T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN MONOTON ÇÖZÜMLERİ

Nazlı KADIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2011

Tezin Başlığı: **Lineer Olmayan Kuadratik Volterra İntegral Denklemlerin Monoton Çözümleri**

Tezi Hazırlayan: **Nazlı KADIOĞLU**

Sınav Tarihi: 14 Temmuz 2011

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Bilal ALTAY	(İnönü Üniv.)	______________________
Prof.Dr. Ö. Faruk TEMİZER	(İnönü Üniv.)	______________________
Doç.Dr. İsmet ÖZDEMİR	(İnönü Üniv.)	______________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Lineer Olmayan Kuadratik Volterra İntegral Denklemlerin Monoton Çözümleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Nazlı KADIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN MONOTON ÇÖZÜMLERİ

Nazlı KADIOĞLU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

43+v sayfa

2011

Danışman: Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER

Dört bölümden meydana gelen bu çalışmanın ilk bölümünde, integral denklemlerin tarihsel gelişimi verildi.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak bazı tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde, nonkompaktlık ölçüsü olarak adlandırılan ve integral denklemlerin çözümlerinde kullanılan ölçü tanıtıldı. Ayrıca nonkompaktlık ölçü çeşitlerinden olan Kuratowski ve Hausdorff ölçüleri tanıtıldı. Bu ölçüler arasındaki farklar ve ilişkiler incelendi.

Son bölümde ise lineer olmayan kuadratik Volterra integral denklemler incelendi. Ayrıca bu bölüm içinde verilen sabit nokta teoremi ve ikinci bölümde bahsedilen nonkompaktlık ölçüsünün de kullanılmasıyla bu denklem tipinin, $[0, M]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli tüm fonksiyonlardan oluşan $C[0, M]$ klasik Banach uzayındaki çözümlerinin varlığı ve monotonluğu incelendi. Sonrasında ise sonuçların daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı uygulamalara yer verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Volterra integral denklemleri, Nonkompaktlık ölçüsü, Sabit nokta teoremi.

ABSTRACT

MSc Thesis

MONOTONIC SOLUTIONS OF NONLINEAR QUADRATIC VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Nazlı KADIOĞLU

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

43+v pages

2011

Supervisor: Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER

In the first chapter of this work which consists of four chapters, historical development of integral equations were given.

In the second chapter, some definitions and theorems were given to understand following chapters more easily.

In the third chapter, a measure of noncompactness which is used for solutions of integral equations was identified. In addition, two measures of noncompactness, Kuratowski and Hausdorff, were introduced. Differences and relations between these measures were also investigated.

In the last chapter, nonlinear quadratic Volterra integral equations were studied. Moreover, the existence and monotony of solutions of nonlinear quadratic Volterra integral equations in the classical Banach space $C[0, M]$ consisting of all real functions defined and continuous on the interval $[0, M]$ were investigated by using of the fixed point theorem and measure of noncompactness. Furthermore, in this chapter, some applications were given to understand results more clearly.

KEY WORDS: Volterra integral equations, Measures of noncompactness, Fixed point theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca her türlü yardım ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e, çalışmalarımız sırasında değerli bilgilerini bizimle paylaşan Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR'e, tez yazımı için gerekli programı bana veren ve yazım esnasında her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu çalışmanın yazılmasında bana çok büyük katkısı olan, maddi manevi her anlamda yanımda olan değerli arkadaşım Özcan GAZİOĞLU'na ve hayatım boyunca yardımlarını ve desteklerini gördüğüm aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER v

1 GİRİŞ 1

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER 2

2.1 Temel Tanımlar 2

2.2 Temel Teoremler 9

3 NONKOMPAKTLIK ÖLÇÜLERİ 11

3.1 Bir Nonkompaktlık Ölçüsünün Genel Yapısı 12

3.2 Kuratowski ve Hausdorff Nonkompaktlık Ölçüleri 16

4 VOLTERRA TİPİ KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERİN BİR SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ 26

4.1 Yardımcı Bilgiler 26

4.2 Temel Sonuç 28

4.3 Bazı Uyarılar 34

4.4 Örnekler 36

5 KAYNAKLAR 41

ÖZGEÇMİŞ 43

SİMGELER

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}_+$	:	$[0,\infty)$ aralığı,
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$C(I)$	:	I aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli fonksiyonların uzayı,
sup	:	Supremum,
inf	:	İnfimum,
E	:	Banach uzayı,
$D(T)$	:	T dönüşümünün tanım cümlesi,
$R(T)$	:	T dönüşümünün görüntü cümlesi,
M_E	:	E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi,
N_E	:	E Banach uzayının boştan farklı ve önkompakt alt kümelerinin ailesi,
$\bar{A}$	:	A kümesinin kapanışı,
$diamA$	:	A kümesinin çapı,
$B(x,r)$	:	x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar,
$\bar{B}(x,r)$	:	x merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar,
$S(x,r)$	:	x merkezli, r yarıçaplı yuvar yüzeyi,
$B(X,r)$	:	X küme merkezli, r yarıçaplı yuvar,
coX(veya $convX$)	:	X'i ihtiva eden konveks kümelerin en küçüğü,
$\overline{co}X$	:	X'i ihtiva eden konveks ve kapalı kümelerin en küçüğü,
$w(x,\varepsilon)$	:	x'in, $\varepsilon \geq 0$ sayısına karşılık gelen süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, nonlineer analizin önemli bir parçasıdır. Bunun nedeni bu denklem tiplerinin, uygulamalı matematik gibi matematiğin diğer dallarında ve gerçek dünyayla ilgili problemlerin karşılaşıldığı, matematiksel fizik, mühendislik, biyoloji gibi diğer birçok bilim dalında da uygulanabilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu denklemler, matematiksel analizin günümüz dünya problemleri üzerine uygulanmasında da önemli bir yere sahiptir.

İntegral denklem tabiri, ilk olarak 1888 yılında Bois Reymond tarafından kullanılmıştır. Ayrıca 1823 yılında, Abel'in çalışmasında da bir integral denkleme rastlanmaktadır. Bununla birlikte bu tip denklemlerin ilk kez 1872 yılında Laplace tarafından kullanıldığı görülmektedir. Bu denklemlere Laplace'ın lineer fark denklemleri ve integral denklemlerin çözümünde kullandığı,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\phi(y)dy$$

integral dönüşümünde rastlanmaktadır.

İntegral denklemler, integral sınırlarına göre Fredholm ve Volterra integral denklemler adını alır. Fredholm integral denkleminde integralin sınırları sabitlerdir. Volterra integral denkleminde ise integral sınırlarından biri değişkendir. Volterra tipi integral denklemlere ait ilk çalışmalar, 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \ , \qquad t \in I = [0, M]$$

formundaki lineer olmayan kuadratik Volterra tipi integral denklemlerin çözülebilirliği incelendi. Bu tip denklemlerin çözümünün varlığı, 2. Bölümde verilen nonkompaktlık ölçü tekniğinin kullanılmasıyla gösterildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımlar ile teoremler verildi.

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. ***(Lineer Uzay)*** *Boş olmayan bir L cümlesi ve bir F cismi verilmiş olsun. Eğer $x, y \in L$, $\lambda \in F$ için $+(x, y) = x + y$ ve $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ ile tanımlanan $+ : L \times L \to L$, $\cdot : F \times L \to L$ fonksiyonları, her $x, y, z \in L$ ve $\lambda, \beta \in F$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, L cümlesine F cismi üzerinde bir* ***lineer uzay*** *(vektör uzayı) denir, [1].*

(a) $x + y = y + x$,

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(c) $\forall x \in L$ *için* $x + \theta = \theta + x = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in L$ *vardır,*

(d) $\forall x \in L$ *için* $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ *olacak şekilde bir* $(-x) \in L$ *vardır,*

(e) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

(f) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(g) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,

(h) $1x = x$.

Lineer uzay tanımında geçen bu F cismine lineer uzayın skaler cismi, F'nin elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzay yerine vektör uzayı deyimi de kullanılır. Bu durumda, L'nin elemanlarına genellikle vektör denir. θ bazen 0 ile de gösterilir. $+$ ve $\cdot$ işlemlerine kısaca lineer uzay işlemleri de denir. Burada, *(e)* şartındaki $+$ sembolünün iki anlamda kullanıldığına dikkat edilmelidir. Birinci taraftaki $+$ işareti, F deki toplamayı; ikinci taraftaki ise, L deki toplamayı belirtmektedir. $F = \mathbb{R}$

olması halinde L'ye reel, $F = \mathbb{C}$ olması halinde ise L'ye kompleks lineer uzay denir. Burada, θ ve $(-x) \in L$ elemanlarına, sırasıyla, L'nin birim elemanı ve $x \in L$'nin toplama işlemine göre tersi denir. (h)'deki "1" ise F cisminin çarpma işlemine göre birim elemanıdır.

Tanım 2.1.2. ***(Metrik Uzay)*** *X, boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y, z \in X$ için;*

(M_1) $d(x,y) \geq 0,$

(M_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(M_3) $d(x,y) = d(y,x),$

(M_4) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

*şartlarını sağlıyorsa, d'ye X üzerinde **metrik** ve (X,d) ikilisine de **metrik uzay** denir.*

d fonksiyonu, (M_1), (M_3) ve (M_4) *aksiyomları ile birlikte*

(M_2^*) $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$

*şartını sağlıyorsa d ye **yarı metrik**, (X,d) ikilisine de **yarı metrik uzay** denir, [2].*

Tanım 2.1.3. ***(Normlu Lineer Uzay)*** *X, bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya kısaca **normlu uzay** denir, [1].*

(a) $\|x\| \geq 0,$

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$

(c) $\|ax\| = |a| \, \|x\|,$

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tanım 2.1.4. ***(Yakınsak Dizi)*** *(x_n), $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ ise (x_n) dizisi x_0 noktasına* ***yakınsıyor*** *denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisine X'te* ***yakınsak dizi*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.5. ***(Cauchy Dizisi)*** *(x_n), $(X, \|\cdot\|)$ de bir dizi olsun. $m, n \to \infty$ iken; $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (bir başka ifade ile her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda, $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisine* ***Cauchy dizisi*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.6. ***(Tam Uzay)*** *X normlu lineer uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X normlu uzayına* ***tamdır*** *denir. Buradaki tamlık, X'teki her (x_n) dizisi için $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ olduğunda, $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olması anlamındadır, [3].*

Tanım 2.1.7. ***(Banach Uzayı)*** *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya* ***Banach uzayı*** *denir, [3].*

$[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların $C[a, b]$ lineer uzayı, $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

$(x_n) \subset C[a, b]$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olması halinde, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m > N$ olduğunda,

$$\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir N doğal sayısı bulunacağından, her $t \in [a, b]$ için

$$|x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise, $C[a, b]$ uzayındaki yakınsak bir dizinin aynı zamanda düzgün yakınsak olduğunu gösterir, [4, syf. 36-37].

Tanım 2.1.8. *Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. O zaman*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

*kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar**,*

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

*kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar** ve*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

*kümesine ise x_0 merkezli r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir, [3].*

Tanım 2.1.9. ***(Operatör)*** *X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin her bir elemanına Y'nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren bir kurala D'den Y'ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. D cümlesinden Y cümlesine tanımlı T operatörünün x'e karşılık getirdiği eleman $T(x)$ ile gösterilir. T operatörünün $x \in D$'yi, $T(x) \in Y$'ye dönüştürdüğünü belirtmek için, $T : D \longrightarrow Y$ gösterimi kullanılır. Bu durumda; D'ye, T operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(T)$ ile gösterilir.*

$$R = R(T) = \{y \in Y : y = T(x),\ x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün görüntü kümesi denir. T operatörünün yaptığı bu işlem,

$$X \supset D(T) \xrightarrow{T} R(T) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca $T : X \longrightarrow Y$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde,

$$D(T) \neq X \text{ veya } R(T) \neq Y$$

olabilir, [3].

Tanım 2.1.10. ***(Bir Operatörün Bir Noktadaki Sürekliliği)*** *X ve Y normlu uzayları ve $T : X \longrightarrow Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında, T operatörü (dönüşümü) $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir, [3].*

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır $\ni$ $x \in D(T)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken; $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$,

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$ dır.

Limit tanımına göre, $T : X \longrightarrow Y$ operatörünün $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli olması için $x \to x_0$ iken $T(x) \to T(x_0)$ olmalıdır.

