T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ DÜNYA SAVAŞINDA AKTİF ROL ALAN ÜLKELER ARASINDAKİ İLİŞKİLERİN GRAF TEORİ İLE MODELLENMESİ VE AYRIŞIMI

MÜCAHİT SÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2016

Tezin Başlığı : İkinci Dünya Savaşında Aktif Rol Alan Ülkeler Arasındaki İlişkilerin Graf Teori İle Modellenmesi ve Ayrışımı

Tezi Hazırlayan : Mücahit SÜLÜ

Sınav Tarihi : 07.10.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İlhan İÇEN** ....
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY ....
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Tuncay Sevindik ....
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sosyal Ağların Alt Ağlara Bölünmesinde Graf Teorinin Kullanılması" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mücahit SÜLÜ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ DÜNYA SAVAŞINDA AKTİF ROL ALAN ÜLKELER ARASINDAKİ İLİŞKİLERİN GRAF TEORİ İLE MODELLENMESİ VE AYRIŞIMI

Mücahit SÜLÜ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

77 + VI sayfa

2016

Danışman : Prof. Dr. İlhan İÇEN

Bu çalışma sosyal ağların bir konusu olan İkinci Dünya Savaşında aktif rol alan ülkeler arasındaki ilişkilerin matematiksel olarak incelenmesi konusuna odaklanmaktadır.

Savaşta aktif rol alan, savaş sırasında en fazla kayıpları veren ve savaşa giden yolda en fazla katkısı olan 14 ülke ele alınmıştır. Bu ülkelerin savaş öncesi ve savaş esnasında olan din, komşuluk, sınır kavgası, doğal kaynak, güç yarışı ve politik ilişkileri incelenmiştir.

İncelenen bu ilişkiler graf ile modellenmiştir ve bu grafın Laplace matrisi elde edilmiştir. Laplace matrisinin özdeğer ve özvektörleri elde edilerek ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektör (Fiedler vektörü) grafın bölünmesinde kullanılmıştır.

Savaş esnasındaki gerçek bölünme elde edilene kadar ülkeler arasındaki din, komşuluk, sınır kavgası, doğal kaynak, güç yarışı ve politik ilişkiler tahmini olarak puanlanmıştır. Bu puanlama ile elde edilen sonuçlar, günümüz dünyasında ülkeler arasındaki zayıf bağları ortaya koymaktadır. Bu sonuçlardan yararlanılarak zayıf

bağların giderilmesi için çalışmalar yapılabilecek ve böylelikle olası bir dünya savaşını engellemek mümkün olabilecektir.

ANAHTAR KELİMELER: graf teori, graf bölümleme, özdeğer, özvektör, sosyal ağ, uygulamalı bilişim, veri madenciliği, ikinci dünya savaşı

ABSTRACT

MA Thesis

USING GRAPH THEORY TO MODEL AND PARTITION THE RELATIONSHIPS BETWEEN ACTIVE COUNTRIES IN WORLD WAR II

Mücahit SÜLÜ

İnönü University
Institute of Science
Department of Maths

77 + VI pages

2016

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

This study focuses on the mathematical analysis of the relationship between countries having an active role in the World War II, which is a subject of social networking.

14 countries which had an active role in the war, gave most losses during the war and which contributed the most to the road to the war were discussed. These countries' border conflicts, natural resources, political, power, neighborhood, and religious relations before and during the war were examined.

The examined relations were modelled with graph and Laplace matrix of the graph was obtained. The eigenvalues and eigenvectors of Laplace matrix were obtained, and the eigenvector corresponding to the second smallest eigenvalue (Fiedler vector) was used to divide the graph.

Until the real division during the war was obtained, border conflicts, natural resources, political, power, neighborhood, and religious relations between the countries were scored inferentially. The findings obtained from this scoring reveals weak ties between the countries in the world today and helps us to find out which weak ties should be analyzed in order not for a division to take place in the future; thus may help to prevent a possible world war.

KEYWORDS: graph theory, graph partitioning, eigenvalues, eigenvectors, social network, applied computing, data mining, world war II

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı tamamlayabilme gücünü, sabrını ve yetisini verdiği için Allah'a hamdolsun. Tez yazma sürecinde yardımlarını esirgemeyen birçok kişiye teşekkürlerimi sunmak isterim; zira yardımları olmadan bu süreci tamamlamak imkansız olacaktı.

Bu çalışmada bana hocadan çok arkadaşça davranan Prof. Dr. İlhan İçen ve Prof. Dr. Ali Karcı gibi mükemmel hocaların rehberliğinde çalışmak benim için gerçek bir onurdu. Destekleri ve rehberlikleri beni motive etme noktasında eşsiz bir değere sahipti. Kendileri, birçok yapıcı eleştirileri ve dönütleriyle tezimi tamamlamama yardımcı oldular.

İhtiyaç duyduğum her an Matlab konusunda yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Muhammed Fatih Talu Hocam'a da teşekkürü bir borç bilirim.

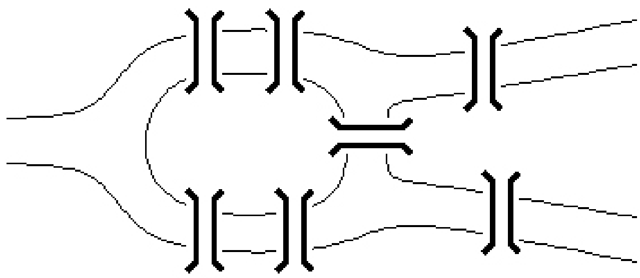
Son olarak, bu çalışmada gerek yabancı kaynakları çeviri konusunda, gerek bu çalışmayı bitirebilmem için sürekli beni motive etmesi konusunda tezimde çok büyük emekleri olan sevgili eşime ve eve gittiğimde, ruh halim ne olursa olsun, gülücükleri ile beni neşelendiren, evimizin neşesi biricik oğluma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

18. yüzyılda Prusya (Almanya)'da Pregel nehrinin iki yakası ve nehirdeki iki ada üzerine kurulan Königsberg kasabası gelecekte birçok probleme çözüm olacak bir problemi bünyesinde barındırdığından habersizdi. Königsberg kasabasında bulunan iki ada birbirine bir köprü ile bu adalardan büyük olan ada şehrin iki yakasına ikişer köprü, küçük olan ada ise şehrin iki yakasına birer köprü ile bağlıydı (Doğanaksoy, 1993a). Şehir sakinlerinin merak ettiği soru: Herhangi bir bölgeden başlayıp her köprüden yalnızca bir defa geçerek tekrar aynı bölgeye gelinip gelinemeyeceğiydi. Birçok insan bunu deneyerek yapmaya çalışsa da kimse başarılı olamamıştı. Leonhard Euler'in 1736'da yayımlamış olduğu "Seven Bridges of Königsberg" adlı makale şehir sakinlerinin kafasında var olan bu probleme ve gelecekte olabilecek birçok probleme çözüm olacaktı.

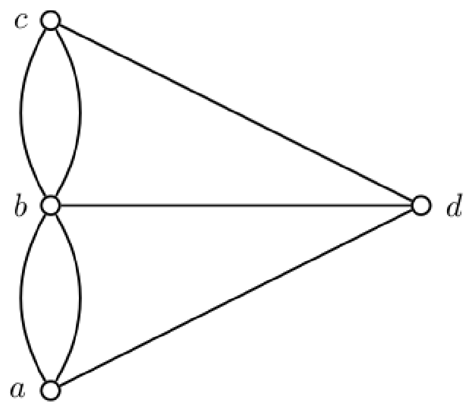


Şekil 1 : Königsberg kasabasındaki yedi köprü.

Euler, Königsberg kasabasında oluşan bu dört bölgeyi dört düğüm, köprüleri ise bu düğümleri birbirine bağlayan ayrıtlar olarak aldı. Euler'e göre bir graf üzerinde her bir düğüm bir ve sadece bir kez kullanılarak kapalı bir tur yapılabilmesi için her düğümün derecesinin çift olması gerekir (düğümün derecesi, komşu düğümlerle oluşturduğu ayrıtların sayısı anlamına gelir). Bundan dolayı bu koşulları sağlayan graflara Euler grafı adı verilmiştir. Graf olarak çizilmiş Königsberg 7 köprü probleminde iki düğümün derecesi tek olduğu için Euler turu tamamlanmaz. Euler bu problemin çözümü ile belki de matematiğin yeni bir uygulama alanını bulduğunu fark etmemişti. Daha sonraları Graf Teori olarak bilinecek olan bu yeni uygulama alanı birçok problemin çözümüne katkıda bulunacaktı (Bacak, 2002).

Sonraki yüzyıl boyunca graf teori üzerine herhangi bir çalışma yapılmadı. Ancak, 1847 yılında G. R. Kirchhoff tarafından yapılan (1824 – 1887) "Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması" başlıklı çalışma ile yeniden gündeme geldi. Daha sonra A. Cayley (1821 – 1895), C_nH_{2n+2} *"Doymuş Hidrokarbon İzomerlerinin Sınıflaması"* çalışması esnasında ağaç kavramını keşfetti. A. F. Möbius (1790 – 1868), 1840 yılında verdiği bir derste, birbirlerine sınır komşusu olan ülkelerin bir harita üzerinde farklı renklerle boyanarak birbirlerinden ayrılması için dört renk kullanmanın yeterli olacağını gösteren *Dört Renk* problemini ortaya attı. Dört renk problemi 1879 yılında Cayley' in "*Proceedings of the Royal Geographic Society"* adlı dergide yazdığı makale ile çok bilinen bir problem halini aldı. Daha sonra Sir W.R. Hamilton (1805 – 1865) tarafından, tahtadan yapılmış, her köşesine dünyanın 20 önemli şehrinin yerleştirildiği, düzgün bir 12-yüzlüden (her bir köşede 3 ayrıtın birleştiği çokyüzlü, her bir yüzü düzgün bir beşgen olan 20 köşeli) oluşan bir bulmaca ortaya atıldı. Buradaki amaç; 12 yüzlünün kenarlarını kullanarak her bir şehirden bir defa geçmek şartıyla 20 şehri kapsayan bir tam tur yapmaktı (Deo, 1974). Graf teori yarım yüzyıllık duraklama dönemi sonunda, 1930 yılında Kuratowski düzlemsel grafları karakterize eden ünlü teoremi kanıtlayıncaya kadar matematikçiler arasında topolojinin bir uzantısı olarak ele alınmaya devam etti (Arkut, 1993). D.König, 1939 yılında kendinden önceki çalışmaları derleyerek konuyla ilgili ilk kitabı yayınladı: "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen".

Graf Teori ve uygulamalarına olan ilgi 21. yüzyılda büyük bir hızla artmaya devam etti. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaştığımız birçok probleme Graf Teori ile çözüm bulunabilmesidir. Karşılaştığımız birçok durum, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren doğruların oluşturduğu şemalarla tanımlanabilir (Doğanaksoy, 1993b). Bu şemalara graf denir.



Şekil 2 : Şekil 1'de verilen yedi köprünün grafı.

Graf teorinin çalışma alanlarından birisi de sosyal ağlardır. Düğümler olarak adlandırılan bireylerden veya elemanlardan oluşan ve bu düğümleri kendi aralarındaki çeşitli ilişkilere ve etkileşimlere bağlı olarak birbirine bağlayan ayrıtlardan oluşan yapıya, sosyal ağlar denmektedir (Feldman, 2014). Birbirleri ile etkileşim içerisinde bulunan bu elemanların sosyal ağ yapısı içerisinde gerçekleştirdikleri her türlü etkileşimin detaylı olarak incelenmesi ve analiz edilmesi sonucunda söz konusu yapıyla ve içerdiği düğümlerle ilgili olarak bilgiler elde edilebilir (Bondy& Murty, 1982). Ağ yapılarının içerisindeki elemanlar arasındaki ilişkilerin çeşitli metotlar ile detaylı olarak incelenmesi sonucu elde edilen verilerden anlamlı sonuçlar türetilmesi işine Sosyal Ağ Analizi denir (Bondy& Murty, 1982). Sosyal ağ analizi 19. yüzyılın sonlarından itibaren sosyoloji biliminin öncülüğünde gelişim göstermiştir. Teknolojide yaşanan büyük gelişmelerin, bireylerin ve toplulukların etkileşimini bilgisayar gibi farklı boyutlara taşıması ile daha da gelişmiştir(Karcı& Boy, 2011).

Sosyal ağ analizi yapmanın en iyi yolu graflardır. Graf olarak elde edilen verilerin çözümlenmesinin daha az zaman alması için problem veri kümesinin ayrık olan alt kümelere ayrılması gerekir.

Graf bölümleme, araştırma alanlarında ve paralel hesaplamalarda kullanılan bir yöntemdir. Graf bölümlemede nümerik metotlar hesaplamada işlem kolaylığı sağlamaktadır. Birçok graf bölümleme metodu vardır, fakat bunlardan nümerik çalışanı yalnızca spektral graf bölümlemedir. Gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte graflar ile elde edilen büyük matrislerin yorumlanması hususunda kolaylıklar sağlanmıştır. Bu matrislerin incelenmesinde kullanılan en iyi yöntemlerden birisi, o matrisin özdeğer ve özvektörleri üzerinde yapılan yorumlardır (Sülü, v.d., 2012).

Bir grafın Laplace matrisi, reel ve simetrik olan bir matristir. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri bulunur. Bu matrisin ikinci en küçük özdeğerine denk düşen özvektörü çizgenin iki parçaya bölümlenmesinde kullanılır. Bu yöntemi ilk olarak Fiedler kullanmıştır (Hendrickson, v.d., 1993). Bu ikinci en küçük özdeğerin özvektörü, çizgenin cebirsel bağlılığı olarak adlandırılmıştır. Fiedler' in bu çalışmasından dolayı, bu özdeğere matrisin Fiedler değeri ve özvektörüne de Fiedler vektörü denilmiştir. Bu vektör çizgenin en küçük ayıracını verir. Özdeğer ve özvektör hesaplanmasında kolaylık sağlayan en iyi nümerik yöntem QR algoritmasıdır. QR algoritması 20.yüzyılın en iyi 10 algoritması arasında yer almaktadır. QR algoritması 1950'lerin sonunda John G.F. Francis ve Vera N. Kublanovskaya tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir (Francis, 1961). QR algoritması, Q üst köşegen ve R ortogonal matris olmak üzere iki matrise ayrılarak ilerleyen işlemler dizisinden oluşur. 1960'ların ortalarından beri QR algoritması büyük matrislerin özdeğer problemlerini rutin hesaplamalara dönüştürmüştür.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, lineer cebir ve ortogonal dönüşümler ile ilgili temel kavram ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Graf Teori ile ilgili temel kavram ve teoremler, bir grafın matrisleri, QR algoritması ile bu matrisin özdeğer ve özvektörünü elde etme ve Graf bölümleme algoritmaları verilmiştir.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde, ikinci dünya savaşına aktif olarak katılan ülkeler arasındaki siyasi, dini, komşuluk, doğal kaynaklar, güç yarışı, toprak kavgası gibi ilişkiler incelenip bu ülkelerin ilişkileri bir sosyal ağ olarak ele alınıp graf olarak temsil edilmiştir ve temsil edilen bu sosyal ağın grafının Laplace matrisi ile verileri sayısallaştırılmıştır. Laplace matrisinin özdeğer ve özvektörlerini hesaplamak için QR algoritması kullanılmıştır. Laplace matrisinden elde edilen özdeğer ve özvektör yardımı ile grafın nereden bölüneceğini hesaplamak için ilişkilere tahmini ağırlıklar verilmiştir. İkinci dünya savaşında ülkelerin nasıl ayrıldığı belli olduğundan, ilişkileri bu bölünme üzerinden puanlayarak hangi ilişkinin kaç puan alacağı bulunmuştur.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde, deneysel sonuçların elde edilmesi ve yorumlanması üzerinde durulmuştur. İkinci dünya savaşına katılan ülkelerin oluşturmuş olduğu sosyal ağ üzerindeki ilişkilerin puanlamasına göre günümüz ülkelerinin ilişkileri ele alınıp, muhtemel bölünmenin nereden olacağı tahmin edilmeye çalışılmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve uygulanan yöntemin etkililiği üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kullanılacak bazı temel kavramlar verilmiştir.

2.1.Lineer Dönüşümler

Tanım 2.1.1.

V,W iki gerçel vektör uzayı olsun. $T: V \longrightarrow W$ fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona lineer dönüşüm denir.

- $\forall x, y \in V$ $için$ $T(x+y) = T(x) + T(y)$
- $\forall x \in V, c \in \mathbb{R}$ $için$ $T(cx) = cT(x)$

2.2.Matrisler

Tanım 2.2.1.

m,n,i,j $\in \mathbb{N}$ olmak üzere a_{ij} reel sayılarından oluşan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

tablosuna mxn tipinde bir A matrisi denir ve A= $[a_{ij}]_{mxn}$ şeklinde gösterilir.

Burada a_{ij}, A matrisinin i- inci satır j- inci sütunundaki elemanıdır. Tablodaki yatay sıralara matrisin satırları, düşey sıralara matrisin sütunları denir. A matrisi m tane satırdan n tane sütundan oluşan mxn tipinde bir matristir.

2.2.1. Matris Çeşitleri

Tanım 2.2.1.1.

mxn boyutlu A matrisi, m≠n ise dikdörtgen matris, m=n ise **karesel matris** olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.1.2.

Bir karesel matriste tüm a_{ii} elemanlarının oluşturduğu köşegene **esas köşegen** denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad a_{11}=1, a_{22}=1, a_{33}=1$$

Tanım 2.2.1.3.

Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matris** denir. Sıfır matrisi toplama işlemine göre birim matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.4.

Esas köşegeni üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan karesel matrislere **çarpma işlemine göre birim matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.5.

Esas köşegeni üzerindeki elemanları sıfırdan farklı, diğer elemanları sıfır olan kare matrise **köşegen matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.6.

Bir kare matrisin elemanları $i > j$ için $a_{ij}=0$ ise bu matrise **üst üçgensel matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.7.

