

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PARÇALANMIŞ 1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK
YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Muaz SEYDAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
2010**

Tezin Başlığı : Parçalanmış 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri İle Nümerik Çözümleri

Tezi Hazırlayan : Muaz SEYDAOĞLU

Sınav Tarihi : 13.08.2010

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Doç. Dr. Alaattin ESEN

Yrd. Doç. Dr. E. Nesligül AKSAN

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. ASIM KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Parçalanmış 1-Boyutlu Burgers Denklem-inin Sonlu Fark Yöntemleri İle Nümerik Çözümleri " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Muaz SEYDAOğLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Parçalanmış 1-Boyutlu Burgers Denklemine Sonlu Fark Yöntemleri İle Nümerik Çözümleri

Muaz SEYDAOĞLU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

89+xii sayfa

2010

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, parçalama yöntemi hakkında literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan sonlu fark yöntemleri ile birlikte bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Burgers denklemi tanıtıldıktan sonra üç farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen lineerleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra analitik çözümleri verilen model problemlere Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri uygulanıp, elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılmaları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, parçalanmış Burgers denklemi üç farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla göz önüne alınarak ve her bir problemin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi ve sonra bu çözümler problemin analitik çözümleri ile karşılaştırıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Burgers Denklemi, Klasik Sonlu Fark Yöntemleri, Lax-Wendroff Yöntemi

ABSTRACT

MSc Thesis

Numerical solutions of the splitted one-dimensional Burgers equation with finite difference methods

Muaz SEYDAOĞLU

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

89+xii pages

2010

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

The present thesis consists of four chapters. In the first chapter of this thesis, a literature survey about splitted method has been presented.

In the second chapter, some fundamental concepts in addition to finite difference methods which will be used in the next chapters have been given.

In the third chapter, after introducing Burgers equation, analytic solutions of linearized Burgers equations with three different initial and boundary conditions have been obtained. Then, explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference methods have been applied to the model problems of which analytic solutions were given in the previous chapter, a comparison of the obtained results with the analytic solutions has been given.

In the fourth chapter, splitted Burgers equation with three different initial and boundary conditions has been taken into consideration and numerical solutions of each equation with finite difference methods have been obtained and then they have been compared with their analytic solutions.

KEY WORDS: Burgers Equation, Classical Finite Difference Methods, Lax-Wendroff Method

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım süresince her türlü imkanı sağlayarak bana yardımcı olan bilgi ve görüşlerinden yararlandığım tez danışmanım ve çok değerli hocam Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, araőtırmalarım sırasında görüşleriyle bana yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen, her zaman bana yardımcı olan sayın Doç. Dr. Alaattin ESEN'e, değerli bilgi ve yardımlarından dolayı Prof. Dr. A. Refik BAHADIR'a, Öğr. Gör. Yusuf UÇAR'a ve Öğr. Gör. N. Murat YAĞMURLU'ya ve her zaman desteklerini aldığım araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aldığım bu değerli akademik katkıların yanı sıra yurtdıőında araştırma yapmak üzere beni destekleyen Yüksek Öğretim Kurumuna, araőtırmalarıma katkı sağlayan Prof. Dr. Sergio BLANES'e ve Dr. Philipp Bader'e teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEKİLLER DİZİNİ	vi
TABLolar DİZİNİ	vii
1 GİRİŞ	xi
2 KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ VE BAZI TEMEL KAVRAMLAR	1
2.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri	1
2.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi	4
2.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi	5
2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	6
2.1.4 Ağırlıklı Averaj Yöntemi	7
2.2 Bazı Temel Kavramlar	8
2.2.1 Lokal Kesme Hatası	8
2.2.2 Tutarlılık	9
2.2.3 Kararlılık	9
2.2.4 Yakınsaklık	9
2.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi	9
2.2.6 Kararlılık Analizi	10

2.2.7	Fourier Seri (<i>von Neumann</i>) Yöntemi	10
3	1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ	13
3.1	1- Boyutlu Burgers Denklemi	13
3.1.1	Hopf-Cole Dönüşümü	16
3.1.2	Model Problemler	19
3.2	Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)	21
3.3	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)	27
3.4	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)	33
3.5	Ağırlıklı Averaj Yönteminin Kararlılık Analizi	44
4	PARÇALANMIŞ 1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ	47
4.1	Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY1)	47
4.2	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY1)	53
4.3	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY1)	59
4.4	Ağırlıklı Averaj Yaklaşımının Kararlılık Analizi	71
4.5	Lax-Wendroff Açık Yöntem[3]	74
4.6	Lax-Wendroff Açık Yöntemin Kararlılık Analizi	81
	ÖZGEÇMİŞ	89

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.1	Düğüm Noktalarının Gösterimi[3]	2
Şekil 2.1.2	Açık Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].	4
Şekil 2.1.3	Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].	6
Şekil 2.1.4	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].	7
Şekil 3.4.1	$v = 1, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	37
Şekil 3.4.2	$v = 0.1, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	37
Şekil 3.4.3	$v = 0.01, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda(CNSFY) nümerik çözümleri	38
Şekil 3.4.4	$v = 0.005, k = 0.0001$ ve $h = 0.005$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	38
Şekil 3.4.5	$v = 0.001, k = 0.0001$ ve $h = 0.002$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	39
Şekil 3.4.6	$v = 0.5, k = 0.0001, h = 0.05$ ve $[a,b] = [0,8]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	43
Şekil 3.4.7	$v = 0.05, k = 0.0001, h = 0.05$ ve $[a,b] = [0,8]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	43
Şekil 3.4.8	$v = 0.001, k = 0.01, h = 0.005$ ve $[a,b] = [0,1]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY) çözümleri	44

Şekil 4.3.1	$v = 1, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri	64
Şekil 4.3.2	$v = 0.1, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri	64
Şekil 4.3.3	$v = 0.01, k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri	65
Şekil 4.3.4	$v = 0.005, k = 0.0001$ ve $h = 0.005$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri	65
Şekil 4.3.5	$v = 0.001, k = 0.0001$ ve $h = 0.002$ değerleri için problem 1'in farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri	66
Şekil 4.3.6	$v = 0.5, k = 0.0001, h = 0.05$ ve $[a,b] = [0,8]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri . .	70
Şekil 4.3.7	$v = 0.05, k = 0.0001, h = 0.05$ ve $[a,b] = [0,8]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri . .	70
Şekil 4.3.8	$v = 0.001, k = 0.01, h = 0.005$ ve $[a,b] = [0,1]$ değerleri için problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik(CNSFY1) çözümleri . .	71

TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY) ve tam çözümleri	23
Tablo 3.2	$v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY) ve tam çözümleri	24
Tablo 3.3	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY) ve tam çözümleri	25
Tablo 3.4	$v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY) ve tam çözümleri	26
Tablo 3.5	$v = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (ASFY) ve tam çözümleri	27
Tablo 3.6	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY) ve tam çözümleri	29
Tablo 3.7	$v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY) ve tam çözümleri	30
Tablo 3.8	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY) ve tam çözümleri	31
Tablo 3.9	$v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY) ve tam çözümleri	32
Tablo 3.10	$v = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (KSFY) ve tam çözümleri	33
Tablo 3.11	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri	35
Tablo 3.12	$v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri	36
Tablo 3.13	$t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri	40

Tablo 3.14 $v = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri	41
Tablo 3.15 $v = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri	42
Tablo 4.1 $t = 0.1, \nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri	49
Tablo 4.2 $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125, k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri	50
Tablo 4.3 $t = 0.1, \nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri	51
Tablo 4.4 $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri	52
Tablo 4.5 $\nu = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri	53
Tablo 4.6 $t = 0.1, \nu = 1, k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri	55
Tablo 4.7 $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri	56
Tablo 4.8 $t = 0.1, \nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri	57
Tablo 4.9 $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri	58
Tablo 4.10 $\nu = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri	59
Tablo 4.11 $t = 0.1, \nu = 1, k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri	62

Tablo 4.12 $v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri	63
Tablo 4.13 $t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri	67
Tablo 4.14 $v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri	68
Tablo 4.15 $v = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri	69
Tablo 4.16 $t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri	77
Tablo 4.17 $v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri	78
Tablo 4.18 $t = 0.1, v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri	79
Tablo 4.19 $v = 1, v = 0.1, v = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri	80
Tablo 4.20 $v = 0.5, h = 0.05, k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri	81

1. GİRİŞ

Doğada ortaya çıkan veya karşılaşılan çeşitli fiziksel olayların matematiksel modellemelerinde diferansiyel denklemler kullanılır. Özellikle bilgisayar alanında ki gelişmelere paralel olarak, son yıllarda bilim adamları, analitik olarak çözülemeyen veya analitik çözümü uzun süren problemler için nümerik çözüm yöntemleri geliştirmeye yönelmişlerdir. Böylece nümerik yöntemler yardımıyla çok karmaşık problemler kısa sürede ve daha az zahmetle çözülebilmektedir. 20. yüzyılın başlangıcından bu yana kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri araştırmacılar için ilgi odağı olmuştur. Genellikle nümerik yöntemler önce analitik çözümü bilinen kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak test edilir. Lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunmasında Sonlu Fark Yöntemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde sıklıkla kullanılan sonlu fark yöntemleri Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir[1]. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin parçalanması, singüler diferansiyel denklemlerin ve invers problemlerin parçalanması, parçalama şemalarının kararlılığı ve yakınsaklığı, yinelenebilir ve uyarlanabilir yeni parçalama stratejisi, geometrik integrasyon ve domain decomposition metodlarında, modern biyokimya ve fizik uygulamalarında kuantum hesaplamaları gibi araştırmalar parçalama metodunun gelişimine katkıda bulunmuşlardır[2]. Parçalama metodları, bazı kısmi diferansiyel denklemler sınıflarının çeşitli uygulamalarında sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri gibi yöntemler ile birlikte kullanılan ve problemlerin bilgisayarla daha etkili çözümünü sağlayacak şekilde basit yapılara indirgeyen yöntemlerdir. Yöntemin daha hassas sonuçlar vermesi ve kolay uygulanabilir olması yaygın bir kullanımını sağlamıştır [4-14]. İlk olarak Janenko'nun çalışmalarıyla başlayan parçalama metodu Rusya'da bir çok bilim adamı tarafından geliştirilmiştir. Janenko, Samarski, D'jakonov, Saule'ev ve diğer Rus bilim adamları çok önemli fikirlerle parçalama metodunun gelişimine katkıda bulunmuşlardır[14]. Marchuk, 1968 yılında parçalama teorisini formüle ederek matematiksel fizik problemlerine uyguladığını göstermiştir[14]. P.C.Jain ve M.Raja 1979 yılında parçalanmış 1-boyutlu Burgers denklemini Kapalı Sonlu fark yöntemi ile ve yine aynı çalışmada parçalanmış 2-boyutlu Burgers denklemini değişen

yönlü kapalı formülasyon yardımıyla nümerik çözümlerini elde etmişlerdir[5]. Saka ve Irk[15] parçalanmış Burgers denklemini farklı lineerleştirme kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarıyla çözmüşlerdir.

Bu çalışmanın esas amacı üç farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla verilen parçalanmış 1- Boyutlu Burgers denkleminin Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleriyle nümerik çözümlerini elde etmek ve elde edilen çözümleri problemin analitik çözümü ile karşılaştırmaktır.

2. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ VE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel yöntemler ve kavramlar hakkında bilgi verildi.

2.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

Nümerik bir yöntem olan sonlu fark yöntemleri, matematikte çoğunlukla ve geniş bir şekilde kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Sonlu fark yöntemleri, diferansiyel denklemlerin sonlu fark denklemleri ile yer değiştirmesine imkan veren yaklaşımlara dayanmaktadır. Bu yaklaşımlar cebirsel formdadır ve yaklaşık çözümler düğüm noktaları üzerinden hesaplanır. Sonlu fark yaklaşımının uygulanmasında aşağıda ki dört temel adım göz önünde bulundurulur.

■ Problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm(*mesh, grid*) noktaları üzerinden hesaplanır.

■ Diferansiyel denklemlerdeki bilinmeyenler ve onların türevleri yerine, düğüm noktalarındaki çözümlerle ilişkilendirilen sonlu fark yaklaşımları yazılır.

■ Problemden verilen başlangıç ve sınır şartlarının yerine uygun fark yaklaşımları yazılır.

■ Yöntemin geçerliliği için yakınsaklığı, tutarlılığı ve kararlılığı incelenir.

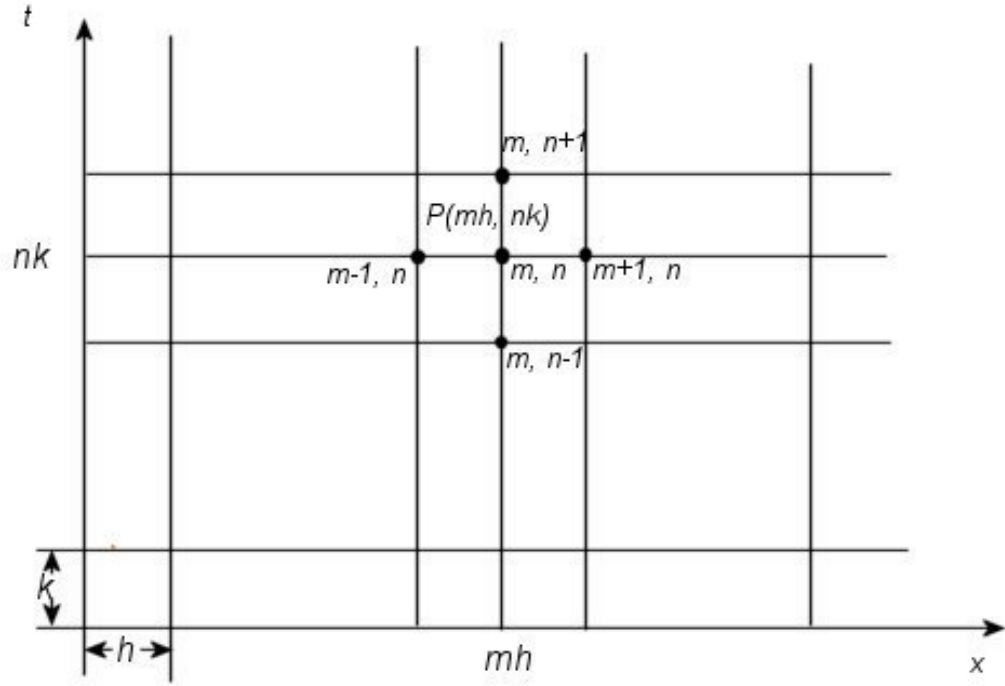
x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon U olsun. $h(\equiv \Delta x)$, x yönünde konum adım uzunluğu, $k(\equiv \Delta t)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere, konum ve zaman koordinatları x ve t sırasıyla

$$x = x_m = m\Delta x = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = Mh$$

$$t = t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

olarak gösterilir (Şekil 2.1.1). Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri

$$U_p = U(m\Delta x, n\Delta t) = U(mh, nk) = U_m^n$$



Şekil 2.1.1 Düğüm Noktalarının Gösterimi[3]

ile gösterilir. U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h) \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.1.8)$$

olarak yazılır. Burada "O" sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi $h \rightarrow 0$ iken h ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h)$ terimine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir[3]. (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) ile verilen, x 'e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri, geri ve üç nokta merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.1.4) ve (2.1.5) ile verilen, t 'ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.1.6), (2.1.7) ve (2.1.8) ile verilen x 'e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına ise sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir[3].