Tanım 2.1.11. ***(Sürekli Operatör)*** *X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T : X \longrightarrow Y$ operatörü $D(T)$'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde* ***süreklidir*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.12. ***(Düzgün Sürekli Operatör)*** *X ve Y normlu uzayları ve $T : X \longrightarrow Y$ operatörü verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır $\ni \|x - y\| < \delta$ olacak şekildeki her $x, y \in D(T)$ için $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ oluyorsa T'ye $D(T)$ üzerinde* ***düzgün süreklidir*** *denir, [5].*

Tanım 2.1.13. ***(Eşsüreklilik)*** *$X \subset C\,[a, b]$ olsun. Bu durumda, $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve her $x \in X$ için $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa X kümesine* ***eşsüreklidir*** *denir, [6].*

Tanım 2.1.14. ***(Sınırlı Operatör)*** *X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. $\forall x \in D(T)$ için $\|Tx\| \leq c\,\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa T operatörü $D(T)$ üzerinde* ***sınırlıdır*** *denir. Eğer $D(T) = X$ ise T operatörüne sadece* ***sınırlı operatör*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.15. ***(Lineer Operatör)*** *X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \longrightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X'in bir alt uzayı ise ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall\alpha, \beta \in K$ için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ise A operatörüne* ***lineer operatör*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.16. ***(Topolojik Yapı)*** *X, bir küme ve τ da $P(X)$'in bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, τ'ya X üzerinde bir* ***topoloji*** *(topolojik yapı) denir, [7].*

(T_1) $X, \theta \in \tau$

(T_2) τ'dan alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ'ya aittir. Yani, $\forall(A_i)_{i\in I} \subset \tau$ (I, herhangi bir indis cümlesi) için $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.

(T_3) τ'dan alınan sonlu sayıda elemanın kesişimi τ'ya aittir. Yani, $\forall (A_i)_{i\in J} \subset \tau$ (J, herhangi bir sonlu indis cümlesi) için $\cap_{i\in J} A_i \in \tau$ dır.

Tanım 2.1.17. ***(Topolojik Uzay)*** *τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X, τ) ikilisine* ***topolojik uzay*** *denir, [7].*

Tanım 2.1.18. ***(Açık Küme)*** *τ'nın her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir* ***açık küme*** *denir, [7].*

Tanım 2.1.19. ***(Kapalı Küme)*** *X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre* ***kapalı küme*** *denir. Yani; $F \subset X$ kapalı$\Leftrightarrow$ $F^c \in \tau$ dır, [7].*

Tanım 2.1.20. ***(Kapanış)*** *X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine A'nın* ***kapanışı*** *denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir, [7].*

Tanım 2.1.21. $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayında açık kümelerin bir ailesi $\mathbb{D} = (D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olsun. Eğer bir $E \subset X$ kümesi için $E \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ oluyorsa $\mathbb{D}$ ailesine E kümesinin bir* ***açık örtüsü*** *denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \cup_{\lambda\in\Lambda_0} D_\lambda$ ise $\mathbb{D}_0 = (D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$ ailesine E kümesinin* ***sonlu alt örtüsü*** *adı verilir. E kümesini örten $\mathbb{D}$ ailesinin her kümesinin çapı $\varepsilon > 0$'dan büyük değilse $\mathbb{D}$ örtüsüne E kümesinin* ***ε-örtüsü*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.22. ***(Kümeler Arası Uzaklık)*** (X, d) *bir metrik uzay, A ve B de X'in boş olmayan iki altkümesi olsun.*

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$$

sayısına A ile B arasındaki ***uzaklık*** *denir, [7].*

Tanım 2.1.23. ***(Bir Kümenin Çapı)*** (X, d) *bir metrik uzay ve X'in boş olmayan bir altkümesi A olsun. $\delta(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ sayısına* A ***kümesinin çapı*** *denir. Eğer $\delta(A) < \infty$ ise A'ya* ***sınırlı***, *$\delta(A) = \infty$ ise* ***sınırsız küme*** *denir. $\delta(A)$ yerine, bazen diam(A) gösterimi de kullanılır, [7].*

Tanım 2.1.24. ***(Kompakt Küme)*** $(X, \|\cdot\|)$ *uzayının bir altkümesi E olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X'te* ***kompakt***

küme *denir.* X *kompakt bir küme ise* $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayına kompakt normlu uzayı adı verilir, [3].*

Tanım 2.1.25. ***(Dizisel Kompakt Küme)*** $(X, \|\cdot\|)$ *uzayının bir altkümesi* E *olsun.* E *içindeki her dizinin, limiti* E*'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa* E *kümesine* X*'te* ***dizisel kompakt küme*** *denir. Eğer* E *kümesinin* $\bar{E}$ *kapanışı* X*'te dizisel kompakt küme ise* E*'ye* X*'te* ***dizisel önkompakt küme*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.26. ***(Önkompakt Küme)*** $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayı ve* $E \subset X$ *verilsin. Eğer* $\forall \varepsilon > 0$ *sayısı için* E *kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan* ε*-örtüsü varsa* E *kümesine* X*'te* ***önkompakt küme (veya tamamen sınırlı küme)*** *adı verilir. Bazen de* E *kümesinin* $\bar{E}$ *kapanışı* X*'te kompakt bir küme ise* E*'ye* X*'te bir* ***önkompakt küme*** *denir, [3].*

Tamamen sınırlı bir kümenin sınırlı olduğu açıktır. Yani tamamen sınırlılık, sınırlılık şartından daha kuvvetlidir.

Tanım 2.1.27. ***(Kompakt Lineer Operatör veya Tamamen Sürekli Lineer Operatör)*** X *ve* Y *Banach uzayları ve* $A : X \longrightarrow Y$ *operatörü verilsin. Eğer* A *operatörü* X *uzayının sınırlı her kümesini* Y *uzayının bir önkompakt kümesine dönüştürüyorsa* A*'ya* ***kompakt lineer operatör*** *veya* ***tamamen sürekli lineer operatör*** *denir, [3].*

Tanım 2.1.28. ***(Konveks Hull)*** $A \subset X$ *olduğunda* A*'yı içeren tüm konveks kümelerin arakesitine* A*'nın* ***konveks hull****'u denir ve* $co(A)$ *ile gösterilir. Eğer* X *bir topolojik vektör uzayı ise, o zaman* A*'yı içeren,* X*'in tüm kapalı konveks kümelerinin arakesitine* A*'nın kapalı konveks hull'u adı verilir ve* $\overline{co}(A)$ *ile gösterilir, [8].*

$co(A)$ *yerine bazen* $conv(A)$ *veya* $konv(A)$ *ifadeleri de kullanılır.*

Tanım 2.1.29. ***(r-Ayrılabilirlik)*** (X, d) *bir tam metrik uzay olsun.* B*,* X*'in sınırlı bir alt kümesi olmak üzere, tüm* $x, y \in B$*,* $x \neq y$ *için* $d(x, y) \geq r$ *ise* B *kümesine* ***r-ayrılabilirdir*** *denir. Bu durumda* B *kümesi,* X*'in bir* ***r-ayrılabilir kümesi*** *olarak adlandırılır, [11].*

2.2 Temel Teoremler

Teorem 2.2.1. *X ve Y iki normlu uzay olsun. $T : X \longrightarrow Y$ lineer operatörünün $D(T)$ üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır, [3].*

Teorem 2.2.2. *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ verilsin. E kümesi X'te kompakt ise, bu küme X'te dizisel kompakt bir kümedir, [3].*

Teorem 2.2.3. *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart A içinde x'e yakınsayan bir (x_n) dizisinin olmasıdır, [4].*

Teorem 2.2.4. *(a) Bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $x_1, ..., x_n \in A$ ve $\sum_j t_j = 1$ olacak şekildeki $t_1, ...t_n \in [0,1]$'ler için $\sum_j t_j x_j \in A$ olmasıdır.*

(b) Eğer $\{A_i : i \in I\}$ konveks kümelerin bir ailesi ise, o zaman $\cap_i A_i$ de konvekstir, [8].

Teorem 2.2.5. *Konveks iki kümenin lineer terkibi de konvekstir. Yani, S ve T konveks iki küme ve α ve β da iki skaler olsun. Bu durumda $\alpha S + \beta T$ de konvekstir, [6].*

Teorem 2.2.6. *D, sonsuz boyutlu normlu bir uzayda birim yuvar olsun. O zaman D, $0 < t < 1$ olmak üzere tD'nin sonlu sayıdaki ötelemeleriyle örtülemez, [9].*

Teorem 2.2.7. ***(Mazur Teoremi)*** *Eğer X kümesi bir Banach uzayı ve K da X'in kompakt bir altkümesi ise coK kompakttır, [8].*

Teorem 2.2.8. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *S, $\mathbb{R}$'nin sınırlı bir alt kümesi ve sonsuz elemanlı olsun. O zaman S, en az bir yığılma noktasına sahiptir, [10].*

Teorem 2.2.9. ***(Cantor Arakesit Teoremi)*** *(A_k), $\mathbb{R}$'nin boştan farklı, kapalı altkümelerinin bir dizisi, öyle ki A_1 sınırlı ve her k için $A_{k+1} \subset A_k$ olsun. O zaman $A = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$ kesişimi boştan farklıdır, [10].*

Teorem 2.2.10. *Bir metrik uzayda kompakt bir küme kapalı ve sınırlıdır, [10].*

Teorem 2.2.11. *Kompakt bir E kümesindeki her dizi, E'nin bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahiptir, [10].*

Teorem 2.2.12. *Kompakt bir küme önkompakttır, önkompakt bir küme sınırlıdır. Ayrıca önkompakt bir kümenin altkümesi de önkompakttır, [10].*

Teorem 2.2.13. *Bir (X, d) metrik uzayında aşağıdaki şartlar denktir.*

a) (X, d) *kompakttır.*

(b) X'*deki her dizi,* X*'in bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahiptir.*

(c) (X, d) *tam ve önkompakttır, [10].*

Teorem 2.2.14. *A, (X, d) tam metrik uzayının önkompakt bir alt kümesi olsun. O zaman $\bar{A}$ da kompakttır, [10].*

Teorem 2.2.15. ***(Arzela-Ascoli)*** *(X, d) bir kompakt metrik uzay olsun. $C(X)$'in bir E altkümesinin önkompakt olması için gerek ve yeter şart sınırlı ve eşsürekli olmasıdır. E kümesinin kompakt olmasının gerek ve yeter şartı ise sınırlı, kapalı ve eşsürekli olmasıdır, [10].*

3. NONKOMPAKTLIK ÖLÇÜLERİ

Operatörlerin kompaktlığı, Schauder sabit nokta teoreminin ispatında önemli bir rol oynar. Bununla beraber operatörlerin kompakt olmadığı bazı önemli problemler de vardır.

Schauder teoremini nonkompakt operatörlere genişletmek için ilk adım G. Darbo tarafından verildi, [12, 1955]. Temel fikir, herhangi sınırlı kümeyi daha fazla kompakt bir küme içine dönüştüren operatörlerin yeni bir sınıfını tanımlamaktır. "Bir küme daha kompakt bir küme içine dönüştürülür" özelliğini ifade etmek için, bazı nonkompaktlık ölçülerinin tanımlanması gerekir. Bu şekildeki ilk ölçü, Genel Topolojinin belli problemleri ile bağlantılı olarak Kuratowski tarafından tanımlandı, [13, 1930]. Eğer B bir metrik uzayın sınırlı bir kümesi ise B cümlesinin nonkompaktlık ölçüsü

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{B, } \varepsilon\text{-çaplı sonlu sayıda kümeler ile örtülebilir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Darbo bu ölçüyü bazı $k \in [0,1)$ için $\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A)$ şartını sağlayan k-küme-daraltıcı operatörler adı verilen operatörlerin geniş bir sınıfına Schauder teoremini genelleştirmek için kullandı.

O zamandan beri başka nonkompaktlık ölçüleri tanımlanmaktadır. En önemlileri, Gohberg, Gol'denshtein ve Markus [17, 1957] tarafından tanıtılan

$$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0\text{: } B, \varepsilon\text{-yarıçaplı sonlu sayıda yuvar ile örtülebilir}\}$$

Hausdorff nonkompaktlık ölçüsü ve Istratescu [18, 1972], Sadovskii [19, 1968] ve diğer yazarlar tarafından düşünülen

$$\beta(B) = \sup\{r > 0 : \ B, \text{ sonsuz bir } r\text{-ayırımına sahiptir}\}$$

nonkompaktlık ayırım ölçüsüdür.