Bir kare matrisin elemanları $i < j$ için $a_{ij}=0$ ise bu matrise **alt üçgensel matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.8.

Bir kare matrisin elemanları esas köşegene göre simetrik ise bu tür matrislere **simetrik matris** denir. Yani $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & 3 & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{9} & 5 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.1.9.

Boyutu mxn olan bir A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen ve boyutu nxm olan matrise A matrisinin **devriği (transpozesi)** denir ve A^T ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}_{3x4} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{bmatrix}_{4x3}$$

Matrisin transpozesi aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $(A^T)^T = A$
- $(sA)^T = s(A)^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

2.2.2. Matrislerde İşlemler

Tanım 2.2.2.1.

Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı tüm elemanları birbirine eşit ise bu **iki matris eşittir** denir. Yani $A= [a_{ij}]$, $B= [b_{ij}]$ ve $a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A=B$ dir.

Tanım 2.2.2.2.

Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı elemanları toplanarak elde edilen yeni matrise bu **iki matrisin toplamı** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \Rightarrow A + B= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.2.3.

Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı elemanları birbirinden çıkarılarak elde edilen yeni matrise bu **iki matrisin farkı** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \Rightarrow A - B= \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

Tanım 2.2.2.4.

Bir matrisin tüm elemanları $k \in \mathbb{R}$ ile çarpılırsa matris te k ile çarpılmış olur. Yani $k.A=[k.a_{ij}]_{mxn}$ dir. A,B ve C aynı boyutlarda matrisler ve $k,k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $k.(A+B) = k.A + k.B$
- $(k_1+k_2).A = k_1.A + k_2.A$
- $(k_1.k_2).A = k_1(k_2.A) = k_2(k_1.A)$
- $1.A = A$ ve $-1.A = -A$
- $k.0 = 0$ ve $0.A = 0$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.2.2.5.

A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit ise A matrisinin tüm satır elemanları B matrisinin tüm sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılıp toplanmasıyla elde edilen matrise bu **iki matrisin çarpımı** denir.

$A= [a_{ij}]_{mxk}$, $B= [b_{ij}]_{kxn} \Rightarrow C = A.B = [c_{ij}]_{mxn}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}_{3x4} \quad B_{4x3} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & n & o \\ \boldsymbol{p} & r & s \\ \boldsymbol{t} & u & v \\ \boldsymbol{y} & z & x \end{bmatrix}_{4x3} \Rightarrow$$

A.B=

$$\begin{bmatrix} a.m+b.p+c.t+d.y & a.n+b.r+c.u+d.z & a.o+b.s+c.v+d.x \\ e.m+f.p+g.t+h.y & e.n+f.r+g.u+h.z & e.o+f.s+g.v+h.x \\ i.m+j.p+k.t+l.y & i.n+j.r+k.u+l.z & i.o+j.s+k.v+l.x \end{bmatrix}_{3x3}$$

şeklinde elde edilir.

Matris çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $AB \neq BA$
- $A(BC) = (AB)C$

- $A(B+C) = AB + AC$
- $AI = IA = A$

Tanım 2.2.2.6.

A matrisi karesel bir matris olmak üzere, her karesel matris kendisi ile çarpılabileceğinden;

- $A^0 = I_n$
- $A^1 = A$
- $A^2 = A.A$
- $A^3 = A.A^2$
- $A^n = A.A^{n-1}$

özellikleri sağlanır.

2.2.3. Ters Matris

Tanım 2.2.3.1.

Bir A matrisinin her elemanının işareti değiştirilerek elde edilen matrise bu **matrisin toplamsal tersi** denir.

Tanım 2.2.3.2.

A, nxn tipinde bir matris ve I_n, nxn tipinde birim matris olmak üzere

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

olacak şekilde bir A^{-1} matrisi varsa, bu matrise A matrisinin **çarpımsal tersi** veya kısaca **tersi** denir. Bir matrisin çarpımsal tersi olmayabilir, fakat varsa tektir.

A,B,C tersi olan matrisler ve $k \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- $(A^{-1})^{-1} = A$

- $(kA^{-1}) = k^{-1}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- $A = A^{-1} \Rightarrow A^2 = I_n$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.2.4. Dik (Ortogonal) Matris

Tanım 2.2.4.1.

nxn tipinde bir A matrisi için $A^T.A = I_n$ veya $A^T = A^{-1}$ oluyorsa A matrisi **ortogonaldir** denir.

2.2.5. Matrisin Özdeğer ve Özvektörü

Tanım 2.2.5.1.

A, nxn tipinde bir matris ve u, nx1 tipinde sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere;

$$A.u = \lambda.u$$

eşitliğini sağlayan λ sayısına veya sayılarına A matrisinin **özdeğeri** veya karakteristik kökü denir. λ özdeğerleri için u da A matrisinin **özvektörleri** olarak adlandırılır.

Özvektörler değişkenlerin doğrusal kombinasyonunu sağlar, bunlara karşılık gelen özdeğerler ise matrislerde varyanslar ile ilgili bilgi verir.

Örnek 2.2.5.1.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}$ matrisinin özdeğeri,

$$A.u = \lambda.u \Rightarrow A.u - \lambda.u = 0 \Rightarrow (A- \lambda I)u = 0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olarak elde edilir.

2.2.6. Matrisin Normu

Tanım 2.2.6.1.

V,F (Reel yada Kompleks sayılar) cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere, İ: $VxV \rightarrow F$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme V üzerinde bir **iç çarpım** denir ve $x, y \in F$ için $< x, y >$ şeklinde gösterilir.

- $\forall x \in V \ için < x, x > \geq 0$
- $\forall x \in V \ için < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in V \ ve \ \alpha \in F \ için < \alpha x, y >= \alpha < x, y >$
- $\forall x, y, z \in V \ için < x, y + z >=< x, y > +< x, z >$

Örnek 2.2.6.1.

$\mathbb{R}^3$ teki $x = (2,3,1), y = (1,5,6)$ vektörlerinin iç çarpımı;

$$\begin{aligned} < x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= 2.1 + 3.5 + 1.6 \\ &= 23 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.2.6.2.

X bir küme ve $f: X \times X \longrightarrow X$ 'e bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonuna X kümesi üzerinde **ikili işlem** denir.

Tanım 2.2.6.3.

$F \neq \emptyset$ bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $\oplus$ ve $\odot$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F, \oplus, \odot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu üçlüye **cisim** denir.

- $a, b \in F \Rightarrow a \oplus b = b \oplus a \; ve \; a \odot b = b \odot a$
- $a, b, c \in F \Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \; ve \; a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
- $a, b, c \in F \Rightarrow a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
- $0, a \in F \; için \; a \oplus 0 = a$
- $1, a \in F \; için \; a \odot 1 = a$
- $a, -a \in F \; için \; a \oplus (-a) = 0$
- $0 \neq a \in F \; ve \; a^{-1} \in F \; için \; a \odot a^{-1} = 1$

Tanım 2.2.6.4.

$M_n(F)$, elemanları F cisminden alınan nxn matrislerin kümesi olsun.
A,B $\in M_n(F)$, $\alpha \in$ F olmak üzere,

- $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \; (\alpha \in F)$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

özelliklerini sağlayan $\|.\|: M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümüne **matris normu** denir.

Tanım 2.2.6.5.

A, mxn tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

normuna **satır normu** denir.

Tanım 2.2.6.6.

A, mxn tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

normuna **sütun normu** denir.

Tanım 2.2.6.7.

A, mxn tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)}$$

normuna **Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu** denir.

Tanım 2.2.6.8.

A, mxn tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

normuna A matrisinin $\boldsymbol{l_p}$ **normu** nedir.

Yukarıdaki tanımda p =1 olması durumunda norm sütun normu, p = 2 olması durumunda norm Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu ve p = ∞ olması durumunda da, norm satır normu olarak kabul edilir.

Örnek 2.2.6.2.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin satır, sütun ve Euclidean normu sırasıyla

$$\|A\|_1 = \max(2+1+8, 3+6+5, 7+4+9) = \max(11,14,20) = 20$$

$$\|A\|_\infty = \max(2+3+7, 1+6+4, 8+5+9) = \max(12,11,22) = 22$$

$$\|A\|_E = \sqrt{2^2+3^2+7^2+1^2+6^2+4^2+8^2+5^2+9^2} = \sqrt{285}$$

dir.

2.3.Vektörlerin Ortogonalliği, Ortonormal Vektör Kümeleri

Tanım 2.3.1.

V iç çarpım ve x, y ∈ V olmak üzere < x, y > = 0 ise x ve y **ortogonal (dik) vektörler** olarak adlandırılır. $Cos\theta = \frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$ ifadesinde cosθ = 0 ise x, y ortogonal vektörlerdir. cosθ = ± 1 yani < x, y > = ± $\|x\|\|y\|$ ise x ve y vektörleri paralel vektörlerdir.

Örnek 2.3.1.

R^2 de x = (1, 2) , y = (- 2, 1) vektörleri için < x, y > = < (1, 2) , (- 2, 1) > = 1.(- 2) + 2.1 = 0 olduğundan dolayı vektörler ortogonaldir.

Tanım 2.3.2.

V bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olsun. $\boldsymbol{x}$ **vektörünün uzunluğu**;

$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3.2.

$\mathbb{R}^3$ teki $x = (1,3,5)$ vektörünün uzunluğu

$\|x\| = \sqrt{< (1,3,5), (1,3,5) >} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

dir.

Teorem 2.3.1.

V bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in V$ olsun.

$$|< x, y >| = \|x\| \|y\|$$

eşitsizliğine **Cauchy-Schwarz eşitsizliği** denir.

İspat:

$x = 0$ olması durumunda;

$$|< x, y >| = 0$$
$$\|x\| \|y\| = 0$$

olacağından eşitlik sağlanır.

$x \neq 0$ olsun. Keyfi bir $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ için

$< rx + y, rx + y >$ değeri ele alınsın.

$$0 \leq < rx + y, rx + y >$$
$$=< rx, rx + y > +< y, rx + y > (tanımdan)$$
$$=< rx, rx > +< rx, y > +< y, rx > +< y, y >$$
$$= r^2 < x, x > +r < x, y > +r < x, y > +< y, y >$$
$$= r^2 < x, x > +2r < x, y > +< y, y >$$

olur. Burada $a =< x, x >, b =< x, y >, c =< y, y >$ ile gösterilirse;

$$p(r) = ar^2 + br + c \geq 0$$

r ye göre ikinci dereceden polinom elde edilir. Bu polinomun r nin her değeri için

$$ar^2 + br + c \geq 0$$

olması için aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması gerekir.

- $ar^2 + br + c = 0$ denkleminin gerçel köklerinin olmaması yani;

$b^2 - 4ac < 0$ olması.

- $ar^2 + br + c = 0$ denkleminin iki katlı gerçel kökünün olması yani;

$b^2 - 4ac \leq 0$ olmasıdır. Buradan

$$b^2 - 4ac \leq 0$$
$$4 < x, y >^2 \leq \; 4 < x, y >< y, y >$$
$$< x, y >^2 \leq < x, y >< y, y >$$
$$|< x, y >| = \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.3.3.

V bir iç çarpım uzayı ve E $\subset$ V olsun. E içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise E'ye **ortogonal vektör kümesi** denir. Ayrıca ortogonal E kümesindeki her vektörün uzunluğu 1 ise E ye **ortonormal** bir küme denir.

Tanım 2.3.4.

V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. V' de sıfırdan farklı x_1, x_2, ... , x_n vektörleri ortogonal ise bu vektörlerin kümesi V için bir **ortogonal bazdır**. Eğer x_1, x_2, ... , x_n vektörleri ortonormal ise, bu vektörlerin kümesi V için bir **ortonormal bazdır**.

2.3.1. Gram–Schmidt Ortogonalleştirme Yöntemi

Teorem 2.3.1.1. (Gram–Schmidt)

Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı ortonormal vektörlerden oluşan bir baza sahiptir.

İspat:

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, V iç çarpım uzayının bir bazı olsun. V'nin bir $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ alt kümesini aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, u_2 >}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{< v_3, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \frac{< v_n, u_{n-1} >}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} - \cdots - \frac{< v_n, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1$$

Bu durumda $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörleri sıfırdan farklı olmak zorundadır. Aksi takdirde $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$'nin lineer bağımsız olması ile çelişir. Şimdi n üzerinde tümevarım ile

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ kümesinin ortogonal olduğu gösterilebilir.

Eğer n=2 ise,

$$< u_2, u_1 >=< v_2, u_1 > - \frac{< v_2, u_1 >}{\|u_1\|^2} < u_1, u_1 >= 0$$

olduğundan gerçekten $\{u_1, u_2\}$ bir ortogonal kümedir. Böylece n=2 için doğrudur.

n-1(n>2) için doğru olduğu kabul edilsin. Yani $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortogonal bir küme olsun. Buna göre n için doğru olduğu gösterilebilir. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$'nin bir ortogonal küme olduğunu göstermek için $< u_n, u_i >= 0$,$(1 \leq i \leq n-1)$ olduğu gösterilmelidir.

$$< u_n, u_i >=< v_n, u_i > - \frac{< v_n, u_{n-1} >}{\|u_{n-1}\|^2} < u_{n-1}, u_i > - \cdots - \frac{< v_n, u_1 >}{\|u_1\|^2} < u_1, u_i >$$

$$\Rightarrow < u_n, u_i >=< v_n, u_i > - \frac{< v_n, u_i >< u_i, u_i >}{\|u_i\|^2}$$

$$\Rightarrow < u_n, u_i >= 0$$

olur.

Örnek 2.3.1.1.

v_1=(1,0,1), v_2=(1,0,-1), v_3=(0,3,4) vektörlerine Gram–Schmidt ortogonalleştirme yöntemini uygulanacak olursa $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal baz bulunur.

Çözüm:

$$u_1 = v_1 = (1,0,1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1 = (1,0,-1)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, u_2 >}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{< v_3, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1 = (0,3,4) - \frac{4}{2}(1,0,-1) - \frac{4}{2}(1,0,1)$$
$$= (0,3,0)$$

olup $\{u_1, u_2, u_3\}$ bir ortogonal kümedir. Bu vektörlerin normları sırasıyla $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$ olduğundan $\mathbb{R}^3$ için istenilen ortonormal baz $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), (0,1,0)\right\}$ şeklinde elde edilir.

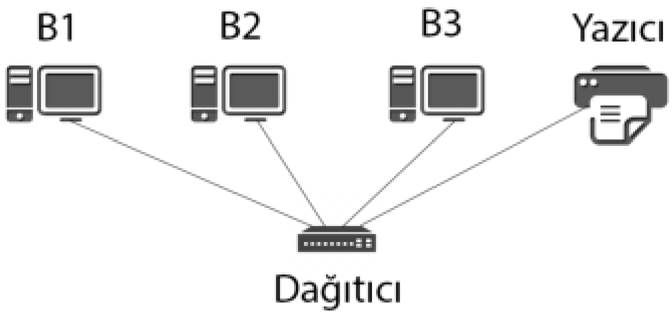
3. GRAF TEORİ VE GRAF BÖLÜMLEME

Bu bölümde graf teori ile ilgili bazı temel kavramlar, graf bölümleme ve QR algoritması verilmektedir.

3.1. Graf Teori

Günümüzde kullandığımız bir çok sistem, nesneler, varlıklar, olaylar ve bunlar arasındaki ilişkilerden oluşurlar.

Graflar, bu ilişkilerin statik yapısını modellemek amacı ile kullanılan araçlardan biridir.

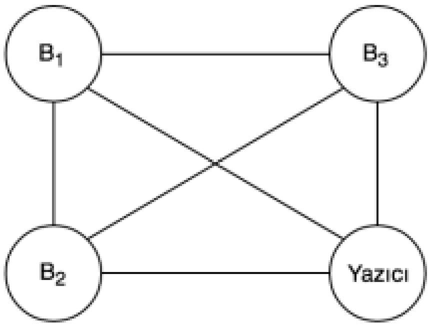


Şekil 3 : Bilgisayar Ağı.

Şekil 3 te üç bilgisayar ve bir yazıcıdan oluşan bir ağ görülmektedir. Bu ağdaki yazıcı ve bilgisayarlar nesneler ve aralarındaki bağlantılar da bu nesnelerin birbirleri ile olan ilişkilerini gösterir. B_1 bilgisayarı Dağıtıcı aracılığı ile B_2 ve B_3 bilgisayarlarına ve yazıcıya bağlıdır. B_2 bilgisayarı Dağıtıcı aracılığı ile B_1 ve B_3 bilgisayarlarına ve yazıcıya bağlıdır. B_3 bilgisayarı Dağıtıcı aracılığı ile B_1 ve B_2 bilgisayarlarına ve yazıcıya bağlıdır. Yazıcı ise B_1, B_2, B_3 bilgisayarlarına Dağıtıcı aracılığı ile bağlıdır. Bütün bağlantılar sıralı ikili olarak yazılmak istenirse aşağıda gibi olur.

(B_1,B_2), (B_1,B_3), (B_1,Yazıcı) (B_2,B_1), (B_2,B_3), (B_2,Yazıcı), (B_3,B_1), (B_3,B_2), (B_3,Yazıcı), (Yazıcı,B_1), (Yazıcı,B_2) ve (Yazıcı,B_3).

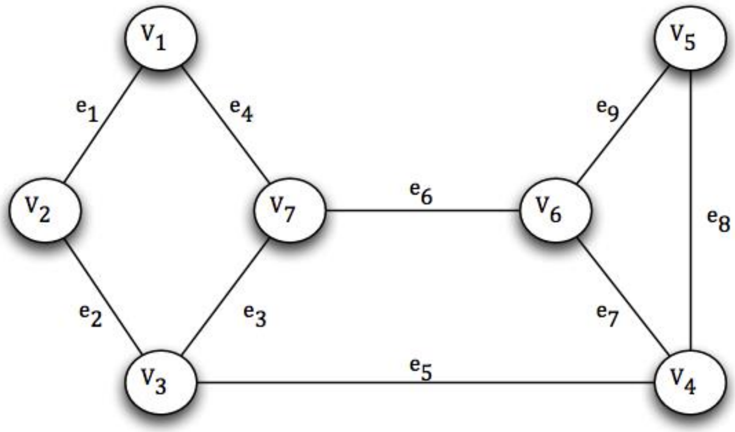
Bu şekilde verilen bilgisayar ağında dört adet nesneye karşılık 12 tane sıralı ikili vardır. Verilen sıralı ikilileri ve bu nesneleri daha soyut olarak Şekil 4' deki gibi ifade edebiliriz. Burada nesneler çember(düğüm) ve ilişkiler doğru parçası(ayrıt) ile ifade edilebilir. Bu gösterime verilen bilgisayar ağının grafi denir.



