

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hatice KARABENLİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2016

Tezin Başlığı : HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Hatice KARABENLİ
Sınav Tarihi : 13.05.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Doç.Dr.E. Nesligül AKSAN _____
İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: Prof.Dr. Alaattin ESEN _____
İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa BAYRAM _____
Üsküdar Üniversitesi

Prof.Dr. İdris DAĞ _____
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Prof.Dr. Ali ÖZDEŐ _____
İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Bayram ŐAHİN _____
İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Hareketli Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hatice KARABENLİ

ÖZET

Doktora Tezi

HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hatice KARABENLİ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

182+xvii sayfa

2016

Danışman : Doç.Dr.E. Nesligül AKSAN
Eş Danışman : Prof.Dr. Alaattin ESEN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri genel hatlarıyla birlikte verildikten sonra spline fonksiyonlar, B-spline baz fonksiyonları ve Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi verildi.

İkinci bölümde, Stefan problemleri genel olarak tanıtıldıktan sonra farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte göz önüne alınan altı problem, varsa tam çözümleriyle birlikte ele alındı.

Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde, variable space grid yöntemi üzerine kurulu kollokasyon sonlu eleman yöntemi kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak oluşturuldu. Yöntem, altı farklı probleme uygulanarak sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın yeri ve hızı için nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen sonuçlar, tam çözüm ve literatürdeki mevcut nümerik çözümlerle karşılaştırıldı ve hata normları verildi. Ayrıca oluşturulan sonlu eleman şemasının kararlılığı Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelendi.

Dördüncü bölümde, boundary immobilisation yöntemi üzerine kurulu kollokasyon sonlu eleman yöntemi kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak oluşturuldu. Yöntem, altı farklı probleme uygulanarak sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın yeri ve hızı için nümerik çözümler elde edildi. Bulunan sonuçlar, tam çözüm ve literatürdeki

mevcut nümerik çözümlerle karşılaştırıldı ve hata normları verildi. Ayrıca oluşturulan sonlu eleman şemasının kararlılığı Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelendi.

Beşinci bölümde, isotherm migration yöntemi üzerine kurulu kollokasyon sonlu eleman yöntemi kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak oluşturuldu. Isotherm migration metodunun direkt olarak kullanılmadığı üç problem için uygun bir dönüşüm kullanılarak yöntem, dört farklı probleme uygulandı. İzoterm (eşsıcaklık) yerleri, hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözüm ve literatürdeki mevcut nümerik çözümlerle karşılaştırıldı ve hata normları verildi.

Altıncı bölümde, üçüncü dördüncü ve beşinci bölümlerde elde edilen nümerik sonuçlar değerlendirildi.

ANAHTAR KELİMELER: B-Spline Fonksiyonlar, Stefan Problemleri, Variable Space Grid Yöntemi, Boundary Immobilisation Yöntemi, Isotherm Migration Yöntemi, Kollokasyon Metodu, Sonlu Elemanlar Yöntemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE MOVING BOUNDARY PROBLEMS

Hatice KARABENLİ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

182+xvii pages

2016

Supervisor : Assoc.Prof.Dr.E. Nesligül AKSAN
Co-Supervisor : Prof.Dr. Alaattin ESEN

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, after giving finite difference and finite element methods with general lines, spline functions, B-spline bases functions and Von-Neumann stability analysis method are presented.

In the second chapter, after introducing the Stefan problems generally, six problems which are considered with different initial and boundary conditions have been analyzed with their existing exact solutions.

The third, fourth and fifth chapters of this thesis make up its original parts. In the third chapter, collocation finite element method based on variable space grid method is constructed using cubic B-spline bases functions. Numerical results for temperature distribution, the position and velocity of moving boundary are obtained by applying the method to six different problems. The obtained numerical results are compared with the exact solutions and the other numerical results existing in the literature and the error norms are given. Also stability analysis of generated finite element methods are investigated with Von-Neumann stability analysis method.

In the fourth chapter, collocation finite element method based on boundary immobilisation method is constructed using cubic B-spline bases functions. Numerical results for temperature distribution, the position and velocity of moving boundary are

obtained by applying the method to six different problems. The obtained numerical results are compared with the exact solutions and the other numerical results existing in the literature and the error norms are given. Also stability analysis of generated finite element methods are investigated with Von-Neumann stability analysis method.

In the fifth chapter, collocation finite element method based on isotherm migration method is constructed using cubic B-splines. For the three problems which isotherm migration method can't be used directly, by using a suitable transformation, the method is applied to four different problems. Numerical solutions obtained for the locations of isotherms, the position and velocity of moving boundary are compared with the exact solutions and the other numerical results existing in the literature and the error norms are given.

In the sixth chapter, the numerical results obtained in the third, fourth and fifth chapters are evaluated.

KEY WORDS: B-Spline Functions, Stefan Problems, Variable Space Grid Method, Boundary Immobilisation Method, Isotherm Migration Method, Collocation Method, Finite Element Method.

TEŞEKKÜR

Doktora alıőmamı yneten ve bu tezin hazırlanması aşamasında bana yardımcı olan, değerli katkılarıyla beni ynlendiren, bilgi ve ilgisini esirgemeyen saygıdeğer hocalarım Sayın Do.Dr. E. Nesligül AKSAN ve Sayın Prof.Dr. Alaattin ESEN' e ayrıca doktora süresince her türlü imkanı sağlayan bölüm baőkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ' in Őahsında bütün bölüm hocalarıma, tezin farklı aőamalarında fikir ve düőüncelerini aldığım hocalarım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY, Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR, Sayın Yrd. Doç. Dr. N. Murat YAğMURLU ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZAKÇA' ya, tez jürimde yer alan saygıdeğer hocalarıma, sabır ve destekleriyle her zaman yanımda olan sevgili eőim ve çocuğuma, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim aileme ve doktora eğitimim boyunca sağladığı burs katkısından dolayı TBTAK' a teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xvii
1. TEMEL KAVRAMLAR	5
1.1. Sonlu Fark Yöntemleri (SFY).....	5
1.1.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi.....	7
1.1.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi.....	9
1.1.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	10
1.1.4. Ağırlıklı Averaj Sonlu Fark Yöntemi	11
1.2. Sonlu Eleman Yöntemleri (SEY).....	12
1.2.1. Varyasyonel Yöntemler	16
1.2.2. Ağırlıklı Kalan Yöntemleri	18
1.3. Spline Fonksiyonlar	25
1.3.1. B-Spline Fonksiyonlar	30
1.4. Kararlılık Analizi.....	35
2. MODEL PROBLEM	38
2.1. Problem 1	39
2.2. Problem 2	40
2.3. Problem 3	41
2.4. Problem 4	42
2.5. Problem 5	43
2.6. Problem 6	44
3. VARIABLE SPACE GRID (VSG) METODU	45
3.1. Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi	46

3.2.	Kararlılık Analizi.....	50
3.3.	Nümerik Çözümler	51
3.3.1.	Problem 1	53
3.3.2.	Problem 2	56
3.3.3.	Problem 3	65
3.3.4.	Problem 4	67
3.3.5.	Problem 5	74
3.3.6.	Problem 6	86
4.	BOUNDARY IMMOBILISATION METODU (BIM)	93
4.1.	Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi	94
4.2.	Kararlılık Analizi.....	96
4.3.	Nümerik Çözümler	97
4.3.1.	Problem 1	99
4.3.2.	Problem 2	102
4.3.3.	Problem 3	103
4.3.4.	Problem 4	106
4.3.5.	Problem 5	113
4.3.6.	Problem 6	125
5.	ISOTHERM MIGRATION METODU (IMM)	132
5.1.	Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi	133
5.2.	Nümerik Çözümler	133
5.2.1.	Problem 1	133
5.2.2.	Problem 4	140
5.2.3.	Problem 5 (SFY).....	150
5.2.4.	Problem 5 (SEY).....	158
5.2.5.	Problem 6	166
6.	SONUÇ	173
	KAYNAKLAR	176
	ÖZGEÇMİŞ	182

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	$x = 0$ ve $x = l$ noktaları arasındaki sıcaklık dağılımı.	7
Şekil 1.2	Sıfırıncı dereceden bir spline fonksiyonu.	28
Şekil 1.3	Birinci dereceden bir spline fonksiyonu.	28
Şekil 1.4	İlk dört B-spline baz fonksiyonu.	33
Şekil 1.5	Kübik B-spline şekil fonksiyonları.	35
Şekil 3.1	Problem 2 için $\epsilon = 0.5$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY ve SFY [11] kullanılarak elde edilen hareketli sınırın yeri.	57
Şekil 3.2	Problem 2 için $\epsilon = 0.9$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY ve SFY [11] kullanılarak elde edilen hareketli sınırın yeri.	58
Şekil 3.3	Problem 2 için $\epsilon = 0.5$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY kullanılarak elde edilen hareketli sınırın hızı.	59
Şekil 3.4	Problem 2 için $\epsilon = 0.9$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY kullanılarak elde edilen hareketli sınırın hızı.	59
Şekil 3.5	$\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 4, 5, 6, 7, 8$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.	60
Şekil 3.6	$\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 4, 5, 6, 7, 8$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.	61
Şekil 3.7	$\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 20, 21, 22, 23, 24$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.	61
Şekil 3.8	$\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 20, 21, 22, 23, 24$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.	62
Şekil 3.9	$\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 36, 37, 38, 39, 40$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.	62

Şekil 3.10	$\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 36, 37, 38, 39, 40$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.....	63
Şekil 3.11	$\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$ ve farklı ω parametreleri için hareketli sınırın yeri.	64
Şekil 3.12	$\epsilon = 0.5$, $Ste = 1$ ve farklı ω parametreleri için hareketli sınırın yerinin $t = 26.0$ ve $t = 36.0$ değerleri arasında yakınlaştırılmış durumu.	64
Şekil 3.13	VSG-SEY: Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.....	92
Şekil 4.1	BIM-SEY: Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.....	131
Şekil 5.1	IMM-SEY: Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.....	172

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ ' in düğüm noktalarında aldığı değerler.	34
Tablo 3.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	54
Tablo 3.2	Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	55
Tablo 3.3	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	55
Tablo 3.4	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	56
Tablo 3.5	Problem 3' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.0005$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	66
Tablo 3.6	Problem 3' ün $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	66
Tablo 3.7	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.	67
Tablo 3.8	Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının [14] ile karşılaştırılması.	69
Tablo 3.9	Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normlarının [14] ile karşılaştırılması.	69
Tablo 3.10	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	70
Tablo 3.11	Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.	71
Tablo 3.12	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	72

Tablo 3.13	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	73
Tablo 3.14	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdelik bağıl hataları.	74
Tablo 3.15	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	75
Tablo 3.16	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	76
Tablo 3.17	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	77
Tablo 3.18	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	78
Tablo 3.19	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	79
Tablo 3.20	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	80
Tablo 3.21	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	81
Tablo 3.22	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	82
Tablo 3.23	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.	83
Tablo 3.24	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	84
Tablo 3.25	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	85
Tablo 3.26	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.	86
Tablo 3.27	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	88

Tablo 3.28	Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.....	89
Tablo 3.29	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	90
Tablo 3.30	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	91
Tablo 3.31	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması. . .	92
Tablo 4.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	100
Tablo 4.2	Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	101
Tablo 4.3	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	101
Tablo 4.4	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	102
Tablo 4.5	Problem 2' nin $\Delta t = 0.00002$, $N = 10$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı zaman değerleri için $\epsilon = 0.5$ ve $\epsilon = 0.9$ ' de hareketli sınırın yerinin [11] ile karşılaştırılması.	103
Tablo 4.6	Problem 3' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.0005$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	104
Tablo 4.7	Problem 3' ün $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	105
Tablo 4.8	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.	105
Tablo 4.9	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0001$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.	106
Tablo 4.10	Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının [14] ile karşılaştırılması.	108
Tablo 4.11	Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normlarının [14] ile karşılaştırılması.	108
Tablo 4.12	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	109

Tablo 4.13	Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.....	110
Tablo 4.14	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	111
Tablo 4.15	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	112
Tablo 4.16	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdelik bağıl hataları.....	113
Tablo 4.17	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	114
Tablo 4.18	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	115
Tablo 4.19	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	116
Tablo 4.20	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	117
Tablo 4.21	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	118
Tablo 4.22	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.	119
Tablo 4.23	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	120
Tablo 4.24	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	121
Tablo 4.25	Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.	122
Tablo 4.26	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	123
Tablo 4.27	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	124

Tablo 4.28	Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.	125
Tablo 4.29	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.	127
Tablo 4.30	Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.	128
Tablo 4.31	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	129
Tablo 4.32	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	130
Tablo 4.33	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması. ...	131
Tablo 5.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.	138
Tablo 5.2	Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	139
Tablo 5.3	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	140
Tablo 5.4	Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.	140
Tablo 5.5	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.	146
Tablo 5.6	Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında izoterm yerlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.	147
Tablo 5.7	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	148
Tablo 5.8	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.	149
Tablo 5.9	Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdelik bağıl hataları.	150
Tablo 5.10	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.1$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.	154

Tablo 5.11	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.3$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	155
Tablo 5.12	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	156
Tablo 5.13	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	157
Tablo 5.14	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	157
Tablo 5.15	SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hataları.	158
Tablo 5.16	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.1$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	161
Tablo 5.17	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.3$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	162
Tablo 5.18	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	163
Tablo 5.19	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	164
Tablo 5.20	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.	165
Tablo 5.21	SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hataları.	166
Tablo 5.22	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.	168
Tablo 5.23	Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında izoterm yerlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.	169
Tablo 5.24	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	170
Tablo 5.25	Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	171
Tablo 5.26	Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması. . .	172

Tablo 6.1	Hareketli sınırın yeri için yöntemlerin $N = 40$ değerinde yüzdelik hata normuna göre karşılaştırılması.	174
Tablo 6.2	Hareketli sınırın hızı için yöntemlerin $N = 40$ değerinde yüzdelik hata normuna göre karşılaştırılması.	174

SİMGELER VE KISALTMALAR

SFY	:	Sonlu Fark Yöntemi
SEY	:	Sonlu Eleman Yöntemi
VSG	:	Variable Space Grid Metodu
BIM	:	Boundary Immobilisation Metodu
IMM	:	Isotherm Migration Metodu
NIM	:	Nodal Integral Metodu
VSG-SEY	:	Variable Space Grid Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Eleman Yöntemi
BIM-SEY	:	Boundary Immobilisation Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Eleman Yöntemi
IMM-SEY	:	Isotherm Migration Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Eleman Yöntemi
VSG-SFY	:	Variable Space Grid Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Fark Yöntemi
BIM-SFY	:	Boundary Immobilisation Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Fark Yöntemi
IMM-SFY	:	Isotherm Migration Metodu kullanıldıktan sonra uygulanan Sonlu Fark Yöntemi

GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerin birçok alanında karşımıza çıkan hareketli sınır değer problemleri ısı, difüzyon ve oksijen basıncı denklemleri ile ilişkilendirilen faz değişim problemleridir. Bu tür problemler ilk defa 1890 yılında Stefan [1] tarafından polar buz kabındaki erime incelenerek ele alındığı için Stefan problemleri olarak isimlendirilmiştir. Stefan problemleri çözümün bir parçası olan bölgede bir kısmi diferansiyel denklemi çözmeyi gerektirdiğinden non-linear problemlerdir ve bazı özel durumlar dışında analitik olarak çözülemezler. Analitik çözümlerinin elde edilmesindeki zorluklar nedeniyle bu tür problemlerin çözümünde nümerik yöntemler yaygın olarak kullanılır. Bu nümerik yöntemlerin büyük bir kısmı Crank [2]'in kitabında detaylıca ele alınmıştır. Muehlbauer ve Sunderland [3], Bankoff [4], Rubinstein [5], Ockendon ve Hodkings [6] ve Hoffman [7] tarafından tek boyutlu ve çok boyutlu hareketli sınır değer problemleri için analitik ve nümerik çözümler elde edilmiştir. Son yıllarda, Kutluay ve Esen [8, 9, 10], Savović vd. [11-15], Rizwan-Uddin [16, 17] ve Mitchell vd. [18, 19] farklı sınır koşullarına sahip hareketli sınır değer problemleri için çeşitli nümerik yöntemler kullanarak çözümler elde etmişlerdir.

Hareketli sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için iki temel yaklaşım yöntemi vardır. Birinci yaklaşım yöntemleri faz sınırının sürekli olarak izlenmesini gerektiren front-tracking (arayüzü izleme) yaklaşımlarıdır. Bu yaklaşımlardan biri olan heat balance integral (ısı denge integrali) yöntemi Goodman [20] tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde tüm sınır koşullarını ve difüzyon denkleminin integral formunu sağlayan bir polinom ifadesi kullanılır. Douglas ve Gallie [21] tarafından oluşturulan variable time step yönteminde ise her bir δt zaman adımı, hareketli sınırı bir grid noktasından diğer grid noktasına iteratif olarak taşıyacak şekilde seçilmiştir.

Variable time step yöntemi kullanılarak hareketli sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri sonlu farklar, sonlu elemanlar ve Taylor serileri yardımıyla elde edilmiştir [22-25]. Murray ve Landis [26] tarafından oluşturulan variable space grid yönteminde ise i . grid noktasında verilen dx/dt değişim formülü ile sabit sınır ve hareketli sınır arasındaki aralık sayısı her zaman sabit tutulacak şekilde işlem yapılmıştır. Crank ve Gupta [27] bu yöntemi eşit uzunluklu aralıklara sahip düğüm noktaları üzerinde açık sonlu fark şeması yardımıyla Stefan problemi olan oksijen difüzyonu problemine uygulamışlardır. Bilinmeyen değerleri hesaplarken önceki düğüm noktalarından sonraki düğüm noktalarına geçişte interpolasyona ihtiyaç duyulan bu çalışmada kolaylık sağlaması açısından zaman ve konum değişkenlerini içeren Taylor seri açılımları tercih edilmiştir.

Diğer bir yaklaşım ise front-fixing (arayüzü sabitleme) formülasyonu kullanmaktır. Bu yaklaşım yöntemleri arasında en çok tercih edilen yöntemler boundary immobilisation ve isotherm migration yöntemleridir. İlk olarak Landau [28] tarafından ileri sürülen boundary immobilisation yöntemi, uygun bir değişken dönüşümü kullanılarak hareketli sınırın sabitlenmesi esasına dayanır. Bu yöntem karmaşık bir problemi kolay çözülebilir hale getirdiğinden sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken sıkça tercih edilmiştir. Isotherm migration yönteminde ise U bağımlı değişkeni ile x bağımsız değişkeninin rolleri değiştirilerek sabit bir tanım aralığı üzerinde x izoterm yerleri elde edilir [29]. Sabit bölge yaklaşımı olarak kabul edilen yöntemlerden biri de Entalpi yöntemidir. Bu yöntemde ise bağımlı değişken olan sıcaklıkla birlikte sabit basınçtaki ısı değişimi olarak tanımlanan entalpi fonksiyonu kullanılır [30]. Açık ve kapalı sonlu fark yöntemleri kullanılarak bir boyutlu problemler [9, 31] ve iki boyutlu problemlere [32] bu yöntem uygulanmıştır.

Yukarıda bahsedilen yöntemler uygulanırken çeşitli yaklaşımlar kullanılmakla beraber, genellikle metodun uygulamasında sistematik bir yaklaşım sunan sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleri tercih edilir. Tez boyunca çalışılacak olan variable space grid metodu, boundary immobilisation metodu ve isotherm migration metodu daha önce farklı bilim adamları tarafından sonlu fark yaklaşımları kullanılarak, ele alınan problemlere uygulanıp nümerik çözümler elde edilmiştir. Bu tezde ise, daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak variable space grid metodu, boundary immobilisation metodu ve isotherm migration metodu için kübik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla kollokasyon sonlu eleman metodu inşa edilecektir.

Bu çalışmada, $U(x, t)$ sıcaklık dağılımı $s(t)$ hareketli sınırın yerini göstermek üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0$$

ısı iletim denklemi

$$\beta \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} + \gamma U(0, t) = U_0(t), \quad U(s(t), t) = U_s(t), \quad t > 0$$

sınır koşulları ve

$$U(0, t) = f(x)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak gözönüne alınacaktır. Hareketli sınırın yerinin belirlenmesi için hareketli sınır üzerinde bir bağıntıya daha ihtiyaç duyulur. Stefan koşulu olarak bilinen

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

bu ısı denge (heat balance) eşitliği

$$s(0) = S_0$$

başlangıç koşuluna bağı olarak ele alınacaktır. Burada K ısı iletkenliği, c öz ısı, ρ sıvı yoğunluğu ve L latent (gerekli) ısı olmak üzere her bir problem için değişen α ve Ste parametreleri $\alpha = K/c\rho$, $Ste = K/L\rho$ şeklindedir. $U_0(t)$, $U_s(t)$, $f(x)$ ve S_0 değerleri ise nümerik çözümler oluşturulurken ayrıca belirtilecektir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislik, fen ve uygulamalı bilimlerin, yapı analizi, ısı iletimi, sıvı-katı mekaniği, dalga yayılımı ve elektromanyetik gibi alanlarında karşılaşılan problemler matematiksel olarak modellenenbilmektedir. Daha çok adi ve kısmi diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkan bu problemler, karmaşık yapıya sahip olmayan bölgelerde mevcut yöntemler kullanılarak analitik olarak çözülebilirler. Ancak lineer olmayan bir denklem çözümünün arandığı bölgede düzgün bir yapıda değil (karmaşık geometrili veya karmaşık sınır koşullu) ise denklemin tam çözümünü elde etmek oldukça zordur hatta bazı durumlarda imkansızdır.

Analitik çözümü elde edilemeyen denklemlerde problemin çözümü için hata analizi ile birlikte en iyi yaklaşımla sonuç elde edilebilecek nümerik bir yöntem kullanılır. Bu nümerik yöntemlerden sistematik bir temele dayanan sonlu fark [2, 33, 34] ve sonlu eleman [35-38] yöntemleri sıkça tercih edilir. Tezin bu bölümünde, sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri, spline fonksiyonlar ve B-spline fonksiyonlar verilmiştir.

1.1 Sonlu Fark Yöntemleri (SFY)

Lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri genellikle sonlu fark yöntemleri kullanılarak elde edilir. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözümü için aşağıdaki adımlar izlenir.

- Problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür.
- Diferansiyel denklemdaki türevler yerine Taylor seri açılımları kullanılarak elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece ele alınan diferansiyel denklem fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülür.
- Fark denklemlerinde ortaya çıkabilecek, çözüm bölgesinde olmayan, hayali noktaları yok etmek için problemin sınır şartları yerine uygun fark yaklaşımları kullanılır ve tek olarak çözülebilen bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri kullanılarak problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (grid) noktaları üzerinden hesaplanır [39].

Bir kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümü için genelde açık (explicit), kapalı (implicit) ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Bu bölümde bu üç sonlu fark yaklaşımı ve genel formları olan ağırlıklı averaj yöntemi ele alınacaktır. Bu amaçla $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ tanım bölgesi üzerinde tanımlı zamana bağlı

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

parabolik ısı denklemini

$$U(x, 0) = f(x)$$

başlangıç ve

$$U(0, t) = g_1(t), \quad U(l, t) = g_2(t)$$

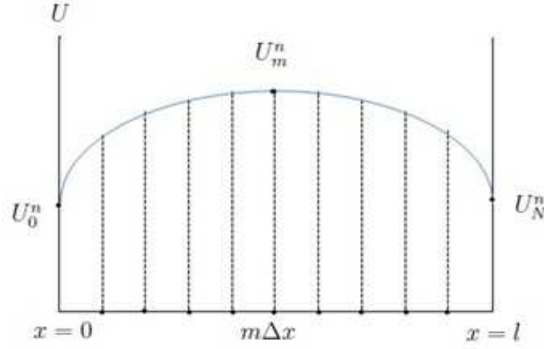
sınır koşullarıyla birlikte ele alalım. Δx , konum yönünde bölüntü uzunluğu, Δt zaman adımı ve $l = M\Delta x$ olmak üzere $x_m = m\Delta x$, $m = 0(1)M$ ve $t_n = n\Delta t$ noktalarındaki

$U(x, t)$ sıcaklığı Şekil 1.1' de verildiği üzere

$$U_m^n = U(x_m, t_n) = U(m\Delta x, n\Delta t)$$

bağıntısı ile gösterilir.

Şekil 1.1. $x = 0$ ve $x = l$ noktaları arasındaki sıcaklık dağılımı.



(1.1) ısı denklemini için yaklaşık türevlerin farklı formlarda seçilmesiyle elde edilen sonlu fark yöntemleri aşağıda kurallarıyla birlikte verilecektir.

1.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

Açık sonlu fark yöntemi uygulanırken (1.1) eşitliğiyle verilen ısı denkleminde zamana bağlı $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{m,n} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{m,n} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

merkezi fark yaklaşımı yazılırsa, $m = 1(1)M-1$ ve $n = 0(1)N$ için gerekli düzenlemeler yapılarak $O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$ lokal kesme hatasına sahip

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (1.2)$$

açık sonlu fark şeması elde edilir. Burada $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ kararlılık parametresidir ve U_m^{n+1} bilinmeyen terimi U_{m-1}^n, U_m^n ve U_{m+1}^n bilinen terimleri yardımıyla elde edilebileceğinden (1.2) fark şeması üzerine kurulu yöntem açık sonlu fark yöntemi olarak adlandırılır. Uygun bir kararlılık analizi yöntemi uygulandığı takdirde kararlılık parametresi için $0 < r \leq \frac{1}{2}$ koşulunun sağlandığı görülür. Başlangıç ve sınır koşulları $U_m^0 = f(m\Delta x)$, $U_0^n = g_1(n\Delta t)$ ve $U_N^n = g_2(n\Delta t)$, $n \geq 1$ formunda analiz edilmek üzere, yukarıdaki matris formundaki denklem sistemi için U^n ve b , $M - 1$ satırlı sütun vektörleri, A matrisi $(M - 1) \times (M - 1)$ tipinde üçlü bant matrisi olup

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2r & r & 0 & & & \\ r & 1 - 2r & r & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & \\ & & r & 1 - 2r & r & \\ 0 & & 0 & r & 1 - 2r & \end{bmatrix}, U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} rU_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rU_M^n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (1.2) denklem sistemi matris formunda

$$U^{n+1} = AU^n + b$$

ile verilebilir.

Açık sonlu fark yönteminde, U^{n+1} vektörünün hesabı kolay olmasına rağmen kararlılık için sağlanması gereken $0 < r \leq \frac{1}{2}$ kısıtlaması vardır. Bu yüzden bazı durumlarda koşulsuz kararlı olan kapalı sonlu fark yöntemleri tercih edilir [33, 34].

1.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Kapalı sonlu fark yönteminde, açık sonlu fark yönteminden farklı olarak (1.1) denkleminde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine $(n+1)\Delta t$ zamanındaki merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{m,n} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

yazılırsa $m = 1(1)M - 1$ ve $n = 0(1)N$ için gerekli düzenlemeler yapılarak $O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$ lokal kesme hatasına sahip

$$U_m^n = -rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} \quad (1.3)$$

kapalı sonlu fark şeması elde edilir. Burada $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ kararlılık parametresi olmak üzere U_{m-1}^{n+1}, U_m^{n+1} ve U_{m+1}^{n+1} bilinmeyen terimleri, U_m^n bilinen terimlerinin bulunduğu kapalı bir sistemin çözümüyle elde edileceğinden (1.3) fark şeması üzerine kurulu yöntem kapalı sonlu fark yöntemi olarak adlandırılır. Başlangıç ve sınır koşulları $U_m^0 = f(m\Delta x)$, $U_0^n = g_1(n\Delta t)$ ve $U_N^n = g_2(n\Delta t)$, $n \geq 1$ formunda analiz edilmek üzere, yukarıdaki matris formundaki denklem sistemi için U^n ve b , $M-1$ satırlı sütun vektörleri, B matrisi $(M-1) \times (M-1)$ tipinde üçlü bant matrisi olup

$$B = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} rU_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rU_M^n \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. (1.3) denklem sistemi matris formunda

$$BU^{n+1} = U^n + b \quad (1.4)$$

ile verilebilir. (1.4) eşitliğiyle verilen denkleminin çözümü

$$U^{n+1} = B^{-1}(U^n + b), \quad n \geq 0$$

eşitliğiyle elde edilir. Burada $r > 0$ için B matrisi köşegeni baskın ve tersi olan bir matristir [33, 34].

1.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi olarak bilinen bu yöntemde (1.1) ısı denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine $n\Delta t$ ve $(n+1)\Delta t$ zamanlarındaki merkezi fark yaklaşımlarının ortalaması

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{m,n} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + O(\Delta x)^2$$

yazılarak oluşturulur. O halde $m = 1(1)M-1$ ve $n = 0(1)N$ için gerekli düzenlemeler yapılarak $O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^2$ lokal kesme hatasına sahip

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (1.5)$$

Crank-Nicolson sonlu fark şeması elde edilir. Burada $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ kararlılık parametresi olmak üzere başlangıç ve sınır koşulları $U_m^0 = f(m\Delta x)$, $U_0^n = g_1(n\Delta t)$ ve $U_N^n = g_2(n\Delta t)$, $n \geq 1$ formunda analiz edilsin. (1.5) matris formundaki denklem sistemi için U^n ve b , $M-1$ satırlı sütun vektörleri kapalı sonlu fark yönteminde tanımlandığı gibi olmak üzere C ve D matrisleri $(M-1) \times (M-1)$ tipinde üçlü bant matrisleri olup

$$C = \begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & & & \\ -r & 2+2r & -r & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & \\ & & -r & 2+2r & -r & \\ & & 0 & -r & 2+2r & \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2-2r & r & 0 & & & \\ r & 2-2r & r & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & \\ & & r & 2-2r & r & \\ & & 0 & r & 2-2r & \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (1.5) denklem sistemi matris formunda

$$CU^{n+1} = DU^n + b \quad (1.6)$$

ile verilebilir. (1.6) eşitliğiyle verilen denklem sisteminin çözümü

$$U^{n+1} = C^{-1}(DU^n + b), \quad n \geq 0$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Burada $r > 0$ için C matrisi köşegeni baskın ve tersi olan bir matristir. Dolayısıyla yukarıdaki (1.6) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm nicelikler biliniyor olup verilen denklem sistemi çözülebilirdir [33, 34].

1.1.4 Ağırlıklı Averaj Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem daha önce verilen açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerinin genelleştirilmiş formudur. Ağırlıklı averaj yönteminde (1.1) ile verilen ısı denkleminde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{m,n} = \theta \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \theta) \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

yaklaşımı yazılıp $m = 1(1)M - 1$ ve $n = 0(1)N$ için gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-r\theta U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2\theta r)U_m^{n+1} - r\theta U_{m+1}^{n+1} = r(1 - \theta)U_{m-1}^n + (1 - 2(1 - \theta)r)U_m^n + r(1 - \theta)U_{m+1}^n \quad (1.7)$$

sonlu fark şeması elde edilir. Burada $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ kararlılık parametresi olmak üzere (1.7) sonlu fark şeması kullanılarak $\theta = 1$ için kapalı, $\theta = 0$ için açık, $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson fark yaklaşımlarının şemalarının elde edileceği açıktır [33, 34].

1.2 Sonlu Eleman Yöntemleri (SEY)

Sonlu eleman yöntemi, uygulamalı bilimler, fizik ve mühendisliğin hemen hemen her dalındaki problemlerin nümerik olarak çözülmesinde kullanılan etkili bir yöntemdir. Yapı analizi, hava araçlarının tasarımı, ısı iletimi, manyetik akı gibi çeşitli alanlarda uygulamaları görülen sonlu eleman yöntemi 1950' li yıllardan itibaren bilgisayarın da gelişimi ile birlikte nümerik çözüm oluşturulurken etkin bir şekilde kullanılmıştır. Sonlu eleman yöntemi fikri ilk olarak hava araçlarının analizi ile ilgili çalışmalarda ortaya atılmıştır. Hrenikoff [40], 1941 yılında yapı analizi çalışmasında sonlu eleman yöntemini kullanarak bir burulma probleminin (torsion problem) çözümünü incelemiştir. Courant [41]' in 1943 yılında yayınlanan makalesi ise sonlu eleman yöntemi alanında bir klasik olup, bu çalışmada yaklaşım fonksiyonlarının üretilmesinde üçgen elemanlar kullanılarak varyasyonel yöntem çerçevesinde sütun gerilim problemine sonlu eleman yöntemi uygulanmıştır. Turner vd. [42] tarafından yüksek hızdaki hava araçlarının kanat panelleri, üçgen şeklinde küçük panellerle modellenerek ilk defa 1956' da iki ve üç boyutlu yapılar için sonlu eleman yönteminin kullanılması gündeme gelmiştir. “Sonlu eleman” kavramı ise ilk defa Clough [43]' un 1960' da yayınlanan hava araçlarının gövdelerinin gerilme analizi için oluşturulmuş çalışmasında dile getirilmiştir. Sonlu eleman yöntemiyle ilgili ilk kitap ise 1965 yılında Zeienkiewicz ve Cheung [35] tarafından yazılmış, sonlu eleman ifadelerinin varyasyonel formlarla yer değiştirebileceği gösterilerek tüm uygulamalı bilimlerde uygulanabilirliği sağlanmıştır.

Matematikçiler tarafından yakınsaklığı, hata sınırı ve kararlılığı incelenen sonlu eleman yöntemleri, yüksek hızlı ve kapasiteli dijital bilgisayarların kullanımıyla birlikte günümüzde sıkça tercih edilen nümerik yöntemlerden biri olmuştur. Bilgisayar, matris

yöntemi ve eleman kavramları bir araya geldiğinde yeni, güçlü ve pratik bir temele dayanan bu yöntem nümerik çözüme ulaşmak için oldukça etkilidir. Aşağıda, temel özellikleri verilen sonlu eleman yöntemlerinin avantaj ve dezavantajlarından da kısaca bahsedilmiştir.

Sonlu eleman yönteminde temel düşünce çözüm bölgesinin “eleman” olarak isimlendirilen basit alt bölgelere ayrıştırılmasıdır bu işlem diskritizasyon işlemi olarak da adlandırılır. Bunun için çözüm bölgesi öncelikle düğüm noktası (node) olarak isimlendirilen noktalarda birbirine bağlanan alt bölgelere ayrıştırılır. Her bir bölge üzerinde çözümü istenen fonksiyon, bilinen yaklaşım fonksiyonları ve hesaplanacak olan bilinmeyen katsayılar cinsinden tanımlanır. Analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki hata her bir bölge üzerinde minimize edilerek çözüme ulaşılır. Elde edilen eleman denklemleri birleştirilerek temel denklem sistemine ulaşılır. Sonlu eleman yöntemi uygulanırken izlenen bu adımlar daha sonra detaylıca verilecektir.

Diğer sayısal yöntemler özellikle sonlu fark metotları daha eski ve güvenilir olmasına rağmen sonlu eleman metodunun tercih edilmesinin temel nedenleri aşağıda belirtilmiştir [37].

- Sonlu eleman yöntemi, karmaşık geometriye sahip yapıların incelenmesine olanak sağlar.
- Her bir eleman denklemi ayrı ayrı oluşturulduğundan farklı malzeme özelliklerine ve fiziksel özelliklere sahip yapıların incelenmesini sağlar.
- Genelleştirilebilir bir yöntem olup algoritma girdileri farklı tipteki problemler için kolayca değiştirilebilirdir.

- Yöntemin matematiksel ve fiziksel anlamı mevcuttur.
- Her çeşit sınır koşuluyla birlikte kullanılabilir.