Nonkompaktlık ölçüleri Banach uzaylarındaki operatör denklemlerin teorisinde çok faydalı araçlardır. Adi diferansiyel denklemleri, kısmi türevli denklemleri, integral ve integro-diferansiyel denklemleri, optimal kontrol teoriyi, vb. içeren fonksiyonel denklemlerin teorisinde çok sık kullanılırlar. Özellikle onlardan türeyen sabit nokta teoremlerinin birçok uygulaması vardır. Bu konuya ilişkin dikkate değer bir literatür vardır.

Son yıllarda, nonkompaktlık ölçüleri, sabit nokta teoremi için ilginç olan Banach uzaylarının yeni geometrik özelliklerini tanımlamak için de kullanılır.

3.1 Bir Nonkompaktlık Ölçüsünün Genel Yapısı

Bu bölümde bir metrik uzaydaki nonkompaktlık ölçüsü kavramı aksiyomatik olarak verilmiştir. Aksiyomatik yaklaşımın, nonkompaktlık ölçüsünü anlamada en iyi yol olduğu görülür. Açıkça aynı olması gerekmeyen çeşitli aksiyom sistemlerini kullanmak mümkündür. Aksiyomların kümesi iki gerekliliği sağlamalıdır; birincisi, doğal gerçekliğe sahip olması ve ikincisi, uygulamalar için faydalı araç olmasıdır.

[20] ve [21] kitaplarında, aksiyomatik olarak, Banach uzaylarındaki nonkompaktlık ölçülerini tanıtan iki farklı yapı verilir. Ama buna rağmen, bir nonkompaktlık ölçü kavramı temelde metrik uzaylarda tanıtıldı ve bu tezde uzayların bu sınıfı için ise aksiyomatik tanım verildi.

Tanım 3.1.1. (X, d) *bir tam metrik uzay ve ß, X'in sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi olsun. Bir* $\phi :ß\to [0, +\infty)$ *dönüşümü, eğer aşağıdaki şartları sağlarsa X'de tanımlı bir* ***nonkompaktlık ölçüsü (kompaktsızlık ölçüsü)*** *adını alır.*

(a) *Regülerlik:* $\phi(B) = 0 \Leftrightarrow B$ *bir önkompakt kümedir.*

(b) *Kapanış altında değişmezlik:* $\phi(B) = \phi(\bar{B})$, $\forall B \in ß$

(c) *Yarı-toplamsallık:* $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$, $\forall B_1 \in ß$, $\forall B_2 \in ß$

Bu aksiyomlardan, aşağıdaki özellikler hemen çıkartılabilir.

(1) Monotonluk: $B_1 \subset B_2 \Rightarrow \phi(B_1) \leq \phi(B_2)$

(2) $\phi(B_1 \cap B_2) \leq \min\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$, $\forall B_1 \in ß$, $\forall B_2 \in ß$

(3) Non-singülerlik: B sonlu bir küme ise o zaman $\phi(B) = 0$ dır.

(4) Genelleştirilmiş Cantor Arakesit Teoremi: $\{B_n\}$, X'in boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$ ise o zaman tüm B_n'lerin B_∞ arakesiti boştan farklı ve kompakt bir kümedir, [11].

İspat. Bu özelliklerden sadece (4)'ü ispatlayalım. $\{x_n\}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_n$ olacak şekilde bir dizi olsun ve $C_n = \{x_i : i \geq n\}$ ile verilen kümelerin azalan bir $\{C_n\}$ dizisini düşünelim. Açık olarak her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n \subset B_n$ ve $\phi(C_1) = \phi(C_n) \leq \phi(B_n)$ dir. Gerçekten örneğin $C_5 \subset B_5$ olduğunu gösterelim. Bunun için $C_5 = \{x_5, x_6, x_7, ...\}$ kümesinden alınan herhangi bir x_i, $(i = 5, 6, ...)$ elemanının B_5'te olduğunu göstermeliyiz. B_n azalan bir dizi olduğundan $B_1 \supset ... \supset B_5 \supset B_6 \supset B_7 \supset ...$ ve ayrıca $x_5 \in B_5$, $x_6 \in B_6$, $x_7 \in B_7, ...$ olduğundan $x_5, x_6, x_7, ... \in B_5$ olur. Buradan $C_5 \subset B_5$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n \subset B_n$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Şimdi de yarı-toplamsallık ve non-singülerlik özelliklerini kullanarak $\phi(C_1) = \phi(C_n)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\phi(C_1) &= \phi(\{x_1, x_2, , ..., x_{n-1}\} \cup \{x_n, x_{n+1}, ...\}) \\ &= \max\{\phi(\{x_1, x_2, , ..., x_{n-1}\}), \phi(\{x_n, x_{n+1}, ...\})\}\end{aligned}$$

Sonlu kümenin ölçüsü 0 olduğundan $\phi(\{x_1, x_2, , ..., x_{n-1}\}) = 0$ dır. Ayrıca $\{x_n, x_{n+1}, ...\} = C_n$, yani $\phi(\{x_n, x_{n+1}, ...\}) = \phi(C_n)$ dir ve $\phi(C_n) \geq 0$ olduğundan $\phi(C_1) = \phi(C_n)$ olur.

$\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$ olduğundan $\phi(C_1) = 0$ dır. Gerçekten;

$$0 \leq \phi(C_1) \leq \phi(B_n) \Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \phi(C_1) \leq \lim_{n\to\infty} \phi(B_n) \Rightarrow 0 \leq \phi(C_1) \leq 0 \Rightarrow \phi(C_1) = 0$$

dır ve böylece $\{x_n\}$ önkompakt bir kümedir. $\bar{x}$, $\{x_n\}$'in bir alt dizisinin limiti olsun. Açık olarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\bar{x} \in B_n$ dir ve buradan $B_\infty \neq \varnothing$ dır. Zira $\bar{x}$, B_n'lerin herbirine ait olduğundan $\bar{x} \in \cap_n B_n = B_\infty$ dur.

Üstelik, her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(B_\infty) \leq \phi(B_n)$ olduğundan ve $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$ olduğundan $\phi(B_\infty) = 0$ elde ederiz ve böylece B_∞ kapalı bir küme olduğundan kompakttır. □

Ayrıca, X bir Banach uzayı ise ϕ nonkompaktlık ölçüsü bazı ilave özellikleri de sağlayabilir. Şimdi bunların bazılarını verelim:

(5) Yarı-homojenlik: Herhangi bir t sayısı ve $B \in$ß için $\phi(tB) = |t|\,\phi(B)$ dir.

(6) Cebirsel yarı-toplamsallık: $\phi(B_1 + B_2) \leq \phi(B_1) + \phi(B_2)$, $\forall B_1 \in$ß, $\forall B_2 \in$ß

(7) Öteleme altında değişmezlik: Herhangi $x_0 \in X$ ve $B \in$ß için $\phi(x_0 + B) = \phi(B)$ dir.

(8) Lipschitzyenlik özelliği: $|\phi(B_1) - \phi(B_2)| \leq L_\phi \rho(B_1, B_2)$ dir. Burada ρ, Hausdorff yarı-metriğini gösterir:

$$\rho(B_1, B_2) : \inf \left\{ \varepsilon > 0 : B_2 \subset B_1 + \varepsilon \bar{B}(0,1),\ B_1 \subset B_2 + \varepsilon \bar{B}(0,1) \right\}$$

(9) Süreklilik: Her $B \in$ß ve her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $\rho(B, B_1) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm B_1'ler için $|\phi(B) - \phi(B_1)| < \varepsilon$ dur.

(10) Konveks hull'a geçiş altında değişmezlik: Her $B \in$ß için $\phi(co(B)) = \phi(B)$ dir, [11].

Örnek 3.1.1. *Her X metrik uzayında*

$$\phi(B) = \begin{cases} 0, & B \text{ önkompakt ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

*dönüşümü, **diskret nonkompaktlık ölçüsü** olarak adlandırılan bir nonkompaktlık ölçüsüdür. X'in Banach uzayı olması halinde, bu ölçü cebirsel olarak yarı-toplamsaldır ve ötelemeler ve konveks hull'a geçiş altında değişmezdir ve ne yarı-homojen ne de süreklidir, [11].*

Örnekteki ϕ'nin nonkompakt ölçü olduğunu göstermeye çalışalım:

(a) özelliğinin ϕ'nin tanımından dolayı sağlandığı kolayca görülür. Yani, $\phi(B) = 0 \Leftrightarrow B$ bir önkompakt kümedir.

(b) B önkompakt ise $\phi(B) = 0$ dır. B önkompakt olduğundan $\bar{B}$ kompakt dolayısıyla da $\bar{B}$ önkompakttır. Buradan $\phi(\bar{B}) = 0$ olur. Yani $\phi(B) = \phi(\bar{B})$ dır. Diğer taraftan, şayet B önkompakt değilse kompakt da değildir ve $\bar{B}$ kompakt değildir. Böylece $\phi(B) = \phi(\bar{B}) = 1$ dir.

(c) özelliği de sağlanır. Gerçekten,

(i) B_1 *ve* B_2 *önkompakt ise:* $B_1 \cup B_2$ *de önkompakttır. Buradan* $\phi(B_1 \cup B_2) = 0$ *olur. Ayrıca* $\phi(B_1) = \phi(B_2) = 0$ *dır. O halde* $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$ *olur.*

(ii) B_1 *ve* B_2 *önkompakt değil ise:* $\exists\varepsilon'$ *için* B_1 *(veya* B_2*) nin sonlu bir örtüsü yoktur.* B_2, ε' *için sonlu örtüye sahip olsun.* B_1*'in sonlu örtüsü olmadığından* $B_1 \cup B_2$ *de sonlu bir örtüye sahip olamaz. Yani* $B_1 \cup B_2 \subset \cup_{i=1}^{m} D_i$ *olacak şekilde* $\{D_i : i = 1, 2, ..., m\}$ *yoktur. Buradan* $\phi(B_1 \cup B_2) = 1$ *olur.* $\phi(B_1) = \phi(B_2) = 1$ *olduğundan* $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$ *dir.*

(iii) B_1 *önkompakt değil,* B_2 *önkompakt ise:* B_1 *önkompakt olmadığından* $\exists\varepsilon'$ *için sonlu bir örtüsü yoktur.* B_2 *önkompakt olduğundan* $\forall\varepsilon$ *için sonlu örtüye sahiptir. Dolayısıyla* $B_1 \cup B_2$, $\exists\varepsilon'$ *için sonlu bir örtüye sahip olamaz. Bu nedenle* $\phi(B_1 \cup B_2) = 1$ *olur. Ayrıca* $\phi(B_1) = 0$ *ve* $\phi(B_2) = 1$ *olduğundan* $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$ *elde edilir.*

B_1*'in önkompakt,* B_2*'nin önkompakt olmadığı durum için de benzer işlemler yapılır.*

Buraya kadar örnekteki ϕ*'nin bir nonkompakt ölçü olduğu görülmüş olur. Şimdi de* ϕ*'nin (6) özelliğini sağladığını görelim.*

Yani, $B_1 + B_2 = \{b_1 + b_2 : \ b_1 \in B_1, \ b_2 \in B_2\}$ *için* $\phi(B_1 + B_2) \leq \phi(B_1) + \phi(B_2)$ *olduğunu görelim:*

(i) B_1 *ve* B_2 *önkompakt ise:* $\forall\varepsilon > 0$ *için* $B_1 \subset \cup_{i=1}^{k_1} C_i$ *ve* $B_2 \subset \cup_{i=1}^{k_2} D_i$ *öyleki* $\max\{k_1, \ k_2\} = k_2$ *diyelim.* $\forall b_j + b'_j \in B_1 + B_2$ *için:* $b_j \in B_1$ *ve* $b'_j \in B_2$ *olup,* $\forall b_j \in B_1$ *için* $\exists C_i$ *vardır* $\ni b_j \in C_i$ *ve* $\forall b'_j \in B_2$ *için* $\exists D_i$ *vardır* $\ni b'_j \in D_i$ *dir. Buradan* $b_j + b'_j \in C_i + D_i$ *dir.* $b_j + b'_j \in \cup_{i=1}^{k_2}(C_i + D_i) \ni$ $(i = k_1 + 1, ..., k_2)$ *için* $C_i \neq \varnothing$ *ve* $C_i + D_i = E_i$ *denirse)* $B_1 + B_2 \subset \cup_{i=1}^{k_2} E_i$ *buradan da* $B_1 + B_2$*'nin önkompakt olduğunu, yani* $\phi(B_1 + B_2) = 0$ *olduğunu söyleriz. Ayrıca* $\phi(B_1) = \phi(B_2) = 0$ *olduğundan sözkonusu eşitsizlik sağlanır.*

(ii) B_1 *ve* B_2 *önkompakt değil ise: Durum aşikardır. Çünkü* $\phi(B_1) = \phi(B_2) = 1$, $\phi(B_1) + \phi(B_2) = 2$ *ve* $B_1 + B_2$ *önkompakt olmadığı için* $\phi(B_1 + B_2) = 1$ *olacağından* $1 \leq 2$ *olur. Böylece sözkonusu eşitsizlik sağlanmış oldu.*

(iii) B_1 *önkompakt değil,* B_2 *önkompakt ise: Aynı şekilde* $\phi(B_1) = 1$, $\phi(B_2) = 0$ *ve buradan* $\phi(B_1) + \phi(B_2) = 1$ *olur. Ayrıca* $B_1 + B_2$ *önkompakt olmadığı için* $\phi(B_1 + B_2) = 1$ *olur ve sözkonusu eşitsizlik sağlanmış olur.*

Buraya kadar ki kısımda herhangi bir nonkompaktlık ölçüsü aksiyomatik yoldan tanıtılıp, sağlayabileceği bazı özelliklerden bahsederek bir örnek verildi. Bundan sonra ise daha ilginç olan iki tane nonkompaktlık ölçüsü tanımlanacaktır.