Şekil 4 : Şekil 3' de verilen bilgisayar ağının graf modeli.

Tanım 3.1.1.

Graflar, sonlu **düğümler** kümesi ve bu düğümler arasındaki **ayrıtlar** kümesi olmak üzere sonlu iki kümeden oluşur. (Kaveh, 2013). Graflar $G = (V, E)$ ile gösterilir, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ düğümler kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ $(E \subset V \times V)$ ayrıtlar kümesidir.



Şekil 5 : Örnek graf.

Tanım 3.1.2.

Eğer $e_i = (v_j, v_{j+1}) \in E$ ve $e_i = (v_{j+1}, v_j) \notin E$ ise bu tip ayrıtlar yönlüdür ve $e_i = (v_j, v_{j+1})$ şeklinde ifade edilir. Burada v_j ve v_{j+1} düğümleri komşu (bitişik) düğümlerdir ve $ADJ(v_j) = v_{j+1}$, $ADJ(v_{j+1}) = v_j$ şeklinde ifade edilir. Bir grafın ayrıtlarından en az bir tanesi yönlü ise bu grafa **yönlü graf** denir (Kaveh, 2013). e_i gibi herhangi bir ayrıt yönsüz ise $e_i=\{v_j,v_{j+1}\} \in E$ ve $e_i=\{v_{j+1},v_j\} \in E$ şeklinde ifade edilir. Bir grafın bütün ayrıtları yönsüz ise **yönsüz graf** olarak adlandırılır (Kaveh, 2013). $e_i=(v_j,v_{j+1})$ ayrıtının uç noktaları v_j ve v_{j+1} dir. Bu çalışmada yönsüz graflar, graf olarak adlandırılmıştır.

Tanım 3.1.3.

$e_i = (v_j, v_{j+1})$ ve $v_j = v_{j+1}$ ise e_i döngü olarak adlandırılır. $e_i = (v_j, v_{j+1})$ ve $e_{i+1} = (v_k, v_{k+1})$ ve $v_k = v_j$, $v_{k+1} = v_{j+1}$ ve $v_k \neq v_{j+1}$, $v_{k+1} \neq v_j$ ise e_i ve e_{i+1} ayrıtları **paralel (koşut bağlı) ayrıtlar** olarak adlandırılır (West, 1996). Bir ayrıtın uç noktaları farklı ise **tek ayrıt** olarak adlandırılır. Bir düğüme yalnız iki ayrıt bağlı ise ve bu ayrıtların uç düğümleri birbirlerinden farklı ise bu ayrıtlar **dizi bağlı ayrıtlar** olarak adlandırılır (West, 1996).

Tanım 3.1.4.

Bir grafın mertebesini düğümler kümesinin eleman sayısı verir. G=(V,E) ve |V|=n ise G **grafının mertebesi** n'dir. v düğümüne giren ve çıkan ayrıt sayısı o **düğümün derecesi** dir ve d(v) ile ifade edilir (West, 1996).

Tanım 3.1.5.

$v_i \in V$ ve $d(v_i)=0$ ise v_i düğümüne izole edilmiş veya **tek düğüm** olarak ifade edilir. Eğer $d(v_i)=1$ ise **pendant** veya **uç düğüm** olarak ifade edilir (West, 1996).

Tanım 3.1.6.

(V,E) bir graf olsun. Eğer $E_2 \subseteq E$ ve $V_2 \subseteq V$ ise $G_2=(V_2,E_2)$ grafına G grafının bir **alt graf**ı denir. Eğer $E_2 \subseteq E$ ise G_2 grafi G grafının **özalt graf**ı olarak adlandırılır. Eğer $V_2 = V$ ise G_2 grafi G grafinın **kapsar alt graf**ı olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.7.

G=(V,E) yönsüz bir graf ve herhangi iki düğüm arasında ayrıt varsa, veya her düğüm çifti arasında en az bir ayrıt bulunuyorsa bu graflar **bağlı graf** olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.8.

Bağlı olmayan graflar parçalı graf olarak adlandırılır. G bir graf olmak üzere **parça sayısı** K(G) ile gösterilir. Bağlı bir graf için K(G)=1 olur.

Tanım 3.1.9.

Eğer v_i ve v_j düğümleri arasında en az bir ayrıt varsa, bu iki düğüm bağlı düğümler olarak adlandırılır. Bir düğümün kendisine olan en kısa yolun uzunluğu sıfır olduğundan kendisine bağlıdır. Bütün düğüm çiftleri arasında en az bir ayrıt olan graflar **bağlı graflar** olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.10

En az iki düğüm arasında ayrıt olmayan graflar **parçalı graflar** olarak adlandırılır. G=(V,E) parça sayısı p olan parçalı bir graf ise, $V=V_1\cup V_2\cup...\cup V_p$ olur. Her $G_i=(V_i,E_i)$, $1\leq i\leq p$ grafi G grafının **alt grafı** ve bağlı bir graftır.

3.1.1. Graf İşlemleri

$G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ grafları üzerinde tanımlanabilen işlemler birleşim, kesişim, fark, çembersel toplam, düğüm silme, ayrıt silme ve büzüştürme dir.

Tanım 3.1.1.1.

G_1 ve G_2 graf, V_1,V_2 düğüm ve E_1,E_2 ayrıt olmak üzere **iki grafın birleşimi** $G=G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.1.2.

G_1 ve G_2 graf ve V_1,V_2 düğüm, E_1,E_2 ayrıt olmak üzere **iki grafın kesişimi** $G=G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,E_1\cap E_2)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.1.3.

G_1 ve G_2 graf ve V_1,V_2 düğüm, E_1,E_2 ayrıt olmak üzere **iki grafın farkı** $G=G_1-G_2=(V_1-V_2,E_1-E_2)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.1.4.

G_1 ve G_2 graf ve V_1,V_2 düğüm, E_1,E_2 ayrıt olmak üzere **iki grafın çembersel toplamı** (V_1=V_2 olmalı) $G=G1 \oplus G2=(E_1-E_2) \cup (E_2-E_1)$ şeklindedir.

Fark işlemi hariç diğer işlemler değişim özelliğine sahiptir.

Tanım 3.1.1.5.

G grafının bir düğümü v_i ise, G-v_i grafi G grafının **indirgenmiş alt grafı** olarak adlandırılır ve V-v_i düğümler kümesidir. G grafından v_i düğümü ve bu düğüme çakışık olan bütün ayrıtlar silinerek G-v_i grafi elde edilmiştir (Gould, 1988).

Tanım 3.1.1.6.

G grafının bir ayrıtı e_i ise, G-e_i grafi G grafının **ayrıt-indirgenmiş alt grafı** olarak adlandırılır ve E-e_i ayrıtlar kümesidir (Wilson, 1996). G grafından e_i ayrıtının silinmesi ile G-e_i grafi elde edilir. e_i ayrıtının çakışık olduğu düğümler silinmez. Bu işleme **ayrıt silme** denir.

Tanım 3.1.1.7.

v_i ve v_j düğüm çiftini yeni tek bir düğüm şekline getirip bu iki düğüme çakışık olan bütün ayrıtların oluşturulan bu yeni düğüme çakışık hale getirilmesine **kısa devre yapma** işlemi denir (Wilson, 1996).

Tanım 3.1.1.8.

e gibi bir ayrıt silinip uç noktalarının kısa devre yapılması işlemine **büzüştürme** denir.

Tanım 3.1.1.9.

G=(V,E), K(G)=p olmak üzere. G grafından v_i düğümü silindiğinde K(V-v_i, E)>p ise v_i düğümü **kesme düğümü** olarak adlandırılır (Wilson, 1996). G grafı bağlı ise, G-v_i en az iki parçadan oluşur; yani K(G-v_i)≥2 olur. Pendant ve izole edilmiş düğümler kesme düğümleri olamazlar. Bir grafta |V|=1 ise bu graf **adi graf** olarak adlandırılır (Gould, 1988). Kesme düğümü olmayan graflar dışındaki diğer graflar ayrıştırılabilir graflardır.

Bu tez çalışmasında kullanılacak graflar yönsüz ve basit graflar olacaktır. Basit graflar döngü ve paralel ayrıt içermeyen ve aynı zamanda bütün ayrıtları yönsüz olan graflardır. Ülkelerin ilişkileri veya sosyal ağlardaki ilişkiler karşılıklı ilişkiler olup yönsüz graf ile temsil edilebilirler.

3.2.Sosyal Ağlar

Etrafımız farkında olduğumuz ya da olmadığımız çeşitli ağ yapıları ile çevrilidir. Örneğin maddelerin atomları arasındaki bağlar, vücudumuzdaki çeşitli sistemleri oluşturan ağ yapıları, canlılar ve çevre arasındaki ekolojik ağlar, toplumsal ve kültürel ağ yapıları, komşuluk ilişkileri, terör çeteleri, karayolu, metro, elektrik dağıtım ağı, internet ağı ve ülkeler arasındaki siyasi, dini, komşuluk, doğal kaynaklar, güç yarışı, toprak kavgası gibi ilişkiler ağ yapısını oluştururlar.

Tanım 3.2.1.

Birçok nokta ile bunlar arasındaki bağlantılarla gösterilebilen bir dizgeye ilişkin yapıya **Ağ kavramı** denir (Kaveh, 2013).

Tanım 3.2.2.

Düğümler olarak adlandırılan bireylerden veya elemanlardan oluşan ve bu düğümleri kendi aralarındaki çeşitli ilişki ve etkileşimlere bağlı olarak birbirine bağlayan yapıya **Sosyal Ağ** denir(Kaveh, 2013).

Tanım 3.2.3.

Varlıklar arası ilişkilerin çeşitli bilimsel metotlar aracılığı ile detaylı olarak incelenmesi sonucu elde edilen verilerden anlamlı sonuçlar türetilmesi işine **Sosyal Ağ Analizi** denir (Kaveh, 2013).

3.3.Spektral Graf Bölümleme

Spektral graf bölümleme yönteminde, nümerik metotlar kullanılmaktadır (HENDRICKSON, v.d., 1995; SPIELMAN, v.d., 1996; LASZEWSKI, 1993; HENDRICKSON, v.d., 1993; HENDRICKSON, v.d., 1992; LELAND, v.d., 1994). Bunlardan biri de reel-simetrik matrislerin özdeğerleri ve özvektörlerinin bulunmasıdır. Bir grafın Laplace matrisi reel ve simetrik olan bir matristir. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri hesaplanır. Bu matrisin ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörü grafın iki parçaya bölümlenmesinde kullanılır. Bu yöntemi ilk olarak Fiedler kullanmıştır. Fiedler Laplace matrisinin ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörünü grafın cebirsel bağlılığı olarak adlandırmıştır. Fiedler' in bu çalışmasından dolayı, bu özdeğere matrisin Fiedler değeri ve özvektöre de Fiedler vektörü adı verilmiştir (Kaveh, 1995). Bu vektör grafin en küçük ayıracını verir.

G=(V,E) bağlı ve yönsüz bir graf olsun. Grafın düğümlerinin ayrık olan birden fazla alt kümeye ayrılması işlemine grafın bölümlenmesi denir. Bu alt kümeler A ve B olsun ($A \cap B = \emptyset \; ve \; A, B \subset G$). E(A,B) grafın ayıracı olsun. Bölümlemenin kesme boyutu $|E(A,B)|$ olur ve buna grafın ayıracının boyutu denir. Bölümleme işlemlerinde kesme boyutunun minimum olması istenir. Kesme oranı $\varphi(A,B)$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\varphi(A,B) = \frac{|E(A,B)|}{\min(|A|,|B|)}$$

Bir grafın beklenen en iyi kesme oranına o grafın izoperimetrik sayısı denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\varphi(G) = \min_{|A| \leq \frac{n}{2}} \frac{|E(A,B)|}{|A|}$$

3.3.1. Laplace Matrisi ve Fiedler Vektörleri

Tanım 3.3.1.1.

Bir grafın **bitişiklik matrisi** |V|=n için, nxn boyutunda bir kare matristir.

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \ ise. \\ 0, & Diğer \ durumlar. \end{cases}$$

Örnek 3.3.1.1.

Şekil 5. teki örnek grafın bitişiklik matrisi:

$$B_{i,j} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tanım 3.3.1.2.

Bir grafın **derece matrisi** nxn boyutunda bir kare matristir.

$$D_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j \ ise. \\ 0, & diğer \ durumlar. \end{cases}$$

Örnek 3.3.1.2.

Şekil 5. teki örnek grafın derece matrisi:

$$
D_{i,j} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Tanım 3.3.1.3.

Bir grafın bitişiklik matrisi ile derece matrisinin farkı alınarak Laplace matrisi elde edilir.

$$
L_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j \; ise. \\ -1, & i \neq j \; ve \; v_i, v_j \; ye \; bitişik \; ise. \\ 0, & diğer \; durumlar. \end{cases}
$$

Örnek 3.3.1.3.

Şekil 5. teki örnek grafin laplace matrisi:

$$
L_{i,j} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Tanım 3.3.1.4.

Herhangi bir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü için;

$$\vec{x}^T L(G)\vec{x} = \sum_{i,j\in E} (x_i - x_j)^2$$

ve bununla birlikte, G grafının Fiedler değeri de

$$\lambda_2 = \min_{\vec{x}\perp(1,1,\dots,1)} \frac{\vec{x}^T L(G)\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}$$

eğer $\vec{x}$ Fiedler vektörü ise yukarıdaki oran minimum olacaktır.

$$\frac{\vec{x}^T L(G)\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}$$

oranına $\vec{x}$ vektörünün Rayleigh oranı denir. N.Alon (1986), A.J. Sinclair ve M.R. Jerrum (1989) küçük Fiedler değerli çizgelerin iyi bir kesme oranına sahip olduğunu ispatlamışlardır.

3.3.2. Spektral Bölümleme Yöntemleri

G grafının Laplace matrisinin Fiedler vektörü $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ olsun. Spektral graf bölümlemede s bölümleme değeri olmak üzere iki parçaya bölünen grafta bir parça için $u_i > s$ ve diğer parça için $s \le u_i$ olur. Bu tip bir graf kesmesine Fiedler kesmesi denir (Deo, 1998).

3.3.2.1. Matrislerin Özdeğer ve Özvektörünün Hesaplanması

Verilen bir denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için, bu denklem sisteminin katsayılar matrisi bulunduktan sonra elde edilen vektörlerin bağımsız olması gerekir. $U_1, \dots, U_n$ vektörler olsunlar. Eğer bu vektörler lineer bağımsız iseler;

$c_1U_1 + \dots + c_nU_n = 0$

eşitliğindeki katsayılar için, $c_1=c_2=...=c_n=0$ eşitliği sağlanır. Eğer en az bir tane $c_i \neq 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ ise bu vektörler lineer bağımsız değildir. X bir vektör olsun ve A katsayılar matrisi olsun;

$$AX=\lambda X$$

eşitliğini sağlayan λ, A matrisinin özdeğeridir ve X' te λ' ya karşılık gelen özdeğer vektörüdür. Buradan;

$$(A-\lambda I)X=0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin determinantı hesaplanarak A matrisinin karakteristik polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri A matrisinin özdeğerleridir. Bu özdeğerler kullanılarak özvektörler elde edilir. Özdeğer hesaplamak için birçok yöntem vardır. Bu yöntemler Kuvvet yöntemi, Jacobi yöntemi, Householder yöntemi gibi yöntemlerdir. Kuvvet yöntemi, en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörünü bulmaktadır. Jacobi yöntemi, bütün özdeğerleri ve bunlara karşılık düşen özvektörlerini bulmaktadır. Householder yöntemi ise, reel simetrik olan bir matrisi üç-diyagonal matrisine dönüştürmektedir.

Jacobi yönteminde bütün özdeğerler ve özvektörleri bulunabildiğinden, bu çalışmada, bu yöntem kullanılmıştır. Jacobi yöntemi simetrik matrislerin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmada kullanılmaktadır. Bir çizgenin Laplace matrisi de simetrik bir matris olduğundan, bu yöntem kullanılabilir.

3.3.2.2.Düzlem Döndürme

X, n-boyutlu bir vektör ve Y=RX olsun.

$$R=\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\quad p \qquad\qquad\quad q \end{array} \tag{3.3.2.2.1}$$

R, nxn boyutunda, diyagonal elemanları 1 ve diyagonal dışındaki elemanları sıfır, fakat p ve q sütun ve satırına denk gelen diyagonal elemanları;

$r_{pp} = r_{qq} = \cos\varphi$

$r_{pq} = -\sin\varphi$

$r_{qp} = \sin\varphi$

olan bir matris olsun;

$y_i = x_j \; eğer \; j \neq p \; ve \; j \neq q$

$y_p = x_p \cos\varphi + x_q \sin\varphi$

$y_q = x_p \sin\varphi + x_q \cos\varphi$

Bu dönüşüm n boyutlu bir uzayın $x_p x_q$ düzleminde φ açısı ile döndürülmesidir. Bunun ters dönüşümü ise aynı uzayın aynı düzlemde $-\varphi$ açısı ile döndürülmesidir ve ters dönüşüm $X=R^{-1}Y$. R matrisi ortogonal bir matris olduğundan $R^{-1}=R^T$ veya $R^TR=I$ olur.