Yukarıda bahsedilen belli başlı avantajlarıyla birlikte esnekliği, yüksek mertebeden yaklaşımları ve güçlü matematiksel temele sahip sonlu eleman yöntemi bazı dezavantajlara sahiptir. Bunlardan en önemlisi çözüm bölgesinin ayrıştırılmasının ciddi bir deneyim gerektirmesidir. Çözüm bölgesi ayrıştırılırken bölge içerisinde farklı malzeme özellikleri varsa düğüm noktalarını sıklıkla kullanmada fayda vardır ancak düğümlerin sıklaştırılmasıyla beraber bilinmeyen sayısı artar ve daha çok bilgisayar hafızasına ihtiyaç duyulur. Ayrıca yapılan işlem sayısı arttığından işlem hatası da artabilir. Dolayısıyla noktasal bilinmeyeni fazla olan denklem sisteminin ayrıştırılmasının uygun yapılmaması sonucu büyük ölçüde etkiler.

Sonlu eleman yöntemlerinin analizinde üç temel işlem tanımlanır. Bunlardan birincisi; yaklaşık çözümü belirlemek, ikincisi; yaklaşık çözümün kullanılacağı en iyi yöntemi seçmek, üçüncüsü ise hata tahmini yapmaktır [37].

• Yaklaşık Çözümün Belirlenmesi

Sonlu eleman yöntemi uygulanırken öncelikle sınır koşullarını ve denklemi sağlayacak bir yaklaşık çözüm seçilir. Problemin diferansiyel denklem, integral denklem, varyasyonel denklem veya integrodiferansiyel denklem olmasına bakılmaksızın bir U tam çözümü için U_N yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
 U_N(x; \mathbf{c}) &= \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_N\phi_N(x) \\
 U_N(x; \mathbf{c}) &= \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j\phi_j(x)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

sonlu toplamı ile tanımlanır. Burada $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$ bilinen yaklaşım fonksiyonları c_1, c_2, \dots, c_N ise belirlenecek olan bilinmeyen parametrelerdir. $\phi_0(x)$ yaklaşım fonksiyonunun bilinmeyen katsayısı yoktur bunun sebebi homojen olmayan sınır şartlarını sağlayacak bir fonksiyona ihtiyaç duyulmasıdır. $\phi_j(x)$ yaklaşım fonksiyonları genellikle cebirsel olarak çalışmada kolaylık sağlayacak şekilde polinom, sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonları olarak seçilirler. Yaklaşım fonksiyonlarının sistematik bir şema sunması ve bu şemanın bilgisayarda rahatça kullanılabilmesi bu yöntem için oldukça önemlidir. Nitekim sonlu eleman yönteminin can alıcı noktası da bu yaklaşım fonksiyonlarının seçimine dayanır.

- **Uygun Bir Yöntem Seçilmesi**

Bu adımın amacı c_1, c_2, \dots, c_N bilinmeyen parametrelerini bulmak için gerekli olan en uygun yöntemi belirlemektir. Tam çözüme olabildiğince yakın çözüme ulaşmak ve c_1, c_2, \dots, c_N bilinmeyen parametrelerinden oluşan N bilinmeyenli denklem sistemini oluşturmak için iki temel yöntem vardır. Bu yöntemler

- Varyasyonel Yöntemler
- Ağırlıklı Kalan Yöntemleri ile verilebilir.

Bu bölümde varyasyonel yöntemler ve ağırlıklı kalan yöntemlerinin uygulaması ana hatlarıyla birlikte verilecektir. Ayrıca yöntemlerin avantajları ve dezavantajlarından da bahsedilecektir.

1.2.1 Varyasyonel Yöntemler

(1.8) yaklaşık çözümünde bulunan c_j bilinmeyen parametreleri ağırlıklı integral form, zayıf form ya da bağımlı değişkenin fonksiyonelinin mimimizasyonu kullanılarak elde edilir. Sonlu eleman yöntemi, varyasyonel yöntemlerden bir eleman üzerindeki denklemi formülize etmek için yararlanır. Bunun için de zayıf formun kullanıldığı Rayleigh-Ritz varyasyonel yöntemi tercih edilir.

Rayleigh-Ritz Yöntemi

Bu yöntem 1870' de L. Rayleigh tarafından titreşim problemlerinin çözümü, 1909' da ise W. Ritz tarafından denge probleminin çözümü için birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir [44]. Bu yüzden çoğunlukla Rayleigh-Ritz yöntemi olarak adlandırılır. Bu yöntemde Ritz katsayıları olarak adlandırılan c_j bilinmeyen parametreleri, denklemin zayıf formu kullanılarak oluşturulan denklem sisteminin çözümü olacaktır. Bu amaçla diferansiyel denklemin çözümüne denk olan

$$\delta I(U) = 0 \quad (1.9)$$

fonksiyonelinin minimizasyonu kullanılır. Buradaki $I(U)$, $U(x)$ değişkeninin fonksiyonu ve denklemin zayıf formudur. $I(U)$ fonksiyoneline uygulanan δ varyasyonel işlemi tam çözümün küçük komşuluklarında $U(x)$ fonksiyonunun değişimini içerir. Rayleigh-Ritz yöntemi uygulanırken (1.8) yaklaşık çözümü (1.9) denkleminde yerine yazılırsa, $\phi_j(x)$ fonksiyonları özel seçilmiş fonksiyonlar olduğundan, x bağımsız değişkenine bağlı hesaplanabilir integraller karşımıza çıkacaktır. Böylece I bir fonksiyondan, c_j parametrelerine bağlı bir

$$I(U_N(x; \mathbf{c})) = I(\mathbf{c})$$

fonksiyonuna dönüşecektir. Burada \mathbf{c} parametresi c_1, c_2, \dots, c_N parametrelerini temsil eden bir bilinmeyen ifadedir. $I(U_N(x; \mathbf{c}))$ fonksiyonelinin minimize edilmesi

$$dI = \frac{\partial I}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial I}{\partial c_2} dc_2 + \dots + \frac{\partial I}{\partial c_N} dc_N$$

ifadesinin sıfıra eşitlenmesi anlamına gelir. Bu durum da c_1, c_2, \dots, c_N katsayıları bağımsız olarak değişebileceğinden her dc_i katsayısı için

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial c_N} = 0$$

olmasıyla mümkündür. Böylece N bilinmeyenli N tane denklem elde edilir.

Bu yöntemde zayıf form problemin doğal sınır şartlarını içerdiğinden U_N yaklaşık çözümünün, problemin temel sınır şartlarını sağlaması yeterlidir. ϕ_j yaklaşım fonksiyonu sınır şartlarının homojen kısmını sağlarken, homojen olmayan sınır şartının sağlanması gerektirmesi ϕ_0 yaklaşım fonksiyonuna yüklenir. Yani, $U_N(x_0) = \phi_0(x_0) + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = \phi_0(x_0) = U_0$ olması anlamına gelir. Ayrıca varyasyonel yöntemlerde $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ yaklaşım fonksiyonlarının kümesi lineer bağımsız ve tam bir küme olmalıdır [37].

Varyasyonel yöntemler temel varyasyonel prensibi olarak “fonksiyonelin minimumu” kullanımı ile sınırlı sayıda lineer denkleme uygulanırken ağırlıklı kalan yöntemleri ise her diferansiyel denkleme uygulanabilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde ϕ_0 ve ϕ_j yaklaşım fonksiyonları üzerindeki gerektirmeler de varyasyonel yöntemlerden farklıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde ağırlıklı integral formu zayıf formdaki gibi sınır şartını içermediğinden (1.8) yaklaşık çözümü tüm sınır şartlarını sağlamalıdır. Bu gerektirmeler ağırlıklı kalan yönteminde kullanılan polinomun derecesini arttıracaktır. Bu nedenlerden dolayı tipik eleman denklemi oluşturulurken genellikle ağırlıklı kalan yöntemleri tercih edilir.

1.2.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Ağırlıklı kalan yöntemlerinin uygulaması için öncelikle bir Ω tanım bölgesi üzerinde tanımlı

$$A(U) = f \quad (1.10)$$

formunda bir operatör denklemini göz önüne alalım. (1.8) U_N yaklaşık çözümünün (1.10)' de yerine yazılmasıyla f ye eşit olmayan $A(U_N) = f_N$ ifadesi elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde kullanılan, sıfırdan farklı

$$R = A(U_N) - f_N = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f_N \neq 0 \quad (1.11)$$

kalan (rezidü) ifadesi tanımlanır. Burada rezidü ifadesi $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ ve x bağımsız değişkenine bağlı olup, c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x) R(x, \mathbf{c}) dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.12)$$

ağırlıklı integral formunu sıfır yapacak şekilde aranır. c_j parametrelerinin tek türlü belirlenmesi için ψ_i ağırlık fonksiyonlarının lineer bağımsız olacak şekilde seçilmesi gerekir. Rezidü ifadesini, sıfıra olabildiğince yakın elde etme mantığına dayanan ağırlıklı kalan yöntemleri ağırlık fonksiyonlarının seçimi açısından farklılık gösterirler. Belirli kriterlerle oluşturulan bu yöntemlerden uygulamalarda sıkça karşılaşılan kollokasyon yöntemi, subdomain yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve Galerkin yöntemi aşağıda verilecektir.

Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yönteminde ağırlık fonksiyonları, $\delta(x - x_i)$ dirac delta fonksiyonu

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

olmak üzere $\psi_i(x) = \delta(x - x_i)$ olarak seçilir. (1.12) eşitliğinde bu ifadenin yerine yazılmasıyla

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x, \mathbf{c}) dx = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

sağlanır. Dolayısıyla kollokasyon yönteminde her bir c_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bilinmeyen parametreleri ve x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) noktaları için için ağırlıklı integral formunu sıfır yapacak şekilde

$$R(x_1; \mathbf{c}) = 0$$

$$R(x_2; \mathbf{c}) = 0$$

\vdots

$$R(x_N; \mathbf{c}) = 0$$

işlemleri yapılır. O halde kollokasyon metodunda keyfi olarak seçilen N adet kollokasyon noktası kullanılarak hesaplama yapıldığından N bilinmeyenli N denklemden oluşan cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Burada kollokasyon noktaları olarak adlandırılan x_i noktaları, tanım bölgesinin herhangi bir noktası olabilir ancak denklemin iyi şartlı elde edilebilmesi başka bir deyişle daha iyi bir yaklaşık çözüm bulunabilmesi için bu noktalarının seçimi oldukça önemlidir [37].

Subdomain Yöntemi

Subdomain yönteminde ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta x_i \\ 0, & x \notin \Delta x_i \end{cases}$$

olmak üzere (1.12) eşitliğinde bu ifadenin yerine yazılmasıyla

$$\int_{\Omega} \psi_i(x) R(x, \mathbf{c}) dx = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

sağlanır. Yani her bir c_i bilinmeyen parametresi için Δx_i alt aralık (subdomain) olarak isimlendirilen bu aralıklar üzerinde kalanının ifadesi sıfır olacak şekilde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} R(x; \mathbf{c}) &= 0 \\ \frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} R(x; \mathbf{c}) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{\Delta x_N} \int_{\Delta x_N} R(x; \mathbf{c}) &= 0 \end{aligned}$$

işlemleri yapılır. Böylece N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan sistem çözülerek c_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bilinmeyen parametreleri elde edilir [37].

En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yönteminde c_i parametreleri kalanın karesinin integrali minimize yapılacak şekilde belirlenir. Yani her bir c_i parametresi için

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c_1} \int_{\Omega} R^2(x; \mathbf{c}) dx &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial c_2} \int_{\Omega} R^2(x; \mathbf{c}) dx &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial c_N} \int_{\Omega} R^2(x; \mathbf{c}) dx &= 0\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} R(x; \mathbf{c}) \frac{\partial R}{\partial c_1} dx &= 0 \\ \int_{\Omega} R(x; \mathbf{c}) \frac{\partial R}{\partial c_2} dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} R(x; \mathbf{c}) \frac{\partial R}{\partial c_N} dx &= 0\end{aligned}$$

olmalıdır. O halde ağırlık fonksiyonları $\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ olan integraller elde edilir. Yukarıda verilen ağırlıklı integrallerin hesabıyla birlikte karşımıza çıkan N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan sistem çözülerek c_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bilinmeyen parametreleri elde edilir [37].

Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde her bir c_i parametresi için Ω tanım bölgesi üzerinde $R(x; \mathbf{c})$ ağırlıklı kalan ve ağırlık fonksiyonlarının çarpımı sifıra eşit olacak şekilde işlem yapılır.

Bu yöntemde ψ_i ağırlık fonksiyonları ve ϕ_j yaklaşım fonksiyonları birbirine eşit seçilerek her bir c_i parametresi için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(x; \mathbf{c})\phi_1(x)dx &= 0 \\ \int_{\Omega} R(x; \mathbf{c})\phi_2(x)dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} R(x; \mathbf{c})\phi_N(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

sağlanır. c_i parametreleri yukarıda katsayıları hesaplanan N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan sistem çözülerek elde edilir. Ayrıca verilen problemin sınır şartlarının temel olması ve kullanılan yaklaşım fonksiyonlarının aynı olması durumunda Galerkin yöntemi ve Rayleigh-Ritz yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçlar aynıdır [37].

Kollokasyon sonlu eleman yöntemi sadece düğüm noktalarında hesaplama gerektirdiğinden diğer varyasyonel yöntemlere göre hesaplama zamanındaki azalma nedeniyle daha ekonomik bir metottür. Bu nedenle bu tezde kollokasyon sonlu eleman yöntemi tercih edilmiştir.

Sonlu Eleman Yönteminin Modellenmesi

Varyasyonel yöntemler ve ağırlıklı kalan yöntemleri kullanılarak tipik elemanın denklemini elde etmek için oluşturulan sonlu eleman yöntemleri uygulanırken aşağıda verilen ana şema kullanılır. Bu ana şemada takip edilecek her bir adım aşağıda verilmiş ve detaylıca açıklanmıştır.

1. Çözümün bölgelere ayrıştırılması:

Sonlu eleman yönteminde ilk adım, çözüm bölgesini “eleman” olarak isimlendirilen

alt bölgelere ayırmaktır. Bu işlem ayrıklaştırma ya da diskritizasyon olarak adlandırılır. Basit geometriler ve az sayıda eleman için bu işlem kolayca yapılırken, karmaşık geometriler ve çok sayıda eleman için imkansız hale gelmektedir. Bu durumda eleman büyüklüğü, sayısı ve düğüm numaraları için genelde mühendislik alanında kullanılan ilk işlemci (preprocessor) adı verilen programlar tercih edilmektedir. Bu adımda, eğer varsa problemin fiziksel özellikleri (koordinat, kesit alanı vb.) belirlenir ve çözüm aşamasında dikkate alınır [36].

2. *Tipik eleman için eleman denkleminin oluşturulması:*

Tipik bir eleman denklemini oluştururken tipik eleman üzerinde yaklaşık çözüm

$$U_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

formunda aranır. Bu yaklaşık çözüm, hesaplamalar açısından basit olmalı ayrıca düğüm noktaları üzerindeki süreklilik şartını da sağlamalıdır. Bu nedenle ϕ_i yaklaşım fonksiyonları için birinci, ikinci ve üçüncü dereceden polinomlar veya basit trigonometrik fonksiyonlar seçilebilir. Buradaki c_i katsayıları ise her bir eleman denklemini için belirlenecek olan bilinmeyen parametrelerdir. Yukarıda verilen U_N yaklaşık çözümünün diferansiyel denklemin varyasyonel formunda yerine yazılmasıyla tipik bir “e” elemanı için temel denklem, cebirsel formda

$$K^{(e)}U^{(e)} = F^{(e)}$$

şeklinde yazılabilir [36].

3. *Eleman denklemlerinin Birleştirilmesi:*

Her sonlu eleman için ayrı ayrı bulunan eleman denklemleri birleştirilerek, bütün sisteme ait

$$KU = F$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu formda yazılan denklem sistemi genelleştirilmiş veya global denklem sistemi olarak isimlendirilir. Burada F kuvvet (force) vektörü, K stifness matrisi (çoğu problem için stifness matrisi karesel ve simetriktir, ki bu bilgisayarda hesaplama ve depolama açısından avantaj sağlar) ve U belirlenecek olan katsayı vektörüdür. Bu adımda birleştirme işlemi yapılırken birincil değişkenlerin elemanlar arası sürekliliği, ikincil değişkenlerin ise denge şartını sağlaması gerektiği göz önünde bulundurulur [36].

4. Problemin sınır şartlarının sisteme dahil edilmesi:

Sonlu eleman yönteminde denklem sistemi kurulduktan sonra basit satır sütun işlemleriyle sınır koşulları sisteme dahil edilebilir. $2m$ mertebeli bir sınır değer probleminde m veya daha yüksek mertebeden türeve sahip sınır koşulları doğal (natural), m değerinden daha küçük mertebeden türevlere sahip sınır koşulları temel (essential) sınır koşulları olarak adlandırılır. Doğal sınır şartı Neumann, dinamik, kuvvet ve gerilim sınır şartı olarak da adlandırılırlar. Genellikle problemin fiziksel özelliğini taşıyan doğal sınır şartı katı mekaniğinde kuvvet, gerilim ve moment, ısı transferinde ısı akısı, potansiyel problemlerde ise potansiyel eğime karşılık gelir. Temel sınır şartı genellikle küçük mertebeden türevler içerip Dirichlet, kinematik, yer değiştirme (displacement) ve geometrik sınır koşulu olarak da adlandırılırlar. Üçüncü tipte olan mixed sınır şartı ise işlevsel olarak doğal sınır şartı gibi değerlendirilir [36, 37].

5. Birleştirilmiş denklem sisteminin çözülmesi:

Dördüncü adımda verilen birleştirilmiş denklem sistemi farklı paket programlar ya da herhangi bir programlama dilinde yazılan programlar yardımıyla çözülebilir.

6. Sonuçların değerlendirilmesi:

Elde edilen nümerik çözüm grafik veya tablo şeklinde hazırlanarak yönteme daha somut bir boyut kazandırılır. Sonuçları değerlendirmek basit veya az sayıda eleman için kolay olmasına rağmen karmaşık geometriler veya çok sayıda eleman için zorlaşmaktadır.

• Hata Tahmini

Kullanılan nümerik yöntemin doğruluğunu ve etkililiğini ölçmek amacıyla U_N nümerik çözümünün U tam çözümüne yakınlığını ifade etmek için hata normları kullanılır. Ele alınan problemlerin çoğu analitik çözüme sahip olup problemlerin nümerik çözümleri sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve hareketli sınırın yeri için uygun hata normları kullanılarak değerlendirildi. Bu amaçla

$$L_2 = \|U^{Tam} - U^{Nümerik}\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U(x_j) - U_N(x_j)|^2} \quad (1.13)$$

ortalama hata normu,

$$L_\infty = \|U^{Tam} - U^{Nümerik}\|_\infty \simeq \max_j |U(x_j) - U_N(x_j)| \quad (1.14)$$

maksimum hata normu ve $|U(x_j) - U_N(x_j)|$ mutlak hata olmak üzere

$$Hata (\%) = \frac{|U(x_j) - U_N(x_j)|}{|U(x_j)|} \times 100 \quad (1.15)$$

yüzdelik bağıl hatası kullanıldı.

1.3 Spline Fonksiyonlar

Nümerik hesaplamalarda genellikle yaklaşım fonksiyonları olarak polinomlar kullanılır. Ancak tanım bölgesi genişlediğinde kullanılan nokta sayısı artar dolayısıyla

yapılan işlem ve aranan bilinmeyen sayısı da artacaktır. Ayrıca lokal olarak küçük olan bir hata global anlamda büyük etkiye sebep olabilir. Bu nedenle yaklaşım fonksiyonları olarak polinomlar yerine belirli düzgünlük (smoothing) şartını sağlayan polinom parçalarının bir araya gelerek oluşturduğu spline fonksiyonlar tercih edilir [45]. Veri depolama, bilgisayar yardımlı tasarım (CAD), otomatik işlem yapma (CAM), diferansiyel denklemlerin çözümleri ve bilgisayar grafikleri gibi bir çok alanda kullanılan spline fonksiyonları nümerik yaklaşım elde etmede ve geometrik şekillerin modellemesinde oldukça önemli bir rol oynar.

İlk olarak Schoenberg [46] tarafından 1946 yılında ortaya atılan spline fonksiyonları alt aralıklar üzerindeki polinom parçalarının bir araya getirilmesiyle oluşur. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eşitsizliğini sağlayan $(n + 1)$ düğüm noktasını ele alalım. $k \geq 0$ için k . dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonu için düğüm noktalarında aldığı fonksiyon değerleri $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ olmak üzere, k defa türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi $C^k[a, b]$ için,

- $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$
- $S(x_j) = f(x_j), 0 \leq j \leq n$
- $S(x)$ her $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$ alt aralığında en fazla k . dereceden bir polinom olmalıdır [45].

Belirli türev ve süreklilik şartını sağlayan parçalı fonksiyonlar spline fonksiyonlar olarak nitelendirilirler. Genel olarak aşağıda verilen özelliklere sahip spline fonksiyonlardan bazıları bu bölümde verilecektir.

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.

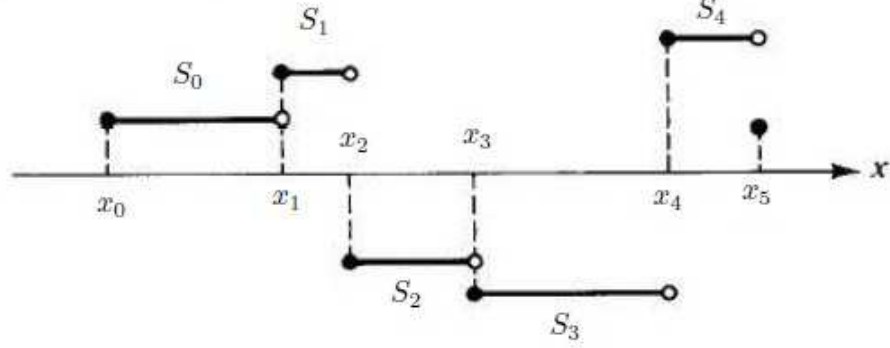
- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine bir spline fonksiyon olacaktır.
- Spline fonksiyonlar bilgisayarda işleme, depolama ve hesaplama açısından uygun fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların kullanılması sonucu ortaya çıkan matrisler işaretleri ve determinant özellikleri bakımından kolay hesaplanabilir.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektir ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler.
- Yaklaşım sonucu elde edilen yapılar polinomun yapısı ile ilişkilidir.
- Spline fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanır.
- Spline fonksiyon kullanılan nümerik yöntemin yakınsaklık ve kararlılık analizi daha kolay incelenir.

Sıfırıncı dereceden spline fonksiyonu parçalı ve sabit bir fonksiyon olacak şekilde

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = c_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

formuyla ifade edilir. Sıfırıncı dereceden altı düğüm noktasına bağlı tipik bir spline fonksiyon Şekil 1.2 ile verilebilir.

Şekil 1.2. Sıfırıncı dereceden bir spline fonksiyonu.

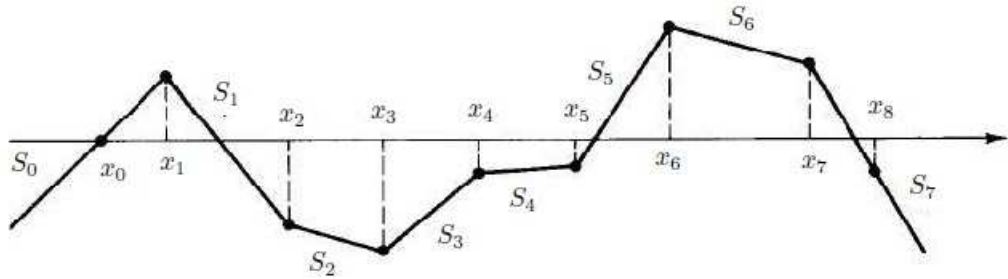


Birinci dereceden bir spline fonksiyonu ise

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1x + b_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Birinci dereceden spline fonksiyonun her bir parçası türevlenebilir sürekli bir fonksiyondur. Bu parçalı fonksiyonlar düğüm noktalarında aynı değerleri alır. Yani $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ eşitliği sağlanır. Birinci dereceden dokuz düğüm noktasına bağlı tipik bir spline fonksiyon aşağıda verilen Şekil 1.3 ile gösterilebilir.

Şekil 1.3. Birinci dereceden bir spline fonksiyonu.



$S(x)$, kübik spline fonksiyonları ise her bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında farklı kübik polinomlarla tanımlı

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu ile tanımlanır. Burada parçalı fonksiyonlar düğüm noktalarında aynı değerleri alır. Böylece $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$, $1 \leq i \leq n - 1$ olacaktır. $S(x)$ spline fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla S' ve S'' fonksiyonları da sürekli fonksiyonlar olacaktır. Şimdi, aşağıda verilen interpolasyon noktalarından geçen kübik spline fonksiyonlarını oluşturalım.

$$\begin{array}{ccccccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y & f(x_0) & f(x_1) & & f(x_n) \end{array}$$

n kübik polinomdan oluşan bir parçalı kübik spline fonksiyonunun $4n$ tane bilinmeyeni olacaktır. Her bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında interpolasyon şartından $S(x_i) = f(x_i)$ ve $S(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ olur. Buradan $2n$ tane denklem elde edilir. S' ve S'' fonksiyonları iç noktalarda sürekli olduğundan $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ ve $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ sağlanır ki buradan $2n - 2$ tane eşitlik gelir. Bu durumda iki denkleme daha ihtiyaç duyulur. Bu iki denklemi elde etmek için bazı durumlarda uç noktada ikinci türev sıfır olacak şekilde seçim yapılır. Bu şekilde oluşturulan kübik spline doğal kübik spline olarak adlandırılır. Bir başka yöntem ise uç noktalarda verilen fonksiyonun türevi ile eşleme yapmaktır. S'' ikinci türevi için $S''_i(x_i) = z_i$ ve $S''_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$ noktalarından geçen

$$S''_i(x) = \frac{z_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - x_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

lineer fonksiyonu kullanılır. Bu lineer fonksiyonun iki kez integrali alınarak spline fonksiyonlarının düğüm noktalarından geçmesi gerektiği göz önünde bulundurularak iki uç noktaki değerlerin eşitliğinden gerekli sayıda denkleme ulaşılır [45].

Kübik spline fonksiyonu hesaplanırken gereken işlemler, yüksek dereceden spline fonksiyonlar için daha da fazla olacaktır. Spline fonksiyonun derecesi arttıkça daha fazla bilinmeyen parametrenin hesabı gerekecektir, dolayısıyla daha büyük denklem sistemlerinin çözümü gerekir. Oluşan denklem sistemi her zaman kararlı olmayabilir. Bu durumda sayısal kararsızlıklarla karşılaşmamak için bütün spline fonksiyonların kümesi için baz teşkil eden B-spline fonksiyonları kullanılır.

1.3.1 B-Spline Fonksiyonlar

Reel eksen üzerinde $\{x_i\}$ düğüm noktalarının sonsuz kümesi

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} x_i = \infty = - \lim_{x_i \rightarrow \infty} x_{-i}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu düğüm noktalarına bağlı $B_i^0(x)$, sıfıncı dereceden B-spline baz fonksiyonu

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

parçalı sabit fonksiyonu ile tanımlanır. Bu formdaki B-spline fonksiyonları $\{B_i^0(x), i \in \mathbb{Z}\}$ sonsuz elemanlı bir dizidir. Sıfıncı dereceden bir B-spline fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Bir f fonksiyonunun desteği, $f(x) \neq 0$ olan x noktalarının kümesi olarak tanımlanmak üzere $x \in [x_i, x_{i+k+1})$ yarı açık aralığında $B_i^0(x) > 0$ olduğundan, $B_i^0(x)$

spline fonksiyonunun destek kümesi $[x_i, x_{i+1})$ aralığı olacaktır.

ii) Her i ve x için $B_i^0(x) \geq 0$ dır.

iii) Düğüm noktaları x_i ve x_{i+1} olan $B_i^0(x)$, B-spline fonksiyonu süreksiz olup sıçramaların olduğu tüm düğüm noktalarında sağdan süreklidir. Yani

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_i)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) = 0 = B_i^0(x_{i+1})$$

sağlanır.

iv) Her x için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ olur.

Buradaki sonuncu gerektirme sonsuz seri içermesine rağmen serinin yakınsaklığıyla ilgili problem olmayacaktır. Çünkü $x_j \leq x < x_{j+1}$ aralığındaki herhangi bir x tamsayısı için de

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_j^0(x) = 1$$

sağlanacaktır. $B_i^0(x)$, sıfırcı dereceden spline fonksiyonları kullanılarak yüksek dereceden B- spline fonksiyonlar türetilir. Örneğin, S sabit bir spline fonksiyon

$$S(x) = c_i, \quad x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

olsun. Bu spline fonksiyon sıfırcı dereceden B-spline fonksiyon cinsinden

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^0(x)$$

ile yazılabilir. Sıfırcı dereceden B-spline baz fonksiyonundan başlanarak yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar $k = 1, 2, \dots$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ için

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (1.16)$$

indirgeme bağıntısı kullanılarak türetilebilir. (1.16) yineleme bağıntısı

$$V_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}$$

lineer fonksiyonu yardımıyla daha düzgün bir formda

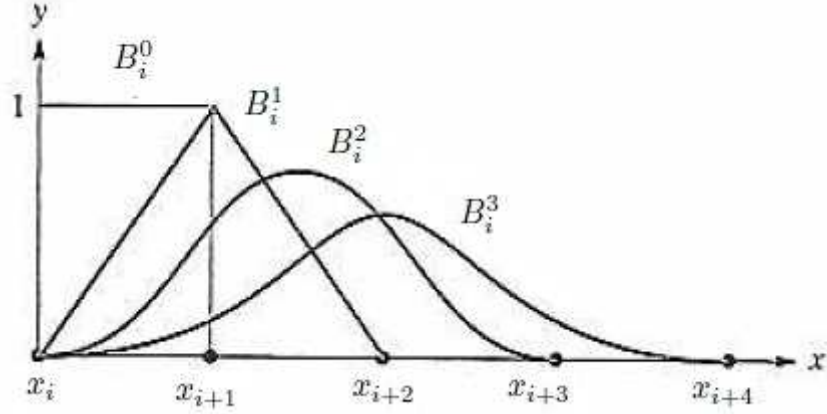
$$B_i^k(x) = V_i^k(x)B_i^{k-1}(x) + (1 - V_{i+1}^k(x))B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (1.17)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan sıfırcı dereceden B-spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $B_i^1(x)$, Birinci dereceden B-spline baz fonksiyonu

$$\begin{aligned} B_i^1(x) &= \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) B_i^0(x) + \left(\frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} \right) B_{i+1}^0(x) \\ &= \begin{cases} 0, & x < x_i \text{ ya da } x \geq x_{i+2} \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $B_i^1(x)$, birinci dereceden B-spline baz fonksiyonu (hat function) parçalı lineer bir fonksiyon olup aynı şekilde $B_i^2(x)$, ikinci dereceden kuadratik B-spline baz fonksiyonu, $B_i^3(x)$, üçüncü dereceden kübik B-spline baz fonksiyonu vd. elde edilebilir. k . dereceden B-spline fonksiyonu olarak adlandırılan B_i^k B-spline fonksiyonu, B_i^{k-1} ve B_{i+1}^{k-1} fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazıldığından her bir adımda hesaplanan B-spline fonksiyonunun derecesi bir derece artar. Aşağıda verilen Şekil 1.4' de aynı eksen üzerinde ilk dört B-spline fonksiyonun grafiği bir arada verilmiştir.

Şekil 1.4. İlk dört B-spline baz fonksiyonu.



Ayrıca genel olarak B_i^k B-spline baz fonksiyonları için $i \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

- $k \geq 1$ ve $x \notin (x_i, x_{i+k+1})$ ise $B_i^k(x) = 0$ dir.
- $k \geq 0$ için $x \in (x_i, x_{i+k+1})$ ise $B_i^k(x) > 0$ dir.
- Tüm k sayıları için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1$ dir.
- $k \geq 1$ için $B_i^k(x)$ B-spline fonksiyonları $C^{k-1}(\mathbb{R})$ kümesindedir.
- $\{B_j^k(x), B_{j+1}^k(x), \dots, B_{j+k}^k(x)\}$ B-spline fonksiyonlarının kümesi (x_{k+j}, x_{k+j+1}) aralığı üzerinde lineer bağımsızdır [45].

Tez boyunca Stefan problemlerinin kollokasyon sonlu eleman metodu kullanarak nümerik çözümlerini elde etmek için kübik B-spline baz fonksiyonları kullanıldı. Bu baz fonksiyonları yukarıda verilen (1.17) formülü yardımıyla türetilmekle beraber uygulamalarda sıklıkla kullanılan durumlarıyla aşağıda verilmiştir.

Kübik B-Spline Baz Fonksiyonları

$[a, b]$ aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = \Delta x = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1$ (1) $N+1$ olmak üzere x_m noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonları,

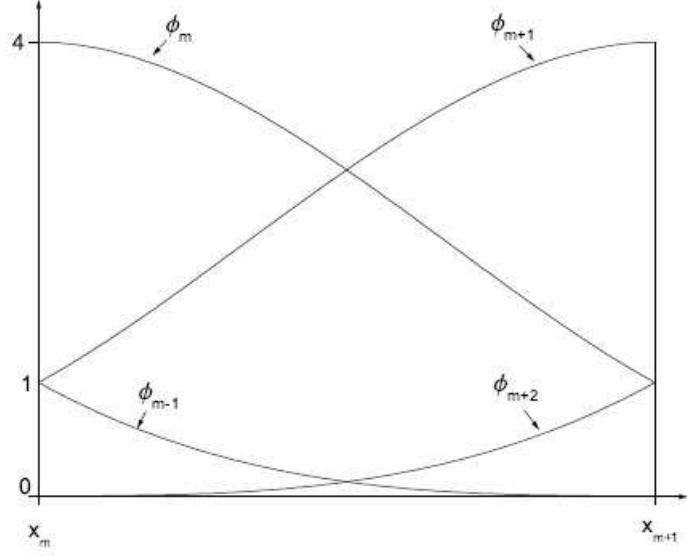
$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.18)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığı için bir baz oluşturur. $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonu ve türevlerinin tümü $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Ayrıca Şekil 1.5' de görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ kübik baz fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ gibi dört tane kübik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ' in kendisi ve ikinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri de Tablo 1.1' de verilmiştir.

Tablo 1.1. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ ' in düğüm noktalarında aldığı değerler.

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	-3	0	3	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

Şekil 1.5. Kübik B-spline şekil fonksiyonları.



1.4 Kararlılık Analizi

Bu tezde, kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak oluşturulan sonlu fark denklemlerinin kararlılığı Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi kullanılarak incelendi. Aşağıda genel hatlarıyla verilen Von-Neumann kararlılık analizi, daha sonraki bölümlerde ilgili metoda ve baza göre uygulanarak her bir yöntemin kararlılık analizi incelenecektir.

Von-Neumann yöntemi, $t = 0$ boyunca mesh noktalarında bir sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerlerini ifade eder. Dolayısıyla kısmi diferansiyel denklemin değişkenlere ayırma yöntemine benzer olarak $t = 0$ için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon gözönüne alınarak uygulanır. Bunun için $i = \sqrt{-1}$, $x_m = m\Delta x$ ve ℓ, x

aralığının uzunluğu olmak üzere

$$\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad veya \quad \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ifadesine denk olan kompleks üstel formdaki

$$\sum A_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

ifadesinin yazılmasında uygun olacaktır. O halde

$$A_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}} = A_n e^{\frac{in\pi m(\Delta x)}{\ell}} = A_n e^{i\beta_n m \Delta x}$$

yazılabilir. Burada $\beta_n = \frac{n\pi}{N\Delta x}$ ve $N\Delta x = \ell$ olarak alınmıştır. $t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değeri $U(m\Delta x, 0) = U_m^0$, $m = 0(1)N$ ile gösterilmek üzere $N + 1$ tane denklem A_0, A_1, \dots, A_N sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. O halde ele alınan lineer fark denkleminin $e^{i\beta m \Delta x}$ gibi bir başlangıç değerinden elde edilmesi mümkündür. Çünkü lineer fark denklemleri lineer bağımsız çözümlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta x} e^{\alpha n \Delta t} = e^{i\beta m \Delta x} \zeta^n$$

ifadesini ele alalım. Burada α genellikle kompleks bir sabit olmak üzere güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılan ζ değeri $\zeta = e^{\alpha \Delta t}$ olarak alınmıştır.