3.2 Kuratowski ve Hausdorff Nonkompaktlık Ölçüleri

Bu bölümde Kuratowski ve Hausdorff nonkompaktlık ölçüleri tanımlanıp, temel özellikleri verilecektir. Bilindiği gibi $B \in ß$ bir önkompakt küme değilse, en az bir $\varepsilon > 0$ vardır, öyle ki B, ε-çaplı sonlu sayıda küme (veya ε-yarıçaplı sonlu sayıda yuvar) ile örtülemez. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2.1. (X, d) *bir tam metrik uzay ve ß,* X*'in sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi olsun. Her* $B \in ß$ *için* α *(Kuratowski) ve* χ *(Hausdorff) nonkompaktlık ölçüleri aşağıdaki şekilde tanımlanır, [11]:*

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0\text{: } B\text{, çapı} \leq \varepsilon \text{ olan sonlu sayıda küme ile örtülebilir}\}$$

$$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0\text{: } B\text{, yarıçapı} \leq \varepsilon \text{ olan sonlu sayıda yuvar ile örtülebilir}\}$$

Uyarı 3.2.1. *(a) Bilindiği gibi bir* B *kümesinin çapı* $diam(B)$ *ile gösterilen* $\sup\{d(x, y) : x \in B,\ y \in B\}$ *sayısıdır ve* $diam(\varnothing) = 0$ *dır.* X*'in boş olmayan sınırlı her* B *alt kümesi için* $0 \leq \alpha(B) \leq diam(B) < +\infty$ *olduğu ve* B*'nin boş bir küme veya sadece bir noktadan oluşan bir küme olmasının gerek ve yeter şartının* $diam(B) = 0$ *olduğu açıktır. Çapın diğer bazı önemli özellikleri şunlardır:*

(i) $B_1 \subset B_2$ *ise* $diam(B_1) \leq diam(B_2)$ *dir.*

(ii) $diam(\bar{B}) = diam(B)$

(iii) *Cantor Arakesit Teoremi:* $\{B_n\}$, X*'in boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve* $\lim_{n\to\infty} diam(B_n) = 0$ *ise o zaman tüm* B_n*'lerin* B_∞ *arakesiti boştan farklı ve sadece bir tek noktadan oluşur.*

Ayrıca X, bir Banach uzayı ise, o zaman:

(iv) *Herhangi bir t reel sayısı için $diam(tB) = |t|\, diam(B)$ dir.*

(v) *Herhangi bir $x \in X$ için $diam(x + B) = diam(B)$ dir.*

(vi) *$diam(B_1 + B_2) \leq diam(B_1) + diam(B_2)$ dir.*

(vii) *$diam(co(B)) = diam(B)$ dir.*

Gerçekten, (i)-(vi) *arası bilinendir.* (vii)*'yi görmek için $x, y \in co(B)$ diyelim. O zaman $x_i, y_i \in B$ için $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{m} s_j y_j$ dir. $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ ve $\sum_{j=1}^{m} s_j = 1$ dir. Böylece,*

$$
\begin{aligned}
\|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{j=1}^{m} s_j y_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} s_j t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_i s_j y_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_i s_j \|x_i - y_j\| \\
&\leq diam(B) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_i s_j \\
&= diam(B)
\end{aligned}
$$

ve buradan $diam(co(B)) \leq diam(B)$ dir. Eşitsizliğin tersi de açık olduğundan (vii)*'nin doğruluğu sağlanır.*

(b) Bir X Banach uzayındaki,

$$B \subset S + \varepsilon \bar{B}(0,1) = \left\{ s + \varepsilon b : \ s \in S, \ b \in \bar{B}(0,1) \right\}$$

ise B'nin bir "ε-neti" olarak adlandırılan bir $S \subset X$ kümesini hatırlayalım. Böylece, Banach uzaylarındaki χ-ölçüsünün tanımı aşağıdakine özdeş olur:

$$\chi(B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \text{: } B, \text{ sonlu bir } \varepsilon\text{-nete sahiptir} \}.$$

(c) Açık olarak, her iki tanımda "$\leq$" eşitsizlikleri "$<$" olarak alınabilir, [11].

Sonraki özellikler, α ve χ için ortaktır ve bu yüzden ikisini de ifade etmek için ϕ kullanılacaktır. Bu özellikler, tanımlardan hemen çıkar ve her iki dönüşümün Tanım 3.2.1'deki nonkompaktlık ölçüsü olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.1. *ϕ, α veya χ'yi göstersin. O zaman herhangi X tam metrik uzayı için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) Regülerlik: $\phi(B) = 0 \Leftrightarrow B$ önkompakttır,

(b) Kapanış altında değişmezlik: Tüm $B \in ß$'ler için $\phi(\bar{B}) = \phi(B)$,

(c) Yarı-toplamsallık: $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$, $\forall B_1, B_2 \in ß$,

(d) Monotonluk: $B_1 \subset B_2 \Rightarrow \phi(B_1) \leq \phi(B_2)$,

(e) $\phi(B_1 \cap B_2) \leq \min\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$, $\forall B_1 \in ß$, $\forall B_2 \in ß$,

(f) Non-singülerlik: B sonlu bir küme ise o zaman $\phi(B) = 0$ dır,

(g) Genelleştirilmiş Cantor Arakesit Teoremi: $\{B_n\}$, X'in boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$ ise o zaman tüm B_n'lerin B_∞ arakesiti boş olmayan ve kompakttır.

Eğer X bir Banach uzayı ise, o zaman şu ilave özellikler de sağlanabilir:

(h) Yarı-homojenlik: Herhangi t reel sayısı ve $B \in ß$ için $\phi(tB) = |t|\,\phi(B)$ dir,

(i) Cebirsel yarı-toplamsallık: $\phi(B_1 + B_2) \leq \phi(B_1) + \phi(B_2)$, $\forall B_1 \in ß$, $\forall B_2 \in ß$,

(j) Öteleme altında değişmezlik: Herhangi $x_0 \in X$ ve $B \in ß$ için $\phi(x_0 + B) = \phi(B)$ dir,

(k) Lipschitzyenlik özelliği: $|\phi(B_1) - \phi(B_2)| \leq L_\phi \rho(B_1, B_2)$ dir. Burada $L_\chi = 1$, $L_\alpha = 2$'dir ve ρ, Hausdorff yarı-metriğini gösterir (Bkz. syf. 14, (8) öz.),

(l) Süreklilik: Her $B \in ß$ ve her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $\rho(B, B_1) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm B_1'ler için $|\phi(B) - \phi(B_1)| < \varepsilon$ dur, [11].

Bu nonkompaktlık ölçülerinin bazı daha az aşikar özellikleri sonraki teoremlerde elde edilmektedir.

Teorem 3.2.1. *Kuratowski ve Hausdorff nonkompaktlık ölçüleri konveks hull altında değişmezdir. Yani* $\phi(co(B)) = \phi(B)$ *dir.*

İspat. Biz sadece ϕ'nin α'ya eşit alınması halindeki $\alpha(B) = \alpha(co(B))$ olduğunu ispatlayacağız (ϕ'nin χ'ye eşit alınması halinde ispat aynıdır).

$B \subset co(B)$ olduğundan $\alpha(B) \leq \alpha(co(B))$ elde ederiz. Karşıt olarak $\alpha(co(B)) \leq \alpha(B)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ için B'nin sonlu bir $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ örtüsü vardır, öyle ki tüm $i = 1, 2, ..., n$ için $diam(B_i) \leq \alpha(B) + \varepsilon$ dur. $diam(co(B)) = diam(B)$ olduğundan, her B_i kümesinin konveks bir küme olduğunu farzedelim.

$$\sigma = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, ..., n\right\}$$

olarak tanımlansın ve her $\lambda \in \sigma$ için $A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$ olsun.

Önerme 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
\alpha(A(\lambda)) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha(B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i diam(B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\alpha(B) + \varepsilon) \\
&= (\alpha(B) + \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
&= \alpha(B) + \varepsilon
\end{aligned}$$

dur.

Şimdi $\cup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim.

$z = tx + (1-t)y$ ve $\eta = t\lambda + (1-t)\mu$ olsun. $0 \leq t \leq 1$, $x \in A(\lambda)$ ve $y \in A(\mu)$ iken $z \in A(\eta)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Gerçekten, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i$

dir. Burada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \sigma$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \sigma$ ve her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i, y_i \in B_i$ dir.

z noktasının $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i z_i$ formunda yazılabildiği görülebilir. Burada $z_i = \rho_i x_i + (1 - \rho_i) y_i$ ve

$$\rho_i = \begin{cases} t\lambda_i/\eta_i, & \eta_i > 0 \text{ ise} \\ 0 \qquad , & \eta_i = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Böylece, $\eta \in \sigma$ ve B_i konveks bir küme olduğundan $z_i \in B_i$ için $z \in A(\eta)$ dır. Dolayısıyla $\cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$ konvekstir.

Şimdi sonucu ispatlayabiliriz.

$B \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \subset \cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$ ve $\cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$ konveks olduğundan $co(B) \subset \cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$ olur. Çünkü hem $co(B)$ hem de $\cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$, B'yi kapsayan konveks kümelerdir. Ancak $co(B)$, B'yi kapsayan en küçük kapalı konveks küme olduğundan $co(B) \subset \cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$ dır.

σ kümesi kompakt olduğundan, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için σ'da $\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)}$ sonlu sayıda nokta vardır ki $\forall\lambda \in \sigma$ için $\min\left\{\left\|\lambda - \lambda^{(i)}\right\|_1 : i = 1, ..., m\right\} < \varepsilon/M$ dır. Burada $M = \sup\{\|x\| : x \in B_i, i = 1, 2, ..., n\} < +\infty$ dur ve $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ olarak tanımlanmıştır. Böylece, $x \in \cup_{\lambda\in\sigma} A(\lambda)$, $x = \sum\limits_{i} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i} \lambda_i = 1$ ise $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \lambda_i^j\right| < \varepsilon/M$ olacak şekilde $j \in \{1, 2, ..., m\}$ vardır. $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^j x_i$ dersek, $\|x - \bar{x}\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \lambda_i^j\right| \|x_i\| < \varepsilon$ ve buradan

$$co(B) \subset \cup_{i=1}^{m} (A(\lambda^{(i)}) + \varepsilon\bar{B}(0, 1))$$

olur.