Verilen bir diferansiyel denklemin sonlu fark formunda ifade edilmesinde en çok kullanılan klasik sonlu fark yöntemleri şunlardır[16]:

- Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)
- Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

Bu yöntemlerin bir uygulanmasını vermek için

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l \quad t > 0 \quad (2.1.9)$$

parabolik denklemini

$$U(0,t) = f_1(t), \quad t \geq 0$$

$$U(l,t) = f_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartına bağlı olarak ele alalım. Burada $f_1(t)$, $f_2(t)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sırasıyla t 'nin ve x 'in bilinen fonksiyonları ve l ise çözüm bölgesinin tahmini uzunluğunu göstermektedir.

2.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

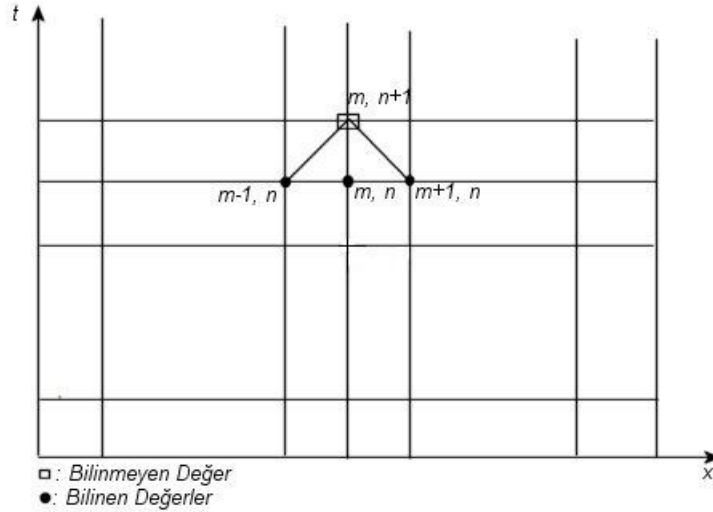
(2.1.9) denklemindeki $\frac{\partial U}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevleri yerine (2.1.4) ve (2.1.8) denklemleriyle verilen sonlu fark yaklaşımları yani,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k)$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin Açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n = 0(1)N \quad (2.1.10)$$

olur. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ dir. Eğer t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında U_m^{n+1} değerleri (2.1.10) denkleminde kolayca bulunur. Bu yöntemin şematik gösterimi Şekil 2.1.2 de verilmiştir.



Şekil 2.1.2 Açık Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].

2.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemde (2.1.9) ile verilen ısı iletim denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yerine $(n+1)$ -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

merkezi fark formülü ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (2.1.4) ile verilen

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k)$$

ileri fark formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M-1, \quad n = 0(1)N \quad (2.1.11)$$

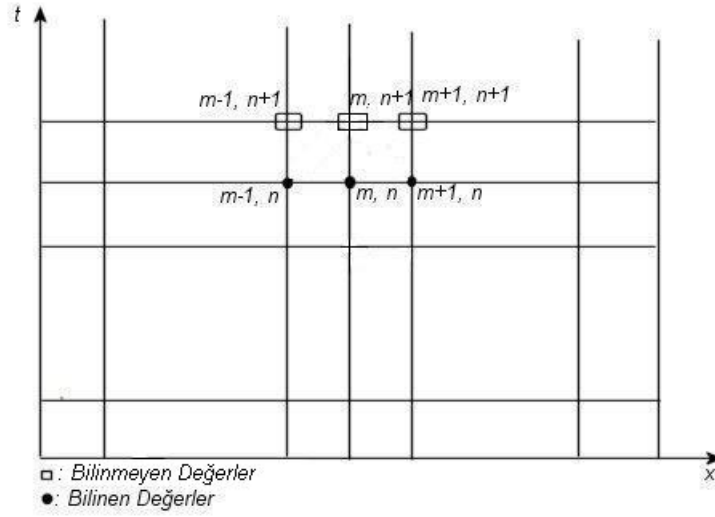
şeklinde ifade edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ dir. $m = 1$ ve $m = M-1$ deki

$$U_0^n = f_1 \quad (2.1.12)$$

ve

$$U_m^n = f_2 \quad (2.1.13)$$

sınır şartları göz önünde bulundurulursa bu yöntem her bir zaman adımında $(M-1)$ - bilinmeyenli $(M-1)$ - tane denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir.



Şekil 2.1.3 Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].

2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem John Crank ve Phyllis Nicolson[17] tarafından önerilen modifiye edilmiş bir kapalı yöntemdir. Bu yöntem sırasıyla (2.1.10) ve (2.1.11) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının averajlarının alınmasıyla elde edilmiştir. O halde (2.1.9) ile verilen ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right\}$$

dır. Bu denklem $m = 1(1)M - 1$ ve $n = 0(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n(2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

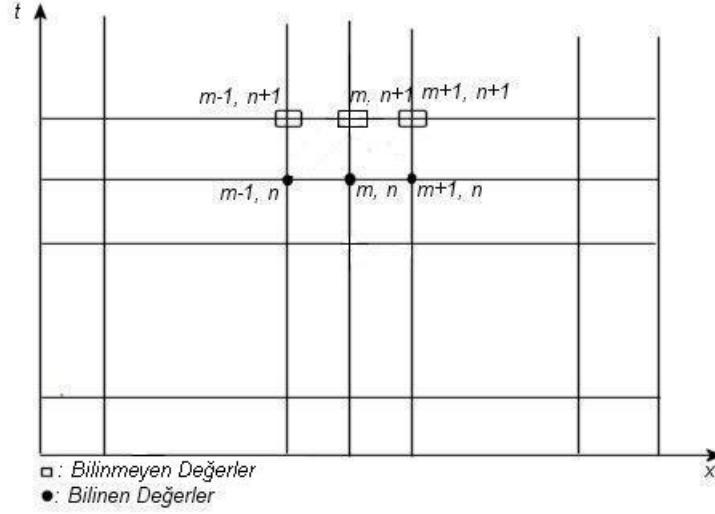
olarak yazılabilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k^2) + O(h^2)$ dir. $m = 0$ ve $m = M$ deki

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 \quad (2.1.14)$$

ve

$$U_m^n = U_m^{n+1} = f_2 \quad (2.1.15)$$

sınır şartları göz önünde bulundurulursa bu yöntem her bir zaman adımında (M-1)- bilinmeyenli (M-1)- tane denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir.



Şekil 2.1.4 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının şematik olarak gösterimi[3].

2.1.4 Ağırlıklı Averaj Yöntemi

(2.1.9) ile verilen ısı iletim denklemini gözönüne alalım. Bu ısı iletim denkleminin ağırlıklı averaj yaklaşımı, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \lambda \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \lambda) \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2}$$

veya

$$-r\lambda U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r\lambda)U_m^{n+1} - r\lambda U_{m+1}^{n+1} = r(1 - \lambda)U_{m-1}^n + (1 - 2r(1 - \lambda))U_m^n + r(1 - \lambda)U_{m+1}^n \quad (2.1.16)$$

dır.

Burada, $r = \frac{k}{h^2}$ dır. Açıkça (2.1.16) denklemi $\lambda = 0$ için (2.1.9) ile verilen ısı iletim denkleminin Açık Sonlu Fark Yaklaşımını, $\lambda = 1$ için Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımını ve $\lambda = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımını verir[3].

2.2 Bazı Temel Kavramlar

x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere U kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü ve u ise, kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin tam çözümü olsun.

2.2.1 Lokal Kesme Hatası

(m, n) -inci düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denklemini, u fark denkleminin tam çözümü olmak üzere, $F_{m,n}(u) = 0$ olarak gösterilsin. (m, n) -inci düğüm noktasında sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatası, U kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olmak üzere,

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U)$$

olarak tanımlanır.

Lokal kesme hatası sonlu fark yaklaşımından elde edilecek olan çözümün kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne ne derece iyi yaklaştığını veren bir ölçüdür. Taylor seri açılımının kullanılmasıyla lokal kesme hatası, h ve k nın kuvvetleri ve (mh, nk) noktasında kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olan U' nun kısmi türevleri cinsinden kolayca bulunabilir[3].

2.2.2 Tutarlılık

$h, k \rightarrow 0$ olduğunda lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa fark denklemi tutarlıdır denir. Başka bir ifadeyle

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{m,n} = 0$$

ise fark denklemi tutarlıdır denir[3].

2.2.3 Kararlılık

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan hesaplamaların hemen hemen her aşamasında hatalar ortaya çıkmaktadır. Ortaya çıkan bu hatalar nümerik hesaplamaların ilerleyen aşamalarında artan bir şekilde büyümüyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi kararlıdır denir[1].

2.2.4 Yakınsaklık

Zaman ve konum sıfıra yaklaştığında problemin nümerik çözümü, tam çözüme yaklaşıyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi yakınsaktır denir[1]. Yani,

$$\lim_{m,n \rightarrow 0} u_{m,n} = U_{m,n}$$

ise fark denklemi yakınsaktır.

2.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi

Sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır[3].

2.2.6 Kararlılık Analizi

Bir diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları ve bunların bulunması işlemine de kararlılık analizi denir. (m, n) -inci düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denkleminin tam çözümü u , kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü U olmak üzere, kararlılık analizi

$$U_m^n - u_m^n$$

hata değerinin n artarken m değerleri için sınırlı kalması esasına dayanır. Fourier Seri Yöntemi Lineer fark denklemlerinin kararlılık analizlerinin incelenmesinde kullanılan başlıca yöntemlerden biridir[18].

2.2.7 Fourier Seri (von Neumann) Yöntemi

Fourier seri yöntemi sadece diferansiyel denklemin kararlılığını hata yayılımı için inceler. Burada T sonlu, $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ olduğunda $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x, t)$ için lineer iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı konusu incelenecektir. Fourier seri veya von Neumann metodu, $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini ifade eder. Böylece kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan "değişkenlerine ayırma" yöntemine benzer olarak $t = 0$ için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon göz önüne alınır.

Her ne kadar Fourier serileri sinüs ve cosinüs fonksiyonlarına göre ifade edilebiliyorsa da cebirsel olarak üstel biçimde yazılması daha uygundur. Yani,

$$\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

veya

$$\sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

ifadeleri yerine bu denklemlere denk olan

$$\sum A_n e^{in\pi x/l}$$

üstel ifadesi yazılabilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve l, x aralığının uzunluğudur.

Buna göre,

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi mh/l} = A_n e^{i\beta_n mh}$$

yazılabilir. Burada $\beta_n = n\pi/Mh$ ve $Mh = l$ olarak alınmıştır. $t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değeri $U(mh, 0) = U_m^0$, $m = 0(1)M$ şeklinde olan $(M + 1)$ - tane denklem, A_0, A_1, \dots, A_n , $(N + 1)$ - tane bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel formda açıklanabildiğini gösterir. Buna göre göz önüne alınan lineer fark denkleminin

$$e^{i\beta mh}$$

gibi yalnız bir başlangıç değerinden elde edilmesi mümkündür. Çünkü lineer fark denklemleri bağımsız çözümlerin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta mh} e^{\alpha nk} = e^{i\beta mh} \xi^n$$

ifadesi göz önüne alınır. Burada α genellikle kompleks bir sabit olmak üzere $\xi = e^{\alpha k}$, olarak kullanılır ve ξ genellikle güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılır. Sonlu fark denkleminin kararlılığı için $h \rightarrow 0$, ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ için ve başlangıç şartını sağlayan tüm β değerleri için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir. Sonlu fark denkleminin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyor ise kararlılık için yeter ve gerek şart

$$|\xi| \leq 1$$

yani

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

olmalıdır. Bununla birlikte $|U_m^n|$ zamana bağılı olarak artıyor ise kararlılık için yeter ve gerek şart K pozitif sayısı h, k ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$|\xi| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$$

olmasıdır.

Bu yöntem yalnızca sabit katsayılı lineer denklemler için uygulanır ve l periyodlu periyodik başlangıç değerli problemler için geçerlidir.

Üç veya daha fazla zaman seviyeli ya da iki veya daha fazla bağımlı değişken içeren fark denklemleri için von Neuman şartları gereklidir; ancak yeterli olmayabilir[3].

3. 1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, 1-boyutlu Burgers denklemi tanıtıldıktan sonra Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirilmiş Burgers denkleminin değişik başlangıç ve sınır koşulları için literatürde mevcut olan analitik çözümleri verildi. Daha sonra, 2. Bölümde verilen Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri kullanılarak Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edildi.

