yapacak şekilde belirlenmiştir. $k_1, ..., k_{n-2}$ fonksiyonları pozitif ve k_{n-1} fonksiyonuda sıfırdan farklıdır. Bu şekilde tanımlanan C eğrisine E^n uzayında özel Frenet eğrisi denir. Burada özel kelimesinin anlamı n_{i+1} vektör alanının n_i ve n_{i-1} vektör alanları ve pozitif değerli k_i ve k_{i-1} fonksiyonlarıyla ifade edilmesinden kaynaklanmaktadır. Her bir k_i fonksiyonuna C eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu denir $(i = 1, 2, ..., n-1)$. C eğrisi boyunca $\{t, n_1, n_2, ..., n_{n-1}\}$ ortonormal çatısına C boyunca özel Frenet çatısı denir. Her $s \in I$ için bu eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{dt(s)}{ds} &= k_1(s)\, n_1(s) \\
\frac{dn_1(s)}{ds} &= -k_1(s)\, t(s) + k_2(s)\, n_2(s) \\
&\ldots \\
\frac{dn_\ell(s)}{ds} &= -k_\ell(s)\, n_{\ell-1}(s) + k_{\ell+1}(s)\, n_{\ell+1}(s) \\
&\ldots \\
\frac{dn_{n-2}(s)}{ds} &= -k_{n-2}(s)\, n_{n-3}(s) + k_{n-1}(s)\, n_{n-1}(s) \\
\frac{dn_{n-1}(s)}{ds} &= -k_{n-1}(s)\, n_{n-2}(s)
\end{aligned}$$

şeklindedir. $n_j \ (j = 1, 2, ..., n-1)$ birim vektör alanına C boyunca Frenet j-normal vektör alanı denir. C eğrisinin $c(s)$ $(j = 1, 2, ..., n-1, \forall s \in I)$ noktasından geçen doğru bu noktadaki j-normal vektörüyle $(n_j(s))$ aynı doğrultudaysa bu doğruya Frenet j-normal doğrusu denir. Üç boyutlu Öklid uzayında (n_1) Frenet 1-normal vektör alanına C boyunca asli normal vektör alanı ve Frenet 1-normal doğrusuna C'nin $c(s)$ noktasındaki asli normal doğrusu denir.

C eğrisinin her $c(s)$ noktası için eğrinin bu noktasındaki düzlem $n_j(s)$ ve $n_k(s)$ vektörleriyle gerilmişse $(j, k = 1, 2, ..., n-1;\ j < k)$, bu düzleme C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki (j, k)-normal düzlemi denir [13].

1.4 Öklid Uzaylarında Bertrand Eğrileri

3-boyutlu Öklid uzayı E^3 ile gösterilsin. E^3 uzayında C^∞ sınıfından olan regüler C eğrisi $(c : I \to E^3\ (s \to c(s)))$ için $I \subset R$ bir aralık ve $s\ (\in I)$ de yay parametresi olsun. Bu C eğrisinin birim tanjant vektör alanı t, birim asli normal vektör alanı n ve birim binormal vektör alanı b C^∞ sınıfından ayrıca eğrilik fonksiyonu $\kappa\ (> 0)$ ve burulma fonksiyonu $\tau\ (\neq 0)$ C^∞ sınıfından skaler fonksiyonlar ise bu eğriye C^∞ özel Frenet eğrisi denir [13]. Burdaki t, n, b fonksiyonları eğriye ait Frenet denklemlerini sağlar. C eğrisi C^∞ sınıfından bir özel Frenet eğrisi olsun. C eğrisinden farklı olacak şekilde C^∞ sınıfından bir $\overline{C}$ eğrisi ve bununla birlikte C^∞ sınıfından bir $\varphi : C \to \overline{C}$ dönüşümü mevcut olsun. Bu φ dönüşümü altında eğrilerin birbirine karşılık gelen noktalarında bu eğrilerin asli normal doğruları çakışıyorsa, C eğrisine Bertrand eğrisi denir. Burada C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki asli normal doğrusu eğrinin asli normal vektörü $n(s)$ ile aynı doğrultudadır. Çok iyi bilinmektedir ki E^3 uzayındaki C^∞ sınıfından bir C özel Frenet eğrisi Bertrand eğrisidir ancak ve ancak eğrilik fonksiyonu κ, burulma fonksiyonu τ olmak üzere her $s \in I$ için $a\kappa + b\tau = 1$ şartını sağlayacak şekilde a ve b gibi reel sayılar mevcutsa.

C eğrisi n-boyutlu Öklid uzayı E^n'de s yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş regüler ve C^∞ sınıfından bir eğri olsun. Başka bir deyişle $c : I \to E^n\ (s \to c(s))$ eğrisi C^∞ sınıfından olsun. Bu durumda C^∞ sınıfından özel Frenet C eğrisi için, $t(s) = c'(s)$, $n_1(s) = \left(\frac{1}{\|c''(s)\|}\right) c''(s)$, ve aynı şekilde $n_k(s)$'lerde $(k = 1, 2, ..., n-1)$ c'nin yüksek mertebeden türevleri hesaplanarak elde edilir. C eğrisi boyunca n tane vektör alanı $(t, n_1, ..., n_{n-1})$ C eğrisinin $k_1, ..., k_{n-2}$ pozitif eğrilikleri ve pozitif ya da negatif değere sahip k_{n-1} eğriliğiyle beraber Frenet denklemlerini sağlar. n_j vektörüne C boyunca Frenet j-normal vektör alanı denir. C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki Frenet j-normal doğrusu $c(s)$ boyunca $n_j(s)$ vektörü tarafından elde edilen doğrudur $(j = 1, 2, ..., n-1)$. C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki Frenet (j,k)-normal düzlemi $n_j(s)$ ve $n_k(s)$ vektörleri tarafından gerilen $(j, k = 1, 2, ..., n-1; j \neq k)$ düzlemdir [13].

Tanım 1.4.1. *C ve $\overline{C}$ E^n'de eğriler ve $\varphi : C \to \overline{C}$ C^∞ bir dönüşüm olsun. C, C^∞*

özel Frenet eğrisi iken φ dönüşümünün $\overline{C}$'de karşılık getirdiği noktalardaki Frenet 1-normal doğruları C'nin Frenet 1-normal doğrularıyla aynı ve $\overline{C}$ eğrisi de bir C^{∞} özel Frenet eğrisi oluyorsa, bu taktirde C'ye Bertrand eğrisi denir [13].

Tanım 1.4.2. *E^n uzayında C $(c : I \to E^n)$ bir özel Frenet eğrisi, $\overline{C}$ $\left(\overline{c} : \overline{I} \to E^n\right)$ eğrisi de C eğrisinden farklı olacak şekilde özel Frenet eğrisi olsun. $\varphi : I \to \overline{I}$ $\left(\overline{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0\right)$ eğrilerin yay parametreleri arasında tanımlanan regüler bir dönüşüm olmak üzere, bu φ dönüşümü altında eğrilerin birbirine karşılık gelen noktaları olan $c(s)$ ve $\overline{c}(\overline{s})$ noktalarındaki 1-normal doğruları aynı ise, C eğrisine Bertrand eğrisi denir. Burada s ve $\overline{s}$ sırasıyla, C ve $\overline{C}$ eğrilerinin yay parametreleridir [13].*

Teorem 1.4.1. *$n \geqslant 4$ olması durumunda E^n Öklid uzayında hiç bir C^{∞} özel Frenet eğrisi Bertrand eğrisi olma özelliğine sahip değildir [13].*

İspat. C eğrisi E^n $(n \geqslant 4)$ uzayında bir Bertrand eğrisi ve $\overline{C}$ eğriside C'nin Bertrand eşi olsun. Burada $\overline{C}$ eğrisi C'den farklı bir eğridir. $c(s)$ ve $\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s))$ sırasıyla C ve $\overline{C}$'nin birbirine karşılık gelen iki noktası olsun. Bu durumda $\overline{C}$ eğrisi

$$\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha(s)\, n_1(s) \tag{1.4.1}$$

şeklinde yazılır. Burada α, I üzerinde C^{∞} sınıfından bir fonksiyondur. (1.4.1) denkleminin s'ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\varphi'(s)\,\overline{t}(\varphi(s)) = (1 - \alpha(s)\, k_1(s))\, t(s) + \alpha'(s)\, n_1(s) + \alpha(s)\, k_2(s)\, n_2(s) \tag{1.4.2}$$

eşitliği elde edilir. (1.4.2) eşitliğinin her iki yanını $\overline{n_1}(\varphi(s))$ ile iç çarpıma tabi tutar, $\left\langle \overline{t}(\varphi(s)), \overline{n_1}(\varphi(s))\right\rangle = 0$ ve $\overline{n_1}(\varphi(s)) = \mp n_1(s)$ olduğu bilgisi kullanılırsa her $s \in I$ için $\alpha'(s) = 0$ olur. Yani α, I üzerinde sabit bir fonksiyondur. Böylece (1.4.1) denklemi

$$\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha n_1(s) \tag{1.4.3}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. (1.4.3) denkleminin s'ye göre türevi alınırsa her $s \in I$ için

$$\varphi'(s)\,\overline{t}(\varphi(s)) = (1 - \alpha k_1(s))\, t(s) + \alpha k_2(s)\, n_2(s) \tag{1.4.4}$$

elde edilir. (1.4.4) eşitliğinden

$$\overline{t}(\varphi(s)) = \cos\theta(s)\, t(s) + \sin\theta(s)\, n_2(s) \tag{1.4.5}$$

denklemini yazabiliriz. Burada θ, I üzerinde bir C^{∞} fonksiyon olmak üzere

$$\cos\theta(s) = \frac{1 - \alpha k_1(s)}{\varphi'(s)}, \tag{1.4.6}$$

$$\sin\theta(s) = \frac{\alpha k_2(s)}{\varphi'(s)} \tag{1.4.7}$$

eşitlikleri mevcuttur. (1.4.5) eşitliğinin türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\overline{k_1}(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,\overline{n_1}(\varphi(s)) = {} & \frac{d\cos\theta(s)}{ds}t(s) \\ & + (k_1(s)\cos\theta(s) - k_2\sin\theta(s))\,n_1(s) \\ & + \frac{d\sin\theta(s)}{ds}n_2(s) + k_3\sin\theta(s)\,n_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\overline{n_1}(\varphi(s)) = \mp n_1(s)$ olduğu kullanılır ve her iki yanı $n_3(s)$ ile iç çarpıma tabi tutarsak her $s \in I$ için

$$k_3(s)\sin\theta(s) = 0 \tag{1.4.8}$$

elde edilir. Özel Frenet eğrisinin tanımından dolayı her $s \in I$ için $k_3(s) \neq 0$'dır. (1.4.8) denkleminden dolayı $\sin\theta(s) = 0$ olur. Burada (1.4.7) denklemi gözönüne alınır ve $k_2 > 0$ olduğu kullanılırsa $\alpha = 0$ elde edilir. O zaman (1.4.1) denkleminden dolayı $\overline{C}$ ile C eğrileri çakışır. Fakat bu durum başlangıçtaki kabulümüzle çelişir. Buda ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki tanımlar E^n $(n \geqslant 4)$ uzayındaki genelleştirilmiş Bertrand eğri kavramını açıklar.

Tanım 1.4.3. *C ve $\overline{C}$ E^4'de eğriler ve $\varphi : C \to \overline{C}$ C^∞ bir dönüşüm olsun. C, C^∞ özel Frenet eğrisi iken φ dönüşümünün $\overline{C}$'de karşılık getirdiği noktalardaki (1,3)-normal düzlemleri C'nin (1,3)-normal düzlemleriyle çakışıyor ve $\overline{C}$'de bir C^∞ özel Frenet eğrisi oluyorsa, bu taktirde C'ye (1,3)-Bertrand eğrisi denir [13].*

Tanım 1.4.4. *C ve $\overline{C}$, E^4 uzayında bulunan C^∞ sınıfından iki özel Frenet eğrisi olsun. φ dönüşümü de $(\varphi : I \to \overline{I})$ her $s \in I$ için C eğrisininin $c(s)$ noktasını $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s))$ noktasına karşılık getirecek şekilde yay uzunluğu parametreleri arasında regüler ve C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun. Her $s \in I$ için C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki (1,3)-normal düzlemi eğrilerin birbirine karşılık gelen noktalarında $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s})$ noktasındaki (1,3)-normal düzlemi ile çakışıyorsa C eğrisine (1,3)-Bertrand eğrisi denir [13].*

Şimdi şu teoremi ispatsız olarak ifade edelim

Teorem 1.4.2. *C eğrisi E^4 uzayında k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonlarına sahip bir C^∞ özel Frenet eğrisi olsun. Bu durumda C eğrisi (1,3)-Bertrand eğrisidir ancak ve ancak her $s \in I$ için*

$$\alpha k_2(s) - \beta k_3(s) \neq 0 \tag{a}$$

$$\alpha k_1(s) + \gamma\{\alpha k_2(s) - \beta k_3(s)\} = 1 \tag{b}$$

$$\gamma k_1(s) - k_2(s) = \delta k_3(s) \tag{c}$$

$$\left(\gamma^2 - 1\right)k_1(s)\,k_2(s) + \gamma\left\{(k_1(s))^2 - (k_2(s))^2 - (k_3(s))^2\right\} \neq 0 \tag{d}$$

koşulları sağlanacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reel sayıları mevcutsa [13].

1.5 Lorentz Uzay Formunda Null Bir Eğrinin Cartan Çatısı ve R_q^n Uzayındaki Pseudo Ortonormal Baz

$\left(\overline{M}, g\right)$, $(m+2)$ boyutlu q indeksli yarı Riemannian manifoldu ve C eğriside $\overline{M}$ manifoldunda yerel olarak $\gamma : I \subset R \to \overline{M}$ ile parametrelendirilmiş türevlenebilir bir eğri olsun. C eğrisinin tanjant vektörü olan $\gamma'(t)$ her yerde null vektör ise C'ye null veya lightlike eğri denir. TC, C eğrisinin tanjant demeti olmak üzere $TC^{\perp}$ demeti nondejenere durumda olduğu gibi

$$TC^{\perp} = \bigcup_{p \in C} T_pC^{\perp}, \quad T_pC^{\perp} = \{\xi_p \in T_pM : g(\xi_p, V_p) = 0\}$$

şeklinde tanımlansın, buradaki V_p, p noktasında C eğrisinin null tanjant vektörüdür. $TC^{\perp}$'nin rankı $m+1$'dir. V_p bir null vektör olduğundan TC demeti $TC^{\perp}$ vektör demetinin bir alt vektör demetidir ve rankı 1'dir. Bu durumda $TC^{\perp}$ uzayında TC demetinin bir tümleyeni olan $S\left(TC^{\perp}\right)$ alt vektör demetinden bahsedebiliriz.

$$TC^{\perp} = TC \perp S\left(TC^{\perp}\right)$$

Yukarıda $\perp$ ortogonal direkt toplamı göstermektedir. m boyutlu nondejenere $S\left(TC^{\perp}\right)$ alt demetine C'nin ekran vektör demeti denir. Nondejenere durumun aksine tanjant demeti normal demetin içinde bulunur ve ekran demeti tek değildir. Bu iki özellik null eğrilerin nondejenere eğrilere (spacelike veya timelike) kıyasla geometrilerinin zor ve değişik olmasına yol açar.
$S\left(TC^{\perp}\right)$ nondejenere olduğundan

$$T\overline{M}\mid_C = S\left(TC^{\perp}\right) \perp S\left(TC^{\perp}\right)^{\perp}$$

şeklinde yazılır. Burada $S\left(TC^{\perp}\right)^{\perp}$, $T\overline{M}\mid_C$ uzayında $S\left(TC^{\perp}\right)$ demetinin ortogonal tümleyenidir.

Teorem 1.5.1. *C, $\left(\overline{M}, g\right)$ yarı Riemannian manifoldunun bir null eğrisi ve $S\left(TC^{\perp}\right)$ demeti de C eğrisinin bir ekran vektör demeti olsun. Bu durumda C üzerinde rankı bir olan bir tek E vektör demeti vardır öyleki C eğrisinin her U koordinat komşuluğunda*

$$\begin{aligned} & \langle \gamma', N \rangle = 1 \\ ve \quad & \langle N, N \rangle = \langle N, X \rangle = 0 \quad \forall\, X \in \Gamma\left(S\left(TC^{\perp}\right)\mid_U\right) \end{aligned}$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(E\mid_C)$ kesiti vardir. Yukarıdaki E vektör demeti $ntr(C)$ ile gösterilir ve C eğrisinin $S\left(TC^{\perp}\right)$ demetine göre null transversal *demeti olarak adlandırılır. N vektör alanı C eğrisinin $\gamma'(t)$ vektörüne göre null transversal vektör alanı olarak adlandırılır. C eğrisinin $tr(C)$ transversal vektör demeti*

$$tr(C) = ntr(C) \perp S\left(TC^{\perp}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$T\overline{M}\mid_C = TC \oplus tr(C) = (TC \oplus ntr(C)) \perp S\left(TC^{\perp}\right)$$

olur [16]. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuca varılır.

