T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIM SUBMERSİYONLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yılmaz GÜNDÜZALP

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2011

Tezin Başlığı: Çarpım Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine

Tezi Hazırlayan: Yılmaz Gündüzalp

Sınav Tarihi: 17/11/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Yukarıda adı geçen tez, jürimiz tarafından değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Sadık KELEŞ (İnönü Üniversitesi) ....

Prof.Dr. Rıfat GÜNEŞ (İnönü Üniversitesi) ....

Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniversitesi) ....

Prof.Dr. Bayram ŞAHİN (Danışman) (İnönü Üniversitesi) ....

Yrd.Doç.Dr. M.Habil GÜRSOY (İnönü Üniversitesi) ....

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.../11/2011

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Çarpım Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yılmaz GÜNDÜZALP

ÖZET

Doktora Tezi

ÇARPIM SUBMERSİYONLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yılmaz GÜNDÜZALP

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

88+v sayfa

2011

Danışman: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Bu tez dört bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi ve ele alınan problemlerin tanıtımı yapılmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar; (semi-Riemann manifoldlar, vektör demetleri ve distribüsyonlar, semi-Riemannian submersiyonlar, çarpım Riemann manifoldu, hemen hemen para-kontak metrik manifoldlar) ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen çarpım submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Riemann çarpım manifoldları arasında hemen hemen çarpım Riemann submersiyon tanımlanmakta ve bir örnek verilmektedir. Daha sonra bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlanmakta ve bunların temel özellikleri incelenmektedir. Ayrıca, bir hemen hemen çarpım Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri arasındaki ilişki araştırılmaktadır.

Dördüncü bölümde, para-kontakt semi-Riemann submersiyonlara ayrılmaktadır. Hemen hemen para-kontakt metrik manifoldları arasında para-kontakt semi-Riemann submersiyon tanımlanmakta ve bir örnek verilmektedir. Ayrıca bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlanmakta ve bunların temel özellikleri incelenmektedir. Daha sonra yatay distribüsyonun integrallenebilir ve liflerin total jeodezikliği için gerek şart elde edilmektedir. Total manifoldun sahip olduğu para-kontakt yapınınn para-kontakt submersiyon tarafından baz manifolda taşınması durumu araştırılmaktadır. Son olarak, bir para-kontakt semi-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri incelenmektedir. Total manifoldun bazı özel durumları için eğrilikler arasındaki bağıntıların oldukça basit bir duruma indirgendiği elde edilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Hemen hemen para-kontakt metrik manifold, hemen hemen çarpım manifold, (Semi)- Riemann submersiyon, hemen hemen çarpım submersiyon, para-kontakt para-kompleks semi-Riemann submersiyon.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE GEOMETRY OF PRODUCT SUBMERSIONS

Yılmaz GÜNDÜZALP

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

88+v pages

2011

Supervisor: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter the motivation of the problem is presented. In the second chapter, we give basic materials such as semi-Riemannian manifolds, distributions, vector bundles, (semi)-Riemannian submersion, almost product manifolds and almost para-contact metric manifolds which will be useful for other chapters.

In the third chapter, we first define the concept of almost product submersion between almost product manifolds, then we provide an example and show that the vertical and horizontal distributions of such submersions are invariant with respect to the almost product structure of the total manifold. We also prove that if the total manifold of the almost product submersion is a locally product Riemannian manifold, then the base manifold is also a locally product Riemannian manifold. Moreover, we obtain various properties of the O'Neill's tensors for such submersions and find the integrability of the horizontal distribution. Finally, we obtain curvature relations between the base manifold and the total manifold.

In the fourth chapter, we first define the concept of paracontact semi-Riemannian submersions between almost paracontact metric manifolds, then we provide an example and show that the vertical and horizontal distributions of such submersions are invariant with respect to the almost paracontact structure of the total manifold. The study is focused on fundamental properties and the transference of structures defined on the total manifold. Moreover, we obtain various properties of the O'Neill's tensors for such submersions and find the integrability of the horizontal distribution. We also find necessary and sufficient conditions for a paracontact semi-Riemannian submersion to be totally geodesic.
Finally, we obtain curvature relations between the base manifold and the total manifold.

KEY WORDS: Almost para-contact metric manifold, almost product manifold, (semi)-Riemannian submersion, almost product submersion, para-contact para-complex semi-Riemannian submersion.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN' e, Lisansüstü eğitimim boyunca beni yönlendiren Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve her zaman desteklerini gördüğüm Geometri Anabilim Dalı öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güveninden dolayı sevgili eşim Arife GÜNDÜZALP' a teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Ayrıca çocuklarım Zehra, Yusuf ve Elif' e sonsuz teşekkür eder , sevgilerimi sunarım.

Yılmaz GÜNDÜZALP

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M, N	Manifold
g	Metrik Tensör
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	M manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
Φ	Temel 2-Form
R	Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
B	Bi-kesit Eğriliği
H	Kesit Eğriliği
$\Gamma(H)$	Yatay Vektör Alanlarının Uzayı
$\Gamma(V)$	Dikey Vektör Alanlarının Uzayı
N_φ	φ nin Nijenhuis Tensörü
π_*	Türev Dönüşümü
[,]	Lie Parantez Operatörü
A	Yatay Tensör Alanı
T	Dikey Tensör Alanı
f	Hemen Hemen Çarpım Yapı
J	Hemen Hemen Para-kompleks Yapı
ζ	Karakteristik Vektör Alanı
φ	(1,1)-tipinde tensör alanı
η	1-form
(φ,φ')	Para-holomorfik Dönüşüm
(f,f')	Holomorfik Dönüşüm

I. GİRİŞ

Diferensiyel geometride en önemli çalışma alanlarından biri manifoldlar teorisidir. Manifoldlar teorisinde bir manifoldun geometrisi incelenirken kullanılan yöntemlerden biri, diğer bir manifolda uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu yöntemde, dönüşümün ve diğer manifoldun özelliklerinden faydalanarak ele alınan manifoldun geometrisi incelenir. Bu tür dönüşümlerin en önemlilerinden biri submersiyon dönüşümüdür. Submersiyonlar teorisinde izometrik immersiyonların karşılığı olarak Riemann submersiyonlar, O'Neill tarafından 1966 yılında [25] da tanımlandı. Buna göre M ve B Riemann manifoldları ve $\pi : M \longrightarrow B$ bir submersiyon olsun. Eğer $(çek\pi_*)^{\perp}$ üzerinde π_* bir izometri ise π ye bir Riemann submersiyonu adı verilir. Bu tanımın bir sonucu olarak, her $X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için

$$g(X_1, X_2) = g'(\pi_*(X_1), \pi_*(X_2))$$

elde edilir.

O'Neill makalesinde, immersiyondaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık, Riemann submersiyonları için iki tane tensör alanı tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. Bu temel tensörler, günümüzde O'Neill tensörleri olarak adlandırılmakta ve Riemann submersiyonları için önemli araçlar olarak görülmektedir. Bu makalede ayrıca iki manifold arasındaki submersiyondan faydalanılarak, manifoldların eğrilikleri karşılaştırıldı. O'Neill' in makalesinden sonra bu konu üzerine bir çok makale yayınlandı ve Riemann submersiyonların diferensiyel geometride çok yaygın kullanım alanlarına sahip olduğu gösterildi. Bu konu ile sonuçlar [14] de Falcitelli, Ianus ve Pastore tarafından derlendi.

1976 yılında Watson [35]tarafından hemen hemen Hermityen submersiyonlara giriş yapıldı. Bilindiği gibi hemen hemen kompleks manifold, üzerinde (1,1)-mertebeli J tensör alanı ihtiva eden ve $J^2 = -I$ şartını sağlayan manifolddur. Bu manifoldlar üzerinde Riemann metriği yardımıyla Hermityen yapı ve J tensörünün paralel kılınmasıyla da Kaehler manifoldlar tanımlanır. (M, g, J) ve (B, g', J') hemen hemen Hermityen manifoldlar ve $\pi : M \to B$ bir $C^\infty-$dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir hemen hemen Hermityen submersiyon denir:

(i) π bir Riemann submersiyon,

(ii) π bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani, $\pi_* \circ J = J' \circ \pi_*$ dır.

Bu makalede O'Neill tensörlerinin temel özellikleri incelendi ve baz uzayı, total uzayı ve liflerin geometriksel özellikleri tartışıldı. Watson bir holomorfik submersiyonda total manifold üzerindeki kompleks yapı türünün (yani Hermityen, Kaehler, nearly Kaehler veya hemen hemen Kaehler) baz manifold üzerine taşındığını gösterdi. Bu sonuç, keyfi bir hemen hemen Hermityen manifold üzerinde bu tür yapıları oluşturmak için Riemann submersiyon kavramının oldukça kullanışlı olduğunu gösterdi.

Watson'un makalesinden sonra benzer durum diğer manifoldlar için gözönüne alındı. Hemen hemen kontakt metrik manifoldlar arasında Riemann submersiyonların diferensiyel geometrisi, ilk olarak Chinea [9] ve Watson [36] tarafından çalışıldı. M^{2m+1} ve B^{2n+1} manifoldları sırasıyla (φ, ξ, η, g) ve $(\varphi', \xi', \eta', g')$ hemen hemen kontakt yapılar ile donatılsın. Bu durumda, $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir kontakt Riemann submersiyon denir:

(i) $\pi_*\xi = \xi'$,

(ii) $\pi_* \circ \varphi = \varphi' \circ \pi_*$.

Chinea kontakt submersiyonların geometrisini ve bu tür dönüşümlerin baz manifoldu üzerindeki hemen hemen kontakt yapıya olan etkisini inceledi. Watson[36] 3-kontakt yapılar için benzer tanımı gözönüne aldı ve bu tür submersiyonların geometrisini inceledi.

Benzer tanımlar kuaterniyon Kaehler manifoldlar[18] parakuaterniyonik manifoldlar([7],[19]), metrik $f-$manifoldlar ve yerel konform Kaehler manifoldlar[23] için gözönüne alındı ve bu tür submersiyonların manifoldlarının geometrisine olan etkisi incelendi.

1987 de Kobayashi[21], total uzayı CR-altmanifold ve baz uzayı hemen hemen Hermityen manifold olarak CR-altmanifoldların submersiyonlarını tanımladı. M, M' nın bir CR-altmanifoldu ve (B, J', g') bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. bu durumda $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir CR-submersiyonu denir:

(i) $V =$ çekπ_* dikey distribüsyonu TM deki $\mathcal{H}$ nın ortogonal bileşenidir.

(ii) J, V ve $TM^\perp$ nin rollerini değiştirir.

(iii) Herhangi bir $p \in M$ için $\pi_{*p} : H_p \to T_{\pi(p)}B$ bir kompleks izometridir, yani $\pi_* \circ J = J' \circ \pi_*$.

Bu şekilde tanımlanan submersiyon, Sasakiyan ve yerel konform Kaehler manifoldlarda da çalışıldı.

M ve B iki semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda, O'Neill tarafından [25] de verilen Riemann submersiyon kavramı tanımlanamaz. Bu nedenle O'Neill [26] de iki semi Riemann manifoldu arasında semi-Riemann submersiyonlar tanımlandı. Buna göre, M ve B iki semi-Riemann manifold $\pi : M \to B$ bir submersiyon olsun. Eğer π nin lifleri non-dejenere altmanifoldlar ve π, yatay vektörlerin skaler çarpımlarını koruyorsa π ye bir semi-Riemann submersiyon denir. Bu şekilde tanımlanan semi-Riemann submersiyonlar bir çok yazar tarafından çalışıldı[14].

Yukarıda verilen semi-Riemann submersiyon tanımında liflerin non-dejenere altmanifold olması durumu önemli bir şarttır. Çünkü liflerin non-dejenere olmaması, yani dejenere altmanifold olması durumunda standart teknik ve yöntemler kullanılamaz. Örneğin liflerin tamamlayanı olan yatay distribüsyonunun integral manifoldu da dejenere olsun. Bu durumda vektörlerin korunması anlamlı olmaz.

Liflerin dejenere olması durumu ilk olarak Şahin[32] de gözönüne alındı. Şahin bu makalede bir lightlike manifolddan bir semi-Riemann manifolda olan submersiyon tanımlandı, örnekler verdi ve total manifoldun Reinhart lightlike manifold olması durumunda da bu tür submersiyonların özelliklerini inceledi.

Liflerin dejenere olması durumu Şahin-Gündüzalp[33]de de çalışıldı. Yazarlar bu makalede bir semi-Riemann manifolddan bir lightlike manifolda olan submersiyonları gözönüne aldılar ve gösterdiler ki böyle bir submersiyonda dört sınıf mevcuttur. Yazarlar her bir submersiyon sınıfını ayrıntılı olarak çalıştı, örnekler verdi, O'Neill tensörlerinin karşılığını elde ettiler ve lightlike manifold ile semi-Riemann manifoldun Null kesit eğrilikleri arasındaki bağıntıları araştırdılar.

Diğer taraftan, (M', g_1) ve (N, g_2) m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. Bu durumda M' ve N manifoldlarının kartezyen çarpımı olan $M' \times N$ de bir Riemann manifoldudur. $M' \times N$ çarpım manifoldu olsun, bu durumda

$$P : T(M' \times N) \to TM'$$

ve

$$Q : T(M' \times N) \to TN$$

projeksiyonları $P(X) = X_1$ ve $Q(X) = X_2$ ile tanımlanır. Buradan $P+Q = I$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ ve $PQ = QP = 0$ olur. $f = P - Q$ konumu yapılırsa $f^2 = I$ olduğu açıktır. Buna göre,

$$f : T(M' \times N) \to T(M' \times N)$$

bir lineer otomorfizimdir. $M' \times N$ üzerinde her $X, Y \in T(M' \times N)$ için

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g_1(PX,PY) + g_2(QX,QY) \\ &= g_1(X_1,Y_1) + g_2(X_2,Y_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde g Riemann metriği tanımlanabilir. Böylece $(M' \times N, g)$ ikilisi bir Riemann manifoldu olur. $(M' \times N, g, f)$ üçlüsüne bir çarpım Riemann manifoldu adı verilir[38].

Hemen hemen para-kontakt yapılar ilk olarak Sato tarafından [27] de tanımlandı. Buna göre eğer M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde

(i) $\eta(\xi) = 1$,

(ii) $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$,

(iii) $D = ker\eta$, η ile genelleştirilen yatay distribüsyon olsun. Bu durumda, φ tensör alanı D deki her lif üzerinde bir hemen hemen para-kompleks yapı indirger

şartları sağlayan φ, (1,1)-tensör alanı, η 1-form ve ξ vektör alanı varsa (φ, η, ξ) ya hemen hemen para-kontakt yapı ve (M, φ, η, ξ) dörtlüsüne de hemen hemen para-kontakt manifold denir. Eḡer bir hemen hemen para-kontakt manifold M üzerinde $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g semi-Riemann metriḡi seçilince $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ beşlisine hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve g ye de uyumlu metrik adı verilir. İyi bilinmektedirki, herhangi bir hemen hemen para-kontakt manifold her zaman uyumlu bir semi-Riemann metriḡe sahiptir[39].
Günümüzde de hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ile ilgili çalışmalar devam etmektedir [11],[24], [34],[39].