Sonlu fark denklemlerinin kararlılığı için $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ ve $n \leq N$ başlangıç şartını sağlayan tüm β değerleri için $|U_m^n|$ rezidüsü (kalanı) sınırlı olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir [33]. Dolayısıyla sonlu fark şemasının tam çözümü zamana bağlı üstel olarak artmıyorsa kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\zeta| \leq 1 \quad \text{yani} \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

olmasıdır. Eğer U_m^n zamana bağlı artıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart K pozitif sayısı Δx , Δt ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$|\zeta| \leq 1 + K\Delta t = 1 + O(\Delta t)$$

olmasıdır. Von-Neumann yöntemi sadece sabit katsayılı lineer denklem sistemler için uygulanabilen bir yöntemdir.

2. MODEL PROBLEM

Bu bölümde ele alınan model problem altı farklı sınır ve başlangıç koşuluyla birlikte tanıtıldı. Her bir problemin literatürdeki nümerik ve varsa tam çözümlerinden kısaca bahsedildi. Bu çalışmada Stefan problemi, $U(x, t)$ sıcaklık dağılımı ve $s(t)$ hareketli sınırın yeri olmak üzere genel olarak

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

ısı iletim denklemi

$$\beta \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} + \gamma U(0, t) = U_0(t), \quad U(s(t), t) = U_s(t), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

sınır koşulları ve

$$U(0, t) = f(x)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak gözönüne alınır. Hareketli sınırın yerinin belirlenmesi için kullanılan

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

Stefan koşulu ise

$$s(0) = S_0$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak ele alınır. Her bir problem için farklı olan α, β ve γ katsayılarının eşit olduğu değerler aşağıda belirtilecektir.

2.1 Problem 1

Klasik Stefan problemi hareketli tanım aralığı üzerinde $\alpha = 1$ için (2.1) ısı denklemi ve $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için

$$U(0, t) = 1, \quad U(s(t), t) = 0, \quad t \geq 0$$

(2.2) sınır koşullarıyla birlikte verilsin. Hareketli sınırın yerini belirlemek için kullanılan

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

Stefan şartı bu problem için

$$s(0) = 0$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak ele alınacaktır. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = 1 - \frac{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{t})}{\operatorname{erf}(\lambda)}, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{t}, \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

eşitlikleriyle tanımlı olup burada erime/donma parametresi olarak bilinen λ ,

$$\gamma\sqrt{\pi}\lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) = 1 \quad (2.5)$$

cebirsel olmayan denklemin köküdür, hata fonksiyonu $\operatorname{erf}(x)$ ise

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

bağıntısı ile tanımlıdır [48]. Buradaki γ sayısı faz değişim parametresi veya Stefan parametresi olarak

$$\gamma = \frac{1}{Ste}$$

ile tanımlanır. (2.3)-(2.4) eşitlikleriyle verilen analitik çözümler nümerik yöntemin başlatılmasında ve nümerik sonuçların karşılaştırılmasında kullanılır.

Bu problemin nümerik çözümü için 1971 yılına kadar kullanılan nümerik yöntemler ve problemin matematiksel gelişimi Rubinstein [5] ve Crank [2] tarafından incelenmiştir. Stefan problemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için günümüze kadar çeşitli nümerik yöntemler kullanılmış olup sonlu farklar metodu kullanılarak elde edilen nümerik yöntemlerle oldukça etkili nümerik çözümler elde edilmiştir. Kutluay [48], tez çalışmasında variable space grid metodu, boundary Immobilisation metodu ve isotherm migration metodu yardımıyla sonlu fark yöntemini kullanarak, buzun erimesi problemi olarak adlandırılan bu problem için tam çözüme oldukça yakın nümerik sonuçlar vermiştir.

2.2 Problem 2

Sol sınır üzerinde zamana bağlı periyodik sınır koşuluna sahip Stefan problemi $\alpha = 1$ için (2.1) ısı denklemi ve $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için

$$U(0, t) = 1 + \epsilon \sin \omega t, \quad U(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

(2.2) sınır koşullarıyla birlikte verilsin. $U(x, t)$ sıcaklık dağılımı ve $s(t)$ hareketli sınırın yeri olmak üzere buradaki ϵ parametresi salınım genliği, ω parametresi ise salınım frekansıdır. Ayrıca Stefan koşulu

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

eşitliğiyle birlikte verilmek üzere hareketli sınır için başlangıç koşulu

$$s(0) = 0$$

ile verilir. Bu problemin analitik çözümü $\epsilon \neq 0$ iken mevcut değildir. Ancak $\epsilon = 0$ için problem 1' e eşit olup, analitik çözüme sahiptir. Periyodik sınır koşuluna sahip bu problemin analitik çözümü olmadığından nümerik çözümü başlatmak için klasik Stefan probleminin (2.3)-(2.4) eşitlikleriyle verilen analitik çözümü kullanılacaktır. Bu durum ilk olarak Rizwan-Uddin [16] tarafından nodal integral metodu uygulanırken önerilmiş olup daha sonra Savović ve Caldwell [11]' in çalışmasında sonlu fark yöntemleri uygulanırken aynı yol izlenmiştir.

Bu problem için Ste , ϵ , ω , fiziksel parametreleri oldukça önemli olup nümerik sonuçları belirgin bir şekilde etkilemektedir. Bununla ilgili nümerik sonuçlar ve grafikler daha sonraki bölümlerde verilecektir.

2.3 Problem 3

$U(x, t)$ sıcaklık dağılımı, $s(t)$ ise t zamanında hareketli sınırın yeri olmak üzere bu problem $\alpha = 1$ için (2.1) ısı denklemi ve $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için

$$U(0, t) = -1, \quad U(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

(2.2) sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 0, & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$

$$s(0) = 0.25$$

başlangıç şartlarına bağlı olarak gözönüne alınacaktır. Ayrıca Stefan koşulu

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

formunda verilsin. Bu problemin hareketli sınırının yeri için tam çözüm Rubinstein [5] tarafından elde edilmiştir. Problem Finn ve Varoğlu [49] tarafından sonlu eleman yöntemi, Fazio [50] tarafından iteratif dönüşüm yöntemi, Asaithambi [51] tarafından diferansiyel denklem yardımıyla oluşturulan yineleme bağıntısındaki katsayıların Taylor seri açılımı kullanılarak sonlu eleman yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Ayrıca Asaithambi [52] tarafından lineer bazlar yardımıyla Galerkin sonlu eleman yöntemi kullanılarak literatürdeki en iyi çözüm elde edilmiştir.

2.4 Problem 4

Sol sınır üzerinde zamana bağlı üstel olarak artan sıcaklığa sahip Stefan problemi $\alpha = 1$ için (2.1) ısı denklemi ve $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için

$$U(0, t) = e^t - 1, \quad U(s(t), t) = 0 \quad t > 0$$

(2.2) sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq s(t)$$

başlangıç koşuluyla birlikte verilsin. Ayrıca

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

Stefan koşulu

$$s(0) = 0$$

başlangıç şartıyla birlikte verildiğinde problem

$$U(x, t) = e^{t-x} - 1, \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (2.6)$$

$$s(t) = t \quad (2.7)$$

tam çözümüne sahiptir [7, 53, 54]. Bu problem, $N_x = 10$ için Savović vd. [12] tarafından nodal integral metodu ve boundary immobilisation metodu yardımıyla oluşturulan sonlu fark yöntemi kullanılarak, $N_x = 4$ için Rizwan-Uddin [17] tarafından nodal integral metodu kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Mitchell ve Vynnycky [19] bu problemi, Keller box şeması üzerine kurulmuş sonlu fark yöntemleri kullanılarak nümerik olarak çözmüştür.

2.5 Problem 5

$0 < x < s(t)$ hareketli tanım bölgesi üzerinde (2.1) ısı iletim denklemini $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için

$$U(0, t) = e^{\alpha t}, \quad U(s(t), t) = 1, \quad t > 0$$

(2.2) sınır koşullarıyla birlikte ele alalım. Burada α yoğunluk, öz ısı ve ısı iletkenliği parametrelerini içeren fiziksel bir sabittir ve bu model problem için $Ste = \alpha$ dır. Hareketli sınırın yeri ise

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

Stefan şartı ve

$$s(0) = 0$$

başlangıç koşuluyla birlikte verilsin. Bu problemin tam çözümü [7]

$$U(x, t) = e^{\alpha t - x}, \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (2.8)$$

$$s(t) = \alpha t \quad (2.9)$$

formunda olup, nümerik işlemleri başlatmada ve nümerik sonuçları karşılaştırmada kullanılacaktır. Problem 5 daha önce variable space grid yöntemi [12] ve sonlu farklar

yöntemi yardımıyla oluşturulan variable time step yöntemi [15] kullanılarak $\alpha = 2$ ve $\alpha = 10$ değerleri için nümerik olarak çözülmüştür. Farklı zaman değerleri için sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri nümerik olarak elde edilmiştir.

2.6 Problem 6

Problem 4' den farklı olarak Dirichlet sınır koşulu yerine Neumann sınır koşuluna sahip bu problem $\alpha = 1$ için (2.1) ısı denklemi ve $\gamma = 0$, $\beta = 1$ için ve

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = -e^t, \quad U(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

(2.2) sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq s(t)$$

başlangıç koşuluyla birlikte verilsin. Ayrıca

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0$$

Stefan koşulu

$$s(0) = 0$$

başlangıç şartıyla birlikte verilmek üzere buradaki $Ste = 1$ katsayısı için, problem 6 ve problem 4 aynı tam çözüme sahiptir [7, 53]. Problem 4 için Dirichlet sınır koşulu temel alınırken, problem 6 için Neumann sınır koşulu temel alınır. Neumann sınır koşuluna sahip bu problem için, VSG ve BIM yardımıyla oluşturulmuş sonlu fark yöntemi kullanılarak Kutluay vd. [55] tarafından nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonraki yıllarda Esen ve Kutluay [8, 9] tarafından bu problem uygun bir değişken dönüşümü yardımıyla IMM ile oluşturulan sonlu fark yöntemi ve Entalpi yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür.

3. VARIABLE SPACE GRID (VSG) METODU

Variable space grid metodu ilk olarak Murray ve Landis [26] tarafından uygulanmış olup bu yöntemde $x = 0$ sabit sınırı ve $x = s(t)$ hareketli sınırı arasındaki eleman sayısı sabit tutulmak üzere, hareketli sınır daima N . grid üzerine gelecek şekilde tanım aralığı N parçaya bölünerek işlem yapılır. Dolayısıyla $\Delta x = s(t)/N$ bölüntü uzunluğu her zaman adımında farklı olur. Sabit x yerine bir i grid çizgisini takip eden t ye bağlı kısmi türev alınırsa $i\Delta x$ gridi için

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_i = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_t \left. \frac{dx}{dt} \right|_i + \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_x \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilir. Murray ve Landis [26] x_i noktasında dx/dt değişimini

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{x_i}{s(t)} \frac{ds}{dt} \quad (3.2)$$

olarak kullanmayı önermişlerdir. (3.2) eşitliğinin (3.1) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_i = \frac{x_i}{s(t)} \frac{ds}{dt} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_t + \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_x \quad (3.3)$$

ifadesini ele alalım. Ele alınan problemler için genel formu (2.1) olan ısı denkleminde (3.3) ifadesi yerine yazılarak boyutsuz Stefan problemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{x_i}{s(t)} \frac{ds}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada α yoğunluk, öz ısı ve ısı iletkenliği parametrelerini içeren fiziksel bir sabittir.

Gupta [56] çalışmasında bu yöntemi uygularken hareketli sınırın tamamıyla taşındığı bir grid sistemi üzerinde birbirini izleyen zaman adımı noktalarında fonksiyonu

belirlemek için bir Taylor seri açılımı kullanmıştır. Miller vd. [57] bu yöntemle uygun bir bölüntü üzerinde sonlu elemanları kullanarak daha önce Crank ve Gupta [27]'nin üzerinde çalıştığı oksijen difüzyon probleminin nümerik çözümünü incelemişlerdir. Bonnerot ve Jamet [58] ise yöntemi dikdörtgensel olmayan bölge üzerinde izoparametrik sonlu elemanları oluşturarak iki boyutlu bir probleme uygulamışlardır.

3.1 Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi

Bu kısımda, farklı başlangıç ve sınır koşullarına sahip hareketli sınır değer problemleri kübik B-spline fonksiyonlarıyla oluşturulan kollokasyon sonlu eleman şemaları kullanılarak nümerik olarak çözüldü. Bölüm 1' de (1.18) ile verilen $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak (3.4) ile verilen denklemin $U(x, t)$ çözümüne karşılık gelen $U_N(x, t)$ yaklaşımı

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir [59]. Burada δ_j zamana bağlı bilinmeyen parametreler, ϕ_j ise kübik B-spline baz fonksiyonlarını temsil etmektedir. (1.18) ile verilen kübik B-spline baz fonksiyonlarına

$$(\Delta x)\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} kübik baz fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında ξ

cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1} &= (1 - \xi)^3 \\
\phi_m &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3 \\
\phi_{m+1} &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3 \\
\phi_{m+2} &= \xi^3
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olur [60, 61]. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm B-spline fonksiyonları sıfıra eşit olduğundan $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N^e(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(x) \tag{3.7}$$

ile yazılabilir. (3.6) kübik B-spline fonksiyonları ve (3.7) yaklaşımı kullanılarak x_m noktasında U_N , U'_N ve U''_N yaklaşımları

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\
U'_N(x_m, t) &= U'_m = \frac{3}{\Delta x} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) \\
U''_N(x_m, t) &= U''_m = \frac{6}{(\Delta x)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir.

(3.8) ile verilen yaklaşımlar (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} = x_m^n \frac{(\dot{s})^n}{s^n} \frac{3}{\Delta x^n} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) + \frac{6\alpha}{(\Delta x^n)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada “.” ifadesi zamana bağlı türevi göstermek üzere s hareketli sınırın yeri, \dot{s} ise hareketli sınırın hızıdır. (3.9) denklem sisteminde δ , $\dot{\delta}$ yerine sırasıyla Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımı

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} \quad (3.10)$$

$$\dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.11)$$

kullanılırsa sistemin genelleştirilmiş satırları

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)N \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \alpha_{m3}, \alpha_{m4}, \alpha_{m5}$ ve α_{m6} katsayıları

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= 1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta x^n} x_m^n \frac{(\dot{s})^n}{s^n} - \frac{3\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} & \alpha_{m4} &= 1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^n} x_m^n \frac{(\dot{s})^n}{s^n} + \frac{3\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} \\ \alpha_{m2} &= 4 + \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} & \alpha_{m5} &= 4 - \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} \\ \alpha_{m3} &= 1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^n} x_m^n \frac{(\dot{s})^n}{s^n} - \frac{3\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} & \alpha_{m6} &= 1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta x^n} x_m^n \frac{(\dot{s})^n}{s^n} + \frac{3\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olmak üzere (3.12) denklem sistemi $N + 1$ denklem ve $N + 3$ tane bilinmeyenden oluşur. Burada Δx^n mesh uzunluğu, Δt zaman adımdır. Bu denklem sisteminin çözülebilir olması için iki denkleme daha ihtiyaç duyulur. Ya da $m = 0$ ve $m = N$ için birinci ve N . satırda oluşacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri sınır şartları yardımıyla sistemden yok edilerek bilinmeyen sayısı $N + 1$ ' e indirgenir. Bu amaçla δ_{-1} hayali parametresini yok etmek için sol sınır şartı, δ_{N+1} hayali parametresini yok etmek için sağ sınır şartı kullanılarak denklem sistemi

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n + r \quad (3.14)$$

matris formuna dönüştürülür. Burada A ve B

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \frac{-3}{h} & 0 & \frac{3}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_N^0 \\ \delta_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_0 \\ U_0 \\ \vdots \\ U_N \\ U'_N \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir. Bu sistemin çözümüyle δ^0 başlangıç vektörü elde edilir.

3.2 Kararlılık Analizi

Bu kısımda, Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi kullanılarak (3.12) sonlu eleman şemasının kararlılığı incelendi. β mod sayısı, Δx eleman uzunluğu olmak üzere güçlendirme çarpanı olarak bilinen ζ çarpanı bulunduran

$$\delta_m^n = \zeta^n e^{im\beta\Delta x}$$

tipik Fourier modu (3.12) genelleştirilmiş satırında yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa ve $e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$ Euler formülü kullanılırsa, ζ güçlendirme çarpanı

$$\zeta = \frac{a_1 + ib}{a_2 - ib}$$

formunda elde edilir. Burada a_1, a_2 ve b katsayıları VSG üzerine kurulu kollokasyon sonlu eleman yöntemi için

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(2 + \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2}\right) \cos \beta\Delta x^n + \left(4 - \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2}\right) \\ a_2 &= \left(2 + \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2}\right) \cos \beta\Delta x^n + \left(4 + \frac{6\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2}\right) \\ b &= \left(\frac{3\Delta t}{\Delta x^n} \frac{x_m^n}{s^n} (\dot{s})^n\right) \sin \beta\Delta x^n \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.12) sonlu eleman şemasının kararlı olması için gerek ve yeter şart güçlendirme çarpanı ζ için $|\zeta| \leq 1$ koşulunun sağlanmasıdır.

Dolayısıyla $|a_2 - ib| - |a_1 + ib| \geq 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$|a_2 - ib| - |a_1 + ib| = \frac{48\alpha\Delta t}{(\Delta x^n)^2} \sin^2 \frac{\beta\Delta x^n}{2} \left(6 - 4 \sin^2 \frac{\beta\Delta x^n}{2} \right)$$

bulunur.

$$-1 \leq \sin \frac{\beta\Delta x^n}{2} \leq 1$$

olduğundan $|a_2 - ib| - |a_1 + ib| \geq 0$ eşitsizliği her zaman sağlanır. Dolayısıyla kollokasyon yöntemi kullanılarak oluşturulan sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

3.3 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kübik B-spline kollokasyon yöntemi (2.1) ısı iletim denklemi ve Bölüm 2' de verilen altı farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte gözönüne alınarak nümerik çözümler elde edildi. Bu problemlerden ilk beş tanesi

$$U(0, t) = U_0(t), \quad U(s(t), t) = U_s(t), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

Dirichlet tipi sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = f(x) \quad (3.18)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alındı. Bu problemler için hareketli sınırın yeri

$$\frac{ds}{dt} = -Ste \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0 \quad (3.19)$$

Stefan koşulu

$$s(0) = S_0 \quad (3.20)$$

başlangıç koşuluyla ele alındı. Bu problemlerde (3.12) şemasında $m = 0, m = N$ için ortaya çıkan δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri sağ ve sol sınır koşullarından elde edilen

$$\delta_{-1} = U_0(t) - 4\delta_0 - \delta_1 \quad (3.21)$$

$$\delta_{N+1} = U_s(t) - 4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.22)$$

eşitlikleri kullanılarak yok edilir. Bu durumda ilk beş problem için (3.12) şeması $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$(\alpha_{02} - 4\alpha_{01})\delta_0^{n+1} + (\alpha_{03} - \alpha_{01})\delta_1^{n+1} = (\alpha_{04} - \alpha_{01})U_0(t) + (\alpha_{05} - 4\alpha_{04})\delta_0^n + (\alpha_{06} - \alpha_{04})\delta_1^n$$

$m = 1(1)N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_N^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{N+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{N-1}^n + \alpha_{m5}\delta_N^n + \alpha_{m6}\delta_{N+1}^n$$

$m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n + U_s(t)(\alpha_{N6} - \alpha_{N3})$$

şekline gelir.

Ayrıca çözümün bir parçası olarak belirlenmesi gereken $s(t)$ hareketli sınırının yerini belirlemek için (3.19) ısı denge eşitliğinde ds/dt yerine

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.23)$$

ileri fark yaklaşımı, $\partial U/\partial x$ yerine ise

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=s(t)} = \frac{3U_N - 4U_{N-1} + U_{N-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.24)$$

üç nokta geri fark yaklaşımı [53] yazılırsa, hareketli sınırın yeri her bir adımda

$$s^{n+1} = s^n - Ste \frac{\Delta t}{2\Delta x^n} (3U_N^n - 4U_{N-1}^n + U_{N-2}^n), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

kullanılarak bulunur. Burada

$$s^0 = S_0$$

dır.

Bu yöntemde nümerik hesaplamalar boyunca $U_m^n \sim U(x_m^n, t_n)$ sıcaklık dağılımı $x_m^n = m\Delta x^n$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplandı ve t_0 başlangıç zamanı olarak kullanıldı. N eleman sayısı olmak üzere, mesh uzunluğu $\Delta x^n = s^n/N$ ve hareketli arayüzün yeri s^n her bir zaman adımında yeniden hesaplandı. Elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını görmek için (1.13)-(1.15) eşitlikleriyle tanımlanan L_2 , L_∞ ve yüzdelik bağıl hata normları kullanıldı.

3.3.1 Problem 1

Erime problemi olarak bilinen temel Stefan problemi için $U_0(t) = 1$, $U_s(t) = 0$, $Ste = 1$, $S_0 = 0$ ve $\alpha = 1$ değerleri kullanıldı. $t_0 = 0$ noktasındaki süreksizlik nedeniyle hesaplamalar $t_0 = 0.5$ zamanından başlatıldı.

İlk olarak, bölge içerisinde sıcaklık dağılımının değişimini gözlemlemek için $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N bölüntü değerlerinde sunulan yöntemle elde edilen nümerik ve tam çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 3.1' de verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümün tam çözüme yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.1: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.8872057	0.8871994	0.8871975	0.8871969	0.8871968
0.2	0.7752742	0.7752622	0.7752584	0.7752574	0.7752571
0.3	0.6650485	0.6650318	0.6650266	0.6650251	0.6650248
0.4	0.5573328	0.5573130	0.5573067	0.5573050	0.5573045
0.5	0.4528755	0.4528542	0.4528475	0.4528457	0.4528452
0.6	0.3523530	0.3523321	0.3523256	0.3523238	0.3523233
0.7	0.2563569	0.2563388	0.2563331	0.2563315	0.2563311
0.8	0.1653855	0.1653720	0.1653676	0.1653664	0.1653661
0.9	0.0798355	0.0798282	0.0798258	0.0798251	0.0798248
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.0240730	0.0071959	0.0018745	0.0004136	
$L_\infty \times 10^3$	0.0302401	0.0090475	0.0023707	0.0005559	

Tablo 3.2' de farklı zaman adımları ve bölüntü sayıları kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Her ne kadar bölüntü sayısının küçük değerlerinde zaman adımını küçültmenin sonuçları iyileştirmediği gözlemlense de bölüntü sayısının büyüyen değerleri için zaman adımını küçültmenin sonuçları iyileştirdiği tablodan açıkça görülmektedir. Örneğin $N = 10, 20$ ve 40 için zaman adımı küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma görülmezken $N = 80$ ve 100 için zaman adımı küçüldükçe hata normlarının kayda değer ölçüde azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.2: Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.0076742	0.0097704	0.0225822	0.0283811	0.0240730	0.0302401
20	0.0092720	0.0116177	0.0057010	0.0071707	0.0071959	0.0090475
40	0.0146031	0.0183289	0.0003802	0.0004961	0.0018745	0.0023707
80	0.0160699	0.0201748	0.0010878	0.0013941	0.0004136	0.0005559
100	0.0162557	0.0204471	0.0012729	0.0016642	0.0002318	0.0003233

Tablo 3.3 ve Tablo 3.4' de farklı bölüntü sayıları için $t_f = 1.0$ zamanında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümlerin Ref. [48]' de verilen sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablolardan hareketli sınırın yeri ve hızı için sunulan yöntemle elde edilen sonuçların Ref. [48] de verilenlere göre daha küçük yüzdelerle bağlı hatalara sahip olduğu ve bölüntü sayısının artışıyla sonuçların iyileştiği görülmektedir. Buradan hareketli sınırın hızı ve yeri için uygulanan yöntemin sonlu fark yöntemine göre daha etkili olduğu söylenebilir.

Tablo 3.3: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdelerle bağlı hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
VSG-SEY	1.240449	1.240191	1.240136	1.240124
Hata %	0.026126	0.005322	0.000887	0.000081
VSG-SFY [48]	1.240665	1.240250	1.240155	1.240136
Hata %	0.0435	0.0101	0.0024	0.0009
Tam Çözüm	$s(t) = 1.240125$			

Tablo 3.4: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
VSG-SEY	0.620568	0.620175	0.620090	0.620071
Hata %	0.081443	0.018063	0.004354	0.001290
VSG-SFY [48]	0.620667	0.620456	0.620118	0.620073
Hata %	0.0974	0.0634	0.0089	0.0016
Tam Çözüm	$\dot{s}(t) = 0.620063$			

3.3.2 Problem 2

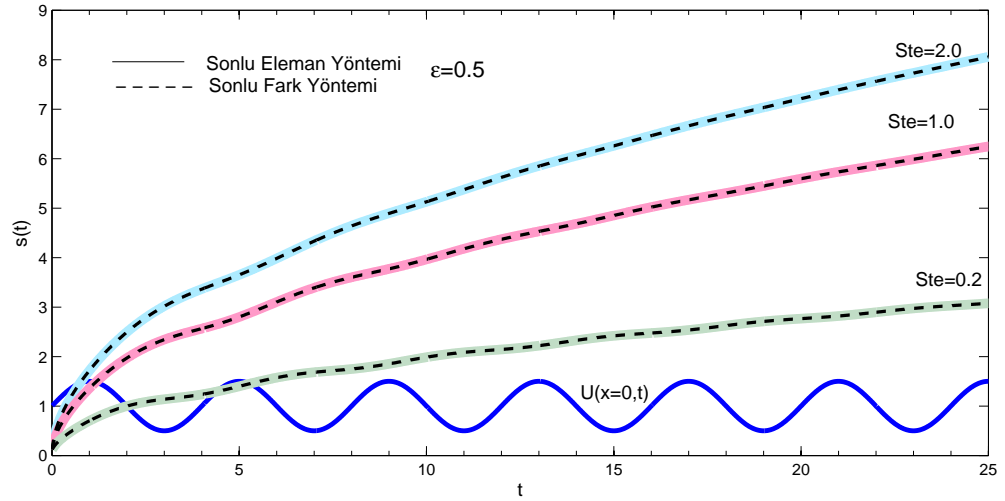
$x = 0$ sabit sınırı üzerinde periyodik sınır koşullu bu problem için $U_0(t) = 1 + \epsilon \sin \omega t$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$, $\alpha = 1$ ve $Ste = 0.2, 1.0, 2.0$ değerleri kullanıldı. Problemden t zamanı, ϵ salınım genliği, ω salınım frekansı ve Ste sayısı sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri üzerinde oldukça büyük etkiye sahiptir. Bununla ilgili nümerik sonuçlar ve grafikler aşağıda verildi.

$t_0 = 0$ zamanındaki süreksizlik nedeniyle $t_0 = 0.01$ başlangıç zamanından başlanarak $t_f = 1.0$ bitiş zamanında yapılan nümerik hesaplamalar için, eleman sayısı ve zaman adımı Ref. [11]'deki sonlu fark yönteminde kullanılan $N = 10$, $\Delta t = 0.00002$ değerleri alındı. Ayrıca zaman, salınım genliği ve salınım frekansı parametrelerinin sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri üzerindeki etkisini göstermek amacıyla farklı ϵ , ω ve Ste değerleri için sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın yeri ve hızı ile ilgili grafikler oluşturuldu. Bu amaçla iki farklı salınım genliği $\epsilon = 0.5$ ve $\epsilon = 0.9$, üç farklı Stefan sayısı kullanılarak hareketli sınırın yeri sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçlarla aynı grafikte karşılaştırıldı. Burada dikkat edilmelidir ki,

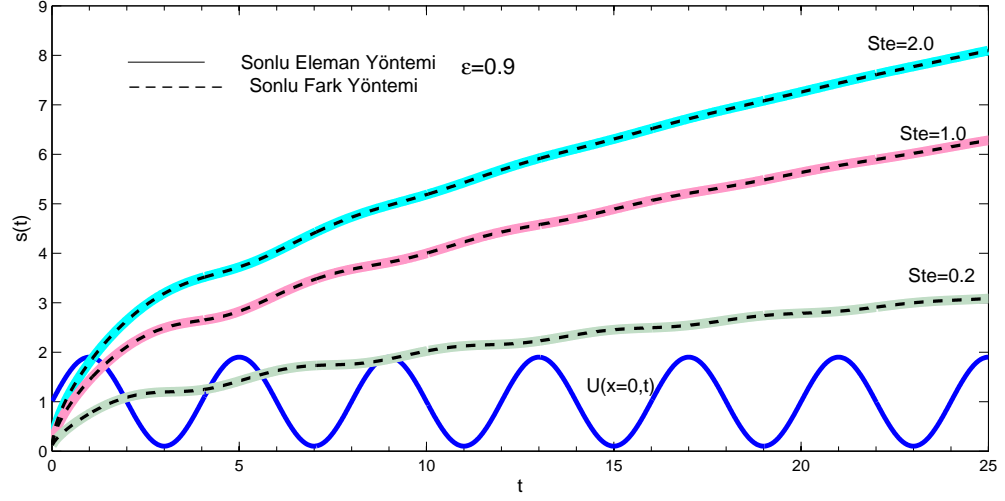
nümerik hesaplamalar boyunca $Ste = 0.2, 1.0$ ve 2.0 Stefan sayılarına karşılık gelen λ parametreleri için sırasıyla (2.5) eşitliğinden elde edilen $\lambda = 0.30642, \lambda = 0.62006$ ve $\lambda = 0.80060$ değerleri kullanıldı.

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2' de farklı Stefan sayıları $Ste = 0.2, 1.0, 2.0$ ve $\omega = \frac{\pi}{2}$ salınım frekansı kullanılarak hareketli sınırın yeri için kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar, sonlu fark yöntemi [11] kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerle aynı grafik üzerinde verildi. Grafiklerden de görüldüğü üzere her iki yöntemle elde edilen çözümler uyumludur. Ayrıca sırasıyla $\epsilon = 0.5$ ve $\epsilon = 0.9$ için hareketli sınırın yerini veren grafiklere bakıldığında büyük ϵ değerlerinde grafiğin salınımının fazla olduğu görüldü

Şekil 3.1: Problem 2 için $\epsilon = 0.5, \omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY ve SFY [11] kullanılarak elde edilen hareketli sınırın yeri.

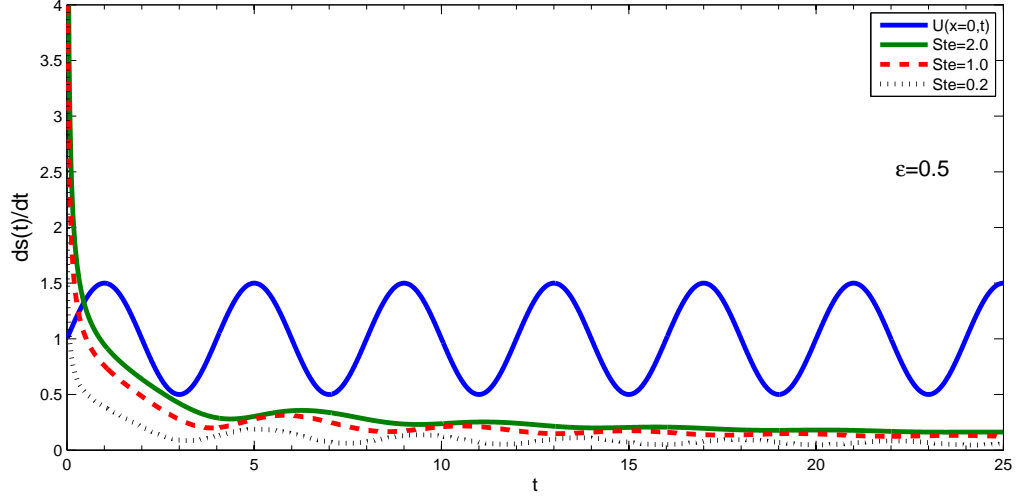


Şekil 3.2: Problem 2 için $\epsilon = 0.9$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY ve SFY [11] kullanılarak elde edilen hareketli sınırın yeri.

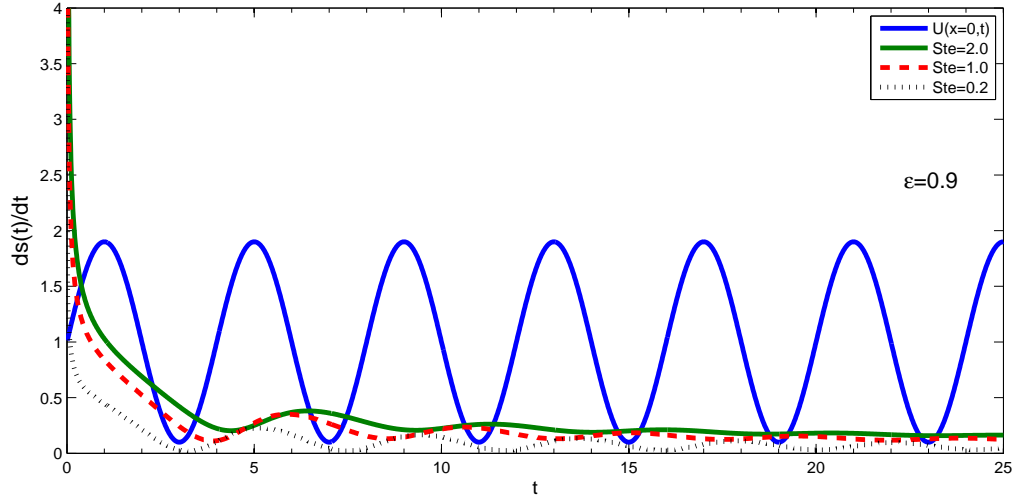


Şekil 3.3 ve Şekil 3.4' de ise farklı Stefan sayıları ve farklı ϵ değerleri için elde edilen hareketli sınırın hızı $U(0,t)$ başlangıç sıcaklığıyla birlikte verildi. Şekil 3.3' de görüldüğü üzere tüm Ste sayılarında $\epsilon = 0.5$ parametresi için erime süreci sona ermeden devam eder. Ancak Şekil 3.4' e bakıldığında $\epsilon = 0.9$ sayısı için küçük Ste sayılarında hareketli sınırın hızının salınımlı olarak sifıra yakınsadığı yani erime sürecinin salınımlı olarak sona erdiği görüldü

Şekil 3.3: Problem 2 için $\epsilon = 0.5$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY kullanılarak elde edilen hareketli sınırın hızı.



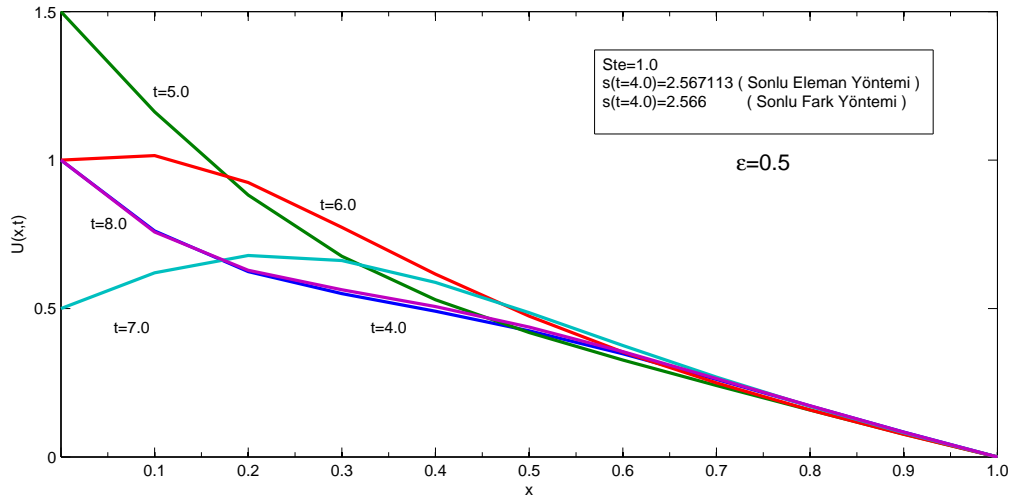
Şekil 3.4: Problem 2 için $\epsilon = 0.9$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı Ste sayılarında VSG-SEY kullanılarak elde edilen hareketli sınırın hızı.