Önerme 1.5.1. *C eğrisi indeksi q olan bir $\left(\overline{M}, g\right)$ yarı Riemannian manifoldunun bir null eğrisi olsun. Bu durumda C eğrisinin herhangi bir ekran vektör demeti yarı Riemannian'dır ve indeksi $q-1$'dir. Bundan dolayı eğer M bir Lorentz manifoldu ise herhangi bir ekran demeti Riemannian'dır [16].*

Teorem 1.5.2. *$\gamma : I \to M_1^n$, $n = m+2$ eğrisi pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş olup aynı zamanda $\{\gamma'(t), \gamma''(t), ..., \gamma^n(t)\}$ kümesini her t için $T_{\gamma(t)}M_1^n$ tanjant uzayının bir bazı yapacak şekilde seçilmiş null bir eğri olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
L' &= W_1 \\
N' &= k_1 W_1 + k_2 W_2 \\
W_1' &= -k_1 L - N \\
W_2' &= -k_2 L + k_3 W_3 \\
W_i' &= -k_i W_{i-1} + k_{i+1} W_{i+1}, \qquad\qquad i \in \{3, ..., m-1\} \\
W_m' &= -k_m W_{m-1}
\end{aligned}$$

denklemlerini ve aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde tek bir Frenet çatısı vardir.

(i) $2 \leqslant i \leqslant m-1$ için $\{\gamma'(t), \gamma''(t), ..., \gamma^{i+2}(t)\}$ ve $\{L, N, W_1..., W_i\}$ aynı yönlendirmeye sahiptir.

(ii) $\{L, N, W_1..., W_m\}$ pozitif yönlendirmeye sahiptir [16].

Tanım 1.5.1. *Yukarıdaki teoremin şartlarını taşıyan M_1^n uzayındaki null eğriye Cartan eğri denir. Yukarıdaki Frenet çatısı ve $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ eğriliklerine sırasıyla γ eğrisinin* Cartan referansı *ve* Cartan eğrilikleri *denir. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sırasıyla $\{\gamma'(t), \gamma''(t), ..., \gamma^n(t)\}$ ve $\{L, N, W_1..., W_m\}$ referanslarını göstersin. A ve B matrisleri sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'ye göre metriğin matrisleri olsun. D_i, A matrisinin i-yinci mertebeden determinantı olsun. Yani*

$$D_i = \begin{vmatrix}
\langle\gamma', \gamma'\rangle & \langle\gamma', \gamma''\rangle & ... & \langle\gamma', \gamma^i\rangle \\
\langle\gamma'', \gamma'\rangle & \langle\gamma'', \gamma''\rangle & ... & \langle\gamma'', \gamma^i\rangle \\
. & . & ... & . \\
. & . & ... & . \\
. & . & ... & . \\
\langle\gamma^i, \gamma'\rangle & \langle\gamma^i, \gamma''\rangle & ... & \langle\gamma^i, \gamma^i\rangle
\end{vmatrix} \text{ olsun [16].}$$

Önerme 1.5.2. *$\gamma : I \to M_1^n$ bir Cartan eğri olsun. Bu durumda Cartan eğrilikleri $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$*

$$k_1 = \frac{1}{2}\left\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \right\rangle, \quad k_2^2 = -D_4, \quad k_i^2 = \frac{D_i D_{i+2}}{D_{i+1}^2}$$

şeklindedir. Bunlara ek olarak $k_2 < 0$, her $i \in \{3, ..., m-1\}$ için $k_i > 0$'dır. $\mathcal{A}$'nın sırasıyla pozitif ya da negatif yönlendirilmesine bağlı olarak $k_m > 0$ ya da $k_m < 0$ olur [16].

Sonuç 1.5.1. *M_1^n uzayındaki bir C eğrisinin Lorentzian dönüşüm altında Cartan eğrilikleri aynı kalır [16].*

Tanım 1.5.2. *$2r \leqslant 2q \leqslant n$ ve $m = n - 2r$ olmak üzere R_q^n uzayındaki bir $\mathfrak{B} = \{L_1, N_1, ..., L_r, N_r, W_1 ..., W_m\}$ bazına aşağıdaki eşitlikleri sağlaması durumunda pseudo ortonormal baz denir.*

$$\langle L_i, L_j \rangle = \langle N_i, N_j \rangle = 0, \quad \langle L_i, N_j \rangle = \delta_{ij},$$

$$\langle L_i, W_\alpha \rangle = \langle N_i, W_\alpha \rangle = 0, \quad \langle W_\alpha, W_\beta \rangle = \epsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

$i, j \in \{1, 2, ..., r\}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2, ..., m\}$, eğer $1 \leqslant \alpha \leqslant q - r$ ise $\epsilon_\alpha = -1$ ve eğer $q - r + 1 \leqslant \alpha \leqslant m$ ise $\epsilon_\alpha = 1$ [16].

Lemma 1.5.1. *$2r \leqslant 2q \leqslant n$ ve $m = n-2r$ olmak üzere $\mathfrak{B} = \{L_1, N_1, ..., L_r, N_r, W_1, ..., W_m\}$, R_q^n uzayının bir bazı olsun. $\mathfrak{B}' = \{V_1, ..., V_q, V_{q+1}, ..., V_n\}$ kümesi*

$$V_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L_i - N_i\right) \ ; & i = 1, ..., r \\ W_{i-r} \ ; & i = r+1, ..., q \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L_{i-q} + L_{i-q}\right) \ ; & i = q+1, ..., q+r \\ W_{i-2r} \ ; & i = q+r+1, ..., n. \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $\mathfrak{B}$ bir pseudo ortonormal bazdır.

(ii) $\mathfrak{B}'$ bir ortonormal bazdır.

(iii) $\mathfrak{B}'$

$$-\sum_{\alpha=1}^{q} V_{\alpha i} V_{\alpha j} + \sum_{\beta=q+1}^{n} V_{\beta i} V_{\beta j} = \eta_{ij}$$

eşitliğini sağlar.

(iv) $\mathfrak{B}$

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left(L_{\alpha i} N_{\alpha j} + L_{\alpha j} N_{\alpha i}\right) - \sum_{\beta=1}^{q-r} W_{\beta i} W_{\beta j} + \sum_{\theta=q-r+1}^{m} W_{\theta i} W_{\theta j} = \eta_{ij}$$

eşitliğini sağlar. Burada $V_{\rho k}$, $L_{\rho k}$, $N_{\rho k}$ ve $W_{\rho k}$ sırasıyla V_ρ, L_ρ, N_ρ ve W_ρ vektörlerinin bileşenlerini gösterir ve η_{ij}'de standart koordinatlar için kanonik metriğin matrisini göstermektedir [16].

1.6 Pseudo Öklid Uzaylarda Bertrand Eğrileri

C eğrisi, R_1^n uzayında C boyunca F Frenet çatısına sahip ve s pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş null bir eğri olsun. $(C(s), F)$ ikilisine çatılı null eğri denir [15]. $(C(s), F)$ ikilisi pseudo yay parametresi olan s'ye ve ekran vektör demetine $S\left(TC^{\perp}\right)$ bağlı olduğundan tek değildir. Bu teklik problemi, Lorentzian dönüşüm altında eğrilik fonksiyonları değişmeyen ve bu eğrilik fonksiyonlarının sayısını minimum seviyede tutan Cartan Frenet çatısının inşaasıyla çözüldü [21].

Teorem 1.6.1. *C eğrisi, (R_1^3, g) Lorentzian manifoldunda s pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş, jeodezik olmayan null bir eğri olsun. $E = \left\{C', C'', C^{(3)}\right\}$ kümesi her s için $T_{C(s)}R_1^3$ uzayının bir bazı ve ayrıca $g(C'', C'') = 1$ olsun. Bu durumda $(C(s), F)$ ikilisini null Cartan eğri yapacak ve aşağıdaki Cartan Frenet denklemlerini sağlayacak şekilde bir tek $F = \{L, N, W\}$ Frenet çatısı vardır.*

$$\begin{aligned} L' &= W \\ N' &= \tau W \\ W' &= -\tau L - N \end{aligned}$$

Burada F ve E pozitif yönlendirmeye sahiptir ve aynı zamanda Lorentzian dönüşüm altında τ burulma (torsion) fonksiyonu işaret farkıyla değişmez kalır [22].

Teorem 1.6.2. *C eğrisi, (R_1^4, g) Lorentzian manifoldunda s pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş, jeodezik olmayan null bir eğri olsun. $E = \left\{C', C'', C^{(3)}, C^{(4)}\right\}$ kümesi her s için $T_{C(s)}R_1^4$ uzayının bir bazı ve ayrıca $g(C'', C'') = 1$ olsun. Bu durumda $(C(s), F)$ ikilisini null Cartan eğri yapacak ve aşağıdaki Cartan Frenet denklemlerini sağlayacak şekilde bir tek $F = \{L, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısı vardır.*

$$\begin{aligned} L' &= W_1 \\ N' &= k_1 W_1 + k_2 W_2 \\ W_1' &= -kL - N \\ W_2' &= -k_2 L \end{aligned}$$

Burada F ve E pozitif yönlendirmeye sahip ve aynı zamanda Lorentzian dönüşüm altında k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonları işaret farkıyla değişmez kalır [22].

C eğrisi (R_1^3, g) Lorentzian uzayında null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda bu eğrinin Cartan çatısını oluşturan L, W ve N vektörlerine sırasıyla eğrinin teğet, asli normal, ve binormal vektörü denir [22].

Tanım 1.6.1. *$\left(C, \overline{C}\right)$ ikilisi R_1^3 Lorentzian manifoldunda sırasıyla $s, \overline{s}$ pseudo yay parametreleriyle parametrelendirilmiş null Cartan çatılı eğriler olsun. Bu ikiliye, asli-normal vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda Bertrand çifti denir [15].*

Teorem 1.6.3. *C, R_1^3 uzayında s pseudo yay parametresine sahip null Cartan çatılı bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisi kendisinden farklı olacak şekilde bir Bertrand eşine sahiptir ancak ve ancak bu iki eğri aynı ve sıfırdan farklı sabit bir eğrilik fonksiyonuna sahipse [22].*

Tanım 1.6.2. *$\left(C,\overline{C}\right)$ ikilisi R_1^4 Lorentzian manifoldunda sırasıyla $s,\overline{s}$ pseudo yay parametreleriyle parametrelendirilmiş null Cartan çatılı eğriler olsun. $\{L,N,W_1,W_2\}$ ve $\left\{\overline{L},\overline{N},\overline{W_1},\overline{W_2}\right\}$ kümeleri sırasıyla C ve $\overline{C}$ eğrilerinin Cartan çatıları olsun. Bu durumda $\left(C,\overline{C}\right)$ eğri çiftine W_1 ve $\overline{W_1}$ vektörlerinin meydana getirdiği normal doğruların çakışması durumunda null Bertrand eğri çifti denir [18].*

Teorem 1.6.4. *R_1^4 Lorentzian manifoldunda bir C null Cartan eğrisi Bertrand eğrisidir ancak ve ancak C eğrisinin k_1 eğriliği sıfırdan farklı sabit bir sayı ve k_2 eğriliği sıfır ise [18].*

1.7 Öklid Uzayında Küresel Eğriler

α, m merkezli küre üzerinde bulunan bir eğri ise $|\alpha(s)-m|^2$ değeri sabittir (yani s'ye göre bütün türevleri sıfırdır). Bu durumda aşağıdaki değme (kontak) tanımını verebiliriz.

Tanım 1.7.1. *α bir eğri, m bir nokta ve $r>0$ olmak üzere $c(s)=|\alpha(s)-m|^2$ olsun. $c(s_0)=r^2$, $c'(s_0)=c''(s_0)=....=c^{(j)}(s_0)=0$ ise α, $s=s_0$ noktasında r yarıçaplı ve m merkezli küreye j-yinci basamaktan değiyor denir. Buradanda anlaşılacağı gibi j büyüdükçe $c(s)$ sabit bir fonksiyona benzemeye başlar. $\alpha(s)$ eğriside r yarıçaplı ve m merkezli bir küre üzerinde bulunan bir eğri olmaya daha fazla yaklaşır [23].*

Uyarı 1.7.1. *α eğrisi E^3 uzayında bir eğri olsun. α eğrisine $s=s_0$ noktasında ikinci dereceden değen oskülatör çemberin (eğrilik çemberi) merkezi m_c*

$$m_c=\alpha(s_0)+\frac{1}{k(s_0)}N(s_0)$$

şeklinde yazılır [23].

Uyarı 1.7.2. *α eğrisi E^3 uzayında bir eğri olsun. α eğrisine $s=s_0$ noktasında üçüncü dereceden değen oskülatör kürenin (eğrilik küresi) merkezi*

$$m_s=\alpha(s_0)+\frac{1}{k(s_0)}N(s_0)-\frac{k'(s_0)}{\tau(s_0)\,k^2(s_0)}B(s_0)$$

ile ifade edilir. Yukarıdaki ifadede N ile B,α eğrisinin Frenet takımını $\{k(s),\tau(s),$ $T(s),N(s),B(s)\}$ oluşturan birim vektörlerdir, ayrıca $k(s)$ ve $\tau(s)$ fonksiyonları da sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır [23].

1.8 R_1^4 Uzayında Pseudo Küresel Eğriler

R_1^4 uzayındaki pseudo küresel eğriler, m merkezli ve $r > 0$ yarıçaplı $S_1^3(r)$ pseudo küresi üzerindeki eğrilerdir.

$$S_1^3(r) = \left\{x \in R_1^4 : g(x-m,\ x-m) = r^2\right\}$$

olarak ifade edilir. Öklidyen uzaydaki oskülatör küre tanımına benzer olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 1.8.1. *C eğrisi, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisine dördüncü mertebeden değen küreye C eğrisinin pseudo oskülatör küresi denir [18].*

Lemma 1.8.1. *C eğrisi, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri olsun. C eğrisinin $C(s_0)$ noktasındaki pseudo oskülatör küresinin merkezi*

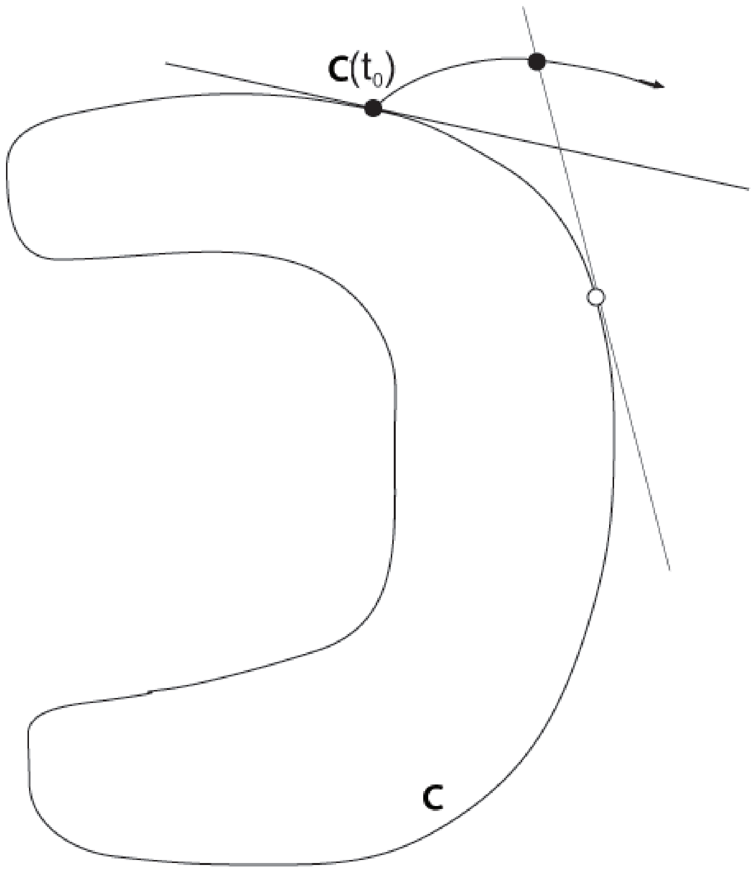
$$m(s_0) = C(s_0) + \frac{1}{k_2} W_2(s_0)$$

şeklindedir. Yukarıdaki k_2, C null Cartan eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonudur [18].

Teorem 1.8.1. *C eğrisi, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisi pseudo küresel bir eğridir ancak ve ancak k_2 eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabitse [18].*

1.9 İnvolüt

Hareketsiz bir düzlemde c herhangi bir regüler eğri olmak üzere, t_0 sabit değeri başlangıç parametresi olarak seçilmiş olsun (şekil 1.9). Burada t_0 hareketli düzlemde bir eğri belirten ve üzerinde bir tanjant doğrusu olan bir noktadır. Hareketli düzlemde bir eğri belirtecek olan iz noktası, c eğrisinin t_0 noktasındaki tanjant doğrusuyla $c(t_0)$ değme noktasını oluşturan noktadır. Bu tanjant doğrusu c eğrisi üzerinde yuvarlanarak yol aldıkça bu işaretli iz noktasının hareket eden bir düzlemde çizdiği eğri fiziksel olarak c eğrisinin üzerine sarmalanmş bir zincirin çözülerek açıldığında bu zincirin baş kısmının izlediği yola benzer. Bu iz noktasının geometrik yerini formüle etmek için t_0'dan t'ye kadar c eğrisinin uzunluğunu $l(t_0, t)$ ile gösterelim. Bu durumda t anında $c(t_0)$ noktası c eğrisine t noktasında çizilen teğet doğrusunun üzerinde kalır. Bu noktanın $c(t)$ noktasına uzaklığı, $c(t)$ noktasından itibaren



Şekil 1.9.

nagatif ölçüm yapılarak hesaplanır. Bu uzaklık $l(t_0, t)$'dır. Bu durumda bir c eğrisinin t_0 başlangıç noktasından itibaren involütünü c^* ile gösterirsek, bu c^* eğrisi

$$c^*(t) = c(t) - l(t_0, t)\, T(t) \tag{1.9.1}$$

olarak formüle edilir. Burada $T(t)$, c eğrisinin t noktasındaki birim tanjant vektörüdür. Eğer c, sabit s hızına sahip bir eğri ise $(s \neq 0)$ bu durumda $l(t_0, t) = s(t - t_0)$ olur. Böylece c^* involüt eğrisinin formülü basitleşerek

$$c^*(t) = c(t) - (t - t_0)\, c'(t) \tag{1.9.2}$$

şeklini alır [24].