3.1 1- Boyutlu Burgers Denklemi

İlk olarak Bateman[19] ve daha sonra Burger[20, 21] tarafından ele alınan

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (3.1.1)$$

Burgers denklemi genel olarak

$$U(a, t) = f_1(t), \quad t > 0 \quad (3.1.2)$$

$$U(b, t) = f_2(t), \quad t > 0 \quad (3.1.3)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1.4)$$

başlangıç şartı ile verilir. Burada $U = U(x, t)$ hız, ν kinematik akışkanlık parametresi, f_1 , f_2 ve g verilen fonksiyonlar ve $a, b > 0$ dır. Burgers denklemi akışkanlar mekaniği, trafik akışı, hidrodinamik ve akustik dalga yayılmalarının tanımlanması gibi yaygın olarak kullanılan temel ve önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burgers denklemi ısı iletimi[22], gaz dinamiği[23], şok dalgaları[20, 21], izotropik katılardaki elastik dalgalar[24], sürekli stokastik süreçler[22] ve sayı teorisi[25] işlemlerinde model olarak kullanılmıştır. Hopf[26] ve Cole[22] birbirlerinden bağımsız olarak herhangi bir başlangıç şartı için Burgers denklemini homejen ısı denklemine indirgeyerek orjinal Burgers denkleminin tam çözümünü Fourier seri formunda verdiler. Benton ve

Platzman[27] Burgers denkleminin 35 farklı başlangıç şartı için analitik çözümlerini elde ettiler. Ancak bu çözümler kinematik akışkanlık parametresini gösteren v' nün sadece kısıtlı değerleri için hesaplanabildiğinden Burgers denkleminin çözümlerinin elde edilmesinde değişik nümerik yöntemler kullanılmıştır. Bundan dolayı bir çok araştırmacı sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanları gibi nümerik yöntemlerle Burgers denkleminin nümerik çözümlerini araştırdılar. Karpman[28] Burgers denklemini Navier-Stokes denkleminin bir modeli olarak kabul etmiş ve Navier-Stokes denklemine uygulanan nümerik yöntemlerin kararlılık analizinde model problem olarak kullanmıştır. Caldwell vd.[29] ve Caldwell ve Smith[30] Burgers denklemine sonlu eleman metodunu uygulayarak nümerik çözümler elde ettiler. Evans ve Abdullah[31] Burgers denklemini grup explicit metodu ile nümerik olarak çözmüşlerdir. Nguyen ve Reynen[32] en küçük kareler yaklaşımına bağlı olan lineer konum-zaman sonlu eleman metodunu Burgers denklemine uygulamışlardır. Varoğlu ve Finn[33], ağırlıklı kalan formülasyonuna bağlı yeni bir sonlu eleman metodunu Burgers denklemine uygulayarak çözümler elde etmişlerdir. Rubin ve Graves[34] Burgers denkleminin nümerik çözümü için yarı lineerleştirme ve spline fonksiyon yöntemini kullanmışlardır. Öziş ve Özdeş[35] varyasyonel yöntemi kullanarak tam çözüme yakınsayan bir çözüm dizisi bulmuşlardır. Mittal ve Singhal[36], Bazley[37] tarafından geliştirilen tekniği uygulayarak elde ettikleri adi diferansiyel denklem sistemini Runga-Kutta-Chebychev yöntemiyle çözmüşlerdir. Kutluay vd.[38, 39] açık ve tam açık sonlu fark yöntemleriyle ve kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak en küçük kareler yöntemiyle Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini vermişlerdir. Kutluay ve Esen[40, 41] lumped Galerkin yöntemi ve lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yaklaşımıyla Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Bahadır ve Sağlam[42] lineerleştirilmiş Burgers denklemine karışık sınır elemanları yöntemini uygulamışlardır. Dağ vd[43] time-splitting Burgers denklemini kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak galerkin yöntemiyle nümerik olarak çözmüşlerdir. Abdou ve Soliman[44] Burgers ve coupled Burgers denklemini çözmek için varyasyonel iterasyon yöntemini kullanmışlardır. Kadalbajoo vd.[45] zamana bağlı Burgers denklemini çözmek için bir parametrelili düzgün kapalı fark şemasını kullanmışlardır. Inc[46]

Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak 1-Boyutlu lineer olmayan Burgers denklemini çözmüş ve lineer olmayan Burgers denklemine uygulanan bu metodun yakınsaklığını göstermiştir. Abbasbandy ve Darvishi[47] modifiye edilmiş Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak Burgers denklemini için çözümler elde etmişlerdir. Darvishi ve Javidi[48] pseudospektral metod ve Darvishi'nin ön şartlandırmasıyla Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Öziş ve Aslan[49] asimptotik açılım yöntemiyle büyük Reynolds sayıları içeren Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Hassenien vd.[50] 1-Boyutlu Burgers denkleminin çözümlerini dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarıyla çözerek, kararlılık ve yakınsaklık analizini vermişlerdir. Gülsu ve Öziş[51] Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için restrictive Taylor yaklaşımını uygulayarak klasik açık sonlu fark yaklaşımını kullanmışlardır. Uçar[52] yüksek lisans tezinde Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirilmiş Burgers denkleminin bazı sonlu fark yöntemleriyle çözümlerini elde etmiştir. Soliman[53] modifiye edilmiş genişletilmiş Tanh-Fonksiyon yöntemi ile 1- boyutlu ve 2- boyutlu Burgers, Kdv-Burgers ve Coupled Burgers denklemlerinin çözümlerini vermiştir. Aksan[54] 1-Boyutlu Burgers denklemini zaman ayrıştırma metoduyla lineer olmayan adi diferansiyel denklem kümesine dönüştürerek herbir denklemi kuadratik B-Spline sonlu eleman yöntemini kullanarak nümerik çözümlerini vermiştir. Kadalbajoo ve Awasthi[55] Burgers denklemine Hopf-Cole dönüşümü uygulayarak Crank-Nicolson sonlu Fark yaklaşımlarıyla nümerik çözümler elde etmişlerdir. Tabatabaei vd.[56] Burgers denklemini üzerinde multisymplectic box metodunu geliştirerek nümerik sonuçlar elde ettiler. Inc[57] Homotopi analiz metodunu kullanarak 1-Boyutlu lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik sonuçlarını vermiştir. Xie vd.[58] doğuran çekirdek formülasyonu ile 1-Boyutlu Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Zhu ve Wang[59] kübik B-spline kuasi interpolasyon ile Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Abazari ve Borhanifar[60] Burgers ve coupled Burgers denklemlerinin nümerik ve analitik çözümlerini elde etmek için diferansiyel değişim metodunu kullanmışlardır. Huang ve Abduwali[61] 1- boyutlu ve 2-boyutlu Burgers denklemini çözmek için modifiye edilmiş lokal Crank-Nicolson yöntemini uygulamışlardır.

3.1.1 Hopf-Cole Dönüşümü

Burgers denklemi, $U(x, t)$ denklemin bir çözümü olmak üzere,

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \quad (3.1.5)$$

dönüşümü ile

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.1.6)$$

lineer ısı denklemine indirgenir. Bu dönüşüm ilk olarak Hopf[26] tarafından yine aynı yıllarda birbirinden ayrı çalışmalarda Cole[22] tarafından da verildiği için Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinir.

Cole[22] tarafından Burgers denklemi ile ısı denklemi arasındaki ilişkiyi ve Burgers denkleminin çözümünün tekliğini gösteren iki teorem aşağıda verilmiştir[62].

Teorem:

(3.1.6) ile verilen ısı denkleminin herhangi bir çözümü $\theta(x, t)$ olmak üzere (3.1.5)

Burgers denklemini çözümü

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

biçimindedir.

İspat:

$$f = f(x, t)$$

kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon olmak üzere (3.1.1)

denkleminde

$$U(x, t) = f_x(x, t) \quad (3.1.7)$$

dönüşümü yapılırsa

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = \nu f_{xxx} \quad (3.1.8)$$

eşitliği bulunur.

f sürekli olduğundan $f_{xt} = f_{tx}$ eşitliği göz önüne alınarak (3.1.8) denkleminin x 'e göre integrali alındığında integrasyon sabitlerinin sıfır kabul edilmesiyle

$$f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 = \nu f_{xx} \quad (3.1.9)$$

elde edilir.

$$f(x, t) = F[\theta(x, t)]$$

olarak alınır ve (3.1.9) denkleminde yerine yazılırsa;

$$F'(\theta) \theta_t + \frac{1}{2} [F'(\theta) \theta_x]^2 = \nu \left\{ [F'(\theta) \theta_x]' \right\} = \nu F''(\theta) \theta_x^2 + \nu F'(\theta) \theta_{xx}$$

denklemi elde edilir. $\theta(x, t)$ fonksiyonunun (3.1.6) ısı denklemini sağladığı göz önüne alınırsa

$$[F'(\theta)]^2 = 2\nu F''(\theta)$$

olur. Bu denklemden

$$\frac{1}{P(\theta)} = F'(\theta)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{[P(\theta)]^2} = 2\nu \frac{-P'(\theta)}{[P(\theta)]^2} \implies P'(\theta) = \frac{-1}{2\nu} \implies P(\theta) = \frac{-1}{2\nu} (\theta - c_1)$$

elde edilir. Bu denklemden $c_1 = 0$ alınırsa

$$dF = -2\nu \theta^{-1} d\theta$$

ya da

$$f(x, t) = F(\theta) = -2\nu \ln(\theta) + c_2$$

bulunur. Son olarak (3.1.7) den

$$U(x, t) = [-2\nu \ln(\theta) + c_2]_x$$

veya

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

bulunur. O halde ispat bitmiş olur.

Şimdi $\theta(x, t)$ başlangıç değerini bulmak için (3.1.5) de $x = \xi$ dönüşümü yapılarak 0' dan x 'e kadar integral alınırsa,

$$\int_0^x U(\xi, t) d\xi = [-2\nu \ln \theta(\xi, t)]_0^x = [-2\nu \ln \theta(x, t) - \ln \theta(0, t)] = -2\nu \ln \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right]$$

$$-(2\nu)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi = \ln \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right]$$

elde edilir. Böylece

$$\theta(x, t) = \theta(0, t) e^{-(2\nu)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi} \quad (3.1.10)$$

olarak bulunur. $U(x, t)$ nin başlangıç değeri

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

olmak üzere $c_0 = \theta(0, 0)$ için

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 e^{-(2\nu)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi} \quad (3.1.11)$$

şeklinde c_0 sabitine bağlı olarak bulunur.

Teorem:

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}$$

Burgers denkleminin

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

ile verilen çözümü tektir.

İspat:

(3.1.1) Burgers denklemini sağlayan herhangi bir $U(x, t)$ çözümü (3.1.6) ısı denklemini sağlayan (3.1.10) biçiminde bir $\theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar. Buna göre (3.1.1) denkleminin $U(x, 0) \equiv V(x, 0)$ olacak şekilde $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ gibi iki çözümü olsun. $\theta(x, 0)$ yalnızca $U(x, 0) \equiv V(x, 0)$ 'a bağlı olduğundan (3.1.11) den $\theta(x, 0)$ her bir durumda c_0 sabitine kadar aynıdır. Sınır değerleri her iki durumda da aynı olduğundan

(3.1.6) ısı denkleminin $\theta(x,t)$ çözümü aynıdır. $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ (3.1.5) kullanılarak elde edildiğinden;

$$U(x,t) \equiv V(x,t)$$

olur, yani çözüm tektir.

3.1.2 Model Problemler

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen Burgers denklemini

$$U(a,t) = U(b,t) = 0, t > 0 \quad (3.1.12)$$

sınır şartları ve aşağıdaki üç farklı başlangıç şartı için göz önüne alındı.

Problem 1: Bu problem (3.1.12) sınır şartı ve

$$U(x,0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1.13)$$

başlangıç şartı ile birlikte gözönüne alındı. (3.1.5) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (3.1.12) ve (3.1.13) şartlarını sağlayan (3.1.1) Burgers denklemini ile verilen problem

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3.1.14)$$

$$\theta(x,0) = \exp \left\{ -(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1.15)$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.16)$$

biçiminde lineer ısı denklemine dönüşür. Bu lineerleştirilmiş başlangıç değer probleminin Fourier seri çözümü

$$\theta(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x) \quad (3.1.17)$$

dir[22]. Burada a_0 ve a_n katsayıları Fourier katsayıları olup sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp \left\{ -(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \right\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp \{ -(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

dir. Eğer $\theta(x, t)$, (3.1.15) başlangıç ve (3.1.16) sınır şartlarına bağlı (3.1.14) ısı iletim denkleminin bir çözümü ise (3.1.5) dönüşümü (3.1.13) ve (3.1.12) başlangıç ve sınır şartlarına bağlı (3.1.1) ile verilen Burgers denkleminin bir çözümüdür[22].

Bu şekilde (3.1.5)'den problemin tam çözümü;

$$U(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n^2\pi^2\nu t) a_n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) \cos(n\pi x)}$$

dir.

Problem 2: Bu problemde başlangıç şartı

$$U(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.1.18)$$

olarak alındı. (3.1.5) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (3.1.18) başlangıç şartı

$$\theta(x, 0) = \exp \{ -x^2(3\nu)^{-1}(3 - 2x) \}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1.19)$$

biçimine dönüşür. Önceki probleme benzer olarak, lineerleştirilmiş bu problemin Fourier seri çözümü (3.1.17) ile aynı bulunur. Ancak (3.1.17) deki a_0 ve a_n Fourier katsayıları sırasıyla

$$a_0 = \int_0^1 \exp \{ -x^2(3\nu)^{-1}(3 - 2x) \} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp \{ -x^2(3\nu)^{-1}(3 - 2x) \} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

dir.

Problem 3: Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp \left[\left(\frac{1}{4\nu} \right) (x^2 - \frac{1}{4}) \right]} \quad (3.1.20)$$

dir. Bu problemin tam çözümü, $t_0 = \exp(\frac{1}{8\nu})$ olmak üzere

$$U(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \exp \left[\left(\frac{t}{t_0} \right) \exp \left(\frac{x^2}{4\nu t} \right) \right]}, \quad t \geq 1$$

dir[35]. (3.1.5) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (3.1.12) ve (3.1.20) şartlarını sağlayan problem

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a < x < b$$

$$\theta(x, 1) = \exp \left\{ \frac{-x^2}{4v} + \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{-1}{16v}\right) \exp\left(\frac{1}{4v}\right) + 1}{\exp\left(\frac{-1}{16v}\right) + 1} \right] \right\}, \quad a \leq x \leq b$$

$$\theta_x(a, t) = \theta_x(b, t) = 0, \quad t > 1$$

biçiminde ısı problemine dönüşür.

3.2 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY)

(3.1.1) denklemini ile verilen Burgers denkleminde U_t ve U_{xx} yerlerine sırasıyla ileri ve merkezi fark yaklaşımları

$$U_t \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

$$U_{xx} \cong \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$

ve UU_x lineer olmayan terimi için

$$UU_x \cong U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right)$$

sonlu fark yaklaşımının yazılmasıyla Burgers denkleminin Açık Sonlu Fark Yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{vk}{h^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) - \frac{k}{2h} U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n), \quad (3.2.1)$$

dır.

Bu yöntemle elde edilen sonuçların analitik çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için (x_m, t_n) noktasındaki $U(x, t)$ ' nin analitik ve nümerik değerleri sırasıyla $U(x_m, t_n)$ ve $U_{m,n}$ olmak üzere

$$\|e\|_1 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left| 1 - \frac{U_{m,n}}{U(x_m, t_n)} \right|$$

$$L_2 = \left\{ h \sum_{m=1}^M |U(x_m, t_n) - U_{m,n}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$L_\infty = \max_m |U(x_m, t_n) - U_{m,n}|$$

olarak tanımlanan hata normları hesaplandı.