3.3.2.3.Benzerlik ve Ortogonal Dönüşümler

$$AX=\lambda X \tag{3.3.2.3.1}$$

Bu özdeğer problemi düşünülecek olursa, K matrisi singular olmayan bir matris olsun ve B,

$B=K^{-1}AK$

bağıntısını sağlasın. Burada her iki tarafi $K^{-1}X$ çarpacak olursak;

$$BK^{-1}X=K^{-1}AKK^{-1}X=K^{-1}AX=K^{-1}\lambda X=\lambda K^{-1}X \qquad (3.3.2.3.2)$$

elde edilir. Değişken değişimi aşağıdaki gibi yapılırsa

$$Y=K^{-1}X \text{ veya } X=KY \qquad (3.3.2.3.3)$$

elde edilir. Eğer (3.3.2.3.3) bağıntıları (3.3.2.3.2)' de yerine yazılırlarsa

$$BY=\lambda Y \qquad (3.3.2.3.4)$$

yeni bir özdeğer problemi elde edilmiş olur. (3.3.2.3.1) ve (3.3.2.3.4) bağıntıları karşılaştırılırlarsa, özdeğerleri aynı ve özvektörleri aynı olmak zorunda olmayan iki tane matrisin elde edildiği görülür (A ve B matrisleri). Bu da benzerlik dönüşümünün özdeğerleri koruduğunu gösterir.

R matrisinin ortogonal olduğu kabul edilsin ve D matrisi şu şekilde tanımlansın.
$D=R^TAR$

Bu bağıntının her iki tarafi R^TX ile çarpılırsa;

$$DR^TX=R^TARR^TX=R^TAX=R^T\lambda X=\lambda R^TX \qquad (3.3.2.3.5)$$

elde edilir. Aynı şekilde değişken değişimi şu şekilde yapılabilir.

$$Y=R^TX \text{ veya } X=RY \qquad (3.3.2.3.6)$$

(3.3.2.3.5) ve (3.3.2.3.6) beraber kullanılırsa, yeni bir özdeğer problemi elde edilir.

$$DY=\lambda Y \qquad (3.3.2.3.7)$$

$R^{-1}=R^T$ olduğundan X' ten Y' nin ve Y' den X' in elde edilmesi kolaydır. (3.3.2.3.1) bağıntısı ile (3.3.2.3.7) bağıntısı karşılaştırılırsa, özdeğer probleminde özdeğerlerin değişmediği ve sadece yeni bir matrisin elde edildiği görülür.

Eğer A matrisi simetrik bir matris ise;

$D^T=(R^TAR)^T=R^TA(R^T)^T=R^TAR=D$

olur. Böylece D matrisi de simetrik bir matristir. Eğer A simetrik ve R ortogonal matrisler ise, A matrisinden D matrisine olan dönüşüm hem özdeğerleri ve hem de simetrikliği korumaktadır. Özvektörleri arasındaki ilişki ise (3.3.2.3.6)' deki gibidir.

3.3.2.4.Dönüşümlerin Jacobi Serileri

Dönüşümlere, reel ve simetrik olan A matrisi ile başlanır ve ortogonal olan R_1, R_2, ..., R_n matrisleri şu şekilde elde edilir.

$$D_0 = A$$
$$D_j = R_j^T D_{j-1} R_j \quad j = 1,2,\dots$$

D matrisinin diyagonal üzerinde olmayan elemanları sıfıra yaklaşınca işlem durdurulur ve

$$\lim_{j\to\infty} D_j = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
$$D_n = D$$

olur. Buradan

$$D_n = R_n^T R_{n-1}^T \dots R_1^T A R_1 R_2 \dots R_{n-1} R_n$$

olur. Eğer R matrisi için şu tanımlama yapılırsa;

$R=R_1R_2...R_{n-1}R_n$

olur ve bu tanımlamadan yola çıkılarak, $R^{-1}AR=D$ aşağıdaki sonucu verir.

$AR=RD=R\ diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$

R matrisinin sütunları X_1, X_2, ..., X_n vektörleri ile gösterilirse, $R=[X_1,X_2, .., X_n]$ olur. Buradan;

$AR=[AX_1,\ AX_2,\ \dots,\ AX_n]=[\lambda_1 X_1,\ \lambda_2 X_2,\ \dots,\ \lambda_n X_n]$ elde edlir.

Görüldüğü gibi R matrisinin sütunları özvektörlerini göstermektedir.

Jacobi yönteminde, her adımda A matrisinin a_{pq} ve a_{qp} elemanları sıfır yapılır. R_1 ilk ortogonal matris ve $D_1 = R_1^T A R_1$ olsun. R_1 matrisi (3.3.2.2.1)' de görülen matristir. Her adımda değişikliklerin p ve q satırları ile p ve q sütunlarında yapıldığının ispatlanması gerekir. $B=AR_1$ olsun.

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qp} & \cdots & a_{qq} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Bu çarpım yapılacak olursa

$$\begin{aligned} b_{jk} &= a_{jk} && eğer\ k \neq p\ ve\ k \neq q \\ b_{jp} &= \cos\varphi\, a_{jp} - \sin\varphi\, a_{jq} && j = 1,2,\dots,n \\ b_{jq} &= \sin\varphi\, a_{jp} + \cos\varphi\, a_{jq} && j = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

olur. $D_1 = R_1^T A R_1$ dönüşümü A matrisinin sadece p ve q satırları ile p ve q sütunlarının değişimine sebep olacaktır. A matrisinin diğer elemanları değişmeden D matrisine geçecektir.

$$
\begin{aligned}
d_{jp} &= \cos\varphi\, a_{jp} - \sin\varphi a_{jq} && eğer\ j \neq p\ ve\ j \neq q \\
d_{jq} &= \sin\varphi a_{jp} + \cos\varphi\, a_{jq} && eğer\ j \neq p\ ve\ j \neq q \\
d_{pp} &= \cos\varphi\, a_{pp} + \sin^2\varphi\, a_{qq} - 2\cos\varphi \sin\varphi a_{pq} \\
d_{qq} &= \sin^2\varphi\, a_{pp} + \cos^2\varphi\, a_{qq} + 2\cos\varphi \sin\varphi a_{pq} \\
d_{pq} &= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) a_{pq} + \cos\varphi \sin\varphi (a_{pp} - a_{qq})
\end{aligned}
$$

D_1 matrisinin diğer elemanları simetri ile bulunurlar. Burada önemli olan $\cos\varphi$ ve $\sin\varphi$ değişkenlerinin nasıl bulunacağıdır.

$$\theta = \cot 2\varphi = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\cos\varphi \sin\varphi}$$

Bu eşitlikten (4.33) eşitliğinin son denklemi kullanılarak

$$\theta = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) a_{pq} + \cos\varphi \sin\varphi (a_{pp} - a_{qq})$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenerek aşağıdaki biçime getirilir.

$$\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = t$ ve (4.36) eşitliği kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$t^2 + 2t\theta - 1 = 0$$

Buradan

$$t = -\theta \pm (\theta^2 + 1)^{1/2} = \frac{sign(\theta)}{(|\theta| + \theta^2 + 1)^{1/2}}$$

olur ve buradan $\cos\varphi$ ve $\sin\varphi$ hesaplanabilir.

$$\cos\varphi = \frac{1}{(t^2+1)^{1/2}}$$

$$\sin\varphi = t\cos\varphi$$

Bir grafın Laplace matrisinin özdeğer ve özvektörlerini kullanarak nasıl bölümlenebileceğini ilk olarak Fiedler bulmuştur. Bu işleme, grafın iki parçaya bölündüğünü düşünüp bu iki parça arasında kalan ayrıtların ağırlık toplamının minimum olması gerektiğini kabul ederek başlamıştır. Grafın bir parçasındaki düğümlere +1 değeri, diğer parçasındaki düğümlere ise -1 değeri verildiğinde, aşağıdaki fonksiyon ile bu iki parça arasında kalan ayrıt sayısının bulunabildiğini ispatlamıştır (3.3.2.4.1).

$$f = \frac{1}{4}\sum E_{ij}(x_i - x_j)^2 \qquad (3.3.2.4.1)$$

3.4.QR Algoritması

Öz değerler bir matristeki en önemli nümerik ifadelerden biridir ve özdeğer hesaplamak karmaşık bir işlemdir. QR algoritması 20.yüzyılın en iyi 10 algoritması arasında yer almaktadır. QR algoritması 1950'lerin sonunda John G.F. Francis ve Vera N. Kublanovskaya tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir (Francis, 1961). QR algoritması, A=QR, Q üst köşegen ve R ortogonal matris olmak üzere iki matrise ayrılarak ilerleyen işlemler dizisinden oluşur. 1960'ların ortalarından bu yana QR algoritması büyük matrislerin öz değer problemlerini kolaylaştırmıştır.

3.4.1. Gram-Schmidt Yöntemi ile QR Ayrışımı

$A = [a_1|a_2|\dots|a_n]$ matrisinin sütun vektörleri $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olmak üzere;

$$u_1 = a_1, \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2^T e_1)e_1, \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_{k+1} = a_{k+1} - (a_{k+1}^T e_1)e_1 - \cdots - (a_{k+1}^T e_k)e_k, \quad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$A = [a_1|a_2|\ldots|a_n] = [e_1|e_2|\ldots|e_n]\begin{bmatrix} a_1e_1 & a_2e_1 & \cdots & a_ne_1 \\ 0 & a_2e_2 & \cdots & a_ne_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_ne_n \end{bmatrix} = QR$$

Q matrisi bulunduktan sonra $A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR \Rightarrow R = Q^T A$ şeklinde de R matrisi elde edilebilir.

Örnek 3.4.1.1.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin sütun vektörleri $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğundan;

$$u_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2^T e_1)e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3/2}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = a_3 - (a_2^T e_1)e_1 - (a_3^T e_2)e_2 \ \Rightarrow$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$Q = [e_1|e_2|e_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_1 e_1 & a_2 e_1 & a_3 e_1 \\ 0 & a_2 e_2 & a_3 e_2 \\ 0 & 0 & a_3 e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

3.4.2. Gram-Schmidt Zahiri Kod

QR ayrışımını bilgisayar ortamında hızlı bir şekilde hesaplayabilmek için herhangi bir bilgisayar programlama diline uygulanabilir şekilde gram-schmidt zahiri kod aşağıda verilmiştir.

Başla

$j = 1 \dots n$

$hesapla\ r_{jj} = \sqrt{a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{nj}^2}$

$eğer\ r_{jj} = 0\ ise\ dur; "Lineer\ Bağımlı"\ \ yaz.$

$değilse\ i = 1 \dots .n$

$hesapla\ a_{ij} = \frac{a_{ij}}{r_{ij}}$

$k = (j+1) \dots ..n$

$hesapla\ r_{jk} = a_{1j}a_{1k} + \cdots + a_{nj}a_{nk}$

$i = 1 \dots ..n$

$hesapla\ a_{ik} = a_{ik} - a_{ij}a_{jk}$

Bitir.

3.4.3. QR Algoritması ile Özdeğer ve Özvektör Hesabı

A matrisinin QR ayrışımı ile özdeğer ve özvektörlerini hesaplayabilmek için önce A matrisi Q ortogonal ve R üst köşegen matrislere ayrılır.

$A = QR$

Daha sonra elde edilen Q ortogonal ve R üst köşegen matrisler;

$$A_1 = RQ, \qquad S = Q$$

şeklinde çarpılarak A_1 ve S matrisleri elde edilir. Elde edilen bu A_1 matrisi tekrardan QR ayrışımı ile Q_1 ortogonal ve R_1 üst köşegen matrislere ayrılır. Daha sonra elde edilen Q_1 ortogonal ve R_1 üst köşegen matrisler;

$$A_2 = R_2 Q_2, \qquad S_1 = QQ_1$$

şeklinde çarpılarak A_2 ve S_1 matrisi elde edilir.

$$\begin{aligned}
A &= QR \\
A_1 &= RQ, & S &= Q \\
A_1 &= Q_1 R_1, & S_1 &= QQ_1 \\
A_2 &= R_1 Q_1 \\
A_2 &= Q_2 R_2, & S_2 &= QQ_1Q_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
A_n &= Q_n R_n, & S_n &= QQ_1Q_2 \dots Q_n
\end{aligned}$$

Bu şekilde A_n matrisi köşegen matris oluncaya kadar işleme devam edilir. Bu işlemler sonucunda, A_n özvektörler ve S_n özdeğerler olarak elde edilir.

Örnek 3.4.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ matrisinin özdeğer ve özvektörleri:

$A = QR$ ayrışımı yapılacak olursa;

$$S = Q = \begin{bmatrix} -0.8944 & 0.4082 & 0.1826 \\ -0.4472 & -0.8165 & -0.3651 \\ 0 & -0.4082 & 0.9129 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -2.2361 & -2.2361 & -0.4472 \\ 0 & -2.4495 & -2.4495 \\ 0 & 0 & 3.2863 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra RQ çarpımı ile A_1 matrisini elde edilir.

$$A_1 = RQ = \begin{bmatrix} -2.2361 & -2.2361 & -0.4472 \\ 0 & -2.4495 & -2.4495 \\ 0 & 0 & 3.2863 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8944 & 0.4082 & 0.1826 \\ -0.4472 & -0.8165 & -0.3651 \\ 0 & -0.4082 & 0.9129 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.0954 & -0.0000 \\ 1.0954 & 3.0000 & -1.3416 \\ 0 & -1.3416 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

A_1 matrisini $A_1 = Q_1 R_1$ şeklinde ayrıştırılsın;

$$S_1 = Q_1 = \begin{bmatrix} -0.9393 & 0.3006 & -0.1651 \\ -0.3430 & -0.8233 & 0.4523 \\ 0 & 0.4815 & 0.8765 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} -3.1937 & -2.0580 & 0.4602 \\ 0 & -2.7865 & 2.5490 \\ 0 & 0 & 2.0226 \end{bmatrix}$$

Daha sonra $R_1 Q_1$ çarpımı ile A_2 matrisini elde edilir.

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} -3.1937 & -2.0580 & 0.4602 \\ 0 & -2.7865 & 2.5490 \\ 0 & 0 & 2.0226 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.9393 & 0.3006 & -0.1651 \\ -0.3430 & -0.8233 & 0.4523 \\ 0 & 0.4815 & 0.8765 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3.7059 & 0.9558 & 0 \\ 0.9558 & 3.5214 & 0.9738 \\ 0 & 0.9738 & 1.7727 \end{bmatrix}$$

Bu şekilde 27 adım devam edilecek olursa;

$$S_{27} = Q_{27} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{27} = \begin{bmatrix} -4.7321 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2679 \end{bmatrix}$$

$$A_{28} = R_{27} Q_{27} = \begin{bmatrix} -4.7321 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{28} = \begin{bmatrix} 4.7321 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2679 \end{bmatrix}$ matrisi köşegen matris haline geldiğinden işlem

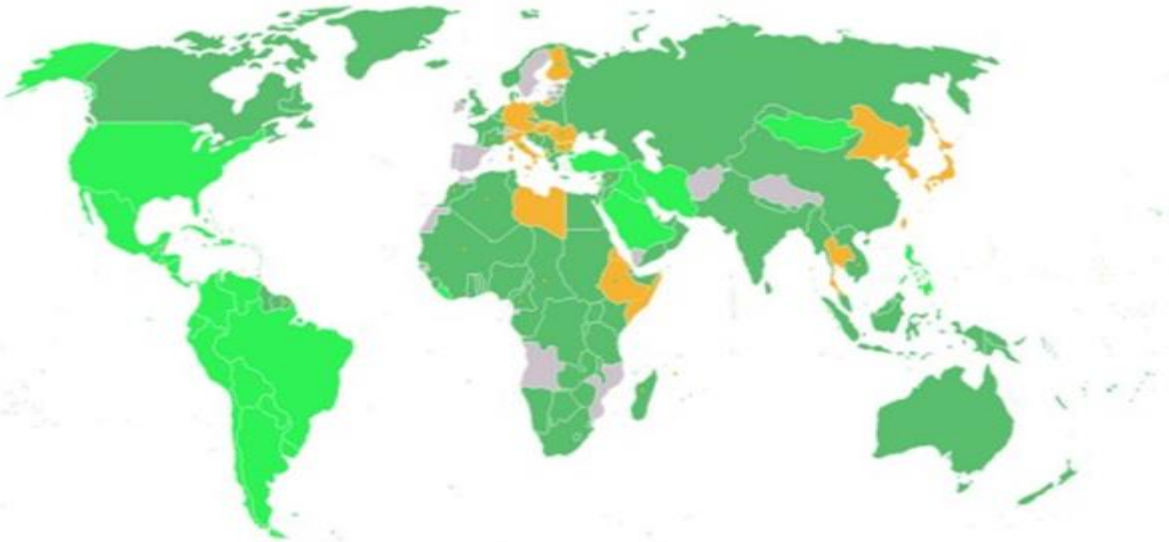
durdurulur ve elde edilen A_{28} matrisi bize özdeğerleri verir. Bu işlemlerden sonra;

$$S_n = QQ_1Q_2 \dots Q_n = \begin{bmatrix} 0.2113 & -0.5774 & 0.7887 \\ 0.5774 & -0.5774 & -0.5774 \\ 0.7887 & 0.5774 & 0.2113 \end{bmatrix}$$

şeklinde veya $A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR \Rightarrow R = Q^T A$ dönüşümü ile özvektörleri elde edilebilir.

4. UYGULAMA

Bu bölümde İkinci Dünya Savaşı'na katılan ülkelere ve savaşa zemin hazırlayan olaylara değinilmiştir. Ayrıca, ülkeler arasındaki kutuplaşmalara ve yakınlaşmalara sebep olan gelişmeler ekonomik, siyasi, etnik ilişkiler ve gizli antlaşmalar başlıkları altında değerlendirilmiştir.



Şekil 6 : İkinci Dünya Savaşı haritası.