Bu tezde iki çarpım manifoldu ve iki parakontakt manifold arasındaki submersiyonlar çalışıldı. ikinci bölümde, tezin sonraki kısımlarında kullanılacak temel tanım ve teoremler sunuldu. Bunlar; semi-Riemann manifoldlar, vektör demetleri ve distribüsyonlar, semi-Riemann submersiyonlar, çarpım manifoldlar ve para-kontakt manifoldlar, olarak sıralanabilir.

Tezin orjinal bölümleri üçüncü ve dördüncü bölümlerdir. Üçüncü bölümde hemen hemen çarpım submersiyonlar çalışıldı. Üçüncü bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde hemen hemen Riemann çarpım manifoldları arasında hemen hemen çarpım Riemann submersiyon tanımlandı ve bir örnek verildi. Ayrıca bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlandı ve bunların temel özellikleri incelendi. Total manifoldun yerel çarpım manifoldu olması durumunda hemen hemen çarpım submersiyonunun baz manifoldunun da yerel çarpım manifoldu olduğu gösterildi. İkinci altbölümde bir hemen hemen çarpım Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri araştırıldı.

Dördüncü bölüm, para-kontakt semi-Riemann submersiyonlara ayrıldı. Dördüncü bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde hemen hemen para-kontakt metrik manifoldları arasında para-kontakt semi-Riemann submersiyon tanımlandı ve bir örnek verildi. Dikey ve yatay distribüsyonların invaryantlığı ve liflerin bir hemen hemen para-Hermityen manifold olduğu elde edildi. Ayrıca bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlandı ve bunların temel özellikleri incelendi. Daha sonra yatay distribüsyonun integrallenebilir ve liflerin total jeodezikliği için gerek şart elde edildi. İkinci altbölümde, total manifoldun sahip olduğu para-kontakt yapının para-kontakt submersiyon tarafından baz manifolda taşınması durumu araştırıldı. Üçüncü altbölümde ise, bir para-kontakt semi-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri araştırıldı. Total manifoldun bazı özel durumları için eğrilikler arasındaki bağıntıların oldukça basit bir duruma indirgendiği elde edildi.

II. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm beş altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde semi-Riemann manifoldlar, ikinci altbölümde vektör demetleri ve distribüsyonlar, üçüncü altbölümde de semi-Riemann submersiyonlar tanıtılmaktadır. Dördüncü altbölümde çarpım manifoldların geometrisi incelenirken, son altbölümde ise para-kontakt manifoldlar sunulmaktadır.

II.1. Semi-Riemann Manifoldlar

Bu altbölümde semi-Riemann manifoldlar ile ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

II.1.1.Tanım.[13] V reel m-boyutlu vektör uzayı ve $g : V \times V \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa g dönüşümüne **skaler çarpım** denir.

$a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

(i) Simetrik; $g(u, v) = g(v, u)$,

(ii) Bilineer; $g(au+bv, w) = ag(u, w)+bg(v, w)$ ve $g(u, av+bw) = ag(u, v)+bg(u, w)$,

(iii) Non-dejeneredir; yani her $v \in V$ için $g(u, v) = 0$ olması $u = 0$ ile münkündür.

II.1.2.Tanım.[26] V reel vektör uzayı ve g, V üzerinde bilineer form olsun. Her $v \in V$ için,

(i) $g(v, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlıdır denir.

(ii) $g(v,v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlıdır denir.

II.1.3.Tanım.[13] V reel vektör uzayı ve g, V üzerinde skaler çarpım olsun. V uzayının herhangi bir W altuzayı için $W \times W$ üzerinde g dönüşümünün kısıtlanmışı $g|_W$ de W üzerinde bilineer formdur. Bu forma **indirgenmiş bilineer form** denir.

II.1.4.Tanım.[26] V reel vektör uzayı ve g, V üzerinde bilineer form olsun. W, V uzayının herhangi bir altuzayı olsun. $g|_W$ nin negatif olduğu en büyük W altuzayının boyutuna V uzayı üzerinde bilineer formun **indeksi** denir.

II.1.5.Tanım.[13] Her $u, v \in V$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ iken $g|_V(u,v) = 0$ ise u ve v vektörleri **diktir** denir.

II.1.6.Tanım.[22] M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$\begin{aligned} g : T_pM \times T_pM &\rightarrow R \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow g(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, g skaler çarpıma M üzerinde bir **metrik tensör** denir.

II.1.7.Tanım.[26] M bir C^∞ manifold ve g, M üzerinde metrik tensör olsun. Bu durumda (M, g) ikilisine **semi-Riemann manifoldu** denir.

II.1.8.Tanım.[26] Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine **semi-Riemann manifoldunun indeksi** denir.

q semi-Riemann manifoldunun indeksi ise $0 \leq q \leq boyM = n$ dir. Özel olarak, $q = 0$ ise her $p \in M$ için g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir **Riemann manifoldu** olur. $q = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir.

II.1.9.Tanım. [26] $(\bar{M}, g)$ bir semi-Riemann manifoldu ve $i : M \to \bar{M}$ bir immersiyon olsun. Bu durumda i^*g, M üzerinde bir metrik tensör ise M ye **semi-Riemann altmanifoldu** denir.
i^*g, M üzerinde bir metrik tensör değilse o zaman M ye **dejenere altmanifoldu** denir.

II.1.10.Tanım.[13] M bir semi-Riemann manifoldu ve g, M üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Her $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için

$$g : T_pM \times T_pM \to R$$

olmak üzere

(i) $g(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne **spacelike,**

(ii) $g(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne **timelike,**

(iii) $g(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ ise X_p vektörüne **lightlike vaya null** denir.

II.1.11.Tanım.([12],[17]) M bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,\ Y] \end{aligned} \quad \text{(II.1.1)}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun **torsiyon tensörü** denir.

II.1.12.Tanım.([12]) M bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir.

II.1.13.Tanım.([5]) M bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir **lineer konneksiyon** denir. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f, g \in C^\infty(M)$ için

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

(ii) $\nabla_X (fY + gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z$

dır.

II.1.14.Tanım.([4],[5]) M bir semi-Riemann manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse **Riemann konneksiyon** veya **Levi-Civita konneksiyonu** adını alır. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

dir.

Bu şekilde tanımlanan $\nabla = \nabla^M$ Riemann konneksiyonu M üzerinde bir **Levi-Civita konneksiyonu** olarak da adlandırılır. M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \quad \text{(II.1.2)}$$

Kozsul eşitliği ile belirlenir.

II.1.1. Teorem. ([6],[8]) Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır.

II.1.15.Tanım.[12] (M,g) bir semi-Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\rightarrow R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \text{(II.1.3)}$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun **eğrilik tensörü**, her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$< R(X,Y)Z, W >= g(R(X,Y)Z, W) \quad \text{(II.1.4)}$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Christoffel eğrilik tensörü** denir.

Levi-Civita konneksiyonun R eğrilik tensörü birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerini sağlar. Ayrıca, diğer özellikler aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

II.1.2.Teorem.[26] (M, g) bir semi-Riemenn manifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda, $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

(i) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, X, Z, W) = 0,$

(ii) $R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) = 0,$

(iii) $R(X, Y, Z, W) - R(Z, W, X, Y) = 0$

dır.

II.1.16.Tanım.[26] (M, g) bir semi-Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu non-dejenere bir altuzayı P olsun. P altuzayının bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{II.1.5}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P nin Riemann anlamındaki **kesit eğriliği** denir.

II.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar

Bu altbölümde vektör demetlerinin tanımları ve temel özellikleri verilecektir. Ayrıca vektör demetlerinin bir altsınıfı olan distribüsyonlar tanıtılacaktır.

II.2.1.Tanım.[31] E, B, F, C^∞ manifoldlar ve $\pi : E \to B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (I, indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x \quad x \in U_\alpha,\ y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π, F ye göre **lokal çarpım özelliğine sahiptir** denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin **lokal ayrışması** denir.

II.2.2.Tanım.[31] $\pi : E \to B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir **lif demeti** adı verilir.

Bir lif demetinde E ye **total uzay**, B ye **baz (taban) uzay**, F ye **lif modeli** ve π ye de **projeksiyon (fibrasyon)** adı verilir.

II.2.3.Tanım.[31] $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E | \pi(u) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir **lif** denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir.

II.2.4.Tanım.[31] $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına ζ lif demetinin **lokal koordinat temsilcisi** denir.

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,x}$ ler de birebir, örten ve diffeomorfizmdirler.

II.2.5.Tanım.[5] $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir **vektör demeti** denir.

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

II.2.6.Tanım.[31] $\pi : E \to B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I \;\; (I, \text{B nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S : B \to E$$

C^∞ dönüşümüne **lif demetinin kesiti** denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir.

II.2.7.Tanım.[31] E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için T_pB tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme **vektör demetinin kesiti** denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bu altbölümün son kısmında manifold üzerinde distribüsyon kavramını tanıtacağız.

II.2.8.Tanım.[5] M, m-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : M &\rightarrow T_xM \\ x &\rightarrow \mathcal{V}_x \subset T_xM \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{V}$ dönüşümüne bir **distribüsyon** denir.

$X \in \chi(M)$ için $p \in M$ olmak üzere $X_p \in \mathcal{V}_p$ oluyorsa X vektör alanı $\mathcal{V}$ ye aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{V}$ ye ait q-tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{V}$ ye $q-$boyutlu diferansiyellenebilirdir denir.

II.2.9.Tanım.[31] M bir C^∞ manifold; $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve B, M nin altmanifoldu olsun. Eğer B nin her x noktasında, B nin tanjant uzayı ile $\mathcal{V}_x$ aynı ise B ye $\mathcal{V}$ nin **integral manifoldu** denir. Yani

$$\pi : B \rightarrow M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in B$ için

$$\pi_*(T_xB) = \mathcal{V}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{V}$ nin B yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa B ye $\mathcal{V}$ nin bir **maksimal integral manifoldu** (veya **leaf**) denir.

II.2.10.Tanım.[31] M bir C^∞ manifold ve B, M nin bir altmanifoldu olsun. $\mathcal{V}$, M üzerinde bir distribüsyon olmak üzere, eğer $\forall x \in B$ için $\mathcal{V}$ nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{V}$ ye **integrallenebilirdir** denir.

II.2.11.Tanım.[31] (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, (M,g) üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer $X \in \chi(M), Y \in \chi^v(M)$ için

$$\nabla_X Y \in \chi^v(M)$$

ise $\mathcal{V}$ **distribüsyonuna paraleldir** denir.

II.2.1.Önerme.[5] (M,g), $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ ortogonal distribüsyonuna sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$ nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ nin paralel olmasıdır.

II.3. Semi-Riemann Submersiyonlar

Bu alt bölümde (semi)-Riemann submersiyonlar ile ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar sunulacaktır.

II.3.1.Tanım.[14] (M,g) ve (B,g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi : (M,g) \to (B,g')$$

bir örten C^∞ dönüşümü için

$$rank\, \pi_{*x} = boy\, B$$

oluyorsa π ye $x \in M$ noktasında bir **submersiyon** denir. $\forall x \in M$ için π bir submersiyon ise π ye M üzerinde bir submersiyon adı verilir.

Herhangi bir $b \in B$ için $F_b = \pi^{-1}(b)$ üzerindeki lif, (M,g) manifoldunun $r = (m-n)$- boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(b)$ altmanifoldlarına submersiyonun **lifleri** denir.

Herhangi bir $p \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ **integrallenebilir distribüsyonu**

$$\mathcal{V}_p = \text{çek}\pi_{*p}$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ ye submersiyonun **dikey distribüsyonu** denir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^{\perp}$$

ile tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun **yatay distribüsyonu** denir.

II.3.2.Tanım.[4] (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \text{çek}\, \pi_{*x} = \{X \in T_xM | \pi_{*x}(X) = 0\} \subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\pi) = \mathcal{V}_x^{\perp} \subset T_xM$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına π nin x noktasındaki **dikey uzayı** denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise π nin x noktasındaki **yatay uzayı** denir.

Böylece, M Riemann manifoldu $p \in M$ de

$$T_pM = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{V}_p^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

II.3.3.Tanım.[4] (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g^{'})$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $x \in M$ noktasına T_xM nin sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ alt uzaylarını karşılık getiren

$$x \rightarrow \mathcal{V}_x \quad \text{ve} \quad x \rightarrow \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $M \backslash C_{\pi}$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ile gösterilen C^{∞} distribüsyonları tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ye π nin **dikey distribüsyonu** veya **dikey alt demeti**, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ye ise π nin **yatay distribüsyonu** veya **yatay alt demeti** denir.

II.3.4.Tanım.[16] M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distibüsyona ait ise **yatay vektör alanı** olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\Gamma(\mathcal{H})$ ile gösterilir.

II.3.5.Tanım.[16] M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise **dikey vektör alanı** olarak adlandırılır ve dikey vektör alanlarının kümesi $\Gamma(\mathcal{V})$ ile gösterilir.

Herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için, E nin dikey ve yatay bileșenleri sırasıyla vE ve hE gösterilir.

II.3.6.Tanım.[25] M ve B Riemann manifoldları olsun. Eḡer X yatay ve B üzerindeki $X^{'}$ vektör alanına π-baḡlı ise M üzerindeki X vektör alanına basic(temel) vektör alanı denir.

Riemann submersiyonu kavramı O'neill tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı.

II.3.7.Tanım.([14],[25]) (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g^{'})$$

bir $C^{\infty}-$ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir **Riemann submersiyonu** denir:

1) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

2) Her $p \in M$ noktasında, π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_p(u, v) = g^{'}_{\pi(p)}(\pi_{*p}u, \pi_{*p}v) \quad , \quad u, v \in \mathcal{H}_p \quad , \; p \in M \qquad \text{(II.3.1)}$$

dır. Bu ise, bir $p \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler.

Yukarıda verilen tanım, semi-Riemann manifoldlar için aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

II.3.8.Tanım.[2],[3],[26] (M^m_s, g) ve $(B^n_{s'}, g')$ bağlantılı semi-Riemann manifoldları olsun ($0 \leq s \leq m$, $0 \leq s' \leq n$).

$$\pi : M \rightarrow B$$

örten dönüşümü aşağıdaki şartları sağlanıyorsa π ye bir **semi-Riemann submersiyon** denir:

(i) Her $p \in M$ noktatasında π_{*p} örten;

(ii) Her $b \in B$ için $\pi^{-1}(b)$ lifleri M nin semi-Riemann altmanifoldlarıdır;

(iii) π_* yatay vektörlerin skaler çarpımlarını korur.

II.3.1. Önerme. [14] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu, ∇ ve $\nabla^{'}$ sırasıyla M ve B nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları , $X^{'}, Y^{'}$ vektör alanlarına π-bağlı olsun. Bu durumda

(i) $g(X, Y) = g^{'}(X^{'}, Y^{'}) \circ \pi$;

(ii) $h[X, Y]$ temel vektör alanı, $[X^{'}, Y^{'}]$ vektör alanına $\pi-$ bağlıdır.