Nümerik Sonuçlar

(3.2.1) yaklaşımı kullanılarak, (3.1.1) ile verilen Burgers denkleminin Açık sonlu fark çözümleri 3 farklı model problem için elde edildi. Problem 1'in Açık sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 de verildi. Tablo 3.1 de Problem 1'in $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için Açık sonlu fark çözümleri ve tam çözümleri verilerek $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ normları hesaplandı ve karşılaştırıldı. Tablodan açıkça, h 'nın küçülen değerleri için nümerik çözüm analitik çözüme giderek yaklaştığı görülmektedir. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1'in çeşitli t zamanlarında açık sonlu fark çözümleri Tablo 3.2 de verildi. Tabloya bakıldığında ilerleyen zamanlarda nümerik çözümlerin bozulmadığı görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10954	0.10954
0.2	0.21127	0.21015	0.20987	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35923	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12189	0.12098	0.12076	0.12070	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.48827	1.94065	0.46198	0.08055	
$L_2 \times 10^3$	2.20185	0.54043	0.12544	0.02175	
$L_\infty \times 10^3$	3.14768	0.77288	0.18039	0.03180	

Tablo 3.1: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30891	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19569	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76734	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 3.2: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY) ve tam çözümleri

Problem 2' nin ASFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 de verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu açıkça görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11376	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21776	0.21662	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35954	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37390	0.37146	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32080	0.32024	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23540	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.46558	1.94170	0.46261	0.08061	
$L_2 \times 10^3$	2.26388	0.55767	0.12957	0.02249	
$L_\infty \times 10^3$	3.23884	0.79819	0.18636	0.03293	

Tablo 3.3: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY) ve tam çözümleri

x	t	v = 1		v = 0.1		v = 0.01	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45372	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38568	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04107	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56933	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 3.4: $v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY) ve tam çözümleri

Tablo 3.5 de $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3'ün farklı zaman adımlarında ASFY ile elde edilen nümerik çözümleri analitik çözümlerle karşılaştırıldı. Sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu görüldü.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 3.5: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (ASFY) ve tam çözümleri

3.3 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY)

(3.1.1) ile verilen Burgers denkleminde UU_x non-lineer terimi yerine

$$UU_x \cong U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right)$$

sonlu fark yaklaşımı U_{xx} yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Burgers denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$-\left(\frac{hU_m^n + 2v}{2h^2}\right)U_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2 + 2vk}{kh^2}\right)U_m^{n+1} + \left(\frac{hU_m^n - 2v}{2h^2}\right)U_{m+1}^{n+1} = \frac{U_m^n}{k} \quad (3.3.1)$$

dir.

Nümerik Sonuçlar

Problem 1'in (3.3.1)ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 3.6 ve Talo 3.7 de verildi. Tablo 3.6 da $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler ile Problem 1'in tam çözümünün karşılaştırılması verildi. Ayrıca tabloda $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ hata normları da verildi. Tabloya bakıldığında h 'nın giderek küçülen değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme giderek yaklaştığı ve dolayısıyla hatalarının da azaldığı görülmektedir. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1'in çeşitli t zamanlarında kapalı sonlu fark çözümleri Tablo 3.7 de verildi. Bu tabloda ilerleyen zamanlarda nümerik çözümlerin analitik çözümlerle uyumlu olduğu kolayca görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11030	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21129	0.21017	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29407	0.29245	0.29204	0.29194	0.29190
0.4	0.35066	0.34862	0.34811	0.34798	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37179	0.37164	0.37158
0.6	0.36223	0.35985	0.35926	0.35911	0.35905
0.7	0.31280	0.31064	0.31010	0.30997	0.30991
0.8	0.23004	0.22838	0.22797	0.22786	0.22782
0.9	0.12190	0.12099	0.12077	0.12071	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.57523	2.03305	0.55697	0.17680	
$L_2 \times 10^3$	2.22719	0.56594	0.15099	0.04727	
$L_\infty \times 10^3$	3.18270	0.80896	0.21627	0.06756	

Tablo 3.6: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY) ve tam çözümleri

x	t	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30892	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00268	0.00268	0.44729	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37444	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76734	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37415	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 3.7: $v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY) ve tam çözümleri

Problem 2'nin KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile analitik çözümü Tablo 3.8 ve Tablo 3.9 da verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11367	0.11309	0.11295	0.11291	0.11289
0.2	0.21778	0.21664	0.21636	0.21629	0.21625
0.3	0.30319	0.30153	0.30112	0.30101	0.30097
0.4	0.36166	0.35958	0.35905	0.35892	0.35886
0.5	0.38660	0.38423	0.38364	0.38349	0.38342
0.6	0.37393	0.37149	0.37088	0.37073	0.37066
0.7	0.32306	0.32083	0.32027	0.32013	0.32007
0.8	0.23768	0.23596	0.23553	0.23542	0.23537
0.9	0.12598	0.12504	0.12480	0.12474	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.55275	2.03431	0.55784	0.17713	
$L_2 \times 10^3$	2.29004	0.58401	0.15595	0.04884	
$L_\infty \times 10^3$	3.27497	0.83458	0.22336	0.06977	

Tablo 3.8: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54834	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04107	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01408	0.01407	0.64585	0.64562	0.92062	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 3.9: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY) ve tam çözümleri

Tablo 3.10 da $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3'ün farklı t zamanlarında KSFY ile elde edilen nümerik sonuçları problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Tablo 3.10 dan sonuçlarının iyi olduğu görülmektedir.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17212	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09129	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 3.10: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (KSFY) ve tam çözümleri

3.4 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

Bu kısımda

$$U_t + UU_x = vU_{xx}$$

biçiminde verilen (3.1.1) Burgers denkleminde UU_x non-lineer terimi yerine

$$UU_x \cong U_m^n \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right\} \right)$$

sonlu fark yaklaşımı ve U_{xx} türevinin yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right\}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Burgers denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{hU_m^n + 2v}{4h^2} \right) U_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2 + vk}{kh^2} \right) U_m^{n+1} + \left(\frac{hU_m^n - 2v}{4h^2} \right) U_{m+1}^{n+1} \\ & = \frac{U_m^n}{k} - \frac{U_m^n}{4h} (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{v}{2h^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) , \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

dir.

Nümerik Sonuçlar

(3.1.1) ile verilen Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.13) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem 1'in (3.4.1) Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 3.11 ve Tablo 3.12 de verildi. Tablo 3.11 de $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler ile Problem 1'in tam çözümünün karşılaştırılması verildi. Tablodan h mesh uzunluğunun giderek küçülen değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme giderek yaklaştığı kolayca görülür. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1'in çeşitli t zamanlarında Crank-Nicolson sonlu fark çözümleri Tablo 3.12 de verildi. Tablodan ilerleyen zamanlarda nümerik çözümlerin bozulmadığı ve analitik çözümlerle uyumlu olduğu görülür.

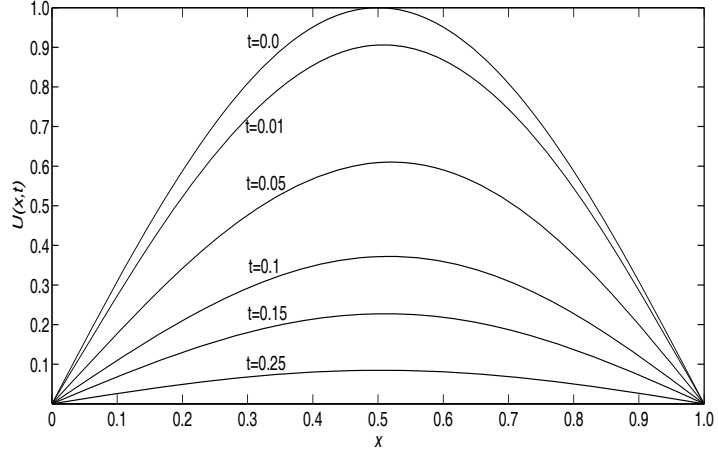
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21128	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29406	0.29244	0.29203	0.29193	0.29190
0.4	0.35064	0.34860	0.34809	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37163	0.37158
0.6	0.36221	0.35984	0.35924	0.35910	0.35905
0.7	0.31279	0.31062	0.31009	0.30995	0.30991
0.8	0.23003	0.22837	0.22796	0.22785	0.22782
0.9	0.12189	0.12099	0.12076	0.12071	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.53166	1.98672	0.50931	0.12847	
$L_2 \times 10^3$	2.21450	0.55316	0.13819	0.03447	
$L_\infty \times 10^3$	3.16516	0.79088	0.19831	0.04957	

Tablo 3.11: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri

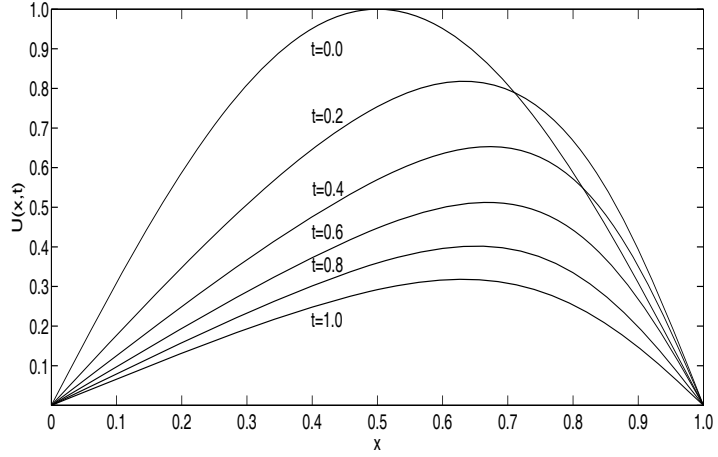
x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37444	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76734	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37415	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 3.12: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri

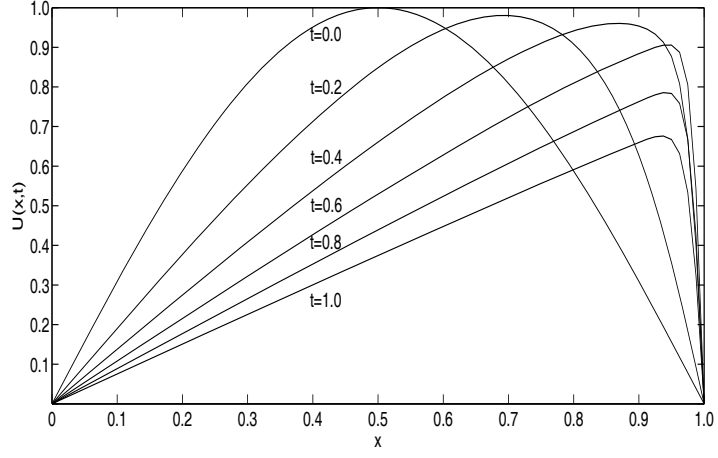
Nümerik çözümlerin problemin fiziksel davranışlarını ne kadar iyi sergilediğini görmek için Şekil 3.4.1 - Şekil 3.4.5 teki grafikler verildi. Nümerik çözümler analitik çözümlere oldukça yakın olduğundan her iki çözüm eğrisinin aynı grafik üzerinde gösterilmesi durumunda diagramları ayırtedilemez. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi nümerik çözümler problemin doğru fiziksel yaklaşımlarını sergilemektedir. Örneğin $\nu \leq 0.01$ küçük viskozite değerlerinde $t = 0.6$ zamanından itibaren sağ sınıra yakın keskin düşüşler başlamaktadır. Burgers denkleminin yapısından kaynaklanan bu durum Şekil 3.4.3 - Şekil 3.4.5 te görülmektedir.



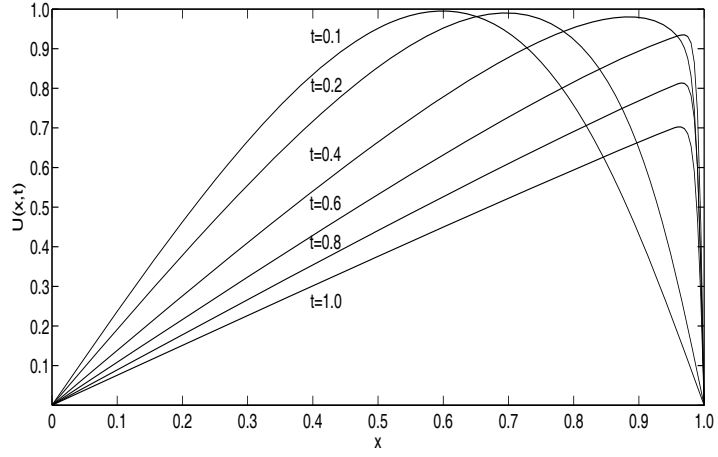
Şekil 3.4.1: $\nu = 1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri



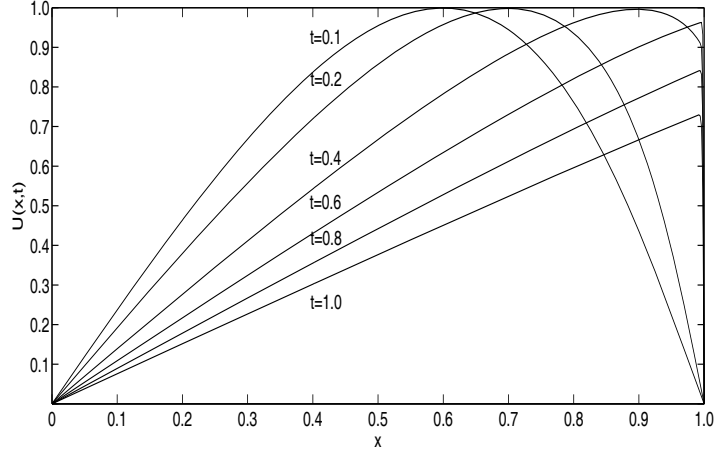
Şekil 3.4.2: $\nu = 0.1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri



Şekil 3.4.3: $v = 0.01$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda (CNSFY) nümerik çözümleri



Şekil 3.4.4: $v = 0.005$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.005$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri



Şekil 3.4.5: $\nu = 0.001$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.002$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri

Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin analitik çözümü Tablo 3.13 ve Tablo 3.14 te verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yeterince yakın olduğu görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11367	0.11309	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21777	0.21663	0.21635	0.21628	0.21625
0.3	0.30317	0.30152	0.30110	0.30100	0.30097
0.4	0.36165	0.35956	0.35904	0.35891	0.35887
0.5	0.38659	0.38422	0.38362	0.38347	0.38342
0.6	0.37391	0.37147	0.37086	0.37071	0.37066
0.7	0.32304	0.32081	0.32025	0.32011	0.32007
0.8	0.23767	0.23595	0.23551	0.23541	0.23537
0.9	0.12597	0.12503	0.12480	0.12474	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.50916	1.98801	0.51023	0.12887	
$L_2 \times 10^3$	2.27696	0.57084	0.14276	0.03564	
$L_\infty \times 10^3$	3.25690	0.81639	0.20486	0.05126	

Tablo 3.13: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04107	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

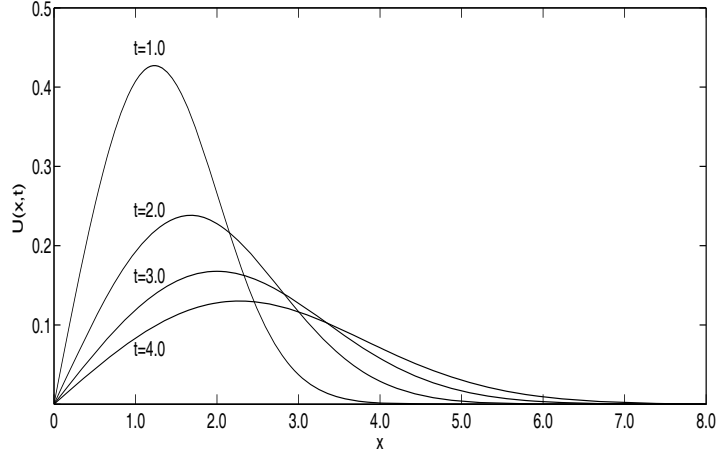
Tablo 3.14: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri

Tablo 3.15 de $\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için Problem 3'ün farklı t zamanlarında CNSFY ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görülür.