4.1.İkinci Dünya Savaşı'na Katılan Ülkeler (1939–1945)

Koyu Yeşil : Pearl Harbour saldırısından önceki Müttefikler
Açık Yeşil : Pearl Harbour saldırısından sonraki Müttefikler
Turuncu : Mihver Devletler

II. Dünya Savaşı, başlarda iki büyük güç arasında yapılıyordu: Mihver Güçler ve Müttefik Güçler. Mihver güçler, Nazi Almanya'sının ve Japon krallığının öncülük ettiği bir grup ülkeydi ve savaşın saldıran tarafı olarak bilinmektedir. İngiltere ve yenilgisine kadar Fransa tarafından öncülük edilen Müttefik güçler, 1941 Haziranında Ruslar tarafından, 1941 Aralığında da Amerika tarafından Avrupa bölgesine katılmıştır. Asya - Pasifik bölgesindeki Müttefikler ise Çin Cumhuriyetinin önderliğindeydi. Çin'in savaşa katılma sebebi, 1937 de

Japonya'nın Çin'i işgal etmesiydi. Bu guruba, Pearl Harbour saldırısından sonra Amerika da katılmıştır. (Üçok, 1975).

4.1.1. Mihver Güçler

Başlangıçta Roma-Berlin ekseni (Steel Antlaşması), daha sonra ise Üçlü Antlaşma kavramı üzerine kurulmuştu. Eksen güçler başlarda resmi bir ittifak değildi. Büyük ülkelerin her biri kendi inisiyatifiyle savaşa girmişti (Nazi Almanya'sı 1939'da, İtalya 1940'da, Japonya Çin'e karşı 1937'de, Amerika'ya karşı 1941'de) ve birbirlerine yardım etmek zorunda değildi. Ancak büyük mihver devletler arasında az da olsa teknoloji, kaynak yardımı ve stratejik planlama açısından işbirliği olmuştur (Hosch, 2009).

İtalya'nın savaşı terk etmesiyle, Almanya ve Japonya savaşı birbirinden tamamen ayrı güçler olarak, kendi sahnelerinde yürütmüşlerdir (Almanya Avrupa'da, Japonya Pasifikte). Savaş çoğunlukla Almanya ve Japonya tarafından yönetilip desteklendiyse de Mihver güçler tarafında olan daha küçük devletler de vardı (Hosch, 2009).

Katılan devletler :

Almanya, İtalya Krallığı, Japon İmparatorluğu, Finlandiya, Vichy Fransası, Macaristan Krallığı, Romanya Krallığı, Bulgaristan Krallığı, Bağımsız Hırvatistan Devleti, Büyük Arnavutluk, Etiyopya, Mançukuo, Tayland, Myanmar, Hindistan, Filipinler, Moğol Özerk Hükûmeti, Irak Krallığı, Slovakya, Sırbistan, Karadağ

4.1.2. Müttefik (İttifak) Güçler

Mihver Güçler gibi, Müttefikler de tamamı ile tutarlı bir birlik içerisinde değildi. Asıl/öncü ittifak ülkeleri olan İngiltere ve Fransa, bağlılıklarını Polonya'nın güvenliği üzerine kurmuşlardı. Diğer ülkeler de Nazi Almanya'sı tarafından işgal edildiği için Müttefik güçlere katılmıştır. Fransa'nın düşüşü, Müttefik devletlerde tek büyük ülke olarak İngiltere'yi bırakmıştır. Müttefik güçlerin geri kalanının çoğunu İngiliz Milletler Topluluğu ve sürgündeki çeşitli hükümetler tarafindan yönetilen güçler oluşturuyordu (Natkiel, 2001).

Avrupa'da savaş, resmen Polonya'nın Almanya ve Sovyetler Birliği tarafından 1939'da işgal edilmesiyle başladıysa da, Asya ve Afrika'da İtalya'nın 1936'da Etiyopya'yı işgaliyle ve 1937'de de Japonya'nın Çini işgaliyle çok daha önceden başlamıştı. Daha sonra, Avrupa'ya ve Pasifik okyanusuna sıçrayan savaş sebebiyle, topraklarının 3'te biri işgal altında olan Çin, Hindistan'ı Japon işgalinden koruması ve Burma'yı (Şimdiki Myanmar) yeniden alması için askeri kuvvetlerini İngiltere'ye göndermiştir.

1941 yılında, Nazi Almanya'sının Sovyetler Birliğine saldırısıyla, İngiltere, Komünist Sovyetler Birliğini kendi ittifaklarına kabul etmiştir. Saldırıdan önce İngiltere Rusya'nın liderliğiyle nasıl baş edeceği konusunda endişeliydi, çünkü Rusya, İngiltere'nin müttefiki olan Polonya'ya karşı saldırgan bir politika izliyordu. Ancak Winston Churchill 1939'da yeni Sovyet-Alman sınırının Hitlerin hiçbir zaman kıramayacağı bir Nazi karşıtı sınır olduğunu söylemişti (Natkiel, 2001). Churchill'in bu sözleri birçoklarınca Hitleri SSCB'ye karşı kışkırtmak için bir girişim olarak görülüyordu. Ancak, Sovyetler Birliği Müttefiklere katıldıktan sonra, Alman ordusunun ana kuvvetlerini ortadan kaldırmak için büyük çaba sarf etmiştir.

1941 yılında Japonların Pearl Harbour saldırısının ardından, ABD resmen savaşa girerek Müttefik güçlere savaşın her iki sahnesinde de yardımcı olma vaadinde bulundu. ABD, Pearl Harbour saldırısından önce müttefiklerinin çoğuna kaynaklar ve askeri kuvvetler konusunda destek olmuştu, ancak saldırının ardından ABD ancak kendi güçlerine katkıda bulunabilmiştir (Artuç, 1999).

Mihver devletler safında olan ülkelerin büyük bir çoğunluğu savaş sırasında Müttefiklere katılmıştır. Yalnızca Mihver güçler tarafından saldırıya uğrayanlar değil, savaşla doğrudan ilgisi olmayan birçok küçük ülke de savaş sırasında veya savaştan sonra hem kendi güvenliklerini sağlamak hem de ekonomik ve askeri anlamda müttefiklerin desteğini alabilmek için sonradan Müttefik güçler safında yer almıştır (Hosch, 2009).

Polonya'nın işgalinden sonra katılan devletler :

Polonya: 1 Eylül 1939, Avustralya: 3 Eylül 1939, Yeni Zelanda: 3 Eylül 1939, Büyük Britanya: 3 Eylül 1939, Fransa: 3 Eylül 1939, Nepal: 4 Eylül 1939, Güney Afrika: 6 Eylül 1939, Kanada: 10 Eylül 1939

Norveç'in istilası'ndan sonra katılan devletler :

Norveç: 9 Nisan 1940, Belçika: 10 Mayıs 1940, Lüksemburg: 10 Mayıs 1940, Hollanda: 10 Mayıs 1940, Yunanistan: 28 Ekim 1940, Yugoslavya: 6 Nisan 1941, SSCB: 22 Haziran 1941, Tannu Tuva: 25 Haziran 1941

Pearl Harbor Saldırısı'ndan sonra katılan devletler :

Panama: 7 Aralık 1941, Kosta Rika: 8 Aralık 1941, Dominik Cumhuriyeti: 8 Aralık 1941, El Salvador: 8 Aralık 1941, Haiti: 8 Aralık 1941, Honduras: 8 Aralık 1941, Nikaragua: 8 Aralık 1941, ABD: 8 Aralık 1941, Çin: 9 Aralık 1941, Guatemala: 9 Aralık 1941, Küba: 9 Aralık 1941

Birleşmiş Milletler'in deklarasyonundan sonra katılan devletler :

Meksika: 22 Mayıs 1942, Brezilya: 22 Ağustos 1942, Etyopya: 14 Aralık 1942, Irak Krallığı: 17 Ocak 1943, Bolivya: 7 Nisan 1943, İran: 9 Eylül 1943, İtalya: 13 Ekim 1943, Kolombiya: 26 Kasım 1943, Liberya: 27 Ocak 1944, Peru: 12 Şubat 1944

Normandiya Çıkarması'ndan sonra katılan devletler:

Romanya: 23 Ağustos 1944, Bulgaristan: 8 Eylül 1944, San Marino: 21 Eylül 1944, Arnavutluk: 26 Ekim 1944, Macaristan: 20 Ocak 1945, Bahawalpur: 2 Şubat 1945, Ekvador: 2 Şubat 1945, Paraguay: 7 Şubat 1945, Uruguay: 15 Şubat 1945, Venezuela: 15 Şubat 1945, Türkiye: 23 Şubat 1945, Arjantin: 27 Mart 1945, Şili: 11 Nisan 1945

Hiroşima'ya atom bombası saldırısından sonra katılan devletler:

Moğolistan: 9 Ağustos 1945

4.2.Savaşın Genel Sebepleri

Savaşa katılan her ülkenin kendine özgü sebepleri olduğu için, ülkeler tek tek ele alınacaktır.

4.2.1. **Almanya:** Adolph Hitlerin başında olduğu Nazi Almanya'sı, savaşın Avrupa ayağındaki temel Mihver gücü oluşturuyordu. Hitler, öncelikle Orta Avrupa, ardından Doğu ve Batı Avrupa'yı Almanya topraklarına katmak ve Asya'yı, özellikle Sovyetler Birliği ve Yakın Doğu'daki stratejik noktaları ele geçirmek istemektedir. Almanya'nın 4-8 Mayısta teslim olması, Avrupa'da savaşı bitirmiştir (Deutch, 1954).

4.2.2. **Japonya:** I.Dünya Savaşı sonunda Almanya'nın Uzak Doğu sömürgeleri Japonya'ya verilmişti. Üstelik Çin'in bir bölümü de Japonya'nın hakimiyetindeydi. Ancak bu kadar sömürge bile hızla sanayileşen ve büyüyen Japon ekonomisini doyuramıyordu. Ekonomik çıkarlar için ABD ile yakınlaşan Japonya, savaşın patlak vermesi ile Almanya'ya yakınlaşmış ve Pearl Harbor Saldırısı ile kesin olarak savaşa girmiştir. Japonya Mihver Devletlerin parçasıydı (Armaoğlu, 1984). Bazı insanlar 2.Dünya Savaşının aslında Japonya'nın Çini istilası ile başladığını düşünür. Savaş, Hiroşima ve Nagasaki Atom bombalamalarından sonra, Japonya'nın kapitülasyonu ile sona erdi.

4.2.3. **ABD:** Savaşın başında tarafsız kalan ABD, sonraları Fransa ve Birleşik Krallığa silah yardımı yapmıştır. Japonya tarafından Pearl Harbor'da saldırıya uğramış ve kesin olarak savaşa girmiştir. ABD'nin savaşa girmesi ve Almanların Sovyetler Birliği'ni istila etmesi savaşın seyrini değiştirmiş, Almanya genişleme politikası yerine var olan sınırlarını koruma politikasını uygulamıştır. ABD aynı zamanda Pasifik bölgesinde birincil Müttefik güç olduğu için, Japonya'ya karşı da güçlü bir çaba harcamıştır. Savaştan sonra, ABD bir yandan savaş sırasında yıkım yaşayan uluslara yeniden ekonomik yatırım sunarken bir yandan da Avrupa güvenliği için askeri taahhütlerini korudu. Politik olarak, ABD NATO'yu oluşturarak Batılı Müttefiklerin lideri oldu ve Güvenlik Konseyinin daimi sandalyelerinden birini kazandı (Armaoğlu, 1984).

4.2.4. **Sovyetler Birliği:** Sovyetlerin II. Dünya savaşına katılımı, 1939 yılında Moğolistan'da Japonya ile kısa bir sınır savaşı ile başladı. Aynı yıl daha sonra, Molotov-Ribbentrop Paktı ile korunan Sovyetler, Almanların ülkenin batısını işgalinden yaklaşık üç hafta sonra Doğu Polonya'yı işgal etti (Deutch, 1954). Sonraki on bir ay boyunca Sovyetler, Baltık ülkelerini (Estonya, Letonya ve Litvanya) işgal etti ve topraklarına kattı. Finlandiya’nın, Sovyetlerin askeri üsler ve toprak takası taleplerini reddetmesinin ardından, Sovyetler Birliği 30 Kasım 1939 tarihinde, Kış Savaşında Finlandiya’ya saldırdı. Sovyetler Birliği ayrıca Romanya’yı Almanya müttefiki olmaya yönlendiren Besarabya’yı (bir Rumen vilayet) topraklarına kattı. Almanya'da 1941 yılında Sovyetler Birliği'ne sürpriz bir saldırı başlattı. Bundan sonra, Alman güçlerinin çoğu Doğu Cephesi üzerine yoğunlaştı. SSCB'nin Alman yenilgisinde çok önemli bir rolü oldu, çünkü Almanlar, kaynaklarının ve insan gücünün % 90’ını Doğu cepheleri üzerine yoğunlaştırdı ve burada tüketti. Sovyet Kızıl Ordusu kış aylarında başarılı bir karşı-saldırıya geçti ve 1943 yılında büyük zaferler dizisi kazandı: Doğu Avrupa’da Sovyetlerin ilerlemesi ve Almanya’da 1945’te Berlin Savaşının ortaya çıkması gibi. Sovyetler Birliği savaşta diğer katılımcılardan çok daha fazla askeri ve sivil kayıp yaşadı. Avrupa’da savaşın bitiminin ve Amerika’nın Hiroşima’yı bombalamasının ardından, SSCB 1945 yılında Japonya'ya savaş ilan etti. Sovyetler Birliği'nin ana galiplerden biri oldu ve Birleşmiş Milletler Güvenlik Konseyi'nde daimi sandalyelerden birini kazandı. Savaştan sonra, Sovyetlerin etki alanı Varşova Paktıyla Doğu Avrupa’da genişletildi. Sovyetler Birliği Soğuk Savaşta iki süper güçten biri olarak kabul edilmeye başlandı (Armaoğlu, 1984).

4.2.5. **Birleşik Krallık (İngiltere):** İngiltere, ilk müttefik ülkelerden biriydi. Savaşa girme sebebi Polonya’yı onore etmekti. İngiltere, Fransa’nın düşüşünden sonra, Yunanistan’ın işgaline kadar Avrupa'da kalan tek müttefik ülke oldu. Sovyetler Birliği'nin işgal edildiği 1941 yılına kadar, savaştaki Üç Büyüklerden bir tek İngiltere kaldı. İngiltere ağırlıklı olarak, Batı Avrupa, Atlantik, Akdeniz, Afrika ve Güney Doğu Asya bölgelerinde savaştı ve savaşın ikinci yarısında Müttefiklerin arasında en büyük güçlerden biri olarak kabul edildi. Adolf Hitler tarafından Avrupa'daki tek rakip olarak görülen Birleşik Krallık, Almanya'nın Avrupa'nın tamamına yayılmasını önlemiştir. ABD tarafından sürekli mühimmatla desteklenen

Birleşik Krallık, ABD'nin savaşa girmesine kadar özellikle Kraliyet Hava Kuvvetleri ile ön plana çıkmış, Orta Avrupa'da kesin bir hava hakimiyeti sağlamıştır. ABD'nin savaşa girmesiyle birlikte kara kuvvetleriyle ön plana çıkan Birleşik Krallık, II. Dünya Savaşı'nın en büyük aktörü olmuştur (Artuç, 1999).

4.2.6. **İtalya:** I. Dünya Savaşı'ndan istediğini alamayan İtalya dar bir sömürge alanıyla sanayisini beslemeye çalışıyordu. Ayrıca I. Dünya Savaşı'nda İtilaf devletleri ile görüş ayrılığına düşen İtalya, Mussolini'nin faşist politikaları nedeniyle Avrupa'da sorun teşkil ediyordu. İtalya'nın eski Roma İmparatorluğu gibi güçlü bir devlet olmasını isteyen Mussolini, Fransa'nın yenilgisi ile Müttefik topraklarından bir pay almak planıyla Almanya ile yakınlaşarak Mihver devletler bloğunda savaşa girmiştir. İtalya; Kuzey Afrika ve Balkanlar'da ilerlemiştir. İtalya'nın savaş çabaları Yunanistan, Kuzey Afrika ve Akdeniz'deki yenilgileriyle kötü gitmiş, İtalya'da 1943 yılında Müttefikler tarafından işgal edilmiş ve Mussolini hükümeti yıkılmıştır. İtalya, Müttefiklerin işgal ettiği güney ve Faşist hükumetin kalıntılarının olduğu kuzey olarak ikiye bölündü. İtalya Savaştan sonra NATO üyesi oldu, ancak Istria Yarımadası'nı Yugoslavya'ya kaptırdı (Artuç, 1999).

4.2.7. **Avusturya:** Avusturya Versay (Almancadaki karşılığı Anschluss) anlaşması gereği 1938 yılında Almanya'nın bir parçası oldu. Mihver Güçlerin yenilgisinden sonra, Müttefikler II. Dünya savaşı sonunda 1955'e kadar Avrupa'yı işgal ettiler. 1955'te ise ülkeye, tarafsız kalması koşuluyla, tekrar tam bağımsız bir cumhuriyet olma hakkı verildi (Hosch, 2009).

4.2.8. Çin: Savaş başladığında zaten Japonya ile savaş halinde olan ve bunun yanı sıra, Çin Nasyonal Partisi (Kuomintang) ve Çin Komünist Partisi arasındaki bir iç çatışma ile mücadele eden Milliyetçi Çin hükümeti, savaş süresince tüm dikkatini Japonya ile olan sınırını korumaya verdi. Ancak, Chiang Kai-shek yine de 1942 yılının başlarında, Burma'da İngiltere'ye askeri yardım göndermeyi başardı. Çin'in katılımı da şu anlamda önemliydi: 1 milyondan fazla Japon askerî personeli, işgali sonuçlandırmak amacıyla Çin'e gönderildi. Çin'deki Japon kayıplarının 1,1 milyon olduğu tahmin edilmektedir (Hosch, 2009).