1.10 Evalüt

$k(t) \neq 0$ eğrilik fonksiyonuna sahip c eğrisi için t parametresi c eğrisinin regüler bir parametresi olsun. $\rho = \frac{1}{|k(t)|}$ skaler değerine c eğrisinin t noktasındaki eğrilik yarıçapı denir. Bu eğriye ikinci dereceden değen ve bir tek şekilde mevcut olan ρ yarıçaplı çembere eğrinin t noktasındaki eğrilik çemberi (oskülatör çember) denir. Bu eğrilik çemberinin merkezi

$$c_*(t) = c(t) + \frac{N(t)}{k(t)} \tag{1.10.1}$$

şeklinde formüle edilir. Yukarıda N ile ifade edilen eğrinin Frenet çatısındaki asli normaldir. Eğrinin t_0 noktasındaki eğrilik çemberinin eğriliğiyle eğrinin kendi eğriliği (işaret farkıyla) aynıdır. c eğrisinin eğrilik fonksiyonu k

$$k(t) \neq 0$$

şartını sağlıyorsa, yukarıda tanımlanan c_* eğrisine c eğrisinin evalütü denir. Bu durumda bir eğrinin evalütü, eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir. Bu durumda bir c eğrisinin t_0 noktasındaki eğrilik çemberinin denklemi yazılabilir. Buna göre bir c eğrisinin t_0 noktasındaki eğrilik çemberi $c(t_0)$ noktasından geçen, merkezi $c_*(t_0)$ olan

$$|c - c_*(t_0)|^2 = |c(t_0) - c_*(t_0)|^2 \tag{1.10.2}$$

eşitliğini sağlayan ve tek şekilde mevcut olan bir çemberdir [24].

1.11 Pseudo Riemannian Uzayda Yay Uzunluğu

Bir I aralığından pseudo Riemannian (M, g) manifolduna tanımlı ve $\gamma(t)$ olarak parametrelendirilmiş eğrinin bir immersiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right) = \gamma'(t) \neq 0, \qquad \forall t \in I$$

olmasıdır. Böyle eğrilere *regüler* eğri denir. Ayrıca γ üzerine indirgenmiş metrik nondejeneredir ancak ve ancak $\gamma'(t)$ null olmayan bir vektörse. I aralığındaki her t için $\gamma'(t)$ null değilse γ eğrisini yeniden parametrelendirebiliriz. Başka bir deyişle

$$\left|g\left(\frac{d}{ds}\gamma(s), \frac{d}{ds}\gamma(s)\right)\right| = 1, \qquad \forall s \in I$$

şartını sağlayacak şekilde bir

$$s : t \rightarrow s(t)$$

difeomorfizm dönüşümü bulabiliriz. Bu yeni s parametresine yay uzunluğu parametresi denir.

Yay uzunluğunun varlığının ispatını şu şekilde yapabiliriz: $s(t)$ keyfi bir yeni parametrizasyon olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\gamma$$

bilgisini kullanırsak

$$g\left(\frac{d}{dt}\gamma, \frac{d}{dt}\gamma\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 g\left(\frac{d}{ds}\gamma(s), \frac{d}{ds}\gamma(s)\right)$$

olur. γ null olmadığından yukarıdaki eşitliğin sol tarafı 0 olmaz. Bu durumda

$$\frac{ds}{dt} = \left|g\left(\frac{d}{dt}\gamma, \frac{d}{dt}\gamma\right)\right|^{\frac{1}{2}}$$

olarak elde edilir. Aradığımız $s(t)$ fonksiyonu yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin ilkeline eşittir [25].

2. SEMI-RIEMANNNIAN UZAYDA BERTRAND EĞRİLERİ VE KÜRESEL EĞRİLER

Bu bölümde, Minkowski 4- uzayındaki Bertrand eğrileri ve R_1^5 uzayındaki küresel eğriler karakterize edildi. Ayrıca R_1^3 ve R_1^4 uzayındaki Bertrand eğrilerinin daha açık bir sınıflandırılması yapıldı.

2.1 Minkowski 4-Uzayında Bertrand Eğrileri

Tanım 2.1.1. *Varsayalım $(C,\overline{C})$ ikilisi R_1^4 uzayında, sırasıyla $s,\overline{s}$ pseudo yay parametreleriyle parametrelendirilmiş null Cartan eğriler olsun. Bu durumda bu eğri çiftine, sırasıyla W_1 ve $\overline{W_1}$ spacelike vektörlerinin meydana getirdiği 1-normal doğrularının aynı olması durumunda Bertrand eğri çifti denir. $\overline{C}$ eğrisine C eğrisinin Bertrand eşi denir. Daha açık olmak gerekirse R_1^4 uzayında C $(c: I \to R_1^4)$ null Cartan bir eğri, $\overline{C}$ $\left(\overline{c}: \overline{I} \to R_1^4\right)$ eğrisi de C'den farklı null Cartan bir eğri olsun. Eğrilerin pseudo yay parametreleri arasında regüler bir $\varphi: I \to \overline{I}$ $\left(\overline{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0\right)$ dönüşümü mevcut olsun. Bu φ dönüşümü altında eğrilerin birbirine karşılık gelen noktaları olan $c(s)$ ve $\overline{c}(\overline{s})$ noktalarında, sırasıyla W_1 ve $\overline{W_1}$spacelike vektörlerinin oluşturduğu 1-normal doğruları aynı ise C eğrisine Bertrand eğrisi denir.*

C, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri olsun. Bazı hesaplamalardan sonra aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c^{(3)} \\ c^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -1 & 0 & 0 \\ -k_1' & 0 & -2k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ N \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

Eğer yukarıdaki (2.1.1) eşitliğinin sağ tarafındaki matrisi P ile gösterirsek $|P| = -k_2$ olur. Burada W_2 spacelike vektörünü $\{L, N, W_1, W_2\}$ sözde ortonormal bazını pozitif yönlendirilmiş olacak şekilde seçelim. $\left\{c^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq 4}$ kümesi de pozitif yönlendirilmişse $k_2 < 0$ olur. Ayrıca $k_2 = 0$ olması durumunda $|P| = 0$ olur, bu durumda da $\left\{c^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq 4}$ kümesi lineer bağımlı olur.

Teorem 2.1.1. *C, R_1^4 uzayında mevcut null Cartan bir eğri olsun. C eğrisinin türev vektörlerinin oluşturduğu küme $\left\{c^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq 4}$ lineer bağımsız ise C eğrisi Bertrand eğrisi değildir.*

İspat. C null Cartan eğrisi, Minkowski-4 uzayında bir Bertrand eğrisi ve $\overline{C}$ eğrisi de C eğrisinin bir Bertrand eşi olsun. $c(s)$ ve $\overline{c}(\overline{s})$ ikilisi sırasıyla C, $\overline{C}$ eğrilerinin birbirine karşılık gelen noktaları olsun. Bu durumda C eğrisinin Bertrand eşi olan $\overline{C}$ eğrisi için

$$\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha(s) W_1(s) \tag{2.1.2}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada α, $\alpha(s) \neq 0$ şartını sağlayacak şekilde s parametresine bağlı bir fonksiyondur. (2.1.2) dekleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\frac{d\overline{c}(\overline{s})}{d\overline{s}} = c'(s) + \alpha'(s) W_1(s) + \alpha(s) W_1'(s)$$

eşitliği elde edilir. Frenet denklemleri yukardaki eşitlikte kullanılırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{L}(\overline{s}) = (1 - \alpha(s) k_1(s)) L(s) - \alpha(s) N(s) + \alpha'(s) W_1(s)$$

olarak elde edilir. $\left\langle \overline{L}(\overline{s}), \overline{W_1}(\overline{s}) \right\rangle = 0$ ve $\overline{W_1}(\overline{s}) = \mp W_1(s)$, olduğundan $\alpha'(s) = 0$ olur. Yani α sabit değerli bir fonksiyondur (karışıklığa yol açmayacak şekilde bu fonksiyonu α ile göstereceğiz). Bu durumda (2.1.2) denklemi

$$\overline{c}(\overline{s}) = c(s) + \alpha W_1(s) \tag{2.1.3}$$

olarak yeniden yazılır. (2.1.3) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp null Cartan eğri için mevcut olan Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{L}(\overline{s}) = (1 - \alpha k_1(s)) L(s) - \alpha N(s) \tag{2.1.4}$$

denklemi elde edilir. (2.1.4) denkleminin her iki yanını kendisiyle iç çarpıma tabi tutarsak

$$0 = -2\alpha(1 - \alpha k_1(s))$$

eşitliği elde edilir. Buradanda

$$k_1(s) = \frac{1}{\alpha}$$

olur. Bu durumda (2.1.4) denklemi

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{L}(\overline{s}) = -\alpha N(s) \tag{2.1.5}$$

denklemine dönüşür. (2.1.5) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2\overline{s}}{ds^2}\overline{L}(\overline{s}) + \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 \overline{W_1}(\overline{s}) = -\alpha\left[k_1(s) W_1(s) + k_2(s) W_2(s)\right] \tag{2.1.6}$$

denklemi elde edilir. $\left\langle W_2(s), \overline{W_1}(\overline{s}) \right\rangle = 0$, $\langle W_2(s), W_1(s) \rangle = 0$ ve $\left\langle W_2(s), \overline{L}(\overline{s}) \right\rangle = 0$, eşitlikleri (2.1.6) denkleminde kullanılırsa

$$-\alpha k_2(s) = 0 \tag{2.1.7}$$

olur. Hipotezdeki kabulden dolayı $k_2(s) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda (2.1.7) eşitliğinde $\alpha = 0$ olmalıdır. Böylece (2.1.3) denkleminden dolayı $\overline{C}$ eğrisi ile C eğrisi çakışır. Buda bizim başlangıçtaki kabulümüzle çelişir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur. $\square$

2.2 R_1^4 Uzayında (1,2)-Bertrand Eğrileri

C, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri olsun. C eğrisi boyunca spacelike Cartan j-normal vektörü W_j olsun. C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki j-normal doğrusu $c(s)$ boyunca $W_j(s)$ vektörünün oluşturduğu doğrudur $(j = 1, 2, ..., n-2)$. C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki (j, k)-normal düzlemi $c(s)$ boyunca $W_j(s)$ ve $W_k(s)$ vektörleri tarafından gerilen düzlemdir $(j, k = 1, 2, ..., n-2;\ j \neq k)$. C ve $\overline{C}$, R_1^4 uzayında bulunan iki null Cartan eğri ve φ dönüşümü $(\varphi : I \to \overline{I})$ her $s \in I$ için C eğrisinin $c(s)$ noktasını $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s))$ noktasına karşılık getirecek şekilde eğrilerin pseudo yay parametreleri arasında regüler bir dönüşüm olsun. Her $s \in I$ için C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki (1, 2)-normal düzlemi $\overline{C}$ eğrisinin $c(s)$ noktasına karşılık gelen $\overline{c}(\overline{s})$ noktasındaki (1, 2)-normal düzlemi ile çakışıyorsa C eğrisine (1, 2)-Bertrand eğrisi denir. $\overline{C}$ eğrisine de C'nin (1, 2)-Bertrand eşi denir.

Teorem 2.2.1. *C, R_1^4 uzayında Cartan eğrilikleri k_1 ve k_2 olacak şekilde null bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisi (1, 2)-Bertrand eğrisidir ancak ve ancak her $s \in I$ için ya*

$$(i) \qquad \alpha = 0 \ \ ve \ \ \beta k_2(s) \neq 1$$

ya da

$$(ii) \qquad \alpha \neq 0 \ \ ve \ \ \alpha k_1(s) + \beta k_2(s) = 1$$

olacak şekilde α ve β sabitleri bulunabiliyorsa.

İspat. $\Longrightarrow$:) C null Cartan eğrisi, R_1^4 uzayında s pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş (1, 2)-Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda

$$\overline{c}(\overline{s}) = c(s) + \alpha(s) W_1(s) + \beta(s) W_2(s) \tag{2.2.1}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde C'nin bir $\overline{C}$ (1,2)-Bertrand eşi vardır. Burada α ve β, $s \in I$ parametresine bağlı fonksiyonlar olup $\overline{s}$'de $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresidir. W_1 ve W_2 vektörlerinin gerdiği düzlem $\overline{W_1}$ ve $\overline{W_2}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemle çakıştığından

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = (\cos\theta(s)) W_1(s) + (\sin\theta(s)) W_2(s) \tag{2.2.2}$$

$$\overline{W_2}(\overline{s}) = (-\sin\theta(s)) W_1(s) + (\cos\theta(s)) W_2(s) \tag{2.2.3}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (2.2.1) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp Cartan eğriye ait Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = {} & [1 - \alpha(s) k_1(s) - \beta(s) k_2(s)] L(s) - \alpha(s) N(s) \\ & + \alpha'(s) W_1(s) + \beta'(s) W_2(s)\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

eşitliği elde edilir.

$$0 = \left\langle \overline{W_1}(\overline{s}), \overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = (\cos\theta(s))\,\alpha'(s) + (\sin\theta(s))\,\beta'(s)$$
$$0 = \left\langle \overline{W_2}(\overline{s}), \overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = (-\sin\theta(s))\,\alpha'(s) + (\cos\theta(s))\,\beta'(s)$$

eşitlikleri yardımıyla $\alpha'(s) = 0$, $\beta'(s) = 0$ olduğu görülür. Yani α ve β her $s \in I$ için sabit değerli fonksiyonlardır. Karışıklığa yol açmayacak şekilde bu fonksiyonları sırasıyla α ve β ile gösterelim. Bu durumda (2.2.4) denklemi

$$\overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = [1 - \alpha k_1(s) - \beta k_2(s)]\, L(s) - \alpha N(s) \tag{2.2.5}$$

olarak yeniden yazılır. (2.2.5) denkleminin iki yanı taraf tarafa iç çarpıma tabi tutulursa

$$0 = \left\langle \overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds}, \overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = -2\alpha\,[1 - \alpha k_1(s) - \beta k_2(s)]$$

eşitliği elde edilir. Burada iki durum vardır. Her $s \in I$ için ya

$$(i) \qquad \alpha = 0 \ \text{ ve } \ \beta k_2(s) \neq 1$$

ya da

$$(ii) \qquad \alpha \neq 0 \ \text{ ve } \ \alpha k_1(s) + \beta k_2(s) = 1$$

olur.

Burada şu noktayı vurgulayalım: (2.2.5) denklemindeki α ve $1 - \alpha k_1(s) - \beta k_2(s)$ ifadelerinin ikiside aynı anda sıfır olursa, $\frac{d\overline{s}}{ds} = 0$ olur. Fakat (1,2)- Bertrand eğrisinin tanımından biliyoruzki C eğrisininin $c(s)$ noktasını $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s))$ noktasına karşılık getirecek şekilde tanımlanan ve eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki dönüşüm olan φ ($\varphi(s) = \overline{s}$) regüler bir dönüşüm olduğundan, (2.2.5) denklemindeki $\frac{d\overline{s}}{ds}$ sıfır olamaz. Bundan dolayı (2.2.5) denklemindeki α ve $1 - \alpha k_1(s) - \beta k_2(s)$ ifadelerinin ikisininde aynı anda sıfır olması mümkün değildir.