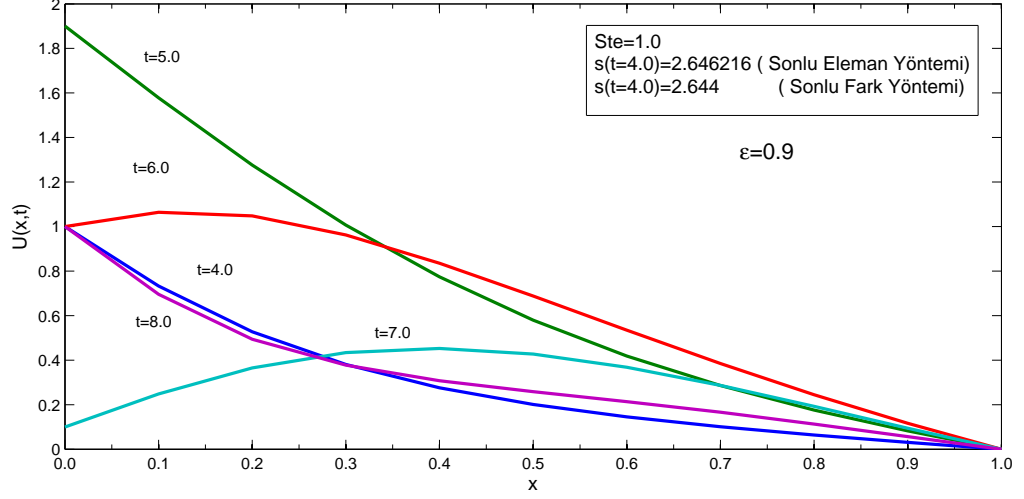
Şekil 3.5 - Şekil 3.10' da zaman değişkeninin etkisini göstermek amacıyla farklı zaman aralıklarında $\epsilon = 0.5$, $\epsilon = 0.9$ ve $Ste = 1.0$ sayıları için elde edilen sıcaklık

dağılımlarının grafikleri verildi. Ayrıca her bir şekil üzerinde hareketli sınırın sonlu eleman yöntemi ve sonlu fark yöntemi [11] kullanılarak elde edilen nümerik değerleri belirtildi. Örneğin Şekil 3.5’ te $t = 4.0$ zamanında sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuç $s(t) = 2.567113$ iken Ref. [11]’ de sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuç $s(t) = 2.566$ dır. Aşağıda verilen grafiklere bakıldığında küçük zaman değerlerinde sıcaklık dağılımının tüm tanım aralığı boyunca değiştiği ancak büyüyen zamanlarda $x = 0.5$ noktasından küçük değerlerde değişim olduğu gözlemlenir. O halde zamana bağlı tanım bölgesinin sıcaklık dağılımı üzerinde etkili olduğu ve yeterince büyük tanım bölgeleri için hareketli sınıra yakın bölgelerde sıcaklık dağılımının zaman ilerledikçe sabitleneceği söylenebilir.

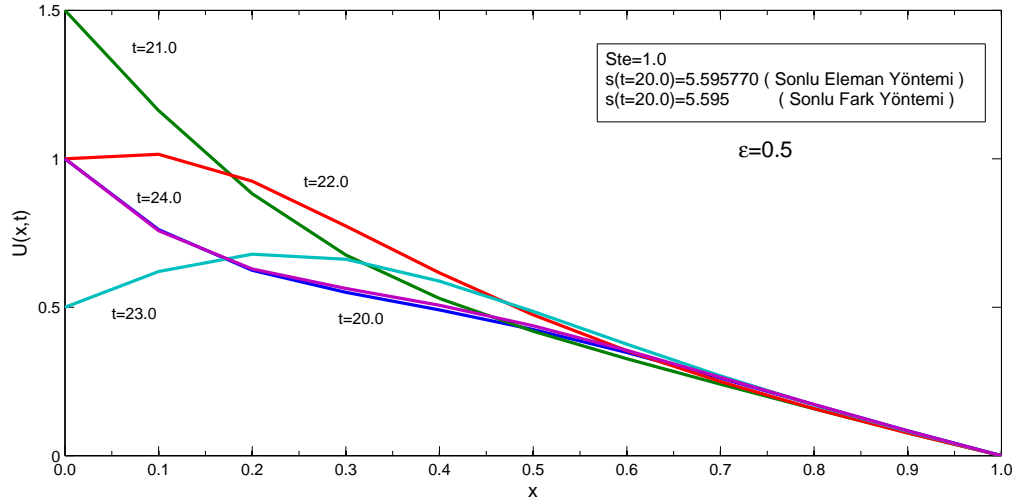
Şekil 3.5: $\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 4, 5, 6, 7, 8$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.



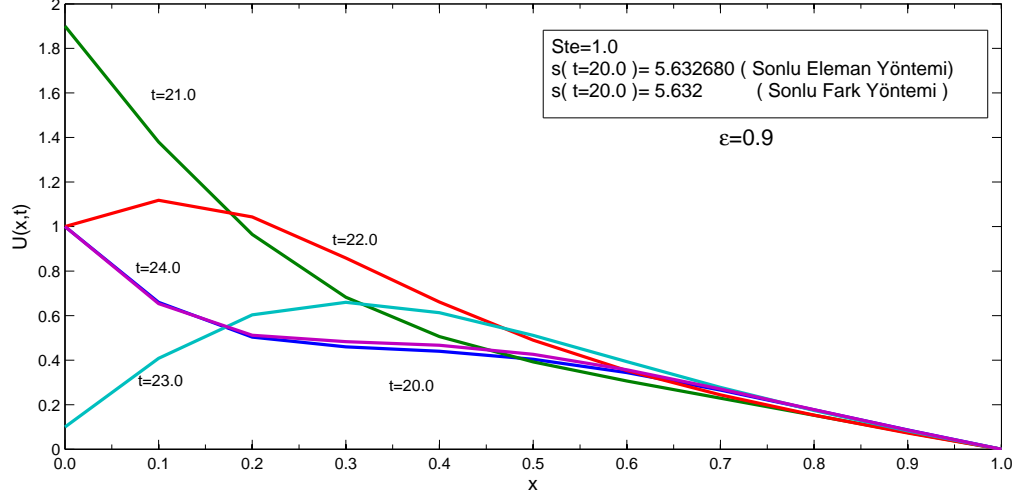
Şekil 3.6: $\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 4, 5, 6, 7, 8$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.



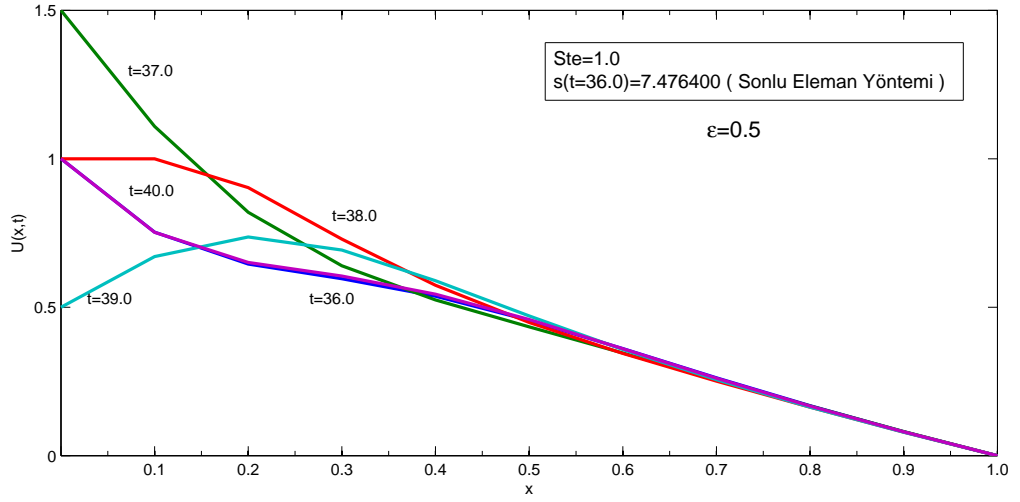
Şekil 3.7: $\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 20, 21, 22, 23, 24$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.



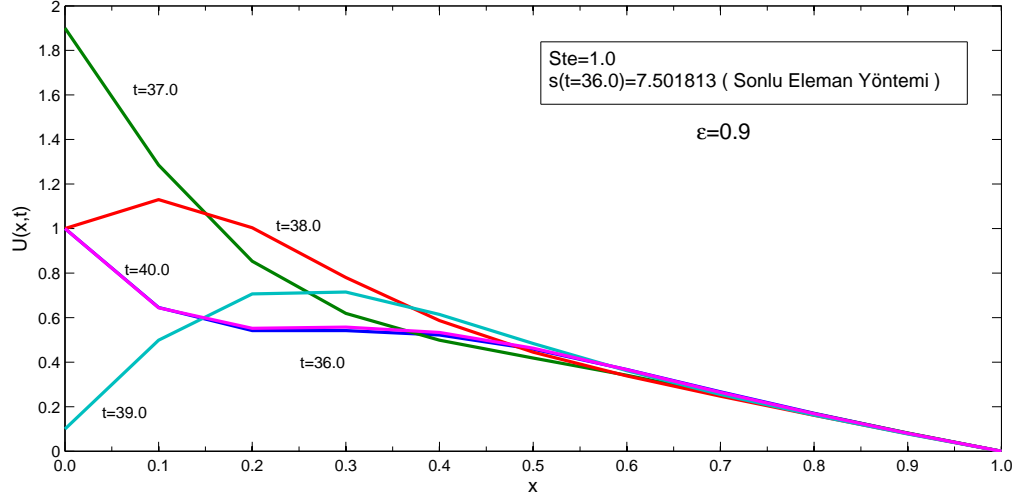
Şekil 3.8: $\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 20, 21, 22, 23, 24$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.



Şekil 3.9: $\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 36, 37, 38, 39, 40$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.

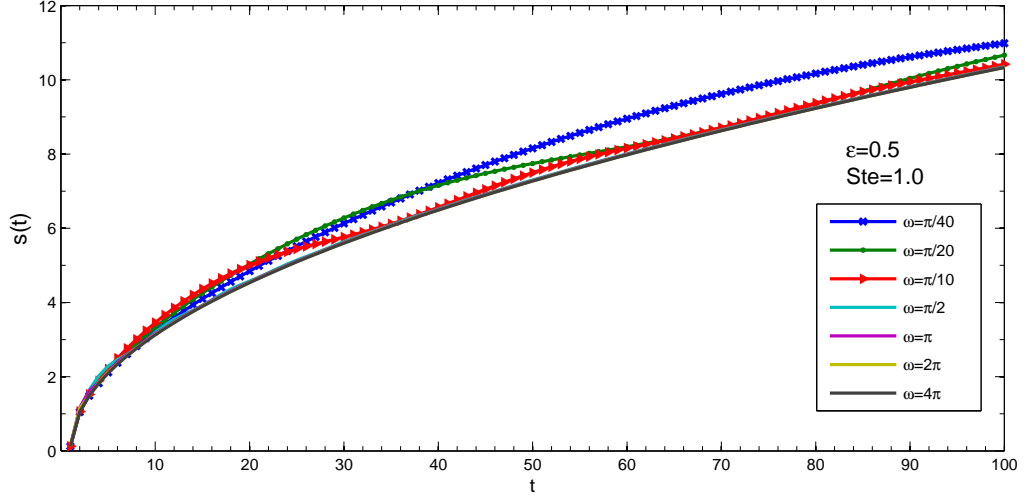


Şekil 3.10: $\epsilon = 0.9$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve $t = 36, 37, 38, 39, 40$ parametreleri için sıcaklık dağılımı.

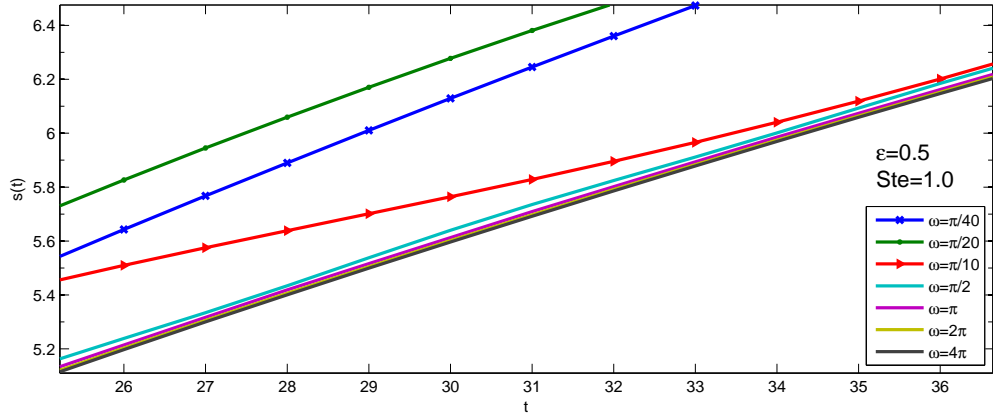


Şekil 3.11' de ω salınım frekansı parametresinin hareketli sınır üzerindeki etkisi incelendi. Diğer grafikler oluşturulurken salınım frekansı $\omega = \pi/2$ alınırken burada $\epsilon = 0.5$ ve $Ste = 1.0$ parametreleri için farklı ω değerleri alınarak $\omega = \pi/40, \pi/20, \pi/10, \pi/2, \pi, 2\pi, 4\pi$ için hareketli sınırın durumuna bakıldı. Küçük ω değerlerinde hareketli sınırdaki salınımlar artarken, büyük ω değerleri kullanılarak elde edilen nümerik değerler birbirine çok yakın olacaktır. Bu durum Rizwan-Uddin' nin [16] çalışmasında NIM kullanılarak elde edilen sonuçlarla uyumludur. Şekil 3.12' de ise Şekil 3.11' in bir kısmı yakınlaştırılarak yukarıdaki ifadelerin daha net görülmesi sağlanmıştır.

Şekil 3.11. $\epsilon = 0.5$, $Ste = 1.0$ ve farklı ω parametreleri için hareketli sınırın yeri.



Şekil 3.12: $\epsilon = 0.5$, $Ste = 1$ ve farklı ω parametreleri için hareketli sınırın yerinin $t = 26.0$ ve $t = 36.0$ değerleri arasında yakınlaştırılmış durumu.



3.3.3 Problem 3

Donma problemi olarak bilinen bu Stefan problemi için $U_0(t) = -1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0.25$, $Ste = -1$ ve $\alpha = 1$ değerleri kullanıldı. Problem

$$U(x, 0) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 0, & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$

başlangıç şartıyla birlikte ele alındı. Problemin nümerik çözümünü önceden yapılan çalışmalarla karşılaştırabilmek için Asaithambi [51] tarafından kullanılan $N = 10$ eleman sayısı için $\Delta t = 0.0005$ zaman adımı, $N = 20$ eleman sayısı için $\Delta t = 0.0001$ zaman adımı kullanıldı. t_f zamanında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik sonuçlarda tam çözüm olarak önceki çalışmalarda da kullanılan Rubinstein [5]' nın sonuçları gözönüne alındı.

Tablo 3.5' de $N = 10$ eleman sayısı ve $\Delta t = 0.0005$ zaman adımı için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler Rubinstein [5] tarafından verilen analitik çözüm, Asaithambi ve Finn ve Varoğlu [49, 51] tarafından elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan açıkça görüldüğü gibi sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler tam çözüme diğer nümerik çözümlerden daha yakındır.

Tablo 3.5: Problem 3' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.0005$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	VSG-SEY	Rubinstein [5]	Finn ve Varoğlu [49]	Asaithambi [51]
0.01	0.281637	0.281480	0.2806	0.2818
0.02	0.308179	0.308268	0.3072	0.3083
0.03	0.332342	0.332060	0.3315	0.3325
0.04	0.354798	0.354607	0.3541	0.3549
0.06	0.395863	0.396079	0.3956	0.3960
0.08	0.433036	0.432557	0.4333	0.4331
0.10	0.467255	0.466951	0.4682	0.4674

Tablo 3.6' da $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri için kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin Asaithambi [51] ile verilen nümerik çözümlerle uyumlu olduğu, Finn ve Varoğlu [49]' nun nümerik sonuçlarından daha doğru olduğu söylenebilir.

Tablo 3.6: Problem 3' ün $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	VSG-SEY	Rubinstein [5]	Finn ve Varoğlu [49]	Asaithambi [51]
0.01	0.281369	0.281302	0.2806	0.2814
0.02	0.307877	0.307806	0.3072	0.3079
0.03	0.332022	0.332077	0.3315	0.3320
0.04	0.354465	0.354495	0.3541	0.3545
0.06	0.395509	0.394757	0.3956	0.3955
0.08	0.432667	0.432601	0.4333	0.4327
0.10	0.466871	0.466724	0.4682	0.4669

Tablo 3.7' de farklı eleman sayıları ve $\Delta t = 0.0005$ zaman adımında SEY kullanılarak hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan da görüldüğü üzere artan eleman sayıları için elde edilen nümerik çözümler tam çözüme daha yakındır.

Tablo 3.7: Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Çözüm
0.01	0.281637	0.281547	0.281522	0.281513	0.281347
0.02	0.308179	0.308073	0.308046	0.308038	0.307925
0.03	0.332342	0.332225	0.332196	0.332188	0.332077
0.04	0.354798	0.354671	0.354641	0.354633	0.354519
0.06	0.395863	0.395717	0.395683	0.395674	0.395471
0.08	0.433036	0.432872	0.432834	0.432825	0.432581
0.10	0.467255	0.467076	0.467035	0.467026	0.466754

3.3.4 Problem 4

Sabit sınır üzerinde zamana bağlı üstel olarak artan sıcaklığa sahip bu Stefan problemi $U_0(t) = e^t - 1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$, $Ste = 1$ ve $\alpha = 1$ değerleri ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq s(t)$$

başlangıç koşuluyla birlikte gözönüne alındı. N_x , düğüm sayısı olmak üzere bu problem $N_x = 1, 2, 4$ ve 8 için NIM kullanılarak Rizwan [16] tarafından nümerik olarak çözülmüştür. Daha sonra Savović vd. [14] tarafından $N_x = 10$ için nodal integral

yöntemi ve $N = 10$ eleman sayısı, $\Delta t = 0.000002$ zaman adımı kullanılarak sonlu fark yöntemi ile nümerik olarak çözümlenerek bu nümerik sonuçlar [16] çalışmasında elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Burada $N_x = 10$ için nodal integral yönteminden elde edilen sonuçlar tam çözüme, sonlu fark yönteminden elde edilen sonuçlardan daha yakındır. Ancak sistematik bir uygulama sunması açısından sonlu fark ve sonlu eleman yönteminden elde edilen sonuçlar bizim için oldukça önemlidir. Bu problemde kollokasyon SEY uygulanırken nümerik işlemler $t_0 = 0.02$ zamanından başlatıldı.

Tablo 3.8' de $N = 10$, $t_f = 1.0$ ve $\Delta t = 0.000002$ değerleri kullanılarak sıcaklık dağılımı için elde edilen nümerik çözümler yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte verildi. Ayrıca tabloda Savović vd. [14] tarafından verilen NIM ve SFY' nin noktasal sonuçları da sunularak karşılaştırma yapıldı. Tablodan görüldüğü üzere kübik kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar tam çözüme diğer çözümlerden daha yakındır. Bu tabloda verilen sıcaklık dağılımlarının L_2 ve L_∞ hata normları da Tablo 3.9' da sunulmuştur. Tablodan sonlu eleman yöntemiyle elde edilen nümerik çözümlerin diğer iki yöntemden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.8: Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının [14] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$						Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14] ($N_x = 10$)	Hata %	
0.0	1.718282	0.0	1.718282	0.0	1.718463	0.010534	1.718282
0.1	1.459673	0.004795	1.459742	0.009523	1.459617	0.000959	1.459603
0.2	1.225663	0.009955	1.225771	0.018767	1.225442	0.008078	1.225541
0.3	1.013912	0.015684	1.014033	0.027620	1.013585	0.016572	1.013753
0.4	0.822298	0.021894	0.822418	0.036369	0.821917	0.024571	0.822119
0.5	0.648906	0.028672	0.649013	0.045012	0.648514	0.031909	0.648721
0.6	0.492001	0.035785	0.492088	0.053474	0.491633	0.039038	0.491825
0.7	0.350011	0.043446	0.350076	0.062025	0.349699	0.045733	0.349859
0.8	0.221518	0.051941	0.221559	0.070460	0.221287	0.052393	0.221403
0.9	0.105235	0.060853	0.105255	0.079870	0.105110	0.058001	0.105171
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tablo 3.9: Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normlarının [14] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
VSG-SEY	0.1354193	0.1852028
SFY [14]	0.2981503	0.7081546
NIM [14]	0.1530608	0.2071546

Tablo 3.10' da farklı bölüntü sayıları için kollokasyon SEY ile elde edilen sıcaklık dağılımları L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan bölüntü sayılarının

artmasıyla nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı ve bununla birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek azaldığı görüldü.

Tablo 3.10: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	1.718282	1.718282	1.718282	1.718282	1.718282
0.1	1.459673	1.459620	1.459607	1.459604	1.459603
0.2	1.225663	1.225570	1.225548	1.225543	1.225541
0.3	1.013912	1.013790	1.013762	1.013755	1.013753
0.4	0.822298	0.822119	0.822129	0.822121	0.822119
0.5	0.648906	0.648765	0.648732	0.648721	0.648721
0.6	0.492001	0.491866	0.491835	0.491824	0.491825
0.7	0.350011	0.349895	0.349868	0.349861	0.349859
0.8	0.221518	0.221430	0.221409	0.221404	0.221403
0.9	0.105235	0.105186	0.105175	0.105172	0.105171
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.1354193	0.0321431	0.0076877	0.0015682	
$L_\infty \times 10^3$	0.1852028	0.0439560	0.0106877	0.0021761	

Tablo 3.11' de farklı bölüntü sayıları ve zaman adımları için L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. $N = 10, 20$ ve 40 gibi küçük bölüntü sayılarında zaman adımını küçültmek sonuçları iyileştirmese de $N = 80$ ve 100 gibi büyük bölüntü sayılarında zaman adımını küçültmek L_2 ve L_∞ hata normlarını ciddi ölçüde azaltmaktadır.

Tablo 3.11: Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.0697496	0.0970093	0.1289161	0.1763956	0.1348881	0.1844838
20	0.0356220	0.0521354	0.0256352	0.0351294	0.0316104	0.0432354
40	0.0595829	0.0835336	0.0014205	0.0023132	0.0071539	0.0099532
80	0.0656521	0.0917069	0.0050395	0.0070456	0.0010338	0.0014419
100	0.0663540	0.0926366	0.0057407	0.0079743	0.0003711	0.0006114

Tablo 3.12' de $\Delta t = 0.000002$ ve $N = 10$ değerleri için artan t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [14] referansında verilen nümerik ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik sonuçlar küçük zaman değerlerinde [14] referansındaki SFY' ye göre daha doğru nümerik sonuçlar vermiştir. [14] referansında nodal integral yöntemi kullanılarak $N_x = 10$ için en iyi sonuçlar bulunmasına rağmen nokta sayısı arttırıldıkça yapılan işlemler artacak, yöntemi uygulamak zorlaşacaktır. Bu yüzden SEY sistematik bir şema kullanılarak nümerik çözüm sağladığından ve sıcaklık dağılımı için en iyi yaklaşımı sunduğundan bu problemin nümerik çözümü için tercih edilebilir. SEY' de artan eleman sayıları için yöntemin programlama aşamasında ufak bir değişiklik yapılarak eleman sayısı arttırılıp istenilen doğrulukta nümerik sonuçlar elde edilebilir.

Tablo 3.12: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$						Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	0.100001	0.001000	0.099999	0.001000	0.099999	0.001000	0.1
0.2	0.199996	0.002000	0.199994	0.003000	0.200010	0.005000	0.2
0.3	0.299980	0.006666	0.299979	0.007000	0.300007	0.002333	0.3
0.4	0.399995	0.001250	0.399951	0.012250	0.400001	0.000250	0.4
0.5	0.499900	0.020000	0.499906	0.018800	0.499990	0.002000	0.5
0.6	0.599836	0.027333	0.599840	0.026667	0.599974	0.004333	0.6
0.7	0.699741	0.037000	0.699750	0.035714	0.699952	0.006857	0.7
0.8	0.799617	0.047875	0.799632	0.046000	0.799924	0.009500	0.8
0.9	0.899459	0.060111	0.899484	0.057333	0.899888	0.012444	0.9
1.0	0.999264	0.073600	0.999301	0.069900	0.999844	0.015600	1.0

Tablo 3.13' de $\Delta t = 0.000002$ ve $N = 10$ değerleri için artan t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [14] referansında verilen nümerik ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik sonuçların tam çözümlerle ve diğer nümerik çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 3.13: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	0.999979	0.002100	0.999976	0.002400	1.000134	0.013400	
0.2	0.999905	0.009500	0.999906	0.009400	1.000033	0.003300	
0.3	0.999788	0.021200	0.999793	0.020700	0.999961	0.003900	
0.4	0.999629	0.037100	0.999641	0.035900	0.999916	0.008400	
0.5	0.999429	0.057100	0.999451	0.054900	0.999869	0.013100	1.0
0.6	0.999190	0.081000	0.999226	0.077400	0.999814	0.018600	
0.7	0.998911	0.108900	0.998966	0.103400	0.999751	0.024900	
0.8	0.998595	0.140500	0.998674	0.132600	0.999680	0.032000	
0.9	0.998242	0.175800	0.998349	0.165100	0.999602	0.039800	
1.0	0.997852	0.214800	0.997994	0.200600	0.999517	0.048300	

Tablo 3.14' de $t_f = 1.0$ zamanında ve farklı bölüntü sayılarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözümle karşılaştırıldı ve yüzdellik bağıl hataları verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttırıldıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme gittikçe yaklaştığı görülmektedir ve yüzdellik bağıl hataları azalmaktadır.

Tablo 3.14: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdellik bağıl hataları.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	0.999264	0.0736	0.997852	0.2148
20	0.999823	0.0177	0.999483	0.0517
40	0.999958	0.0042	0.999873	0.0127
80	0.999991	0.0009	0.999968	0.0032
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 1.0$	

3.3.5 Problem 5

Bu problemde $Ste = \alpha$ olmak üzere $U_0(t) = e^{\alpha t}$, $U_s(t) = 1$, $S_0 = 0$ değerleri kullanıldı. Nümerik işlemler $t_0 = 0.01$ başlangıç zamanından başlatıldı. $N = 10$ eleman sayısı olmak üzere $\Delta x^n = \frac{s^n}{N}$ bölüntü uzunluğu $\alpha = 2$ için 0.002 ve 0.1 arasında, $\alpha = 10$ için 0.01 ve 0.5 arasında değişecektir. Hareketli sınırın yeri $s(t)$ ise $\alpha = 2$ için 0.02 ve 1 arasında, $\alpha = 10$ için 0.1 ve 5 arasında değişecektir. Nümerik işlemler boyunca, Savović ve Caldwell [12]' in sonlu fark yöntemi ile oluşturulan çalışmasında önerilen $\alpha = 2$ için $\Delta t = 0.000001$ ve $\alpha = 10$ için $\Delta t = 0.000002$ zaman adımları kullanılacaktır.

Tablo 3.15 - Tablo 3.17' de $\alpha = 2$ için $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında kübik B- spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle sıcaklık dağılımı hesaplandı. Yüzdellik bağıl hataları ile birlikte verilen tablolarda Ref. [12]' de SFY ile elde edilen nümerik çözümler ve SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümler karşılaştırıldı. Noktasal olarak tam çözüme daha yakın nümerik sonuçlar veren SEY için L_2 ve L_∞ hata normları da ilgili tablolarda verildi.

Tablo 3.15: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	1.221403	0.0	1.221403	0.0	1.221403
0.1	1.197217	0.0	1.197218	0.000008	1.197217
0.2	1.173511	0.0	1.173511	0.0	1.173511
0.3	1.150274	0.0	1.150274	0.0	1.150274
0.4	1.127497	0.0	1.127497	0.0	1.127497
0.5	1.105171	0.0	1.105171	0.0	1.105171
0.6	1.083287	0.0	1.083288	0.000009	1.083287
0.7	1.061837	0.0	1.061837	0.0	1.061837
0.8	1.040811	0.0	1.040811	0.0	1.040811
0.9	1.020201	0.0	1.020202	0.000009	1.020201
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 0.0000896$, $L_\infty \times 10^3 = 0.0002747$					

Tablo 3.16: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	1.822119	0.0	1.822119	0.0	1.822119
0.1	1.716016	0.000524	1.716023	0.000932	1.716007
0.2	1.616090	0.000990	1.616102	0.001732	1.616074
0.3	1.521982	0.001314	1.521996	0.002234	1.521962
0.4	1.433353	0.001674	1.433367	0.002651	1.433329
0.5	1.349883	0.001778	1.349896	0.002741	1.349859
0.6	1.271273	0.001888	1.271284	0.002753	1.271249
0.7	1.197238	0.001754	1.197247	0.002506	1.197217
0.8	1.127513	0.001419	1.127519	0.001951	1.127497
0.9	1.061846	0.000848	1.061848	0.001036	1.061837
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 0.0137535$, $L_\infty \times 10^3 = 0.0242833$					

Tablo 3.17: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	2.718282	0.0	2.718282	0.0	2.718282
0.1	2.459672	0.002805	2.459742	0.005651	2.459603
0.2	2.225663	0.005482	2.225771	0.010335	2.225541
0.3	2.013912	0.007896	2.014033	0.013904	2.013753
0.4	1.822299	0.009879	1.822418	0.016409	1.822119
0.5	1.648906	0.011221	1.649013	0.017711	1.648721
0.6	1.492001	0.011798	1.492088	0.017629	1.491825
0.7	1.350011	0.011260	1.350076	0.016076	1.349859
0.8	1.221518	0.009415	1.221559	0.012772	1.221403
0.9	1.105235	0.005791	1.105255	0.007601	1.105171
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 0.1354587$, $L_\infty \times 10^3 = 0.1852051$					

Tablo 3.18 - Tablo 3.20' de $\alpha = 10$ için $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında kübik B- spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle sıcaklık dağılımı hesaplandı. Yüzdelerik bağıl hataları ile birlikte verilen tablolarda Ref. [12]' de SFY ile elde edilen nümerik çözümler ve SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümler karşılaştırıldı. Noktasal olarak tam çözüme daha yakın nümerik sonuçlar veren SEY için L_2 ve L_∞ hata normları da ilgili tablolarda verildi.

Tablo 3.18: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	2.718282	0.0	2.718282	0.0	2.718282
0.1	2.459672	0.002805	2.459742	0.005651	2.459603
0.2	2.225662	0.005437	2.225770	0.010290	2.225541
0.3	2.013910	0.007796	2.014033	0.013904	2.013753
0.4	1.822297	0.009769	1.822417	0.016355	1.822119
0.5	1.648905	0.011160	1.649012	0.017650	1.648721
0.6	1.491999	0.011664	1.492087	0.017562	1.491825
0.7	1.350010	0.011186	1.350076	0.016076	1.349859
0.8	1.221517	0.009334	1.221559	0.012772	1.221403
0.9	1.105235	0.005791	1.105255	0.007600	1.105171
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 0.1344027$, $L_\infty \times 10^3 = 0.1837945$					

Tablo 3.19: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	20.085539	0.0	20.085537	0.000001	20.085539
0.1	14.891918	0.081890	14.910219	0.204883	14.879733
0.2	11.041833	0.169243	11.065235	0.381542	11.023177
0.3	8.187337	0.259204	8.209375	0.529073	8.166170
0.4	6.070657	0.347276	6.088679	0.645178	6.049648
0.5	4.500811	0.426669	4.514196	0.725329	4.481689
0.6	3.336270	0.486519	3.345391	0.761238	3.320117
0.7	2.472141	0.509757	2.477774	0.738778	2.459603
0.8	1.830668	0.469179	1.833675	0.634207	1.822119
0.9	1.354204	0.321885	1.355377	0.408783	1.349859
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 26.0481477$, $L_\infty \times 10^3 = 21.1663121$					

Tablo 3.20: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

x/s	Nümerik özüm $U(x, t)$				Tam
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	özüm
0.0	148.413159	0.0	148.413159	0.0	148.413159
0.1	90.330113	0.347692	90.899147	0.979831	90.017131
0.2	55.001131	0.738087	55.605658	1.845317	54.598149
0.3	33.501092	1.164535	33.974528	2.594188	33.115451
0.4	20.409974	1.615282	20.732319	3.220143	20.085536
0.5	12.434482	2.068443	12.634162	3.707517	12.182494
0.6	7.572355	2.480682	7.686124	4.020378	7.389056
0.7	4.605597	2.764761	4.664551	4.080203	4.481689
0.8	2.792878	2.744233	2.819418	3.720585	2.718282
0.9	1.682722	2.062265	1.691526	2.596255	1.648721
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
VSG-SEY : $L_2 \times 10^3 = 562.8063452$, $L_\infty \times 10^3 = 402.9819717$					

Tablo 3.15 - Tablo 3.20' de verilen sıcaklık dağılımlarına ve hata normlarına bakıldığında küçük α değerleri için elde edilen nümerik özümlelerin tam çözümüne daha yakın olduğu söylenebilir. Büyük zaman değerleri ve büyük α katsayısı için hata normları da diğerlerine göre daha fazla artmıştır.

Tablo 3.21' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümle [12] referansında verilen nümerik özümlele karşılaştırılarak yüzdellik bağlı hataları verildi. SEY ile elde edilen nümerik çözümle tam çözümle uyumlu olup bazı noktalarda tam çözümüne [12] referansında

verilen nümerik çözümlerden daha yakındır. Örneğin $t_f = 0.1$ ve $t_f = 0.2$ noktalarında SFY' de hareketli sınırın yeri için yüzdelerik bağıl hataları 0.003188 ve 0.012267 iken SEY' de 0.002500 ve 0.012000 dir.

Tablo 3.21: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri		$s(t)$		Tam
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.01	0.02	0.0	0.02	0.0	0.02
0.02	0.040001	0.002500	0.0399999484	0.000129	0.04
0.05	0.100001	0.001000	0.0999991859	0.000814	0.1
0.1	0.199995	0.002500	0.1999936232	0.003188	0.2
0.2	0.399952	0.012000	0.3999509301	0.012267	0.4
0.3	0.599836	0.273333	0.5998399761	0.026671	0.6
0.4	0.799617	0.047875	0.7996321205	0.045985	0.8
0.5	0.999264	0.073600	0.9993009904	0.069901	1.0

Tablo 3.22' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdelerik bağıl hataları verildi. Tablodan SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 3.22: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$		Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.01	2.0	0.0	1.9999977517	0.000112	
0.02	2.000041	0.002050	1.9999920331	0.000398	
0.05	1.999958	0.002100	1.9999514832	0.002426	
0.1	1.999809	0.009550	1.9998113373	0.009433	2.0
0.2	1.999258	0.037100	1.9992818233	0.035991	
0.3	1.998380	0.081000	1.9984515198	0.077424	
0.4	1.997190	0.140500	1.997347122	0.132624	
0.5	1.995705	0.214750	1.9959886398	0.200568	

Tablo 3.23' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ değerleri ve farklı bölüntü sayıları için hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırıldı. Tablolardan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı yüzdelik bağıl hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.23: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	0.999264	0.0736	1.995705	0.2148
20	0.999823	0.0177	1.998966	0.0517
40	0.999958	0.0042	1.999746	0.0127
80	0.999991	0.0009	1.999937	0.0032
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 2.0$	

Tablo 3.24' de $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdelik bağıl hataları verildi. SEY ile elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle uyumlu olup bazı noktalarda tam çözüme [12] referansında verilen nümerik çözümlerden daha yakındır. Örneğin $t_f = 0.02$ ve $t_f = 0.05$ noktalarında SFY' de hareketli sınırın yeri için yüzdelik bağıl hataları 0.003005 ve 0.018816 iken SEY' de 0.002000 ve 0.016400 dür.