(iii) $h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı ve $\nabla^{'}_{X^{'}} Y^{'}$ $\pi-$ bağlıdır.

(iv) Herhangi bir $V \in \chi^v(M)$ için, $[X, V]$ dikey vektör alanıdır.

Şimdi semi-Riemann submersiyonların geometrisini incelemede çok önemli yer tutan, O'neill tarafından tanımlanan A ve T temel tensörleri tanıtılacaktır.

II.3.9.Tanım.([15],[25]) (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1, 2)$ mertebeli T temel tensör alanı

$$T(E, F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF, \quad E, F \in \Gamma(TM) \qquad \text{(II.3.2)}$$

ile tanımlanır.

Burada, v ve h sembolleri sırasıyla $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ üzerinde ortogonal projeksiyonlar ve ∇, (M,g) nin Levi-Civita konneksiyonudur. T temel tensör alanı aşağıdaki özelikleri sağlar:

(i) $E \in \Gamma(TM)$ için T_E anti-simetrik ve lineer operatördür.

(ii) $E \in \Gamma(TM)$ için T_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

(iii) T dikey tensör alanıdır. Yani,$E \in \Gamma(TM)$ için, $T_E = T_{vE}$ dir.

(iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V, W \in \mathcal{V}$ için

$$T_V W = T_W V$$

dır.

II.3.10.Tanım.([14],[25]) (M,g) ve $(B,g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli A temel tensör alanı

$$A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF, \quad E, F \in \Gamma(TM) \qquad \text{(II.3.3)}$$

ile tanımlanır. A temel tensör alanı:

(i) $E \in \Gamma(TM)$ için A_E anti-simetrik ve lineer operatördür.

(ii) $E \in \Gamma(TM)$ için A_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

(iii) A yatay tensör alanıdır. Yani, $E \in \Gamma(TM)$ için, $A_E = A_{hE}$ dir.

(iv) A yatay tensör alanı alterleyendir. Yani $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$A_X Y = -A_Y X$$

özelliklerine sahiptir.

II.3.1.Lemma.[14] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda A_E ve T_E anti-simetrik operatörlerdir. Herhangi bir $E, F, G \in \Gamma(TM)$ için

$$g(T_E F, G) = -g(T_E G, F) \tag{II.3.4}$$

$$g(A_E F, G) = -g(A_E G, F) \tag{II.3.5}$$

dır.

II.3.2. Önerme. ([25],[35]) (M, g) ve $(B, g^{'})$semi- Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu olmak üzere, tensör alanları T ve A

$$T_U W = T_W U, \qquad U, W \in \Gamma(\mathcal{V}); \tag{II.3.6}$$

$$A_X Y = -A_Y X, \qquad X, Y \in \Gamma(\mathcal{H}); \tag{II.3.7}$$

$$A_X Y = \frac{1}{2} v[X, Y], \qquad X, Y \in \Gamma(\mathcal{H}) \tag{II.3.8}$$

özeliklerine sahiptir.

II.3.11.Tanım.[14] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve $\pi : M \longrightarrow B$ semi-Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda eğer T tensör alanı sıfır ise π nin herhangi bir lifine M nin total geodezik altmanifoldu denir.

Bir semi-Riemann submersiyonda dikey distribüsyon her zaman integrallenebilirdir. Yatay distribüsyon için aşağıdaki durum geçerlidir.

II.3.1.Teorem.[25] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu ve (M, g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonnun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır.

(II.3.2) ve (II.3.3) den aşağıdaki Lemma elde edilir.

II.3.2.Lemma.[14],[25] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu olmak üzere, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \tag{II.3.9}$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X, \tag{II.3.10}$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V, \tag{II.3.11}$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y \tag{II.3.12}$$

dır. Ayrıca, X temel vektör alanı ise $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V \tag{II.3.13}$$

dır.

Bu altbölümün son kısmında submersiyonun tanımlı olduğu manifoldların eğrilikleri arasında bağıntılar (semi)-Riemann submersiyonu aracılığıyla sunulacaktır.

II.3.12.Tanım.[14] (M, g) ve $(B, g^{'})$ semi-Riemann manifoldları ve (M, g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $X^h(M)$ üzerinde $(1,3)-$ mertebeli eğrilik tensör alanını R^* ile gösterelim. Herhangi bir $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $p \in M$ için

$$R^{'}_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p, \pi_{*p}Z_p)$$

tensörünün yatay lifti $R^*(X, Y, Z)$ ile ifade edilir. $(B, g^{'})$ manifoldunun $R^{'}$ **semi-Riemann eğriliği** kısaca;

$$\pi_*(R^*(X, Y, Z)) = R^{'}(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z)$$

ile tanımlanabilir. Ayrıca, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$R^*(X, Y, Z, H) = \quad R^{'}(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z, \pi_* H) \circ \pi$$

dir.

II.3.2.Teorem.[15],[25] (M,g) ve $(B,g^{'})$ semi-Riemann manifoldları,

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

bir semi-Riemann submersiyonu ve R, R' ve $\hat{R}$ sırasıyla M, B ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $U, V, W, F \in \Gamma(\mathcal{V})$ ve $X, Y, Z, H \in \Gamma(H)$ için

$$\begin{aligned}
R(U,V,F,W) &= \hat{R}(U,V,F,W) + g(T_U W, T_V F) \\
&\quad -g(T_V W, T_U F) \qquad \text{(II.3.14)} \\
R(X,Y,Z,H) &= R^{'}(X,Y,Z,H) - 2g(A_X Y, A_Z H) \\
&\quad +g(A_Y Z, A_X H) - g(A_X Z, A_Y H) \qquad \text{(II.3.15)} \\
R(X,Y,V,W) &= g((\nabla_V A)_X Y, W) - g((\nabla_W A)_X Y, V) \\
&\quad +g(A_X V, A_Y W) - g(A_X W, A_Y V) \\
&\quad -g(T_V X, T_W Y) + g(T_W X, T_V Y) \qquad \text{(II.3.16)}
\end{aligned}$$

dır, burada $(\nabla_V A)_X Y = \nabla_V (A_X Y) - A_{\nabla_V X}(Y) - A_X(\nabla_V Y)$ ile verilir.

II.4. Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifoldlar

Bu altbölümde, üçüncü bölümde hemen hemen çarpım submersiyonlar tanımlanırken kullanılacak olan hemen hemen çarpım Riemann manifoldu ile ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

II.4.1. Tanım.[26],[30],[38] (M', g_1) ve (N, g_2) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda M' ve N manifoldlarının kartezyen çarpımı olan $M' \times N$

de bir Riemann manifoldudur. Üstelik aşğıdaki özellikler sağlanır;

(i)

$$\begin{aligned} \pi : M' \times N &\rightarrow M' \\ (p,q) &\rightarrow p \\ \sigma : M' \times N &\rightarrow N \\ (p,q) &\rightarrow q \end{aligned}$$

izdüşümleri C^∞ dönüşümlerdir ve bu dönüşümler submersiyondur.

(ii) Bir $\phi : P \rightarrow M' \times N$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart hem $\pi \circ \phi$ hem de $\sigma \circ \phi$ dönüşümlerinin C^∞ olmasıdır.

(iii) Herbir $(p,q) \in M' \times N$ için,

$$\begin{aligned} M' \times q &= \{(r,q) \in M' \times N : r \in M'\} \\ p \times N &= \{(p,r) \in M' \times N : r \in N\} \end{aligned}$$

alt kümeleri $M' \times N$ nin alt manifoldlarıdır.

(iv) Herbir $(p,q) \in M' \times N$ için,

$\pi|_{M' \times q}$, $M' \times q$ dan M' ye diffeomorfizmdir.

$\sigma|_{p \times N}$, $p \times N$ den N ye diffeomorfizmdir.

(ii) den

$T_{(p,q)}M' \equiv T_{(p,q)}(M' \times q)$ ve $T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$ uzayları (p,q) da $M' \times N$ nin tanjant alt uzaylarıdır. Böylece

$$T_{(p,q)}(M' \times N) = T_{(p,q)}M' \oplus T_{(p,q)}N$$

dır. Buradan, her $X \in T_{(p,q)}M' \times N$ için $X_1 \in T_{(p,q)}M'$ ve $X_2 \in T_{(p,q)}N$

olmak üzere $X = X_1 + X_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

II.4.2. Tanım.[38] $M' \times N$, $m-$boyutlu bir manifold ve f, $M' \times N$ üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı olsun. Bu durumda,

$$f^2 = I$$

ise f ye hemen hemen çarpım yapı, $(M' \times N, f)$ ikilisine de hemen hemen çarpım manifoldu denir.

$(M' \times N, f)$ bir hemen hemen çarpım manifoldu olsun, bu durumda

$$P = \frac{1}{2}(I + f), \quad Q = \frac{1}{2}(I - f)$$

projeksiyonlarını seçelim. O zaman

$$P + Q = I, \;\; P^2 = P, \;\; Q^2 = Q, \;\; PQ = QP = 0, \;\; f = P - Q$$

dır. Kolayca görülürki $f^2 = I$ dır. Böylece P ve Q projeksiyonları global olarak distribüsyonlar tanımlar. f nin özdeğerleri ± 1 dır.

$M' \times N$ üzerinde her $X, Y \in T(M' \times N)$ için

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g_1(PX, PY) + g_2(QX, QY) \\ &= g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde g Riemann metriği tanımlanabilir. Böylece $(M' \times N, g)$ ikilisi bir Riemann manifoldu olur. $(M' \times N, g, f)$ üçlüsüne bir çarpım Riemann manifoldu adı verilir.

Yukarıda tanımlanan Riemann metriği açık olarak her $X, Y \in T(M' \times N)$ için

$$g(fX, fY) = g(X, Y) \tag{II.4.1}$$

veya

$$g(fX, Y) = g(X, fY) \tag{II.4.2}$$

şartlarını sağlar. $f^2 = I$ olduğundan $T(M' \times N)$ nin distribüsyonlarının integral altmanifoldları olan (M', g_1) ve (N, g_2) birer Riemann altmanifoldlarıdır, yani

$$TM' = \{X \in T(M' \times N) : fX = X\}$$

ve

$$TN = \{X \in T(M' \times N) : fX = -X\}$$

dır. O halde $T(M' \times N)$ nin dikey ve yatay distribüsyonlarının integral altmanifoldları sırasıyla olan (M', g_1) ve (N, g_2) Riemann manifoldlarıdır. Bundan sanraki kısımda $M' \times N$ yerine M kullanılacaktır.

II.4.3. Tanım.([28],[38]) M çarpım manifoldu, g ve f, M üzerinde sırasıyla Riemann metrik ve hemen hemen çarpım yapı olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y) = g(X, fY) \tag{II.4.3}$$

ile tanımlı tensöre, kompleks geometridekine benzer olarak temel 2-form denir. Burada, not edelimki bu tensör simetrik tensördür. Φ, M üzerinde temel 2-form olmak üzere

$$\Phi(fX, fY) = \Phi(X, Y) \tag{II.4.4}$$

dır.

II.4.4. Tanım.[38] (M, f, g) Hemen hemen çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X f = 0 \tag{II.4.5}$$

ise M ye **yerel çarpım Riemann manifoldu** denir, burada ∇ Levi-Civita konneksiyonudur.

II.4.1. Lemma.[1] (M, f, g) bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) $\nabla f = 0$,

(ii) $\nabla \Phi = 0$.

II.4.1. Teorem.[1] (M, f, g) bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

(i) $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$,

(ii) $R(fX, fY) = R(X, Y)$,

(iii) $R(X, fY) = R(fX, Y)$

dır, burada R hemen hemen çarpım Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörüdür.

Şimdi hemen hemen çarpım manifolduna bir örnek verilecektir.

II.4.1. Örnek. R^4 üzerindeki f nin matris gösterimini

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $f^2 = I$ dır. Dolayısıyla, f bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Bu nedenle (R^4, f) standart iç çarpımla birlikte bir hemen hemen çarpım manifoldudur.

II.5. Hemen Hemen Para-kontakt Manifoldlar

Bu altbölümde, dördüncü bölümde hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar arasında tanımlanan para-kontak semi-Riemann submersiyonun tanımında kullanılacak temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

II.5.1. Tanım.([10],[39]) M, $2m-$boyutlu bir manifold ve J, M üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı olsun. Bu durumda,

$$J^2 = I$$

ise J ye hemen hemen para-kompleks yapı, (M, J) ikilisine de hemen hemen para-kompleks manifoldu denir.

II.5.2. Tanım.[20],[39] M, (2m+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde, (1,1)-mertebeli tensör alanı φ, 1-form η ve bir vektör alanı ξ var ve aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (M, φ, η, ξ) ya **hemen**

hemen para-kontakt manifold ve (φ, η, ξ) ye de **hemen hemen para-kontakt yapı** denir.

$$\begin{aligned} \varphi^2 X &= X - \eta(X)\xi, \qquad X \in \chi(M); && \text{(II.5.1)} \\ \eta(\xi) &= 1. && \text{(II.5.2)} \end{aligned}$$

$D = ker\eta$, η ile üretilen yatay distribüsyon olsun. O zaman, φ tensör alanı D deki her lif üzerine bir hemen hemen para-kompleks yapı indirger.

II.5.1. Önerme.[24],[39] M bir hemen hemen para-kontakt manifold olsun. M üzerindeki (φ, η, ξ) hemen hemen para-kontakt yapısı için

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= 0, && \text{(II.5.3)} \\ \eta(\varphi X) &= 0, \qquad X \in \chi(M) && \text{(II.5.4)} \\ rank\varphi &= 2m && \text{(II.5.5)} \end{aligned}$$

dır.

Aşağıdaki lemma bir hemen hemen para-kontakt metrik manifold üzerinde semi-Riemann metriğinin varlığını garanti etmektedir.

II.5.1. Lemma.[39] M bir hemen hemen para-kontakt manifold olsun. Bu durumda, M üzerinde bir h semi-Riemann metriği vardır öyleki $\forall X \in \chi(M)$ için $h(X, \xi) = \eta(X)$ dır.

II.5.2. Önerme.([37],[39]) M bir hemen hemen para-kontakt manifold olsun. Bu durumda, M üzerinde bir g semi-Riemann metriği vardır öyleki $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi), \qquad \text{(II.5.6)}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y), \qquad \text{(II.5.7)}$$

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \qquad \text{(II.5.8)}$$

dır.

II.5.3. Tanım.[11],[39] M bir hemen hemen para-kontakt manifold olsun. Eğer M üzerinde Önerme II.5.2 de verilen g semi-Riemann metriği varsa, (φ, η, ξ) hemen hemen para-kontakt yapısına g, semi-Riemann metriği ile birleşen bir **hemen hemen para-kontakt metrik yapıdır** denir. $(M, g, \varphi, \eta, \xi)$ beşlisine de **hemen hemen para-kontakt metrik manifold** adı verilir. Bir hemen hemen para-kontakt yapı ile verilen g uyumlu metriğin işareti $(m+1, m)$ dir.