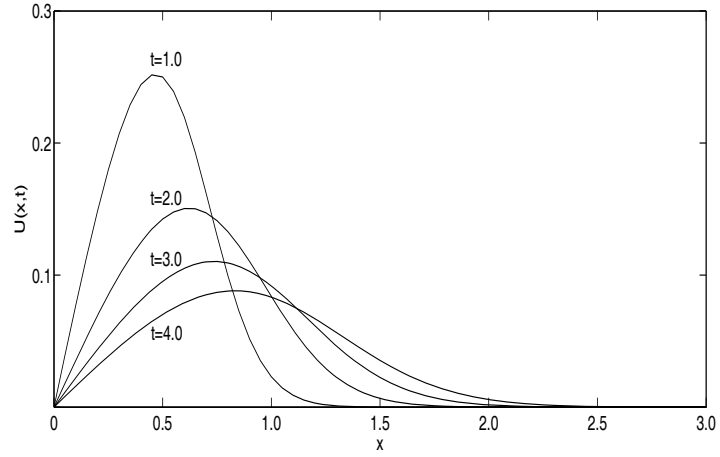
x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 3.15: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (CNSFY) ve tam çözümleri

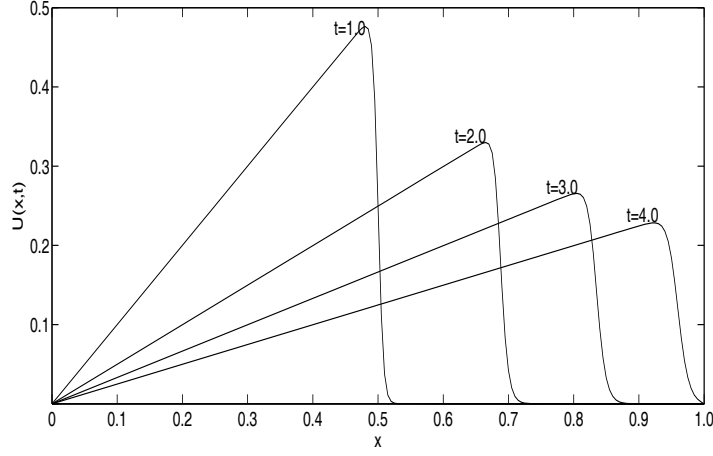
Şekil 3.4.6 ve Şekil 3.4.7 de $v = 0.5, 0.05$, $k = 0.0001$, $h = 0.005$, $[a, b] = [0, 8]$ için t 'nin farklı değerlerinde Problem 3'ün nümerik ve tam çözümlerin grafikleri verildi. Şekil 3.4.8 de $v = 0.001$, $k = 0.01$, $h = 0.005$, $[a, b] = [0, 1]$ için t 'nin farklı değerlerinde Problem 3'ün nümerik çözümlerin grafiği verildi. Her iki çözüm birbirine oldukça yakın olduğundan problemin her iki çözümünün grafiği aynı diagramda verildi.



Şekil 3.4.6: $v = 0.5$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri



Şekil 3.4.7: $v = 0.05$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri



Şekil 3.4.8: $v = 0.001$, $k = 0.01$, $h = 0.005$ ve $[a, b] = [0, 1]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY) çözümleri

3.5 Ağırlıklı Averaj Yönteminin Kararlılık Analizi

(3.1.1) Burgers denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \hat{U} \left\{ \lambda \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right) \right\} \\ & = v \left\{ \lambda \left(\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

dir. Bu yaklaşım $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla Açık, Crank-Nicolson ve Kapalı yöntem olarak bilinir[3]. Şimdi (3.5.1) yaklaşımına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için U_m^n yerine

$$U_m^n = e^{i\beta m h} \xi^n, i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \xi \left(\frac{1}{k} - \hat{U} \lambda \left(\frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2h} \right) - v \lambda \left(\frac{e^{i\beta h} - 2 - e^{-i\beta h}}{h^2} \right) \right) \\ & = \frac{1}{k} - \hat{U} (1 - \lambda) \left(\frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2h} \right) - v (1 - \lambda) \left(\frac{e^{i\beta h} - 2 - e^{-i\beta h}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi = \frac{\frac{1}{k} - \hat{U}(1-\lambda) \left(\frac{i \sin \beta h}{h} \right) + v(1-\lambda) \left(\frac{2 \cos \beta h - 2}{h^2} \right)}{\frac{1}{k} - \hat{U}\lambda \left(\frac{i \sin \beta h}{h} \right) + v\lambda \left(\frac{2 \cos \beta h - 2}{h^2} \right)}$$

bulunur.

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

olduğundan

$$\xi = \frac{1 - (1-\lambda) \left\{ \frac{4vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right\}}{1 + \lambda \left\{ \frac{4vk}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right\}}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $r = \frac{k}{h^2}$ yazılırsa

$$\xi = \frac{1 - (1-\lambda) \left\{ 4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right\}}{1 + \lambda \left\{ 4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right\}}$$

bulunur.

■ $\lambda = 0$ ise (3.5.1) yaklaşımı Açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. $|\xi| \leq 1$ ise $0 \leq |\xi|^2 \leq 1$ olur.

$$|\xi|^2 = \left(1 - 4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right)^2$$

ifadesi $|\xi|^2 \leq 1$ eşitsizliğinde

$$\sin \beta h = 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2}$$

kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ,

$$1 - 8vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 16v^2 r^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} + \frac{\hat{U}^2 k^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \cos^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1$$

elde edilir. Burada

$$r \left\{ \hat{U}^2 h^2 + (4v^2 - \hat{U}^2 h^2) \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right\} \leq 2v$$

dir. Yöntemin kararlı olması için r parametresinin

$$r \leq \min \left(\frac{2\nu}{\hat{U}^2 h^2}, \frac{1}{2\nu} \right)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde olması gerekir.

■ $\lambda = 1$ ise (3.5.1) yaklaşımı tamamen Kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir.

Yöntemin kararlı olması için yine gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

■ $\lambda = \frac{1}{2}$ ise (3.5.1) yaklaşımı Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir.

Yine kararlılık için gerek ve yeter şart ξ parametresinin

$$|\xi| \leq 1$$

şartını sağlamasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

4. PARÇALANMIŞ 1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde

$$U_t = \nu U_{xx} \quad (4.0.1)$$

$$U_t = -UU_x \quad (4.0.2)$$

parçalanmış(splitted) Burgers denklemi[5] farklı başlangıç ve sınır koşulları ile gözönüne alınarak Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri ile nümerik olarak çözüldü.

4.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi (ASFY1)

(4.0.1) ve (4.0.2) denklemlerinde U_t yerine

$$U_t \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, U_{xx} ve U_x yerine

$$U_{xx} \cong \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$
$$U_x \cong \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h}$$

merkezi fark yaklaşımları yazılır ve

$$r = \frac{\nu k}{h^2}$$
$$r_1 = \frac{k}{2h}$$

olarak alınırsa parçalanmış Burgers denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (4.1.1)$$

$$U_m^{n+1} = U_m^n - r_1U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \quad (4.1.2)$$

olarak bulunur.

Önce (4.1.1) denklemini kullanılarak,

$$\begin{aligned}
U_1^{n+1/2} &= rU_0^n + (1-2r)U_1^n + rU_2^n \\
U_2^{n+1/2} &= rU_1^n + (1-2r)U_2^n + rU_3^n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
U_{M-1}^{n+1/2} &= rU_{M-2}^n + (1-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

açık denklem sisteminden $U_m^{n+1/2}$ bilinmeyenleri hesaplanır daha sonra aynı zaman adımı için (4.1.2) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned}
U_1^{n+1} &= U_1^{n+1/2} - r_1 U_1^{n+1/2} (U_2^{n+1/2} - U_0^{n+1/2}) \\
U_2^{n+1} &= U_2^{n+1/2} - r_1 U_2^{n+1/2} (U_3^{n+1/2} - U_1^{n+1/2}) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
U_{M-1}^{n+1} &= U_{M-1}^{n+1/2} - r_1 U_{M-1}^{n+1/2} (U_M^{n+1/2} - U_{M-2}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

açık denklem sisteminden problemin aranan U_M^{n+1} bilinmeyen değerleri bulunur. Arzu edilen zaman seviyesindeki bilinmeyen U_M^{n+1} değerleri elde edilinceye kadar yukarıdaki işleme devam edilir.

Nümerik Sonuçlar

(4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.13) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem1' in (4.1.3) ve (4.1.4) açık sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 de verildi. Tablo 4.1 de $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için problemin elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümleri karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ hata

normları da verildi. Tabloya bakıldığında h 'nın giderek küçülen değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme gittikçe yaklaştığı ve dolayısıyla hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve kinematik viskozite $\nu = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1'in çeşitli t zamanlarında açık sonlu fark çözümleri Tablo 4.2 de verildi. Tabloya bakıldığında ilerleyen zamanlarda problemin nümerik çözümlerinin analitik çözümlerle iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10955	0.10954
0.2	0.21127	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29405	0.29243	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35922	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22835	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12188	0.120979	0.12075	0.12070	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.48899	1.94145	0.46280	0.08137	
$L_2 \times 10^3$	2.20180	0.54041	0.12543	0.02174	
$L_\infty \times 10^3$	3.14607	0.77243	0.17940	0.03090	

Tablo 4.1: $t = 0.1$, $\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26897	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48746	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.2: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri

(4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır şartları ve (3.1.18) başlangıç koşuluna göre gözönüne alınarak Problem 2' nin ASFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 4.3 ve Tablo 4.4 te verildi. Elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yakın olduğu açıkça görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21777	0.21663	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35955	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37389	0.37145	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32303	0.32079	0.32023	0.32009	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.46637	1.94259	0.46355	0.08158	
$L_2 \times 10^3$	2.26383	0.55766	0.12956	0.02248	
$L_\infty \times 10^3$	3.23716	0.79655	0.18533	0.03193	

Tablo 4.3: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19954	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02777	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45805	0.45798	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45372	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38568	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50294	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 4.4: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri

Tablo 4.5 de $\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için (4.0.1) ve (4.0.2) parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.20) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem 3'ün farklı t zamanlarında ASFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Tablodan çözümlerin iyi olduğu görülmektedir.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00698	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00171

Tablo 4.5: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (ASFY1) ve tam çözümleri

4.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi (KSFY1)

(4.0.1) ve (4.0.2) denkleminde U_t yerine

$$U_t \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, U_{xx} ve U_x yerine sırasıyla

$$U_{xx} \cong \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

$$U_x \cong \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

merkezi fark yaklaşımları yazılır ve

$$r = \frac{vk}{h^2}$$

$$r_1 = \frac{k}{2h}$$

alınırsa parçalanmış Burgers denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n \quad (4.2.1)$$

$$U_m^{n+1} + r_1U_m^n(U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) = U_m^n \quad (4.2.2)$$

olarak elde edilir. Önce (4.2.1) denklemini kullanılarak,

$$\begin{aligned} -rU_0^{n+1/2} + (1+2r)U_1^{n+1/2} - rU_2^{n+1/2} &= U_1^n \\ -rU_1^{n+1/2} + (1+2r)U_2^{n+1/2} - rU_3^{n+1/2} &= U_2^n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ -rU_{M-2}^{n+1/2} + (1+2r)U_{M-1}^{n+1/2} - rU_M^{n+1/2} &= U_{M-1}^n \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

kapalı denklem sisteminden $U_m^{n+1/2}$ bilinmeyenleri hesaplanır daha sonra aynı zaman adımı için (4.2.2) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} - r_1U_1^{n+1/2}(U_2^{n+1} - U_0^{n+1}) &= U_1^{n+1/2} \\ U_2^{n+1} - r_1U_2^{n+1/2}(U_3^{n+1} - U_1^{n+1}) &= U_2^{n+1/2} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ U_{M-1}^{n+1} - r_1U_{M-1}^{n+1/2}(U_M^{n+1} - U_{M-2}^{n+1}) &= U_{M-1}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

kapalı denklem sisteminden problemin aranan U_M^{n+1} bilinmeyen değerleri bulunur. Arzu edilen zaman seviyesindeki bilinmeyen U_M^{n+1} değerleri elde edilinceye kadar yukarıdaki işleme devam edilir.