Tablo 3.24: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri		$s(t)$		Tam
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.01	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1
0.02	0.200004	0.002000	0.19999399	0.003005	0.2
0.05	0.499918	0.016400	0.49990592	0.018816	0.5
0.1	0.999278	0.072200	0.99930086	0.069914	1.0
0.2	1.994506	0.274700	1.99496049	0.251976	2.0
0.3	2.982185	0.593833	2.98409422	0.530193	3.0
0.4	3.958823	1.029425	3.96387752	0.903062	4.0
0.5	4.920687	1.586260	4.93118458	1.376308	5.0

Tablo 3.25' de $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hataları verildi. Tablodan SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 3.25: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$		Tam
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.01	10.0	0.0	9.99966996	0.003300	
0.02	9.999496	0.005040	9.99903562	0.009644	
0.05	9.994345	0.056550	9.99450640	0.054936	
0.1	9.978522	0.214780	9.97993878	0.200612	10.0
0.2	9.920259	0.797410	9.92856643	0.714336	
0.3	9.827545	1.724550	9.84945140	1.505486	
0.4	9.699028	3.009720	9.74194545	2.589546	
0.5	9.531342	4.686580	9.59898056	4.010194	

Tablo 3.26' da $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ değerleri ve farklı bölüntü sayıları kullanılarak sunulan yöntem ile hareketli sınırın yeri ve hızı için nümerik sonuçlar elde edildi. Yüzdelerik bağıl hatalarıyla birlikte verilen tablodan açıkça görüldüğü üzere bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme gittikçe yaklaştığı, bununla birlikte yüzdelerik bağıl hata normlarının da küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 3.26: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	4.920687	1.5863	9.531342	4.6866
20	4.982548	0.3491	9.901124	0.9888
40	4.995903	0.0819	9.977162	0.2284
80	4.999015	0.0197	9.994501	0.0550
Tam Çözüm	$s(t) = 5.0$		$\dot{s}(t) = 10.0$	

3.3.6 Problem 6

İlk beş problemden farklı olarak Neumann sınır koşuluna sahip bu Stefan problemi (2.1) ısı denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = -e^t, \quad U(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.26)$$

Neumann sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (3.27)$$

başlangıç koşuluyla birlikte verilsin. Bu problem $Ste = 1$ katsayısı için Problem 4 ile aynı tam çözümüne sahiptir. $m = 0$ ve $m = N$ için oluşacak δ_{-1} , δ_{N+1} hayali parametreleri sınır koşulları kullanılarak sırasıyla

$$\delta_{-1} = \delta_1 + \frac{\Delta x^n}{3} e^t$$

$$\delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1}$$

şeklinde yazılabilir. Bunların (3.12) şemasında kullanılmasıyla $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$\alpha_{02}\delta_0^{n+1} + (\alpha_{01} + \alpha_{03})\delta_1^{n+1} = \frac{\Delta x^n}{3}e^t(\alpha_{04} - \alpha_{01}) + \alpha_{05}\delta_0^n + (\alpha_{04} + \alpha_{06})\delta_1^n$$

$m = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

ve $m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n$$

elde edilir.

Problem 6, daha önce Kutluay vd. [55] tarafından VSG ve BIM yardımıyla oluşturulan sonlu fark yöntemi kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda, Wood [62] tarafından önerilen bir dönüşüm Esen ve Kutluay tarafından [8] bu probleme uygulanarak isotherm migration metodu yardımıyla nümerik çözümler elde edilmiştir. Burada [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik sonuçlar ve SEY kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar aşağıdaki tablolarda karşılaştırılacaktır.

Bu problem için nümerik işlemler $t_0 = 0.1$ başlangıç noktasından başlatıldı. Tablo 3.27' de $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için farklı bölüntü sayılarında sıcaklık dağılımının değişimini gözlemlemek için nümerik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan artan bölüntü sayılarında nümerik çözümlerin giderek tam çözüme yaklaştığı bununla birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının da giderek azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.27: Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

x/s	Nümerik Çözüm $U(x, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	0.649192	0.648842	0.648752	0.648729	0.648721
0.1	0.568737	0.568419	0.568339	0.568319	0.568312
0.2	0.492187	0.491915	0.491848	0.491831	0.491825
0.3	0.419372	0.419144	0.419087	0.419072	0.419068
0.4	0.350110	0.349922	0.349875	0.349863	0.349859
0.5	0.284227	0.284076	0.284038	0.284029	0.284025
0.6	0.221558	0.221442	0.221412	0.221405	0.221403
0.7	0.161947	0.161862	0.161841	0.161836	0.161834
0.8	0.105244	0.105189	0.105175	0.105172	0.105171
0.9	0.051307	0.051280	0.051273	0.051272	0.051271
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.1966965	0.0476589	0.0117490	0.0029382	
$L_\infty \times 10^3$	0.4705570	0.1207502	0.0307610	0.0079421	

Tablo 3.28' de farklı zaman adımı ve bölüntü sayıları kullanılarak sıcaklık dağılımı için elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması yapıldı. Tablodan görüleceği üzere N' nin tüm değerleri için azalan zaman adımlarında L_2 ve L_∞ hata normları gittikçe küçülmektedir. Zaman adımının sabit değerlerinde de N bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik sonuçların da gittikçe iyileştiği gözlemlenir.

Tablo 3.28: Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.2378703	0.5795357	0.2007467	0.4813196	0.1970348	0.4714526
20	0.0885743	0.2428967	0.0516466	0.1327996	0.0479859	0.1217386
40	0.0522980	0.1596190	0.0156796	0.0434669	0.0120676	0.0317988
80	0.0431654	0.1402057	0.0068675	0.0209789	0.0032550	0.0090064
100	0.0420417	0.1382148	0.0058264	0.0182938	0.0022105	0.0062579

Tablo 3.29' da farklı zaman değerleri ve bölüntü sayıları kullanılarak hareketli sınırın hızı için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Burada elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle uyumlu olup birçok noktada [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik sonuçlardan daha doğru nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçlardan görüleceği üzere büyük zaman değerlerinde hareketli sınırın hızı azalır. Bu da büyük zaman değerlerinde hareketli sınırın daha yavaş ilerleyeceği anlamına gelir. Ayrıca belirtmek gerekir ki artan bölüntü sayılarıyla birlikte nümerik çözümler tam çözümlere gittikçe yaklaşmaktadır.

Tablo 3.29: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınırın Hızı $\dot{s}(t)$			
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
0.2	VSG-SEY	1.00013569	1.00003750	1.00001277	1.00000656
	IMM-SFY [8]	1.00029082	1.00007691	1.00001972	1.00000499
0.3	VSG-SEY	1.00007885	1.00002238	1.00000763	1.00000387
	IMM-SFY [8]	1.00035833	1.00010371	1.00002760	1.00000710
0.4	VSG-SEY	0.99996341	0.99999372	0.99999988	1.00000125
	IMM-SFY [8]	1.00048900	1.00015412	1.00004235	1.00001106
0.5	VSG-SEY	0.99979572	0.99995280	0.99998941	0.99999825
	IMM-SFY [8]	1.00073290	1.00024233	1.00006783	1.00001786
	VSG-SFY [55]	0.99986499	0.99997042	0.99999304	0.99999831
	BIM-SFY [55]	0.99976347	0.99994376	0.99998630	0.99999662
Tam Çözüm, $\dot{s}(t_f) = 1.0$					

Tablo 3.30' da farklı zaman değerleri ve bölüntü sayıları kullanılarak hareketli sınırın yeri için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Burada elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle uyumlu olup birçok noktada [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik sonuçlardan daha doğru nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Tablodan bölüntü sayıları arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 3.30: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam Çözüm
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.2	VSG-SEY	0.20001297	0.20000379	0.20000148	0.20000091	0.2
	IMM-SFY [8]	0.20002511	0.20000646	0.20000164	0.20000041	
	VSG-SFY [55]	0.20005774	0.20001448	0.20000362	0.20000091	
	BIM-SFY [55]	0.19985926	0.19996478	0.19999119	0.19999780	
0.3	VSG-SEY	0.30002422	0.30000690	0.30000252	0.30000142	0.3
	IMM-SFY [8]	0.30005728	0.30001536	0.30000396	0.30000101	
	VSG-SFY [55]	0.30022646	0.30005682	0.30001422	0.30000356	
	BIM-SFY [55]	0.29979494	0.29994872	0.29998718	0.29999680	
0.4	VSG-SEY	0.40002679	0.40000781	0.40000292	0.40000168	0.4
	IMM-SFY [8]	0.40009891	0.40002799	0.40000739	0.40000189	
	VSG-SFY [55]	0.40039488	0.40009928	0.40002487	0.40000622	
	BIM-SFY [55]	0.39965955	0.39991493	0.39997875	0.39999469	
0.5	VSG-SEY	0.50001516	0.50000523	0.50000241	0.50000166	0.5
	IMM-SFY [8]	0.50015896	0.50004745	0.50001279	0.50000331	
	VSG-SFY [55]	0.50026461	0.50006726	0.50001693	0.50000425	
	BIM-SFY [55]	0.49916879	0.49979212	0.49994807	0.49998702	

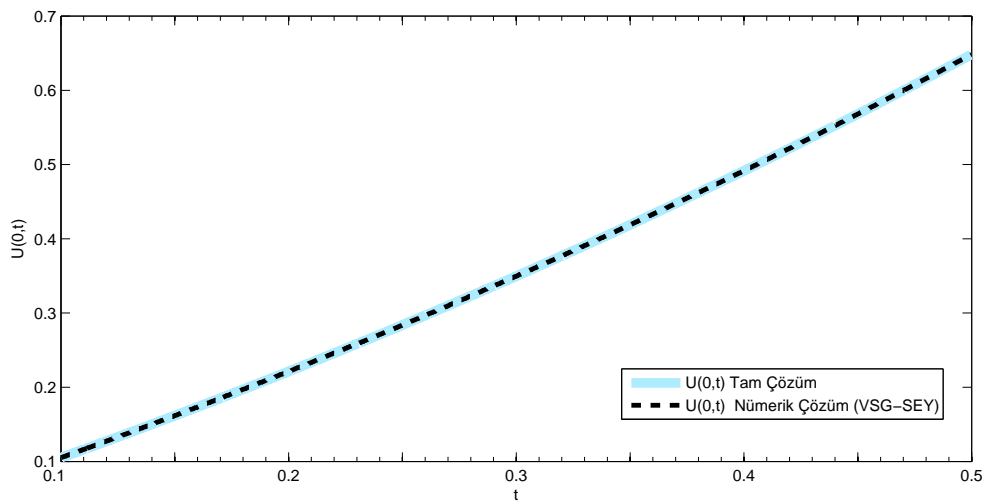
Tablo 3.31' de farklı bölüntü sayıları kullanılarak $U(0, t)$ yüzey sıcaklığı için elde edilen nümerik sonuçlar, [8] ve [55] referanslarında verilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Sunulan yöntemle elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle uyumlu olup birçok noktada diğer yöntemlerden daha doğrudur. Tablodan bölüntü sayısı

artıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Tablo 3.31’ de verilen nümerik ve tam çözümlerin grafiği Şekil 3.13 ile verildi. Grafikten de görüldüğü üzere $U(0, t)$ yüzey sıcaklığı için elde edilen nümerik ve tam çözümler uyumludur ve sabit sınırdaki üstel artışa sahip bu problemin yüzey sıcaklığı da zamana bağlı artmaktadır.

Tablo 3.31: Problem 6’ nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

Yöntem	Nümerik Sonuçlar $U(0, t)$			
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
VSG-SEY	0.649192	0.648842	0.648752	0.648729
IMM-SFY [8]	0.647885	0.648551	0.648683	0.648712
VSG-SFY [55]	0.650614	0.649198	0.648841	0.648751
BIM-SFY [55]	0.649102	0.648820	0.648746	0.648728
Tam Çözüm : 0.648721				

Şekil 3.13. VSG-SEY : Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.



4. BOUNDARY IMMOBILISATION METODU (BIM)

Hareketli sınırın sabitleştirilmesi temeline dayanan bu yöntem Stefan problemlerinin nümerik çözümünde sıkça kullanılır. İlk olarak Landau [28] tarafından ortaya atılan bu yöntem sonlu fark şeması kullanılarak Crank [63] tarafından hareketli sınır değer problemi olan difüzyon denklemine uygulanmıştır. Çeşitli hareketli sınır değer problemlerine uygulanan bu yöntem son yıllarda Kutluay vd. tarafından Neumann sınır koşuluna sahip bir boyutlu Stefan problemine uygulanarak nümerik çözümler elde edilmiştir. Savović vd. [11, 12, 13] çalışmalarında Stefan problemlerinin nümerik çözümünü bu yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Asaithambi [52] BIM' i kullanarak sonlu eleman yöntemlerinden olan Galerkin yöntemini lineer baz fonksiyonları yardımıyla donma problemine uygulamıştır.

Yöntemde, $x = s(t)$ hareketli sınırı

$$\xi = \frac{x}{s(t)} \quad (4.1)$$

dönüşümü yapılarak (ξ, t) yeni koordinat düzleminde $\xi = 1$ sınırı olarak sabitleştirilir.

Yeni koordinat sisteminde denklemi yeniden oluşturmak için alınan

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{s(t)} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_\xi = -\frac{x}{s^2(t)} \frac{ds}{dt} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_\xi \quad (4.3)$$

türevleri (2.1) ısı denkleminde yerine yazılırsa model problem için boyutsuz Stefan problemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\xi}{s(t)} \frac{ds}{dt} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{s^2(t)} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0 \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Dirichlet sınır koşullarına sahip ilk beş problem için (3.17) ve (3.18) eşitlikleriyle verilen sınır ve başlangıç koşulları

$$U(0, t) = U_0(t), \quad U(1, t) = U_s(t), \quad t \geq 0 \quad (4.5)$$

formuna, (3.19) Stefan koşulu ise

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{Ste}{s(t)} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \xi = 1, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

$$s(0) = S_0 \quad (4.7)$$

başlangıç şartına bağlı olarak değişecektir. Problem 6 diğer beş problemden farklı olarak sabit sınır üzerinde Neumann sınır koşuluna sahiptir. Bu nedenle variable space grid yönteminde olduğu gibi problem 6 için sonlu eleman şeması ayrıca incelenecektir.

4.1 Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi

Problemin sonlu elemanlar çözümünde üçüncü bölümde kübik B-spline fonksiyonları için (3.8) ifadesiyle verilen U_N , U'_N ve U''_N yaklaşımları (ξ, t) koordinat sisteminde

$$U_N(\xi_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

$$U'_N(\xi_m, t) = U'_m = \frac{3}{\Delta\xi} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})$$

$$U''_N(\xi_m, t) = U''_m = \frac{6}{(\Delta\xi)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})$$

formunda olup, (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} = \xi_m \frac{(\dot{s})^n}{s^n} \frac{3}{\Delta\xi} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) + \frac{6\alpha}{(s^n \Delta\xi)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada s hareketli sınırın yeri, \dot{s} hareketli sınırın hızı ve $\Delta\xi$ mesh uzunluğudur. (4.8) eşitliğinde sırasıyla (3.10)-(3.11) eşitlikleriyle verilen Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımı kullanılırsa, (3.12) eşitliğiyle verilen sonlu eleman şeması elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin katsayıları

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= 1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta\xi} \xi_m \frac{(\dot{s})^n}{s^n} - \frac{3\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} & \alpha_{m4} &= 1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta\xi} \xi_m \frac{(\dot{s})^n}{s^n} + \frac{3\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} \\ \alpha_{m2} &= 4 + \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} & \alpha_{m5} &= 4 - \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} \\ \alpha_{m3} &= 1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta\xi} \xi_m \frac{(\dot{s})^n}{s^n} - \frac{3\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} & \alpha_{m6} &= 1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta\xi} \xi_m \frac{(\dot{s})^n}{s^n} + \frac{3\alpha\Delta t}{(s^n \Delta\xi)^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

dır. Boundary immobilisation yöntemi uygulandıktan sonra (4.9) katsayılarına bağlı olarak oluşturulan (3.12) sonlu eleman şeması $N + 1$ denklem ve $N + 3$ tane bilinmeyenden oluşur. Bu denklem sistemini çözülebilmek için $m = 0$ ve $m = N$ için birinci ve N . satırda ortaya çıkacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri sistemden yok edilerek bilinmeyen sayısı $N + 1$ ' e indirgenir. Bu amaçla δ_{-1} hayali parametresini yok etmek için sol sınır şartı, δ_{N+1} hayali parametresini yok etmek için sağ sınır şartı kullanılarak denklem sistemi $A\delta^{n+1} = B\delta^n + r$ matris formuna dönüştürülür. Burada A ve B Bölüm 3' te (3.15) ile verilen $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde matrisler, r ise sınır koşullarının uygulamasından ortaya çıkan $N + 1$ satırlı bir sütun vektörüdür. Hayali parametrelerin yok edilmesi, sonlu eleman şeması oluşturulurken daha sonra detaylıca verilecektir. $U_N(\xi, t)$ yaklaşık çözümündeki δ^n katsayılarını elde etmek için öncelikle δ^0 başlangıç vektörü belirlenmelidir. δ^0 başlangıç vektörü,

$$U_N(\xi, t_0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0(t_0) \phi_m(\xi)$$

yaklaşımı için aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

i) Başlangıç koşulu $U(\xi, t_0)$ ve $U_N(\xi, t_0)$ yaklaşık çözümü $N + 1$ noktada uyumlu olmalıdır.

ii) $A\delta^0 = b$ denklem sistemini tek olarak çözebilmek için iki tane daha denkleme ihtiyaç duyulur. Sağ sınır ve sol sınır noktasındaki birinci mertebeden türevler kullanılarak bu iki denkleme ulaşılır. Başlangıç vektörü δ^0 elde edildikten sonra sırasıyla $\delta^1, \delta^2 \dots \delta^n$ vektörleri elde edilir. δ^0 vektörü Bölüm 3' te verilen (3.16) sistemi kullanılarak belirlenir.

4.2 Kararlılık Analizi

Yukarıda verilen sonlu eleman yöntemin kararlılığı Von-Neumann kararlılık analizi yöntemi uygulanarak incelendi. Ele alınan problemler için (3.12) eşitliğiyle verilen sonlu eleman şemasını ele alalım. β mod sayısı, $\Delta\xi$ eleman uzunluğu olmak üzere güçlendirme çarpanı olarak bilinen ζ çarpanı bulunduran

$$\delta_m^n = \zeta^n e^{im\beta\Delta\xi}$$

tipik Fourier modu (4.9) katsayılarına bağlı olarak oluşturulan (3.12) sonlu eleman şemasında yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa güçlendirme çarpanı

$$\zeta = \frac{a_1 + ib}{a_2 - ib}$$

formunda elde edilir. Burada a_1, a_2 ve b katsayıları

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(2 + \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n\Delta\xi)^2} \right) \cos \beta\Delta\xi + \left(4 - \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n\Delta\xi)^2} \right) \\ a_2 &= \left(2 - \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n\Delta\xi)^2} \right) \cos \beta\Delta\xi + \left(4 + \frac{6\alpha\Delta t}{(s^n\Delta\xi)^2} \right) \\ b &= \left(\frac{3\Delta t}{\Delta\xi} \frac{\xi_m}{s^n} (\dot{s})^n \right) \sin \beta\Delta\xi \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.12) sonlu eleman şemasının (4.9) katsayılarına bağlı olarak kararlı olması için gerek ve yeter şart güçlendirme çarpanı ζ için $|\zeta| \leq 1$ koşulunun sağlanmasıdır. Dolayısıyla $|a_2 - ib| - |a_1 + ib| \geq 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Gerekli işlemler yapıldığında

$$|a_2 - ib| - |a_1 + ib| = \frac{48\alpha\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \sin^2 \frac{\beta\Delta\xi}{2} \left(6 - 4 \sin^2 \frac{\beta\Delta\xi}{2} \right)$$

bulunur.

$$-1 \leq \sin \frac{\beta\Delta\xi}{2} \leq 1$$

olduğundan $|a_2 - ib| - |a_1 + ib| \geq 0$ eşitsizliği her zaman sağlanır. Dolayısıyla kollokasyon yöntemi kullanılarak oluşturulan sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

4.3 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, farklı sınır koşullarına sahip Stefan problemleri için kübik B-spline sonlu eleman yöntemi kullanılarak altı problem için sonlu eleman şemaları oluşturuldu ve nümerik çözümler elde edildi. Kullanılan nümerik yöntemin doğruluğunu test etmek amacıyla sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle ve daha önce yapılan çalışmalardan elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı ve bununla birlikte L_2 , L_∞ ve yüzdelik bağıl hata normları da verildi.

İlk beş problem Dirichlet sınır koşullu olup $m = 0, m = N$ için ortaya çıkacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri (4.5) ile verilen sınır koşullarından elde edilen

$$\delta_{-1} = U_0(t) - 4\delta_0 - \delta_1 \quad (4.10)$$

$$\delta_{N+1} = U_s(t) - 4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (4.11)$$

eşitlikleri kullanılarak yok edilirse sonlu eleman şeması $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$(\alpha_{02} - 4\alpha_{01})\delta_0^{n+1} + (\alpha_{03} - \alpha_{01})\delta_1^{n+1} = U_0(t)(\alpha_{04} - \alpha_{01}) + (\alpha_{05} - 4\alpha_{04})\delta_0^n + (\alpha_{06} - \alpha_{04})\delta_1^n$$

$m = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

ve $m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n + U_s(t)(\alpha_{N4} - \alpha_{N6})$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca çözümün bir parçası olarak belirlenmesi gereken $s(t)$ hareketli sınırının yerini belirlemek için (4.6) ısı-denge eşitliğinde ds/dt türevi için (3.23) ileri fark yaklaşımı, $\partial U/\partial \xi$ türevi yerine ise

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \frac{3U_N - 4U_{N-1} + U_{N-2}}{2\Delta \xi} + O(\Delta \xi)^2 \quad (4.12)$$

üç nokta geri fark yaklaşımı [53] yazılırsa, hareketli sınırın yeri

$$s^{n+1} = s^n - Ste \frac{\Delta t}{2(s^n)\Delta \xi} (3U_N^n - 4U_{N-1}^n + U_{N-2}^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

sonlu fark yaklaşımı ve

$$s^0 = S_0 \quad (4.14)$$

başlangıç şartına bağlı olarak elde edilir. Burada $U_0(t)$, $U_s(t)$, S_0 , α ve Ste değerleri ele alınan problemler için değişiklik gösterip her bir Stefan problemi için eşit olduğu değerler nümerik çözümlerde belirtilecektir.

Boundary immobilisation metodunda nümerik hesaplamalar boyunca $U_m^n \sim U(\xi_m, t_n)$ sıcaklık dağılımı $\xi = m\Delta\xi$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplanmış olup t_0 başlangıç zamanı olarak alınmıştır.

4.3.1 Problem 1

Bu problem için (4.9) katsayılarıyla verilen (4.8) sonlu eleman şeması üzerinde $U_0(t) = 1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$, $\alpha = 1$ ve $Ste = 1$ değerleri kullanılacaktır. (2.3) eşitliğiyle verilen tam çözüm ise boundary immobilisation metodu uygulandıktan sonra (4.1) değişken değişimi yardımıyla

$$U(\xi, t) = 1 - \frac{\text{erf}(\xi\lambda)}{\text{erf}(\lambda)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t > 0$$

formuna dönüşecektir.

Bu problemde $t_f = 1.0$ zamanında yapılan nümerik çözümler $t_0 = 0.5$ zamanından başlatıldı. Δt zaman adımı için $\Delta t = 0.000001$ değeri kullanıldı.

Tablo 4.1' de $t_f = 1.0$ zamanı ve farklı bölüntü sayıları için sunulan yöntemle elde edilen sıcaklık dağılımları L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata normlarının giderek küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 4.1: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.8872058	0.8871995	0.8871975	0.8871970	0.8871968
0.2	0.7752743	0.7752623	0.7752586	0.7752575	0.7752571
0.3	0.6650486	0.6650319	0.6650267	0.6650253	0.6650247
0.4	0.5573330	0.5573132	0.5573069	0.5573052	0.5573045
0.5	0.4528757	0.4528544	0.4528477	0.4528459	0.4528452
0.6	0.3523530	0.3523323	0.3523258	0.3523240	0.3523233
0.7	0.2563570	0.2563390	0.2563333	0.2563317	0.2563310
0.8	0.1653856	0.1653721	0.1653678	0.1653666	0.1653659
0.9	0.0798356	0.0798282	0.0798259	0.0798252	0.0798247
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.0217989	0.0066688	0.0018128	0.0003684	
$L_\infty \times 10^3$	0.0304466	0.0093040	0.0026133	0.0005491	

Tablo 4.2' de farklı zaman adımı ve bölüntü sayıları için elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırılması verildi. Farklı zaman adımları için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları birbirine oldukça yakın olup zaman adımı küçüldükçe aynı eleman sayılarında hata normlarında küçük miktarda bir değişim görülür. Sabit bir zaman adımında artan bölüntü sayıları için hata normlarının değişimi gözlemlenirse bölüntü sayıları arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının kayda değer ölçüde azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.2: Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$N = 10$	0.0218013	0.0304500	0.0217991	0.0304469	0.0217989	0.0304466
$N = 20$	0.0066694	0.0093048	0.0066689	0.0093041	0.0066688	0.0093040
$N = 40$	0.0018130	0.0026135	0.0018128	0.0026133	0.0018128	0.0026133
$N = 80$	0.0003685	0.0005492	0.0003684	0.0005491	0.0003684	0.0005491

Tablo 4.3 ve Tablo 4.4' de kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile farklı bölüntü sayıları ve $t_f = 1.0$ zamanı için sırasıyla hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar Ref. [48] ile karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hata normları ile birlikte verildi. Tablolardan bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı ve yüzdellik bağıl hata normlarının gittikçe küçüldüğü ve [48] referansında sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlardan daha az hataya sahip olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.3: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
BIM-SEY	1.240456	1.240198	1.240143	1.240130
Hata %	0.026691	0.005887	0.001451	0.000403
BIM-SFY [48]	1.240896	1.240308	1.240170	1.240137
Hata %	0.0622	0.0147	0.0036	0.0010
Tam Çözüm	$s(t) = 1.240125$			

Tablo 4.4: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
BIM-SEY	0.620566	0.620173	0.620088	0.620068
Hata %	0.081121	0.017740	0.004032	0.000806
BIM-SFY [48]	0.621020	0.620542	0.620137	0.620074
Hata %	0.1543	0.0772	0.0119	0.0018
Tam Çözüm	$\dot{s}(t) = 0.620063$			

4.3.2 Problem 2

Bu problem için $U_0(t) = 1 + \epsilon \sin \omega t$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$, $\alpha = 1$ ve $Ste = 1$ değerleri kullanıldı. Nümerik hesaplamalar $t_0 = 0.01$ başlangıç zamanından $t_f = 1.0$ son zamanına kadar yapıldı. Nümerik işlemler boyunca eleman sayısı ve zaman adımı için [11] çalışmasındaki sonlu fark yönteminde kullanılan $N = 10$, $\Delta t = 0.00002$ değerleri kullanıldı. Bu problemde zaman, ϵ salınım genliği, ω salınım frekansı ve Ste sayısı sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri üzerinde oldukça büyük etkiye sahiptir. Bununla ilgili grafikler üçüncü bölümde VSG üzerine kurulu sonlu eleman yöntemi kullanılarak oluşturulan grafiklerle aynı davranışı sergileyecektir. Bu nedenle üçüncü bölümde verilen grafikler burada verilmeyecektir. Üçüncü bölümde verilen grafikler üzerinde değişen tek nokta $\epsilon = 0.5$ ve $\epsilon = 0.9$ değerleri için hareketli sınırın yeri olacaktır. Sunulan yöntemle hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik sonuçlar farklı zaman aralıklarında değişerek Tablo 4.5' de verildiği gibi olacaktır. Burada

dikkat edilmelidir ki, nümerik hesaplamalar boyunca $Ste = 1.0$ sayısına karşılık gelen λ parametresi $\lambda = 0.62006$ olacaktır.

Tablo 4.5: Problem 2' nin $\Delta t = 0.00002$, $N = 10$, $Ste = 1.0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ ve farklı zaman değerleri için $\epsilon = 0.5$ ve $\epsilon = 0.9$ ' de hareketli sınırmın yerinin [11] ile karşılaştırılması.

	BIM-SEY	SFY [11]
$t = 4.0$	2.567171	2.566
$t = 20.0$ $\epsilon = 0.5$	5.595799	5.595
$t = 36.0$	7.476424	— — —
$t = 4.0$	2.646290	2.644
$t = 20.0$ $\epsilon = 0.9$	5.632716	5.632
$t = 36.0$	7.501841	— — —

4.3.3 Problem 3

Donma problemi olarak bilinen bu Stefan problemi için $U_0(t) = -1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0.25$, $\alpha = 1$ ve $Ste = -1$ değerleri kullanılacaktır ve problem (4.1) dönüşümünden sonra

$$U(\xi, 0) = \begin{cases} \xi - 1, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

başlangıç şartıyla birlikte ele alınacaktır.

Bu problemde nümerik hesaplamalar $t_0 = 0$ zamanından başlatıldı. Asaithambi [51]' nin çalışmasında önerildiği gibi $N = 10$ eleman sayısı için $\Delta t = 0.0005$ zaman adımı, $N = 20$ eleman sayısı için $\Delta t = 0.0001$ zaman adımı kullanılarak t_f son zamanında hareketli sınırmın yeri için nümerik sonuçlar elde edildi.

Tablo 4.6' de $N = 10$, $\Delta t = 0.0005$ değerleri kullanılarak hareketli sınırnın yeri için elde edilen nümerik çözümler [49] ve [51] referanslarında verilen nümerik çözümler ve [5] referansında verilen tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan görüleceği üzere sunulan yöntem tam çözüme en yakın nümerik sonuçları vermektedir.

Tablo 4.6: Problem 3' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.0005$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırnın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	BIM-SEY	Rubinstein [5]	Finn ve Varoğlu [49]	Asaithambi [51]
0.01	0.281666	0.281347	0.2806	0.2818
0.02	0.308231	0.307925	0.3072	0.3083
0.03	0.332411	0.332077	0.3315	0.3325
0.04	0.354880	0.354519	0.3541	0.3549
0.06	0.395961	0.395471	0.3956	0.3960
0.08	0.433144	0.432581	0.4333	0.4331
0.10	0.467370	0.466754	0.4682	0.4674

Tablo 4.7' de $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri kullanılarak hareketli sınırnın yeri için elde edilen nümerik çözümler [49] ve [51] referanslarında verilen nümerik çözümler ve [5] referansında verilen tam çözümlerle karşılaştırıldı. Bu tablodan elde edilen nümerik sonuçların Asaithambi [51]' de verilen nümerik sonuçlarla uyumlu olduğu Finn ve Varoğlu [49] 'nun nümerik sonuçlarından da daha iyi olduğu söylenebilir.

Tablo 4.7: Problem 3' ün $N = 20$, $\Delta t = 0.0001$ değerleri için farklı zaman değerlerinde hareketli sınırının yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	BIM-SEY	Rubinstein [5]	Finn ve Varoğlu [49]	Asaithambi [51]
0.01	0.281375	0.281347	0.2806	0.2814
0.02	0.307887	0.307925	0.3072	0.3079
0.03	0.332036	0.332077	0.3315	0.3320
0.04	0.354481	0.354519	0.3541	0.3545
0.06	0.395529	0.395471	0.3956	0.3955
0.08	0.432687	0.432581	0.4333	0.4327
0.10	0.466894	0.466754	0.4682	0.4669

Tablo 4.8' de farklı bölüntü sayıları ve $\Delta t = 0.0005$ zaman adımı için farklı zamanlarda hareketli sınırın yerinin tam çözümle karşılaştırılması verildi. Tablodan da görüldüğü üzere tüm zaman değerlerinde bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme giderek yaklaştığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.8: Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.01	0.281666	0.281576	0.281551	0.281542	0.281347
0.02	0.308231	0.308125	0.308098	0.308090	0.307925
0.03	0.332411	0.332294	0.332265	0.332257	0.332077
0.04	0.354880	0.354752	0.354722	0.354714	0.354519
0.06	0.395961	0.395814	0.395780	0.395771	0.395471
0.08	0.433144	0.432980	0.432942	0.432933	0.432581
0.10	0.467370	0.467191	0.467191	0.467149	0.466754

Tablo 4.9' da farklı bölüntü sayıları ve $\Delta t = 0.0001$ zaman adımı için farklı zamanlarda hareketli sınırın yerinin tam çözümle karşılaştırılması verildi. Tablodan da görüldüğü üzere tüm zaman değerlerinde bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.9: Problem 3' ün $\Delta t = 0.0001$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik ve tam çözümler.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.01	0.281664	0.281375	0.281352	0.281346	0.281347
0.02	0.307992	0.307887	0.307861	0.307854	0.307925
0.03	0.332152	0.332036	0.332007	0.332000	0.332077
0.04	0.354608	0.354481	0.354451	0.354443	0.354519
0.06	0.395675	0.395529	0.395494	0.395486	0.395471
0.08	0.432850	0.432687	0.432649	0.432640	0.432581
0.10	0.467073	0.466894	0.466853	0.466843	0.466754

4.3.4 Problem 4

Bu problem için $U_0(t) = e^t - 1, U_s(t) = 0, S_0 = 0, Ste = 1$ ve $\alpha = 1$ değerleri kullanılacaktır. Problem BIM uygulandıktan sonra

$$U(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

başlangıç koşuluyla birlikte değerlendirilecektir. Problemin Bölüm 2' de (2.6) eşitliğiyle verilen tam çözümünü de $\xi = x/s(t)$ dönüşümü yardımıyla $U(\xi, t) = \exp(t - \xi s(t)) - 1$

formuna dönüşecektir.

Bu problem için $t_f = 1.0$ zamanında eleman sayısı $N = 10$, zaman adımı $\Delta t = 0.000002$ alınarak sunulan yöntemle elde edilen nümerik sonuçlar, tam çözümle ve [14]' de verilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Nümerik işlemler $t_0 = 0.02$ zamanından başlatıldı.