II.5.4. Tanım.[39] M, (2m+1)-boyutlu bir semi-Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0 \qquad \text{(II.5.9)}$$

olacak şekilde, global olarak tanımlı bir η 1-formu varsa, M manifolduna **para-kontakt manifold** denir. Burada m, m. mertebeden dış kuvveti göstirir. η ya M manifoldunun para-kontakt formu denir.

II.5.1. Teorem.[20] M, (2m+1)-boyutlu ve η para-kontakt yapılı bir manifold olsun. Bu durumda, M üzerinde

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X,Y) \qquad X, Y \in \chi(M) \qquad \text{(II.5.10)}$$

olacak şekilde (φ, ξ, η, g) hemen hemen para-kontakt metrik yapısı vardır. Burada,

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])), \qquad X, Y \in \chi(M) \qquad \text{(II.5.11)}$$

dır.

M üzerinde (φ, ξ, η, g) hemen hemen para-kontakt metrik yapısı için

$$\Phi(X,Y) = g(X, \varphi Y) \qquad X, Y \in \chi(M) \tag{II.5.12}$$

dır. Φ ye hemen hemen para-kontakt metrik yapının **temel 2-formu** denir. Ayrıca $rank\varphi = 2m$ ve $\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$ dır.

II.5.5. Tanım.[39] M, (2m+1)-boyutlu ve η para-kontakt yapılı bir manifold olsun. η para-kontakt formunda inşa edilmiş hemen hemen bir para-kontakt metrik yapıya **para-kontakt yapı,** manifolda da **para-kontakt metrik manifold** denir.

Şimdi, bir para-kontakt yapı yardımıyla oluşturulan bir hemen hemen para-kompleks yapının integrallenebilirliği incelenecektir. Oluşturulan hemen hemen para-kompleks yapının integrallenebilirliği yardımıyla para-kontakt yapı için normallik kavramına giriş yapılacaktır.

M, (2m+1)-boyutlu hemen hemen para-kontakt yapılı hemen hemen para-kontakt manifold olsun. $M \times R$ manifoldunu göz önüne alalım, burada R reel sayılar kümesini gösterir. $M \times R$ üzerinde bir vektör alanı $(X, f\frac{d}{dt})$ şeklinde verilsin. Burada X, M de bir tanjant vektör alanı, t, R de bir koordinat ve f, $M \times R$ de bir fonksiyondur.

$M \times R$ tanjant uzayında bir J lineer dönüşümünü

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}), \qquad X \in \chi(M) \tag{II.5.13}$$

şeklinde tanımlayalım. Kolayca görülürki $J^2 = I$ elde edilir. Böylece J, $M \times R$ üzerinde hemen hemen para-kompleks yapıdır. Hemen hemen para-kompleks yapı J nin N_J Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise J, $M \times R$ de integrallenebilirdir denir. Burada Nijenhuis tensörü

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \qquad \text{(II.5.14)}$$

ile verilir. $M \times R$ üzerinde hemen hemen para-kompleks yapı J integrallenebiliyorsa (φ, ξ, η) **hemen hemen para-kontakt yapıya normaldır** denir.

Aşağıdaki önerme bir para-kontakt manifoldun normal olmasını karakterize etmektedir.

II.5.3. Önerme.[39] M bir hemen hemen para-kontakt manifold olsun. Bu durumda, (φ, ξ, η) hemen hemen para-kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_\varphi(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi = 0 \qquad X, Y \in \chi(M) \qquad \text{(II.5.15)}$$

olmasıdır, burada N_φ Nijenhuis tensör alanıdır.

II.5.2. Lemma.[39] M nin bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen para-kontakt yapısı için φ nin kovaryant türevi

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= -d\Phi(X,Y,Z) - d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - N^{(1)}(Y,Z,\varphi X) \\ &+ N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &+ 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z), \qquad X,Y,Z \in \chi(M) \qquad \text{(II.5.16)} \end{aligned}$$

ile verilir, burada $N^{(1)} = N_\varphi - 2d\eta \otimes \xi$ ve

$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X \qquad \text{(II.5.17)}$$

dır.

II.5.3. Lemma.[39] $N^{(2)} = 0$ ve $\Phi = d\eta$ olması durumunda, M manifoldunun (φ, ξ, η, g) para-kontakt metrik yapısı için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= -N^{(1)}(Y, Z, \varphi X) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &+ 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) \end{aligned} \tag{II.5.18}$$

ve

$$\nabla_\xi \varphi = 0 \tag{II.5.19}$$

dır.

II.5.6. Tanım.[24] M, (2m+1)-boyutlu, (φ, ξ, η, g) para-kontakt yapılı para-kontakt metrik manifold olsun. ξ vektör alanı g ye göre Killing vektör alanı ise M üzerindeki para-kontakt yapıya $K-$parakontakt yapı ve M ye de $K-$parakontakt manifold denir. ξ vektör alanının, g ye göre Killing vektör alanı olması

$$(L_\xi g)(X, Y) = \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) \tag{II.5.20}$$

ile ifade edilir.

II.5.7. Tanım.[11],[39] M, (2m+1)-boyutlu, (φ, ξ, η, g) para-kontakt yapılı para-kontakt metrik manifold olsun. Eḡer M nin para-kontakt metrik yapısı normal ise M ye para-Sasakiyan yapıya sahip ve M manifolduna da para-sasakiyan manifold denir.

Para-Sasakiyan manifoldlar için aşağıdaki kullanışlı karakterizasyon elde edilir.

II.5.2. Teorem.[11] M bir hemen hemen para-kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M manifoldunun para-Sasakiyan olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X, \qquad X, Y \in \chi(M) \tag{II.5.21}$$

olmasıdır.
(II.5.21) den

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{II.5.22}$$

elde edilir.

Kontakt manifoldlardaki kosimplektik, hemen hemen kosimplektik, weakly kosimplektik, quasi-Sasakiyan manifoldlarının para-kontakt versiyonu literatörde tanımlandı ve incelendi.
Daha önce verilen normallik, para-kontakt, K-parakontakt, para-Sasakiyan manifoldları yeni sunulacak para-kosimplektik, quasi-para-Sasakiyan, weakly para-kosimplektik tanımları aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

II.5.8. Tanım.([11],[37],[39]) $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen para-kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda,

(a) $N_\varphi - 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise M ye **normal**,

(b) $\Phi = d\eta$ ise M ye **para-kontakt**,

(c) M para-kontakt ve ξ Killing ise M ye **K-parakontakt**,

(d) $\nabla\eta = 0$ ve $\nabla\Phi = 0$ ise M ye **para-kosimplektik,**

(f) $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 0$ ise M ye **hemen hemen para-kosimplektik,**

(g) M hemen hemen para-kosimplektik ve $[R(X,Y),\varphi] = R(X,Y)\varphi - \varphi R(X,Y) = 0$ ise M ye **weakly para-kosimplektik,**

(h) $\Phi = d\eta$ ve M normal ise M ye **para-Sasakiyan,**

(j) $d\Phi = 0$ ve M normal ise M ye **quasi-para-Sasakiyan manifold** denir.

II.5.9. Tanım.[39] (M, J) bir hemen hemen para-kompleks manifold ve g bir semi-Riemann metriği olsun. Bu durumda, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$g(JX, JY) = -g(X, Y)$$

ise (M, J, g) üçlüsüne bir **hemen hemen para-Hermityen manifold** denir.

II.5.1. Örnek. (x_1, x_2, y_1, y_2, z), R_2^5 te kartezyen koordinatlar olsun.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta = dz, \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

ve

$g = -2zdx_1^2 - 2zdx_2^2 + 2zdy_1^2 + 2zdy_2^2 + dz^2$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda, (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen para-kontakt metrik yapıdır. Dolayısıyla $(R_2^5, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen para-kontakt metrik manifolddur.

III. ÇARPIM MANİFOLDLAR ARASINDAKİ SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde hemen hemen Riemann çarpım manifoldları arasında hemen hemen çarpım Riemann Submersiyon tanımlanmakta ve bir örnek verilmektedir. Ayrıca bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlanmakta, bunların temel özellikleri incelenmekte ve hemen hemen çarpım submersiyonda total manifoldun yerel çarpım manifoldu olması durumunda baz manifoldunda yerel çarpım manifoldu olduğu gösterilmektedir. İkinci altbölümde bir hemen hemen çarpım Riemann Submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri araştırılmaktadır.

III.1. Hemen Hemen Çarpım Riemann Submersiyonlar

Bu altbölümde, hemen hemen çarpım Riemann submersiyon kavramına giriş yapılmakta ve bir örnek verilmektedir. Ayrıca bu submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanımlanmakta ve bunların temel özellikleri incelenmektedir.

III.1.1. Tanım. M ve B sırasıyla f ve f' hemen hemen çarpım yapılarına sahip hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda, $\pi : M \to B$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlıyorsa π ye bir **hemen hemen çarpım dönüşüm** denir:

$$\pi_* \circ f = f' \circ \pi_*. \tag{III.1.1}$$

Yukarıdaki tanım kullanılarak aşağıdaki kavram tanımlanmaktadır.

III.1.2. Tanım. (M, f, g) ve (B, g', f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda, $\pi : M \to B$ dönüşümü

(i) π bir Riemann submersiyon,

(ii) $\pi_* \circ f = f' \circ \pi_*$

şartlarını sağlıyorsa π dönüşümüne **hemen hemen çarpım Riemann submersiyonu** denir.

Aşağıda, yukarıda verilen bir hemen hemen çarpım Riemann submersiyonu için bir örnek verilmektedir.

III.1.1.Örnek. R^4 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. R^4 ve R^2 de örnek II.4.1 de verilen çarpım yapılarını gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \pi : R^4 &\to R^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\to \left(\frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}, \frac{2x_3 + x_4}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Burada, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $rank\pi_* = boyR^2 = 2$ bulunur. Böylece π bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \text{çek}\pi_* = Span\{V_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2}, V_2 = -\frac{\partial}{\partial x_3} + 2\frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\text{çek}\pi_*)^{\perp} = Span\{X = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = 2\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\pi_*(X) = \sqrt{5}\frac{\partial}{\partial x_1'} \quad ve \quad \pi_*(Y) = \sqrt{5}\frac{\partial}{\partial x_2'}$$

dır. Böylece R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g(X, X) = g(Y, Y) = 5, g'(\pi_* X, \pi_* X) = g'(\pi_* Y, \pi_* Y) = 5$$

olur. Böylece π bir Riemann submersiyonudur. Ayrıca kolayca görülürki

$$\pi_* f X = f' \pi_* X$$

ve

$$\pi_* f Y = f' \pi_* Y$$

denklemleri sağlanır. Dolayısıyla, π bir hemen hemen çarpım Riemann submersiyonudur.

III.1.1. Önerme. (M, f, g) ve (B, g', f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, fX temel vektör alanı $f'X'$ ne $\pi-$bağlıdır.

İspat. X temel vekör alanı olsun. Tanım II.3.6 ve (III.1.1) den,

$$\pi_* f X = f' \pi_* X = f' X'$$

elde edilir. Yani, M üzerindeki fX temel vektör alanı B üzerindeki $f'X'$ vektör alanına $\pi-$bağlıdır.

III.1.2. Önerme. (M, f, g) ve (B, g', f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay ve dikey distribüsyonlar $f-$invaryanttır.

İspat. U herhangi bir dikey vektör alanı olsun. Buradan $\pi_*(fU) = f'(\pi_*U)$ bulunur. $\pi_*U = 0$ olduğundan, $\pi_*(fU) = 0$ elde edilir. Böylece fU bir dikey vektör alanıdır. X yatay vektör alanı ve U dikey vektör alanı olsun. Hemen hemen çarpım Riemann manifoldunun tanımından, $g(fX, U) = g(X, fU)$ elde edilir. Bu durumda, $fU \in \Gamma(\mathcal{V})$ olduğundan, $g(fX, U) = 0$ dır. Böylece fX yatay vektör alanıdır. Dolayısıyla, yatay ve dikey distribüsyonlar $f-$invaryanttır.

Aşağıdaki teoremde bir hemen hemen çarpım submersiyonunun baz manifoldunun çarpım yapısı üzerindeki etkisi incelenmektedir.

III.1.1. Teorem. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. O zaman, (B, g', f') de bir yerel çarpım Riemann manifoldudur.

İspat. Herhangi bir $X, Y \in \Gamma(TM)$ için, $\pi_*X = X', \pi_*Y = Y'$ olur, burada $X', Y' \in \Gamma(TB)$ dır. M bir yerel çarpım manifold olduğundan, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için,

$$(\nabla_X f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y$$

elde edilir. Böylece (III.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\pi_*((\nabla_X f)Y) = \pi_*(\nabla_X fY) - f'\pi_*(\nabla_X Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Önerme III.1.2 den, $fY \in \Gamma(\mathcal{H})$ elde edilir. Buradan, Önerme II.3.1(iii) den $\nabla_X fY$ ile $\nabla'_{X'} f'Y'$ vektör alanlarının $\pi-$bağlı olduğu kullanılırsa

$$\pi_*((\nabla_X f)Y = \nabla'_{X'} f'Y' - f'\pi_*(\nabla_X Y)$$

dır. Buradan, $\nabla_X Y$ ile $\nabla'_{X'} Y'$ vektör alanlarının $\pi-$bağlı olduğu gözönüne alalım.

$$\pi_*((\nabla_X f)Y = \nabla'_{X'} f'Y' - f'\nabla'_{X'} Y'$$

olur. Böylece,

$$\pi_*((\nabla_X f)Y) = (\nabla'_{X'} f')Y'$$

elde edilir. Yani, M bir yerel çarpım manifold ise B de bir yerel çarpım manifoldur.

III.1.1. Sonuç. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, lifler yerel çarpım Riemann manifoldlarıdır.

İspat. Önerme III.1.2 den dikey distribüsyon invaryanttır. Böylece dikey distribüsyonun integral altmanifoldu olan bir lif hemen hemen çarpım manifoldudur. Diğer taraftan, lifler üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\hat{\nabla}$ ile gösterelim. M yerel çarpım manifoldu olduğundan, $U, V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$(\nabla_U f)V = (\hat{\nabla}_U f)V$$

dır. Böylece $\nabla f = 0$ ve $\nabla' f = 0$ olduğundan $\hat{\nabla} f = 0$ bulunur. Yani M bir yerel çarpım manifoldu ise liflerde yerel çarpım Riemann manifoldudur.

III.1.3. Önerme. (M, f, g) ve (B, g', f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, $\pi^*\Phi' = \Phi$ dır. Burada, Φ ve Φ' sırasıyla M ve B ye ait temel 2-formlardır.