Nümerik Sonuçlar

(3.1.1) Burgers denkleminin (4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış biçimi (3.1.12) sınır ve (3.1.13) başlangıç koşulları altında göz önüne alınarak Problem 1'in (4.2.3) ve (4.2.4) kapalı sonlu fark yaklaşımlarından elde edilen nümerik çözümleri problemin analitik çözümleri ile birlikte Tablo 4.6 ve Tablo 4.7 de verildi. Tablo 4.6 da $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için problemin kapalı sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümleri karşılaştırıldı. Tablodan h 'nın küçülen değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme giderek yaklaştığı görülür. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1'in çeşitli t zamanlarında kapalı sonlu fark çözümleri Tablo 4.7 de verildi. Bu tabloya bakıldığında ilerleyen zamanlarda nümerik çözümlerin bozulmadığı görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11030	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21129	0.21017	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29407	0.29245	0.29204	0.29194	0.29190
0.4	0.35066	0.34862	0.34811	0.34798	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37179	0.37164	0.37158
0.6	0.36223	0.35985	0.35926	0.35911	0.35905
0.7	0.31280	0.31064	0.31010	0.30997	0.30991
0.8	0.23004	0.22838	0.22797	0.22786	0.22782
0.9	0.12190	0.12099	0.12077	0.12071	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.57385	2.03149	0.55535	0.17515	
$L_2 \times 10^3$	2.22684	0.56555	0.15059	0.04688	
$L_\infty \times 10^3$	3.18259	0.80850	0.21594	0.06721	

Tablo 4.6: $t = 0.1$, $v = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35931	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62565	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48746	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.7: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri

(3.1.1) Burgers denkleminin (4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış biçimi (3.1.12) sınır ve (3.1.18) başlangıç koşulları altında göz önüne alınarak Problem 2'nin KSFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 da verildi. Elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlere oldukça yakın olduğu görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11367	0.11309	0.11295	0.11291	0.11289
0.2	0.11289	0.21664	0.21636	0.21628	0.21625
0.3	0.30319	0.30153	0.30112	0.30101	0.30097
0.4	0.36166	0.35958	0.35905	0.35892	0.35886
0.5	0.38660	0.38423	0.38364	0.38349	0.38342
0.6	0.37393	0.37149	0.37088	0.37073	0.37066
0.7	0.32306	0.32083	0.32027	0.32013	0.32007
0.8	0.23768	0.23596	0.23553	0.23542	0.23537
0.9	0.12598	0.12504	0.12480	0.12474	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.55127	2.03267	0.55614	0.17541	
$L_2 \times 10^3$	2.28966	0.58359	0.15551	0.04840	
$L_\infty \times 10^3$	3.27480	0.83436	0.22298	0.06938	

Tablo 4.8: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.31754	0.31752	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.28205	0.28204
	1.0	0.00004	0.00004	0.19957	0.19956	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.58460	0.58454	0.54834	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.54834	0.54832
	1.0	0.00005	0.00005	0.36748	0.36740	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01408	0.01407	0.64584	0.64562	0.92062	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.64584	0.64562	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.78305	0.78299
	1.0	0.00004	0.00004	0.38557	0.38534	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22778	0.22774

Tablo 4.9: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri

Tablo 4.10 da $\nu = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ değerleri için (3.1.1) Burgers denkleminin (4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış biçimi (3.1.12) sınır ve (3.1.20) başlangıç koşulları altında göz önüne alınarak Problem 3'ün farklı t zamanlarında KSFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri problemin analitik çözümleriyle karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03800	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11883	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11340	0.11339
2.5	0.17212	0.17217	0.15629	0.15630	0.11699	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05795	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 4.10: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (KSFY1) ve tam çözümleri

4.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY1)

(4.0.1) ve (4.0.2) denklemlerinde U_t yerine

$$U_t \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, U_{xx} ve U_x yerine

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right\}$$

$$U_x \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right\}$$

merkezi fark yaklaşımları yazılır ve

$$r = \frac{vk}{2h^2}$$

$$r_1 = \frac{k}{4h}$$

alınırsa parçalanmış Burgers denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (4.3.1)$$

$$U_m^{n+1} + r_1U_m^n (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) = U_m^n - r_1U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \quad (4.3.2)$$

olarak elde edilir. Önce (4.3.1) denklemini kullanılarak,

$$\begin{aligned} -rU_0^{n+1/2} + (1 + 2r)U_1^{n+1/2} - rU_2^{n+1/2} &= rU_0^n + (1 - 2r)U_1^n + rU_2^n \\ -rU_1^{n+1/2} + (1 + 2r)U_2^{n+1/2} - rU_3^{n+1/2} &= rU_1^n + (1 - 2r)U_2^n + rU_3^n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ -rU_{M-2}^{n+1/2} + (1 + 2r)U_{M-1}^{n+1/2} - rU_M^{n+1/2} &= rU_{M-2}^n + (1 - 2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

kapalı denklem sisteminden $U_m^{n+1/2}$ bilinmeyenleri hesaplanır daha sonra aynı zaman adımı için (4.3.2) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned}
U_1^{n+1} + r_1 U_1^{n+1/2} (U_2^{n+1} - U_0^{n+1}) &= U_1^{n+1/2} - r_1 U_1^{n+1/2} (U_2^{n+1/2} - U_0^{n+1/2}) \\
U_2^{n+1} + r_1 U_2^{n+1/2} (U_3^{n+1} - U_1^{n+1}) &= U_2^{n+1/2} - r_1 U_2^{n+1/2} (U_3^{n+1/2} - U_1^{n+1/2}) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
U_{M-1}^{n+1} + r_1 U_{M-1}^{n+1/2} (U_M^{n+1} - U_{M-2}^{n+1}) &= U_{M-1}^{n+1/2} - r_1 U_{M-1}^{n+1/2} (U_M^{n+1/2} - U_{M-2}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

kapalı denklem sisteminden problemin aranan U_M^{n+1} bilinmeyen değerleri bulunur. Arzu edilen zaman seviyesindeki bilinmeyen U_M^{n+1} değerleri elde edilinceye kadar yukarıdaki işleme devam edilir.

Nümerik Sonuçlar

(4.0.1) ve (4.0.2) parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.13) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem 1' in (4.3.3) ve (4.3.4) Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarından elde edilen nümerik çözümleri Tablo 4.11 ve Tablo 4.12 de verildi. Tablo 4.11 de Problem 1' in $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için Crank-Nicolson sonlu fark çözümleri ve tam çözümleri verilerek $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ normları hesaplandı ve karşılaştırıldı. Tablodan h 'nın küçülen değerleri için nümerik çözümlerin analitik çözüme giderek yaklaştığı açıkça görülmektedir. $h = 0.0125, k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için Problem 1' in çeşitli t zamanlarında Crank-Nicolson sonlu fark çözümleri Tablo 4.12 de verildi. Tablodan açıkça ilerleyen zamanlarda nümerik çözümlerin bozulmadığı görülmektedir.

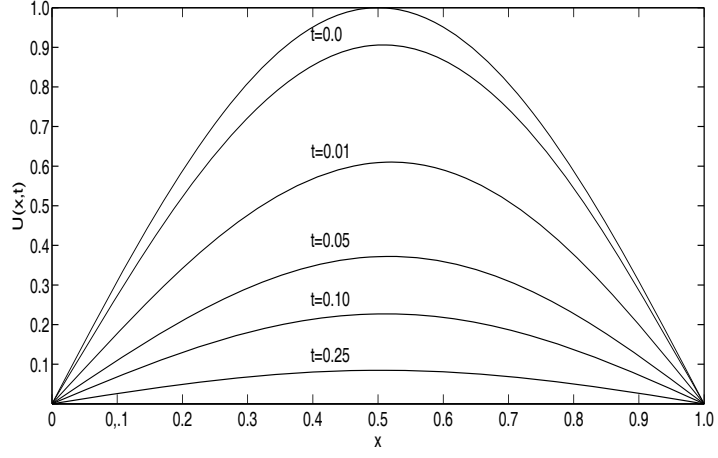
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21128	0.21017	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29406	0.29244	0.29203	0.29193	0.29190
0.4	0.35064	0.34860	0.34809	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37163	0.37158
0.6	0.36221	0.35984	0.35924	0.35909	0.35905
0.7	0.31279	0.31062	0.31008	0.30995	0.30991
0.8	0.23003	0.22837	0.22795	0.22785	0.22782
0.9	0.12189	0.12099	0.12076	0.12070	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.53142	1.98647	0.50908	0.12826	
$L_2 \times 10^3$	2.21432	0.55298	0.13801	0.03430	
$L_\infty \times 10^3$	3.16433	0.79046	0.19767	0.04897	

Tablo 4.11: $t = 0.1$, $\nu = 1$, $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri

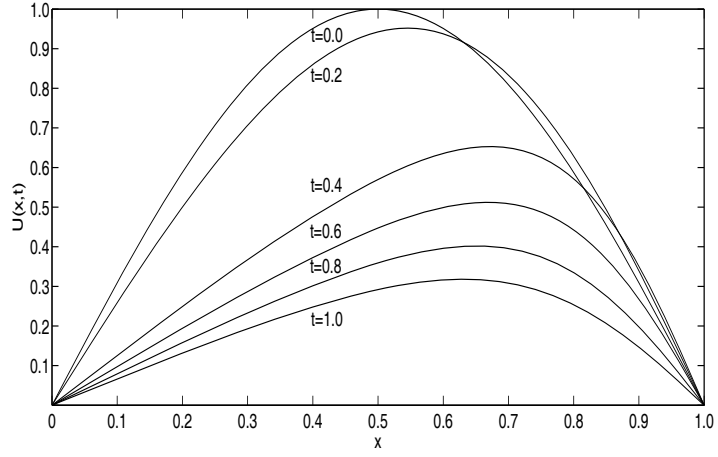
x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48746	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.12: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri

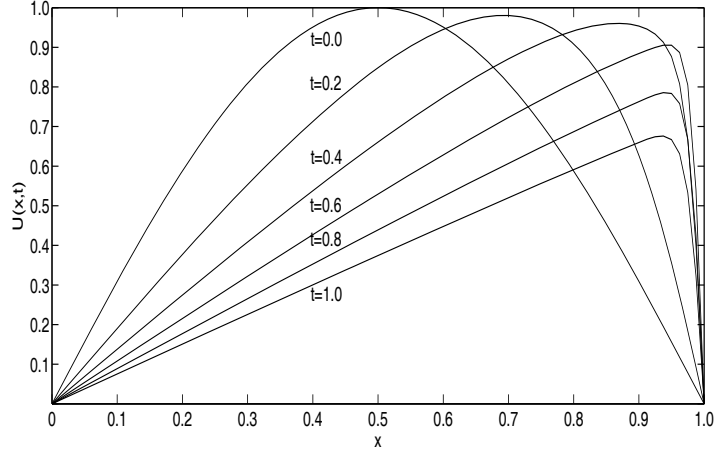
Nümerik çözümlerin problemin fiziksel davranışlarını ne kadar iyi sergilediğini görmek için Şekil 4.3.1 - Şekil 4.3.5 teki grafikler verildi. Nümerik çözümler analitik çözümlere oldukça yakın olduğundan her iki çözüm eğrisinin aynı grafik üzerinde gösterilmesi durumunda diagramları ayırtedilemez. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi nümerik çözümler problemin doğru fiziksel yaklaşımlarını sergilemektedir. Örneğin $\nu \leq 0.01$ küçük viskozite değerlerinde $t = 0.6$ zamanından itibaren sağ sınıra yakın keskin düşüşler başlamaktadır. Burgers denkleminin yapısından kaynaklanan bu durum Şekil 4.3.3 - Şekil 4.3.5 te görülmektedir.



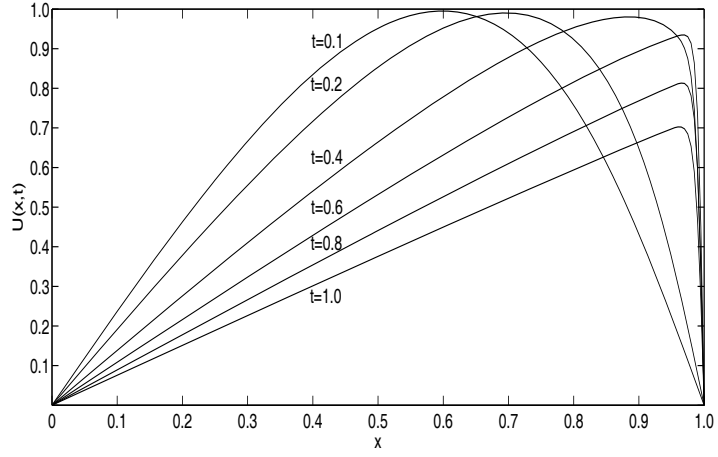
Şekil 4.3.1: $v = 1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



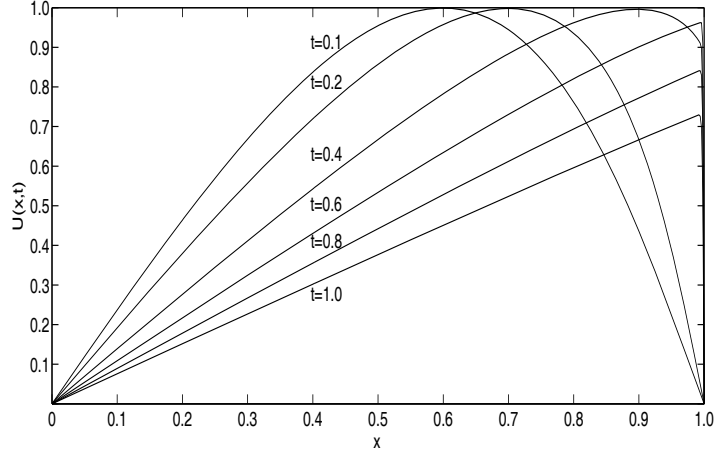
Şekil 4.3.2: $v = 0.1$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



Şekil 4.3.3: $v = 0.01$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



Şekil 4.3.4: $v = 0.005$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.005$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



Şekil 4.3.5: $\nu = 0.001$, $k = 0.0001$ ve $h = 0.002$ değerleri için Problem 1'in farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri

(4.0.1) ve (4.0.2) parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.18) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem 2' nin CNSFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümü Tablo 4.13 ve Tablo 4.14 te verildi. Tablodan elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yakın olduğu açıkça görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11367	0.11309	0.11295	0.11291	0.11289
0.2	0.21778	0.21664	0.21635	0.21628	0.21625
0.3	0.30318	0.30153	0.30111	0.30101	0.30097
0.4	0.36165	0.35957	0.35904	0.35891	0.35886
0.5	0.38658	0.38421	0.38362	0.38347	0.38342
0.6	0.37391	0.37147	0.37085	0.37070	0.37066
0.7	0.32303	0.32080	0.32024	0.32010	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23537
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.50209	1.98019	0.50207	0.12057	
$L_2 \times 10^3$	2.27411	0.56797	0.14000	0.03344	
$L_\infty \times 10^3$	3.24874	0.81038	0.19883	0.04821	

Tablo 4.13: $t = 0.1$, $\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01401	0.01400	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.317544	0.31752	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19958	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.01986	0.01985	0.58460	0.58454	0.68371	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.58460	0.58454	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45373	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38569	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01407	0.01407	0.64585	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.64585	0.64562	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38557	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29605	0.29586	0.56934	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

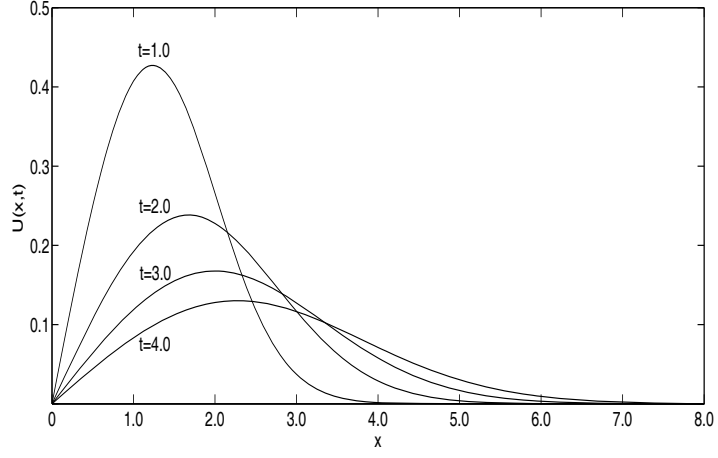
Tablo 4.14: $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri

Tablo 4.15 de $\nu = 0.5, h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için (4.0.1) ve (4.0.2) parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.20) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak Problem 3'ün farklı t zamanlarında CNSFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Tablodan çözümlerin iyi olduğu açıkça görülmektedir.