Table 4.10' da $N = 10$, $t_f = 1.0$ ve $\Delta t = 0.000002$ değerleri için sunulan yöntemle sıcaklık dağılımı için elde edilen nümerik çözümler Ref. [14]' de verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte verildi. Tablodan kollokasyon sonlu eleman yönteminin en küçük yüzdellik bağıl hatalara sahip olduğu görülmektedir. Tablo 4.11' de 4.10' da verilen sıcaklık dağılımlarının L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldı. Tablodan sonlu eleman yöntemi uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların en az hataya sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 4.10: Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının [14] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$						Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM[14] ($N_x = 10$)	Hata %	
0.0	1.718282	0.0	1.718282	0.0	1.718463	0.010534	1.718282
0.1	1.459673	0.004795	1.459742	0.009523	1.459617	0.000959	1.459603
0.2	1.225663	0.009955	1.225771	0.018767	1.225442	0.008078	1.225541
0.3	1.013912	0.015684	1.014033	0.027620	1.013585	0.016572	1.013753
0.4	0.822299	0.021895	0.822418	0.036369	0.821917	0.024571	0.822119
0.5	0.648907	0.028672	0.649013	0.045012	0.648514	0.031909	0.648721
0.6	0.492001	0.035785	0.492088	0.053474	0.491633	0.039038	0.491825
0.7	0.350012	0.043732	0.350076	0.062025	0.349699	0.045733	0.349859
0.8	0.221518	0.051941	0.221559	0.070460	0.221287	0.052393	0.221403
0.9	0.105235	0.060853	0.105255	0.079870	0.105110	0.058001	0.105171
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tablo 4.11: Problem 4' ün $N = 10$, $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 1.0$ değerleri için sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normlarının [14] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
BIM-SEY	0.1355286	0.1852875
SFY [14]	0.2981503	0.7081546
NIM [14]	0.1530608	0.2071546

Tablo 4.12' de farklı bölüntü sayıları için kollokasyon SEY ile elde edilen sıcaklık dağılımları L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan bölüntü sayılarının

artmasıyla nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı bununla birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülür.

Tablo 4.12: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	1.718282	1.718282	1.718282	1.718282	1.718282
0.1	1.459673	1.459620	1.459607	1.459604	1.459603
0.2	1.225663	1.225570	1.225548	1.225543	1.225541
0.3	1.013912	1.013790	1.013762	1.013755	1.013753
0.4	0.822299	0.822161	0.822129	0.822121	0.822119
0.5	0.648907	0.648765	0.648732	0.648724	0.648721
0.6	0.492001	0.491867	0.491835	0.491827	0.491825
0.7	0.350012	0.349895	0.349868	0.349861	0.349859
0.8	0.221518	0.221430	0.221409	0.221404	0.221403
0.9	0.105235	0.105186	0.105175	0.105172	0.105171
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.1355286	0.0322059	0.0077478	0.0016257	
$L_\infty \times 10^3$	0.1852875	0.0440413	0.0107707	0.0022526	

Tablo 4.13' de farklı bölüntü sayıları ve zaman adımları kullanılarak L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. $N = 10, 20$ ve 40 gibi küçük bölüntü sayılarında zaman adımını küçültmek sonuçları iyileştirmese de $N = 80$ ve 100 gibi büyük bölüntü sayılarında zaman adımını küçültmek L_2 ve L_∞ hata normlarını ciddi ölçüde azaltmaktadır. Ayrıca $\Delta t = 0.00001$ zaman adımında bölüntü sayılarını arttırmak hata normları azaltmaktadır.

Tablo 4.13: Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.1001663	0.1416418	0.1319362	0.1806288	0.1352345	0.1849071
20	0.0170734	0.0287787	0.0286632	0.0393956	0.0319131	0.0436620
40	0.0331414	0.0536677	0.0044310	0.0067509	0.0074544	0.0103680
80	0.0385487	0.0604263	0.0024433	0.0040785	0.0013243	0.0018751
100	0.0391940	0.0612344	0.0030501	0.0048581	0.0006328	0.0009197

Tablo 4.14' de $\Delta t = 0.000002$ ve $N = 10$ değerleri için artan t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler Ref. [14]' de verilen nümerik ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik sonuçlar küçük zaman değerlerinde [14] referansındaki SFY' ye göre daha doğru nümerik sonuçlar vermiştir. [14] referansında nodal integral yöntemi kullanılarak $N_x = 10$ için en iyi sonuçları bulunmasına rağmen nokta sayısı arttırıldıkça yapılan işlemler artacak, yöntemi uygulamak zorlaşacaktır. Bu yüzden SEY sistematik bir şema kullanılarak nümerik çözüm sağladığından ve sıcaklık dağılımı için en iyi yaklaşımı sunduğundan bu problemin nümerik çözümü için tercih edilebilir.

Tablo 4.14: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$						Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	0.100001	0.001000	0.099999	0.001000	0.099999	0.001000	0.1
0.2	0.199995	0.002500	0.199994	0.003000	0.200010	0.005000	0.2
0.3	0.299980	0.006666	0.299979	0.007000	0.300007	0.002333	0.3
0.4	0.399952	0.012000	0.399951	0.012250	0.400001	0.000250	0.4
0.5	0.499905	0.019000	0.499906	0.018800	0.499990	0.002000	0.5
0.6	0.599836	0.027333	0.599840	0.026667	0.599974	0.004333	0.6
0.7	0.699742	0.036857	0.699750	0.035714	0.699952	0.006857	0.7
0.8	0.799617	0.047875	0.799632	0.046000	0.799924	0.009500	0.8
0.9	0.899459	0.060111	0.899484	0.057333	0.899888	0.012444	0.9
1.0	0.999265	0.073500	0.999301	0.069900	0.999844	0.015600	1.0

Tablo 4.15' de $\Delta t = 0.000002$ ve $N = 10$ değerleri için artan t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte [14] referansında verilen nümerik ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik sonuçların tam çözümle ve diğer nümerik çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.15: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	0.999960	0.004000	0.999976	0.002400	1.000134	0.013400	
0.2	0.999895	0.010500	0.999906	0.009400	1.000033	0.003300	
0.3	0.999782	0.021800	0.999793	0.020700	0.999961	0.003900	
0.4	0.999625	0.037500	0.999641	0.035900	0.999916	0.008400	
0.5	0.999426	0.057400	0.999451	0.054900	0.999869	0.013100	1.0
0.6	0.999187	0.081300	0.999226	0.077400	0.999814	0.018600	
0.7	0.998909	0.109100	0.998966	0.103400	0.999751	0.024900	
0.8	0.998593	0.140700	0.998674	0.132600	0.999680	0.032000	
0.9	0.998240	0.176000	0.998349	0.165100	0.999602	0.039800	
1.0	0.997851	0.214900	0.997994	0.200600	0.999517	0.048300	

Eleman sayıları arttırılarak hareketli sınırın hızı ve yeri için istenilen doğrulukta nümerik sonuçlar elde edilebilir. Tablo 4.16' da $t_f = 1.0$ zamanında, artan eleman sayıları kullanılarak hareketli sınırın yeri ve hızı için sunulan yöntemle ile elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle ve yüzdelik bağıl hatalarla birlikte verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça elde edilecek nümerik çözümlerin tam çözümlere giderek yaklaştığı, bununla birlikte yüzdelik bağıl hataların da giderek küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 4.16: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdellik bağıl hataları.

N	BIM-SEY	Hata %	BIM-SEY	Hata %
10	0.999265	0.0735	0.997851	0.2149
20	0.999823	0.0177	0.999481	0.0519
40	0.999958	0.0042	0.999871	0.0129
80	0.999991	0.0009	0.999967	0.0033
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 1.0$	

4.3.5 Problem 5

Bu problem için $U_0(t) = e^{\alpha t}$, $U_s(t) = 1$, $S_0 = 0$ ve $Ste = \alpha$ değerleri kullanılacaktır. Problemin tam çözümü mevcut olup (ξ, t) yeni koordinat sisteminde

$$U(\xi, t) = e^{\alpha t - s(t)\xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t > 0$$

$$s(t) = \alpha t \quad t > 0$$

formunda yazılabilir. Bu problem için nümerik işlemler $t_0 = 0.01$ başlangıç zamanından başlatıldı. Nümerik işlemler boyunca sonlu fark yönteminde yakınsamayı sağlayacak Savović ve Caldwell [12] tarafından önerilen $\alpha = 2$ için $\Delta t = 0.000001$ ve $\alpha = 10$ için $\Delta t = 0.000002$ zaman adımları kullanıldı. $\alpha = 2$ ve $\alpha = 10$ için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözüm ve daha önce sonlu fark yöntemi [12] kullanılarak elde edilen nümerik çözümler ile karşılaştırıldı.

Tablo 4.17 - Tablo 4.19' da $\alpha = 2$ için $\Delta t = 0.000001$ zaman adımı kullanılarak $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ve SFY [12] ile elde edilen sıcaklık dağılımları yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte

verilerek yöntemlerin karşılaştırılması yapıldı. Noktasal olarak [12] referansına göre tam çözüme daha yakın nümerik sonuçlar veren SEY için L_2 ve L_∞ hata normları da ilgili tablolarda verildi.

Tablo 4.17: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	1.221403	0.0	1.221403	0.0	1.221403
0.1	1.197217	0.0	1.197218	0.000008	1.197217
0.2	1.173511	0.0	1.173511	0.0	1.173511
0.3	1.150274	0.0	1.150274	0.0	1.150274
0.4	1.127497	0.0	1.127497	0.0	1.127497
0.5	1.105171	0.0	1.105171	0.0	1.105171
0.6	1.083287	0.0	1.083288	0.000009	1.083287
0.7	1.061837	0.0	1.061837	0.0	1.061837
0.8	1.040811	0.0	1.040811	0.0	1.040811
0.9	1.020201	0.0	1.020202	0.000009	1.020201
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY: $L_2 \times 10^3 = 0.0002209$, $L_\infty \times 10^3 = 0.0003016$					

Tablo 4.18: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	1.822119	0.0	1.822119	0.0	1.822119
0.1	1.716016	0.000524	1.716023	0.000932	1.716007
0.2	1.616090	0.000990	1.616102	0.001732	1.616074
0.3	1.521982	0.001314	1.521996	0.002234	1.521962
0.4	1.433353	0.001674	1.433367	0.002651	1.433329
0.5	1.349883	0.001778	1.349896	0.002741	1.349859
0.6	1.271273	0.001888	1.271284	0.002753	1.271249
0.7	1.197238	0.001754	1.197247	0.002506	1.197217
0.8	1.127513	0.001419	1.127519	0.001951	1.127497
0.9	1.061846	0.000848	1.061848	0.001036	1.061837
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY: $L_2 \times 10^3 = 0.0178094$, $L_\infty \times 10^3 = 0.0243366$					

Tablo 4.19: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.0	2.718282	0.0	2.718282	0.0	2.718282
0.1	2.459672	0.002805	2.459742	0.005651	2.459603
0.2	2.225664	0.005527	2.225771	0.010335	2.225541
0.3	2.013912	0.007896	2.014033	0.013904	2.013753
0.4	1.822299	0.009879	1.822418	0.016409	1.822119
0.5	1.648907	0.011281	1.649013	0.017711	1.648721
0.6	1.492001	0.011798	1.492088	0.017629	1.491825
0.7	1.350012	0.011335	1.350076	0.016076	1.349859
0.8	1.221518	0.009415	1.221559	0.012772	1.221403
0.9	1.105235	0.005791	1.105255	0.007601	1.105171
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY : $L_2 \times 10^3 = 0.1355361$, $L_\infty \times 10^3 = 0.1852757$					

Tablo 4.20 - Tablo 4.22' de $\alpha = 10$ için $\Delta t = 0.000002$ zaman adımı kullanılarak $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ve SFY [12] ile elde edilen sıcaklık dağılımları yüzdelerle bağlı hatalarıyla birlikte verilerek yöntemlerin karşılaştırılması yapıldı. Noktasal olarak [12] referansına göre tam çözüme daha yakın nümerik sonuçlar veren SEY için L_2 ve L_∞ hata normları da ilgili tablolarda verildi. Tablo 4.17- Tablo 4.22' de verilen sıcaklık dağılımlarına ve hata normlarına bakıldığında küçük α değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme daha yakın olduğu söylenebilir. Büyük zaman değerleri ve büyük α katsayısı

için hata normları da diğerlerine göre daha fazla artmıştır.

Tablo 4.20: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.1$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	2.718282	0.0	2.718282	0.0	2.718282
0.1	2.459672	0.002805	2.459742	0.005651	2.459603
0.2	2.225663	0.005482	2.225771	0.010335	2.225541
0.3	2.013911	0.007846	2.014033	0.013904	2.013753
0.4	1.822298	0.009824	1.822418	0.016409	1.822119
0.5	1.648906	0.011221	1.649013	0.017711	1.648721
0.6	1.492000	0.011731	1.492088	0.017629	1.491825
0.7	1.350013	0.011409	1.350076	0.016076	1.349859
0.8	1.221518	0.009415	1.221559	0.012772	1.221403
0.9	1.105235	0.005791	1.105255	0.007601	1.105171
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY: $L_2 \times 10^3 = 0.1355361$, $L_\infty \times 10^3 = 0.1852757$					

Tablo 4.21: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.3$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.0	20.085539	0.0	20.085537	0.000001	20.085539
0.1	14.891915	0.081870	14.910219	0.204883	14.879733
0.2	11.041829	0.169207	11.065235	0.381542	11.023177
0.3	8.187334	0.259167	8.209375	0.529073	8.166170
0.4	6.070656	0.347260	6.088679	0.645178	6.049648
0.5	4.500811	0.426669	4.514196	0.725329	4.481689
0.6	3.336271	0.486549	3.345391	0.761238	3.320117
0.7	2.472142	0.509798	2.477774	0.738778	2.459603
0.8	1.830669	0.469234	1.833675	0.634207	1.822119
0.9	1.354204	0.321885	1.355377	0.408783	1.349859
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY : $L_2 \times 10^3 = 15.0376658$, $L_\infty \times 10^3 = 21.1633619$					

Tablo 4.22: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için sıcaklık dağılımının [12] ile karşılaştırılması.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.0	148.413159	0.0	148.413159	0.0	148.413159
0.1	90.330071	0.347645	90.899147	0.979831	90.017131
0.2	55.001087	0.738001	55.605658	1.845317	54.598149
0.3	33.501059	1.164435	33.974528	2.594188	33.115451
0.4	20.409953	1.615177	20.732319	3.220143	20.085536
0.5	12.434471	2.068353	12.634162	3.707517	12.182494
0.6	7.572350	2.480615	7.686124	4.020378	7.389056
0.7	4.605596	2.764739	4.664551	4.080203	4.481689
0.8	2.792878	2.744233	2.819418	3.720585	2.718282
0.9	1.682723	2.062326	1.691526	2.596255	1.648721
1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
BIM-SEY : $L_2x10^3 = 251.6732339$, $L_\infty x10^3 = 402.9375915$					

Tablo 4.23' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle ve [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağlı hataları ile birlikte verildi. Tablodan bazı zaman değerlerinde ($t_f = 0.1$ ve $t_f = 0.2$) hareketli sınırın yeri için BIM-SEY ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümlerle SFY [12] ile elde edilen nümerik çözümlerden daha yakın olduğu, hareketli sınırın yeri için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle ve diğer nümerik çözümlerle uyumlu olduğu görölmektedir.

Tablo 4.23: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri		$s(t)$		Tam
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.01	0.02	0.0	0.02	0.0	0.02
0.02	0.040001	0.002500	0.0399999484	0.000129	0.04
0.05	0.100001	0.001000	0.0999991859	0.000814	0.1
0.1	0.199995	0.002500	0.1999936232	0.003188	0.2
0.2	0.399952	0.012000	0.3999509301	0.012267	0.4
0.3	0.599836	0.273333	0.5998399761	0.026671	0.6
0.4	0.799617	0.047875	0.7996321205	0.045985	0.8
0.5	0.999265	0.073500	0.9993009904	0.069901	1.0

Tablo 4.24' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hataları verildi. Tablodan SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.24: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Hızı $\dot{s}(t)$				Tam Çözüm
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.01	2.0	0.0	1.9999977517	0.000112	
0.02	1.999942	0.002900	1.9999920331	0.000398	
0.05	1.999919	0.004050	1.9999514832	0.002426	
0.1	1.999790	0.010500	1.9998113373	0.009433	2.0
0.2	1.999249	0.037550	1.9992818233	0.035991	
0.3	1.998373	0.081350	1.9984515198	0.077424	
0.4	1.997186	0.140700	1.997347122	0.132624	
0.5	1.995701	0.214950	1.9959886398	0.200568	

Tablo 4.25' te $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ değerleri ve farklı bölüntü sayıları için hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırıldı. Tablolardan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı yüzdelik bağıl hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.25: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelerlik bağıl hatalar.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	0.999265	0.0735	1.995701	0.2150
20	0.999823	0.0177	1.998962	0.0519
40	0.999958	0.0042	1.999742	0.0129
80	0.999991	0.0009	1.999933	0.0034
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 2.0$	

Tablo 4.26' da $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle ve [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdelerlik bağıl hataları ile birlikte verildi. Tablodan bazı zaman değerlerinde ($t_f = 0.02$ ve $t_f = 0.05$) hareketli sınırın yeri için BIM-SEY ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümlerle SFY [12] ile elde edilen nümerik çözümlerden daha yakın olduğu, hareketli sınırın yeri için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle ve diğer nümerik çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.26: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri		$s(t)$		Tam
	BIM-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	Çözüm
0.01	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1
0.02	0.200004	0.002000	0.19999399	0.003005	0.2
0.05	0.499920	0.016000	0.49990592	0.018816	0.5
0.1	0.999281	0.071900	0.99930086	0.069914	1.0
0.2	1.994510	0.274500	1.99496049	0.251976	2.0
0.3	2.982190	0.593666	2.98409422	0.530193	3.0
0.4	3.958829	1.029275	3.96387752	0.903062	4.0
0.5	4.920693	1.586140	4.93118458	1.376308	5.0

Tablo 4.27' de $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ için farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hataları verildi. Tablodan SEY kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.27: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$		Tam Çözüm
	VSG-SEY	Hata %	SFY [12]	Hata %	
0.01	10.0	0.0	9.99966996	0.003300	
0.02	9.998534	0.014660	9.99903562	0.009644	
0.05	9.993972	0.060280	9.99450640	0.054936	
0.1	9.978343	0.216570	9.97993878	0.200612	10.0
0.2	9.920173	0.798270	9.92856643	0.714336	
0.3	9.827489	1.725110	9.84945140	1.505486	
0.4	9.698986	3.010140	9.74194545	2.589546	
0.5	9.531309	4.686910	9.59898056	4.010194	

Tablo 4.28' de $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ değerleri ve farklı bölüntü sayıları için hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırıldı. Tablolardan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı yüzdelik bağıl hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.28: Problem 5' in $\alpha = 10$, $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalar.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	4.920693	1.5861	9.531309	4.6869
20	4.982555	0.3489	9.901089	0.9891
40	4.995909	0.0818	9.977126	0.2287
80	4.999021	0.0196	9.994465	0.0554
Tam Çözüm	$s(t) = 5.0$		$\dot{s}(t) = 10.0$	

4.3.6 Problem 6

Neumann sınır koşuluna sahip bu problem $Ste = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere (4.4) denklemi ile ele alınsın. $\xi = \frac{x}{s(t)}$ dönüşümünden sonra sınır ve başlangıç koşulları

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(0, t) = -s(t)e^t, \quad U(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.15)$$

$$U(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.16)$$

şeklinde ifade edilen bu problem, problem 4 ile aynı tam çözümüne sahip [7, 53] olup bu tam çözüm problem 4' de verildiği üzere $U(\xi, t) = \exp(t - \xi s(t)) - 1$ şeklindedir. Problem 4 için Dirichlet sınır koşulu temel alınırken, problem 6 için Neumann sınır koşulu temel alınır. Dolayısıyla sonlu eleman sistemi oluşturulurken $m = 0$ ve $m = N$ için ortaya çıkacak δ_{-1} , δ_{N+1} hayali parametreleri sınır koşulları kullanılarak sonlu eleman şemasından yok edilir. Kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak oluşturulan (3.12) kollokasyon sonlu eleman şemasında (4.15)-(4.16) sınır koşullarından elde edilen

$$\delta_{-1} = \delta_1 + \frac{\Delta \xi s(t) e^t}{3}$$

$$\delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1}$$

hayali parametreleri yok edilerek ele alınan problem için sonlu eleman şeması $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$\alpha_{02}\delta_0^{n+1} + (\alpha_{01} + \alpha_{03})\delta_1^{n+1} = \frac{\Delta \xi s(t) e^t}{3}(\alpha_{04} - \alpha_{01}) + \alpha_{05}\delta_0^n + (\alpha_{04} + \alpha_{06})\delta_1^n$$

$m = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

ve $m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n$$

şeklinde elde edilir.

Bu problem için nümerik işlemler $t_0 = 0.1$ başlangıç noktasından başlatıldı. Tablo 4.29' da $\Delta t = 0.000002$ ve $t_f = 0.5$ değerleri için farklı bölüntü sayılarında sıcaklık dağılımının değişimini gözlemlemek için nümerik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan artan bölüntü sayılarında nümerik çözümlerin giderek tam çözüme yaklaştığı bununla birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının da giderek azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.29: Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için sıcaklık dağılımı ve L_2 , L_∞ hata normları.

ξ	Nümerik Çözüm $U(\xi, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	0.649192	0.648842	0.648752	0.648730	0.648721
0.1	0.568738	0.568419	0.568339	0.568319	0.568312
0.2	0.492188	0.491916	0.491848	0.491831	0.491825
0.3	0.419372	0.419144	0.419087	0.419073	0.419068
0.4	0.350110	0.349922	0.349875	0.349863	0.349859
0.5	0.284227	0.284076	0.284038	0.284029	0.284025
0.6	0.221559	0.221442	0.221413	0.221405	0.221403
0.7	0.161947	0.161863	0.161841	0.161836	0.161834
0.8	0.105244	0.105189	0.105176	0.105172	0.105171
0.9	0.051307	0.051280	0.051273	0.051272	0.051271
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.2784389	0.0676344	0.0168444	0.0043809	
$L_\infty \times 10^3$	0.4709912	0.1211346	0.0311441	0.0083253	

Tablo 4.30' da farklı zaman adımı ve bölüntü sayıları kullanılarak sıcaklık dağılımı için elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması yapıldı. Tablodan görüleceği üzere N' nin tüm değerleri için azalan zaman adımlarında L_2 ve L_∞ hata normları gittikçe küçülmektedir. Zaman adımının sabit değerlerinde de N bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik sonuçların gittikçe iyileştiği görülmektedir.

Tablo 4.30: Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında sıcaklık dağılımının L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.4565772	0.7712413	0.2959127	0.5004454	0.2798463	0.4733623
20	0.2410472	0.4349150	0.0846641	0.1519526	0.0690251	0.1236516
40	0.1871124	0.3517030	0.0335647	0.0626265	0.0182092	0.0337146
80	0.1728560	0.3323095	0.0209235	0.0401404	0.0057307	0.0109224
100	0.1709989	0.3302780	0.0194060	0.0374515	0.0042482	0.0081737

Tablo 4.31 ve Tablo 4.32' de, farklı zaman değerleri ve mesh uzunlukları kullanılarak hareketli sınırın yeri ve hızı için VSG, BIM ve IMM üzerine kurulu sonlu fark yöntemlerinden elde edilen nümerik çözümler [8, 55] ve sonlu eleman yöntemi (BIM-SEY) kullanılarak oluşturulan nümerik çözümler karşılaştırıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar diğer nümerik sonuçlarla uyumlu olup birçok noktada tam çözüme sonlu fark yöntemleri kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerden daha yakındır. Ayrıca sonuçlardan görüldüğü üzere zaman değerleri arttıkça hareketli sınırın hızı azalacaktır. Bu da büyük zaman değerlerinde hareketli sınırın daha yavaş ilerleyeceği anlamına gelir. Tablolardan görüldüğü üzere sıcaklık dağılımında olduğu gibi bölüntü sayısı arttıkça yani mesh uzunluğu küçüldükçe hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözüme yaklaşmaktadır.

Tablo 4.31: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınır Hızı $\dot{s}(t)$			
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
0.2	BIM-SEY	1.00012647	1.00002826	1.00000353	0.99999732
	IMM-SFY [8]	1.00029082	1.00007691	1.00001972	1.00000499
0.3	BIM-SEY	1.00007283	1.00001636	1.00000162	0.99999786
	IMM-SFY [8]	1.00035833	1.00010371	1.00002760	1.00000710
0.4	BIM-SEY	0.99995899	0.99998929	0.99999544	0.99999681
	IMM-SFY [8]	1.00048900	1.00015412	1.00004235	1.00001106
0.5	BIM-SEY	0.99979226	0.99994930	0.99998591	0.99999474
	IMM-SFY [8]	1.00073290	1.00024233	1.00006783	1.00001786
	VSG-SFY [55]	0.99986499	0.99997042	0.99999304	0.99999831
	BIM-SFY [55]	0.99976347	0.99994376	0.99998630	0.99999662
		Tam Çözüm $\dot{s}(t_f) = 1.0$			

Tablo 4.32: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam Çözüm
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.2	BIM-SEY	0.20001305	0.20000387	0.20000156	0.20000099	0.2
	IMM-SFY [8]	0.20002511	0.20000646	0.20000164	0.20000041	
	VSG-SFY [55]	0.20005774	0.20001448	0.20000362	0.20000091	
	BIM-SFY [55]	0.19985926	0.19996478	0.19999119	0.19999780	
0.3	BIM-SEY	0.30002437	0.30000705	0.30000267	0.30000157	0.3
	IMM-SFY [8]	0.30005728	0.30001536	0.30000396	0.30000101	
	VSG-SFY [55]	0.30022646	0.30005682	0.30001422	0.30000356	
	BIM-SFY [55]	0.29979494	0.29994872	0.29998718	0.29999680	
0.4	BIM-SEY	0.40002700	0.40000802	0.40000313	0.40000189	0.4
	IMM-SFY [8]	0.40009891	0.40002799	0.40000739	0.40000189	
	VSG-SFY [55]	0.40039488	0.40009928	0.40002487	0.40000622	
	BIM-SFY [55]	0.39965955	0.39991493	0.39997875	0.39999469	
0.5	BIM-SEY	0.50001543	0.50000550	0.50000267	0.50000192	0.5
	IMM-SFY [8]	0.50015896	0.50004745	0.50001279	0.50000331	
	VSG-SFY [55]	0.50026461	0.50006726	0.50001693	0.50000425	
	BIM-SFY [55]	0.49916879	0.49979212	0.49994807	0.49998702	

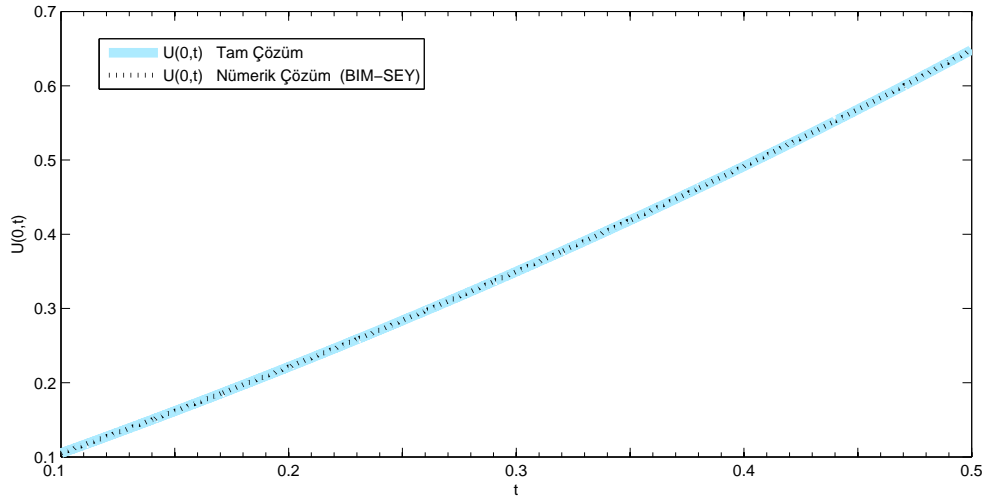
Tablo 4.33' de $t_f = 0.5$ zamanında farklı eleman sayıları için SEY kullanılarak elde edilen $U(0, t)$ yüzey sıcaklığı, [8, 55] referanslarında sonlu fark yöntemleriyle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Problem 6 için kübik B-spline SEY ile elde edilen $U(0, t)$ başlangıç şartı ve tam çözüm Şekil 4.1' de aynı grafikte verildi.

Grafikten de görüldüğü üzere sabit sınırdaki üstel artışa sahip bu problemin yüzey sıcaklığı da zamana bağlı olarak artacaktır.

Tablo 4.33: Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

Yöntem	Nümerik Sonuçlar $U(0, t)$			
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
BIM-SEY	0.649192	0.648842	0.648752	0.648730
IMM-SFY [8]	0.647885	0.648551	0.648683	0.648712
VSG-SFY [55]	0.650614	0.649198	0.648841	0.648751
BIM-SFY [55]	0.649102	0.648820	0.648746	0.648728
Tam Çözüm : 0.648721				

Şekil 4.1. BIM-SEY : Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.



5. ISOTHERM MIGRATION METODU (IMM)

Isotherm migration metodu birbirinden bağımsız olarak ilk defa Dix ve Cizek [29] ve Chernousko [64] tarafından önerilmiş daha sonra Crank [27, 65] ve Turland [66, 67] tarafından iki boyutlu uzaylara genişletilmiştir. Crank ve Phahle [68], Durack ve Wendroff [69], Wood [62, 70, 71], Crank ve Öziş [72], Kutluay ve Esen [8] isotherm migration metodunu hareketli sınır değer problemlerine etkili bir şekilde uygulayarak Stefan problemlerinin nümerik çözümlerine ulaşmışlardır.

Bu yöntem U (sıcaklık) bağımlı değişkeni ile x (konum) bağımsız değişkeninin yer değiştirmesi mantığına dayanır. Böylece bir boyutlu Stefan problemlerinin çözümü yapılırken $U(x, t)$ yerine $x(U, t)$ çözümleri aranır ve t zamanında izoterm (eşısıllı) U nun yeri belirlenir. Isotherm migration metodu, faz sınırının kendisi bir izoterm eğrisi olduğu için, faz değişimi içeren erime ve donma problemlerine etkili bir şekilde uygulanır. Aslında sınırın sabitlemesi temeline dayanan bu yöntemde $0 \leq U \leq 1$ sabit aralığı üzerinde x değerleri hesaplanır. x , bağımlı değişkeni U ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olduğundan klasik kısmi türev bağıntılarından

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^{-1} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^{-3} \frac{\partial^2 x}{\partial U^2} \quad (5.2)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $dU = 0$ eşitliğinden dolayı

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial U} \quad (5.3)$$

veya

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^{-1} \quad (5.4)$$

dir. Burada $\partial x/\partial t$ ifadesi x in t zamanında U değişkenine göre izoterm yer değişimlerini ifade etmektedir. Elde edilen bu ifadeler her bir problem için ısı iletim denkleminde yerine yazılıp, ilgili sınır şartlarına göre ele alınan problemler nümerik olarak çözülecektir.

5.1 Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi

Bu kısımda, isotherm migration yöntemi yardımıyla dört problem için nümerik çözümler elde edildi. Isotherm migration metodunun uygulamasında diğer yöntemlerden farklı olarak bazı problemler için uygun bir dönüşüm kullanılması gerekir. Bu yüzden her bir problemin sonlu eleman şeması ayrı ayrı incelendi. İzoterm yerleri, hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırılıp L_2 , L_∞ ve yüzdelik bağıl hata normları verildi.

5.2 Nümerik Çözümler

5.2.1 Problem 1

Problem 1, (2.1) ısı denklemi (3.17)-(3.20) başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte ele alınsın. Bu problem için $U_0(t) = 1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$ ve $Ste = 1$ değerleri kullanılacaktır. (5.2) ve (5.4) eşitlikleriyle verilen ifadelerin (2.1) ısı iletim denkleminde yerine yazılmasıyla $\alpha = 1$ için

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^{-2} \frac{\partial^2 x}{\partial U^2}, \quad 0 < U < 1, \quad t > 0 \quad (5.5)$$

denklemini

$$x(0, t) = s(t), \quad x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.6)$$

sınır şartlarına bağlı olarak elde edilir. (3.19) eşitliğiyle verilen Stefan koşulunda (5.1) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\frac{ds}{dt} = - \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^{-1}, \quad U = 1, \quad t > 0 \quad (5.7)$$

ifadesi (3.20) başlangıç şartına bağlı elde edilir. Bu model problemin tam çözümü daha önce (2.3) ve (2.4) eşitlikleriyle verilmiş olup U bağımlı değişkeni ile x bağımsız değişkeninin yer değiştirmesiyle

$$\begin{aligned} x(U, t) &= 2\sqrt{t} \operatorname{erf}^{-1}((1 - U) \operatorname{erf}(\lambda)) \quad 0 \leq U \leq 1, \quad t > 0 \\ s(t) &= 2\lambda\sqrt{t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada erime/donma parametresi olarak bilinen λ , (2.5) eşitliğiyle verilen denklemin köküdür.

Problemin kübik B-spline baz fonksiyonları üzerine kurulu sonlu eleman yöntemi ile çözümü yapılırken öncelikle (5.5) eşitliğiyle verilen denklemde

$$x_N(U, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(U)$$

yaklaşık çözümü için (3.8) eşitliğinde x ve U nun rolleri değiştirilerek oluşturulan

$$\begin{aligned} x_N(U_m, t) &= x_N = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ x'_N(U_m, t) &= x'_N = \frac{3}{\Delta U} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) \\ x''_N(U_m, t) &= x''_N = \frac{6}{(\Delta U)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

yaklaşımları yerine yazılır ve

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} = \frac{6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})}{9(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})^2}$$

eşitliği elde edilir. Burada sırasıyla (3.10) ve (3.11) eşitlikleriyle verilen Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımı kullanılırsa $m = 0, 1, \dots, N$ için (3.12) sonlu eleman şeması

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= 1 - 3Z(m) & \alpha_{m4} &= 1 + 3Z(m) \\ \alpha_{m2} &= 4 + 6Z(m) & \alpha_{m5} &= 4 - 6Z(m) \\ \alpha_{m3} &= 1 - 3Z(m) & \alpha_{m6} &= 1 + 3Z(m) \end{aligned} \quad (5.9)$$

katsayılarına bağlı olarak elde edilir. $Z(m) = \frac{\Delta t}{9(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n)^2}$ lineer olmayan terim olup denklem sistemi çözülürken, hayali parametreleri bulunduran $Z(0)$ ve $Z(N)$ ayrıca hesaplanacaktır. (3.12) eşitliğiyle verilen denklem sistemi $N + 1$ denklem $N + 3$ bilinmeyenden oluşur. Denklem sisteminin çözülebilir olması için sınır koşulları kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için ortaya çıkacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri denklem sisteminden yok edilerek $N + 1$ satırlı $N + 1$ bilinmeyenli $A\delta^{n+1} = B\delta^n + r$ denklem sistemi elde edilir. Burada A ve B matrisleri (3.15)' de verilen $(N+1) \times (N+1)$ tipinde üçlü bant matrisleri, r ise sınır koşullarının uygulamasından ortaya çıkan $N + 1$ satırlı bir sütun vektörüdür. İterasyona başlamak için öncelikle δ^0 başlangıç vektörü belirlenmelidir. δ^0 başlangıç vektörü,

$$x_N(U, t_0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0(t_0) \phi_m(U)$$

yaklaşımı için daha önce variable space grid kullanılarak oluşturulan SEY' de $U_N(x, t_0)$ için verilen şartları sağlamalıdır. Bu problem için δ^0 başlangıç vektörü (3.16) sisteminde x ve U ' nun rolleri değiştirilerek oluşturulan x'_0 ve x'_N türevlerinin sağladığı başlangıç sistemi çözülerek elde edilebilir.