İspat. M üzerindeki X ve Y temel vektör alanları B üzerindeki X' ve Y' ne $\pi-$bağlı olsun. O zaman, hemen hemen çarpım Riemann submersiyonun tanımından,

$$\begin{aligned} \pi^*\Phi'(X, Y) &= \Phi'(\pi_* X, \pi_* Y) \\ &= g'(\pi_* X, f'\pi_* Y) \\ &= g'(\pi_* X, \pi_* f Y) \end{aligned}$$

dır. π bir Riemann submersiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} \pi^*\Phi'(X, Y) &= g(X, fY) \\ &= \Phi(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\pi^*\Phi' = \Phi$ dır.

III.1.1. Lemma. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$, $U, V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için,

(i) $A_X fY = fA_X Y$,

(ii) $T_U fV = fT_U V$,

(iii) $A_X fU = fA_X U$,

(iv) $T_U fX = fT_U X$

dır.

İspat. (i) ve (ii) şıklarını ispatlayacağız. Diğerleri benzer yolla elde edilebilir. (i) Yerel çarpım Riemann manifoldunun uygulamasından,

$$(\nabla_X f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y = 0$$

veya

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y$$

elde edilir. (II.3.12) denklemi kullanılırsa,

$$A_X fY + h\nabla_X fY = f\{A_X Y + h\nabla_X Y\}$$

olur. Böylece karşılıklı dikey ve yatay bileşenlerin eşitliğinden

$$A_X fY = fA_X Y$$

elde edilir.

(ii) Benzer bir yolla, (II.3.9) denklemi kullanılırsa,

$$T_U fV + v\nabla_U fV = f\{T_U V + v\nabla_U V\}$$

olur. Böylece karşılıklı dikey ve yatay bileşenlerin eşitliğinden

$$T_U fV = fT_U V$$

elde edilir.

III.1.2. Lemma. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$, $U, V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için,

(i) $A_{fX} fY = A_X Y$,

(ii) $T_{fU} fV = T_U V$

(iii) $A_{fX} Y = f A_X Y$,

(iv) $T_{fU} V = f T_U V$,

dır.

İspat. (i) ve (ii) şıklarını ispatlayacağız. Diğerleri benzer yolla elde edilebilir.
(i) Yerel çarpım Riemann manifoldunun uygulamasından,

$$(\nabla_{fX} f)Y = \nabla_{fX} fY - f\nabla_{fX} Y = 0$$

veya

$$\nabla_{fX} fY = f\nabla_{fX} Y$$

elde edilir. (II.3.12) denklemi kullanılırsa,

$$A_{fX} fY + h\nabla_{fX} fY = f\{A_{fX} Y + h\nabla_{fX} Y\}$$

olur. Böylece karşılıklı dikey ve yatay bileşenlerin eşitliğinden

$$A_{fX} fY = f A_{fX} Y$$

elde edilir. A anti-simetrik olduğundan, Lemma III.1.1(i) kullanılırsa

$$A_{fX} fY = A_X Y$$

bulunur.

(ii) Benzer olarak, (II.3.9) denklemi kullanılırsa,

$$T_{fU} fV + v\nabla_{fU} fV = f\{T_{fU} V + v\nabla_{fU} V\}$$

olur. Böylece karşılıklı dikey ve yatay bileşenlerin eşitliğinden

$$T_{fU} fV = f T_{fU} V$$

elde edilir. T simetrik ve Lemma III.1.1(ii) kullanılırsa

$$T_{fU} fV = T_U V$$

bulunur.

III.1.2.Teorem. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g(A_X fV, fY) = g(A_Y fV, fX)$ olmasıdır.

İspat. X ve Y, M üzerinde temel vektör alanları ve V dikey vektör alanı olmak üzere,

$$g([X, Y], V) = g(\nabla_X Y, V) - g(\nabla_Y X, V)$$

dır. M bir çarpım manifoldu olduğundan

$$g([X, Y], V) = g(f\nabla_X Y, fV) - g(f\nabla_Y X, fV)$$

olur. Total manifold yerel çarpım manifold olduğundan

$$g([X,Y],V) = g(\nabla_X fY, fV) - g(\nabla_Y fX, fV)$$

elde edilir. fV ve fY dik olduklarından

$$g([X,Y],V) = -g(\nabla_X fV, fY) + g(\nabla_Y fV, fX)$$

dır. Buradan

$$g([X,Y],V) = -g(\nabla_{fV} X + [X, fV], fY) + g(\nabla_{fV} Y + [Y, fV], fX)$$

olur. Burada, $[X, fV]$ ve $[Y, fV]$ dikey vektör alanları olduğundan

$$g([X,Y],V) = -g(\nabla_{fV} X, fY) + g(\nabla_{fV} Y, fX)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (II.3.13) den, $h(\nabla_V X) = h(\nabla_X V) = A_X V$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} g([X,Y],V) &= -g(\nabla_X fV, fY) + g(\nabla_Y fV, fX) \\ &= -g(A_X fV, fY) + g(A_Y fV, fX) \end{aligned}$$

olur. (II.3.8) den

$$g(2A_X Y, V) = -g(A_X fV, fY) + g(A_Y fV, fX)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

III.1.3.Teorem. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (B, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to B$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, liflerin total jeodezik olması için gerek ve yeter şart $g(fV, [U, fX]) = g([fX, V], fU)$ olmasıdır.

İspat. U ve V, M üzerinde dikey vektör alanları ve X yatay vektör alanı olsun. Yerel çarpım manifoldunun tanımından

$$g(\nabla_U V, X) = g(\nabla_U fV, fX)$$

olur. Bu ifadede fV ile fX birbirine dik olduklarından

$$g(\nabla_U V, X) = -g(\nabla_U fX, fV)$$

dır. Böylece ifade düzenlenirse

$$g(\nabla_U V, X) = -g([U, fX] + \nabla_{fX} U, fV)$$

elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_U V, X) = -g(fV, [U, fX]) - g(fV, \nabla_{fX} U)$$

dır. M bir yerel çarpım manifoldu olduğundan

$$g(\nabla_U V, X) = -g(fV, [U, fX]) - g(V, \nabla_{fX} fU)$$

olur. Tekrar M manifoldunun yerel çarpım manifoldu olduğu gözönüne alınırsa

$$g(\nabla_U V, X) = -g(fV, [U, fX]) + g(fU, \nabla_{fX} V)$$

elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_U V, X) = -g(fV, [U, fX]) + g(fU, [fX, V] + \nabla_V fX)$$

olur. Böylece yerel çarpım yapısından

$$\begin{aligned} g(\nabla_U V, X) &= -g(fV, [U, fX]) + g(fU, [fX, V]) + g(U, \nabla_V X) \\ &= -g(fV, [U, fX]) + g(fU, [fX, V]) - g(X, \nabla_V U) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$g(\nabla_U V + \nabla_V U, X) = -g(fV, [U, fX]) + g(fU, [fX, V])$$

dır. T tensörünün tanımı ve simetriliği kullanılırsa

$$2g(T_U V, X) = -g(fV, [U, fX]) + g(fU, [fX, V])$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

III.2. Hemen Hemen Çarpım Riemann Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri

Bu altbölümde, bir hemen hemen çarpım Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmektedir.

Aksi belirtilmedikçe, X birim vektör alanı için $\{X, fX\}$ yi lineer bağımsız varsayacağız. Bu durum için [29] kaynağa bakılabilir.

(M, f, g) ve (N, f', g') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. $f-$invaryant bi-kesit eğriliğini B ile gösterelim. Sıfırdan farklı herhangi bir $X, Y \in \Gamma(TM$ için, $f-$invaryant bi-kesit eğriliği

$$B(X, Y) = \frac{R(X, fX, Y, fY)}{\|X\|^2 \|Y\|^2}$$

ile tanımlanır. $f-$invaryant kesit eğriliği de $H(X) = B(X, X)$ ile verilir. Bu bölümde sırasıyla N nin $f-$invaryant bi-kesit ve kesit eğriliğini B' ve H', lifin ise $f-$invaryant bi-kesit ve kesit eğriliğini $\hat{B}$ ve $\hat{H}$ ile ifede edeceğiz.

III.2.1. Önerme. (M,f,g) ve (N,g',f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M üzerindeki U ve V birim dikey vektör ve X ve Y birim yatay vektör alanları için,

$$\begin{aligned} B(U,V) &= \hat{B}(U,V) + g(T_U fV, T_{fU}V) - g(T_{fU} fV, T_U V); && \text{(III.2.1)}\\ B(X,U) &= g((\nabla_U A)_X fX, fU) - g((\nabla_{fU} A)_X fX, U) \\ &+ g(A_X U, A_{fX} fU) - g(A_X fU, A_{fX} U) \\ &- g(T_U X, T_{fU} fX) + g(T_{fU} X, T_U fX); && \text{(III.2.2)}\\ B(X,Y) &= B'(X',Y') \circ \pi - 2g(A_X fX, A_Y fY) \\ &+ g(A_{fX} Y, A_X fY) - g(A_X Y, A_{fX} fY) && \text{(III.2.3)} \end{aligned}$$

dır.

İspat. Bu formüller, (II.3.14), (II.3.15) ve (II.3.16) denklemlerinin direkt uygulamalarından elde edilir.

III.2.2. Önerme. (M,f,g) ve (N,g',f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M üzerindeki U birim dikey vektör ve X birim yatay vektör alanları için,

$$H(U) = \hat{H}(U) + \|T_U fU\|^2 - g(T_{fU} fU, T_U U); \qquad \text{(III.2.4)}$$

$$H(X) = H'(X') \circ \pi - 3\|A_X fX\|^2 \qquad \text{(III.2.5)}$$

dır.

İspat. (III.2.1) ve (III.2.3) denklemlerinden elde edilir.

(III.2.5) denkleminin uygulamasından aşağıdaki sonuç elde edilir.

III.2.1. Sonuç. (M, f, g) ve (N, g', f') hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar, $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda $H(X) \leq H'(X') \circ \pi$ dır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul yatay distribüsyonun integrallenebilir olmasıdır.

III.2.1. Teorem. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (N, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M üzerindeki U ve V birim dikey vektör ve X ve Y birim yatay vektör alanları için,

(a) $B(U, V) = \hat{B}(U, V)$;

(b) $B(X, U) = 0$;

(c) $B(X, Y) = B'(X', Y') \circ \pi - 2g(A_X fX, A_Y fY)$

dır.

İspat.(a) (III.2.1) den

$$B(U, V) = \hat{B}(U, V) + g(T_U fV, T_{fU} V) - g(T_{fU} fV, T_U V)$$

dır. Lemma III.1.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T_U fV, T_{fU} V) &= g(fT_U V, fT_U V) \\ &= g(T_U V, T_U V) \\ &= \|T_U V\|^2 \end{aligned} \tag{III.2.6}$$

elde edilir. Benzer olarak, Lemma III.1.2 ve Lemma III.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(T_{fU}fV, T_U V) &= g(f^2 T_U V, T_U V) \\ &= g(T_U V, T_U V) \\ &= \|T_U V\|^2 \end{aligned} \tag{III.2.7}$$

bulunur. (III.2.6) ve (III.2.7) denklemlerinin uygulanmasından, $B(U, V) = \hat{B}(U, V)$ elde edilir. Yani, M nin bi-kesit eğriliği, lifin bi-kesit eğriliğine eşittir.

(b) (III.2.2) denkleminden,

$$\begin{aligned} (b)B(X, U) &= g((\nabla_U A)_X fX, fU) - g((\nabla_{fU} A)_X fX, U) \\ &+ g(A_X U, A_{fX} fU) - g(A_X fU, A_{fX} U) \\ &- g(T_U X, T_{fU} fX) + g(T_{fU} X, T_U fX) \end{aligned} \tag{III.2.8}$$

olur. Lemma III.1.1 ve Lemma III.1.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} -g(T_U X, T_{fU} fX) + g(T_{fU} X, T_U fX) &= -g(T_U X, f^2 T_U X) + g(fT_U X, fT_U X) \\ &= -\|T_U X\|^2 + \|T_U X\|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{III.2.9}$$

elde edilir. Benzer bir yolla,

$$g(A_X U, A_{fX} fU) - g(A_X fU, A_{fX} U) = 0 \tag{III.2.10}$$

bulunur. Böylece, (III.2.9) ve (III.2.10) denklemlerinden, (III.2.8) denklemi

$$B(X, U) = g((\nabla_U A)_X fX, fU) - g((\nabla_{fU} A)_X fX, U) \tag{III.2.11}$$

olur.

Diğer taraftan, X temel vekör alanı iken

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V$$

dır. Buradan, ∇A tensör alanının tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g((\nabla_U A)_X fX, fU) &= g(\nabla_U A_X fX, fU) - g(A_{\nabla_U X} fX, fU) \\ &- g(A_X \nabla_U fX, fU) \end{aligned}$$

dır. A tensörünün alteneleyen ve anti-simetriliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_U A)_X fX, fU) &= g(\nabla_U A_X fX, fU) - g(A_{fX} fU, h\nabla_U X) \\ &- g(A_X fU, h\nabla_U fX) \qquad \text{(III.2.12)} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer bir yolla,

$$\begin{aligned} g((\nabla_{fU} A)_X fX, U) &= g(\nabla_U A_X fX, fU) - g(A_{\nabla_U X} fX, fU) \\ &-g(A_X \nabla_U fX, fU) \qquad \text{(III.2.13)} \end{aligned}$$

dır. (III.2.12) ve (III.2.13) den, $B(X, U) = 0$ dır.

(c) (III.2.3) den

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= B'(X', Y') \circ \pi - 2g(A_X fX, A_Y fY) \\ &+ g(A_{fX} Y, A_X fY) - g(A_X Y, A_{fX} fY) \qquad \text{(III.2.14)} \end{aligned}$$

olur. Lemma III.1.1 ve Lemma III.1.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_{fX} Y, A_X fY) &= g(fA_X Y, fA_X Y) \\ &= g(A_X Y, A_X Y) \\ &= \|A_X Y\|^2 \qquad \text{(III.2.15)} \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
g(A_XY, A_{fX}fY) &= g(A_XY, f^2A_XY) \\
&= g(A_XY, A_XY) \\
&= \|A_XY\|^2 \qquad \text{(III.2.16)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (III.2.15) ve (III.2.16) denklemleri (III.2.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$B(X,Y) = B'(X',Y') \circ \pi - 2g(A_XfX, A_YfY)$$

bulunur.

Teorem III.2.1 in bir sonucu olarak, aşağıdaki ifedelere sahibiz.

III.2.2. Sonuç. (M, f, g) bir yerel çarpım manifold, (N, g', f') bir hemen hemen çarpım Riemann manifold ve $\pi : M \to N$ hemen hemen çarpım Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M üzerindeki U birim dikey vektör ve X birim yatay vektör alanları için,

(a) $H(U) = \hat{H}(U)$;

(b) $H(X) = H'(X') \circ \pi - 2\|A_XfX\|^2$

dır.

IV. PARA-KONTAKT MANİFOLDLAR ARASINDAKİ SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde hemen hemen para-kontakt metrik manifoldları arasında para-kontakt semi-Riemann Submersiyon tanımlanmakta, bir örnek verilmekte ve Riemann submersiyon incelenmesinde önemli bir yere sahip olan O'Neill tensörlerinin bazı özellikleri incelenmektedir. Ayrıca bir para-kontakt submersiyon için yatay distribüsyonun integrallenebilir ve liflerin total jeodezik olduğu gösterilmektedir. İkinci altbölümde, yapıların trasferi ile ilgili sonuçlar elde edilmektedir. Üçüncü altbölümde ise, bir para-kontakt semi-Riemann Submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenmektedir.