Böylece

$$\alpha(co(B)) \leq \max\left\{\alpha(A(\lambda^{(i)})) + \alpha(\varepsilon\bar{B}(0, 1))\right\} \leq \alpha(B) + \varepsilon + 2\varepsilon$$

ve ε'un keyfi olarak seçildiği düşünülürse, $\alpha(co(B)) \leq \alpha(B)$ elde edilir, [11]. $\square$

Teorem 3.2.2. *$B(0,1)$, bir X Banach uzayında birim yuvar olsun. Eğer X sonlu boyutlu ise $\alpha(B(0,1)) = \chi(B(0,1)) = 0$, aksi takdirde $\alpha(B(0,1)) = 2$, $\chi(B(0,1)) = 1$ dir.*

İspat. X sonlu boyutlu bir Banach uzayı ise, sonuç, α ve χ nonkompaktlık ölçülerinin regülerliğinden açıktır. Çünkü sonlu boyutlu bir uzayın birim yuvarı önkompakttır.

Sonsuz boyutlu durumu göz önüne alalım. İlk önce χ için sonucu ispatlayalım. Açık olarak $\chi(B(0,1)) \leq 1$ dir. Farzedelim ki $\chi(B(0,1)) = r < 1$ olsun. $r + \varepsilon < 1$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçelim. X'de $x_1, x_2, ..., x_m$ vardır, öyle ki

$$B(0,1) \subset \cup_{k=1}^{m} B(x_k, (r+\varepsilon)) = \cup_{k=1}^{m} (x_k + (r+\varepsilon)B(0,1))$$

dir.

χ nonkompaktlık ölçüsünün *c,d,j* ve *h* özelliklerinden,

$$\begin{aligned} r &= \chi(B(0,1)) \\ &\leq \chi\left(\cup_{k=1}^{m}(x_k + (r+\varepsilon)B(0,1))\right) \\ &= \max\left\{\chi(x_k + (r+\varepsilon)B(0,1)), k = 1, ..., m\right\} \\ &= \chi((r+\varepsilon)B(0,1)) \\ &= (r+\varepsilon)\chi(B(0,1)) \\ &= r(r+\varepsilon) \end{aligned}$$

dur ve bu $r = 0$ demektir. Çünkü $r \leq r^2$ ve $0 \leq r < 1$ olduğundan $r = 0$ olmak zorundadır. Buradan $\chi(B(0,1)) = 0$ dır ve böylece $B(0,1)$ önkompakttır. Bu X uzayının sonsuz boyutlu olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\chi(B(0,1)) = 1$ dir.

α için sonucu ispatlamada, antipodesteki Borsuk-Lyusternik-Shnirelman teoremini kullanacağız, (Bkz. [22, syf. 100, Teorem 2.6.]).

"Eğer $S_n(0,1)$ n-boyutlu normlu bir uzayda birim küre ve A_k ($k = 1, ..., n$) bu uzayın kapalı alt kümeleriyle $S_n(0,1)$'in bir örtüsü ise o zaman A_k kümelerinin en az bir tanesi uzaklık bakımından iki karşıt nokta içerir, öyle ki $diam(A_k) \geq diam(S_n(0,1))$ dir".

$diam(B(0,1)) = 2$ olduğundan, $\alpha(B(0,1)) \leq 2$ olduğu açıktır. Farzedelim ki $\alpha(B(0,1)) < 2$ olsun. O zaman, tüm $k = 1, ..., n$ için $diam(B_k) < 2$ olacak şekilde X'in sonlu sayıda $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ kapalı alt kümelerini bulabiliriz, öyle ki $B(0,1) \subset \cup_{k=1}^{n} B_k$ dır. Şimdi keyfi n-boyutlu bir X_n alt uzayı ile $B(0,1)$ parçasını alarak ve $A_k = B_k \cap X_n$ alarak antipodesteki teoremle çelişkiye düştük, [11]. $\square$

α ve χ konveks hull altında invaryant kaldığından, aşağıdaki özellik elde edilir:

Sonuç 3.2.1. *$S(0,1)$, bir X Banach uzayında birim küre olsun. Eğer X sonlu boyutlu ise $\alpha(S(0,1)) = \chi(S(0,1)) = 0$, diğer durumlarda $\alpha(S(0,1)) = 2$, $\chi(S(0,1)) = 1$ dir, [11].*

İspat. ϕ, α ve χ nonkompaktlık ölçülerini göstersin. Konveksliğin tanımı gereği, $co(S(0,1))$, $S(0,1)$'i kapsayan en küçük konveks küme olduğundan $co(S(0,1)) = \bar{B}(0,1)$ olur. Yani $\phi(co(S(0,1))) = \phi(\bar{B}(0,1))$ dir. Aynı zamanda nonkompaktlık ölçülerinin (b) özelliğinden $\phi(B(0,1)) = \phi(\bar{B}(0,1))$ ve Teorem 3.2.1'den $\phi(co(S(0,1))) = \phi(S(0,1))$ dir. Buradan $\phi(S(0,1)) = \phi(B(0,1))$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.3. *Kuratowski ve Hausdorff nonkompaktlık ölçüleri arasında*

$$\chi(B) \leq \alpha(B) \leq 2\chi(B)$$

eşitsizlikleri geçerlidir, [11].

Bu eşitsizlikler, bütün sonsuz boyutlu Banach uzaylarının sınıfında olabilecek en iyi durumdur.

İspat. İlk eşitsizlik α ve χ'nin tanımlarından açıktır. İkinci eşitsizliğin kesinliği Teorem 3.2.2'den görülür. Aşağıdaki örnek de ilk eşitsizliğin kesinliğini gösterir. $B = \{e_k : k \geq 1\}$ c_0'da standart baz vektörlerinin kümesi olsun. Her $i \neq j$ için $\|e_i - e_j\| = 1$ olduğundan $\alpha(B) = 1$ dir. Diğer yandan, $\chi(B) = 1$ dir. Çünkü B'nin herhangi sonsuz alt kümesinin c_0'ın herhangi bir elemanına uzaklığı 1'den daha küçük olamaz. $\square$

Uyarı 3.2.2. *Genellikle α ve χ'nin farklı nonkompaktlık ölçüleri olduğu düşünülse de, bazı Banach uzaylarında bu iki ölçünün arasında direkt bir bağlantı bulabiliriz.*

Örnek 3.2.1. *ℓ^∞, supremum normu ile tüm sınırlı reel dizilerin uzayı ve A, ℓ^∞'da sınırlı bir küme olsun. O zaman $\alpha(A) = 2\chi(A)$ dır.*

Gerçekten, her metrik uzayda $\alpha(A) \leq 2\chi(A)$ olduğunu biliyoruz. ε keyfi pozitif bir sayı ve $A_1, A_2, ..., A_r$ ℓ^∞'da kümeler olsun, öyle ki A, $\cup_{i=1}^r A_i$'dedir ve $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon$ dur. Herbir $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_i^k = \inf\left\{x^k : x = (x^j)_{j\in\mathbb{N}} \in A_i\right\}$, $\beta_i^k = \sup\left\{x^k : x = (x^j)_{j\in\mathbb{N}} \in A_i\right\}$, $c_i^k = \frac{\alpha_i^k+\beta_i}{2}$, $c_i = (c_i^j)_{j\in\mathbb{N}}$ ve $B_i = B(c_i, \frac{\alpha(A)+\varepsilon}{2})$ olsun. $A_i \subset B_i$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\chi(A) \leq \frac{\alpha(A)+\varepsilon}{2}$ dir ve $\varepsilon \to 0$ için $2\chi(A) \leq \alpha(A)$ elde edilir ve ispat tamamlanır, [11].

Hausdorff nonkompaktlık ölçüsünün faydalı bir özelliğini elde etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.2.1. *X Banach uzayının A, B ve C alt kümeleri verilsin. Farzedelim ki B konveks ve kapalı, C sınırlı ve $A + C \subset B + C$ olsun. O zaman $A \subset B$ dir.*

İspat. a, A'nın bir elemanı olsun. a'nın B'ye ait olduğunu göstermeliyiz. Verilen herhangi $c_1 \in C$ elemanı için $a + c_1 \in B + C$ olduğu bilinmektedir. Yani $b_1 \in B$ ve $c_2 \in C$ vardır, öyle ki $a + c_1 = b_1 + c_2$ dir. Aynı sabepten c_2, C'de olduğundan, $b_2 \in B$ ve $c_3 \in C$ vardır, öyle ki $a + c_2 = b_2 + c_3$ dür.

İşlem benzer şekilde tekrarlanarak, özetle ilk n eşitsizlik elde edilir:

$$na + \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=2}^{n+1} c_i$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{c_{n+1}}{n} - \frac{c_1}{n}$$

B konveks olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$, B'ye ait olur. Ayrıca hem $\frac{c_1}{n}$ hem de $\frac{c_{n+1}}{n}$ orjine gider, çünkü C sınırlıdır. Böylece d_n'in a'ya yakınsadığı sonucunu çıkarabiliriz. B kapalı olduğundan sonuç olarak $a \in B$'dir, [11]. □

Teorem 3.2.4. *$\chi(B(A, r)) = \chi(A) + r$ dir. Burada $B(A, r) = \cup_{x\in A} B(x, r)$ dir.*

İspat. $B(A, r) = A + rB(0, 1)$ olduğundan, χ fonksiyonunun özelliklerinden $\chi(B(A, r)) \leq \chi(A) + r$ dir. Gerçekten (h) ve (i) özelliklerinden

$\chi(A + rB(0,1)) \leq \chi(A) + \chi(rB(0,1)) = \chi(A) + r\chi(B(0,1)) = \chi(A) + r$ dir. Eşitsizliğin tersini ispatlamak için, χ'nin tanımından, herhangi $r_1 > \chi(A+rB(0,1))$ sayısı için sonlu bir H kümesinin mevcut olduğunu anlarız, öyle ki $A + rB(0,1) \subset H + r_1B(0,1)$ dir. Böylece

$$A + rB(0,1) \subset \overline{co}(H) + (r_1 - r)B(0,1) + rB(0,1)$$

olur.

Konveks iki kümenin lineer terkibi de konveks olduğundan, $\overline{co}(H) + (r_1 - r)B(0,1)$ konvekstir ve ayrıca bu küme kapalı da olduğundan, Lemma 3.2.1, $A \subset \overline{co}(H) + (r_1 - r)B(0,1)$ olduğunu gösterir ve dolayısıyla $\chi(A) \leq \chi(H) + r_1 - r = r_1 - r$ olur. Böylece, $\chi(A) + r \leq r_1$ dir ve r_1, $\chi(A + rB(0,1))$'den daha büyük olan keyfi bir sayı olduğundan $\chi(A)+r \leq \chi(A+rB(0,1)) = \chi(B(A,r))$ elde edilir. Bu eşitsizlik de ispatı tamamlar, [11]. $\square$

Son olarak, Kuratowski nonkompaktlık ölçüsünü kullanarak genelleştirilmiş Arzela-Ascoli teoremini ispatlayalım, [11].

Teorem 3.2.5. *X bir Banach uzayı, $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ve $B \subset C(D;X)$ sınırlı ve eşsürekli bir küme olsun. O zaman $\alpha(B) = \sup_{t\in D} \alpha(\{x(t) : x \in B\})$ dir.*

İspat. $\mu > \alpha(B)$ olsun. O zaman sonlu sayıda $M_1, M_2, ..., M_p$ kümeleri vardır, öyle ki her $i = 1, 2, ..., p$ için $M_i \subset C(D;X)$, $diam(M_i) \leq \mu$ ve $B \subset \cup_{i=1}^{p} M_i$ dir.

Böylece her $t \in D$ için $\{x(t) : x \in B\} \subset \cup_{i=1}^{p} \{x(t) : x \in M_i\}$ dir ve

$$diam(\{x(t) : x \in M_i\}) = \sup_{x,x'\in M_i} \{\|x(t) - x'(t)\|\} \leq diam(M_i) \leq \mu$$

dür. Dolayısıyla her $t \in D$ için $\alpha(\{x(t) : x \in B\}) \leq \mu$ dür ve buradan

$$\sup_{t\in D} \{\alpha(\{x(t) : x \in B\})\} \leq \alpha(B)$$

dir.

Şimdi eşitsizliğin tersini ispatlayalım. B eşsürekli ve D kompakt bir küme olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için D'de sonlu sayıda $t_1, t_2, ..., t_p$ noktaları bulabiliriz, öyle ki herhangi $t \in D$ için $\{x(t) : x \in B\} \subset \cup_{i=1}^{p} (\{x(t_i) : x \in B\} + B(0, \varepsilon))$ olur.