Savaşın büyük bir bölümü boyunca, Çin'in kent merkezleri ve sanayi kaynakları Japonya tarafından işgal edildi. Çin hem askeri hem de sivil birçok kayıp verdi. Japon kuvvetleri tarafından Çin sivillere karşı yapılan en ciddi zulümlerden biri, Çin'in başkenti Nanking (şimdiki Nanjing) in düşmesinden sonra Aralık 1937 yılında yapılmıştı. Nanking de yaşayan yüzbinlerce (kimi raporlara göre 300,000'den fazla) Çinli sivil, bir ay içinde Japon işgal gücü tarafından idam edildi. Savaştan sonra, Çin ana galip ülkelerden biri oldu ve Birleşmiş Milletler Güvenlik Konseyi'nde daimi sandalyelerden birini kazandı (Armaoğlu, 1984).

Savaş bittikten sonra, komünistler ve milliyetçiler birbirleriyle savaşmaya devam etti ve sonuçta komünistler Milliyetçileri anakaranın dışına, Tayvan'a sürdüler.

4.2.9. **Finlandiya:** Finlandiya Molotov-Ribbentrop Paktı ile Sovyet alanında kaldı ve SSCB'nin topraklarında üsler kurma talebine izin vermeyi reddedince, 30 Kasım 1939 - 13 Mart 1940 deki Kış Savaşında Sovyet güçleri tarafından saldırıya uğradı. Savaştan sonra, Finlandiya İsveç ve İngiltere'den güvenlik talebinde bulundu, ancak Sovyet tehditleri ve Alman eylemleri yardım etmelerini engelledi (Armaoğlu, 1984). Ardından Finlandiya, Sovyet baskısına karşı Nazi Almanya'sı ile iyi ilişkiler sürdürdü. Bu durum, ülkeler arasında birliktelik oluşturdu. Bu birliktelik, Barbarossa Harekâtından sonra Sovyetlerin Finlandiya'ya karşı önleyici hava saldırısı yapmasına sebep oldu. Bu saldırı, Finlandiya'nın Almanya'yı desteklediği Devam Savaşını (25 Haziran 1944 - 4 Eylül 1941) başlattı. İngiltere 6 Aralık 1941 yılında Finlandiya'ya savaş ilan etti, ancak Amerika Birleşik Devletleri hiçbir zaman savaş ilan etmedi. D-day ile koordine Sovyet saldırılarını durdurmak amacıyla gerekli askeri desteği sağlamak için, Finlandiya ve Nazi Almanya'sını aktif müttefik haline getiren Ryti-Ribbentrop Anlaşması, 26 Haziran 1944 tarihinde imzalandı. Sovyet saldırısı durdurulduktan ve Wehrmacht'ın Baltık Devletlerinden uzaklaştırılmasından sonra bir ateşkes imzalandı. Antlaşma, Finlandiya'nın tüm Alman askerlerini sınır dışı etmesini gerektiriyordu. Bu da Lapland Savaşı'na (15 Eylül 1944 - 25 Nisan 1945) yol açtı. Sovyetler Birliği ve İngiltere ile barış, 1947 yılında Paris Barış Antlaşmalarıyla tamamlanmıştır (Armaoğlu, 1984).

4.2.10. **Fransa:** Fransa Polonya güvenliğinin orijinal garantörlerinden biriydi ve savaşa İngiltere'nin yanında, Müttefiklerin lideri olarak katıldığında da aynı konumunu koruyordu. 1940 yılında, Fransa, Nazi Almanya'sı tarafından hızlı bir yenilgiye uğratıldı ve bu da Vichy Fransa'sının temelini attı. Fransız Ulusal Komitesinin, Londra merkezli sürgün grubu olan Özgür Fransız Kuvvetleri, Fransızların Müttefiklere bağlılığını korumak ve Almanya tarafından işgal edilen Fransız topraklarını kurtarmak için kuruldu. Bu kuvvetler, Batı Cephesi savaşlarında önemli bir rol oynadı. Fransa, 1944'te Müttefikler tarafından bağımsızlığına kavuşturuldu ve savaştan sonra Fransız Dördüncü Cumhuriyeti, Birleşmiş Milletler Güvenlik Konseyinin daimi üyesi; NATO'nun da kurucu üyesi olmuştur(Hosch, 2009).

4.2.11. Kanada: Milletler topluluğuna üye bir ülke olması sebebiyle, Kanada Polonya'nın işgal edildiği günlerde (10 Eylül 1939) Almanya'ya savaş ilan etti. 1. Dünya savaşının aksine, Kanada birimleri İngilizlerin daha az komutası altındaydı ve batı Avrupa'da Müttefiklerin mücadelesinde önemli bir rol oynadı. Kanada kuvvetleri özellikle de Almanya'ya karşı hava bombardımanlarında katkı sağladı. Kanada hava bombardımanı desteğini, İngiltere savaşları, Atlantik savaşı, İtalya'yla mücadele, müttefiklerin Normandiya'ya asker çıkardıkları gün ve Kuzey batı Avrupa'daki mücadelelerde de sürdürdü (Armaoğlu, 1984). Mart 1945'te, 1. Kolordunun İtalya'dan dönmesinin ardından, Kanada 1. ve 2. Kolorduları, Hollanda'daki Birinci Kanada ordusunun komutası altına girdi. 1941'den sonra Kanada kuvvetleri özellikle de İngiliz topraklarının Japon kuvvetlere karşı korunmasında yer aldı. 1944'ün sonlarına doğru Avrupa'daki savaş duruluyorken, birçok Kanada Kraliyet donanması ve personeli İngiliz Pasifik Filosuna katılmak için Atlantik'e sevk edildi. 2.

Dünya savaşında yaklaşık bir milyon Kanadalı hizmet etmiştir (Armaoğlu, 1984).

4.2.12. **Macaristan:** Macaristan savaş boyunca önemli bir Alman müttefiki oldu ve 20 Kasım 1940 da Üçlü Paktı imzaladı (Armaoğlu, 1984).

4.2.13. **Polonya:** Polonya, mağlup olan ilk müttefik güç oldu. 1939 Eylül'ünde, Nazi Almanya'sı ve daha sonra SSCB tarafından bir saldırıya uğradı. Birçok Polonyalı asker ülkeden kaçtı ve İngiltere savaşında ayrıca hizmet veren İngiliz kuvvetlere ve Polonyalı pilotlara katıldılar. Polonya direnişi de oluşturuldu ve Yunan ve Yugoslav direniş hareketleri ile birlikte meydan muharebesinde Alman güçleriyle sık sık karşı karşıya geldiler. İşgale direnen bu gruplar, cesurluklarıyla hatırlanır. Ayrıca Polonyalı bir ordu Sovyet toprakları üzerindeydi. Polonyalılar "üstün ırk" için bir tehdit olarak kabul ediliyordu ve bu yüzden milyonlarca Polonyalı toplama kamplarına gönderildi. Polonya, ABD, Britanya ve Sovyetler Birliğinden sonrası Müttefiklerin davasına 4. büyük katkı sağlayan ülke olmuştur (Üçok, 1975).

4.2.14. **Romanya:** Romanya'nın savaşa dâhil olması, Polonya hükümeti üyelerine, hazinesine ve birçok askerine 1939 yılında transit geçiş hakkı vermesiyle başladı. 1940 yılları boyunca, Sovyet işgali ile tehdit edilen Romanya, topraklarını Sovyetler Birliği, Macaristan ve Bulgaristan'a devretti ancak bir iç siyasi çalkantı sonrasında Romanya Mihver devletlere katıldı. Mihver devletlerin bir üyesi olarak, Romenlerin savaş çabalarının neredeyse tamamı Doğu cephesinde harcandı, örneğin Odessa operasyonu. Savaşın sonlarına doğru, Sovyet birliklerinin Romanya'ya girişi ile, hükümet Sovyet yanlısı biri ile değiştirildi ve savaşın geri kalanında bir yardımcı-saldırgan olarak Müttefiklere katıldı. Romanya savaştan sonra Varşova Paktının önemli bir üyesi oldu (Üçok, 1975).

4.3.Savaşa Katılan Ülkeler Arasındaki İlişkiler

Ülkeler	**Din**	**Komşular**
Almanya	Hristiyanlık (Protestan)	Fransa, Polonya, Avusturya, İngiltere
Amerika	Hristiyanlık (Katolik)	Kanada
Avusturya	Hristiyanlık (Katolik)	İtalya, Almanya, Macaristan
Çin	Budizm	Sovyetler Birliği, Japonya
Finlandiya	Hristiyanlık (Protestan)	Sovyetler Birliği
Fransa	Hristiyanlık (Katolik)	Almanya, İtalya, İngiltere
İngiltere	Hristiyanlık (Protestan)	Fransa, Almanya
İtalya	Hristiyanlık (Katolik)	Fransa, Avusturya
Japonya	Budizm, Şintoizm	Çin, Sovyetler Birliği
Kanada	Hristiyanlık (Katolik)	Amerika
Macaristan	Hristiyanlık (Katolik)	Romanya, Avusturya
Polonya	Hristiyanlık (Katolik)	Almanya, Sovyetler Birliği, Romanya
Romanya	Hristiyanlık (Ortodoks)	Sovyetler Birliği, Macaristan, Polonya
Sovyetler Birliği	Komünizm	Çin, Finlandiya, Polonya, Japonya, Romanya

Tablo 1 : Ülkelerin din ve komşuluk ilişkileri

4.3.1. Siyasi Çatışmalar/Antlaşmalar

Siyasi çatışmalar, ülkelerin savaşa katılmasına zemin hazırlayan, diğer ülkelerle yaşadığı siyasi anlaşmazlıklar olarak ele alınmıştır. Siyasi antlaşmalar ise ülkelerin çıkarlarını korumak amacıyla birbirleriyle yaptıkları antlaşmalardır.

4.3.1.1.İtalya, Avusturya – Macaristan :

1934 Martında Avusturya, İtalya ve Macaristan arasında sıkı bir siyasal ve ekonomik işbirliği kuran bir antlaşma imzalandı (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.2.Japonya – Çin :

Japonya, Çin'in ele geçirilmesini Uzakdoğu'daki varlığı için zorunlu görüyordu. Bu yüzden Japonya ve Çin arasında siyasal çatışma vardı. Japonya ilk adım olarak Mançurya ve Moğolistan'ın ele geçirilmesini gerekli görüyordu.

4.3.1.3.Japonya – Amerika :

Açık Kapı ilkesinin Manchukuo'da uygulanması konusunda Japonya ile Birleşik Amerika sürtüşme içerisindeydi.

4.3.1.4.Almanya- Fransa, İtalya, İngiltere :

Versay Antlaşmasının en önemli maddelerinden olan ‘silahsızlanma’, Alman hükümeti tarafından feshedilince Fransa, İtalya ve İngiltere, Almanya’ya karşı ortak bir cephe kurmak niyetiyle 14 Nisan 1935'de Stresa Anlaşmalarını imzaladı (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.5.Almanya- Fransa, Sovyetler Birliği:

Hitler'in Versay sistemini yıkmak istemesi karşısında Fransız- Sovyetler Birliği yakınlaşması daha da artmış ve iki devlet arasında 1935 yılında karşılıklı yardım antlaşması imzalanmıştır (Deutch, 1954).

4.3.1.6.Almanya - İngiltere :

Fransa-Sovyetler Birliği ittifakı İngiltere'nin de canını sıkıyordu. Bu sebeple İngiltere hem Almanya’yı yumuşatmak hem de Almanya’nın deniz silahlanmasını durdurmak için 18 Haziran 1935 te anlaşma yaptı (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.7.İngiltere - Fransa :

İngiltere ve Almanya arasındaki anlaşma, Fransa ve İngiltere'nin birbirinden uzaklaşmalarına ve ayrı yollar izlemelerine sebep olmuştur.

4.3.1.8.Almanya – İtalya, Avusturya, Macaristan :

Hitler, Polonya ile olan Dantzig sorununda batılılara gözdağı vermek ve onların Polonya lehine müdahalelerini önlemek amacı ile İtalya ile ittifak olmayı kabul etti ve 22 Mayıs 1939 da Çelik Pakt (Patto d'Acciaio) Alman-İtalyan ittifakı imzalandı. Buna göre, taraflar birbirleri ile ilgili bütün konularda yardımlaşacak ve taraflardan biri savaşacak olursa, diğeri ona yardım edecekti (Armaoğlu, 1984).

Almanya ile İtalya'nın yakınlaşması, İtalya-Habeş savaşının en önemli sonuçlarından biridir. İtalyan-Habeş savaşı esnasında Hitler, Milletler Cemiyetinin tedbirlerine aldırış etmeyerek, birçok stratejik maddeyi İtalya'ya satmaya devam etmişti (Üçok, 1975).

Macaristan'ın İtalya ile iyi ilişkileri ve Almanya'nın Avusturya ile yaptığı barış göz önünde bulundurulunca, İtalya, Almanya ve Avusturya-Macaristan farklı şartlar altında tekrar bir araya geliyorlardı.

4.3.1.9.Almanya, Japonya, İtalya – Sovyetler Birliği:

Komünizm faaliyetleri olan Sovyet Rusya, Almanya ve Japonya için ortak bir tehlike idi. Bu yüzden, Anti-Komintern Paktı 25 Kasım 1936 da Almanya ve Japonya tarafından imzaladı. İtalya 6 Kasım 1937 de Anti-Komintern Pakta katılmıştır ve Roma - Berlin - Tokyo Mihveri ortaya çıkmıştır (Deutch, 1954).

4.3.1.10. Sovyetler Birliği, Çin – Japonya :

Sovyet Rusya; Japonya'nın Çin'i işgali durumunda kendisinin içine düşeceği vahim sonuçları gördüğü için, başlangıçtan beri Çin hükümetinin yanında oldu ve ona yardım etti. Mayıs 1938'de yapılan bir anlaşma ile Çin'e 50 milyon dolarlık bir kredi açtı. Haziran 1939'da yapılan anlaşma ile de 150 milyon dolarlık bir kredi daha açtı. Diğer taraftan Sibirya- Mançurya sınırında da Sovyet ile Japon askerleri arasında çarpışmalar eksik olmuyordu. Ancak Ağustos 1939'da

Sovyet Rusya ile Almanya saldırmazlık anlaşması imzalamış ve böylelikle Sovyet Rusya ile Japonya arasındaki ilişkiler bir derece yumuşamıştır (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.11. İtalya- İngiltere :

İtalya ile İngiltere, Habeşistan sebebiyle Akdeniz bölgesinde bir çatışma içerisine girdi.

4.3.1.12. Polonya, İngiltere, Fransa, Romanya – Sovyetler Birliği:

Finlandiya ve Polonya gibi küçük devletler Sovyetler Birliği'ne güvenmiyordu. Sovyetlerle bir anlaşmaya varılamamıştı. Bunun üzerine 31 Mart 1938 de, Fransa ve İngiltere Polonya'ya ve 13 Nisanda da Romanya'ya garanti verdiler (Armaoğlu, 1984). Polonya'nın bağımsızlığı tehdit edilirse Fransa ve İngiltere Polonya'ya yardım edeceklerdi. Polonya ise 6 Nisan'da İngiltere'ye garanti verdi. Fransa ve İngiltere bir Alman saldırısına karşı garanti verdilerse de, Sovyet Rusya'nın bu iki devletin yanında yer alması bu garantilerin etkili olabilmesi için gerekli görülüyordu. Sovyet Rusya ile Fransa arasında 1935 ittifakı zaten vardı. Ancak bu ittifak sadece Almanya'nın bu iki devletten herhangi birine saldırması halini içermekteydi. Halbuki, şimdi söz konusu olan, küçük devletlerin bir Alman saldırısından korunması için bir işbirliği yapmaktı. Bu yüzden, ilk olarak Fransa 9 Nisandan itibaren böyle bir anlaşma için Sovyet Rusya nezdinde teşebbüse geçmiş ve daha sonra ise İngiltere 15 Nisandan itibaren Sovyetlerle müzakerelere koyulmuştur.

4.3.1.13. Almanya – İngiltere, Polonya :

27 Nisan 1939 da, Almanya, İngiltere'nin kendisini çember içine almaya çalıştığını öne sürerek, 1935 Alman-İngiliz deniz paktını feshetmişti. Yine aynı tarihte Polonya'ya verdiği bir nota ile de, 1934 Polonya-Almanya saldırmazlık paktını feshetti (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.14. Sovyetler Birliği - Almanya; Sovyetler Birliği - İngiltere, Fransa :

Sovyetler, bir yandan Doğu Avrupa'yı Almanya ile paylaşmak ve Almanya ile uzlaşmak için müzakerelere girişmişken, öte yandan da Batılılarla ittifak ve Barış Cephesi görüşmeleri yapıyordu. 23 Ağustos 1939 sabahı, Moskova'da İngiliz-Fransız-Sovyet askeri görüşmeleri devam ederken, Almanya ile Sovyet Rusya'nın bir saldırmazlık anlaşması imzaladıkları haberi bütün dünyada bir bomba etkisi yarattı (Deutch, 1954).

Moskova'da 6 Ağustosta başlayan Fransız- İngiliz -Sovyet görüşmelerinde, Batılıların Polonya'nın Sovyet askerlerine geçit vermesine izin vermemesi Sovyetleri Almanya'ya döndürmüştür. Bunun yanı sıra, Polonya ile Almanya arasında yaşanan Dantzig buhranı giderek şiddetlenmekteydi ve 1 Eylülde Hitler Polonya'ya karşı hareket etme kararı almıştı. Polonya meselesinin Almanya ile İngiltere ve Fransa arasında bir çatışmaya sebep olacağı ve İtalya'nın da savaşa girmeyeceği belliydi; bu sebeple, Almanya'nın Sovyet Rusya ile bir saldırmazlık anlaşması imzalaması önemliydi. Bu yüzden, Sovyetler 12 Ağustosta Almanya'ya siyasal anlaşma görüşmeleri teklifini sunduğu zaman, Almanya bunu elden kaçırmak istemedi. Alman Dışişleri Bakanı Ribbentrop anlaşmanın müzakeresi ve imzası için acilen Moskova'ya gitmek istedi. Ancak Moskova, saldırmazlık paktı esasları hazırlanıp tespit edilmeden böyle bir ziyareti kabul etmek istemedi. Böylece, diplomatik müzakereler bir hafta daha sürdü. Hitler ise bu sürecin uzamasını istemiyordu. Nihayet dayanamayarak, 20 Ağustosta Stalin'e bir mesaj gönderdi ve Almanya'nın Polonya'ya karşı hareket etmek üzere olduğunu açıkça söyleyip saldırmazlık anlaşmasının hemen imzalanmasını istedi. Stalin bu talebi onayladı ve 23 Ağustos günü öğleyin Moskova'ya varan Ribbentrop derhal Sovyet liderleri ile görüşmelere başladı. Rus-Alman Saldırmazlık Paktı 24 Ağustos sabahının erken saatlerinde imzalandı. Ancak antlaşmaya 23 Ağustos tarihi kondu (Deutch, 1954).