$\Longleftarrow$:) C ($c : I \to R_1^4$), R_1^4 uzayında (i) şartı sağlanacak şekilde null Cartan bir eğri olsun. s, C eğrisinin pseudo yay parametresi olmak üzere her $s \in I$ için, bir $\overline{C}$ null Cartan eğrisini

$$\overline{c}(s) = c(s) + \alpha W_1(s) + \beta W_2(s) \tag{2.2.6}$$

olarak tanımlayalım. (2.2.6) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp, Cartan eğriye ait Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\frac{d\overline{c}(s)}{ds} = [1 - \alpha k_1(s) - \beta k_2(s)]\, L(s) - \alpha N(s)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte (i) şartı kullanılırsa

$$\frac{d\overline{c}(s)}{ds} = [1 - \beta k_2(s)]\, L(s) \tag{2.2.7}$$

denklemi elde edilir. (2.2.7) eşitliğinde (i) şartından dolayı $\overline{C}$ regüler bir eğri olur. Pseudo yay parametreleri arasındaki regüler φ dönüşümünü ($\varphi : I \to \overline{I}$)

$$\overline{s} = \varphi(s) = \int_0^s \left\langle \frac{d^2\overline{c}(s)}{ds^2}, \frac{d^2\overline{c}(s)}{ds^2} \right\rangle^{\frac{1}{4}} ds, \qquad \forall s \in I$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\overline{s}$, $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresini göstermektedir. Yukarıdaki eşitlikten her $s \in I$ için

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \sqrt{|1 - \beta k_2(s)|} > 0 \qquad (2.2.8)$$

olur. Bu durumda $\overline{C}$ eğrisi, $\overline{s}$ pseudo yay parametresiyle her $s \in I$ için

$$\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s)) = c(s) + \beta W_2(s) \qquad (2.2.9)$$

şeklinde yeniden yazılır. (2.2.9) denkleminin türevi alınıp, R_1^4 uzayında null Cartan eğriye ait Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\overline{L}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = (1 - \beta k_2(s))L(s) \qquad (2.2.10)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki $\overline{L}$ vektörü $\overline{C}$ boyunca her $\overline{s} \in \overline{I}$ için $\overline{L}(\overline{s}) = \frac{d\overline{c}(\overline{s})}{d\overline{s}}$ olarak tanımlanan null bir vektördür. Bu durumda $\overline{N}$ null vektörü tek olarak

$$\overline{N}(\overline{s})(1 - \beta k_2(s)) = \frac{d\overline{s}}{ds} N(s) \qquad (2.2.11)$$

şeklinde mevcuttur [22]. (2.2.8) eşitliğinden dolayı, (2.2.10) ve (2.2.11) denklemleri

$$\overline{L}(\overline{s}) = \frac{d\overline{s}}{ds} L(s), \qquad (2.2.12)$$

$$\overline{N}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = N(s) \qquad (2.2.13)$$

şeklinde yeniden yazılır. (2.2.12) denkleminin türevi alınıp, Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\overline{W_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d^2(\overline{s})}{ds^2} L(s) + \frac{d\overline{s}}{ds} W_1(s) \qquad (2.2.14)$$

denklemi elde edilir. (2.2.13), (2.2.14) denklemleri kullanılarak

$$0 = \left\langle \overline{N}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds}, \overline{W_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = \frac{d^2(\overline{s})}{ds^2}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliği ve (2.2.8) denklemini kullanırsak her $s \in I$ için $\frac{d\overline{s}}{ds} = \ell_0$ ($\ell_0 \to sabit$) olarak elde edilir. Bu durumda (2.2.12), (2.2.13) denklemleri

$$\overline{L}(\overline{s}) = \ell_0 L(s), \qquad (2.2.15)$$

$$\overline{N}(\overline{s}) = \frac{1}{\ell_0} N(s) \tag{2.2.16}$$

olarak kısalır. (2.2.15) denkleminin türevi alınırsa

$$\overline{W_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = \ell_0 W_1(s)$$

ifadesi elde edilir. $\frac{d\overline{s}}{ds} = \ell_0$, eşitliği yukarıda kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = W_1(s) \tag{2.2.17}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.16) denkleminin türevi alınırsa her $s \in I$ için

$$\left[\overline{k}_1(\overline{s})\overline{W_1}(\overline{s}) + \overline{k}_2(\overline{s})\overline{W_2}(\overline{s})\right]\ell_0 = \frac{1}{\ell_0}\left[k_1(s)W_1(s) + k_2(s)W_2(s)\right] \tag{2.2.18}$$

olur. (2.2.18) denkleminin iki yanını kendisiyle iç çarpıma tabi tutarsak

$$\left[\left(\overline{k}_1(\overline{s})\right)^2 + \left(\overline{k}_2(\overline{s})\right)^2\right](\ell_0)^4 = \left[(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\right] \tag{2.2.19}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.17) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\left[-\overline{k}_1(\overline{s})\overline{L}(\overline{s}) - \overline{N}(\overline{s})\right]\ell_0 = -k_1(s)L(s) - N(s) \tag{2.2.20}$$

elde edilir. (2.2.20) denklemi kullanılarak

$$\overline{k}_1(\overline{s}) = \frac{k_1(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.21}$$

sonucu elde edilir. (2.2.21)'deki sonuç (2.2.19) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\overline{k}_2(\overline{s})\right| = \left|\frac{k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right|$$

olur.

$$\overline{k}_2(\overline{s}) = \frac{k_2(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.22}$$

olarak seçelim. Şimdi (2.2.17), (2.2.21) ve (2.2.22) eşitlikleri (2.2.18) denkleminde kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\overline{W_2} = W_2 \tag{2.2.23}$$

olur. W_1 ve W_2 vektörlerinin gerdiği düzlemin $\overline{W_1}$ ve $\overline{W_2}$ vektörlerinin gerdiği düzlemle çakıştığı aşikardır. Bu durumda C eğrisi R_1^4 uzayında (1,2)-Bertrand eğrisi olur.

$\Longleftarrow$:) C eğrisi R_1^4 uzayında (ii) şartını sağlayacak şekilde null Cartan bir eğri olsun. Null Cartan bir $\overline{C}$ eğrisi

$$\overline{c}(s) = c(s) + \alpha W_1(s) + \beta W_2(s) \tag{2.2.24}$$

olarak tanımlansın. (2.2.24) denkleminin türevi alınıp, Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\frac{d\overline{c}\,(s)}{ds} = [1 - \alpha k_1\,(s) - \beta k_2\,(s)]\, L\,(s) - \alpha N\,(s)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki denklemde (ii) şartı kullanılırsa, bu denklem

$$\frac{d\overline{c}\,(s)}{ds} = -\alpha N\,(s) \qquad (2.2.25)$$

eşitliğine dönüşür. (2.2.25) eşitliğinde (ii) şartını kullanırsak ($\alpha \neq 0$) $\overline{C}$ regüler bir eğri olur. Pseudo yay parametreleri arasındaki regüler φ ($\varphi : I \to \overline{I}$) dönüşümünü

$$\overline{s} = \varphi\,(s) = \int_0^s \left\langle \frac{d^2\overline{c}\,(s)}{ds^2}, \frac{d^2\overline{c}\,(s)}{ds^2} \right\rangle^{\frac{1}{4}} ds, \quad \forall s \in I$$

olarak tanımlayabiliriz. Burada $\overline{s}$, $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresidir. Bu durumda

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\varphi\,(s)}{ds} = \left[\alpha^2 \left((k_1\,(s))^2 + (k_2\,(s))^2\right)\right]^{\frac{1}{4}} > 0 \qquad (2.2.26)$$

olur. (2.2.24) denklemi her $s \in I$ için

$$\overline{c}\,(\overline{s}) = c\,(s) + \alpha W_1\,(s) + \beta W_2\,(s) \qquad (2.2.27)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (2.2.27) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{L}\,(\overline{s}) = [1 - \alpha k_1\,(s) - \beta k_2\,(s)]\, L\,(s) - \alpha N\,(s) \qquad (2.2.28)$$

olur. Buradaki $\overline{L}$ vektörü $\overline{C}$ boyunca her $\overline{s} \in \overline{I}$ için $\overline{L}\,(\overline{s}) = \frac{d\overline{c}(\overline{s})}{d\overline{s}}$ olarak tanımlanan null bir vektördür. (ii) şartı (2.2.28) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{L}\,(\overline{s}) = -\alpha N\,(s) \qquad (2.2.29)$$

elde edilir. $\overline{N}$ vektörü tek olarak

$$\overline{N}\,(\overline{s}) = -\frac{d\overline{s}}{ds}\frac{1}{\alpha}L\,(s) \qquad (2.2.30)$$

şeklinde mevcuttur [22]. (2.2.29) denkleminin türevi alınırsa her $s \in I$ için

$$\frac{d^2\overline{s}}{ds^2}\overline{L}\,(\overline{s}) + \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 \overline{W_1}\,(\overline{s}) = -\alpha\,[k_1\,(s)\, W_1\,(s) + k_2\,(s)\, W_2\,(s)] \qquad (2.2.31)$$

denklemi elde edilir. (2.2.30), (2.2.31) denklemleri beraber kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\left\langle \overline{N}\,(\overline{s}), \left[\frac{d^2\overline{s}}{ds^2}\overline{L}\,(\overline{s}) + \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 \overline{W_1}\,(\overline{s})\right] \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{d\overline{s}}{ds}\frac{1}{\alpha}L\,(s), [(-\alpha k_1\,(s))\, W_1\,(s) + (-\alpha k_2\,(s))\, W_2\,(s)] \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\frac{d^2\overline{s}}{ds^2} = 0$$

olarak bulunur. Böylece her $s \in I$ için $\frac{d\overline{s}}{ds} = \ell_0$ ($\ell_0 \to sabit$) olur. Bu bilgi (2.2.31) denkleminde kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = \left(-\frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_1(s) + \left(-\frac{\alpha k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_2(s) \tag{2.2.32}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.32) eşitliğinden

$$(\ell_0)^4 = \alpha^2 \left[(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2\right] \tag{2.2.33}$$

olarak elde edilir. Böylece $\overline{W_1}$ vektörü her $s \in I$ için

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = (\cos\tau(s)) W_1(s) + (\sin\tau(s)) W_2(s) \tag{2.2.34}$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\cos\tau(s) = -\frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}, \tag{2.2.35}$$

$$\sin\tau(s) = -\frac{\alpha k_2(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.36}$$

olur. (2.2.34) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\left[-\overline{k}_1(\overline{s})\,\overline{L}(\overline{s}) - \overline{N}(\overline{s})\right]\ell_0 = {} & \frac{d}{ds}[\cos\tau(s)]\,W_1(s) \\ & + \cos\tau(s)\left[-k_1(s)L(s) - N(s)\right] \\ & + \frac{d}{ds}[\sin\tau(s)]\,W_2(s) \\ & + \sin\tau(s)\left[-k_2(s)L(s)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.29) ve (2.2.30) eşitliklerini yukarıdaki ifadede kullanırsak

$$\begin{aligned}\left[-\overline{k}_1(\overline{s})\left(-\frac{\alpha}{\ell_0}N(s)\right) - \left(-\frac{\ell_0}{\alpha}L(s)\right)\right]\ell_0 = {} & \frac{d}{ds}[\cos\tau(s)]\,W_1(s) \\ & + \cos\tau(s)\left[-k_1(s)L(s) - N(s)\right] \\ & + \frac{d}{ds}[\sin\tau(s)]\,W_2(s) \\ & + \sin\tau(s)\left[-k_2(s)L(s)\right]\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

eşitliğine ulaşırız. (2.2.37) ifadesinde

$$\begin{aligned}\langle W_1(s), W_2(s)\rangle = \langle W_1(s), L(s)\rangle = \langle W_1(s), N(s)\rangle = \langle W_2(s), L(s)\rangle \\ = \langle W_2(s), N(s)\rangle = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\frac{d}{ds}\left[\cos\tau(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[\sin\tau(s)\right] = 0$$

sonucuna varılır. Başka bir deyişle τ fonksiyonu τ_0 değerine sahip sabit bir fonksiyondur. Böylece (2.2.35), (2.2.36) eşitlikleri

$$\cos\tau_0 = -\frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}, \tag{2.2.38}$$

$$\sin\tau_0 = -\frac{\alpha k_2(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.39}$$

olarak yeniden yazılır. (2.2.34) denkleminden

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = (\cos\tau_0)\, W_1(s) + (\sin\tau_0)\, W_2(s) \tag{2.2.40}$$

ifadesini yazabiliriz. (2.2.37) eşitliğinden

$$\overline{k}_1(\overline{s})\,\alpha = -(\cos\tau_0) = \frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}$$

olur, buradanda

$$\overline{k}_1(\overline{s}) = \frac{k_1(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.41}$$

olarak elde edilir. (2.2.30) denkleminin türevi alınırsa

$$\left[\overline{k}_1(\overline{s})\,\overline{W_1}(\overline{s}) + \overline{k}_2(\overline{s})\,\overline{W_2}(\overline{s})\right]\ell_0 = -\frac{\ell_0}{\alpha} W_1(s) \tag{2.2.42}$$

elde edilir. (2.2.42) denkleminden

$$(\overline{k}_1(\overline{s}))^2 + \left(\overline{k}_2(\overline{s})\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \tag{2.2.43}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.33) ve (2.2.41) denklemlerini (2.2.43) denkleminde kullanırsak

$$\left|\overline{k}_2(\overline{s})\right| = \left|\frac{k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right|$$

eşitliği elde edilir.

$$\overline{k}_2(\overline{s}) = -\frac{k_2(s)}{(\ell_0)^2} \tag{2.2.44}$$

olarak seçelim. (2.2.40), (2.2.41) ve (2.2.44) değerleri (2.2.42) denkleminde kullanılırsa

$$\left\{\frac{k_1(s)}{(\ell_0)^2}\left(\left(-\frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_1(s) + \left(-\frac{\alpha k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_2(s)\right) + \left(-\frac{k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right)\overline{W_2}(\overline{s})\right\}\ell_0$$

$$= -\frac{\ell_0}{\alpha} W_1(s)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten de her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\overline{W_2}(\overline{s}) &= \left(\frac{\alpha k_2(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_1(s) + \left(-\frac{\alpha k_1(s)}{(\ell_0)^2}\right) W_2(s) \\ &= (-\sin\tau_0) W_1(s) + (\cos\tau_0) W_2(s)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradanda anlaşılıyorki C eğrisinin üzerinde her $c(s)$ noktasındaki Cartan (1, 2)-normal düzlemi eğrilerin birbirine karşılık gelen noktalarında, $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s})$ noktasındaki Cartan (1, 2)-normal düzlemi ile çakışır. Bu durumda C eğrisi R_1^4 uzayında (1, 2)-Bertrand eğrisidir. □

2.3 (1,2)-Bertrand Eğrisi İçin Bir Örnek

a, b, $a \neq \mp b$, şartını sağlayacak şekilde sıfırdan farklı sabitler olsun. C $(c : I \to R_1^4)$ eğriside R_1^4 uzayında her $s \in I$ için

$$c(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{1}{a}\sinh as, \frac{1}{a}\cosh as, \frac{1}{b}\sin bs, \frac{1}{b}\cos bs\right]$$

şeklinde tanımlanan bir eğri olsun. Bu durumda eğrinin Cartan çatısı ve Cartan eğrilikleri her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}L(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[\cosh as, \sinh as, \cos bs, -\sin bs] \\ W_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[a\sinh as, a\cosh as, -b\sin bs, -b\cos bs] \\ N(s) &= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}[\cosh as, \sinh as, -\cos bs, \sin bs] \\ W_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[b\sinh as, b\cosh as, a\sin bs, a\cos bs] \\ k_1(s) &= \frac{b^2-a^2}{2} \\ k_2(s) &= -ab\end{aligned}$$

olarak bulunur. (i) şartının sağlanması için α, β sabitlerini

$$\alpha = 0 \ \text{ and } \ \beta = \frac{1}{ab}$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$\alpha k_1(s) + \beta k_2(s) = -1 \neq 1$$

olur. Böylece C eğrisi R_1^4 uzayında (1, 2)-Bertrand eğrisi olur. C eğrisinin (1, 2)-Bertrand eşi olan $\overline{C}$ $\left(\overline{c} : \overline{I} \to R_1^4\right)$ eğrisi her $\overline{s} \in \overline{I}$ için

$$\overline{c}(\overline{s}) = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{1}{a}\sinh\left(a\frac{\overline{s}}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{a}\cosh\left(a\frac{\overline{s}}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{b}\sin\left(b\frac{\overline{s}}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{b}\cos\left(b\frac{\overline{s}}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

şeklindedir. Burada $\overline{s}$, $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresi olup, eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki regüler $\varphi : I \to \overline{I}$ dönüşümü

$$\overline{s} = \varphi(s) = \sqrt{2}s$$

olarak bulunur. (ii) şartının sağlanması için α, β sabitlerini

$$\alpha = \frac{1}{b^2 - a^2} \text{ and } \beta = -\frac{1}{2ab}$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$\alpha k_1(s) + \beta k_2(s) = 1$$

olur. Böylece C eğrisi R_1^4 uzayında (1, 2)-Bertrand eğrisidir. C eğrisinin (1, 2)-Bertrand eşi olan $\overline{C}$ $\left(\overline{c} : \overline{I} \to R_1^4\right)$ eğrisi her $\overline{s} \in \overline{I}$ için

$$\overline{c}(\overline{s}) = \frac{(\ell_0)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{1}{a}\sinh\left(\frac{a}{\ell_0}\overline{s}\right), \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{a}{\ell_0}\overline{s}\right), -\frac{1}{b}\sin\left(\frac{b}{\ell_0}\overline{s}\right), -\frac{1}{b}\cos\left(\frac{b}{\ell_0}\overline{s}\right)\right]$$

olur. Burada $\overline{s}$ $\overline{C}$ eğrisinin sözde yay parametresi, $\frac{d\overline{s}}{ds} = \ell_0$ ve eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki regüler $\varphi : I \to \overline{I}$ dönüşümü

$$\overline{s} = \varphi(s) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(b^2-a^2)}}s$$

şeklindedir.

2.4 R_1^5 Uzayında Pseudo Küresel Eğriler

Bu bölümde R_1^5 uzayındaki m_s merkezli, $R > 0$ yarıçaplı

$$S_1^4(R) = \left\{x \in R_1^5; \langle x - m_s, x - m_s\rangle = R^2\right\}$$

küresi üzerindeki null eğriler incelendi. Küresel eğrileri karakterize etmek için oskülatör küre kavramı kullanıldı.