Ayrıca, $\mu > \sup_{t\in D}\left\{\alpha\left(\{x(t): \ x\in B\}\right)\right\}$ ise sonlu sayıda $M_1, M_2, ..., M_h$ kümeleri bulabiliriz, öyle ki $diam(M_j) \leq \mu$ ve $\cup_{i=1}^{p}\{x(t_i): \ x\in B\} \subset \cup_{j=1}^{h} M_j$ dir. B, $\left\{x\in B: \ x(t_1)\in M_{j_1}, ..., x(t_p)\in M_{j_p}\right\}$ sonlu sayıdaki kümelerin birleşimi olduğundan ve bu kümeler $\mu+2\varepsilon$ dan daha küçük bir çapa sahip olduğundan $\alpha(B)\leq \mu+2\varepsilon$ elde edilir ve böylece sonuca ulaşılır, [11]. $\square$

4. VOLTERRA TİPİ KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERİN BİR SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ

İntegral denklemler ve integral operatörlerin teorisi nonlineer analizin önemli bir parçasıdır. Bunun nedeni bu teorinin, matematiğin diğer dallarında ve gerçek dünyayla ilgili problemlerin karşılaşıldığı; matematiksel fizik, mühendislik, iktisat, biyolojide de sürekli olarak uygulanabilmesi gerçeğinden kaynaklanmaktadır.

Bu bölümde, Volterra tipi kuadratik integral denklemlerin bir sınıfının çözülebilirliği ele alındı. Kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı ve sürekli olan reel değerli fonksiyonların Banach uzayında, bu tip denklemlerin çözümleri araştırıldı. Araştırmalarımızda kullandığımız temel araç, nonlineer analizin birçok dallarında sıklıkla kullanılan nonkompaktlık ölçü tekniğidir, [20, 23, 24, 25]. Monoton fonksiyonların sınıfında dikkate alınan denklemlerin çözülebilirliğini ispatlamada [26]'da tanımlanan nonkompaktlık ölçüsü kullanılacaktır.

Bu bölümdeki sonuçlar, [23]'de daha önce elde edilen sonuçları genelleştirir ve tamamlar.

4.1 Yardımcı Bilgiler

Şimdi, ileride gerekecek temel kavramları hatırlayalım.

Farzedelim ki E, $\|.\|$ normu ile bir reel Banach uzayı ve sıfır elemanı 0 olsun. x-merkezli ve r-yarıçaplı kapalı yuvarı $\bar{B}(x,r)$ ile ve $\bar{B}(0,r)$ yuvarını da kısaca B_r ile gösterelim. E'nin boş olmayan bir X alt kümesi için, X 'in kapanışını ve konveks kapanışını sırasıyla $\bar{X}$ ve coX ile gösteririz. λX ve $X+Y$ ile kümeler üzerindeki cebirsel işlemleri gösteririz. Son olarak, E'nin boştan farklı ve sınırlı altkümelerinin ailesi M_E ile ve bütün önkompakt kümelerinden oluşan alt ailesi de N_E ile gösterilir.

Tanım 4.1.1. *Bir $\mu : M_E \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, bu* *fonksiyona E uzayında bir* ***nonkompaktlık (veya kompaktsızlık) ölçüsü*** *denir, [20].*

(1) Çek$\mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ ailesi boştan farklıdır ve Çek$\mu \subset N_E$ dir,

(2) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$,

(3) $\mu(\bar{X}) = \mu(coX) = \mu(X)$,

(4) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$,

(5) Eğer $\{X_n\}_n, (n = 1,2,...), M_E$'deki kapalı kümelerin, $X_{n+1} \subset X_n$ ve $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ şartlarını sağlayan bir dizisi ise o zaman $X_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ kümesi boş değildir.

Yukarıda tanımlanan *Çekμ* ailesine *μ nonkompaktlık ölçüsünün çekirdeği* denir. Nonkompaktlık ölçüleri ve bunların özelikleri ile ilgili diğer bilgiler [20]'de verilmektedir. İleride verilecek olan "Temel Sonuç"taki amacımıza ulaşmak için yalnızca aşağıdaki sabit nokta teoremine ihtiyaç duyulacaktır.

Teorem 4.1.1. *N, E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $F : N \to N$ sürekli bir dönüşüm olsun, öyle ki N 'nin boştan farklı her X altkümesi için $\mu(FX) \leq K\mu(X)$ dir. Burada $K \in [0,1)$ bir sabittir. O zaman F'nin, N kümesinde sabit bıraktığı bir nokta vardır, [27].*

Uyarı 4.1.1. *Teoremde verilen şartlar altında gösterilebilir ki; N 'ye ait olan F'nin sabit noktalarının $FixF$ kümesi Çekμ nün bir elemanıdır. Bu sonuç verilen denklemlerin çözümlerini karakterize etmemize olanak sağlar, [27].*

Bundan sonra, $[0, M]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli tüm fonksiyonlardan oluşan $C[0, M]$ klasik Banach uzayında çalışılacaktır. Kolaylık için $I = [0, M]$ ve $C(I) = C[0, M]$ diyeceğiz. $C(I)$ uzayı,

$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in I\}$$

standart normu ile verilir. Şimdi "Temel Sonuç"ta kullanılacak olan $C(I)$ uzayındaki bir nonkompaktlık ölçüsünün tanımını hatırlatalım. Bu ölçü [26]'da tanıtılarak çalışılmıştır.

Bunun için, $C(I)$'nın boş olmayan ve sınırlı bir X altkümesini alalım. $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için *x'in süreklilik modülü*'nü $w(x, \varepsilon)$ ile gösterip,

$$w(x, \varepsilon) = \sup \{|x(t) - x(s)| : t, s \in I, |t - s| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca

$$w(X, \varepsilon) = \sup \{w(x, \varepsilon) : x \in X\}$$
$$w_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} w(X, \varepsilon)$$

olsun. Şimdi de

$$i(x) = \sup \{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s\}$$
$$i(X) = \sup \{i(x) : x \in X\}$$

ile tanımlansın.

"$i(X) = 0 \Leftrightarrow X$ 'e ait olan bütün fonksiyonlar I 'da azalmayandır." önermesinin doğruluğu gösterilebilir. Sonuç olarak

$$\mu(X) = w_0(X) + i(X)$$

olarak tanımlanırsa gösterilebilir ki, μ fonksiyonu $C(I)$ uzayında bir nonkompaktlık ölçüsüdür, [26]. Bundan da öte *Çek*μ çekirdeği, $M_{C(I)}$'ya ait olan bütün X kümelerinden oluşur, öyle ki X'ten alınan bütün fonksiyonlar I aralığında eşsürekli ve azalmayandır.

4.2 Temel Sonuç

Bu bölümde, daha önce tanımlanan μ nonkompaktlık ölçüsü integral denklemimizin monoton çözümlerinin bulunmasında kullanıldı.

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau \ , \quad t \in I \tag{4.2.1}$$

lineer olmayan kuadratik Volterra integral denklemini göz önüne alalım. $x = x(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon iken, denklemde verilen $a(t)$ ve $v(t, \tau, x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır.

Bu denklem aşağıdaki şartlar altında incelenecektir.

(i) $a \in C(I)$ ve a fonksiyonu I aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

(ii) $v : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur öyle ki $v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ve keyfi sabit $\tau \in I$ ve $x \in \mathbb{R}_+$ için $t \to v(t, \tau, x)$ fonksiyonu I aralığında azalmayandır.

(iii) Azalmayan bir $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır, öyle ki tüm $t, \tau \in I$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|v(t, \tau, x)| \leq f(|x|)$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) $T : C(I) \to C(I)$ operatörü süreklidir ve Q sabitli μ nonkompaktlık ölçüsü için Teorem 4.1.1'in şartlarını sağlar. Ayrıca T pozitif bir operatördür, yani $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ dır.

(v) Negatif olmayan c ve d sabitleri vardır öyle ki her $x \in C(I)$ ve $t \in I$ için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d \, \|x\|$$

dir.

(vi) $\|a\| + (c + dr)Mf(r) \leq r$ eşitsizliği pozitif bir r_0 çözümüne sahiptir öyle ki $Mf(r_0)Q < 1$ dir, [27].

Bu durumda, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1. (i)-(vi) *hipotezleri altında (4.2.1) denkleminin* $C(I)$ *uzayına ait olan en az bir* $x = x(t)$ *çözümü vardır ve bu çözüm* I *aralığında azalmayandır.*

İspat. $C(I)$ uzayında tanımlı V operatörünü

$$(Vx)(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau$$

şeklinde tanımlayalım. *(i), (ii)* ve *(iv)* şartlarından Vx fonksiyonu herhangi $x \in C(I)$ fonksiyonu için I aralığında süreklidir, dolayısıyla V, $C(I)$ uzayından

$C(I)$ uzayına tanımlıdır, yani $V : C(I) \to C(I)$ dır. Bundan da öte *(iii)* ve *(v)* şartlarını dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
|(Vx)(t)| &\leq |a(t)| + |(Tx)(t)| \left| \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
&\leq \|a\| + (c + d\|x\|) \int_0^t f(|x(\tau)|)d\tau \\
&\leq \|a\| + (c + d\|x\|) \int_0^t f(\|x\|)d\tau \\
&\leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, bu son eşitsizlik her $t \in [0, M]$ için geçerli olduğundan,

$$|(Vx)(t)| \leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|)$$

eşitsizliğinin sol tarafında $t \in [0, M]$ için maksimum alınırsa,

$$\|Vx\| \leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|)$$

olur. $\|x\| \leq r_0$ ise f azalmayan olduğundan $f(\|x\|) \leq f(r_0)$ olduğu ve *(vi)* şartı, son eşitsizlikte kullanılırsa,

$$\|Vx\| \leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|) \leq \|a\| + (c + dr_0)Mf(r_0) \leq r_0$$

olur. *(vi)* şartından dolayı, son eşitsizliğin $Mf(r_0)Q < 1$ olacak şekilde bir $r_0 > 0$ çözümü vardır. Böylece $\|x\| \leq r_0$ ise $\|Vx\| \leq r_0$ elde ederiz. Dolayısıyla $x \in B_{r_0}$ için $Vx \in B_{r_0}$ olduğundan, V operatörü B_{r_0} yuvarından B_{r_0} yuvarına tanımlıdır diyebiliriz. Yani $V : B_{r_0} \to B_{r_0}$ dır.

Bundan sonra V operatörünü, B_{r_0} yuvarının alt kümesi olan ve

$$B_{r_0}^+ = \{x \in B_{r_0} : x(t) \geq 0, t \in I\}$$

şeklinde tanımlı $B_{r_0}^+$ üzerinde düşüneceğiz.

Açık olarak, $B_{r_0}^+$ kümesi boştan farklıdır. Örneğin, $x(t) = \frac{r_0}{2} \in B_{r_0}$ alalım. $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \frac{r_0}{2} \leq r_0$ olduğundan $x(t) \in B_{r_0}^+$ dır. Aynı zamanda: $B_{r_0}^+$ sınırlı, kapalı ve konvekstir. Bu özelliklerden ve *(i)*, *(ii)* ve *(iv)* şartlarından V 'nin $B_{r_0}^+$ kümesinden $B_{r_0}^+$'ya tanımlandığını, yani $V : B_{r_0}^+ \to B_{r_0}^+$ olduğunu kolayca anlarız.

Şimdi V'nin $B_{r_0}^+$ kümesinde sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $\varepsilon > 0$ sabiti ve keyfi $x, y \in B_{r_0}^+$ alalım, öyle ki $\|x - y\| \leq \varepsilon$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
|(Vx)(t) - (Vy)(t)| &= \left|(Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - (Ty)(t)\int_0^t v(t,\tau,y(\tau))d\tau\right| \\
&\leq \left|(Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - (Ty)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\quad + \left|(Ty)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - (Ty)(t)\int_0^t v(t,\tau,y(\tau))d\tau\right| \\
&\leq |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \\
&\quad + |(Ty)(t)| \int_0^t |v(t,\tau,x(\tau)) - v(t,\tau,y(\tau))|\, d\tau \\
&\leq \|Tx - Ty\| \int_0^t f(r_0)d\tau + (c + dr_0)\int_0^t \beta_{r_0}(\varepsilon)d\tau \\
&\leq \|Tx - Ty\|\, Mf(r_0) + (c + dr_0)\beta_{r_0}(\varepsilon)M
\end{aligned}$$

Burada $\beta_{r_0}(\varepsilon)$,

$$\beta_{r_0}(\varepsilon) = \sup\left\{|v(t,\tau,x) - v(t,\tau,y)| : t,\tau \in I,\ x,y \in [0,r_0],\ \ |x-y| \leq \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buna göre yukarıdaki son eşitsizliğin solunda $t \in [0, M]$ için maksimum alınırsa,

$$\|Vx - Vy\| \leq \|Tx - Ty\|\, Mf(r_0) + (c + dr_0)M\beta_{r_0}(\varepsilon)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

v fonksiyonunun $I \times I \times [0, r_0]$ kümesi üzerindeki düzgün sürekliliği ve T'nin de sürekliliğinden, son eşitsizlik V operatörünün $B_{r_0}^+$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterir.