IV.1. Para-kontakt semi-Riemann Submersiyonlar

Bu altbölüme, holomorfik dönüşümün para-kontakt manifoldlardaki versiyonu olarak sunulan para-holomorfik tanımı ile başlanmaktadır.

IV.1.1. Tanım. M^{2m+1} ve B^{2n+1} sırasıyla (φ, ξ, η, g) ve $(\varphi', \xi', \eta', g')$ hemen hemen para-kontakt metrik yapılarına sahip hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar olsun. Bu durumda, $\pi : M \to B$ dönüşümü için

$$\pi_* \circ \varphi = \varphi' \circ \pi_* \tag{IV.1.1}$$

şartı sağlanıyorsa π ye bir $(\varphi, \varphi')-$**paraholomorfik dönüşüm** denir.

Yukarıdaki tanım kullanılarak aşağıdaki kavram verilebilir.

IV.1.2. Tanım. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ve $(B, \varphi', \xi', \eta', g')$ hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar olsun. Bu durumda, $\pi : M \to B$ dönüşümü

(i) π bir semi-Riemann submersiyon, yani lifler non-dejenere altmanifoldlardır.

(ii) $\pi_* \xi = \xi'$,

(iii) $\pi_* \circ \varphi = \varphi' \circ \pi_*$

şartlarını sağlıyorsa π ye bir **para-kontakt semi-Riemann submersiyon** denir.

Aşağıda bir para-kontakt submersiyon için basit ve açıklayıcı bir örnek verilmektedir.

IV.1.1.Örnek. R_2^5 ve R_1^3 standart iç çarpımlar ile birlikte semi-öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi : R_2^5 &\to R_1^3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, z) &\to \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}}, z\right) \end{aligned}$$

dönüşümünü gözönüne alalım, burada, $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z\}$ ile R_2^5 in bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \c{c}ek\pi_* = Span\{V_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, V_2 = -\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\c{c}ek\pi_*)^{\perp} = Span\{X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}, \xi = \frac{\partial}{\partial z}\}$$

elde edilir. Buradan,

$$\pi_*(X) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \pi_*(Y) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial y} ve \quad \pi_*(\xi) = \frac{\partial}{\partial z'} = \xi'$$

bulunur. Böylece R_2^5 ve R_1^3 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g(X,X) = g'(\pi_*X, \pi_*X) = -4z, \quad g(Y,Y) = g'(\pi_*Y, \pi_*Y) = 4z$$

ve

$$g(\xi,\xi) = g'(\pi_*\xi, \pi_*\xi) = 1$$

elde edilir. Böylece, π bir semi-Riemannnian submersiyondur. Ayrıca, kolayca görülürki

$$\begin{aligned} \pi_*\varphi X &= \varphi'\pi_*X, \\ \pi_*\varphi Y &= \varphi'\pi_*Y \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Dolayısıyla, π bir para-kontakt semi-Riemann submersiyondur. Not edelimki bu örnekte verilen R_2^5 ve R_1^3 üzerindeki para-kontakt yapılar Örnek II.5.1 de verilen para-kontakt yapılardır.

Aşağıdaki önermelerde para-kontakt yapı ile $\pi-$bağlı olma durumu arasındaki ilişki araştırılmaktadır.

IV.1.1. Önerme. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ve $(B, \varphi', \xi', \eta', g')$ hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M üzerindeki φX temel vektör alanı B üzerindeki $\varphi' X'$ ne $\pi-$bağlıdır.

İspat. X temel vekör alanı olsun. Tanım II.3.6 ve (IV.1.1) den,

$$\pi_* \varphi X = \varphi' \pi_* X = \varphi' X'$$

elde edilir. Yani, M üzerindeki φX temel vektör alanı B üzerindeki $\varphi' X'$ ne $\pi-$bağlıdır.

IV.1.2. Önerme. M ve B hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. M üzerindeki X ve Y temel vektör alanları B üzerindeki X', Y' ne $\pi-$bağlı ise, bu durumda $h(\nabla_X \varphi)Y$ temel vektör alanı $(\nabla'_{X'} \varphi')Y'$ ne $\pi-$bağlıdır.

İspat. Doğrudan işlemlerle,

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = \pi_*(\nabla_X \varphi Y) - \pi_*(\varphi \nabla_X Y)$$

olur. π bir para-holomorfik dönüşüm olduğundan

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = \pi_*(\nabla_X \varphi Y) - \varphi' \pi_*(\nabla_X Y)$$

elde edilir. (II.3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \pi_*((\nabla_X \varphi)Y) &= \pi_*(A_X \varphi Y) + \pi_*(h \nabla_X \varphi Y) - \varphi' \pi_*(A_X Y) \\ &- \varphi' \pi_*(h \nabla_X Y) \end{aligned}$$

olur. $A_X \varphi Y \in \Gamma(\mathcal{V})$ olduğundan

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = \pi_*(h \nabla_X \varphi Y) - \varphi' \pi_*(h \nabla_X Y)$$

elde edilir. Burada, Önerme II.3.1(iii) kullanılırsa

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = \nabla'_{\pi_* X} \pi_* \varphi Y - \varphi'(\nabla'_{X'} Y')$$

olur. Tekrar, π dönüșümün para-holomorfik olmasından

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = \nabla'_{X'} \varphi' Y' - \varphi' \nabla'_{X'} Y'$$

dır. Böylece

$$\pi_*((\nabla_X \varphi)Y) = (\nabla'_{X'} \varphi')Y'$$

elde edilir. Yani, $h(\nabla_X \varphi)Y$ temel vektör alanı $(\nabla'_{X'} \varphi')Y'$ ne $\pi-$bağlıdır.

III.1.3. Önerme. M ve B hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay ve dikey distribüsyonlar $\varphi-$invaryanttır.

İspat. U herhangi bir dikey vektör alanı olsun. Buradan $\pi_*(\varphi U) = \varphi'(\pi_* U) = 0$ dır. U dikey ve π bir semi-Riemann submersiyon oduğundan, $\pi_* U = 0$ dır. Böylece, $\pi_*(\varphi U) = 0$ bulunur. Dolayısıyla φU dikeydir. X yatay vektör alanını gözönüne alalım. Buradan $g(\varphi X, U) = g(X, \varphi U) = 0$ bulunur. Çünkü φU dikey ve X yataydır. Böylece, $g(\varphi X, U) = 0$ dır. Yani φX, U ya ortogonaldır. O zaman, φX yataydır.

III.1.4. Önerme. M ve B hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

(i) $\pi^* \Phi' = \Phi$;

(ii) $\pi^* \eta' = \eta$

dır.

İspat.(i) M üzerindeki X ve Y temel vektör alanları B üzerindeki X', Y' ne $\pi-$bağlı olsun. O zaman, bir para-kontakt semi-Riemann submersiyonun tanımından,

$$\begin{aligned}\pi^*\Phi'(X,Y) &= \Phi'(\pi_*X, \pi_*Y) \\ &= g'(\pi_*X, \varphi'\pi_*Y)\end{aligned}$$

olur. π para-holomorfik dönüşüm olduğundan,

$$\pi^*\Phi'(X,Y) = g'(\pi_*X, \pi_*\varphi Y)$$

dır. Diğer taraftan, π semi-Riemann submersiyon olduğundan,

$$\pi^*\Phi'(X,Y) = g(X, \varphi Y)$$

elde edilir. Buradan,

$$\pi^*\Phi'(X,Y) = \Phi(X,Y)$$

dır. Dolayısıyla, $\pi^*\Phi' = \Phi$ dır.

(ii) X temel vektör alanı olsun. $\pi_*\eta'$ durumunu gözönüne alalım. Buradan

$$\pi_*\eta'(X) = \eta'(\pi_*X)$$

dır. (II.5.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\pi_*\eta'(X) &= g'(\pi_*X, \xi') \\ &= g'(\pi_*X, \pi_*\xi)\end{aligned}$$

elde edilir. π bir semi-Riemann submersiyon olduğundan

$$
\begin{aligned}
\pi_*\eta'(X) &= \pi^*g'(X,\xi) \\
&= g(X,\xi)
\end{aligned}
$$

dır. Tekrar (II.5.6) denklemi kullanılırsa

$$\pi^*\eta'(X) = \eta(X)$$

dır ve böylece $\pi^*\eta' = \eta$ elde edilir.

Not edelimki ξ yatay vektör alanı olduğundan, herhangi bir U dikey vektör alanı için, $\eta(U) = 0$ dır.

Şimdi bir para-kontakt submersiyonda O'Neill tensörlerinin özellikleri incelenecektir.

IV.1.1. Lemma. M para-kosimplektik manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. X ve Y yatay vektör alanları için,

(i) $A_X\varphi Y = \varphi A_X Y$,

(ii) $A_{\varphi X}Y = \varphi A_X Y$,

(iii) $A_X\varphi Y = A_{\varphi X}Y$

dır.

İspat. (i) X ve Y yatay vektör alanları ve U dikey olsun. M bir Para-kosimplektik manifold olduğundan, $(\nabla_X \Phi)(Y, U) = 0$ dır. Bu ifade açılırsa

$$g(\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y, U) = 0$$

dır. Buradan, dikey ve yatay distribüsyonlar φ invaryant olduğundan, (II.3.12) denklemi kullanılırsa,

$$g(A_X \varphi Y - \varphi A_X Y, U) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$A_X \varphi Y = \varphi A_X Y$$

dır.

(ii) Benzer olarak, A tensörü alterneleyen olduğundan, (i) kullanılırsa

$$A_{\varphi X} Y = -A_Y \varphi X = -\varphi A_Y X$$

elde edilir. Buradan,

$$A_{\varphi X} Y = \varphi A_X Y$$

dır.

(iii) (i) ve (ii) den açıktır.

T tensör alanının özellikleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

IV.1.2. Lemma. M para-kosimplektik manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. U ve V dikey vektör alanları için,

(i) $T_U \varphi V = \varphi T_U V$,

(ii) $T_{\varphi U} V = \varphi T_U V$,

(iii) $T_U \varphi V = T_{\varphi U} V$

dır.

İspat. (i) U ve V dikey vektör alanları ve X yatay olsun. M bir Para-kosimplektik manifold olduğundan, $(\nabla_U \Phi)(V, X) = 0$ dır. Bu ifade açılırsa

$$g(\nabla_U \varphi V - \varphi \nabla_U V, X) = 0$$

dır. Buradan, dikey ve yatay distribüsyonlar φ invaryant olduğundan, (II.3.9) denklemi kullanılırsa,

$$g(T_U \varphi V - \varphi T_U V, X) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$T_U \varphi V = \varphi T_U V$$

dır.

(ii) Benzer yolla, T temel tensörü simetrik olduğundan ve (i) kullanılırsa

$$T_{\varphi U} V = T_V \varphi U = \varphi T_V U$$

elde edilir. Buradan,

$$T_{\varphi U} V = \varphi T_U V$$

dır.

(iii) (i) ve (ii) den açıktır.

IV.1.3. Lemma. M quasi-para-Sasakian manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. X ve Y yatay vektör alanları için,

(i) $A_X \varphi Y = \varphi A_X Y,$

(ii) $A_{\varphi X} Y = \varphi A_X Y,$

(iii) $A_{\varphi X} Y = A_X \varphi Y$

dır.

İspat. (i) M üzerinde X temel vektör alanı, Y yatay vektör alanı ve U dikey vektör alanı olsun. Bir quasi-para-Sasakian manifold olduğundan para-kontakt yapı normal ve $d\Phi = 0$, dolayısıyla $N^1 = N^2 = 0$ dır. Böylece (II.5.16) denklemi,

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)Y, U) &= -d\eta(\varphi U, X)\eta(Y) + d\eta(\varphi Y, X)\eta(U) \\ &= -d\eta(\varphi U, X)\eta(Y) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $[\varphi U, X] \in \Gamma(\mathcal{V})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi U, X)\eta(Y) &= (\varphi U \eta(X) - X\eta(\varphi U) - \eta([\varphi U, X]))\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Böylece, (II.3.12) den

$$g(A_X\varphi Y - \varphi A_X Y, U) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$A_X\varphi Y = \varphi A_X Y$$

dır.

(ii) Benzer olarak, A tensörü alterneleyen olduğundan ve (i) kullanılırsa

$$A_{\varphi X}Y = -A_Y\varphi X = -\varphi A_Y X$$

elde edilir. Buradan,

$$A_{\varphi X}Y = \varphi A_X Y$$

dır.

(iii) (i) ve (ii) den açıktır.

T temel tensör alanı için, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

IV.1.4. Lemma. M quasi-para-Sasakian manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. U ve V dikey vektör alanları için,

(i) $T_U\varphi V = \varphi T_U V$,

(ii) $T_{\varphi U}V = \varphi T_U V$

dır.

İspat. (i) M üzerinde X yatay vektör alanı, U ve V dikey vektör alanları olsun. Bir quasi-para-Sasakian manifold için (II.5.16) denklemi,

$$\begin{aligned} g((\nabla_U\varphi)V, X) &= -d\eta(\varphi X, U)\eta(V) + d\eta(\varphi V, U)\eta(X) \\ &= d\eta(\varphi V, U)\eta(X) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $[\varphi V, U] \in \Gamma(\mathcal{V})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi V, U)\eta(X) &= (\varphi V\eta(U) - U\eta(\varphi V) - \eta([\varphi V, U]))\eta(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Böylece, (II.3.9) den

$$g(T_U\varphi V - \varphi T_U V, X) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$T_U\varphi V = \varphi T_U V$$

dır.

(ii) Benzer yolla, T temel tensörü simetrik ve (i) kullanılırsa

$$T_{\varphi U}V = T_V\varphi U = \varphi T_V U$$

elde edilir. Buradan,

$$T_{\varphi U}V = \varphi T_U V$$

dır.

Şimdi, yatay distribüsyonunun integrallenebilir olduğu durumları araştıracağız.

IV.1.1. Teorem. M hemen hemen para-kosimplektik manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay distribüsyon integrallenebilirdir.