Tanım 2.4.1. *α, R_1^5 uzayında bir Cartan eğri olsun. α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında beşinci dereceden değen pseudo küreye α'nın $\alpha(s_0)$ noktasındaki pseudo oskülatör küresi (pseudo eğrilik küresi) denir [23].*

Lemma 2.4.1. *α, R_1^5 uzayında null Cartan bir eğri olsun. α'nın $\alpha(s_0)$ noktasındaki pseudo oskülatör küresinin merkezi m_s*

$$m_s = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_2(s_0)}W_2(s_0) - \frac{k_2'(s_0)}{k_2^2(s_0)\,k_3(s_0)}W_3(s_0)$$

şeklindedir.

İspat. s pseudo yay uzunluğu parametresiyle parametrize edilmiş α null Cartan eğrisi m_s merkezli ve R yarıçaplı pseudo S küresine $s = s_0$ noktasında beşinci basamaktan değiyor olsun. Bu durumda

$$m_s - \alpha(s_0) = aL + bN + cW_1 + dW_2 + eW_3$$

eşitliğini yazabiliriz. Hipotezden dolayı

$$c(s_0) = |\alpha(s_0) - m_s|^2 = R^2 \quad (R \to sabit)$$

$$c'(s_0) = c''(s_0) = ... = c^{(5)}(s_0) = 0$$

şartları sağlanır. Böylece aranan katsayılar

$$a = b = c = 0, \quad d = \frac{1}{k_2}, \quad e = -\frac{k_2'}{k_2^2 k_3}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz a, b, c, d, e değerlerini yukarıda yerlerine yazarsak

$$m_s = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_2(s_0)} W_2(s_0) - \frac{k_2'(s_0)}{k_2^2(s_0)\, k_3(s_0)} W_3(s_0)$$

sonucu elde edilir. Böylece oskülatör kürenin yarıçapı

$$R_{osc} = \sqrt{\left(\frac{1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{k_2'}{k_2^2 k_3}\right)^2}$$

olur. □

Teorem 2.4.1. *α, R_1^5 uzayında k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları $k_3 \neq 0$, $\left(\frac{1}{k_2}\right)' \neq 0$ şartlarını sağlayacak şekilde Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu durumda α küresel bir eğridir ancak ve ancak α eğrisinin Cartan eğrilikleri*

$$\frac{k_3}{k_2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_2}\right)\right) = 0$$

denklemini sağlıyorsa.

İspat. $\Longrightarrow$:) α null eğrisi bir $\widetilde{S}$ küresi üzerinde olsun. Lemma'dan biliyoruzki α eğrisinin $s = s_0$ noktasındaki oskülatör küresinin merkezi

$$m_s = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_2} W_2 - \frac{k_2'}{k_2^2 k_3} W_3 \tag{2.4.1}$$

şeklindedir. α eğrisinin oskülatör küresi tek olduğundan $\widetilde{S}$ ile çakışır. (2.4.1) eşitliğinin türevi alınıp α Cartan eğrisi için Frenet denklemleri kullanılırsa

$$m_s' = \left\{\frac{k_3}{k_2} - \left(\frac{k_2'}{k_2^2 k_3}\right)'\right\} W_3 = 0 \tag{2.4.2}$$

olur. Böylece (2.4.2) eşitliğinde parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır. Parantez içindeki ifade düzenlenirse

$$\frac{k_3}{k_2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_2}\right)\right)=0 \qquad (2.4.3)$$

denklemi elde edilir. (2.4.3) denkleminde $\frac{1}{k_2}=\rho$ ve $\sigma=\int k_3 ds$ dönüşümleri yapılır ve $\frac{d}{ds}=\frac{d}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}$ eşitliği kullanılırsa bu denklem

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}+\rho=0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin genel çözümü de

$$\rho=c_1\cos\sigma+c_2\sin\sigma$$

şeklindedir. Buradaki c_1 ve c_2 sabit sayılardır.

($\Longleftarrow$: Şimdi varsayalımki α null Cartan eğrisinin k_2 ve k_3 eğrilikleri (2.4.3) denklemini sağlasın. Bu durumda α eğrisinin oskülatör küresinin R yarıçapı için

$$R_{osc}=\sqrt{\left(\frac{1}{k_2}\right)^2+\left(\frac{k_2'}{k_2^2k_3}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\left(R^2\right)}{ds}&=2\frac{1}{k_2}\left(-\frac{k_2'}{k_2^2}\right)+2\frac{k_2'}{k_2^2k_3}\left(\frac{k_2'}{k_2^2k_3}\right)'\\&=2\frac{1}{k_2}\left(-\frac{k_2'}{k_2^2}\right)+2\frac{k_2'}{k_2^2k_3}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)=0\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $R^2=sabit$ olur. (2.4.3) denklemi (2.4.2) eşitliğinde kullanılırsa oskülatör kürenin merkezinin sabit olduğu görülür. Son olarak (2.4.1) denklemini gözönünde bulundurursak

$$\left(m_s-\alpha\left(s\right)\right)^2=R^2=sabit$$

durumu elde edilir. Böylece α eğrisi m_s merkezli ve R yarıçaplı bir küre üzerinde olur. Sonuç olarak (2.4.3) denklemi R_1^5 uzayındaki küresel eğrileri karakterize eden bir denklemdir. Öklid uzayındaki küresel eğriler Aminov'un [26] kitabında ayrıntılı olarak yer almaktadır. □

2.5 R_1^3 ve R_1^4 Uzaylarındaki Bertrand Eğrilerinin Sınıflandırılması

R_1^3 ve R_1^4 uzaylarındaki Bertrand eğrilerini sınıflandırmadan önce aşağıdaki *kongruens* teoremini verelim.

Teorem 2.5.1. (Kongruens teoremi) *C ve $\overline{C}$ eğrileri R_1^{m+2} uzayında aynı $\{k_1,...k_m\}$ Cartan eğriliklerine sahip iki null eğri ve $k_i:[-\varepsilon,\varepsilon]\to R$; $1\leqslant i\leqslant m$ şeklinde tanımlanan eğrilik fonksiyonları diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda R_1^{m+2} uzayı, C eğrisini $\overline{C}$ eğrisine eşleyen Lorentzian $\left(L:R_1^{m+2}\to R_1^{m+2};\ L\left(C\right)=\overline{C}\right)$ bir dönüşüme sahiptir [22].*

2.5.1 R_1^4 uzayındaki Bertrand eğrilerinin sınıflandırılması

C, R_1^4 Minkowski 4−uzayında k_1 eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit ve k_2 eğrilik fonksiyonu 0 olan Cartan çatılı null bir eğri olsun. C eğrisinin k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonlarının böyle olması durumunda buna karşılık gelen Cartan denklemleri

$$\begin{aligned} C' &= L \\ L' &= W_1 \\ W_1' &= -k_1 L - N \\ N' &= k_1 W_1 \\ W_2' &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki Cartan denklemlerini sağlayan eğri

$$C^{(4)} + 2k_1 C'' = 0 \tag{2.5.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Bu diferensiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$x^4 + 2k_1 x^2 = 0$$

şeklindedir. Bu karakteristik denklem kullanılarak (2.5.1) denkleminin çözümü olan aşağıdaki iki örneğe ulaşabiliriz.

Örnek 2.5.1. (1. tip) $\sigma = sabit < 0$, $d \in R$ *olmak üzere* $C_\sigma : R \to R_1^4$ *eğrisi*

$$C_\sigma(s) = \left(\frac{1}{\sigma} \sinh \sqrt{-\sigma} s, \frac{1}{\sigma} \cosh \sqrt{-\sigma} s, \frac{1}{\sqrt{-\sigma}} s, d \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda C_σ *eğrisinin eğrilik fonksiyonları*

$$k_1 = \frac{\sigma}{2} < 0, \qquad k_2 = 0$$

olarak bulunur.

Örnek 2.5.2. (2. tip) $\sigma = sabit > 0$, $b \in R$ *olmak üzere* $C_\sigma : R \to R_1^4$ *eğrisi*

$$C_\sigma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} s, b, \frac{1}{\sigma} \cos \sqrt{\sigma} s, \frac{1}{\sigma} \sin \sqrt{\sigma} s \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda C_σ *eğrisinin eğrilik fonksiyonları*

$$k_1 = \frac{\sigma}{2} > 0, \qquad k_2 = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 2.5.2. *C, R_1^4 uzayında Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu durumda bu eğrinin eğrilik fonksiyonları $k_1 = sabit \neq 0$ ve $k_2 = 0$ şeklindedir ancak ve ancak C eğrisi yukarıdaki örneklerde tanımlanan iki tip eğri ailesinden birine kongruent ise.*

İspat. $k_1 = sabit \neq 0$, $k_2 = 0$, C eğrisinin eğrilik fonksiyonları olsun. Daha önce ifade edilen *kongruens* teoreminden dolayı ispatın tamamlanması için eğrilikleri bu şekilde olan yukarıdaki iki tip eğri ailesinden birine ulaşmak yeterli olur.

Durum 2.5.1. $k_1 < 0$ *olsun.*

$\sigma = 2k_1 < 0$ ile belirlenen 1. tip C_σ eğrisi için eğrilik fonsiyonları

$$k_1 < 0, \qquad k_2 = 0$$

olarak bulunur.

Durum 2.5.2. $k_1 > 0$ *olsun.*

$\sigma = 2k_1 > 0$ ile belirlenen 2. tip C_σ eğrisi için eğrilik fonksiyonları

$$k_1 > 0, \qquad k_2 = 0$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Ceylan Çöken'in makalesindeki [18] Bertrand eğri kavramını gözönünde bulundurarak aşağıdaki sonuca varabiliriz.

Sonuç 2.5.1. *C, R_1^4 uzayında null Cartan çatılı bir eğri olsun. C eğrisi bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak C eğrisi yukarıdaki iki tip eğri ailesinden birine kongruent ise.*

2.5.2 R_1^3 uzayındaki Bertrand eğrilerinin sınıflandırılması

C, R_1^3 uzayında sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir eğri olsun. C eğrisine karşılık gelen Cartan denklemleri

$$C' = L$$

$$L' = W$$

$$W' = -kL - N$$

$$N' = kW$$

şeklindedir. Cartan denklemleri yukarıdaki gibi olan C eğrisi

$$C^{(4)} + 2kC'' = 0 \qquad (2.5.2)$$

diferensiyel denkleminin çözümünü oluşturur. Bu diferensiyel denklemin karakteristik denklemi

$$x^4 + 2kx^2 = 0$$

olup çözümleri k'nın işaretine bağlı olarak değişir. (2.5.2) denklemi sayesinde R_1^3 uzayında eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olan Cartan çatılı null bir eğri için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.5.3. (1. tip) $\sigma = sabit < 0$, $d \in R$ *olmak üzere* $C_\sigma : R \to R_1^3$ *eğrisi*

$$C_\sigma(s) = \left(\frac{1}{\sigma} \sinh \sqrt{-\sigma} s, \frac{1}{\sigma} \cosh \sqrt{-\sigma} s, \frac{1}{\sqrt{-\sigma}} s + d \right)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda C_σ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$k = \frac{\sigma}{2} < 0$$

olur.

Örnek 2.5.4. (2. tip) $\sigma = sabit > 0$, $b \in R$ *olmak üzere* $C_\sigma : R \to R_1^3$ *eğrisi*

$$C_\sigma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} s + b, \frac{1}{\sigma} \cos \sqrt{\sigma} s, \frac{1}{\sigma} \sin \sqrt{\sigma} s \right)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda C_σ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$k = \frac{\sigma}{2} > 0$$

olur.

Teorem 2.5.3. *C, R_1^3 uzayında Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu durumda bu eğrinin eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabittir ancak ve ancak C eğrisi yukarıda tanımlanan iki tip eğri ailesinden birine kongruent ise.*

İspat. $k = sabit \neq 0$, C eğrisinin eğrilik fonksiyonu olsun. *Kongruens* teoreminden dolayı eğrilik fonksiyonu k olacak şekilde yukarıda tanımlanan iki tip eğri ailesinden birine ulaşmak ispatı tamamlar.

Durum 2.5.3. $k < 0$ *olsun.*

$\sigma = 2k < 0$ ile belirlenen 1. tip C_σ eğrisi için eğrilik fonsiyonu

$$k = sabit < 0$$

olur.

Durum 2.5.4. $k > 0$ *olsun.*

$\sigma = 2k > 0$ ile belirlenen 2. tip C_σ eğrisi için eğrilik fonksiyonu

$$k = sabit > 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Inoguchi ve Lee'nin [15] R_1^3 uzayındaki Bertrand eğri kavramını gözönünde bulundurursak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 2.5.2. *C, R_1^3 uzayında Cartan çatılı null bir eğri olsun. C eğrisi bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak C eğrisi yukarıdaki iki tip eğri ailesinden birine kongruent ise.*

2.5.3 R_1^4 uzayındaki (1, 2)-Bertrand eğrilerinin sınıflandırılması

C eğrisi R_1^4 uzayında sıfırdan farklı ve sabit k_1, k_2 eğriliklerine sahip Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisinin Cartan denklemleri

$$C' = L$$

$$L' = W_1$$

$$W_1' = -k_1 L - N$$

$$N' = k_1 W_1 + k_2 W_2$$

$$W_2' = -k_2 L$$

şeklindedir. Yukarıdaki Cartan denklemlerini sağlayan C eğrisi

$$C^{(5)} + 2k_1 C^{(3)} - k_2^2 C' = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü oluşturur. Bu sabit katsayılı homojen diferensiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$x^{(5)} + 2k_1 x^{(3)} - k_2^2 x = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$0, \sqrt{-k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, -\sqrt{-k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \sqrt{k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}i, -\sqrt{k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}i$$

olup bu köklere karşılık gelen genel çözüm

$$y_{genel} = C(s) = A_1 \sinh \rho s + A_2 \cosh \rho s + A_3 \sin \sigma s + A_4 \cos \sigma s + A_5$$

olur. Buradaki A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 değerleri R_1^4 uzayındaki sabit vektörlerdir.

Örnek 2.5.5. *α, β, θ, $\gamma \in R$, ρ ve σ, $\rho \neq \sigma$ şartını sağlayacak şekilde sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $C_{\rho,\, \sigma} : R \to R_1^4$ eğrisi*

$$C_{\rho,\, \sigma}(s) = (\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} \sinh \rho s + \alpha, \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} \cosh \rho s + \beta, \frac{1}{\sigma\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} \sin \sigma s + \theta,$$
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} \cos \sigma s + \gamma)$$

şeklinde tanımlansın. Hesaplamalar yapılırsa bu eğrinin eğrilik fonksiyonları $k_1 = \frac{\rho^2-\sigma^2}{2}$, $k_2 = -\rho\sigma$ *olarak bulunur.*

Teorem 2.5.4. *C eğrisi R_1^4 uzayında Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu eğrinin eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 sıfırdan farlı sabitlerdir ancak ve ancak C eğrisi yukarıdaki örnekde tanımlanan eğri ailesine kongruent ise.*

İspat. C eğrisi R_1^4 uzayında k_1, k_2 eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı sabitler olan Cartan çatılı null bir eğri olsun. ρ ve σ sabitlerini

$$\rho = \sqrt{-k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \sigma = \sqrt{k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda örnekteki gibi tanımlanan $C_{\rho,\,\sigma}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2 olur. Bu aşamada *kongruens* teoreminden yararlanırsak ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 2.5.3. *R_1^4 uzayında bir null Cartan eğrinin eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2 sıfırdan farklı sabitlerse, bu durumda bu eğri bir* $(1,2)-$Bertrand *eğrisidir*

İspat. C, R_1^4 uzayında null Cartan bir eğri ve k_1, k_2 bu eğrinin sıfırdan farklı sabit eğrilikleri olsun. Bu durumda $\alpha k_1 + \beta k_2 = 1$ şartını sağlayacak şekilde $\alpha \neq 0, \beta$ sabitleri her zaman mevcuttur. Böylece **teorem (2.2.1)**'den dolayı bu eğri bir $(1,2)-$*Bertrand* eğrisidir. □

Sonuç 2.5.4. *C eğrisi, R_1^4 uzayında k_1, k_2 eğrilik fonksiyonları sıfırdan farklı sabitler olan Cartan çatılı null bir eğri olsun. Bu durumda C eğrisi bir* $(1,2)-$Bertrand *eğrisidir ancak ve ancak C eğrisi aşağıdaki tipde bir eğriye kongruent ise.*

$$C = (\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}\sinh\rho s + \alpha, \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}\cosh\rho s + \beta, \frac{1}{\sigma\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}\sin\sigma s + \theta,$$
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}\cos\sigma s + \gamma)$$

$;\alpha,\beta,\theta,\gamma \in R$ *ve* $\rho = \sqrt{-k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$, $\sigma = \sqrt{k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$.

3. MINKOWSKI 4-UZAYINDA 2-DEJENERE (1,2)-BERTRAND EĞRİLERİ

3.1 2-Dejenere $(1,2)$ −Bertrand Eğrileri ve Karakterizasyonu

Bu bölümde R_1^4 uzayındaki 2-dejenere Bertrand eğriler karakterize edildi.