Bundan sonrası için, boştan farklı $X \subset B_{r_0}^+$ kümesini alacağız. Ayrıca keyfi olarak bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x \in X$ ve $t, s \in [0, M]$, seçelim öyle ki $|t - s| \leq \varepsilon$ dur.

Genelliği kaybetmeksizin $t \leq s$ olduğunu farzedebiliriz. O halde, hipotezlerimizden;

$$\begin{aligned}
|(Vx)(s) - (Vx)(t)| &\leq |a(s) - a(t)| \\
&\quad + \left|(Tx)(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq w(a,\varepsilon) \\
&\quad + \left|(Tx)(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\quad + \left|(Tx)(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t)\int_0^s v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\quad + \left|(Tx)(t)\int_0^s v(t,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq w(a,\varepsilon) + |(Tx)(s) - (Tx)(t)|\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \\
&\quad + (Tx)(t)\int_0^s |v(s,\tau,x(\tau)) - v(t,\tau,x(\tau))|\, d\tau \\
&\leq w(a,\varepsilon) + w(Tx,\varepsilon)\int_0^s f(r_0)d\tau + (c+dr_0)\int_0^s \gamma_{r_0}(\varepsilon)d\tau \\
&\quad + (c+dr_0)f(r_0)(s-t) \\
&\leq w(a,\varepsilon) + w(Tx,\varepsilon)Mf(r_0) + (c+dr_0)M\gamma_{r_0}(\varepsilon) \\
&\quad + (c+dr_0)f(r_0)\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma_{r_0}(\varepsilon)$,

$$\gamma_{r_0}(\varepsilon) = \sup\{|v(s,\tau,x) - v(t,\tau,x)| : t,s \in I, |s-t| \leq \varepsilon,\ x \in [0,r_0]\}$$

şeklinde tanımlıdır. v fonksiyonunun $I \times I \times [0,r_0]$ kümesi üzerinde düzgün sürekliliğinden, $\varepsilon \to 0$ için $\gamma_{r_0}(\varepsilon) \to 0$ olduğunu görürüz. Yukarıda elde edilenlerle bağlantılı olarak bu gerçek, aşağıdaki eşitsizlikleri yazmamızı sağlar. Önce eşitsizliğin sol tarafında $s,t \in I$ için supremum alınırsa;

$$w(Vx,\varepsilon) \leq w(a,\varepsilon) + w(Tx,\varepsilon)Mf(r_0) + (c+dr_0)M\gamma_{r_0}(\varepsilon) + (c+dr_0)f(r_0)\varepsilon$$

olur. Sonra son eşitsizliğin her iki tarafında x üzerinden supremum alınırsa;

$$w(VX,\varepsilon) \leq w(a,\varepsilon) + w(TX,\varepsilon)Mf(r_0) + (c+dr_0)M\gamma_{r_0}(\varepsilon) + (c+dr_0)f(r_0)\varepsilon,$$

elde edilir ve son olarak da elde edilen bu eşitsizliğin her iki tarafında $\varepsilon \to 0$ iken limit alınırsa,

$$w_0(VX) \leq Mf(r_0)w_0(TX) \tag{4.2.2}$$

yazılır.

Diğer yandan keyfi $x \in X$ ve $t \leq s$ olacak şekilde $t, s \in I$ seçilsin. O halde aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&|(Vx)(s) - (Vx)(t)| - [(Vx)(s) - (Vx)(t)] \\
&= \left| a(s) + (Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - a(t) - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
&\quad - \left[a(s) + (Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - a(t) - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\leq [|a(s) - a(t)| - [a(s) - a(t)]] \\
&\quad + \left[\left| (Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \right. \\
&\quad \left. - \left[(Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \right] \\
&\leq \left| (Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
&\quad + \left| (Tx)(t) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
&\quad - \left[(Tx)(s) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\quad - \left[(Tx)(t) \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\leq |(Tx)(s) - (Tx)(t)| \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - [(Tx)(s) - (Tx)(t)] \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \\
&\quad + |(Tx)(t)| \left[\left| \int_0^t (v(s,\tau,x(\tau)) - v(t,\tau,x(\tau)))d\tau \right| + \left| \int_t^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right| \right] \\
&\quad - (Tx)(t) \left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\leq [|(Tx)(s) - (Tx)(t)| - [(Tx)(s) - (Tx)(t)]] \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \\
&\quad + (Tx)(t) \left[\int_0^t (v(s,\tau,x(\tau)) - v(t,\tau,x(\tau)))d\tau) + \int_t^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\quad - (Tx)(t) \left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
&\leq [|(Tx)(s) - (Tx)(t)| - [(Tx)(s) - (Tx)(t)]] \, Mf(r_0) \leq Mf(r_0) i(Tx).
\end{aligned}$$

Böylece son eşitsizliğin sol tarafında $t \leq s$ olmak üzere $t, s \in I$ üzerinden supremum alınırsa,

$$i(Vx) \leq Mf(r_0) i(Tx)$$

elde ederiz ve son bağıntıda da $x \in X$ üzerinden supremum alınırsa,

$$i(VX) \leq Mf(r_0)i(TX) \tag{4.2.3}$$

olur. Son olarak (4.2.2) ve (4.2.3)'ün taraf tarafa toplanması ve μ nonkompaktlık ölçüsünün tanımından (4.1. Kesim) ve ayrıca *(iv)* hipotezinden,

$$\mu(VX) \leq Mf(r_0)\mu(TX) \leq Mf(r_0)Q\mu(X)$$

elde ederiz. *(vi)* hipotezine göre $Mf(r_0)Q < 1$ olduğundan Teorem 4.1.1 de kullanılarak ispat tamamlanır. Yani, V, $B_{r_0}^{+}$'da sabit bir noktaya sahiptir. Başka bir ifadeyle (4.2.1) denkleminin $B_{r_0}^{+} \subset C(I)$'da en az bir çözümü vardır, [27]. □

Uyarı 4.2.1. *Uyarı 4.1.1'i ve 4.1. Kesimde verilen μ nonkompaktlık ölçüsüsün çekirdeği tanımını dikkate alarak, $B_{r_0}^{+}$ kümesine ait olan integral denklemimizin çözümlerinin $I = [0, M]$ aralığında* ***azalmayan*** *ve* ***sürekli*** *olduğunu Teorem 4.2.1'den kolayca görebiliriz. Üstelik bu çözümler $t \in I$ için $a(t) > 0$ olduğundan pozitiftir.*

4.3 Bazı Uyarılar

Öncelikle Teorem 4.2.1'in *(v)* hipotezi ile ilgili bir inceleme yapılacaktır. Teorem 4.2.1'in *(v)* hipotezi aşağıdaki durumda değiştirilebilir. T operatörünün,

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,|x(t)|\,,\ (x \in C(I) \text{ ve } t \in I\ ) \tag{4.3.1}$$

bağıntısını sağlayacak şekilde, negatif olmayan c ve d sabitlerinin varlığını doğruladığı gösterilebilir. Bu durumda, bu şartla Teorem 4.2.1'in ispatı, bu çalışmada verilen ispatla aynı şekilde yapılabilir.

Ayrıca, eğer T operatörü yukarıdaki şartı sağlarsa *(v)* hipotezini de sağlar, yani

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,|x(t)|\,,\ (t \in I) \Rightarrow |(Tx)(t)| \leq c + d\,\|x\|\,,\ (t \in I)$$

dir. Fakat, *(v)* hipotezini sağlayıp (4.3.1) eşitsizliğini sağlamayan operatörler vardır, örneğin $(Tx)(t) = x(t^2)$ şeklinde tanımlı T operatörü. Bu durumda

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,|x(t)|$$

olacak şekilde hiçbir c ve d sabitlerinin olmadığını görürüz. Farz edelim ki bu c ve d sabitleri var olsun ve $t_0 \in (0,1)$ olsun. $(t_0, 0)$ ve $(t_0^2, \max(c,d)+1)$ noktalarını birleştiren doğruyu düşünelim ve bu doğru

$$x(t) = \frac{\max(c,d)+1}{t_0^2 - t_0}(t - t_0)$$

şeklinde ifade edilsin. O zaman x'in $C(I)$'ya ait olduğu ve Tx'in (4.3.1) eşitsizliğini sağlamadığı açıktır. Gerçekten, $t = t_0$ alınırsa,

$$|(Tx)(t_0)| = \left|x(t_0^2)\right| = \max(c,d)+1$$

olur ve $c + d\,|x(t_0)| = c$ dir. Dolayısıyla $|Tx(t_0)| > c + d\,|x(t_0)|$ dır.

Böylece, *(v)* hipotezinin (4.3.1) eşitsizliğinden daha az sınırlayıcı olduğu sonucuna varılır.

Bundan sonra, Teorem 4.2.1'in hipotezleri ile ilgili bazı örnekler verilecektir.

Örnek 4.3.1. *$a(t) = t^2 - 2t + 1$ şeklinde tanımlı azalmayan olmayan $a \in C[0,1]$ fonksiyonunu alalım. Sonuç olarak, bu fonksiyon* (i) *hipotezini sağlamaz.*

$v(t,\tau,x) = 1$ olsun, bu fonksiyon (ii) *ve* (iii) *hipotezlerini sağlar ki bu durumda $f(r) = 1$ olan f fonksiyonunu ve $M = 1$ alabiliriz.*

T operatörü; $(Tx)(t) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda $c = 1$ ve $d = 0$ için (iv) *ve* (v) *hipotezleri sağlanır. $Q = 1/2$ alabiliriz. $\|a\| = 1$ için* (vi) *deki eşitsizlik,*

$$1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \leq r$$

olur ve $r_0 = 2$ sayısı bu eşitsizliğin pozitif bir çözümüdür. Ayrıca,

$$Mf(r_0)Q = 1 \cdot 1 \cdot (1/2) \leq 1$$

dir. İntegral denklemimiz,

$$x(t) = (t^2 - 2t + 1) + \int_0^t d\tau = t^2 - t + 1$$

şeklinde ifade edilebilir ve sonuç olarak çözüm azalmayan olmayan bir çözümdür, [27].

Örnek 4.3.2. *Aralığımız* $[0, 1]$ *olsun. Teorem 4.2.1'in* (i) *hipotezini sağlayan sıfır fonksiyonunu* $a \in C[0, 1]$ *olarak alalım.* (ii) *hipotezini sağlamayıp* $f = 1/4$ *için* (iii) *hipotezini sağlayan* v *fonksiyonu,* $v(t, \tau, x) = t^2 - t + (1/4)$ *olsun.*

$(Tx)(t) = 1$ *alalım. Bu operatör* $c = 1, d = 0$ *ve* $Q = 1/2$ *için* (iv) *ve* (v) *hipotezlerini sağlar.* (vi) *deki eşitsizlik,*

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \leq r$$

şeklinde olur. Burada $r_0 = 1/4$ *pozitif bir çözüm olarak alınabilir. Ayrıca,* $Mf(r_0)Q = 1 \cdot (1/4) \cdot (1/2) < 1$ *dir ve integral denklemimiz,*

$$x(t) = \int_0^t \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) d\tau = t^3 - t^2 + \frac{t}{4}$$

formundadır. Çözüm azalmayan değildir, [27].