İspat. M üzerinde X ve Y temel vektör alanları ve V dikey vektör alanı olsun. $v([X,Y]) = 0$ olduğunu ispatlayacağız. M bir hemen hemen para-kosimplektik manifold olduğundan, $d\Phi(X,Y,V) = 0$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} X(\Phi(Y,V)) - Y(\Phi(X,V)) + V(\Phi(X,Y)) \\ -\Phi([X,Y],V) + \Phi([X,V],Y) - \Phi([Y,V],X) = 0 \\ X(g(Y,\varphi V)) - Y(g(X,\varphi V)) + V(g(X,\varphi Y)) \\ -g([X,Y],\varphi V) + g([X,V],\varphi Y) - g([Y,V],\varphi X) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $[X,V],[Y,V]$ dikey ve iki distribüsyon $\varphi-$invaryant olduğundan, Önerme II.3.1(iv) den

$X(g(Y,V)), Y(g(X,V)), g([X,V],\varphi Y)$ ve $g([Y,V],\varphi X)$ terimleri sıfırdır. Böylece,

$$g([X,Y],\varphi V) = V(g(X,\varphi Y))$$

bulunur. Diğer taraftan,

(II.3.13) den $h(\nabla_V X) = h(\nabla_X V) = A_X V$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} V(g(X,\varphi Y)) &= g(\nabla_V X,\varphi Y) + g(\nabla_V \varphi Y, X) \\ &= g(A_X V,\varphi Y) + g(A_{\varphi Y} V, X) \end{aligned}$$

olur. A anti-simetrik ve alterneleyen operatör olduğundan,

$$
\begin{aligned}
V(g(X,\varphi Y)) &= -g(A_X\varphi Y, V) - g(A_{\varphi Y}X, V) \\
&= -g(A_X\varphi Y, V) + g(A_X\varphi Y, V) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $V(g(X,\varphi Y)) = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Bir quasi-para-Sasakian manifold için $d\Phi = 0$ dır. Teorem IV.1.1 in uygulamasından, aşağıdaki sonuç elde edilir.

IV.1.1. Sonuç. M bir quasi-para-Sasakian manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay distribüsyon integrallenebilirdir. Yani, $A = 0$ dır.

IV.1.2. Teorem. M bir para-kosimplektik manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, yatay distribüsyon tamamen integrallenebilirdir.

İspat. M üzerinde X temel vektör alanı, Y yatay vektör alanı ve U dikey vektör alanı olsun. Lemma IV.1.1 kullnılırsa,

$$g(A_{\varphi X}Y, U) = g(A_X\varphi Y, U)$$

elde edilir. A tensör alanı anti-simetrik olduğundan

$$g(A_{\varphi X}Y, U) = -g(A_X U, \varphi Y)$$

bulunur. Diğer taraftan, X temel iken $h\nabla_U X = h\nabla_X U = A_X U$ dır. Buradan,

$$g(A_{\varphi X}Y, U) = -g(h\nabla_U X, \varphi Y)$$

olur. (II.5.8) denklemi kullanılırsa

$$g(A_{\varphi X}Y, U) = g(\varphi\nabla_U X, Y)$$

elde edilir. M bir para-kosimplektik manifold olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_{\varphi X}Y, U) &= g(Y, h\nabla_U \varphi X) \\ &= g(Y, \nabla_{\varphi X} U) \end{aligned}$$

olur. (II.3.11) denklemi kullanılırsa

$$g(A_{\varphi X}Y, U) = g(A_{\varphi X}U, Y)$$

bulunur. A temel tensörünün anti-simetriliği tekrar kullanılırsa, $2g(A_{\varphi X}Y, U) = 0$ elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

IV.1.3. Tanım. $(M^{2m+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ bir hemen hemen para-kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda, bir $X \in \Gamma(TM)$ için $(\mathcal{L}_X \varphi) = 0$ ise X vektör alanına $\varphi-$tensör alanının infinitezimal otomorfizmi denir, burada $\mathcal{L}_X$, X vektör alanına göre Lie türevini göstermektedir.

IV.1.3. Teorem. M bir hemen hemen para-kosimplektik manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, X yatay vektör alanı $\varphi-$tensör alanının infinitezimal otomorfizmi ise, o zaman lifler total jeodeziktir.

İspat. M üzerinde W ve V dikey vektör alanları X yatay olsun. M bir hemen hemen para-kosimplektik manifold oldūgundan, $d\Phi = 0$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} 0 &= d\Phi(W, \varphi V, X) = W(\Phi(\varphi V, X)) - \varphi V(\Phi(W, X)) + X(\Phi(W, \varphi V)) \\ &- \Phi([W, \varphi V], X) + \Phi([W, X], \varphi V) - \Phi([\varphi V, X], W) \end{aligned}$$

olur. Temel 2-formun tanımından,

$$\begin{aligned} 0 &= d\Phi(W, \varphi V, X) = W(g(\varphi V, \varphi X)) - \varphi V(g(W, \varphi X)) + X(g(W, \varphi^2 V)) \\ &- g([W, \varphi V], \varphi X) + g([W, X], \varphi^2 V) - g([\varphi V, X], \varphi W) \end{aligned}$$

elde edilir. $[W, \varphi V]$ dikey ve iki distribüsyon $\varphi-$invaryant oldūgundan, $W(g(\varphi V, \varphi X))$, $\varphi V(g(W, \varphi X))$ ve $g([W, \varphi V], \varphi X)$ terimleri sıfırdır. Böylece,

$$X(g(W, \varphi^2 V)) + g([W, X], \varphi^2 V) - g([\varphi V, X], \varphi W) = 0$$

dır. Burada, para-kontakt yapı kullanılırsa

$$Xg(W, V) + g([W, X], V) - g([\varphi V, X], \varphi W) = 0$$

olur. Doğrudan işlemlerle

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X V, W) + g(\nabla_W X, V) - g(\varphi[X, \varphi V], W) \\ 0 &= g([X, V] + \nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) - g(\varphi[X, \varphi V], W) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, X yatay vektör alanı $\varphi-$tensör alanının infinitezimal otomorfizmi oldūgundan,

$$[X, \varphi V] = \varphi[X, V] \Rightarrow [X, V] = \varphi[X, \varphi V]$$

dır. Böylece,

$$g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 0$$

olur. Burada, (II.3.10) kullanılırsa

$$g(T_V X, W) + g(T_W X, V) = 0$$

elde edilir. T temel tensör alanı simetrik ve alterneleyen olduğundan, $2g(T_V W, X) = 0$ bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem IV.1.3 den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

IV.1.2. Sonuç. M bir quasi-para-Sasakian manifold, B hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, X yatay vektör alanı $\varphi-$tensör alanının infinitezimal otomorfizmi ise, o zaman lifler total jeodeziktir.

IV.2. Total Manifold Üzerindeki Para-Kontakt Yapıların Baz Manifold Üzerine Taşınması

Bu altbölümde, total manifold üzerinde verilen bir para-kontakt yapının baz manifold üzerinde hemen hemen para-kontakt yapının belirlenmesinde para-kontakt submersiyonun rolü incelenmektedir.

IV.2.1. Teorem. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ve $(B, \varphi', \xi', \eta', g')$ hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M nin hemen hemen para-kontakt yapısı normal ise B nin de hemen hemen para-kontakt yapısı normaldır.

İspat. M üzerindeki X ve Y temel vektör alanları B üzerindeki X' ve Y'

ne $\pi-$bağlı olsun. (II.5.15) den

$$\pi_* N^{(1)}(X,Y) = \pi_*([\varphi,\varphi](X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi)$$

dır, burada N^1, φ nin nijenhuis tensör alanıdır. Diğer taraftan, $\pi_*\varphi = \varphi'\pi_*$ ve $\pi_*\xi = \xi'$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\pi_*[\varphi,\varphi](X,Y) &= \pi_*\varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \\
&= [\pi_* X,\pi_* Y] - \eta([X,Y])\pi_*\xi + [\pi_*\varphi X,\pi_*\varphi Y] - \varphi'\pi_*[\varphi X,Y] \\
&- \varphi'\pi_*[X,\varphi Y] \\
&= [X',Y'] - g'([X',Y'],\xi')\xi' + [\varphi' X',\varphi' Y'] - \varphi'[\varphi' X',Y'] \\
&- \varphi'[X',\varphi' Y']
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\pi_*[\varphi,\varphi](X,Y) = N'_{\varphi'}(X',Y') \tag{IV.2.1}$$

bulunur. Burada N', φ' tensörünün Nijenhuis tensör alanıdır. Benzer yolla,

$$\begin{aligned}
\pi_* 2d\eta(X,Y)\xi &= \pi_*(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]))\xi \\
&= (\pi_* X g(Y,\xi) - \pi_* Y g(X,\xi) - g([X,Y],\xi))\pi_*\xi \\
&= (X'\eta'(Y') - Y'\eta'(X') - \eta'([X',Y']))\xi' \\
&= 2d\eta'(X',Y')\xi'
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\pi_* 2d\eta \otimes \xi = 2d\eta' \otimes \xi' \tag{IV.2.2}$$

ulaşılır. Şimdi, (IV.2.1) ve (IV.2.2) den

$$\pi_* N^{(1)}(X,Y) = N'^{(1)}(X',Y') = 0$$

elde edilir. Yani M normal ise B de normaldır.

IV.2.1. Önerme. M^{2m+1} ve B^{2n+1} hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, lifler hemen hemen para-Hermityen manifoldlardır.

İspat. Lifleri F ile gösterelim. $boyF = 2(m-n) = 2r$ olur, burada $r = m-n$ dır. $(F^{2r}, \hat{g})$ üzerinde $J = \hat{\varphi}$ ve $g|_F = \hat{g}$ değişimini yapalım. $(J, \hat{g})$ ikilisi bir hemen hemen para-Hermityen yapıdır. Gerçekten, bir hemen hemen para-kontakt yapının tanımı kullanılırsa, $U \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\begin{aligned} J^2U &= \varphi^2U = U - \eta(U)\xi, \\ J^2U &= U \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$g(JV, JU) = -g(V, J^2U) = -g(V, U)$$

elde edilir.

IV.2.2. Önerme. $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M total uzayı para-kosimplektik, hemen hemen para-kosimplektik veya quasi-para-Sasakian manifold ise o zaman B baz uzayı da aynı sınıfa aittir.

İspat. M üzerindeki X, Y ve Z temel vektör alanları B üzerindeki X', Y' ve Z' ne $\pi-$bağlı olsun. M bir para-kosimplektik manifold olduğundan,

$$(\nabla_X \eta)Y = X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) = 0$$

dır. (II.5.6) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla_X \eta)Y = Xg(Y, \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) = 0$$

olur. π bir semi-Riemann submersiyon olduğundan

$$X'g'(\pi_*Y, \pi_*\xi) - g'(\pi_*\nabla_X Y, \pi_*\xi) = 0$$

elde edilir. Önerme II.3.1(iii)den

$$X'g'(Y', \xi') - g'(\nabla'_{X'}Y', \xi') = 0$$

bulunur. Tekrar (II.5.6) denklemi kullanılırsa

$$X'\eta'(Y') - \eta'(\nabla'_{X'}Y') = 0$$

dır. Buradan

$$(\nabla'_{X'}\eta')Y' = 0 \tag{IV.2.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan, M bir para-kosimplektik manifold olduğundan

$$(\nabla_X\Phi)(Y, Z) = X\Phi(Y, Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(\nabla_X Z, Y) = 0$$

dır. Temel 2-formun tanımından

$$Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi\nabla_X Z) = 0$$

elde edilir. π bir semi-Riemann submersiyon olduğundan

$$X'g'(Y', \pi_*\varphi Z) - g'(\nabla'_{X'}Y', \pi_*\varphi Z) - g'(Y', \pi_*\varphi\nabla_X Z) = 0$$

bulunur. $\pi_*\varphi = \varphi'\pi_*$ eşitliği kullanılırsa

$$X'g'(Y', \varphi'Z') - g'(\nabla'_{X'}Y', \varphi'Z') - g'(Y', \varphi'\nabla'_{X'}Z') = 0$$

elde edilir. Tekrar temel 2-formun tanımından

$$X'\Phi'(Y', Z') - \Phi'(\nabla'_{X'}Y', Z') - \Phi'(\nabla'_{X'}Z', Y') = 0$$

olur. Buradan

$$0 \;=\; (\nabla'_{X'}\Phi')(Y', Z') \qquad \text{(IV.2.4)}$$

bulunur. Böylece, (IV.2.3) ve (IV.2.4) den, M total uzayı bir para-kosimplektik manifold ise, o zaman B baz uzayı da aynı sınıfa aittir.

Benzer olarak, M üzerindeki X, Y ve Z temel vektör alanları B üzerindeki X', Y' ve Z' ne $\pi-$bağlı olsun. Bir hemen hemen para-kosimplektik manifold uygulamasından, $d\Phi(X, Y, Z) = 0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & X(\Phi(Y,Z)) - Y(\Phi(X,Z)) + Z(\Phi(X,Y)) \\ & -\Phi([X,Y],Z) + \Phi([X,Z],Y) - \Phi([Y,Z],X) = 0 \end{aligned}$$

olur.

Doğrudan hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & g(\nabla_X Y, \varphi Z) + (Y, \nabla_X \varphi Z) - g(\nabla_Y X, \varphi Z) - g(X, \nabla_Y \varphi Z) \\ + \; & g(\nabla_Z X, \varphi Y) + g(X, \nabla_Z \varphi Y) - g([X,Y], \varphi Z) \\ + \; & g([X,Z], \varphi Y) - g([Y,Z], \varphi X) \end{aligned}$$

bulunur. π bir semi-Riemann submersiyon olduğundan, $\pi_*\varphi = \varphi'\pi_*$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & 0 = g'(\nabla'_{X'}Y', \varphi'Z') + (Y', \nabla'_{X'}\varphi'Z') - g'(\nabla'_{Y'}X', \varphi'Z') - g'(X', \nabla'_{Y'}\varphi'Z') \\ & +g'(\nabla'_{Z'}X', \varphi'Y') + g'(X', \nabla'_{Z'}\varphi'Y') - g'([X', Y'], \varphi'Z') \\ & +g'([X', Z'], \varphi'Y') - g'([Y', Z'], \varphi'X') \\ & 0 = X'(\Phi'(Y', Z')) - Y'(\Phi'(X', Z')) + Z'(\Phi'(X', Y')) \\ & -\Phi'([X', Y'], Z') + \Phi'([X', Z'], Y') - \Phi'([Y', Z'], X') \\ & 0 = d\Phi'(X', Y', X') \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.5)}$$

elde edilir. Benzer bir yolla,

$$\begin{aligned} 0 &= 2d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \\ 0 &= 2d\eta'(X',Y') \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.6)}$$

olur. Böylece,(IV.2.5) ve (IV.2.6) den, M total uzayı hemen hemen para-kosimplektik manifold ise, o zaman B baz uzayı da aynı sınıfa aittir. Benzer şekilde M quasi-para-Sasakiyan manifold ise B manifoldunununda quasi-para-Sasakiyan manifold olduğu gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

IV.2.3. Önerme. $\pi : M \to B$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M total uzayı para-kontakt, K-para-kontakt, weakly para-kosimplektik veya para-Sasakian manifoldlarından herhangi birine ait ise o zaman B baz uzayı da aynı sınıfa aittir.

İspat. Önerme IV.2.2 dekine benzer bir yolla ispat yapılabilir.

IV.3. Para-kontakt Semi-Riemann Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri

Bu altbölümde, bir para-kontakt semi-Riemann submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin bi-kesit ve kesit eğrilikleri arasındaki ilişki incelenmektedir.

(M,φ,ξ,η,g) ve $(N,\varphi',\xi',\eta',g')$ hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun.