Tanım 3.1.1. *C ve $\overline{C}$, R_1^4 uzayında iki 2-dejenere Cartan eğriler olsun. $\varphi : I \to \overline{I}$ dönüşümü $\left(\overline{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall s \in I\right)$ her $s \in I$ için C eğrisininin $c(s)$ noktasını $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s))$ noktasına karşılık getirecek şekilde pseudo yay parametreleri arasında regüler bir dönüşüm olsun. Her $s \in I$ için C eğrisinin $c(s)$ noktasındaki (1, 2)-normal düzlemi eğrilerin birbirine karşılık gelen noktalarında $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}(\overline{s})$ noktasındaki (1, 2)-normal düzlemi ile çakışıyorsa C eğrisine 2-dejenere (1, 2)-Bertrand eğrisi denir. $\overline{C}$ eğrisine de C eğrisinin 2-dejenere (1, 2)-Bertrand eşi denir.*

Teorem 3.1.1. *C eğrisi R_1^4 uzayında eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 olacak şekilde 2-dejenere Cartan eğri olsun. Bu durumda C eğrisi (1,2)-Bertrand eğrisidir ancak ve ancak $k_1 = 0$ ve her $s \in I$ için*

$$\beta(s) \neq 0 \tag{a}$$

$$k_2(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} \tag{b}$$

$$(1 + \alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2 \neq 0 \tag{c}$$

şartlarını sağlayacak şekilde α ve β fonksiyonları varsa.

İspat. $\Longrightarrow$:) C eğrisi R_1^4 uzayında (1,2)-Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda her $s \in I$ için

$$\overline{c}(\overline{s}) = c(s) + \alpha(s) W_1(s) + \beta(s) W_2(s) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde C'nin bir $\overline{C}$ (1,2)-Bertrand eşi mevcuttur. Burada α ve β, s parametresine bağlı fonksiyonlar olup $\overline{s}$'de $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresidir. W_1 ve W_2 vektörlerinin gerdiği düzlem $\overline{W_1}$ ve $\overline{W_2}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemle çakıştığından

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = (\cos\theta(s)) W_1(s) + (\sin\theta(s)) W_2(s) \tag{3.1.2}$$

$$\overline{W_2}(\overline{s}) = (-\sin\theta(s)) W_1(s) + (\cos\theta(s)) W_2(s) \tag{3.1.3}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.1.1) denkleminin s parametresine göre türevi alınıp, Cartan eğri için geçerli Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\begin{aligned} \overline{W_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} &= (1 + \alpha'(s)) W_1(s) + (\alpha(s) - \beta(s) k_2(s)) L(s) \\ &+ \beta'(s) W_2(s) + \beta(s) k_1(s) N(s) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

denklemi elde edilir. C eğrisini (1, 2)-Bertrand eğrisi kabul ettiğimizden dolayı C ve $\overline{C}$ eğrilerinin pseudo yay parametreleri arasındaki φ dönüşümü regüler bir dönüşümdür. Bu durumda her $s \in I$ için

$$\frac{d(\varphi(s))}{ds} = \frac{d\overline{s}}{ds} \neq 0$$

bağıntısı mevcuttur. Böylece (3.1.4) eşitliğinden her $s \in I$ için $k_1 = 0$, (a) ve (b) bağıntıları elde edilir. Bu durumda (3.1.4) eşitliği

$$\overline{W_1}(\overline{s})\frac{d\overline{s}}{ds} = (1 + \alpha'(s))W_1(s) + \beta'(s)W_2(s) \tag{3.1.5}$$

olarak kısalır. (3.1.5) eşitliğinde her iki yanın kendisiyle iç çarpımı alınırsa

$$\left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 = (1 + \alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2 \tag{3.1.6}$$

olur. (3.1.6) eşitliğinden de her $s \in I$ için (c) bağıntısı elde edilir.

($\Longleftarrow$: C eğrisi $(c : I \to R_1^4)$, R_1^4 uzayında birinci Cartan eğriliği $k_1 = 0$ olan 2-dejenere bir eğri olmak üzere, k_2 eğrilik fonksiyonunu belirleyen α, β fonksiyonları (a), (b), (c) şartlarını sağlayacak şekilde mevcut olsun. 2-dejenere Cartan $\overline{C}$ eğrisi her $s \in I$ için

$$\overline{c}(s) = c(s) + \alpha(s)W_1(s) + \beta(s)W_2(s) \tag{3.1.7}$$

olarak tanımlansın. Burada s, C eğrisinin pseudo yay parametresidir. (3.1.7) denkleminin s'ye göre türevi alınıp, Cartan eğriye ait Frenet denklemleri ve hipotez kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\frac{d\overline{c}(s)}{ds} = (1 + \alpha'(s))W_1(s) + \beta'(s)W_2(s) \tag{3.1.8}$$

denklemi elde edilir. (3.1.8) denkleminin iki tarafı kendisiyle iç çarpıma tabi tutulursa

$$\left(\frac{d\overline{c}(s)}{ds}\right)^2 = (1 + \alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2 \neq 0 \tag{3.1.9}$$

elde edilir. (3.1.9) eşitliğinden dolayı $\overline{C}$ regüler bir eğri olur. Regüler $\varphi : I \to \overline{I}$ dönüşümünü

$$\overline{s} = \varphi(s) = \int_0^s \left\langle \frac{d\overline{c}(s)}{ds}, \frac{d\overline{c}(s)}{ds} \right\rangle^{\frac{1}{2}} ds \quad , \quad \forall s \in I \tag{3.1.10}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\overline{s}$ parametresi $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresidir. (3.1.10) ifadesinden her $s \in I$ için

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \sqrt{(1 + \alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2} \neq 0 \tag{3.1.11}$$

elde dedilir. Bu aşamada

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \varphi'(s) \tag{3.1.12}$$

olarak ifade edilsin. Bu durumda $\overline{C}$ eğrisi her $s \in I$ için

$$\overline{c}(\overline{s}) = \overline{c}(\varphi(s)) = c(s) + \alpha(s) W_1(s) + \beta(s) W_2(s) \tag{3.1.13}$$

şeklinde yeniden yazılır. (3.1.13) denkleminin türevi alınır, Cartan eğriye ait Frenet denklemleri ve hipotez kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\varphi'(s)\overline{W_1}(\overline{s}) = (1 + \alpha'(s))W_1(s) + \beta'(s) W_2(s) \tag{3.1.14}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki $\overline{W_1}$ birim vektör alanı her $\overline{s} \in \overline{I}$ için $\overline{C}$ boyunca $\overline{W_1}(\overline{s}) = \frac{d\overline{c}(s)}{d\overline{s}}$ olarak tanımlanan spacelike bir vektördür. (3.1.11), (3.1.12), (3.1.14) ifadeleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = \cos\tau(s) W_1(s) + \sin\tau(s) W_2(s) \tag{3.1.15}$$

olarak yazılır. Burada

$$\cos\tau(s) = \frac{1 + \alpha'(s)}{\varphi'(s)}, \tag{3.1.16}$$

$$\sin\tau(s) = \frac{\beta'(s)}{\varphi'(s)} \tag{3.1.17}$$

olur. (3.1.15) eşitliğinin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}\varphi'(s)\overline{L}(\overline{s}) = {} & \frac{d\cos\tau(s)}{ds} W_1(s) + \frac{d\sin\tau(s)}{ds} W_2(s) \\ & + (\cos\tau(s) - k_2 \sin\tau(s)) L(s)\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

elde edilir. (3.1.18) denkleminin iki yanını $\langle , \rangle$ iç çarpımına göre çarpmaya tabi tutarsak

$$(\cos'\tau(s))^2 + (\sin'\tau(s))^2 = 0 \tag{3.1.19}$$

olur. (3.1.19) eşitliğinden her $s \in I$ için

$$\frac{d\cos\tau(s)}{ds} = \frac{d\sin\tau(s)}{ds} = 0$$

elde edilir. Başka bir deyişle τ, τ_0 ile gösterilen sabit değerli bir fonksiyondur. Böylece (3.1.16), (3.1.17) ifadeleri

$$\cos\tau_0 = \frac{1 + \alpha'(s)}{\varphi'(s)}, \tag{3.1.20}$$

$$\sin\tau_0 = \frac{\beta'(s)}{\varphi'(s)} \tag{3.1.21}$$

olarak yeniden yazılır. Bu aşamada (3.1.15) denklemini gözönünde bulundurarak

$$\overline{W_1}(\overline{s}) = \cos\tau_0 W_1(s) + \sin\tau_0 W_2(s) \tag{3.1.22}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.1.18) denklemi

$$\varphi'(s)\overline{L}(\overline{s}) = (\cos\tau_0 - k_2 \sin\tau_0) L(s) \tag{3.1.23}$$

şeklinde yeniden düzenlenir. (3.1.23) denkleminde her $s \in I$ için $\varphi'(s) \neq 0$ olduğundan

$$\cos\tau_0 - k_2 \sin\tau_0 = \delta(s) \neq 0 \tag{3.1.24}$$

olur. Bu durumda her $s \in I$ için

$$\overline{N}(\overline{s})(\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0) = \varphi'(s)\, N(s) \tag{3.1.25}$$

olarak elde edilir. (3.1.23) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi''(s)\,\overline{L}(\overline{s}) + (\varphi'(s))^2\,\overline{k_1}(\overline{s})\,\overline{W_2}(\overline{s}) = {} & \frac{d(\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0)}{ds} L(s) \\ & + (\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0)\, k_1(s)\, W_2(s)\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

denklemi elde edilir. (3.1.26) denleminde $k_1(s) = 0$ şartını kullanıp daha sonra her iki yanı kendisiyle iç çarpıma tabi tutarsak

$$\overline{k_1}(\overline{s}) = 0 \tag{3.1.27}$$

elde edilir. Bu yüzdende (3.1.26) denklemi kısalarak

$$\varphi''(s)\,\overline{L}(\overline{s}) = \frac{d(\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0)}{ds} L(s) \tag{3.1.28}$$

olur. Bu aşamada (3.1.25) ve (3.1.28) eşitlikleri taraf tarafa iç çarpıma tabi tutulursa

$$\varphi''(s)(\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0) = \varphi'(s)\ \frac{d(\cos\tau_0 - k_2\sin\tau_0)}{ds} \tag{3.1.29}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.29) eşitliğini

$$\varphi''(s)\,\delta(s) = \varphi'(s)\,\delta'(s) \tag{3.1.30}$$

olarak kısaltalım. Her $s \in I$ için $\frac{d\overline{s}}{ds} = \varphi'(s) \neq 0$ bilgisi (3.1.30) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta(s)}{\varphi'(s)}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Buradanda her $s \in I$ için

$$\frac{\delta(s)}{\varphi'(s)} = \frac{1}{\ell_0} \qquad (\ell_0 \to sabit) \tag{3.1.31}$$

olur. Şayet (3.1.31) eşitliği (3.1.23) ve (3.1.25) denklemlerinde kullanılırsa

$$\overline{L}(\overline{s}) = \frac{1}{\ell_0} L(s), \tag{3.1.32}$$

$$\overline{N}(\overline{s}) = \ell_0 N(s) \tag{3.1.33}$$

denklemleri elde edilir. (3.1.33) denkleminin türevi alınırsa

$$\left(\overline{W_1}(\overline{s}) - \overline{k_2}(\overline{s})\,\overline{W_2}(\overline{s})\right)\varphi'(s) = \ell_0\left(W_1(s) - k_2(s)\, W_2(s)\right) \tag{3.1.34}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.34) denkleminin her iki yanı kendisiyle iç çarpıma tabi tutulursa

$$\left(1 + \left(\overline{k_2}\left(\overline{s}\right)\right)^2\right)\left(\varphi'\left(s\right)\right)^2 = \left(\ell_0\right)^2\left(1 + \left(k_2\left(s\right)\right)^2\right) \tag{3.1.35}$$

elde edilir. (3.1.24) ve (3.1.31) denklemlerini (3.1.35) denkleminde kullanırsak

$$\left(\overline{k_2}\left(\overline{s}\right)\right)^2 = \left[\frac{\sin\tau_0 + k_2\left(s\right)\cos\tau_0}{\cos\tau_0 - k_2\left(s\right)\sin\tau_0}\right]^2$$

olur. $\overline{k_2}$ değerini

$$\overline{k_2}\left(\overline{s}\right) = \frac{\sin\tau_0 + k_2\left(s\right)\cos\tau_0}{\cos\tau_0 - k_2\left(s\right)\sin\tau_0} \tag{3.1.36}$$

olarak seçelim. (3.1.22), (3.1.24), (3.1.31) ve (3.1.36) denklemlerini (3.1.34) denkleminde kullanırsak her $s \in I$ için

$$\overline{W_2}\left(\overline{s}\right) = -\sin\tau_0 W_1\left(s\right) + \cos\tau_0 W_2\left(s\right) \tag{3.1.37}$$

olarak elde edilir. Buradan da anlaşılırki C eğrisinin üzerindeki her $c\left(s\right)$ noktasındaki Cartan (1, 2)-normal düzlemi eğrilerin birbirine karşılık gelen noktalarında, $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}\left(\overline{s}\right)$ noktasındaki Cartan (1, 2)-normal düzlemi ile çakışır. O halde tanım 3.1.1'e göre C eğrisi R_1^4 uzayında (1, 2)-Bertrand eğrisidir. $\square$

3.2 R_1^4 Uzayında 2-Dejenere (1, 2)-Bertrand Eğrisi İçin Bir Örnek

R_1^4 uzayında 2-dejenere Cartan C eğrisi ($c : I \to R_1^4$) her $s \in I$ için

$$c\left(s\right) = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}, 1\right)$$

olarak verilsin. Bu durumda bu eğriye ait Cartan çatı ve Cartan eğrilikleri her $s \in I$ için

$$\begin{aligned}
W_1\left(s\right) &= \left(s, 1, s, 0\right)\\
L\left(s\right) &= \left(1, 0, 1, 0\right)\\
W_2\left(s\right) &= \left(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 1\right)\\
N\left(s\right) &= \left(\frac{s^2}{2} + 2, s, \frac{s^2}{2} + 1, \sqrt{3}\right)\\
k_1\left(s\right) &= k_2\left(s\right) = 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi α ve β fonksiyonlarını

$$\alpha\left(s\right) = 0,$$

$$\beta : R - \{0\} \to R; \quad \beta\left(s\right) = \sqrt{3}s$$

olarak seçelim. Bu durumda C eğrisinin (1, 2)-Bertrand eşi olan $\overline{C}$ $\left(\overline{c} : \overline{I} \to R_1^4\right)$ her $\overline{s} \in \overline{I}$ için

$$\overline{c}\left(\overline{s}\right) = \left(\frac{(\overline{s})^2}{8} + \frac{3\overline{s}}{2}, \frac{\overline{s}}{2}, \frac{(\overline{s})^2}{8} + \frac{3\overline{s}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{s}\right)$$

olur. Buradaki $\overline{s}$, $\overline{C}$ eğrisinin pseudo yay parametresi olup eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki regüler $\varphi : I \to \overline{I}$ dönüşümü

$$\overline{s} = \varphi\left(s\right) = 2s \ , \quad \forall s \in I$$

şeklindedir. Bu durumda C eğrisinin $c\left(s\right)$ noktasına karşılık gelen $\overline{C}$ eğrisinin $\overline{c}\left(\overline{s}\right)$ noktasındaki Cartan çatı ve Cartan eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\overline{W_1}\left(\overline{s}\right) &= \left(\frac{\overline{s}}{4} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\overline{s}}{4} + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
\overline{L}\left(\overline{s}\right) &= \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0\right) \\
\overline{W_2}\left(\overline{s}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\overline{N}\left(\overline{s}\right) &= \left(\frac{(\overline{s})^2}{2} + 8, 2\overline{s}, \frac{(\overline{s})^2}{2} + 4, 4\sqrt{3}\right) \\
\overline{k_1}\left(\overline{s}\right) &= 0, \ \ \overline{k_2}\left(\overline{s}\right) = \mp\sqrt{3} \ \left(\overline{k_2}\left(\overline{s}\right) = \sqrt{3} \text{ olarak seçelim}\right)
\end{aligned}$$

olur. Biliyoruzki C ve $\overline{C}$ Bertrand eğri çiftidir. $\overline{C}$ eğrisinin C eğrisinden farklı olacak şekilde bir Bertrand eşini elde etmek için $\overline{\alpha}$ ve $\overline{\beta}$ fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}\left(\overline{s}\right) = 3\overline{s}, \\
&\overline{\beta} : R - \{0\} \to R; \ \overline{\beta}\left(\overline{s}\right) = \sqrt{3}\overline{s}
\end{aligned}$$

olarak seçelim. Bu durumda $\overline{C}$ eğrisinin C'den farklı olarak mevcut olan Bertrand eşi $\overline{\overline{C}}$ $\left(\overline{\overline{c}} : \overline{\overline{I}} \to R_1^4\right)$ her $\overline{\overline{s}} \in \overline{\overline{I}}$ için

$$\overline{\overline{c}}\left(\overline{\overline{s}}\right) = \left(\frac{\left(\overline{\overline{s}}\right)^2}{152} + \frac{15}{2\sqrt{19}}\overline{\overline{s}}, \frac{\overline{\overline{s}}}{2\sqrt{19}}, \frac{\left(\overline{\overline{s}}\right)^2}{152} + \frac{15}{2\sqrt{19}}\overline{\overline{s}}, \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\overline{\overline{s}} + 1\right)$$

şeklindedir. Burada $\overline{\overline{s}}$ parametresi $\overline{\overline{C}}$ eğrisinin pseudo yay parametresi olup $\overline{C}$ ile $\overline{\overline{C}}$ eğrilerinin pseudo yay parametreleri arasındaki regüler $\overline{\varphi} : \overline{I} \to \overline{\overline{I}}$ dönüşümü

$$\overline{\varphi}\left(\overline{s}\right) = \overline{\overline{s}} = \sqrt{19}\overline{s}, \qquad \forall \overline{s} \in \overline{I}$$

şeklindedir.