4.3.1.15. İngiltere – Almanya – Polonya :

İngiltere, Almanya ile Polonya'yı müzakere masasına oturtmak için son bir çaba harcadı. 28 Ağustosta yapılan bu teklife Almanya razı göründü ve 30 Ağustos akşamına kadar "tam yetkili" bir Polonya temsilcisinin Berlin'e gelmesini istedi. Görünen oydu ki, Hitler 1938'de Avusturya Başbakanı Schuschnigg'e ve 1939'da da Çekoslovakya Cumhurbaşkanı Hacha'ya yaptığını şimdi Polonya'ya yapmak niyetindeydi. Ancak "tam yetkili" Polonya temsilcisi Berlin'e ancak 31 Ağustosta gelebildi. Hitler, vermiş olduğu sürenin geçtiğini söyleyerek bu temsilci ile görüşmeyi reddetti. Hazır bekleyen Alman orduları, 1 Eylül 1939 sabahından itibaren, savaş ilan etmeksizin Polonya topraklarına girmeye başladı (Armaoğlu, 1984).

4.3.1.16. Almanya - İngiltere, Fransa :

Polonya, Fransa ve İngiltere'den vermiş oldukları garantiyi yerine getirmelerini istedi. Fransa ve İngiltere Almanya'ya ültimatom vererek, askerlerini Polonya'dan çekmelerini istedi; aksi takdirde, savaşa dahil olacaklarını bildirdiler. Almanya bu ültimatoma cevap bile vermedi. Bundan dolayı 3 Eylül 1939'da İngiltere ve Fransa, Almanya'ya savaş ilan ettiler (Armaoğlu, 1984).

4.3.2. Gizli Anlaşmalar:

Ülkelerin birbirleriyle yapmış olduğu antlaşmaların gizli hükümleri bu başlıkta değerlendirilmiştir.

4.3.2.1. Almanya- Avusturya :

Naziler Avusturya'daki darbe girişimlerinde başarısız olunca Avusturya ile ilişkileri düzeltme yoluna gitmiştir. 1936 Temmuzunda Avusturya ve Almanya bir anlaşma imzaladılar (Armaoğlu, 1984). Anlaşmaya göre, Almanya Avusturya'nın bağımsızlık ve egemenliğine saygı gösterecek ve her iki taraf da ülkelerindeki Naziler meselelerini kendi iç meselesi sayacaktı. Fakat gizli hükümlere göre, Avusturya Nazilerin faaliyetine müsaade edecek ve "yakın bir gelecekte" Nazilerin hükümette siyasi sorumluluk almalarına izin verecekti.

4.3.2.2. Almanya, Japonya - Sovyetler Birliği:

Almanya ve Japonya arasında 25 Kasım 1936 da imzalanan Anti-Komintern Paktın gizli hükümlerine göre, taraflardan biri Sovyet Rusya'nın kışkırtılmamış bir saldırısına veya saldırı tehdidine uğrarsa, ortak menfaatlerini korumak amacıyla alınacak tedbirleri birbirlerine danışacaklar ve birbirlerinin haberi olmadan Sovyet Rusya ile hiçbir siyasal anlaşma yapmayacaklardı (Deutch, 1954).

4.3.3. Etnik ilişkiler:

Almanya'nın savaş sebebi olarak gördüğü mevzulardan biri de komsu ülkelerde yaşayan Alman vatandaşlarını bir bayrak altında toplamak istemesiydi. Bunu diğer ülkelerle olan etnik ilişkiler başlığı altında değerlendirebiliriz.

4.3.3.1. Almanya - Avusturya:

Hitler 20 Şubat 1938 de yaptığı bir konuşmada, Almanya'nın komşusu olan iki ülkede 10 milyondan fazla Almanın yaşadığını ve özgürlük sahibi olmayan bu Almanları korumanın Almanya'nın sorumluluğunda olduğunu bildiriyordu (Armaoğlu, 1984).

4.3.4. Ekonomik ilişkiler:

Ülkelerin siyasi tutumları, diğer ülkelerle olan ekonomik ilişkilerini de ister istemez etkilemiştir.

4.3.4.1. Almanya - Sovyetler Birliği:

Hitler'in iktidara geçer geçmez yaptığı ilk işlerden biri komünist milletvekillerini tevkif ettirmekti. Nazi Partisi bir yandan da, Versay sistemine karşı, komünistlere karşı mücadele ediyordu. Bu uygulamalar karşısında Sovyet Rusya'nın gelecek hakkındaki endişeleri artmıştı (Deutch, 1954). Sovyet Rusya Almanya'ya karşı yatıştırıcı bir tavır almaya çalışmasına rağmen 1933'e kadar artarak devam eden Sovyetlerin Almanya'dan ithalatı, 1933'de global ithalatın % 42.5'i iken 1934'de bu oran % 12.4'e düşmüş ve Sovyet Rusya dış ticaretini İngiltere ile Birleşik Amerika'ya doğru yöneltmiştir (Armaoğlu, 1984).

4.3.4.2. Japonya - Amerika :

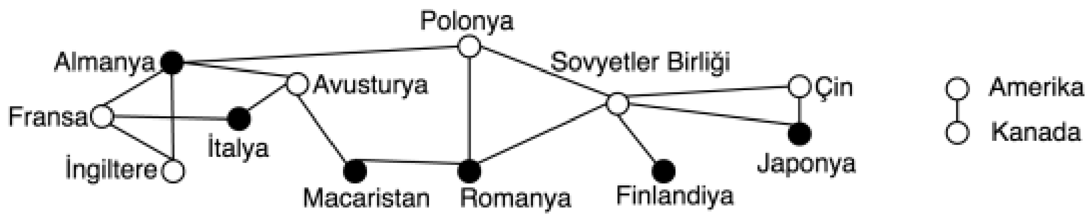
Amerika çatışmalara bulaşmaktan korkuyordu. Fakat Tarafsızlık Kanunları'nı Çin-Japon savaşına uygulamadı. Japonya Amerika'dan ihtiyacı olan maddeleri satın almaya devam etti (Artuç, 1999).

4.4.Analiz

İlişki		**Çatışma**	
Komşuluk	10	Güç Yarışı	-8
Din	10	Sınır Kavgası	-10
		Doğal Kaynaklar	-9
		Politik	-10 / 10

Tablo 2. Ülkeler arasındaki ilişki ve çatışma puanlaması.

Tablo 2'deki puanlamaya göre, puan negatif ise ülkeler arasında bir çatışma ya da kavga durumu; pozitif ise anlaşma ya da dostluk durumu söz konusudur. Bir ülkede savaş olması komşu ülkeleri etkileyeceğinden dolayı komşuluk ilişkisi önemli etmenlerden birisidir. Bu nedenle bu ilişki 10 puan olarak değerlendirilmiştir. Günümüz dünyasında, ülkemiz Avrupa birliğindeki birçok ülkeden ekonomik anlamda ve diğer anlamlarda güçlü olmasına rağmen dini sebeplerden dolayı bu birliğe alınmamıştır. Bu da din faktörünün ülkeler arasındaki ilişkilerdeki önemini göstermektedir. Buna haçlı seferleri de örnek olarak gösterilebilir. Bu sebeple, dini ilişkiler 10 puan olarak değerlendirilmiştir. Güç yarışı daha çok soğuk savaş gibidir fakat bir doğal kaynak yarışı gibi değildir. Petrol kavgaları doğal kaynak yarışının önemini arz etmektedir, bu nedenle doğal kaynak -9, güç yarışı -8 puan ile derecelendirilmiştir. Sınır kavgası savaşın habercisidir; Japonya ve Çin arasındaki mücadele bunu göstermektedir. Bu nedenle -10 puan ile derecelendirilmiştir. Politik ilişkiler çok esnektir, günümüz dünyasında 15 Temmuz darbe girişimi öncesi sürtüşme içerisinde gibi görünen Rusya ile ülkemiz darbe girişimi sonrası sıkı dost olmuşlardır. Bu sebeple politik ilişkiler -10 ile 10 puan arasında derecelendirilmiştir.

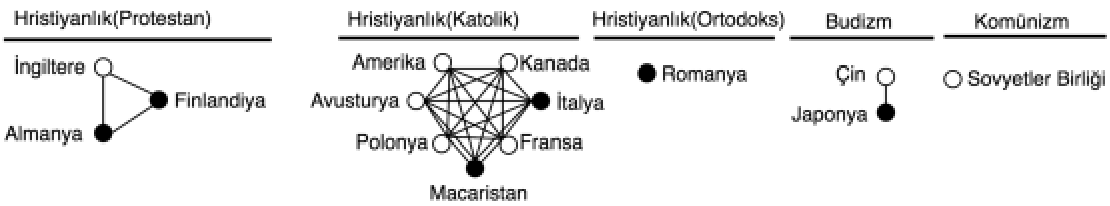


Şekil 7 : Ülkelerin komşuluk ilişkileri grafı.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	Finlandiya	Fransa	İngiltere	İtalya	Japonya	Kanada	Macaristan	Polonya	Romanya	Sovyetler Birliği
Almanya			10			10	10					10		
Amerika										10				
Avusturya	10							10			10			
Çin									10					10
Finlandiya														10
Fransa	10						10	10						
İngiltere	10					10								
İtalya			10			10								
Japonya				10										10
Kanada		10												
Macaristan			10										10	
Polonya	10												10	10
Romanya											10	10		10
Sovyetler Birliği				10	10				10			10	10	

Şekil 8 : Ülkelerin ağırlıklı komşuluk ilişkileri.

Şekil 8. ile verilen tabloda iki ülke arasında iyi bir komşuluk ilişkisi varsa Şekil 4.1. teki puan tablosuna göre 10 puan ile değerlendirilmiş olup eğer ilişki yoksa boş bırakılmış ve sıfır olarak kabul edilmiştir.

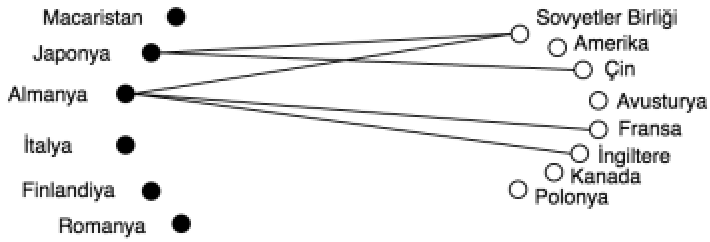


Şekil 9 : Ülkelerin din ilişkileri grafı.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	**Finlandiya**	Fransa	İngiltere	**İtalya**	**Japonya**	Kanada	**Macaristan**	Polonya	**Romanya**	Sovyetler Birliği
Almanya					10		10							
Amerika			10			10		10		10	10	10		
Avusturya		10				10		10		10	10	10		
Çin									10					
Finlandiya	10						10							
Fransa		10	10					10		10	10	10		
İngiltere	10				10									
İtalya		10	10			10				10	10	10		
Japonya				10										
Kanada		10	10			10		10			10	10		
Macaristan		10	10			10		10		10		10		
Polonya		10	10			10		10		10	10			
Romanya														
Sovyetler Birliği														

Şekil 10 : Ülkelerin ağırlıklı din ilişkileri (matrisi).

Şekil 10. ile verilen tabloda iki ülke aynı dine mensup ise Şekil 4.1. teki puan tablosuna göre 10 puan ile değerlendirilmiş olup eğer aynı dine mensup değilse boş bırakılmış ve sıfir olarak kabul edilmiştir.

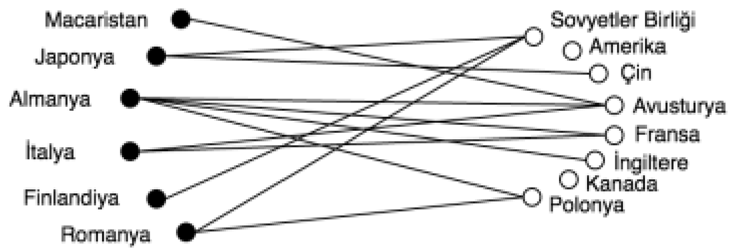


Şekil 11 : Ülkelerin güç yarışı grafı.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	**Finlandiya**	Fransa	İngiltere	**İtalya**	**Japonya**	Kanada	**Macaristan**	Polonya	**Romanya**	Sovyetler Birliği
Almanya						-8	-8							-8
Amerika														
Avusturya														
Çin									-8					
Finlandiya														
Fransa	-8													
İngiltere	-8													
İtalya														
Japonya				-8										-8
Kanada														
Macaristan														
Polonya														
Romanya														
Sovyetler Birliği	-8								-8					

Şekil 12 : Ülkelerin ağırlıklı güç yarışı (matrisi).

Şekil 12. ile verilen tabloda iki ülke arasında güç yarışı varsa Şekil 4.1. deki puan tablosuna göre -8 puan ile değerlendirilmiş olup eğer güç yarışı yoksa boş bırakılmış ve sıfır olarak kabul edilmiştir.

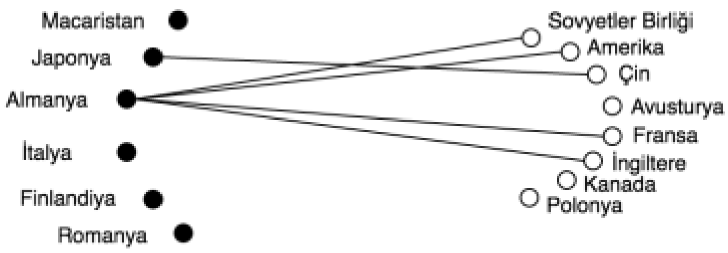


Şekil 13 : Ülkelerin sınır kavgası grafı.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	**Finlandiya**	Fransa	İngiltere	**İtalya**	**Japonya**	Kanada	**Macaristan**	Polonya	**Romanya**	Sovyetler Birliği
Almanya			-10			-10	-10					-10		
Amerika														
Avusturya	-10							-10			-10			
Çin									-10					
Finlandiya														-10
Fransa	-10							-10						
İngiltere	-10													
İtalya			-10			-10								
Japonya				-10										-10
Kanada														
Macaristan			-10											
Polonya	-10												-10	
Romanya												-10		-10
Sovyetler Birliği					-10				-10				-10	

Şekil 14 : Ülkelerin ağırlıklı sınır kavgası (matrisi).

Şekil 14. ile verilen tabloda iki ülke arasında sınır kavgası varsa Şekil 4.1. teki puan tablosuna göre -10 puan ile değerlendirilmiş olup eğer sınır kavgası yoksa boş bırakılmış ve sıfır olarak kabul edilmiştir.



Şekil 15 : Ülkelerin doğal kaynak yarışı grafi.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	**Finlandiya**	Fransa	İngiltere	**İtalya**	**Japonya**	Kanada	**Macaristan**	Polonya	**Romanya**	Sovyetler Birliği
Almanya		-9				-9	-9							-9
Amerika	-9													
Avusturya														
Çin									-9					
Finlandiya														
Fransa	-9													
İngiltere	-9													
İtalya														
Japonya				-9										
Kanada														
Macaristan														
Polonya														
Romanya														
Sovyetler Birliği	-9													

Şekil 16 : Ülkelerin ağırlıklı doğal kaynak yarışı (matrisi).

Şekil 16. ile verilen tabloda iki ülke arasında doğal kaynak kavgası varsa Şekil 4.1. teki puan tablosuna göre -9 puan ile değerlendirilmiş olup doğal kaynak kavgası yoksa boş bırakılmış ve sıfır olarak kabul edilmiştir.

	Almanya	Amerika	Avusturya	Çin	**Finlandiya**	Fransa	İngiltere	**İtalya**	**Japonya**	Kanada	**Macaristan**	Polonya	**Romanya**	Sovyetler Birliği
Almanya		-5	-10	-5	7	-10	-10	7	10	-8	10	-10	8	-10
Amerika	-5			10	-10	10	10	-7	-10	10				7
Avusturya	-10			5	-5	5	5	-5	-5				-5	
Çin	-5	10	5		-5	5	5	-5	-10	5	-5	5	-5	10
Finlandiya	7	-10	-5	-5		-5	-8	5	5	-5	5	-5	5	-10
Fransa	-10	10	5	5	-5		10	-7	-5			10	-8	7
İngiltere	-10	10	5	5	-8	10		-7	-7	8	-5	8	-8	8
İtalya	7	-7	-5	-5	5	-7	-7		7	-8	5		5	-5
Japonya	10	-10	-5	-10	5	-5	-7	7		-7	5	-5	5	-8
Kanada	-8	10		5	-5		8	-8	-7			8	-5	5
Macaristan	10			-5	5		-5	5	5				7	-5
Polonya	-10			5	-5	10	8		-5	8			-7	10
Romanya	8		-5	-5	5	-8	-8	5	5	-5	7	-7		-10
Sovyetler Birliği	-10	7		10	-10	7	8	-5	-8	5	-5	10	-10	

Şekil 17 : Ülkelerin ağırlıklı politik ilişkileri (matrisi).

Şekil 17 ile verilen tabloda, iki ülke arasında politik ilişki varsa Şekil 4.1. deki puan tablosuna göre -10 ile 10 puan arasında değerlendirilmiş olup politik ilişki yoksa boş bırakılmış ve sıfır olarak kabul edilmiştir. Bu tabloda -5 değeri alan ilişkiler zayıf politik çatışmayı, 5 değeri alan ilişkiler ise zayıf politik ilişkileri göstermektedir. -7, -8 değerlerini alan ilişkiler güçlü politik çatışma ve zayıf ilişki anlamına gelirken, 7, 8 değerlerini alan ilişkiler zayıf politik çatışma ve güçlü ilişki anlamına gelmektedir. -10 değerini alan ilişkiler doğrudan politik çatışma içerisinde olan ülkeleri göstermektedir. 10 değeri ise ülkeler arasındaki doğrudan sağlam ilişkiyi göstermektedir.