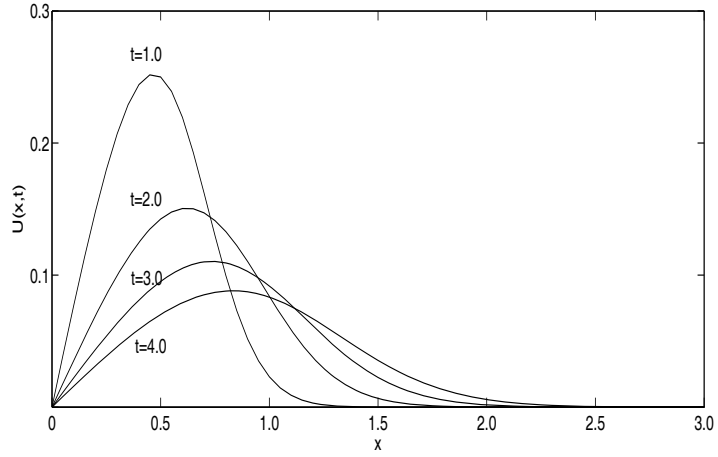
x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15330	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26581	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15511	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26141	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11338
2.5	0.172127	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03581	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01187	0.01186	0.05795	0.05798	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05328	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 4.15: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (CNSFY1) ve tam çözümleri

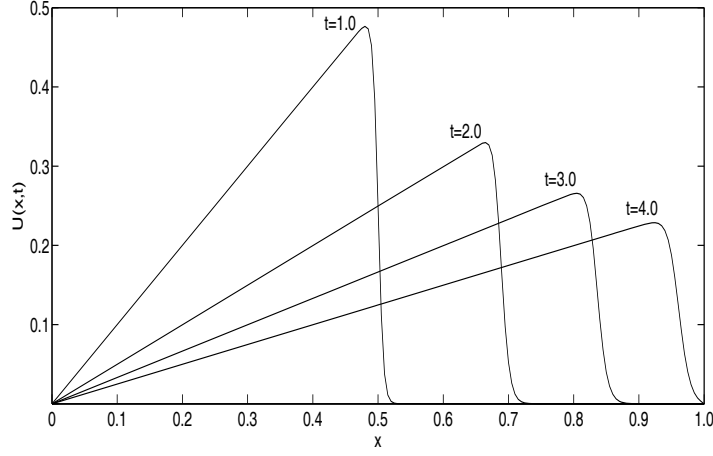
Şekil 4.3.6 ve Şekil 4.3.7 de $v = 0.5, 0.05$, $k = 0.0001$, $h = 0.005$, $[a, b] = [0, 8]$ için t 'nin farklı değerlerinde Problem 3'ün nümerik ve tam çözümlerin grafikleri verildi. Şekil 4.3.8 de $v = 0.001$, $k = 0.01$, $h = 0.005$, $[a, b] = [0, 1]$ için t 'nin farklı değerlerinde Problem 3'ün nümerik çözümlerin grafiği verildi. Her iki çözüm birbirine oldukça yakın olduğundan problemin her iki çözümünün grafiği aynı diagramda verildi.



Şekil 4.3.6: $v = 0.5$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



Şekil 4.3.7: $v = 0.05$, $k = 0.0001$, $h = 0.05$ ve $[a, b] = [0, 8]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri



Şekil 4.3.8: $v = 0.001$, $k = 0.01$, $h = 0.005$ ve $[a, b] = [0, 1]$ değerleri için Problem 3'ün farklı zamanlarda nümerik (CNSFY1) çözümleri

4.4 Ağırlıklı Averaj Yaklaşımının Kararlılık Analizi

(4.0.1) ile verilen

$$U_t = vU_{xx}$$

parabolik denklem için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \\ = v \left\{ \lambda \left(\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

dir. Bu yaklaşım $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla Açık, Crank-Nicolson ve Kapalı sonlu fark yaklaşımlarına karşılık gelir[3]. Şimdi (4.4.1) yaklaşımına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için U_m^n yerine

$$U_m^n = e^{i\beta m h} \xi^n, i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi - rv\lambda\xi \left(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h} \right) = 1 + rv(1 - \lambda) \left(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h} \right)$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi - rv\lambda\xi(2\cos\beta h - 2) = 1 + rv(1 - \lambda)(2\cos\beta h - 2) \quad (4.4.2)$$

bulunur.

$$\cos\beta h = 1 - 2\sin^2\frac{\beta h}{2}$$

olduğundan (4.4.2) den ξ parametresi

$$\xi = \frac{1 - 4rv(1 - \lambda)\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 4rv\lambda\sin^2\frac{\beta h}{2}}$$

olarak elde edilir.

■ $\lambda = 0$ ise (4.4.1) yaklaşımı Açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

şartı r kararlılık parametresinin $r \leq \frac{1}{2v}$ olması ile mümkündür. Böylece Açık sonlu fark yöntemi $r \leq \frac{1}{2v}$ olması durumunda kararlıdır

■ $\lambda = 1$ ise (4.4.1) yaklaşımı tamamen Kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için yine gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Kapalı sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

■ $\lambda = \frac{1}{2}$ ise (4.4.1) yaklaşımı Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yine kararlılık için gerek ve yeter şart ξ parametresinin

$$|\xi| \leq 1$$

şartını sağlamasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

(4.0.2) ile verilen

$$U_t = -UU_x$$

hiperbolik denklem için ağırlıklı averaj yaklaşımı, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \\ &= -U_m^n \left\{ \lambda \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

dir. Bu yaklaşım $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla Açık, Crank-Nicolson ve Kapalı sonlu fark yöntemlerine karşılık gelir[3]. Şimdi (4.4.3) yaklaşımına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için U_m^n yerine

$$U_m^n = e^{i\beta m h} \xi^n, i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi - 1 = -r_1 \hat{U} \left\{ \lambda \xi \left(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h} \right) + (1 - \lambda) \left(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h} \right) \right\}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi(1 + 2ir_1 \hat{U} \lambda \sin \beta h) = 1 - (1 - \lambda) 2ir_1 \hat{U} \sin \beta h$$

$$\xi = \frac{1 - (1 - \lambda) 2ir_1 \hat{U} \sin \beta h}{(1 + 2ir_1 \hat{U} \lambda \sin \beta h)}$$

elde edilir.

■ $\lambda = 0$ ise (4.4.3) yaklaşımı Açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır. von Neumann kararlılık analizi gösteriyor ki, Açık sonlu fark yaklaşımı her zaman kararsızdır[63]. Kısım 4.5 te bu sorunu aşmak için Lax-Wendroff metodu kullanıldı.

■ $\lambda = 1$ ise (4.4.3) yaklaşımı tamamen Kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için yine gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır. Bu şart her $r_1 > 0$ için sağlanacağından Kapalı sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

■ $\lambda = \frac{1}{2}$ ise (4.4.3) yaklaşımı Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yine kararlılık için gerek ve yeter şart ξ parametresinin

$$|\xi| \leq 1$$

şartını sağlamasıdır. Bu şart her $r_1 > 0$ için sağlanacağından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

4.5 Lax-Wendroff Açık Yöntem[3]

(4.0.2) ile verilen,

$$U_t = -UU_x$$

denklemini tekrar göz önüne alalım. (4.0.2) denklemindeki $\frac{\partial U}{\partial x}$ ile çarpım durumundaki U yerine \hat{U} değeri alınırsa (4.0.2) denklemin operatör formunda

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -\hat{U} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.5.1)$$

olarak yazılabilir.

$U(x_m, t_n + k)$ fonksiyonunun Taylor Seri açılımı, $x_m = mh$ ve $t_n = nk$ ($m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$) olmak üzere,

$$U(x_m, t_n + k) = U_m^{n+1} = U_m^n + k(U_t)_m^n + \frac{1}{2}k^2(U_{tt})_m^n + \dots$$

dir.

(4.5.1)'in yukarıdaki Taylor seri açılımında kullanılmasıyla t 'ye göre türevler yok edilirse

$$U_m^{n+1} = U_m^n - k\hat{U}(U_x)_m^n + \frac{1}{2}k^2(\hat{U})^2(U_{xx})_m^n + \dots$$

bulunur. Bu denklemde k^2 terimine kadar olan x ' e göre türevler yerine merkezi fark yaklaşımları yazılırsa ve $\hat{U} = U_m^n$ alınırsa (4.0.2) denkleminin Lax-Wendroff açık yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{k}{2h}U_m^n(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}(U_m^n)^2(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)$$

olarak bulunur.

Böylece (4.0.1) ve (4.0.2)'nin Açık sonlu fark yaklaşımı $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (4.5.2)$$

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{k}{2h}U_m^n(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}(U_m^n)^2(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \quad (4.5.3)$$

dir. Burada $r = \frac{vk}{h^2}$ dir.

Önce (4.5.2) denklemini kullanılarak,

$$\begin{aligned} U_1^{n+1/2} &= rU_0^n + (1 - 2r)U_1^n + rU_2^n \\ U_2^{n+1/2} &= rU_1^n + (1 - 2r)U_2^n + rU_3^n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ U_{M-1}^{n+1/2} &= rU_{M-2}^n + (1 - 2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

açık denklem sisteminden $U_m^{n+1/2}$ bilinmeyenleri hesaplanır daha sonra aynı zaman adımı

için (4.5.3) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned}
U_1^{n+1} &= U_1^{n+1/2} - \frac{k}{2h} U_1^{n+1/2} (U_2^{n+1/2} - U_0^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{k^2}{2h^2} (U_1^{n+1/2})^2 (U_0^{n+1/2} - 2U_1^{n+1/2} + U_2^{n+1/2}) \\
U_2^{n+1} &= U_2^{n+1/2} - \frac{k}{2h} U_2^{n+1/2} (U_3^{n+1/2} - U_1^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{k^2}{2h^2} (U_2^{n+1/2})^2 (U_1^{n+1/2} - 2U_2^{n+1/2} + U_3^{n+1/2}) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
U_{M-1}^{n+1} &= U_{M-1}^{n+1/2} - \frac{k}{2h} U_{M-1}^{n+1/2} (U_M^{n+1/2} - U_{M-2}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{k^2}{2h^2} (U_{M-1}^{n+1/2})^2 (U_{M-2}^{n+1/2} - 2U_{M-1}^{n+1/2} + U_M^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

açık denklem sisteminden problemin aranan U_M^{n+1} bilinmeyen değerleri bulunur. Arzu edilen zaman seviyesindeki bilinmeyen U_M^{n+1} değerleri elde edilinceye kadar yukarıdaki prosedüre devam edilir.

Nümerik Sonuçlar

(4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış Burgers denklemi (3.1.12) sınır ve (3.1.13) başlangıç koşullarına göre gözönüne alınarak problem 1'in (4.5.4) ve (4.5.5) Lax-Wendroff Açık sonlu fark yaklaşımlarından elde edilen nümerik çözümler Tablo 4.16 ve Tablo 4.17 de verildi. Tablo 4.16 da $v = 1$, $k = 0.00001$, $t_f = 0.1$ ve değişik h değerleri için problemin Lax-Wendroff sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümleri karşılaştırıldı. Tablodan h 'nın giderek küçülen değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme giderek yaklaştığı görülür. $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ ve $v = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için problem 1'in çeşitli t zamanlarında Lax-Wendroff sonlu fark çözümleri Tablo 4.17 de verildi. Tabloya bakıldığında ilerleyen zamanlarda problemin nümerik çözümlerinin analitik çözümlerle iyi bir uyum gösterdiği görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10955	0.10954
0.2	0.21127	0.21016	0.20988	0.20981	0.20979
0.3	0.29405	0.29243	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35922	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22835	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12188	0.12098	0.12075	0.12070	0.12069
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.48756	1.93995	0.46126	0.07981	
$L_2 \times 10^3$	2.20138	0.53999	0.12501	0.02132	
$L_\infty \times 10^3$	3.14547	0.77181	0.17880	0.03029	

Tablo 4.16: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30891	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26897	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01924	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43915	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62565	0.62544	0.91045	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48746	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37414	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28765	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Tablo 4.17: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 1'in nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri

(3.1.1) Burgers denkleminde (4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış biçimi (3.1.12) sınır ve (3.1.18) başlangıç koşulları altında göz önüne alınarak Problem 2' nin LWSFY1 ile elde edilen nümerik çözümleri ile problemin tam çözümü Tablo 4.18 ve Tablo 4.19 da verildi. Tablolara bakıldığında elde edilen nümerik sonuçların analitik sonuçlara yakın olduğu kolayca görülmektedir.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11366	0.11308	0.11294	0.11290	0.11289
0.2	0.21777	0.21663	0.21634	0.21627	0.21625
0.3	0.30316	0.30151	0.30109	0.30099	0.30097
0.4	0.36163	0.35955	0.35902	0.35889	0.35886
0.5	0.38657	0.38420	0.38360	0.38345	0.38342
0.6	0.37389	0.37145	0.37084	0.37069	0.37066
0.7	0.32302	0.32079	0.32023	0.32009	0.32007
0.8	0.23765	0.23593	0.23550	0.23539	0.23538
0.9	0.12596	0.12502	0.12479	0.12473	0.12472
$\ e\ _1 \times 10^3$	7.46489	1.94104	0.46196	0.07997	
$L_2 \times 10^3$	2.26338	0.55720	0.12911	0.02203	
$L_\infty \times 10^3$	3.23651	0.79591	0.18468	0.03127	