4. İKİ İNDEKSLİ PSEUDO ÖKLİD UZAYLARDA DEJENERE EĞRİLER

Bu bölümde iki indeksli pseudo öklid uzaylarında *dejenerasyon derecesi* iki olan eğriler üzerinde çalışıldı. R_2^5 uzayındaki null Bertrand eğrileri ve R_2^n uzayındaki küresel null eğriler eğrilik fonksiyonları yardımıyla karakterize edildi. R_2^6 uzayındaki null bir eğrinin evalütü ve spacelike bir eğrinin involütü tanımlanarak düzlemsel bir eğri için evalüt ve involüt kavramları arasındaki ilişkinin bu eğriler içinde geçerli olduğu gösterildi.

4.1 R_2^5 Uzayındaki Bertrand Eğrileri

Bu bölümde R_2^5 uzayındaki Bertrand eğrilerini çalışırken, kendimizi *nulluk derece dizisi* $\{0,1,2,2,1,0\}$ olan eğri tiplerine kısıtlayacağız. α, R_2^5 uzayında *dejenerasyon derecesi* iki olan null Cartan bir eğri olsun. Şimdi bu eğrinin hangi şartlar altında Bertrand eğrisi olduğunu belirleyelim. α eğrisi için $\left\{\alpha', \alpha'', \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}, \alpha^{(5)}\right\}$ kümesi pozitif yönlendirilmiş, $\left\{\alpha', \alpha'', \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}, \alpha^{(5)}\right\}$ ve $\{L_1, L_2, W_3, N_2, N_1\}$ aynı yönlendirmeye sahip olsun. $\langle L_1, N_1\rangle = 1$, $\langle L_2, N_2\rangle = -1$, olarak seçelim. Bu durumda α eğrisi için Cartan denklemleri

$$\alpha' = L_1, \quad L_1' = L_2, \quad L_2' = W_3, \quad W_3' = -k_1 L_2 + N_2,$$

$$N_2' = k_2 L_1 + N_1 - k_1 W_3, \quad N_1' = k_2 L_2$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.1. $(\alpha, \overline{\alpha})$, *$R_2^5$ uzayında sırasıyla $s, \overline{s}$ pseudo yay parametreleri ile parametrize edilmiş null Cartan eğriler olsun. Bu eğri çiftine, eğrilerin birbirlerine karşılık gelen noktalarında sırasıyla W_3 ve $\overline{W_3}$ spacelike vektörlerinin oluşturdukları doğrular aynı ise Bertrand çifti denir. $\overline{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin Bertrand eşi denir. Aynı şekilde α eğrisine de $\overline{\alpha}$'nın Bertrand eşi denir. Daha açık söylemek gerekirse α $\left(\alpha : I \to R_2^5\right)$, R_2^5 uzayında pseudo yay parametesi s olan null Cartan bir eğri olsun. $\overline{\alpha}$ $\left(\overline{\alpha} : \overline{I} \to R_2^5\right)$ Cartan eğrisi de α'dan farklı olacak şekilde $\overline{s}$ pseudo yay parametresiyle parametrize edilmiş null bir eğri olsun. $\varphi : I \to \overline{I}$ $\left(\overline{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall\ s \in I\right)$ dönüşümü α ve $\overline{\alpha}$ eğrilerinin pseudo yay parametreleri arasında regüler bir dönüşüm olmak üzere bu φ dönüşümü altında eğrilerin birbirine karşılık gelen noktaları olan $\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(\overline{s}) = \overline{\alpha}(\varphi(s))$ noktalarındaki W_3 ve $\overline{W_3}$ vektörlerinin meydan getirdiği 3-normal doğruları aynı ise α eğrisine Bertrand eğrisi denir ([22], [13]).*

Teorem 4.1.1. *α, R_2^5 uzayında dejenerasyon derecesi iki, nulluk derece dizisi $\{0,1,2,2,1,0\}$ olan null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda α bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak α eğrisinin Cartan eğrilikleri olan k_1, k_2*

$$k_1 = k_2 = 0$$

koşulunu sağlıyorsa.

İspat. $\Longrightarrow$:) α, R_2^5 uzayında Cartan çatılı null Bertrand bir eğri olsun. Bu durumda α'nın kendisinden farklı ve

$$\overline{\alpha}(\overline{s}) = \alpha(s) + \mu(s) W_3(s) \tag{4.1.1}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\overline{\alpha}$ Bertrand eşi vardır. (4.1.1) denkleminin türevi alınıp Cartan çatıya ait Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\overline{L_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = L_1(s) + \mu'(s) W_3(s) - \mu(s) k_1(s) L_2(s) + \mu(s) N_2(s) \tag{4.1.2}$$

denklemi elde edilir. $\left\langle W_3(s), \overline{L_1}(\overline{s}) \right\rangle = 0$ olduğundan $\mu' = 0$ olur. Bu durumda μ sıfırdan farklı bir sabittir. Böylece (4.1.2) denklemini

$$\overline{L_1}(\overline{s}) \frac{d\overline{s}}{ds} = L_1(s) - \mu k_1(s) L_2(s) + \mu N_2(s) \tag{4.1.3}$$

olarak yeniden yazabiliriz. $\langle , \rangle$ iç çarpımını (4.1.3) denkleminin iki yanına uygularsak

$$2\mu^2 k_1 = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradanda

$$k_1 = 0$$

olur. (4.1.3) denkleminin bir kez daha türevi alınırsa

$$\overline{L_2}(\overline{s}) \left(\frac{d\overline{s}}{ds} \right)^2 + \overline{L_1}(\overline{s}) \frac{d^2\overline{s}}{ds^2} = L_2(s) + \mu \left[k_2(s) L_1(s) + N_1(s) \right] \tag{4.1.4}$$

denklemi elde edilir. $\langle , \rangle$ iç çarpımını (4.1.4) denkleminin iki yanına uygularsak

$$2\mu^2 k_2 = 0$$

elde edilir. Buradanda

$$k_2 = 0$$

olur.

($\Longleftarrow$: α, R_2^5 uzayında eğrilik fonksiyonları

$$k_2 = k_1 = 0$$

şartını sağlayan null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda göstereceğizki α bir Bertrand eğrisidir. R_2^5 uzayındaki bir null Cartan $\overline{\alpha}$ eğrisi

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha(s) + \mu W_3(s) \tag{4.1.5}$$

şeklinde tanımlansın. Burada μ sıfırdan farklı bir sabittir. (4.1.5) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\overline{\alpha}(s)}{ds} = L_1(s) + \mu N_2(s)$$

denklemi elde edilir. $\frac{d\overline{\alpha}(s)}{ds} \neq 0$'dır, aksi halde $\frac{d\overline{\alpha}(s)}{ds} = L_1(s) + \mu N_2(s) = 0$ olur ve

$$\langle L_1, N_1 \rangle = 1 = \langle -\mu N_2, N_1 \rangle = 0$$

çelişkisine varılır. Bundan dolayı $\overline{\alpha}$ regüler bir eğridir. Eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki regüler φ $\left(\varphi : I \to \overline{I}\right)$ dönüşümünü

$$\overline{s} = \varphi(s) = \int_0^s \left\langle \frac{d^3\overline{\alpha}(s)}{ds^3}, \frac{d^3\overline{\alpha}(s)}{ds^3} \right\rangle^{\frac{1}{6}} ds \tag{4.1.6}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.1.6) eşitliğinde $\overline{s}$, $\overline{\alpha}$ eğrisinin pseudo yay parametresidir. Bu eşitlikten

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = 1 \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Bu durumda (4.1.5) denklemi

$$\overline{\alpha}(\overline{s}) = \alpha(s) + \mu W_3(s) \tag{4.1.8}$$

olarak yeniden düzenlenebilir. (4.1.8) denkleminin türevi alınırsa

$$\overline{L_1}(\overline{s}) = L_1(s) + \mu N_2(s) \tag{4.1.9}$$

olur. (4.1.9) denkleminin türevi alınırsa

$$\overline{L_2}(\overline{s}) = L_2(s) + \mu N_1(s) \tag{4.1.10}$$

elde edilir. (4.1.10) denkleminin türevi alınırsa

$$\overline{W_3}(\overline{s}) = W_3(s) \tag{4.1.11}$$

olur. Buda ispatı tamamlar. □

Örnek 4.1.1. *R_2^5 uzayındaki null bir eğri*

$$\alpha(s) = \left(\frac{s - s^5}{4\sqrt{15}}, \frac{s^2 + s^4}{4\sqrt{6}}, \frac{s^3}{6}, \frac{s^2 - s^4}{4\sqrt{6}}, \frac{s + s^5}{4\sqrt{15}} \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda bu eğrinin Cartan çatısı ve Cartan eğrilikleri

$$L_1 = \left(\frac{1 - 5s^4}{4\sqrt{15}}, \frac{2s + 4s^3}{4\sqrt{6}}, \frac{s^2}{2}, \frac{2s - 4s^3}{4\sqrt{6}}, \frac{1 + 5s^4}{4\sqrt{15}} \right)$$

$$L_2 = \left(\frac{-5s^3}{\sqrt{15}}, \frac{2 + 12s^2}{4\sqrt{6}}, s, \frac{2 - 12s^2}{4\sqrt{6}}, \frac{5s^3}{\sqrt{15}} \right)$$

$$W_3 = \left(-\sqrt{15}s^2, \sqrt{6}s, 1, -\sqrt{6}s, \sqrt{15}s^2 \right)$$

$$N_2 = \left(-2\sqrt{15}s, \sqrt{6}, 0, -\sqrt{6}, 2\sqrt{15}s \right)$$

$$N_1 = \left(-2\sqrt{15}, 0, 0, 0, 2\sqrt{15} \right)$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

olarak hesaplanır. μ *sıfırdan farklı herhangi bir sabit olmak üzere* α *eğrisinin* $\overline{\alpha}$ *Bertrand eşi*

$$\overline{\alpha}\left(\overline{s}\right)=\Big(\frac{\overline{s}-60\mu\left(\overline{s}\right)^{2}-\left(\overline{s}\right)^{5}}{4\sqrt{15}},\frac{24\mu\overline{s}+\left(\overline{s}\right)^{2}+\left(\overline{s}\right)^{4}}{4\sqrt{6}},\frac{\left(\overline{s}\right)^{3}+6\mu}{6},$$
$$\frac{-24\mu\overline{s}+\left(\overline{s}\right)^{2}-\left(\overline{s}\right)^{4}}{4\sqrt{6}},\frac{\overline{s}+60\mu\left(\overline{s}\right)^{2}+\left(\overline{s}\right)^{5}}{4\sqrt{15}}\Big)$$

şeklindedir. Burada $\overline{s}$, $\overline{\alpha}$ *eğrisinin pseudo yay parametresi ve eğrilerin pseudo yay parametreleri arasındaki* φ $\left(\varphi : I\rightarrow\overline{I}\right)$ *dönüşümü de*

$$\overline{s}=\varphi\left(s\right)=s$$

şeklindedir.

4.2 R_2^n Uzayındaki Küresel Null Eğriler

Bu bölümde R_2^n uzayındaki küresel null eğriler eğrilik fonksiyonları yardımıyla karakterize edildi [17]. Bu karakterizasyon null Cartan eğriler içinden *dejenerasyon derecesi* iki ve *nulluk derece dizisi* $\{0,1,2,2,1,0,...,0\}$ olan eğriler için yapıldı. R_2^n uzayında r yarıçaplı ve ξ_0 merkezli pseudo küre

$$S_2^{n-1}\left(r\right)=\left\{x\in R_2^n \mid \langle x-\xi_0,x-\xi_0\rangle=r^2\right\}$$

olarak tanımlanır ([7], sayfa 110). R_2^n uzayında Cartan eğrilikleri $\{k_1,k_2,k_3,...,k_{n-3}\}$ ve $k_{n-3}\neq 0$ olan pseudo yay parametresiyle parametrize edilmiş null α eğrisi için $\{a_1,a_2,...,a_{n-4}\}$ fonksiyon dizisi

$$a_1=0,\quad a_2=\frac{1}{k_3},\quad a_3=-\frac{k_3'}{\left(k_3\right)^2k_4},\quad a_{i-1}=\frac{1}{k_i}\left(a_{i-2}'+a_{i-3}k_{i-1}\right),\quad 5\leqslant i\leqslant n-3$$

olarak tanımlansın. Yukarıda sözü edilen α Cartan eğrisi için Frenet denklemleri

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= L_1 \\
L_1' &= L_2 \\
L_2' &= W_3 \\
W_3' &= -k_1 L_2 + N_2 \\
N_2' &= k_2 L_1 + N_1 - k_1 W_3 \\
N_1' &= k_2 L_2 + k_3 W_4 \\
W_4' &= -k_3 L_1 + k_4 W_5 \\
W_i' &= -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \qquad 5 \leqslant i \leqslant n-3 \\
W_{n-2}' &= -k_{n-3} W_{n-3}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada N_1, N_2 vektörleri null, $\langle L_1, N_1 \rangle = 1$, $\langle L_2, N_2 \rangle = -1$, $\{L_1, L_2, N_1, N_2\}$ ve $\{W_3, W_4, ..., W_{n-3}, W_{n-2}\}$ kümeleri ortogonal, $\{W_3, W_4, ..., W_{n-3}, W_{n-2}\}$ kümesi ortonormaldir. Ayrıca $\left\{\alpha^{(i)}\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ kümesini pozitif yönlendirilmiş olarak kabul edeceğiz.

Teorem 4.2.1. *$\alpha(t)$ eğrisi R_2^n uzayında pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş null Cartan bir eğri ve bu eğri için $k_{n-3} \neq 0$ olsun.*

a) *α eğrisi r yarıçaplı pseudo küre üzerinde ise, bu durumda*

$$\sum_{i=2}^{n-4} a_i^2 = r^2$$

olur.

b) *Eğer $a_{n-4} \neq 0$ ve pozitif bir r sabiti için $\sum\limits_{i=2}^{n-4} a_i^2 = r^2$ ise, bu durumda α eğrisi r yarıçaplı pseudo küre üzerindedir.*

İspat. a) α eğrisi r yarıçaplı pseudo küre üzerinde olsun Bu durumda ξ_0 $(\xi_0 \in R_2^n)$ gibi sabit bir nokta için

$$\langle \xi_0 - \alpha(t), \ \xi_0 - \alpha(t) \rangle = r^2 \tag{4.2.1}$$

eşitliği mevcuttur. α eğrisi R_2^n uzayında ξ_0 merkezli küre üzerinde olduğundan

$$\xi_0 - \alpha(t) = aL_1 + bL_2 + cN_1 + dN_2 + x_1 W_3 + x_2 W_4 + ... + x_{n-4} W_{n-2}$$

eşitliğini yazabiliriz. (4.2.1) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle -L_1, \xi_0 - \alpha(t) \rangle = 0 \tag{4.2.2}$$

ve $c = 0$ elde edilir. (4.2.2) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle -L_2, \xi_0 - \alpha(t) \rangle = 0 \tag{4.2.3}$$

ve $d = 0$ olur. (4.2.3) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle -W_3, \xi_0 - \alpha(t) \rangle = 0 \tag{4.2.4}$$

ve $a_1 = x_1 = 0$ bulunur. (4.2.4) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle k_1 L_2 - N_2, \xi_0 - \alpha(t) \rangle = 0 \tag{4.2.5}$$

ve $b = 0$ bulunur. (4.2.5) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle k_1' L_2 + 2k_1 W_3 - k_2 L_1 - N_1, \xi_0 - \alpha(t) \rangle = 0 \tag{4.2.6}$$

ve $a = 0$ elde edilir. (4.2.6) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\begin{gathered} \left\langle \left(k_1'' - 2k_1^2 - 2k_2\right) L_2 + 3k_1' W_3 + 2k_1 N_2 - k_2' L_1 - k_3 W_4, \xi_0 - \alpha(t) \right\rangle \\ + \langle k_1' L_2 + 2k_1 W_3 - k_2 L_1 - N_1, -L_1 \rangle = 0 \end{gathered} \tag{4.2.7}$$

ve $a_2 = x_2 = \frac{1}{k_3}$ olur. (4.2.7) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\left\langle ... - k_3' W_4 + k_3^2 L_1 - k_3 k_4 W_5, \xi_0 - \alpha(t) \right\rangle = 0 \tag{4.2.8}$$

ve $a_3 = x_3 = -\frac{k_3'}{k_3^2 k_4}$ olarak bulunur. $5 \leqslant i \leqslant n-3$, için

$$\langle \xi_0 - \alpha(t), W_i \rangle = x_{i-2}$$

eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle -L_1, W_i \rangle + \langle \xi_0 - \alpha(t), -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1} \rangle = x_{i-2}'$$

eşitliği elde edilir, buradan da

$$-x_{i-3} k_{i-1} + x_{i-1} k_i = x_{i-2}'$$

olur. Böylece

$$x_{i-1} = \frac{1}{k_i}\left(x_{i-2}' + x_{i-3} k_{i-1}\right), \qquad 5 \leqslant i \leqslant n-3$$

elde edilir. Şu ana kadar elde ettiklerimizi toparlarsak $1 \leqslant i \leqslant n-4$ için $x_i = a_i$ olur. Bu durumda

$$\xi_0 - \alpha(t) = a_2 W_4 + a_3 W_5 + a_4 W_6 + ... + a_{n-4} W_{n-2}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu aşamada (4.2.1) eşitliğini kullanırsak

$$\sum_{i=2}^{n-4} a_i^2 = r^2$$

elde edilir.