$m = 0$ ve $m = N$ için oluşacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri (5.6) ifadesinde verilen sınır koşulları kullanılarak

$$\delta_{-1} = s(t) - 4\delta_0 - \delta_1 \quad (5.10)$$

$$\delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (5.11)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerin (3.12) sonlu eleman şemasında yerine yazılmasıyla $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$(\alpha_{02} - 4\alpha_{01})\delta_0^{n+1} + (\alpha_{03} - \alpha_{01})\delta_1^{n+1} = (\alpha_{04} - \alpha_{01})s(t) + (\alpha_{05} - 4\alpha_{04})\delta_0^n + (\alpha_{06} - \alpha_{04})\delta_1^n$$

$m = 1(1)N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

$m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n$$

olacaktır. Burada $m = 0$ ve $m = N$ için oluşacak $Z(0)$ ve $Z(N)$ terimleri de δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametrelerini bulundurur. (5.10) ve (5.11) eşitlikleri kullanılarak

$$Z(0) = \frac{\Delta t}{9(s(t) - 4\delta_0^n - 2\delta_1^n)^2}$$

$$Z(N) = \frac{\Delta t}{9(2\delta_{N-1}^n + 4\delta_N^n)^2}$$

elde edilir. Ayrıca hareketli sınırının yerini belirlemek için (5.7) ısı denge eşitliğinde $\frac{ds}{dt}$ türevi yerine (3.23) ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial x}{\partial U}$ türevi yerine ise

$$\left. \frac{\partial x}{\partial U} \right|_{U=1} = \frac{-3x_0 + 4x_1 - x_2}{2\Delta U} + O(\Delta U)^2$$

üç nokta ileri fark yaklaşımı yazılarak hareketli sınırnın yeri s^{n+1} , her bir zaman adımında

$$s^{n+1} = s^n - \frac{2(\Delta U)(\Delta t)}{-3x_0^n + 4x_1^n - x_2^n}, \quad n \geq 0$$

iteratif ifadesi ve

$$s^0 = 0$$

başlangıç şartına bağlı olarak hesaplanır.

Isotherm migration metodunda nümerik hesaplamalar boyunca $x_m^n \sim x(U_m, t_n)$ sıcaklık dağılımı $U_m = m\Delta U$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplanmış olup t_0 başlangıç zamanı olarak alınmıştır. Problem 1' in nümerik çözümünde $t_f = 1.0$ zamanında yapılan nümerik çözümler $t_0 = 0.5$ zamanından başlatıldı. Sonlu farklar yönteminde belirli bir kararlılık kriterine göre seçilen Δt zaman adımı $\Delta t = 0.00001$ değeri seçildi.

Tablo 5.1' de $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N bölüntü değerlerinde sunulan yöntemle elde edilen izoterm yerlerinin nümerik ve tam çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan görüldüğü üzere bölüntü sayıları arttıkça nümerik çözümler tam çözüme yaklaşmaktadır ve L_2 , L_∞ hata normları giderek küçülmektedir.

Tablo 5.1: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i> U	Nümerik Çözüm $x(U, t)$				Tam
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Çözüm
0	1.241720	1.240588	1.240248	1.240154	1.240125
0.1	1.087105	1.086416	1.086198	1.086136	1.086118
0.2	0.944651	0.944228	0.944086	0.944044	0.944033
0.3	0.811288	0.811030	0.810936	0.810908	0.810901
0.4	0.684842	0.684687	0.684626	0.684607	0.684602
0.5	0.563693	0.563604	0.563563	0.563550	0.563548
0.6	0.446578	0.446529	0.446504	0.446495	0.446493
0.7	0.332472	0.332447	0.332431	0.332426	0.332425
0.8	0.220507	0.220496	0.220486	0.220483	0.220483
0.9	0.109917	0.109913	0.109909	0.109907	0.109907
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$	0.6433114	0.1732848	0.0438177	0.0092354	
$L_\infty \times 10^3$	1.5949612	0.4580690	0.1180841	0.0271377	

Tablo 5.2' de farklı zaman adımı ve bölüntü sayıları için elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırılması verildi. Bölüntü sayısının küçük değerlerinde zaman adımını küçültmenin sonuçları iyileştirmediği gözlemlense de bölüntü sayısının büyük değerleri için zaman adımını küçültmenin sonuçları iyileştirdiği tablodan açıkça görülmektedir. Örneğin $N = 10, 20$ ve 40 için zaman adımı küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma görülmezken $N = 80$ ve 100 için zaman adımı küçüldükçe hata normlarının kayda değer ölçüde azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.2: Problem 1' in farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.3990702	1.1065607	0.6190547	1.5506153	0.6433114	1.5949612
20	0.1393516	0.1944573	0.1499687	0.4139615	0.1732848	0.4580690
40	0.2328064	0.3707233	0.0225657	0.0739766	0.0438177	0.1180841
80	0.2608267	0.4644917	0.0163680	0.0261951	0.0092354	0.0271377
100	0.2641639	0.4772471	0.0199199	0.0327757	0.0051905	0.0166312

Tablo 5.3 ve Tablo 5.4' te $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı bölüntü sayılarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler [48] referansında sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Yüzdelerlik bağıl hatalarıyla birlikte tablolarda verilen sonuçlara bakıldığında artan bölüntü sayıları için elde edilen nümerik çözümlerin gittikçe tam çözüme yaklaştığı bununla birlikte yüzdelerlik bağıl hata normlarının da azaldığı görülmektedir. Ayrıca sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümlerin [48] referansında verilen nümerik çözümlerden daha doğru nümerik sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 5.3: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının yerinin yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
IMM-SEY	1.241720	1.240588	1.240248	1.240154
Hata %	0.128616	0.037335	0.009918	0.002338
IMM-SFY [48]	1.242759	1.240855	1.240318	1.240184
Hata %	0.2124	0.0589	0.0156	0.0047
Tam Çözüm	$s(t) = 1.240125$			

Tablo 5.4: Problem 1' in $\Delta t = 0.00001$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için hareketli sınırının hızının yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte [48] ile karşılaştırılması.

Yöntem	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
IMM-SEY	0.622292	0.620720	0.620244	0.620111
Hata %	0.359480	0.105957	0.029191	0.007741
IMM-SFY [48]	0.623453	0.621005	0.620311	0.620145
Hata %	0.5467	0.1519	0.0400	0.0312
Tam Çözüm	$\dot{s}(t) = 0.620063$			

5.2.2 Problem 4

Bu problemde (2.1) ile verilen ısı denklemi (3.17)-(3.20) sınır ve başlangıç koşullarıyla birlikte ele alındı. $U_0(t) = e^t - 1$, $U_s(t) = 0$, $S_0 = 0$ değerleri kullanıldı. Problemin sabit sınırı zamana bağlı değiştiğinden isotherm migration metodu doğrudan uygulanamaz. Bu yüzden problemi metoda uygun hale getirmek için Neumann sınır koşuluna sahip Stefan probleminin nümerik çözümünde Esen ve Kutluay [8], Wood

[62] tarafından kullanılan

$$V(x, t) = 1 - \frac{U(x, t)}{U(0, t)}, \quad t > 0 \quad (5.12)$$

dönüşümü kullanılır. (5.12) dönüşümü yardımıyla (2.1) ile verilen ısı denkleminde $\alpha = 1$ alınarak

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\dot{U}_0(1 - V)}{U_0}, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < 1 \quad (5.13)$$

bulunur. (3.17)-(3.20) ile verilen sınır ve başlangıç koşulları da $Ste = 1$ için

$$V(0, t) = 0, \quad V(s(t), t) = 1, \quad t > 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{ds}{dt} = U_0 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad x = s(t) \quad t > 0 \quad (5.15)$$

$$s(0) = 0 \quad (5.16)$$

şeklinde elde edilir. (2.6) ve (2.7) eşitlikleriyle verilen tam çözümü ise

$$V(x, t) = \frac{\exp(t) - \exp(t - x)}{\exp(t) - 1}, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad 0 < t < 1 \quad (5.17)$$

$$s(t) = t, \quad t \geq 0 \quad (5.18)$$

formuna dönüşür. Burada $U_0 = U(0, t)$ ve $\dot{U}_0 = \frac{dU(0, t)}{dt}$ dir. x bağımsız değişkeni ve V bağımlı değişkeninin rolleri değiştirmesi mantığına dayanan isotherm migration metodu (5.13)-(5.16) problemine uygulandığında, (5.2) ve (5.4) kısmi türevleri (5.13) denkleminde yerine yazılarak,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-2} \frac{\partial^2 x}{\partial V^2} - \frac{\dot{U}_0(1 - V)}{U_0} \frac{\partial x}{\partial V}, \quad 0 < V < 1, \quad 0 < t < 1 \quad (5.19)$$

denklemini

$$\begin{aligned} x(0, t) &= 0, & x(1, t) &= s(t), & t > 0 \\ \frac{ds}{dt} &= U_0 \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-1}, & V &= 1 & t > 0 \\ s(0) &= 0 \end{aligned}$$

sınır ve başlangıç şartlarına bağlı olarak elde edilir. (5.17) ve (5.18) tam çözümü ise V bağımlı değişkeni ile x bağımsız değişkeninin yer değiştirmesiyle

$$\begin{aligned} x(V, t) &= t - \ln(\exp(t)(1 - V) + V), & 0 \leq V \leq 1, & 0 < t < 1 \\ s(t) &= t, & t &\geq 0 \end{aligned}$$

formunda elde edilir. Problemin kübik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla sonlu eleman yöntemi ile çözümü yapılırken öncelikle (5.19) ile verilen denklemde

$$x_N(V, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(V)$$

yaklaşık çözümü için (3.8) eşitliğinde x ve V değişkenlerinin rolleri değiştirilerek oluşturulan

$$\begin{aligned} x_N(V_m, t) &= x_N = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ x'_N(V_m, t) &= x'_N = \frac{3}{\Delta V} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) \\ x''_N(V_m, t) &= x''_N = \frac{6}{(\Delta V)^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \tag{5.20}$$

yaklaşımları yerine yazılırsa

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} = \frac{6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})}{9(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})^2} - \frac{\dot{U}_0(1 - V)}{U_0} \frac{3}{\Delta V} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})$$

elde edilir. Burada sırasıyla δ ve $\dot{\delta}$ için (3.10) ve (3.11) eşitlikleriyle verilen Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımı kullanılırsa $m = 0, 1, \dots, N$ için sonlu eleman şemasının (3.12) genelleştirilmiş satırı

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= 1 - 3Z(m) - L(m) & \alpha_{m4} &= 1 + 3Z(m) + L(m) \\ \alpha_{m2} &= 4 + 6Z(m) & \alpha_{m5} &= 4 - 6Z(m) \\ \alpha_{m3} &= 1 - 3Z(m) + L(m) & \alpha_{m6} &= 1 + 3Z(m) - L(m) \end{aligned} \quad (5.21)$$

katsayılarıyla birlikte elde edilir. Burada $Z(m) = \frac{\Delta t}{9(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n)^2}$ ve $L(m) = \frac{3\Delta t \dot{U}_0(1-V_m)}{2(\Delta V)U_0}$ dir. Elde edilen denklem sistemi $N + 1$ tane denklem $N + 3$ tane bilinmeyenden oluşur. Denklem sisteminin çözülebilir olması için sınır koşulları kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için ortaya çıkacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri denklem sisteminden yok edilir ve $N + 1$ satırlı $N + 1$ bilinmeyenli $A\delta^{n+1} = B\delta^n + r$ denklem sistemi elde edilir. Burada A ve B matrisleri (3.15) ile verilen $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde üçlü bant matrisleri r ise sınır koşullarına bağlı $N + 1$ satırlı bir sütun vektörüdür. $x_N(V, t)$ yaklaşık çözümündeki δ^n katsayılarını elde etmek için öncelikle δ^0 başlangıç vektörü belirlenmelidir. δ^0 başlangıç vektörü,

$$x_N(V, t_0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0(t_0) \phi_m(V)$$

yaklaşımı U bağımsız değişkeninin yerine V bağımsız değişkeni alınmak üzere problem 1 için verilen başlangıç vektörü ile aynı şartları sağlamalıdır. Dolayısıyla bu problem için $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)^T$ başlangıç vektörü belirlenirken V ' ye göre birinci mertebeden x'_0 ve x'_N türevlerinin sağladığı (3.16) denklem sistemi kullanılır.

$m = 0$ ve $m = N$ için oluşacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri sınır koşulları

kullanılarak

$$\delta_{-1} = -4\delta_0 - \delta_1 \quad (5.22)$$

$$\delta_{N+1} = s(t) - 4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (5.23)$$

formunda elde edilir. Bu eşitliklerinin (3.12) sonlu eleman şemasında yerine yazılmasıyla $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$(\alpha_{02} - 4\alpha_{01})\delta_0^{n+1} + (\alpha_{03} - \alpha_{01})\delta_1^{n+1} = (\alpha_{05} - 4\alpha_{04})\delta_0^n + (\alpha_{06} - \alpha_{04})\delta_1^n$$

$m = 1(1)N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

$m = N$ için

$$(\alpha_{N1} - \alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2} - 4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N6} - \alpha_{N3})s(t) + (\alpha_{N4} - \alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5} - 4\alpha_{N6})\delta_N^n$$

olacaktır. Burada $m = 0$ ve $m = N$ için oluşan satırlarda bulunan $Z(0)$ ve $Z(N)$ terimleri de δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametrelerini içerir. Bu hayali parametreleri yok etmek amacıyla (5.22) ve (5.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$Z(0) = \frac{\Delta t}{9(4\delta_0^n + 2\delta_1^n)^2}$$

$$Z(N) = \frac{\Delta t}{9(s(t) - 2\delta_{N-1}^n - 4\delta_N^n)^2}$$

elde edilir. Ayrıca $s(t)$ hareketli sınırının yerini belirlemek için $\frac{ds}{dt} = U_0 \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^{-1}$ ısı denge eşitliğinde $\frac{ds}{dt}$ türevi yerine (3.22) ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial x}{\partial V}$ türevi yerine ise

$$\left.\frac{\partial x}{\partial V}\right|_{V=1} = \frac{3x_N - 4x_{N-1} + x_{N-2}}{2\Delta V} + O(\Delta V)^2$$

üç nokta geri fark yaklaşımı yazılarak hareketli sınırın yeri s^{n+1} her bir zaman adımında

$$s^{n+1} = s^n + \frac{2(\Delta V)(\Delta t)U_0}{3x_N^n - 4x_{N-1}^n + x_{N-2}^n}, \quad n \geq 0$$

iteratif ifade yardımıyla

$$s^0 = 0$$

başlangıç şartına bağlı olarak hesaplanır.

Bu problem için isotherm migration yöntemi kullanıldıktan sonra oluşturulan SEY' de nümerik hesaplamalar boyunca $x_m^n \sim x(V_m, t_n)$ izoterm yerleri $V_m = m\Delta V$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplandı ve t_0 başlangıç zamanı olarak alındı. $t_f = 1.0$ zamanında yapılan nümerik çözümler $t_0 = 0.02$ zamanından başlatıldı. Δt zaman adımı için $\Delta t = 0.000002$ değeri kullanıldı.

Tablo 5.5' de $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı bölüntü sayılarında sunulan yöntem kullanılarak elde edilen izoterm yerleri ve tam çözümler L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Tablodan görüleceği üzere bölüntü sayısı arttıkça x izoterm yerleri için elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Bununla birlikte L_2 ve L_∞ hata normları da giderek azalmaktadır.

Tablo 5.5: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

İzoterm V	Nümerik yer değiştirmeler				$x(V, t)$ Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.065265	0.065291	0.065297	0.065298	0.065298
0.2	0.135098	0.135148	0.135158	0.135160	0.135160
0.3	0.210187	0.210256	0.210269	0.210271	0.210272
0.4	0.291391	0.291471	0.291484	0.291486	0.291487
0.5	0.379800	0.379876	0.379885	0.379885	0.379886
0.6	0.476827	0.476870	0.476867	0.476864	0.476863
0.7	0.584348	0.584309	0.584279	0.584269	0.584265
0.8	0.704939	0.704722	0.704639	0.704614	0.704606
0.9	0.842278	0.841693	0.841506	0.841453	0.841435
1.0	1.001908	1.000543	1.000146	1.000038	1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.6708183	0.1665730	0.0419376	0.0107252	
$L_\infty \times 10^3$	1.9084603	0.5430812	0.1459755	0.0376318	

Tablo 5.6' da farklı bölüntü sayıları ve zaman adımları için izoterm yerlerinin değişimini görmek amacıyla L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan görüldüğü üzere küçük bölüntü sayılarında ($N = 10, 20$ ve 40) zaman adımını küçültmek L_2 ve L_∞ hata normlarını azaltmasa da büyük bölüntü sayılarında ($N = 80$ ve 100) küçülen zaman adımları için L_2 ve L_∞ hata normları ciddi ölçüde azalmaktadır.

Tablo 5.6: Problem 4' ün farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 1.0$ zamanında izoterm yerlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.5636323	1.6522270	0.6599670	1.8836160	0.6699305	1.9064347
20	0.0785619	0.2784227	0.1563170	0.5176826	0.1657317	0.5410125
40	0.0757201	0.1486631	0.0323606	0.1201593	0.0411411	0.1438774
80	0.1031064	0.2514680	0.0036039	0.0114848	0.0099564	0.0355156
100	0.1080966	0.2713195	0.0041829	0.0067515	0.0061765	0.0219626

Tablo 5.7 ve Tablo 5.8' de $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve artan t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler [14] referansında Savović vd. tarafından nodal integral ve sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle uyumlu olduğu ve zaman arttıkça tam çözümden uzaklaştığı görülmektedir.

Tablo 5.7: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$						Tam Çözüm
	IMM-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	0.100001	0.001000	0.099999	0.001000	0.099999	0.001000	0.1
0.2	0.200013	0.006500	0.199994	0.003000	0.200010	0.005000	0.2
0.3	0.300045	0.015000	0.299979	0.007000	0.300007	0.002333	0.3
0.4	0.400109	0.027250	0.399951	0.012250	0.400001	0.000250	0.4
0.5	0.500216	0.043200	0.499906	0.018800	0.499990	0.002000	0.5
0.6	0.600380	0.063333	0.599840	0.026667	0.599974	0.004333	0.6
0.7	0.700615	0.087857	0.699750	0.035714	0.699952	0.006857	0.7
0.8	0.800936	0.117000	0.799632	0.046000	0.799924	0.009500	0.8
0.9	0.901361	0.151222	0.899484	0.057333	0.899888	0.012444	0.9
1.0	1.001909	0.190900	0.999301	0.069900	0.999844	0.015600	1.0

Tablo 5.8: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $N = 10$ ve farklı t_f değerlerinde hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik sonuçların [14] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$				Tam Çözüm
	IMM-SEY	Hata %	SFY [14]	Hata %	NIM [14]	Hata %	
0.1	1.000054	0.005400	0.999976	0.002400	1.000134	0.013400	
0.2	1.000203	0.020300	0.999906	0.009400	1.000033	0.003300	
0.3	1.000461	0.046100	0.999793	0.020700	0.999961	0.003900	
0.4	1.000834	0.083400	0.999641	0.035900	0.999916	0.008400	
0.5	1.001332	0.133200	0.999451	0.054900	0.999869	0.013100	1.0
0.6	1.001967	0.196700	0.999226	0.077400	0.999814	0.018600	
0.7	1.002751	0.275100	0.998966	0.103400	0.999751	0.024900	
0.8	1.003701	0.370100	0.998674	0.132600	0.999680	0.032000	
0.9	1.004831	0.483100	0.998349	0.165100	0.999602	0.039800	
1.0	1.006157	0.615700	0.997994	0.200600	0.999517	0.048300	

Sunulan yöntemin programlama aşamasında küçük bir değişiklik yapılarak eleman sayısı arttırılıp hareketli sınırın hızı ve yeri için istenilen doğrulukta nümerik sonuçlar elde edilebilir. Tablo 5.9' da $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı bölüntü sayılarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hatalarıyla birlikte verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere giderek yaklaştığı ve yüzdelik bağıl hataların küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 5.9: Problem 4' ün $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 1.0$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri, hızı ve yüzdelik bağıl hataları.

N	IMM-SEY	Hata %	IMM-SEY	Hata %
10	1.001909	0.1909	1.006157	0.6157
20	1.000543	0.0543	1.001846	0.1846
40	1.000146	0.0146	1.000513	0.0513
80	1.000038	0.0038	1.000136	0.0136
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 1.0$	

5.2.3 Problem 5 (SFY)

Bu problemde (2.1) ile verilen ısı denklemi (3.17)-(3.20) sınır ve başlangıç koşullarıyla birlikte ele alındı. $U_0(t) = e^{\alpha t}$, $U_s(t) = 1$, $S_0 = 0$, $Ste = \alpha$ değerleri kullanıldı. Problemde hareketli sınır üzerindeki sınır şartı sıfırdan farklı olduğundan Problem 4 için kullanılan (5.12) dönüşümü ile sınırlar sabitlenemez. Dolayısıyla problemi IMM kullanılabilir hale getirmek için

$$V(x, t) = \frac{U(x, t) - U(0, t)}{1 - U(0, t)}, \quad t > 0 \quad (5.24)$$

dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüm altında (2.1) ile verilen ısı denklemi

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{(1 - V)\dot{U}_0}{(U_0 - 1)}, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < 1 \quad (5.25)$$

formunda, (3.17)-(3.20) sınır ve başlangıç koşulları ise

$$V(0, t) = 0, \quad V(s(t), t) = 1, \quad t > 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{ds}{dt} = \alpha(U_0 - 1) \frac{\partial V}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad t > 0 \quad (5.27)$$

$$s(0) = 0 \quad (5.28)$$

şeklinde ifade edilir. (2.8) ve (2.9) eşitlikleriyle verilen tam çözüm ise

$$V(x, t) = \frac{\exp(\alpha t - x) - \exp(\alpha t)}{1 - \exp(\alpha t)}, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad 0 < t < 1 \quad (5.29)$$

$$s(t) = \alpha t, \quad t \geq 0 \quad (5.30)$$

olur. Burada $U_0 = U(0, t)$ ve $\dot{U}_0 = \frac{\partial U(0, t)}{\partial t}$ dir. x bağımsız değişkeni ve V bağımlı değişkeninin rolleri değiştirmesi mantığına dayanan IMM (5.25)-(5.28) problemine uygulandığında, (5.2) ve (5.4) kısmi türevleri (5.25) denkleminde yerine yazılarak,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-2} \frac{\partial^2 x}{\partial V^2} - \frac{(1 - V)\dot{U}_0}{(U_0 - 1)} \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-1}, \quad 0 < V < 1, \quad 0 < t < 1 \quad (5.31)$$

problemi

$$x(0, t) = 0, \quad x(1, t) = s(t), \quad t > 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{ds}{dt} = \alpha(U_0 - 1) \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-1}, \quad V = 1, \quad t > 0 \quad (5.33)$$

sınır koşulları ve

$$s(0) = 0 \quad (5.34)$$

başlangıç koşuluna bağlı elde edilir. (5.29)-(5.30) tam çözümünü ise x bağımlı değişken, V bağımsız değişken olmak üzere

$$x(V, t) = \alpha t - \ln(\exp(\alpha t)(1 - V) + V), \quad 0 \leq V \leq 1, \quad 0 < t < 1 \quad (5.35)$$

$$s(t) = \alpha t, \quad t \geq 0 \quad (5.36)$$

formunda elde edilir. Bu tam çözüm, SFY ve SEY kullanılarak oluşturulan nümerik işlemleri başlatmak ve nümerik sonuçları karşılaştırmak için kullanılır.

Isotherm migration metodu uygulandıktan sonra (5.31)-(5.32) eşitlikleriyle ifade edilen problemin nümerik çözümleri için açık sonlu fark gösterimleri kullanılabilir. Bu amaçla $\partial x / \partial V$ ve $\partial^2 x / \partial V^2$ türevleri için (V_m, t_n) mesh noktalarında tanımlanan

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial V} &= \frac{x_{m+1}^n - x_{m-1}^n}{2\Delta V} + O(\Delta V)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial V^2} &= \frac{x_{m+1}^n - 2x_m^n + x_{m-1}^n}{(\Delta V)^2} + O(\Delta V)^2 \end{aligned}$$

merkezi fark yaklaşımları, $\partial x / \partial t$ türevi için

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_m^{n+1} - x_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

ileri fark yaklaşımı kullanılırsa (5.31)-(5.32) ile verilen problemin açık sonlu fark gösterimi

$$\begin{aligned} x_m^{n+1} &= x_m^n + 4(\Delta t)\alpha \frac{(x_{m+1}^n - 2x_m^n + x_{m-1}^n)}{(x_{m+1}^n - x_{m-1}^n)^2} - \frac{(1 - V)(\Delta t)\dot{U}_0^m(x_{m+1}^n - x_{m-1}^n)}{2(U_0^n - 1)\Delta V} \\ x_0^n &= 0, \quad n = 0, 1, \dots \\ x_N^n &= s^n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $h(\equiv \Delta V)$ mesh uzunluğudur. Ayrıca $s(t)$ hareketli sınırının yerini belirlemek için $\frac{ds}{dt} = \alpha(U_0 - 1) \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^{-1}$ ısı denge eşitliğinde ds/dt türevi yerine (3.23) ileri fark yaklaşımı, $\partial x / \partial V$ türevi yerine

$$\left. \frac{\partial x}{\partial V} \right|_{V=1} = \frac{3x_N - 4x_{N-1} + x_{N-2}}{2\Delta V} + O(\Delta V)^2$$

üç nokta geri fark yaklaşımı yazılarak hareketli sınırın yeri s^{n+1} her bir zaman adımında

$$s^{n+1} = s^n + \frac{2(\Delta V)(\Delta t)\alpha(U_0 - 1)}{3x_N^n - 4x_{N-1}^n + x_{N-2}^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

iteratif ifade yardımıyla

$$s^0 = 0$$

başlangıç şartına bağlı olarak hesaplanır. Bu problemde nümerik hesaplamalar boyunca $x_m^n \sim x(V_m, t_n)$ sıcaklık dağılımı $V_m = m\Delta V$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplandı ve t_0 başlangıç zamanı olarak alındı. Bu problemde nümerik hesaplamalar $t_0 = 0.01$ zamanından başlatıldı.

Yukarıda verilen sonlu fark şeması non-lineer bir terim içerdiğinden bilinen kararlılık analizi yöntemleriyle kararlılık analizi yapılamaz. Ancak Dix ve Cizek' in “ x_m^n ’ nin değerindeki artış x_m^{n+1} ’ in değerinde bir artışa sebep olmalıdır” önerisi dikkate alınarak x_m^n ’ in katsayısının pozitif olacağı söylenebilir [10, 29]. Böylece kararlılık için gerek ve yeter şart

$$\Delta t \leq \min_{1 \leq m \leq N-1} \frac{1}{8\alpha} (x_{m+1}^n - x_{m-1}^n)^2$$

elde edilir.

Tablo 5.10 - Tablo 5.12’ de $\alpha = 2$ ve $\Delta t = 0.000001$ için farklı bölüntü sayıları kullanılarak $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında sunulan yöntemle elde edilen izoterm yerleri hesaplandı ve elde edilen nümerik çözümün tam çözüme yakınlığını göstermek amacıyla L_2 ve L_∞ hata normları ilgili tablolarda verildi. Tablolardan görüldüğü üzere bölüntü sayısı arttıkça elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme gittikçe yaklaştığı

L_2 ve L_∞ hata normlarının da gittikçe küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca küçük zaman değerlerinde verilen L_2 ve L_∞ hata normlarının büyük zaman değerlerinde verilen L_2 ve L_∞ hata normlarından küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 5.10: SFY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.1$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam	
	V	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Çözüm
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.018294	0.018293	0.018293	0.018293	0.018293	0.018293
0.2	0.036929	0.036928	0.036927	0.036927	0.036927	0.036927
0.3	0.055918	0.055916	0.055915	0.055915	0.055915	0.055915
0.4	0.075275	0.075272	0.075271	0.075271	0.075271	0.075271
0.5	0.095013	0.095010	0.095009	0.095008	0.095008	0.095008
0.6	0.115150	0.115145	0.115144	0.115143	0.115143	0.115143
0.7	0.135700	0.135694	0.135692	0.135692	0.135692	0.135692
0.8	0.156682	0.156674	0.156672	0.156672	0.156672	0.156672
0.9	0.178113	0.178104	0.178102	0.178101	0.178101	0.178101
1.0	0.200014	0.200004	0.200001	0.200000	0.200000	0.2
$L_2 \times 10^3$	0.0076102	0.0018526	0.0004567	0.0001134		
$L_\infty \times 10^3$	0.0138010	0.0035180	0.0008883	0.0002232		

Tablo 5.11: SFY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.3$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
V					
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.046173	0.046170	0.046169	0.046168	0.046168
0.2	0.094585	0.094576	0.094573	0.094572	0.094572
0.3	0.145463	0.145445	0.145440	0.145438	0.145438
0.4	0.199074	0.199043	0.199034	0.199032	0.199031
0.5	0.255727	0.255678	0.255664	0.255660	0.255659
0.6	0.315789	0.315715	0.315695	0.315690	0.315688
0.7	0.379698	0.379591	0.379562	0.379554	0.379552
0.8	0.447983	0.447830	0.447788	0.447777	0.447774
0.9	0.521287	0.521072	0.521013	0.520998	0.520993
1.0	0.600411	0.600110	0.600028	0.600007	0.6
$L_2 \times 10^3$	0.1837822	0.0457810	0.0113602	0.0028368	
$L_\infty \times 10^3$	0.4107968	0.1096645	0.0284022	0.0072324	

Tablo 5.12: SFY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2, L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	V	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.065287	0.065297	0.065298	0.065298	0.065298
0.2	0.135145	0.135159	0.135160	0.135160	0.135160
0.3	0.210265	0.210275	0.210273	0.210272	0.210272
0.4	0.291507	0.291499	0.291491	0.291488	0.291487
0.5	0.379961	0.379915	0.379894	0.379888	0.379885
0.6	0.477041	0.476922	0.476880	0.476867	0.476863
0.7	0.584620	0.584375	0.584295	0.584273	0.584265
0.8	0.705267	0.704801	0.704659	0.704619	0.704605
0.9	0.842629	0.841778	0.841528	0.841459	0.841435
1.0	1.002151	1.000607	1.000163	1.000042	1.0
$L_2 \times 10^3$	0.8156900	0.2057415	0.0519690	0.0130876	
$L_\infty \times 10^3$	2.1509952	0.6071469	0.1626798	0.0422220	

Tablo 5.13 ve Tablo 5.14' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözümle ve [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan görüldüğü üzere hareketli sınırın yeri ve hızı için tam çözümle ve diğer nümerik çözümlerle uyumlu sonuçlar elde edilmektedir.

Tablo 5.13: SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri		$s(t)$		Tam Çözüm
	IMM-SFY	Hata %	VSG-SFY [12]	Hata %	
0.01	0.02	0.0	0.02	0.0	0.02
0.02	0.040001	0.002500	0.0399999484	0.000129	0.04
0.05	0.100002	0.002000	0.0999991859	0.000814	0.1
0.1	0.200014	0.007000	0.1999936232	0.003188	0.2
0.2	0.400115	0.028750	0.3999509301	0.012267	0.4
0.3	0.600411	0.068500	0.5998399761	0.026671	0.6
0.4	0.801033	0.129125	0.7996321205	0.045985	0.8
0.5	1.002151	0.215100	0.9993009904	0.069901	1.0

Tablo 5.14: SFY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Hızı		$\dot{s}(t)$		Tam Çözüm
	IMM-SFY	Hata %	VSG-SFY [12]	Hata %	
0.01	2.0	0.0	1.9999977517	0.000112	
0.02	2.000016	0.000800	1.9999920331	0.000398	
0.05	2.000102	0.005100	1.9999514832	0.002426	
0.1	2.000420	0.021000	1.9998113373	0.009433	2.0
0.2	2.001789	0.089450	1.9992818233	0.035909	
0.3	2.004342	0.217100	1.9984515198	0.077424	
0.4	2.008381	0.419050	1.997347122	0.132644	
0.5	2.014307	0.715350	1.9959886398	0.200568	

Tablo 5.15' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için

hareketli sınırnın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı yüzdelik bağıl hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir. Hareketli sınırnın hızı ve yeri için elde edilen nümerik sonuçlar diğer nümerik sonuçlarla ve tam çözümle uyumlu olup diğer problemlerde olduğu gibi mesh uzunluğu ya da zaman adımı küçültülerek hareketli sınırnın hızı ve yeri için istenilen doğrulukta nümerik sonuçlara ulaşılabilir.

Tablo 5.15: SFY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırnın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hataları.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	1.002151	0.2151	2.014307	0.7154
20	1.000607	0.0607	2.004225	0.2113
40	1.000088	0.0088	2.001163	0.0582
80	1.000022	0.0022	2.000307	0.0154
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 2.0$	

5.2.4 Problem 5 (SEY)

Bu problemin kübik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla sonlu eleman yöntemi ile çözümü yapılırken öncelikle

$$x_N(V, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(V)$$

yaklaşık çözümü için (3.8) eşitliğinde x ve V nun rolleri değiştirilerek oluşturulan (3.9) noktasal yaklaşımları (5.31) probleminde yerine yazılır ve $0 < V < 1$ için

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} = \frac{6\alpha(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})}{9(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})^2} - \frac{(1-V)\dot{U}_0}{(U_0-1)} \frac{3}{\Delta V} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1})$$

eşitliği elde edilir. Burada sırasıyla (3.10) ve (3.11) eşitlikleriyle verilen Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımı yapılarak $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= 1 - 3Z(m) - L(m) & \alpha_{m4} &= 1 + 3Z(m) + L(m) \\ \alpha_{m2} &= 4 + 6Z(m) & \alpha_{m5} &= 4 - 6Z(m) \\ \alpha_{m3} &= 1 - 3Z(m) + L(m) & \alpha_{m6} &= 1 + 3Z(m) - L(m) \end{aligned} \quad (5.38)$$

katsayılarına sahip (3.12) genelleştirilmiş satırı elde edilir. Burada $Z(m) = \frac{\alpha \Delta t}{9(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n)^2}$ ve $L(m) = \frac{3(\Delta t)\dot{U}_0(1-V_m)}{2(\Delta V)(U_0-1)}$ dir.

Sınır koşulları kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için oluşacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri denklem sisteminden yok edilerek $N + 1$ satırlı $N + 1$ bilinmeyenli $A\delta^{n+1} = B\delta^n + r$ denklem sistemi elde edilir. Burada A ve B matrisleri (3.15) ile verilen $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde üçlü bant matrisleri, r ise sınır koşullarına bağlı $N + 1$ satırlı bir sütun vektörüdür. $x_N(V, t)$ yaklaşık çözümündeki δ_m^n katsayılarını elde etmek için öncelikle δ^0 başlangıç vektörü belirlenmelidir. δ^0 başlangıç vektörü V ye göre birinci mertebeden x'_0 ve x'_N türevlerinin sağladığı (3.16) denklem sistemi çözümlenerek elde edilir.

Sonlu eleman şemasında $m = 0$ ve $m = N$ için ortaya çıkacak δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametreleri sınır koşulları kullanılarak

$$\delta_{-1} = -4\delta_0 - \delta_1 \quad (5.39)$$

$$\delta_{N+1} = s(t) - 4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (5.40)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerin (3.12) sonlu eleman şemasında yerine yazılmasıyla $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$m = 0$ için

$$(\alpha_{02} - 4\alpha_{01})\delta_0^{n+1} + (\alpha_{03} - \alpha_{01})\delta_1^{n+1} = (\alpha_{05} - 4\alpha_{04})\delta_0^n + (\alpha_{06} - \alpha_{04})\delta_1^n$$

$m = 1(1)N - 1$ için

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m4}\delta_{m-1}^n + \alpha_{m5}\delta_m^n + \alpha_{m6}\delta_{m+1}^n$$

$m = N$ için

$$(\alpha_{N1}-\alpha_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_{N2}-4\alpha_{N3})\delta_N^{n+1} = (\alpha_{N6}-\alpha_{N3})s(t) + (\alpha_{N4}-\alpha_{N6})\delta_{N-1}^n + (\alpha_{N5}-4\alpha_{N6})\delta_N^n$$

olacaktır. Burada $m = 0$ ve $m = N$ için oluşturulan satırlarda bulunan $Z(0)$ ve $Z(N)$ non-lineer terimleri de δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali parametrelerini bulundurur. Bu hayali parametreler (5.39)-(5.40) eşitlikleri kullanılarak yok edilirse $Z(0)$ ve $Z(N)$

$$Z(0) = \frac{\alpha\Delta t}{9(4\delta_0^n + 2\delta_1^n)^2}$$

$$Z(N) = \frac{\alpha\Delta t}{9(s(t) - 2\delta_{N-1}^n - 4\delta_N^n)^2}$$

elde edilir. Hareketli sınırın yerinin belirlemek için kullanılan iteratif ifade ise sonlu fark yönteminde verilen (5.37) ifadesi olacaktır.