Ülke ilişkilerine ait Şekil 8'de bulunan komşuluk ilişkileri matrisi, Şekil 10'da bulunan din ilişkileri matrisi, Şekil 12'de bulunan güç yarışı matrisi, Şekil 14'te bulunan sınır kavgası matrisi, Şekil 16'da bulunan doğal kaynak yarışı matrisi ve Şekil 17'de bulunan politik ilişkiler matrisi toplanırsa Şekil 18 deki bitişiklik matrisi elde edilir.

0	−22	−10	−5	12	−27	−22	7	10	−8	10	−10	8	−27
−22	0	5	10	−10	15	10	−2	−10	25	5	5	0	7
−10	5	0	5	−5	10	5	0	−5	5	5	5	−5	0
−5	10	5	0	−5	5	5	−5	−22	5	−5	5	−5	20
12	−10	−5	−5	0	−5	−3	5	5	−5	5	−5	5	−18
−27	15	10	5	−5	0	20	−10	−5	5	5	15	−8	7
−22	10	5	5	−3	20	0	−7	−7	8	−5	8	−8	8
7	−2	0	−5	5	−10	−7	0	7	−3	10	5	5	−5
10	−10	−5	−22	5	−5	−7	7	0	−7	5	−5	5	−16
−8	25	5	5	−5	5	8	−3	−7	0	5	13	−5	5
10	5	5	−5	5	5	−5	10	5	5	0	5	17	−5
−10	5	5	5	−5	15	8	5	−5	13	5	0	−7	20
8	0	−5	−5	5	−8	−8	5	5	−5	17	−7	0	−10
−27	7	0	20	−18	7	8	−5	−16	5	−5	20	−10	0

Şekil 18 : Bitişiklik matrisi.

Şekil 18'de elde edilen bitişiklik matrisinde negatif değerler vektörün yönünü etkileyeceğinden dolayı en küçük değer olan -27 rakamını pozitif hale getirmek için $A_{i,j} = A_{j,i}$ eşitliğini sağlayan değerleri hariç matrisin her $A_{i,j}$ değerine 28 rakamı eklenirse Şekil 19 daki matris elde edilir.

0	6	18	23	40	1	6	35	38	20	38	18	36	1
6	0	33	38	18	43	38	26	18	53	33	33	0	35
18	33	0	33	23	38	33	0	23	33	33	33	23	0
23	38	33	0	23	33	33	23	6	33	23	33	23	48
40	18	23	23	0	23	25	33	33	23	33	23	33	10
1	43	38	33	23	0	48	18	23	33	33	43	20	35
6	38	33	33	25	48	0	21	21	36	23	36	20	36
35	26	0	23	33	18	21	0	35	25	38	33	33	23
38	18	23	6	33	23	21	35	0	21	33	23	33	12
20	53	33	33	23	33	36	25	21	0	33	41	23	33
38	33	33	23	33	33	23	38	33	33	0	33	45	23
18	33	33	33	23	43	36	33	23	41	33	0	21	48
36	0	23	23	33	20	20	33	33	23	45	21	0	18
1	35	0	48	10	35	36	23	12	33	23	48	18	0

Şekil 19 : Pozitif bitişiklik matrisi (A).

Ülkelerin komşuluk,din,güç yarışı, sınır kavgası, doğal kaynak yarışı ve politik ilişkileri göz önüne alındığında herbir ülkenin diğer ülkeler ile olan düğüm derecesi (Derece matrisi) Şekil 20 deki gibi elde edilir.

13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12

Şekil 20 : Derece matrisi (D).

L=D-A formülünden Laplace matrisi Şekil 21 deki gibi elde edilir.

13	-6	-18	-23	-40	-1	-6	-35	-38	-20	-38	-18	-36	-1
-6	12	-33	-38	-18	-43	-38	-26	-18	-53	-33	-33	0	-35
-18	-33	11	-33	-23	-38	-33	0	-23	-33	-33	-33	-23	0
-23	-38	-33	13	-23	-33	-33	-23	-6	-33	-23	-33	-23	-48
-40	-18	-23	-23	13	-23	-25	-33	-33	-23	-33	-23	-33	-10
-1	-43	-38	-33	-23	13	-48	-18	-23	-33	-33	-43	-20	-35
-6	-38	-33	-33	-25	-48	13	-21	-21	-36	-23	-36	-20	-36
-35	-26	0	-23	-33	-18	-21	12	-35	-25	-38	-33	-33	-23
-38	-18	-23	-6	-33	-23	-21	-35	13	-21	-33	-23	-33	-12
-20	-53	-33	-33	-23	-33	-36	-25	-21	13	-33	-41	-23	-33
-38	-33	-33	-23	-33	-33	-23	-38	-33	-33	13	-33	-45	-23
-18	-33	-33	-33	-23	-43	-36	-33	-23	-41	-33	13	-21	-48
-36	0	-23	-23	-33	-20	-20	-33	-33	-23	-45	-21	12	-18
-1	-35	0	-48	-10	-35	-36	-23	-12	-33	-23	-48	-18	12

Şekil 21 : Laplace matrisi (L).

Şekil 21 de bulunan laplace matrisinin özdeğer ve özvektörlerini hesaplayacak olursak.

-350.1272	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-68.8927	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-2.0408	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	24.1087	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	26.4470	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	37.1924	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	46.1849	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	50.8246	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	52.5352	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	57.5229	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	63.8376	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	69.5681	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	81.3107	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	87.5285

Şekil 22 : Şekil 21'de bulunan laplace matrisinin özdeğerleri.

0.2033	0.4692	-0.0097	0.1371	-0.3542	-0.1018	0.2826	-0.0513	0.0733	-0.0532	0.4778	-0.4231	0.2247	-0.1878
0.2851	-0.2958	0.0690	-0.3808	-0.3984	0.0156	-0.2292	-0.0166	0.2241	0.1055	-0.0537	0.1120	0.6188	0.1001
0.2470	-0.0627	0.6681	0.2047	-0.0612	0.0992	0.2063	0.0924	0.0727	-0.2162	-0.1680	0.2909	-0.0367	-0.4647
0.2757	-0.1815	-0.1358	0.5474	-0.3153	-0.2257	0.0186	-0.0577	0.3803	-0.1012	-0.1977	-0.0081	-0.2547	0.4082
0.2462	0.2914	0.0767	0.0190	-0.0267	-0.6248	-0.1635	0.2619	-0.3400	0.4318	-0.1574	0.1848	-0.0203	-0.0201
0.2939	-0.2503	0.1716	-0.0775	0.3959	-0.0469	-0.1259	0.2628	0.2009	0.1356	-0.1050	-0.6994	-0.0693	-0.0893
0.2820	-0.2270	0.0931	-0.0406	0.3360	-0.3658	-0.1874	-0.3030	-0.1395	-0.3989	0.5219	0.1535	-0.0062	0.1022
0.2517	0.2501	-0.4249	-0.3076	-0.0553	-0.0465	-0.1662	0.2433	0.0769	-0.5795	-0.2755	0.0376	-0.1458	-0.2581
0.2316	0.3198	0.0759	-0.4063	0.2602	-0.0486	0.3906	-0.4199	0.3746	0.1839	-0.1710	0.1290	-0.1449	0.1824
0.3014	-0.1456	0.0496	-0.1793	-0.3686	0.2205	-0.0408	-0.4016	-0.5354	0.0644	-0.1300	-0.2386	-0.3756	-0.0165
0.3023	0.2096	0.0557	-0.0188	-0.0105	0.4748	-0.3274	0.3084	0.1558	0.2187	0.4192	0.2389	-0.3165	0.1685
0.3078	-0.1455	-0.1406	-0.0048	0.1409	0.1690	0.5891	0.3970	-0.3600	-0.1043	0.0004	0.0704	0.1943	0.3578
0.2387	0.3448	-0.0369	0.4018	0.3143	0.3039	-0.3019	-0.2906	-0.1612	-0.0513	-0.2898	-0.0385	0.4168	0.0825
0.2509	-0.2940	-0.5229	0.1817	0.1300	0.0526	0.1404	-0.1477	0.0794	0.3605	0.1077	0.1959	0.0163	-0.5445

Şekil 23 : Şekil 21'de bulunan laplace matrisinin özvektörleri.

Şekil 22'de bulunan en küçük ikinci özdeğere karşılık gelen özvektörlerin pozitif ve negatiflik durumuna göre ülkeler konumlandırılacak olursa Şekil 24 deki gibi bir ayrışma elde edilir.

Şekil 24 : Ülkelerin ayrışması.

5. SONUÇ

Ülkelerin bir araya gelmesine ya da ayrışmasına sebep olan birçok iç ve dış nedenler vardır. Geçmişte yaşanan savaşlarda, savaşa götüren iç ve dış nedenler ayrıntılı olarak incelendiğinde bu etkiler gelecekte olması muhtemel savaşları önceden tahmin ederek zayıf ilişkilerin onarılmasında bizlere yardımcı olacak, barış ve huzur dolu bir dünya oluşturabilmemiz için ülkeler arasında güç dengesi oluşturmamızı sağlayacaktır.

Ülkeler arasındaki ilişkiler de insanlar arasındaki ilişkiler gibidir ve bu ilişkiler sosyal ağlar kapsamına girer. Güç yarışı, doğal kaynak kavgası, din, sınır kavgası, etnik köken, politik ilişkiler bu ilişkilerden bazılarıdır. Bu çalışmada bunlar incelenerek çizgenin üzerine aktarılmış ve bu çizge ilişkilere bağlı olarak, ayrıt ağırlıkları sonucu belirleyecek şekilde, deneme yanılma yöntemi ile belirlenmiştir. Oluşan bu çizgenin Laplace matrisi elde edilerek özdeğer ve özvektörlerine ayrılmıştır. İkinci en küçük özdeğere karşılık düşen özvektör (fiedler vektörü) çizgenin iki parçaya bölünmesinde kullanılmıştır.

Ülkeler arasındaki güç yarışı, doğal kaynak kavgası, sınır kavgası, dini ve politik ilişkiler incelenirken bazı kriterlere dikkat edilmiştir. Komşuluk önemli faktörlerden birisidir, çünkü komşunuzda savaş olması demek sizin de bu durumdan etkilenmeniz demektir. Bu nedenle iki ülke iyi komşu ise 10 puan ile değerlendirilmiş, aralarında sınır kavgası var ise -10 puan değerlendirilmiştir. Bu puanlamaya göre komşu olan iki ülke arasında sınır kavgası var ise bu birbirini sıfırlamıştır. İki ülkenin aynı dine mensup olması 10 puan ile puanlanmıştır. Günümüz dünyasında da aynı dine mensup ülkelerin kurdukları birlikler ve aynı dine mensup ülkelerin ilişkileri din faktörünün etkisini göstermektedir. Güç yarışı ise güçlü iki ülke birbirine doğrudan savaş açamadığı ve diğer ülkeleri savaşa sürükleyip onlar üzerinden kendilerine pay çıkardıkları için -8 puan ile değerlendirilmiştir. Geçmişten günümüze devam eden petrol gibi doğal kaynakların sömürülmesi mücadelesi iki ülkenin savaşması için genel sebeplerden bir tanesi olduğundan -9 puan ile derecelendirilmiştir. Politik ilişkiler savaşta en önemli rollerden bir tanesidir fakat politik ilişkiler çok esnektir. Bugün birlikte görünen iki ülke gizli politik sebeplerden dolayı çok çabuk arayı bozabilir veya ayrıştığı düşünülen ülkeler bir araya gelebilir. Bunun yansımasını günümüz dünyasında da görmekteyiz bu sebeple -10 ile 10 arasında değerlendirilmiştir.

Ülkelerin ilişkileri bu puanlama ile puanlandığında ikinci dünya savaşındaki tam bölünme elde edilmiştir.

Günümüz dünyasında ülkeler arasındaki ilişkileri belirleyici olan güç yarışı, doğal kaynak kavgası, din, sınır kavgası, etnik köken, politik ilişkiler ve daha birçok etmen doğru bir şekilde analiz edilerek ileride olması muhtemel dünya savaşlarının önüne geçmek mümkün olabilir.

6. KAYNAKÇA

Alon, N. (1986). Eigenvalues and expanders, *Combinatorica 6*, 86–96.

Arkut, İ. C. (1993). Ringel'in Eşalan Düzlemsel Kübik Graf Problemi Üzerine, *Matematik Dünyası 5*, 5-7.

Armaoğlu, F. (1984). *20.Yüzyıl Siyasi Tarihi: 1914-1980. (2.bs).* Türkiye İş Bankası, Ankara.

Artuç, İ. (1999). *Ikinci Dünya Savaşı (2 cilt),* Kastaş Yay., İstanbul.

Bacak, G., Beşeri, T. (2002). Çizge Kuramına Genel Bir Bakış, *Matematik Dünyası 11*(4), 13-18.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (1982). *Graph Theory with Applications*. Elseiver Science Publishing Co., USA.

Deo, N. (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall: Englewood Cliffs, N.J.

Deo, N. (1998) *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice- Hall, Englewood-Cliffs, Delhi .

Deutch, H.C. (1954). Garip Bir Devre: 1939-1941 Arasında Nazi-Sovyet Münasebetleri (Çeviren: Fahir Armaoğlu), *Ankara Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi 9* (2), 345-365.

Doğanaksoy, A. (1993a). Graf Teorisi I. *Matematik Dünyası 1*, 10-16.

Doğanaksoy, A. (1993b). Graf Teorisi II. *Matematik Dünyası 1I*, 12-15.

Feldman, N. (2014). *Graph Theory and Social Networks.* DRP Summer 2014 University of Maryland. http://drp.math.umd.edu/FeldmanSummer2014.pdf (on-line access on 28 Aug., 2016).

Francis, J.G.F. (1961). The QR Transformation, I, *The Computer Journal 4* (3), 265-271.

Gould, R.J. (1988). *Graph theory*. Benjamin/Cummings. Menlo Park, CA

Hendrickson, A. R., Massey, P. D., Cronan, T. P. (1993). On the test-retest reliability of perceived usefulness and perceived ease of use scales, *MIS Quarterly 17*, 227–230.

Hendrickson, B., Leland, R. (1992). *An Improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations*. Technical report, Sandia National Laboratories.

Hendrickson, B., Leland, R. (1995). A Multilevel Algorithm for Partitioning Graph, *Proc. ACM/IEEE Conf. Super Computing 28*.

Hosch, W.L., (2009). *World War II: People, Politics, and Power*. The Rosen Publishing Group.

Jerrum, M., Sinclair, A. J. (1989). Approximating the permanent, *SIAM J. Computing 18*, 1149–1178.

Karcı, A., Boy, O. (2011). Sosyal Ağlarin Web Madenciliği Teknikleri ile analizi ve ortak atıf analizi ile benzerlik tahmini. *Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Sempozyumu,* Fırat Üniversitesi, Elazığ, 154-161. http://web.firat.edu.tr/feeb/kitap/C12/44.pdf (on-line access on 23 Aug., 2016).

Kaveh, A. (1995). *Structural mechanics: graph and matrix methods*. 3rd edn. Research Studies Press and Wiley, Exeter.

Kaveh, A. (2013). *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity,* 15 DOI 10.1007/978-3-7091-1565-7_2, © Springer-Verlag Wien.

Laszewski, G. V. (1993). *A Collection of Graph Partitioning Algorithms*. Technical Report, Northeast Parallel Architectures Center at Syracuse University.

Leland, R., Hendrickson, B. (1994). An Empirical Study of Static Load Balancing Algorithms. *Proc. Scalable High Perf. Comput. Conf., IEEE, 682-685.*

Natkiel, R. (2001). *Atlas of World War II.* World Publications Group; n.e. edition.

Spielman, D. A., Teng, S. H. (1996). *Spectral Partitioning Work: Planar graphs and finite element meshes*. Technical Report, University of California, Berkeley.

Sülü, M., Karcı, A., İçen, İ. (2012). Modeling the Relations between Countries with Graph Theory and Possible Separations. *9th International Conference On Electronics, Computer And Computation.* Turgut Özal Üniversitesi, Ankara, 141-145.

Üçok, C. (1975). *Hukuk Fakültesi Öğrencileri İçin Siyasal Tarih (1789-1960).* Ankara Universitesi Hukuk Fakultesi Yayinlari, Ankara.

West, D.B. (1996). *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, USA.

Wilson, R.J. (1996). *Introduction to graph theory*. Longman, University of California, USA

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Mücahit SÜLÜ

Doğum Yeri ve Tarihi: MALATYA / Doğanşehir 19.06.1985

Adres: İnönü Üniversitesi TOKİ Konutları C1-2 No:9

E-Posta: mucahit.sulu@inonu.edu.tr

Lisans: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Tezsiz Yüksek Lisans

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

2008- devam ediyor: Akademik Uzman- İnönü Üniversitesi Bilgi İşlem Daire Başkanlığı

Yayın Listesi:

- Sülü, M., Karcı, A., İçen, İ. (2012). Modeling the Relations between Countries with Graph Theory and Possible Separations. *9th International Conference On Electronics, Computer And Computation.* Turgut Özal Üniversitesi, Ankara, 141-145.
- Sülü, M., İnce, K., Alpaslan, N., Boy, O., Karcı, A., İçen, İ. (2011). Graf Tabanlı Biyolojik Dizilerde Örüntü Keşfi. *Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Sempozyumu.* Fırat Üniversitesi, Elazığ, 252-254.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Sülü, M., Karcı, A., İçen, İ. (2012). Modeling the Relations between Countries with Graph Theory and Possible Separations. *9th Internatıonal Conference On Electronıcs, Computer And Computatıon.* Turgut Özal Üniversitesi, Ankara, 141-145.