b) Varsayalımki $a_{n-4} \neq 0$ ve sıfırdan farklı bir r sabiti için

$$\sum_{i=2}^{n-4} a_i^2 = r^2 \tag{4.2.9}$$

olsun. Ayrıca

$$\sigma(t) = \alpha(t) + a_2 W_4 + a_3 W_5 + ... + a_{n-4} W_{n-2}$$

olarak tanımlansın. Frenet denklemleri ve $\{a_i\}$ dizisinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma'(t) = {} & (1 - a_2 k_3) L_1 + (a_2' - a_3 k_4) W_4 + (a_2 k_4 + a_3' - a_4 k_5) W_5 \\
& + (a_3 k_5 + a_4' - a_5 k_6) W_6 + ... + \left(a_{n-6} k_{n-4} + a_{n-5}' - a_{n-4} k_{n-3}\right) W_{n-3} \\
& + \left(a_{n-5} k_{n-3} + a_{n-4}'\right) W_{n-2} \\
= {} & \left(a_{n-5} k_{n-3} + a_{n-4}'\right) W_{n-2}
\end{aligned}$$

olur. (4.2.9) denkleminin türevi alınırsa

$$a_2 a_2' + a_3 a_3' + ... + a_{n-5} a_{n-5}' + a_{n-4} a_{n-4}' = 0 \tag{4.2.10}$$

elde edilir. (4.2.10) eşitliğini ve $\{a_i\}$ dizisinin tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}
a_{n-4}\left(a_{n-4}' + k_{n-3} a_{n-5}\right) = {} & k_{n-3} a_{n-5} a_{n-4} - a_{n-5} a_{n-5}' \\
& - a_{n-6} a_{n-6}' - ... - a_4 a_4' \\
& - a_3 a_3' - a_2 a_2' \\
= {} & k_{n-4} a_{n-6} a_{n-5} - a_{n-6} a_{n-6}' - ... \\
& - a_4 a_4' - a_3 a_3' - a_2 a_2' \\
= {} & k_{n-5} a_{n-7} a_{n-6} - a_{n-7} a_{n-7}' - ... \\
& - a_4 a_4' - a_3 a_3' - a_2 a_2' \\
& . \\
& . \\
& . \\
= {} & k_9 a_7 a_8 - a_7 a_7' - a_6 a_6' - a_5 a_5' - \\
& - a_4 a_4' - a_3 a_3' - a_2 a_2' \\
& . \\
& . \\
& . \\
= {} & k_5 a_3 a_4 - a_3 a_3' - a_2 a_2' \\
= {} & k_4 a_2 a_3 - a_2 a_2' \\
= {} & a_2 (k_4 a_3 - a_2') = 0,
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla $\sigma'(t) = 0$ olur. Bu durumda $\xi_0 \in R_2^n$ olmak üzere $\sigma(t) = \xi_0$ ($\xi_0 \rightarrow$ sabit) olur. Böylece de

$$\xi_0 - \alpha(t) = \sum_{i=2}^{n-4} a_i W_{i+2}$$

olur. Bu aşamada (4.2.9) denklemini kullanırsak

$$\langle \xi_0 - \alpha(t), \xi_0 - \alpha(t) \rangle = r^2$$

elde edilir. Buda bize α eğrisinin r yarıçaplı pseudo küre üzerinde olduğunu gösterir. □

4.3 R_2^6 Uzayındaki Evalüt ve İnvolütler

α eğrisi R_2^6 uzayında *dejenerasyon derecesi* iki ve *nulluk derece dizisi* $\{0,1,2,2,1,0,0\}$ olacak şekilde null Cartan bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
&\alpha' = L_1, \quad L_1' = L_2, \quad L_2' = W_3, \quad W_3' = -k_1 L_2 + N_2, \\
&N_2' = k_2 L_1 + N_1 - k_1 W_3, \quad N_1' = k_2 L_2 + k_3 W_4, \\
&W_4' = -k_3 L_1
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifadelerde L_1, L_2, N_1, N_2 null vektörler, $\langle L_1, N_1 \rangle = 1$, $\langle L_2, N_2 \rangle = -1$, $\{L_1, L_2, N_1, N_2\}$ ve $\{W_3, W_4\}$ ortogonal, $\{W_3, W_4\}$ kümesi ortonormaldir. Ayrıca $\left\{\alpha', \alpha'', \alpha^{(3)}, ..., \alpha^{(6)}\right\}$ kümesi pozitif yönlendirilmiş, $\left\{\alpha', \alpha'', \alpha^{(3)}, ..., \alpha^{(6)}\right\}$ ve $\{L_1, L_2, W_3, N_2, N_1, W_4\}$ kümeleri aynı yönlendirmeye sahip olsun. Bu durumda $k_3 > 0$ olur.

$k_3(t) \neq 0$, olması durumunda $\alpha(t)$ eğrisinin evalütünü

$$E(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_3(t)} W_4(t)$$

olarak tanımlayalım. Bu aynı zamanda α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki oskülatör küresinin merkezidir. Öte yandan R_2^6 uzayındaki spacelike $c(t)$ eğrisinin $c(t_0)$ noktasından itibaren involütünü

$$I(t) = c(t) - s(t) T(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $s(t)$, $c(t_0)$ noktasından itibaren $c(t)$ eğrisinin yay uzunluğudur ve $T(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$ ise c eğrisinin $c(t)$ noktasındaki birim tanjantıdır [17].

Teorem 4.3.1. *t pseudo yay parametesine sahip $\alpha(t)$ Cartan eğrisi R_2^6 uzayında $k_3(t) \neq 0$ ve $\left(\frac{1}{k_3(t)}\right)' \neq 0$ koşullarını sağlayacak şekilde null bir eğri olsun. Bu durumda $\alpha(t)$ eğrisinin $E(t)$ evalütü R_2^6 uzayında spacelike bir eğri olup, $E(t)$ eğrisinin involütü olan $I_E(t)$ eğrisi bir noktadan itibaren $\alpha(t)$ ile çakışır.*

İspat. α null Cartan eğrisine ait Frenet denklemleri kullanılırsa α eğrisinin evalütü için

$$E'(t) = L_1 + \left(\frac{1}{k_3}\right)' W_4 + \frac{1}{k_3(t)}\left(-k_3(t) L_1\right)$$
$$= \left(\frac{1}{k_3(t)}\right)' W_4$$

olur. Bu durumda

$$\langle E', E' \rangle = \left(\left(\frac{1}{k_3(t)}\right)'\right)^2 > 0$$

olur. Bu da bize E eğrisinin spacelike olduğunu söyler. Biz burada sadece $\left(\frac{1}{k_3(t)}\right)' > 0$ durumunu gözönünde bulunduracağız, $\left(\frac{1}{k_3(t)}\right)' < 0$ pozisyonuda buna benzer şekilde incelenebilir. Bu durumda $E(t)$ eğrisinin birim tanjant vektörü $T_E = W_4$ olur ve $E(t_0)$ başlangıç noktasından itibaren $E(t)$'nin $s_E(t)$ yay uzunluğu

$$s_E(t) = \int_{t_0}^{t} |E'| \; dt = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{k_3(t)}\right)' dt = \frac{1}{k_3(t)} - \frac{1}{k_3(t_0)}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{k_3(t)} = s_E(t) + \frac{1}{k_3(t_0)}$$

olur, burada $\frac{1}{k_3(t)}$ değeride $E(t)$ eğrisinin başka bir $E(t_1)$ başlangıç noktasından itibaren yay uzunluğudur.

$E(t)$ eğrisinin $E(t_1)$ başlangıç noktasından itibaren involütü $I_E(t)$

$$I_E(t) = E(t) - \left(s_E(t) + \frac{1}{k_3(t_0)}\right) T_E$$
$$= \alpha(t) + \frac{1}{k_3(t)} W_4(t) - \frac{1}{k_3(t)} W_4(t) = \alpha(t)$$

olur. □

Teorem 4.3.2. *$c(s)$ eğrisi R_2^6 uzayında s pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olmak üzere $c(s)$ eğrisi için $c''(s)$ null bir vektör, $\langle c^4, c^4 \rangle \neq 0$, ve $\left\{c'', c^{(3)}, ..., c^{(6)}\right\}$ kümesi lineer bağımsız olsun. Bu durumda $s > 0$ için $c(s)$ eğrisinin involütü $I(s)$ R_2^6 uzayında Cartan bir eğri olup $I(s)$ eğrisinin evalütü olan $E_I(s)$, $c(s)$ eğrisiyle çakışır.*

İspat. $T' = c''$ null olduğundan $T(s)$ vektörüne R_2^6 uzayındaki bir null eğri olarak bakabiliriz, bu durumda $\left\langle T^{(3)}, T^{(3)} \right\rangle \geqslant 0$ olur [20]. Böylece $\left\langle T^{(3)}, T^{(3)} \right\rangle = \left\langle c^{(4)}, c^{(4)} \right\rangle \neq 0$ kabülünden dolayı $\left\langle T^{(3)}, T^{(3)} \right\rangle > 0$ olur. Spacelike $c(s)$ eğrisinin $I(s) = c(s) - sT(s)$ involütü

$$I'(s) = -sT'(s), \quad I''(s) = -T'(s) - sT''(s)$$
$$I^{(3)}(s) = -2T''(s) - sT^{(3)}(s), \quad I^{(4)}(s) = -3T^{(3)}(s) - sT^{(4)}(s)$$
$$I^{(5)}(s) = -4T^{(4)}(s) - sT^{(5)}(s)$$

eşitliklerini sağlar. $s > 0$ için I null bir eğridir ve ayrıca

$$\left\langle I^{(3)}, I^{(3)} \right\rangle = s^2 \left\langle T^{(3)}, T^{(3)} \right\rangle > 0$$

olur. $\left\langle T^{(3)}, T^{(3)} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$ ifadesini η ile gösterirsek, $I(s)$ eğrisinin pseudo yay uzunluğu $\nu(s)$

$$\nu(s) = \int_{s_0}^{s} \left\langle I^{(3)}, I^{(3)} \right\rangle^{\frac{1}{6}} ds = \int_{s_0}^{s} s^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} ds$$

olur. Bu durumda

$$\frac{d\nu}{ds} = s^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}$$

olarak elde edilir. $\left\{T', T'', T^{(3)}, T^{(4)}, T^{(5)}\right\} = \left\{C'', C^{(3)}, C^{(4)}, C^{(5)}, C^{(6)}\right\}$ lineer bağımsız olduğundan $\left\{I', I'', I^{(3)}, I^{(4)}, I^{(5)}\right\}$ kümeside lineer bağımsız olur ve $I(s)$ null eğrisi $\nu(s)$ pseudo yay uzunluğuna sahip bir Cartan eğri olur. $\{L_1, L_2, W_3, N_2, N_1, W_4\}$ kümesi Cartan eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olan $I(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{dI}{d\nu} = \frac{dI}{ds}\frac{ds}{d\nu} = -s^{\frac{2}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} T' \\
L_2 &= \frac{dL_1}{d\nu} = \frac{dL_1}{ds}\frac{ds}{d\nu} = \frac{1}{3}\left(s^{\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{5}{3}} \eta' - 2s^{-\frac{2}{3}} \eta^{-\frac{2}{3}}\right) T' - s^{\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{2}{3}} T'' \\
W_3 &= \frac{dL_2}{d\nu} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3} s^{-1} \eta^{-2} \eta' - \frac{5}{3} \eta^{-3} (\eta')^2 + \eta^{-2} \eta'' + \frac{4}{3} s^{-2} \eta^{-1}\right) T' \\
&\quad + \left(\eta^{-2} \eta' - s^{-1} \eta^{-1}\right) T'' - \eta^{-1} T^{(3)} \\
N_2 &= \frac{dW_3}{d\nu} + k_1 L_2 \\
N_1 &= \frac{dN_2}{d\nu} - k_2 L_1 + k_1 W_3
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$span\{L_1, L_2, W_3, N_2, N_1\} = span\left\{T', T'', T^{(3)}, T^{(4)}, T^{(5)}\right\}$$

olduğunu ve

$$\langle T, T' \rangle = \langle T, T'' \rangle = \left\langle T, T^{(3)} \right\rangle = \left\langle T, T^{(4)} \right\rangle = \left\langle T, T^{(5)} \right\rangle = 0$$

eşitliklerini kullanırsak $W_4 = \mp T$ olarak elde edilir. $W_4 = -T$ durumu $W_4 = T$ durumuyla benzerlik gösterdiğinden biz $W_4 = T$ olarak kabul edeceğiz. Böylece

$$\begin{aligned}
k_3 &= -\left\langle \frac{dW_4}{d\nu}, N_1 \right\rangle = -\left\langle \frac{dT}{d\nu}, N_1 \right\rangle \\
&= -\left\langle s^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} T', N_1 \right\rangle \\
&= \left\langle s^{-1} L_1, N_1 \right\rangle = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $I(s)$ eğrisinin evalütü $E_I(s)$ için

$$E_I(s) = I(s) + \frac{1}{k_3(s)} W_4 = c(s) - sT + sT = c(s)$$

olarak elde edilir. $\square$

5. KAYNAKLAR

[1] Stillwell, John., *Geometry of surfaces,* Springer - Verlag New York, Inc, 1992.

[2] Petersen, Peter., *Riemannian geometry*, Springer science + Business media, LLC, 2006.

[3] Hadamard, J., *Psychology of invention in the mathematical field*, Princeton university press, Princeton, p. 115, 1945.

[4] Sharpe, R. W., *Differential Geometry, Cartan's generalization of Klein's Erlangen program,* foreword by S. S. Chern., Springer Verlag, 1997.

[5] Einstein, A. *Autobiographical notes, in Albert Einstein: philosophers scientists*, p. 67, 2nd ed., in vol. 7 of the series the library of living philosophers, Evanston, IL, edited by P. A. Schilpp 1949.

[6] Gribbin, John., *Science A History* 1543 - 2001, Penguin Books Ltd, registered offices: 80 Strand, London W C 2 R ORL, England, 2002.

[7] O'neill, B., *Semi-Riemannian geometry,* Academic press, New York, 1983.

[8] Berger, M. *Riemannian Geometry during the second half of the twentieth century*, lecture series, 17, Amer. Math. Soc., 2000.

[9] Beem, J. K. and Ehrlich, P. E. *Global Lorentzian geometry*, Marcel Dekker, Inc. New York, first edition, 1981, second edition, 1996.

[10] Ehrlich, P. and Jung, Y. T. and Kim, S. B. *Volume comparison for Lorentzian manifolds*, Geo. Dedicata, 73, 1998, 39-56.

[11] Bishop, R. L. and O'Neill, B. *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., 145, 1969, 1-49.

[12] Duggal, K. L. and Bejancu, A. *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer academic publishers, 364, 1996.

[13] Matsuda, H. and Yorozu, S.: *Notes on Bertrand curves*, Yokohama mathematical journal., 50, 2003, 41-58.

[14] Honda, K. and Inoguchi, J.: *Deformation of Cartan framed null curves preserving the torsion,* differ. geom. dyn. syst., 5, 2003, 31-37.

[15] Inoguchi, J. and Lee, S.: *Null curves in Minkowski 3-space*, preprint, 2006.

[16] Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., *Null helices in Lorentzian space forms*, International journal of modern physics. A., 16, 2001, 4845-4863.

[17] Sakaki, M., *Notes on null curves in Minkowski spaces*, Turk j math, 34, 2010, 417-424.

[18] Çöken, A. C. and Çiftçi Ü., *On the Cartan curvatures of a null curve in Minkowski spacetime*, Geometriae Dedicata, 114, 2005, 71-78.

[19] Ferrandez, A.,Gimenez, A., Lucas, P., *s-Degenerate curves in Lorentzian space forms*, Journal of geometry and physics, 45, 2003, 116-129.

[20] Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., *Degenerate curves in psedo-Euclidean spaces of index two*, third international conference on geometry, integrability and quantization, Coral press, Sofia, 2001.

[21] Bonnor, W., *Null curves in Minkowski spacetime*, tensor, N. S. 20, 1969, 229-242.

[22] Duggal, K. L., Jin, D. H., *Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds*, World science, 2007.

[23] Millman, R. S. and Parker, G. D., *Elements of differential geometry*, Prentice-hall, inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

[24] Gibson, C. G., *Elementary geometry of differentiable curves*, Cambridge university press, 2001.

[25] Anciaux, Henri., *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*, World Scientific Publishing Co. Ptc. Ltd., 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224, 2011.

[26] Aminov, Yu. A., *Differential geometry and topology of curves*, Gordon and Breach science publishers, Singapore, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

13 Temmuz 1974 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1992 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı. 1999 yılının haziran ayında bu bölümden mezun oldu ve aynı yılın eylül ayında Malatya ilinin Kale ilçesinde Milli eğitim bakanlığına bağlı İzollu Kale ilk öğretim okulunda İngilizce öğretmeni olarak göreve başladı. 2001 yılının Eylül ayında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 2006 yılının şubat ayında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde açılan geometri doktora programına kayıt yaptırdı. Şu an Malatya lisesinde İngilizce öğretmeni olarak çalışmaktadır.