Tablo 4.18: $t = 0.1$, $v = 1$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.26150	0.26148	0.31754	0.31752	0.36227	0.36226
	0.6	0.26150	0.26148	0.24616	0.24614	0.28205	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23046	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16562	0.16560	0.19470	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02778	0.02776	0.07614	0.07613
0.50	0.4	0.38345	0.38342	0.58460	0.58454	0.68370	0.68368
	0.6	0.38345	0.38342	0.45805	0.45798	0.54833	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36748	0.36740	0.45372	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29843	0.29834	0.38568	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04109	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.28160	0.28157	0.64584	0.64562	0.92063	0.92050
	0.6	0.28160	0.28157	0.50293	0.50268	0.78305	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38556	0.38534	0.66275	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29604	0.29586	0.56933	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03046	0.03044	0.22777	0.22774

Tablo 4.19: $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için Problem 2'nin nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri

Tablo 4.20 $\nu = 0.5$, $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ değerleri için (3.1.1) Burgers denkleminde (4.0.1) ve (4.0.2) ile verilen parçalanmış biçimi (3.1.12) sınır ve (3.1.20) başlangıç koşulları altında göz önüne alınarak problem 3'ün farklı t zamanlarında LWSFY1 ile elde edilen nümerik sonuçlar problemin analitik çözümüyle karşılaştırıldı. Sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu görüldü.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.5	0.15329	0.15327	0.06427	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26580	0.26577	0.11882	0.11880	0.07188	0.07187
1.5	0.30415	0.30412	0.15510	0.15509	0.09794	0.09793
2.0	0.26140	0.26142	0.16763	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17213	0.17217	0.15629	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08804	0.08807	0.12736	0.12738	0.10948	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09130	0.09132	0.09367	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05796	0.05797	0.07359	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03283	0.03284	0.05329	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01673	0.01674	0.03570	0.03572
5.5	0.00014	0.00014	0.00772	0.00772	0.02223	0.02224
6.0	0.00002	0.00002	0.00324	0.00324	0.01290	0.01292
6.5	0.00000	0.00000	0.00124	0.00124	0.00697	0.00702
7.0	0.00000	0.00000	0.00043	0.00043	0.00345	0.00358
7.5	0.00000	0.00000	0.00013	0.00013	0.00139	0.00172

Tablo 4.20: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 3'ün nümerik (LWSFY) ve tam çözümleri

4.6 Lax-Wendroff Açık Yöntemin Kararlılık Analizi

(4.5.2) yaklaşımının kararlılığı önceki bölümde gösterilmişti. Şimdi burada sadece (4.5.3) yaklaşımının von Neumann kararlılık analizini yapalım. Bunun için U_m^n yerine

$$U_m^n = e^{i\beta m h} \xi^n, i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, $r_1 = \frac{k}{h}$ olmak üzere,

$$\xi = 1 - \frac{r_1}{2} \hat{U} (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + \frac{1}{2} r_1^2 (\hat{U})^2 (e^{-i\beta h} - 2 + e^{i\beta h})$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi = 1 - ir_1 \hat{U} \sin \beta h - r_1^2 (\hat{U})^2 (\cos \beta h - 1) \quad (4.6.1)$$

bulunur. Burada $\cos \beta h$ yerine

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

ifadesi kullanılırsa (4.6.1) den ξ parametresi

$$\xi = 1 - ir_1 \hat{U} \sin \beta h - 2r_1^2 (\hat{U})^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

elde edilir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. $|\xi| \leq 1$ ise $0 \leq |\xi|^2 \leq 1$ olur.

$$|\xi|^2 = \left(1 - 2r_1^2 (\hat{U})^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}\right)^2 + (r_1 \hat{U} \sin \beta h)^2$$

$$\sin \beta h = 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2}$$

kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ,

$$(r_1^2 (\hat{U})^2 - 1) \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq 0$$

bulunur. Böylece yöntemin kararlı olması için r_1 parametresinin

$$0 \leq r_1 \hat{U} \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde olması gerekir.

KAYNAKLAR

- [1] M.N.Özişik, *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, CRC Press., Florida, 1994.
- [2] Q.Sheng, A.Q.M.Khalıq, *Splitting methods for differential equations*, **International journal of computer mathematics**, 84:6(2007) 709-711.
- [3] G.D.Smith, *Numerical Solution of Partial Differantial Equations : Finite Difference Methods* ,Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [4] R.L.Burden and J.D.Faires, *Numerical Analysis*, Duxbury Press, Boston, 1985.
- [5] P.C. Jain and M. Raja, *Splitting-up technique for Burgers' equations*, **Indian J. pure appl. Math.**,10:12(1979) 1543-1551.
- [6] G.I.Marchuk, ” On the theory of the splitting-up method”, Numerical Solution of Partial Differential Equations, II (SYNSPADE 1970) (Proc. Sympos., Univ. of Maryland, College Park, Md.) Academic Press, New York, 1971, pp. 469–500
- [7] G.I.Marchuk and V.I.Kuzin, *On the combination of finite element and splitting-up methods in the solution of parabolic equations*, **J. Comput. Phys.** 52:2(1983) 237-272.
- [8] G.I.Marchuk, *Splitting methods for solving nonstationary problems*, (**Russian. Russian summary**) **Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.**, 35:6 (1995), 843-849; **translation in Comput.Math. Math. Phys.**, 35:6 (1995) 667-671.
- [9] Q.Sheng and R.P.Agarwal, *A note on asymptotic splitting and its applications*, **Mathematical and computer modelling** ,20:12(1994) 45-58
- [10] S.Blanes and P.C.Moan, *Splitting methods for the time-dependent Schrödinger equation*, **Physics letters A**, 265:8(2000) 35-42.
- [11] J.Caldwell, P.Shum and K.L.So, *A split-step finite element analysis method with various adaptive grid techniques*, **Commun.Numer.Meth.Engng**, 15(1999) 781-797.

- [12] G.Fairweather, A.R.Gourlay and A.R.Mitchell, *Some high accuracy difference schemes with a splitting operator for equations of parabolic and elliptic type*, **Numerische Mathematik**, 10(1967) 56-66
- [13] A.R. Gourlay, *Splitting methods for time dependent partial differential equations*, **The state of the art in numerical analysis** London, 1977 757-796. .
- [14] G.I.Marchuk, *Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems*, **Applications of Mathematics**, 13:2(1968) 103-132
- [15] B. Saka and D. Irk, *Burger denkleminin sayısal çözümleri için sonlu fark metotları*, **DPÜ Dergisi**, 5(2003)
- [16] B. Bulut, ” *Classical Finite Difference Methods and Their Application*”, MSc.Thesis, İnönü Universty, Turkey, 2007.
- [17] J.Crank and P.Nicolson, *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*, **Proc. Camb. Phil.**, 43(1947) 50-67.
- [18] A.R.Mitchell ve D.F.Griffiths, *The finite Difference Method in Partial Differantial Equations*, **John Wiley Sons Ltd.**, (1990)
- [19] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, **Mon. Weather Rev.**, 43(1915) 163-170.
- [20] J.M. Burgers, *Mathematical examples illustrating relations occuring in the theory of turbulent fluid motion.*, **Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.**, 17(1939) 1-53.
- [21] J.M. Burgers, *A Model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics.*, **Proc. Roy. Neth. Acad. Sci.** 58(1955) 1-18.
- [22] J.D. Cole, *On a quasi linear parabolic equation occuring in aerodynamics.*, **Quart. Appl. Math.**, 9(1951) 225-236.

- [23] M.J. Lighthill, *Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in surveys in mechanics (G.K.Batchlor ve R.M.Davies, Editörler)*, **Cambridge Univ. Press**,(1956) 250-351.
- [24] L.A. Pospelov, *Propagation of finite-amplitude elastic waves*, **Soviet Physics Acoust.**, 11(1966) 302-304.
- [25] B. Van der Poll, *On a non-linear partial differential equations satisfied by the logarithm of the Jacobien theta-functions, with arithmetical applications*, **Proc. Acad. Sci.**, 13(1951) 261-284.
- [26] E. Hopf, *The Partial Differential equation $U_t + UU_x = \nu U_{xx}$* , **Comm. Pure Appl. Math.**, 3(1950) 201-230.
- [27] E.R. Benton and G.W. Platzman, *A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation.*, **Quarterly of Appl. Math.**, (1972).
- [28] V.I. Karpman, *Nonlinear Waves in Dispersive Media*, Pergamon Press, New York, 1975.
- [29] J. Caldwell, P.Wanless and A.E. Cook, *A finite element approach to Burgers equation*, **Appl. Math. Modelling**, 5(1981) 189-193.
- [30] J. Caldwell and P. Smith, *Solution of Burger's equation with large Reynolds number*, **Appl. Math. Modelling**, 6(1982) 381-385.
- [31] D.J. Evans, and A.R. Abdullah, *The group explicit method for the solution of Burger's equation*, *Computing*, 32(1984) 239-253.
- [32] H. Nguyen and J. Reynen, *A space-time finite element approach to Burgers equation*, **in: E. Hinton et al. (Eds.)**, Numerical Methods for Nonlinear Problems, Pneridge Press, 3(1987) 718-728.
- [33] E. Varoglu and W.D.L. Finn, *Space time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equations*, **Int. J. Num. Methods Eng.**, 16(1980) 171-184.

- [34] S.G. Rubin and R.A. Graves, *Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, **Nasa TR**, R-436(1975).
- [35] T. Özis and A.Özdes, *A direct variational method to Burgers' equation*, **J. Comput. Appl. Math.**, 71(1996) 163-175.
- [36] R.C. Mittal and P.Singhal, *Numerical Solution of Burger's Equation*, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 9(1993), 397- 406.
- [37] N.W. Bazley, "Approximation of operators with reproducing non-linearities" *Manuscripta Math.*, 18, 353-369, (1976).
- [38] S. Kutluay, A.R. Bahadir and A. Özdes, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, **Appl. Math. Comp.**, 103(1999), 251-261.
- [39] S.Kutluay, A.Esen and I.Dag, *Numerical solutions of the Burger's equation by the least squares quadratic B-spline finite element method*, **J. Comp. Appl. Math.**, 167(2004) 21-33.
- [40] S.Kutluay and A.Esen, *A Lumped Galerkin Method for solving the Burger's equation*, **Int. J. Comp. Math.**, 81:11(2004), 1433-1444.
- [41] S.Kutluay and A.Esen, *A Linearized Numerical Scheme for Burgers-like equations*, *Appl. Math. Comp.*, 156(2004) 295-305.
- [42] A.R. Bahadir and M. Saglam, *A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers equation*, **Appl. Math. Comput.**, 160(2005) 663-673.
- [43] I. Dag, B. Saka and A. Boz, *B-spline galerkin methods for numerical solution of Burgers equation*, **Appl. Math. Comput.**, 166(2005) 506-522.
- [44] M.A. Abdou and A.A. Soliman, *Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equation*, **J. Comput. Appl. Math.**, 181(2005) 245-251.

- [45] M.K. Kadalbajoo, K.K. Sharma and A. Awasthi, *A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, Article in Press, (2005).
- [46] M. Inc, *On numerical solutions of one-dimensional nonlinear Burger's equation and convergence of the decomposition method*, **Appl. Math. Comput.**, Article in Press,(2005).
- [47] S. Abbasbandy and M.T. Darvishi, *A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method*, **Appl. Math. Comput.**, 163(2005) 1265-1272.
- [48] M.T. Darvishi and M. Javidi, *A numerical solution of Burgers' equation by pseudospectral method and Darvishi's preconditioning*, Article in Press, (2005).
- [49] T. Özis and Y. Aslan, *The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number*, **Appl. Math. Comput.**, 163(2005) 131-145.
- [50] I.A. Hassanien, A.A. Salama and H.A. Hosham, *Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation*, Article in Press, (2005).
- [51] M. Gülsu and T. Özis, *Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation*, Article in Press, (2005)
- [52] Y.Uçar, " *Finite Difference Solutions of the One-Dimensional Burgers-Like Equations*", MSc.Thesis, İnönü Universty, Turkey, 2005.
- [53] A.A.Soliman, *The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations*, **Physica A**, 361(2006) 394-404.
- [54] E.N.Aksan, *Quadratic B-spline finite element method for numerical solution of the Burgers' equation*, **Appl. Math. and Comput.**, 174(2006) 884-896.
- [55] M.K.Kadalbajoo and A.Awasthi, *A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation*, **Appl. Math. and Comput.**,182(2006) 1430-1442.

- [56] A.H.A.E Tabatabaei, E.Shakour and M.Denghan, *Some implicit methods for the numerical solution of Burgers' equation*, **Appl. Math. and Comput.**, 191(2007) 560-570.
- [57] M.Inc, *On numerical solution of Burgers' equation by homotopy analysis method*, **Physics Letters A**, 372(2008) 356-360.
- [58] S.S.Xie, S.Heo, S.Kim, G.Woo and S.Yi, *Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation using reproducing kernel function*, **Journal of Comput. and Appl. Math.**, 214(2008) 417-434.
- [59] C.G.Zhu and R.H.Wang, *Numerical solution Burgers' equation by cubic B-spline quasi interpolation*, **Appl. Math. and Comput.**, 208(2009) 260-272.
- [60] R.Abazari and A.Borhanifar, *Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method*, **Comput. and Math. with Appl.**, 59(2010) 2711-2722.
- [61] P.Huang and A.Abduwali, *The Modified Local Crank-Nicolson Method for one- and two-dimensional Burgers' Equations*, **Comput. and Math. with Appl.**, 59(2010), 2452-2463.
- [62] E.L. Miller, "Predictor-corrector studies of Burger's model turbulent flow", M.S. Thesis, University of Delaware, Newark, Delaware 1966
- [63] D.G. Duffy, *Advanced Engineering Mathematics*, CRC Press LLC, (1998)

ÖZGEÇMİŞ

02 Mart 1984 yılında Bingöl'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bingöl'de tamamladı. 2003 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2008 de öğrenimini tamamladı. Eylül 2008'de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Halen Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.