Örnek 4.3.3. $a \in C[0, 1]$ *fonksiyonunu sıfır fonksiyonu ve* $c = 1, d = 0$ *için* (iv) *ve* (v)*'i sağlayan* T *operatörünü de* $(Tx)(t) = 1$ *olarak alalım.*

Şimdi $v(t, \tau, x) = x - 1$ *olsun. Açık olarak,* $v : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(I = [0, 1])$ *sürekli bir fonksiyondur, fakat bu fonksiyon* $v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *hipotezini sağlamaz.* $f(r) = 1 + r$ *için* (iii) *hipotezi sağlanır.* (vi) *deki eşitsizlik,*

$$1 \cdot 1 \cdot (1 + r) \leq r$$

olur ve bu eşitsizliğin çözümü yoktur. İntegral denklemimiz,

$$x(t) = \int_0^t (x(\tau) - 1) d\tau$$

formundadır. Açık olarak, $x(t) \equiv 0$ *bu integral denklemin bir çözümü değildir. Ayrıca* $x(0) = 0$ *için, bu denklem,* $x(t)$*'nin sürekliliği ve monotonluğunu kullanarak ve bizim integral denklemimizin formundan azalmayan bir çözüme sahipse* $t_0 \in I$ *bulabilirz, öyle ki* $x(t_0) < 0$ *dır ve bu mümkün değildir. O halde denklem azalmayan bir çözüme sahip değildir, [27].*

4.4 Örnekler

Şimdi de *(iii)* ve *(iv)* hipotezleri ile ilgili bazı örnekler verilecektir.

Örnek 4.4.1. *Farzedelim ki* (iii) *hipotezinde bulunan f fonksiyonu, $f(r) = \lambda r^3$ şeklinde olsun. Burada λ pozitif bir sabittir. Bir $a \in C[0,1]$ fonksiyonu alalım, öyle ki $\|a\| \leq 1/2$ ve $\lambda < 8 - 16\|a\|$ olsun. Bu durumda $M = 1$ dir ve T için $(Tx)(t) = x(t)$ operatörünü düşünelim. O zaman* (vi) *deki eşitsizlik,*

$$\|a\| + \lambda r^4 \leq r$$

şeklinde olur. $[0,1/2]$ *aralığında*

$$g(r) = \|a\| + \lambda r^4 - r$$

fonksiyonuna Bolzano teoremini uygulayarak $0 < r_0 < 1/2$ için bahsedilen eşitsizliğe pozitif bir r_0 çözümü bulabiliriz. Üstelik,

$$Mf(r_0)Q = f(r_0) = \lambda r_0^3 < \frac{\lambda}{8} < 1 - 2\|a\| < 1$$

dir, [27].

Örnek 4.4.2. *Bir $a \in C[0,1]$ fonksiyonu alalım, öyle ki $\|a\| \leq 1/2$ olsun. Farzedelim ki* (iii) *hipotezindeki f fonksiyonu, $f(r) = \lambda \ln(r+1)$ formunda olsun. Burada λ pozitif bir sabittir, öyle ki*

$$\lambda < \frac{1/2 - \|a\|}{\ln(\sqrt{3/2})}$$

dir ve $(Tx)(t) = 1$ olsun. O zaman ($M = 1$ için) (vi) *deki eşitsizlik,*

$$\|a\| + \lambda r \ln(r+1) \leq r$$

şeklinde olur. Şartlarımızı dikkate alarak ve $[0,1/2]$ *aralığında*

$$g(r) = \|a\| + \lambda r \ln(r+1) - r$$

fonksiyonuna Bolzano teoremini uygulayarak $0 < r_0 < 1/2$ için bahsedilen eşitsizliğe pozitif bir r_0 çözümü bulabiliriz. Üstelik,

$$Mf(r_0)Q = f(r_0) = \lambda r \ln(r_0 + 1) < \lambda \ln\left(\frac{3}{2}\right) < 1 - 2\|a\| < 1$$

dir, [27].

Bundan sonra Teorem 4.2.1'de bulunan varolan sonucumuzun şartlarının ispatlanması oldukça kolaydır. Bu iddiayı birkaç örnek yardımıyla açıklayalım.

Örnek 4.4.3.

$$x(t) = t^3 + \left(\frac{1}{4}x(t) + \frac{1}{4}\right)\int_0^t \left(t + \cos\left(\frac{x^2(\tau)}{1 + x^2(\tau)}\right)\right) d\tau$$

lineer olmayan kuadratik integral denklemini düşünelim. $C[0,1]$ *uzayında bu denklemin çözülebilirliğini araştıralım. Bu durumda* $a(t) = t^3$, $\|a\| = 1$ *ve*

$$v(t, \tau, x) = t + \cos\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right)$$

alırız. Ayrıca tüm $t, \tau \in [0,1]$ *ve* $x \in \mathbb{R}$ *için* $|v(t, \tau, x)| \leq 2$ *dir. Böylece* $f(r)$ *fonksiyonu* $f(r) = 2$ *formunda olur. Aynı zamanda sabit* $\tau \in [0,1]$ *ve* $x \in \mathbb{R}$ *için* $t \to v(t, \tau, x)$ *fonksiyonu* $[0,1]$ *üzerinde azalmayandır.* T *operatörü* $(Tx)(t) = (1/4)x(t) + 1/4$ *şeklinde tanımlıdır ve* $Q = 1/4$, $c = d = 1/4$ *için* (iv) *ve* (v) *şartlarını sağlar. Ayrıca,*

$$\|a\| + (c + dr)Mf(r) \leq r$$

eşitsizliği, pozitif $r_0 = 3$ *çözümüne sahip olan*

$$1 + \left(\frac{1}{4}r + \frac{1}{4}\right)2 \leq r$$

veya buna denk olarak

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}r \leq r$$

formuna dönüşür ve

$$Mf(r_0)Q = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

dir. Bu, $C[0,1]$ *uzayında denklemimizin* $[0,1]$ *aralığında azalmayan bir* $x = x(t)$ *çözümünün olduğu sonucuna varmamızı sağlar, [27].*

Örnek 4.4.4.

$$x(t) = t + \left(\frac{1}{e^3}\int_0^t |x(\tau)|\, d\tau\right)\int_0^t \tau e^{t + (|x(\tau)|/(1 + |x(\tau)|))} d\tau$$

integral denklemini düşünelim. Bu denklemin $C[0,1]$ uzayında çözümünün olup olmadığı incelenecektir. Bu durumda $M=1$, $a(t)=t$ ve $\|a\|=1$ alabiliriz. Ayrıca $v(t,\tau,x)$ fonksiyonu,

$$v(t,\tau,x)=\tau e^{t+(|x|/(1+|x|))}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$|v(t,\tau,x)|=v(t,\tau,x)=\tau e^{t+(|x|/(1+|x|))}\le e^{1+(|x|/(1+|x|))}\le e^{2}$$

olduğunu görebiliriz. Böylece f fonksiyonunu $f(r)=e^2$ olarak alabiliriz. T operatörü $(Tx)(t)=(1/e^3)\int_0^t|x(\tau)|\,d\tau$ şeklindedir ve $Q=0$ ile Darbo şartını, $c=0$ ve $d=1/e^3$ ile (v) *hipotezini sağlar.* (vi) *şartının eşitsizliği,*

$$\|a\|+(c+dr)Mf(r)=1+\frac{1}{e^3}r\cdot e^2\le r$$

veya buna denk olarak

$$1+\frac{r}{e}\le r$$

şeklinde olur. $r_0=e/(e-1)$ alırsak, r_0'ın verilen eşitsizliğin poztif bir çözümü olduğunu görürüz. Üstelik

$$Mf(r_0)Q=1\cdot e^2\cdot 0=0<1$$

dir. Elde edilen bu gerçekler gösterir ki Teorem 4.2.1'in şartları sağlanır. Böylece integral denklemimizin $C[0,1]$ uzayında azalmayan bir çözümünün olduğu sonucuna varırız, [27].

Örnek 4.4.5.

$$x(t)=\frac{1}{e}t+\frac{1}{4}x(t)\int_0^t\tau(t+\ln(1+|x(\tau)|))d\tau$$

integral denklemini düşünelim. Bu denklemin $C[0,1]$ uzayındaki çözümlerini araştıracağız. Burada $M=1$, $a(t)=(1/e)t$, $\|a\|=1/e$ dir. Ayrıca $v(t,\tau,x)$ fonksiyonu,

$$v(t,\tau,x)=\tau(t+\ln(1+|x|))$$

biçimindedir.

$$|v(t,\tau,x)|=v(t,\tau,x)=\tau(t+\ln(1+|x|))\le 1+\ln(1+|x|)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $\ln(1+|x|) \leq |x|$ *olduğundan,*

$$|v(t,\tau,x)| = v(t,\tau,x) = 1+|x|$$

dir. Böylece f fonksiyonunu $f(r) = 1+r$ olarak alabiliriz. Ayrıca T operatörü $(Tx)(t) = (1/4)x(t)$ dir ve $Q = 1/4$ ve $c = 0$, $d = 1/4$ ile Darbo şartını sağlar.

$$\|a\| + (c+dr)Mf(r) \leq r$$

eşitsizliği,

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{4}r(1+r) \leq r$$

veya buna denk olarak

$$\frac{1}{4}r^2 - \frac{3}{4}r + \frac{1}{2} \leq 0$$

ifadesine dönüşür.

$$r_0 = \frac{3/4 - \sqrt{9/16 - 1/e}}{1/2}$$

sayısının verilen eşitsizliğin pozitif bir çözümü olduğunu anlamak kolaydır. Bununla birlikte

$$Mf(r_0)Q = 1 \cdot \left(1 + 2\left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9e-16}{16e}}\right)\right)\frac{1}{4} < 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

dir. Elde edilen bütün gerçekler gösterir ki, Teorem 4.2.1'in şartları sağlanır. Bu teorem göz önüne alındığında, integral denklemimizin $C[0,1]$ uzayına ait olan ve $[0,1]$ aralığında azalmayan bir çözümünün var olduğunu anlarız, [27].

5. KAYNAKLAR

[1] I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[2] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2005.

[3] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, 2000.

[4] E. Kreyzig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.

[5] R. Johnsonbaugh, W.E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Anaysis,* Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[6] A.E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis,* John Wiley and Sons, New York, 1967.

[7] G. Aslım, *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988.

[8] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis,* Springer-Verlag New York Inc, 1985.

[9] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, 1978.

[10] T. Terzioğlu, *An Introduction to Real Analysis,* METU, Ankara, *1994.*

[11] J.M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhauser Verlag, *1997.*

[12] G. Darbo, *Punti Uniti in Transformazioni a Codomio Non Compatto*, **Rend. Sem. Mat. Uni. Padova** 24 (1955), 84-92.

[13] K. Kuratowski, *Sur Les Espaces Completes*, **Fund. Math.** 15 (1930), 301-309.

[14] K. Kuratowski, *Topology I,* Academic Press, 1966.

[15] K. Kuratowski, *Topology II,* Academic Press, 1968.

[16] K. Kuratowski, *Introduction to Set Theory and Topology,* Pergamon Press, 1956.

[17] I. Gohberg, L.S. Gol'denshteĭn and A.S. Markus, *Investigation of Some Properties of Bounded Linear Operators in Connection with Their q-norms*, **Ucen. Zap. Kishinevsk. Un-ta** 29 (1957), 29-36.

[18] V.I. Istrătescu, *On A Measure of Noncompactness*, **Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumanie** (N.S.) 16 (64) n.2 (1972), 195-197.

[19] B.N. Sadovskiĭ, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators (Russian)*, **Problemy Mat. Anal. Sloz. Sistem,** 2 (1968), 89-119.

[20] J. Banás and K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker, 1980.

[21] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskiĭ, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskiĭ , *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[22] M.A. Kranosel'skiĭ, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations,* Pergamon Press, 1964.

[23] J. Banás and A. Martinón, *On Monotonic Solutions of A Quadratic Integral Equation of Volterra Type* (to appear).

[24] J. Banás and K. Sadarangani, *Solvability of Volterra-Stieltjes Operator-Integral Equations and Their Applications*, **Comput. Math. Applic.** v41 i12. 1535-1544, (2001).

[25] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[26] J. Banás and L. Olszowy, *Measures of Noncompactness Related to Monotonicity*, **Comment. Math.** 41. 13-23, (2001).

[27] J. Banás, J.Caballero, J. Rocha, K. Sadarangani, *Monotonic Solutions of A Class of Quadratic Integral Equations of Volterra Type*, **Comput. Math. Appl.** 49, 943 - 952, (2005).

ÖZGEÇMİŞ

31 Ocak 1986 tarihinde Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2004 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Şubat 2009'da bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.