$\varphi-$paraholomorfik bi-kesit eḡriliḡini B ile gösterelim. M üzerinde ξ ye ortogonal sıfırdan farklı X ve Y null olmayan vektörler için, $\varphi-$para-holomorfik bi-kesit eḡriliḡi

$$B(X,Y) = \frac{R(X,\varphi X,Y,\varphi Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2}$$

ile tanımlanır.
Not edelimki eḡer X bir null olmayan vektör alanı ise φX de bir null olmayan vektör alanıdır.

M üzerinde ξ ye ortogonal sıfırdan farklı X null olmayan vektörü için, $\varphi-$para-holomorfik kesit eḡriliḡi de $H(X) = B(X,X)$ ile verilir. Bu bölümde sırasıyla N nin $\varphi-$para-holomorfik bi-kesit ve kesit eḡriliḡini B' ve H', lifin ise $\varphi-$para-holomorfik bi-kesit ve kesit eḡriliḡini $\hat{B}$ ve $\hat{H}$ ile ifede edeceḡiz.

IV.3.1. Önerme. M ve N hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U ve V null olmayan birim dikey vektör alanları, X ve Y null olmayan birim yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned}
B(U,V) &= \hat{B}(U,V) - \epsilon_U\epsilon_V[g(T_UV, T_{\varphi U}\varphi V) \\
&- g(T_{\varphi U}V, T_U\varphi V)]; \qquad \text{(IV.3.1)} \\
B(X,U) &= \epsilon_U\epsilon_X[g((\nabla_U A)_X\varphi X, \varphi U) - g((\nabla_{\varphi U}A)_X\varphi X, U) \\
&+ g(A_XU, A_{\varphi X}\varphi U) - g(A_X\varphi U, A_{\varphi X}U) \\
&- g(T_UX, T_{\varphi U}\varphi X) + g(T_{\varphi U}X, T_U\varphi X)]; \qquad \text{(IV.3.2)} \\
B(X,Y) &= B'(X',Y')\circ\pi - \epsilon_X\epsilon_Y[2g(A_X\varphi X, A_Y\varphi Y) \\
&- g(A_{\varphi X}Y, A_X\varphi Y) + g(A_XY, A_{\varphi X}\varphi Y)] \qquad \text{(IV.3.3)}
\end{aligned}$$

dır, burada $\epsilon_U = g(U,U) \in \{\pm 1\}$, $\epsilon_V = g(V,V) \in \{\pm 1\}$, $\epsilon_X = g(X,X) \in$

$\{\pm 1\}$ ve $\epsilon_Y = g(Y,Y) \in \{\pm 1\}$ dır.

İspat. Bu formüller, (II.3.14), (II.3.15) ve (II.3.16) denklemlerinin direkt uygulamalarından elde edilir.

Önerme IV.3.1 kullanılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

IV.3.2. Önerme. M ve N hemen hemen para-kontakt metrik manifoldlar ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U nul olmayan birim dikey vektör alanı, X null olmayan birim yatay vektör alanı için

(a) $H(U) = \hat{H}(U) + \|T_U \varphi U\|^2 - g(T_{\varphi U}\varphi U, T_U U)$;

(b) $H(X) = H'(X') \circ \pi - 3\|A_X \varphi X\|^2$

dır.

Eğer total manifold bir quasi-para-Sasakiyan manifold ise, bu durumda total uzay, baz uzay ve liflerin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiye sahibiz.

IV.3.1. Teorem. M quasi para-Sasakian manifold, N hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U ve V null olmayan birim dikey vektör alanları, X ve Y null olmayan birim yatay vektör alanları için

(a) $B(U,V) = \hat{B}(U,V) - \epsilon_U \epsilon_V [2\|T_U V\|^2 - 2\eta(T_U V)^2]$;

(b) $B(X,Y) = B'(X',Y') \circ \pi$

dır.

İspat. (a) (IV.3.1) den,

$$B(U,V) = \hat{B}(U,V) - \epsilon_U \epsilon_V [g(T_U V, T_{\varphi U} \varphi V) - g(T_{\varphi U} V, T_U \varphi V)]$$

olur. Lemma IV.1.4 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T_U \varphi V, T_{\varphi U} V) &= g(\varphi T_U V, \varphi T_U V) \\ &= -g(T_U V, T_U V) + \eta(T_U V)\eta(T_U V) \\ &= -\|T_U V\|^2 + \eta(T_U V)^2 \qquad \text{(IV.3.4)} \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar Lemma IV.1.4 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T_{\varphi U} \varphi V, T_U V) &= g(\varphi^2 T_U V, T_U V) \\ &= g(T_U V - \eta(T_U V)\xi, T_U V) \\ &= \|T_U V\|^2 - \eta(T_U V)^2 \qquad \text{(IV.3.5)} \end{aligned}$$

olur. (IV.3.4) ve (IV.3.5) den,

$$B(U,V) = \hat{B}(U,V) - \epsilon_U \epsilon_V [2\|T_U V\|^2 - 2\eta(T_U V)^2]$$

denklemine ulaşılır.

(b) Yatay distribüsyon integrallenebilir olduğundan, $A = 0$ dır. Böylece, (IV.3.3) kullanılırsa, (b) denklemi elde edilir.

Teorem IV.3.1 in bir sonucu olarak, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

IV.3.1. Sonuç. M quasi para-Sasakian manifold, N hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U null olmayan birim dikey vektör alanı, X null olmayan birim yatay vektör alanı için

(a) $H(U) = \hat{H}(U) - 2\|T_U U\|^2 + 2\eta(T_U U)^2$;

(b) $H(X) = H'(X') \circ \pi$

dır.

Bir para-kosimplektik manifold için, aşağıdaki ifadelere sahibiz.

IV.3.2. Teorem. M para-kosimplektik manifold, N hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U ve V nul olmayan birim dikey vektör alanları, X ve Y null olmayan birim yatay vektör alanları için

(a) $B(U, V) = \hat{B}(U, V) - \epsilon_U \epsilon_V [2\|T_U V\|^2 - 2\eta(T_U V)^2]$;

(b) $B(X, Y) = B'(X', Y') \circ \pi$;

(c) $B(X, U) = -\epsilon_U \epsilon_X 2\|T_U X\|^2$

dır.

İspat. (a) (IV.3.1) den,

$$B(U, V) = \hat{B}(U, V) - \epsilon_U \epsilon_V [g(T_U V, T_{\varphi U} \varphi V) - g(T_{\varphi U} V, T_U \varphi V)]$$

olur. Lemma IV.1.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T_U\varphi V, T_{\varphi U}V) &= g(\varphi T_U V, \varphi T_U V) \\ &= -g(T_U V, T_U V) + \eta(T_U V)\eta(T_U V) \\ &= -\|T_U V\|^2 + \eta(T_U V)^2 \end{aligned} \tag{IV.3.6}$$

elde edilir. Tekrar Lemma IV.1.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T_{\varphi U}\varphi V, T_U V) &= g(\varphi^2 T_U V, T_U V) \\ &= g(T_U V - \eta(T_U V)\xi, T_U V) \\ &= \|T_U V\|^2 - \eta(T_U V)^2 \end{aligned} \tag{IV.3.7}$$

bulunur. (IV.3.6) ve (IV.3.7) denklemlerinden

$$B(U,V) = \hat{B}(U,V) - \epsilon_U\epsilon_V[2\|T_U V\|^2 - 2\eta(T_U V)^2]$$

elde edilir.

(b) M bir para-kosimplektik manifold ve yatay distribüsyon integgrallenebilir olduğundan, $A = 0$ dır. Böylece, (IV.3.3) denklemi kullanılırsa,

$$B(X,Y) = B'(X',Y') \circ \pi$$

elde edilir.

(c) M bir para-kosimplektik manifold ve $A = 0$ olduğundan,

$$B(X,U) = -\epsilon_U\epsilon_X g(T_U X, T_{\varphi U}\varphi X) + \epsilon_U\epsilon_X g(T_{\varphi U}X, T_U\varphi X)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma IV.1.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(T_U X, T_{\varphi U}\varphi X) &= g(T_U X, \varphi^2 T_U X) \\ &= g(T_U X, T_U X - \eta(T_U X)\xi) \\ &= g(T_U X, T_U X) \end{aligned} \tag{IV.3.8}$$

ve

$$\begin{aligned} g(T_{\varphi U}X, T_U\varphi X) &= g(\varphi T_U X, \varphi T_U X) \\ &= -g(T_U X, T_U X) + \eta(T_U X)\eta(T_U X) \\ &= -g(T_U X, T_U X) \qquad \text{(IV.3.9)} \end{aligned}$$

(IV.3.8) ve (IV.3.9) den, $B(X,U) = -\epsilon_U \epsilon_X 2\|T_U X\|^2$ olur.

IV.3.2. Sonuç. M para-kosimplektik manifold, N hemen hemen para-kontakt metrik manifold ve $\pi : M \to N$ para-kontakt semi-Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, ξ ye ortogonal sıfırdan farklı U null olmayan birim dikey vektör alanı, X null olmayan birim yatay vektör alanı için,

(a) $H(U) = \hat{H}(U) - 2\|T_U U\|^2 + 2\eta(T_U U)^2$;

(b) $H(X) = H'(X') \circ \pi$

dır.

KAYNAKLAR

[1] Atçeken, M., *Çarpım Manifoldunun Altmanifoldlarının Geometrisi,* Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, 2002.

[2] Baditoiu, G. and Ianus, S., *Semi-Riemannian submersions with totally umbilic fibres,* Rend. Circ. Math. Palermo, serie II, 51(2002), 249-276.

[3] Baditoiu, G. and Ianus S., *Semi-Riemannian submersions from real and complex pseudo-hyperbolic spaces,* Diff. Geom. and appl., 16(2002), 79-84.

[4] Baird, P. and Wood, J. C., *Harmonic morphisms betweeen Riemannian manifolds,* Clarendon Press, Oxford, 2003.

[5] Bejancu, A. and Farran, H. R., *Foliations and Geometric structures,* Springer, 2006.

[6] Bootby, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press nc, 1986.

[7] Caldarella, A.V, *On paraquaternionic submersions between paraquaternionic Kähler manifolds,* Acta Applicandae Mathematicae, 1(2010), 112, 1-14.

[8] Chen, B. Y., *Geometry of Submanifolds,* Marcel Dekker, New York, 1973.

[9] Chinea, D., *Almost contact metric submersions,* Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser., 34(1985), 89-104.

[10] Cruceanu, V., Fortuny, P. and Gadea, P.M., *A survey on paracomplex geometry,* Rocky Mountain J. Math. 26(1996), 1, 83-115.

[11] Dacko, P. and Olszak, Z., *On weakly para-cosymplectic manifolds of dimension 3,* Journal of Geometry and Physics, 57(2007), 561-570.

[12] Do Carmo, M.P., *Riemannian Geometry,* Birkhauser Boston, 1992.

[13] Duggal, K.L. and Bejancu, A., *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian and applications,* Kluwer Academic Publishers, 364, 1996.

[14] Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A.M., *Riemannian Submersions and Related Topics,* World Scientific, 2004.

[15] Gray, A., *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions,* J. Math. Mech. 16, (1967), 715-737.

[16] Gündüzalp, Y., *Riemann Submersiyonların Geometrisi üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 2007.

[17] Hacısalihoğlu, H.H., *Diferensiyel Geometri,* Cilt:1,2,3, Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 2003.

[18] Ianuș, S., Mazzocco, R. and Vilcu, G.E., *Riemannian submersions from quaternionic manifolds,* Acta Appl. Math., (2008), 104, 83-89.

[19] Ianuș, S., Marchiafava, S. and Vilcu, G.E. *Paraquaternionic CR-submanifolds of paraquaternionic Kähler Manifols and semi-Riemannian submersions,* Central European Journal of Mathematics, 4(2010), 8, 735-753.

[20] Kaneyuki, S. and Williams, F.L., *Almost paracontact and paraHodge structures on manifolds,* Nagoya Math. J. 99(1985), 173-187.

[21] Kobayashi, S., *Submersions of CR-submanifolds,* Tohoku Math. J., II Ser., 39(1987), 95-100.

[22] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry,* vol:1, I-II, New York, 1963.

[23] Marrero, J. C. and Rocha, J., *Locally conformal Kahler submersions,* Geom. Dedicate, 52(1994), 271-289.

[24] Montano, B.C., *Bi-Legendrian structures and paracontact geometry,* International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 3(2009), 6:487-504.

[25] O'neill, B., *The Fundamental Equations of a Submersions,* Michigan Math. J. 13(1966) 459-469.

[26] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity,* Academic Press, New York, 1983.

[27] Sato, I., *On a structure similar to the almost contact structure,* Tensor (N S) 30, no:3 (1976), 219-224.

[28] Senlin, X. and Yilong, N., *Submanifolds of product Riemannian manifolds,* Acta Mathematica Scienta (2000): 20B(2), 213-218.

[29] Staikova, M., Gribachev, K. and Mekerov, D., *Invariant hypersurfaces of Riemannian P-manifolds,* Plovdiv Univ. Sci. Works-Math. 25(1987) 253-266.

[30] Stepanov, S.E., *Riemannian almost product manifolds and submersions,* Journal of Mathematical Sciences 99(2000), 6, 1811-1831.

[31] Şahin, B., *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.

[32] Şahin, B., *On a Submersion Between Reinhart Lightlike Manifolds and Semi-Riemannian Manifolds,* Mediterranean Journal of Mathematics, 5(2008), 273-284.

[33] Şahin, B. and Gündüzalp, Y., *Submersion from Semi-Riemannian Manifolds onto Lightlike Manifolds,* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(1)(2010), 41-53.

[34] Tripathi, M. M., Kılıç, E., Perktaş, S. Y. and Keleş, S., *Indefinite almost paracontact manifolds,* International Journal of Mathematics and mathematical Sciences, vol:2010, Article ID:846195, 19 pages doi:10.1155/2010/846195.

[35] Watson, B., *Almost Hermitian submersions,* J. Diff. Geom. 11, (1976), 147-165.

[36] Watson, B., *Almost contact metric 3-submersions,* Int. J. Math. and Math. Sci., 7, (1984), 667-688.

[37] Welyczko, J. *On Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds,* Result.Math., 54(2009), 377-387.

[38] Yano, K., Kon,M., *Structures on Manifolds,* World Scientific Publishing Company Pte. Ltd., 1984.

[39] Zamkovoy, S., *Canonical connections on paracontact manifolds,* Ann. Glob. Anal. Geom., (2009), 36,37-60.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Diyarbakır ili Çermik ilçesi Göktepe Köyü'nde doğdu. İlköğrenimini Köyde, orta ve lise öğrenimini Çermik'te tamamladı. 1992 yılında girdiği Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1996 yılında mezun oldu. Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı çeşitli okullarda görev yaptı. 2005 te İnönü Üniversitesi FBE Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 2007 yılında yüksek lisans öğremini tamamladı. Aynı yıl İnönü Üniversitesi FBE Matematik Anabilim Dalında doktora programına kayıt yaptırdı. 2009 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği'nde Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı. Evli ve üç çocuk sahibi olup halen bu görevine devam etmektedir.