Bu problemde nümerik hesaplamalar boyunca $x_m^n \sim x(V_m, t_n)$ izoterm yerleri $V_m = m\Delta V$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ noktalarında hesaplandı ve t_0 başlangıç zamanı olarak alındı. Başlangıç zamanı için $t_0 = 0.01$ değeri kullanıldı.

Tablo 5.16 -Tablo 5.18' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$ ve $N = 10$ için $t_f = 0.1, 0.3$ ve 0.5 zamanlarında izoterm yerleri hesaplandı ve L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Elde edilen nümerik sonuçların sonlu fark yönteminde elde edilen hata normlarına göre daha az hataya sahip olduğu görülmektedir. Tablolardan zaman ilerledikçe izoterm yerleri için elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümden uzaklaştığı açıkça söylenebilir.

Tablo 5.16: SEY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.1$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	V	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.018294	0.018293	0.018293	0.018293	0.018293
0.2	0.036929	0.036928	0.036927	0.036927	0.036927
0.3	0.055918	0.055916	0.055915	0.055915	0.055915
0.4	0.075274	0.075272	0.075271	0.075271	0.075271
0.5	0.095013	0.095009	0.095008	0.095008	0.095008
0.6	0.115149	0.115145	0.115143	0.115143	0.115143
0.7	0.135699	0.135694	0.135692	0.135692	0.135692
0.8	0.156681	0.156674	0.156672	0.156672	0.156672
0.9	0.178112	0.178104	0.178102	0.178101	0.178101
1.0	0.200013	0.200003	0.200001	0.200000	0.2
$L_2 \times 10^3$	0.0070021	0.0015562	0.0002885	0.0000227	
$L_\infty \times 10^3$	0.0131059	0.0031097	0.0006057	0.0000952	

Tablo 5.17: SEY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.3$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	V	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.046168	0.046169	0.046168	0.046168	0.046168
0.2	0.094574	0.094573	0.094572	0.094572	0.094572
0.3	0.145447	0.145441	0.145439	0.145438	0.145438
0.4	0.199051	0.199037	0.199032	0.199031	0.199031
0.5	0.255697	0.255670	0.255662	0.255660	0.255659
0.6	0.315752	0.315706	0.315693	0.315689	0.315688
0.7	0.379656	0.379581	0.379559	0.379553	0.379552
0.8	0.447938	0.447819	0.447785	0.447776	0.447774
0.9	0.521244	0.521061	0.521010	0.520997	0.520993
1.0	0.600380	0.600101	0.600026	0.600006	0.6
$L_2 \times 10^3$	0.1585278	0.0388907	0.0096480	0.0024619	
$L_\infty \times 10^3$	0.3799894	0.1014044	0.0260144	0.0065313	

Tablo 5.18: SEY : Problem 5' in $\alpha = 2$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

<i>izoterm</i>	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	V	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.065265	0.065291	0.065297	0.065298	0.065298
0.2	0.135098	0.135148	0.135158	0.135160	0.135160
0.3	0.210187	0.210256	0.210269	0.210271	0.210272
0.4	0.291391	0.291471	0.291484	0.291486	0.291487
0.5	0.379800	0.379876	0.379885	0.379885	0.379885
0.6	0.476827	0.476870	0.476867	0.476864	0.476863
0.7	0.584348	0.584309	0.584279	0.584269	0.584265
0.8	0.704939	0.704722	0.704639	0.704614	0.704605
0.9	0.842278	0.841692	0.841506	0.841453	0.841435
1.0	1.001908	1.000543	1.000146	1.000038	1.0
$L_2 \times 10^3$	0.6708179	0.1665725	0.0419371	0.0107247	
$L_\infty \times 10^3$	1.9084593	0.5430802	0.1459746	0.0376308	

Tablo 5.19 ve Tablo 5.20' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle ve [12] referansında verilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan görüldüğü üzere hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle ve diğer nümerik çözümlerle uyumludur. Ayrıca sonlu fark yöntemi kullanılarak oluşturulan Tablo 5.13 ve Tablo 5.14 ile karşılaştırıldığında büyük zaman değerlerinde sonlu eleman yöntemi hareketli sınırın hızı ve yeri için daha doğru sonuç vermektedir. Örneğin $t_f = 0.5$ zamanında hareketli sınırın yeri için elde edilen yüzdellik

hata SFY' de 0.215100 iken SEY' de 0.019100 dir. Yine $t_f = 0.5$ zamanında hareketli sınırın hızı için elde edilen yüzdeler hata SFY' de 0.715350 iken SEY' de 0.615650 dir.

Tablo 5.19: SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırının yeri için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				
	IMM-SEY	Hata %	VSG-SFY [12]	Hata %	Tam Çözüm
0.01	0.02	0.0	0.02	0.0	0.02
0.02	0.040001	0.002500	0.0399999484	0.000129	0.04
0.05	0.100003	0.003000	0.0999991859	0.000814	0.1
0.1	0.200015	0.007500	0.1999936232	0.003188	0.2
0.2	0.400111	0.027750	0.3999509301	0.012267	0.4
0.3	0.600382	0.063667	0.5998399761	0.026671	0.6
0.4	0.800938	0.117250	0.7996321205	0.045985	0.8
0.5	1.001910	0.019100	0.9993009904	0.069901	1.0

Tablo 5.20: SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $N = 10$ ve farklı t_f zamanlarında hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümlerin [12] ile karşılaştırılması.

t_f	Hareketli Sınır Hızı		$\dot{s}(t)$		Tam Çözüm
	IMM-SEY	Hata %	VSG-SFY [12]	Hata %	
0.01	2.0	0.0	1.9999977517	0.000112	
0.02	2.000065	0.003250	1.9999920331	0.000398	
0.05	2.000107	0.005350	1.9999514832	0.002426	
0.1	2.000405	0.020250	1.9998113373	0.009433	2.0
0.2	2.001668	0.083400	1.9992818233	0.035909	
0.3	2.003933	0.196650	1.9984515198	0.077424	
0.4	2.007402	0.370100	1.997347122	0.132644	
0.5	2.012313	0.615650	1.9959886398	0.200568	

Tablo 5.21' de $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı bölüntü sayıları için hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı yüzdelik bağıl hataların da gittikçe azaldığı görülmektedir. Ayrıca Tablo 5.15 ile karşılaştırıldığında $N = 10$ ve 20 bölüntü sayıları kullanılarak hareketli sınırın yeri için elde edilen nümerik çözümler SFY' de elde edilen nümerik çözümlerden daha doğrudur. $N = 10, 20, 40$ ve 80 bölüntü sayıları kullanılarak hareketli sınırın hızı için elde edilen nümerik çözümler SFY' de elde edilen nümerik çözümlerden daha doğrudur.

Tablo 5.21: SEY: Problem 5' in $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.000001$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerlerinde hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler ve yüzdelik bağıl hataları.

N	VSG-SEY	Hata %	VSG-SEY	Hata %
10	1.001910	0.1950	2.012313	0.6157
20	1.000545	0.0545	2.003693	0.1847
40	1.000148	0.0148	2.001026	0.0513
80	1.000040	0.0040	2.000272	0.0136
Tam Çözüm	$s(t) = 1.0$		$\dot{s}(t) = 2.0$	

5.2.5 Problem 6

Neumann sınır koşuluna sahip Stefan problemi (2.1) ısı denklemi $\alpha = 1$ alınarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) &= -e^t, \quad t > 0 \\ U(s(t), t) &= 0, \quad t > 0 \\ U(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq s(t)\end{aligned}$$

sınır ve başlangıç koşullarıyla birlikte ele alındı. Bu problem için (5.12) dönüşümü kullanılıp elde edilen denkleme IMM uygulanırsa (5.19) denklemi problem 4 ile aynı sınır koşullarına bağlı olarak elde edilir. Bu problem, problem 4 ile aynı analitik çözüme sahip olup ondan tek farkı, $U(0, t)$ sınır şartı tam olarak bilinmediğinden, sonlu eleman şemasında zamana göre sürekli değişen $U(0, t)$ sınır şartı için bir yaklaşım yapılmasıdır [48].

$x = 0$ noktasında (5.14) sınır koşulunda $V(0, t) = 0$ dır. Dolayısıyla

$\partial V/\partial t = 0$ olacaktır. Böylece (2.1) ısı denklemini kullanılarak ve $V \rightarrow 0$ limiti alınarak her defasında U_0 değerini oluşturmak amacıyla

$$\dot{U}_0 = U_0 \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^{-3} \frac{\partial^2 x}{\partial V^2} \quad (5.41)$$

eşitliği elde edilir. $\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = -U_0 \frac{\partial V}{\partial x}(0, t) = -e^t$ Neumann sınır koşulundan

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\exp(t)}{U_0} \quad (5.42)$$

ifadesine ulaşılır. (5.41) eşitliğinde (5.42) ifadesinin kullanılmasıyla ve $\partial^2 x/\partial V^2$ türevi yerine dört terimli ileri fark yaklaşımı yazılmasıyla

$$\dot{U}_0 \sim \frac{\exp(3t)}{U_0^2} \left(\frac{2x_0 - 5x_1 + 4x_2 - x_3}{(\Delta V)^2} \right)$$

elde edilir. Burada \dot{U}_0 türevi için ileri fark yaklaşımı kullanılarak

$$U_0^{n+1} \sim U_0^n + \frac{\Delta t \exp(3t)}{(U_0^n)^2} \left(\frac{2x_0^n - 5x_1^n + 4x_2^n - x_3^n}{(\Delta V)^2} \right)$$

iteratif ifadesi elde edilir. Bu ifade $x = 0$ sabit sınırı üzerinde farklı zamanlarda yüzey sıcaklığının tahmini değerlerini elde etmede kullanılır.

Problem için nümerik işlemler $t_0 = 0$ noktasındaki süreksizlik nedeniyle $t_0 = 0.1$ başlangıç noktasından başlatıldı. Δt zaman adımı için $\Delta t = 0.000002$ kullanıldı.

$t_f = 0.5$ zamanında $\Delta t = 0.000002$ ve farklı bölüntü sayıları için sunulan yöntem kullanılarak hesaplanan izoterm yerleri L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 5.22' de verildi. Tablodan bölüntü sayısı arttıkça izoterm yerleri için elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı L_2 , L_∞ hata normlarının da gittikçe küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 5.22: Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için izoterm yerleri ve L_2 , L_∞ hata normları.

<i>İzoterm</i> V	Nümerik Çözüm $x(V, t)$				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.040149	0.040143	0.040142	0.040142	0.040142
0.2	0.081972	0.081965	0.081963	0.081963	0.081963
0.3	0.125618	0.125611	0.125610	0.125609	0.125609
0.4	0.171251	0.171249	0.171248	0.171248	0.171248
0.5	0.219064	0.219069	0.219069	0.219070	0.219070
0.6	0.269274	0.269290	0.269293	0.269293	0.269294
0.7	0.322138	0.322168	0.322173	0.322173	0.322175
0.8	0.377952	0.377998	0.378005	0.378007	0.378009
0.9	0.437067	0.437131	0.437141	0.437143	0.437145
1.0	0.499902	0.499983	0.499995	0.499997	0.500000
$L_2 \times 10^3$	0.0458302	0.0078534	0.0021446	0.0011032	
$L_\infty \times 10^3$	0.0977380	0.0167811	0.0046578	0.0026032	

Tablo 5.23' de farklı bölüntü sayıları ve zaman adımları için izoterm yerlerinin değişimini görmek amacıyla L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan görüldüğü üzere küçük zaman adımlarında ($\Delta t = 0.00001$) bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının gittikçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.23: Problem 6' nın farklı N ve Δt değerleri için $t_f = 0.5$ zamanında izoterm yerlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.

N	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0001$		$\Delta t = 0.00001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.5636323	1.6522270	0.6599670	1.8836160	0.6699305	1.9064347
20	0.0785619	0.2784227	0.1563170	0.5176826	0.1657317	0.5410125
40	0.0757201	0.1486631	0.0323606	0.1201593	0.0411411	0.1438774
80	0.1031064	0.2514680	0.0036039	0.0114848	0.0099564	0.0355156
100	0.1080966	0.2713195	0.0041829	0.0067515	0.0061765	0.0219626

Tablo 5.24 ve Tablo 5.25' de, farklı zaman değerleri ve bölüntü sayıları kullanılarak hareketli sınırın yeri ve hızı için sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler [55] ve [8] referanslarında sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan elde edilen nümerik sonuçların tam çözümlerle uyumlu olduğu bölüntü sayısı arttıkça nümerik çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 5.24: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın hızının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınırın Hızı $\dot{s}(t)$			
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
0.2	IMM-SEY	0.99980492	0.99995666	0.99998909	0.99999654
	IMM-SFY[8]	1.00029082	1.00007691	1.00001972	1.00000499
0.3	IMM-SEY	0.99971014	0.99994500	0.99998801	0.99999690
	IMM-SFY[8]	1.00035833	1.00010371	1.00002760	1.00000710
0.4	IMM-SEY	0.99968961	0.99995950	0.99999421	0.99999895
	IMM-SFY[8]	1.00048900	1.00015412	1.00004235	1.00001106
0.5	IMM-SEY	0.99977716	1.00001042	1.00001069	1.00000366
	IMM-SFY[8]	1.00073290	1.00024233	1.00006783	1.00001786
	VSG-SFY[55]	0.99986499	0.99997042	0.99999304	0.99999831
	BIM-SFY[55]	0.99976347	0.99994376	0.99998630	0.99999662
Tam Çözüm, $\dot{s}(t_f) = 1.0$					

Tablo 5.25: Problem 6' nın farklı t_f ve N değerleri için hareketli sınırın yerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t_f	Yöntem	Hareketli Sınırın Yeri $s(t)$				Tam Çözüm
		$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.2	IMM-SEY	0.19998542	0.19999519	0.19999735	0.19999786	0.2
	IMM-SFY [8]	0.20002511	0.20000646	0.20000164	0.20000041	
	VSG-SFY [55]	0.20005774	0.20001448	0.20000362	0.20000091	
	BIM-SFY [55]	0.19985926	0.19996478	0.19999119	0.19999780	
0.3	IMM-SEY	0.29996073	0.29999010	0.29999616	0.29999752	0.3
	IMM-SFY [8]	0.30005728	0.30001536	0.30000396	0.30000101	
	VSG-SFY [55]	0.30022646	0.30005682	0.30001422	0.30000356	
	BIM-SFY [55]	0.29979494	0.29994872	0.29998718	0.29999680	
0.4	IMM-SEY	0.39992994	0.39998506	0.39999519	0.39999729	0.4
	IMM-SFY [8]	0.40009891	0.40002799	0.40000739	0.40000189	
	VSG-SFY [55]	0.40039488	0.40009928	0.40002487	0.40000622	
	BIM-SFY [55]	0.39965955	0.39991493	0.39997875	0.39999469	
0.5	IMM-SEY	0.49990226	0.49998322	0.49999534	0.49999740	0.5
	IMM-SFY [8]	0.50015896	0.50004745	0.50001279	0.50000331	
	VSG-SFY [55]	0.50026461	0.50006726	0.50001693	0.50000425	
	BIM-SFY [55]	0.49916879	0.49979212	0.49994807	0.49998702	

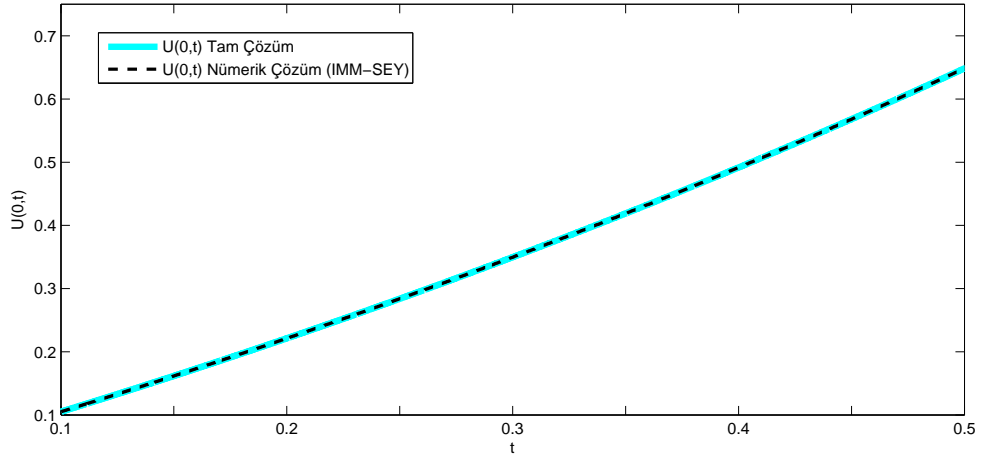
Tablo 5.25' da $t_f = 0.5$ zamanında $\Delta t = 0.000002$ ve farklı bölüntü sayıları için sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen $U(0, t)$ yüzey sıcaklığı, [8] ve [55] referanslarında sonlu fark yöntemleriyle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Tam çözüme oldukça yakın olan nümerik sonuçlar Şekil 5.1' de tam çözümle birlikte

verildi. Grafikte de görüldüğü üzere sabit sınırdaki üstel artışa sahip bu problemin yüzey sıcaklığı da zamana bağlı olarak artacaktır.

Tablo 5.26: Problem 6' nın $\Delta t = 0.000002$, $t_f = 0.5$ ve farklı N değerleri için $U(0, t)$ yüzey sıcaklığının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

Yöntem	Nümerik Sonuçlar $U(0, t)$			
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
IMM-SEY	0.646810	0.648290	0.648619	0.648697
IMM-SFY [8]	0.647885	0.648551	0.648683	0.648712
VSG-SFY [55]	0.650614	0.649198	0.648841	0.648751
BIM-SFY [55]	0.649102	0.648820	0.648746	0.648728
Tam Çözüm : 0.648721				

Şekil 5.1. IMM-SEY : Problem 6 için $0 \leq t \leq 1$ aralığında $U(0, t)$ sıcaklık dağılımı.



6. SONUÇ

Bu tezde, hareketli sınır değer problemi olan altı farklı Stefan problemi başlangıç ve sınır şartları ile birlikte ele alındı. Bu problemler için variable space grid, boundary immobilisation ve isotherm migration metodları uygulandıktan sonra kübik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla oluşturulan kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak nümerik çözümler elde edildi. Variable space grid ve bounday immobilisation yöntemleri altı farklı probleme uygulanırken isotherm migration metodu dört farklı probleme uygulandı. Her bir problemde sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın yeri ve hızı için elde edilen nümerik çözümler tam çözüm ve literatürde mevcut diğer nümerik çözümlerle karşılaştırılarak yüzdellik bağıl hata normu ve L_2 , L_∞ hata normları verildi. Bazı model problemler için tam çözüme en yakın nümerik çözümler elde edilirken bazılarında ise tam çözümle uyumlu nümerik çözümlere ulaşıldı.

Tezde kullanılan yöntemlerin hangisinin daha hassas olduğuna dair fikir belirtmek amacıyla Tablo 6.1 ve Tablo 6.2' de sırasıyla her bir problemin hareketli sınırının yeri ve hızı için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözüm ve yüzdellik bağıl hatalarıyla birlikte verildi. Tablolarda bölüntü sayısı için $N = 40$ kullanıldı ve her bir problem için değişen Δt zaman adımı ve t_f bitiş zamanı ilgili tablolarda belirtildi. Problem 2 hareketli sınırın yeri ve hızı için Problem 3 ise hareketli sınırın hızı için analitik çözüme sahip olmadığından ilgili tablolarda yer almadı.

Tablo 6.1: Hareketli sınırın yeri için yöntemlerin $N = 40$ değerinde yüzdelik hata normuna göre karşılaştırılması.

	VSG-SEY	BIM-SEY	IMM-SEY	Tam Çözüm	Zaman Adımı Bitiş Zamamı
Problem 1	1.240136	1.240143	1.240248	1.240125	$\Delta t = 0.00001$
Hata %	0.000887	0.001451	0.009918		$t_f = 1.0$
Problem 3	0.467035	0.467191	————	0.466951	$\Delta t = 0.0005$
Hata %	0.017989	0.051397			$t_f = 0.1$
Problem 4	0.999958	0.999958	1.000146	1.0	$\Delta t = 0.000002$
Hata %	0.004200	0.004200	0.014600		$t_f = 1.0$
Problem 5	0.999958	0.999958	1.000148	1.0	$\Delta t = 0.000001$
Hata %	0.004200	0.004200	0.014800		$t_f = 0.5, \alpha = 2$
Problem 6	0.500002	0.500003	0.499995	0.5	$\Delta t = 0.000002$
Hata %	0.000400	0.000600	0.001000		$t_f = 0.5$

Tablo 6.2: Hareketli sınırın hızı için yöntemlerin $N = 40$ değerinde yüzdelik hata normuna göre karşılaştırılması.

	VSG-SEY	BIM-SEY	IMM-SEY	Tam Çözüm	Zaman Adımı Bitiş Zamamı
Problem 1	0.620090	0.620088	0.620244	0.620063	$\Delta t = 0.00001$
Hata %	0.004354	0.004032	0.029191		$t_f = 1.0$
Problem 4	0.999873	0.999871	1.000513	1.0	$\Delta t = 0.000002$
Hata %	0.012700	0.012900	0.051300		$t_f = 1.0$
Problem 5	1.999746	1.999742	2.001026	2.0	$\Delta t = 0.000001$
Hata %	0.012700	0.012900	0.051300		$t_f = 0.5, \alpha = 2$
Problem 6	0.999989	0.999986	1.000011	1.0	$\Delta t = 0.000002$
Hata %	0.001100	0.001400	0.001100		$t_f = 0.5$

Yukarıda verilen tablolara bakıldığında variable space grid ve boundary immobilisation yöntemleri kullanılarak oluşturulan sonlu eleman yöntemlerinin daha etkili olduğu söylenebilir. Örneğin hareketli sınırın yeri için yüzdelerik bağıl hatalarıyla birlikte oluşturulan Tablo 6.1' de yöntemlerin yüzdelerik bağıl hataları Problem 1' de VSG-SEY, BIM-SEY ve IMM-SEY için sırasıyla 0.000887, 0.001451, 0.009918 elde edildi. Hareketli sınırın hızı için yüzdelerik bağıl hatalarıyla birlikte oluşturulan Tablo 6.2' de ise yöntemlerin yüzdelerik bağıl hataları Problem 4' de VSG-SEY, BIM-SEY ve IMM-SEY için sırasıyla 0.012700, 0.012900, 0.051300 elde edildi. Dolayısıyla VSG ve BIM yöntemleri kullanıldıktan sonra uygulanan sonlu eleman yöntemlerinin Stefan problemleri için daha hassas olduğu sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

- [1] J. Stefan, Über die theorie der eisbildung inbesondere über die eisbindung im polarmeere, **Ann. Phys. U. Chem.** 42 (1891) 269-286.
- [2] J. Crank, Free and Moving Boundary Problems, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [3] Muehlbauer, J.C. and Sunderland, J.E., **Appl. Mech. Reviews** 8 (1965) 951-959.
- [4] Bankoff S.G., Heat conduction or diffusion with change of phase, **Adv. Chem. Engng. V**, (1964) 75-150.
- [5] L. I. Rubinstein, The Stefan Problem, Trans. Math. Monographs, 27, AMS, Providence, Rhode Island, 1971.
- [6] Ockendon, J.R. and Hodgkins, W.R., Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [7] Hoffmann, K.H., Freie Universität (Berlin) Fachbereich Mathematik, volumes I (preprint no. 22), II (no. 28), III (no. 34), 1977.
- [8] A. Esen and S.Kutluay, An isotherm migration formulation for one-phase Stefan problem with a time dependent Neumann condition, **Applied Mathematics and Computation**, 150 (2004) 59-67.
- [9] A. Esen, S. Kutluay, A numerical solution of the Stefan problem with a Neumann-type boundary condition by enthalpy method, **Applied Mathematics and Computation**, 148 (2004) 321-329.
- [10] A. Esen, Bir Boyutlu Hareketli Sınır Değer (Stefan) Problemleri için Nümerik Çözüm Yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 1997.
- [11] S. Savovic', J. Caldwell, Finite-difference solution of one-dimensional Stefan problem with periodic boundary conditions, **Int. J. Heat Mass Trans.**, 46 (2003) 2911-2916.

- [12] J. Caldwell, S. Savovic', Numerical solution of Stefan problem by variable space grid and boundary immobilization method, **J. Math. Sci.** 13 (2002) 67–79.
- [13] J. Caldwell, Y.Y. Kwan, Numerical methods for one-dimensional Stefan problems, **Commun. Numer. Meth. Eng.** 20 (2004) 535–545.
- [14] J. Caldwell, S. Savovic', Y.Y. Kwan, Nodal Integral and Finite Difference Solution of One-Dimensional Stefan Problem, **J. Heat Mass Trans.** 125 (2003) 523-527.
- [15] J. Caldwell, K.L. So, Numerical Solution of Stefan Problems Using the Variable Time Step Finite Difference Method, **J.Math. Sciences** 11 (2000) 127-138.
- [16] Rizwan-Uddin, One-dimensional phase change with periodic boundary conditions, **Numer. Heat Trans.** 35 (1999) 361-372.
- [17] Rizwan-Uddin, A nodal method for phase change moving boundary problems, **Int. J. Comput. Fluid Dyn.** 11 (1999) 211–221.
- [18] S.L. Mitchell, T.G. Myers, Approximate solution methods for one-dimensional solidification from an incoming fluid, **Appl. Math. Comput.** 202 (2008) 311–317.
- [19] S.L. Mitchell, M. Vynnycky, Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems, **Appl. Math. Comput.**, 215 (2009) 1609-1621.
- [20] T.R.Goodman, The Heat-Balance Integral and its Application to Problems Involving a Change of Phase, **Trans. ASME** 80 (1959) 335-342.
- [21] J. Douglas, and T. M. Gallie, On the Numerical Integration of a Parabolic Differential Equation Subject to a Moving Boundary Condition, **Duke Math. J.** 2 (1955) 557-570.
- [22] N. S. Asaithambi, On a Variable Time Step Method for the One-Dimension Stefan Problem, **Comput. Meths. Appl. Mech. Engry.** 71 (1988) 1-13.
- [23] N. S. Asaithambi, A Variable Time-Step Galerkin Method for the One-Dimensional Stefan Problem, **Applied Mathematics and Computation** 81 (1997) 189–200.
- [24] J. Crank, and R. S. Gupta, A Moving Boundary Problem Arising From the Diffusion in Absorbing Tissue, **J. Inst. Math. Appl.** 10 (1972) 19-33.

- [25] Gupta R. S., Kumar D., A Modified Variable Time Step Method for the One-Dimensional Stefan Problem, **Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.**, 23 (1980) 101-108.
- [26] W.D. Murray, and F. Landis, Numerical and Machine Solutions of Transient Heat Conduction Involving Melting or Freezing, **J. Heat Transfer** 81 (1959) 106-112.
- [27] J. Crank and R.S. Gupta, Isotherm migration method in two dimensions, **Internat. J. Heat Mass Transfer** 18 (1975) 1101-1107.
- [28] H.G. Landau, Heat conduction in a melting solid, **Quart. J. Appl. Math.** 8 (1950) 81-94.
- [29] R.C. Dix and J. Cizek, The isotherm migration method for transient heat conduction analysis, in: U. Grigull and E. Hahne, Eds., Heat Transfer 1, Proc. **4th Internat. Heat Transfer Conf.**, Paris Cul.1, 1970.
- [30] Atthey, R., A finite difference scheme for melting problems, **J. Inst. Maths. Applies.** 13 (1974) 353-366.
- [31] R.S. Gupta, N.C. Banik, Constrained integral method for solving moving boundary problems, **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.** 67 (1988) 211-221.
- [32] R.M. Furzeland, A survey of the formulation and solution of free and moving boundary (Stefan) problems, Tech. Rept. TR/76, Dept. of Mathematics, Brunel University, Uxbridge.
- [33] G.D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, 3rd ed., Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [34] J.M. Hill and J.N. Dewyne, Heat Conduction, Blackwell Scientific Publications, Australia, 1987.
- [35] O.C. Zienkiewicz, The Finite element method, McGraw-Hill, London, 1977.
- [36] J. N. Reddy, An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford University Press Inc., New York, 2006.
- [37] D.S. Burnett, Finite element Analysis, AT&T Bell Laboratories, Whippany, New Jersey, 1987.

- [38] E. Hinton and D.R.J. Owen, An Introduction to Finite Element Computations, Pineridge Press Limited, U.K., 1979.
- [39] S. Kutluay, Sonlu Fark Yöntemi Ders Notları, İnönü Üniversitesi, 2016.
- [40] A. Hrennikoff. Solutions of problems of elasticity by the framework method, **J. appl. Mech.** 8 (1941) 169–175.
- [41] Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, **Bull. Amer. Math. Soc.** 49 (1943) 1–23.
- [42] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, **J. of Aero. Sci.** 23 (1956) 805-823.
- [43] R.W. Clough, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proc 2nd ASCE, **Conf. Electronic Completion** (1960) 345-378.
- [44] K. Rektorys, Variational Principles of Mathematics, Science and Engineering, Rediel, Dordrecht, Holland, 1980.
- [45] W. Cheney and D. Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cool Publishing Company, California, 1991.
- [46] M. A. Walkley. A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-water Wave Equations, The University of Leeds School of Computer Studies, 1999.
- [47] H.S. Carslaw, and J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed., Oxford University Press, London, 1959.
- [48] S. Kutluay, Modelling Evolutionary Behavior of Thermistor, Ph. D. Thesis, Bradford University, England, 1993.
- [49] W.D.L. Finn, E. Varoğlu, Finite element solution of the Stefan problem, in: J.R. Whiteman (Ed.), The Mathematics of Finite Elements and Applications, MAFELAP 1978, Academic Press, New York, 1979.
- [50] R. Fazio, The iterative transformation method: numerical solution of one-dimensional parabolic moving boundary problems, **Int. J. Comput. Math.** 78 (2001) 213–223.
- [51] A.Asaitambi, Numerical Solution of Stefan Problems Using Automatic Differentiation, **Appl. Math. Comput.** 189 (2007) 943-948.

- [52] N. S. Asaithambi, A Galerkin Method for Stefan Problems, **Appl. Math. Comput.** 52 (1992) 239-250.
- [53] R.M. Furzeland, A comparative study of numerical methods for moving boundary problems, **J. Inst. Maths. Appl.** 26 (1980) 411-429.
- [54] Yao, L. S., and Prusa, J., “Melting and Freezing”, **Adv. Heat Transfer**, 19 (1989) 1-95.
- [55] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Ozdes, The numerical solution of one-phase classical Stefan problem, **J.Comp. Appl. Math.** 81 (1997) 35-44.
- [56] Gupta, R. S., Some numerical and integral methods for solving moving boundary problems in heat flow and diffusion, Ph. D. Thesis, Brunel University, Uxbridge, U. K. 1972.
- [57] J.V. Miller, K.W. Morton and M.J. Balnes, A finite element moving boundary computation with an adaptive mesh, **J. Inst. Math. Appl.** 22 (1978) 467-477.
- [58] P. Jamet and R. Bonnerot, Numerical solution of the Eulerian equations of compressible flow by a finite element method which follows the free boundary and the interfaces, **J. Computational Phys.** 18 (1975) 21–45.
- [59] P.M. Prenter, Splines and variational methods, Wiles, New York, 1975.
- [60] İ.Dağ, Studies of B-spline Finite Elements, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK),1994.
- [61] L.R.T. Gardner and G.A. Gardner, B-Spline Finite Elements, School of Mathematics, University of Wales, February 1991.
- [62] A.S. Wood, A note on the use of the isotherm migration method, **J. Comput. Appl. Math.** 36 (1991) 371-384.
- [63] J. Crank, Two methods for the Numerical Solution of Moving Boundary Problems in Diffusion and Heat Flow, **Quart. Journ. Mech. and Applied Math.** 10 (1957) 220-231.
- [64] Chernousko, F.L., Solution of non-linear heat conduction Problems in medium with phase changes, **Int. Chem.Engng.**10 (1970) 42-48.
- [65] J. Crank and A.B. Crowley, On an implicit scheme for the isotherm migration method along orthogonal flow lines in two dimensions, **Internat. J. Heat Mass Transfer** 22 (1979) 1331-1337.

- [66] B.D. Turland, A general formulation of the isotherm migration method for reactor accident analysis, Preprint CLM-P582, UKAEA (Culham), 1979; also in: T.A. Jaeger and B.A. Boley, Eds., Proc. 5th Internat. Con&Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 1979 (North-Holland, Amsterdam, 1979).
- [67] B.D. Turland, Finite difference front-tracking algorithms for Stefan problems arising in reactor safety studies, Preprint CLM-P662, UKAEA (Culham), 1982; also in: A. Fasano and M. Primicerio, Eds., Proc. Simp. Free Boundary Problems, Montecatini, Italy, (1981) 293-305.
- [68] J. Crank and R.D. Phahle, Melting ice by the isotherm migration method, **Bull. J. Inst. Math. Appl.** 9 (1973) 12-14.
- [69] Durack, D. and Wendroff B., Computing a two dimensional quench front, **Nucl.Sci.Engng.** 64 (1977) 187-191.
- [70] A.S. Wood, An unconditionally stable implementation of the isotherm migration method, **J. Numer. Heat Transfer (B)** 20 (1991) 105-113.
- [71] A.S. Wood, A fast implementation of the isotherm migration method, in: L.C. Wreuro obel, C.A.Brebbia (Eds.), **Computational Modelling of free and Moving Boundary Problems**, 2 (1991)133-147.
- [72] J. Crank and T. Özis, Numerical solution of a free boundary problem by interchanging dependent and independent variables, **J. Inst. Math. Appl.** 26 (1980) 77-85.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	: Hatice KARABENLİ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Gaziantep / 1985
Adres	: Gaziantep Özel İdare Anadolu Lisesi
E-posta	: haticekarabenli@gmail.com
Lisans	: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi
Yüksek Lisans	: Gaziantep Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik
Mesleki Deneyim	: 2009- 2012 Gaziantep Üniversitesi (Araştırma Görevlisi) 2012- — MEB (Öğretmen)

Yayın Listesi

- 1.) Hatice Karabenli, Yusuf Uçar, E. Nesligül Aksan, “A collocation finite element solution for Stefan problems with periodic boundary conditions”, Filomat, in press.
- 2.) Hatice Karabenli, Yusuf Uçar, E. Nesligül Aksan, “Finite Element Solution of Stefan Problems with Periodic Boundary Conditions”, 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015), June 3-6, 2015, Istanbul, TURKEY.
- 3.) Hatice Karabenli, Alaattin Esen, E. Nesligül Aksan, “Collocation Finite Element Solutions for Stefan Problem with Neumann Boundary Conditions”, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015), August 25-28, 2015, Van, TURKEY.
- 4.) Hatice Karabenli, Yusuf Uçar, Alaattin Esen, “Sonlu Elemanlar Metodu Kullanılarak Stefan Problemlerinin Nümerik Çözümlerinin Elde Edilmesi”, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Eylül 7-8, 2015, Antalya, TURKEY.
- 5.) Hatice Karabenli, E. Nesligül Aksan, Alaattin Esen, “Finite Element Solution for a Stefan Problem Describing the Melting Process”, International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE 2016), March 19-20, 2016, Kilis, TURKEY.