T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR TEORİSİNE İLİŞKİN BAZI YENİ SONUÇLAR

Sümeyye ÇAKAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Nisan 2016

Tezin Başlığı : Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar

Tezi Hazırlayan : Sümeyye ÇAKAN

Sınav Tarihi : 08/04/2016

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ** ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK ....
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ ....
Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ....
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN ....
İnönü Üniversitesi

....
Prof. Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

Anneme, babama, kardeşlerime ve değerli eşim Ümit'e ...

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sümeyye ÇAKAN

ÖZET

Doktora Tezi

NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR TEORİSİNE İLİŞKİN BAZI YENİ SONUÇLAR

Sümeyye ÇAKAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

vi+111 sayfa
2016

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde kısa bir literatür özeti sunuldu.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde geçen temel tanım, teorem ve sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, bir quasilineer uzayın regüler ve singüler boyutu ve proper quasilineer uzay kavramları tanıtılıp, bu kavramlarla ilgili bazı temel teorem ve sonuçlar elde edildi. Ayrıca sonlu regüler ve singüler boyutlu normlu quasilineer uzayların ve normlu proper quasilineer uzayların teorisi ile ilgili bir takım değerlendirmeler yapıldı. Sonrasında sağlam zeminli quasilineer uzaylar olarak adlandırılan özel proper quasilineer uzaylar tanıtıldı ve sağlam zeminli quasilineer uzayların bazı özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde, quasilineer uzaylar üzerine bir topoloji inşaa etme ile ilgili genel bir metot ile birlikte bu metot için gerekli hazırlıklara yer verildi. Bu bölümde, normlu lineer uzayların önemli bir özelliği olan lokalizasyon prensibinin normlu quasilineer uzaylarda sağlanmadığı ispatlandı ve sonrasında normlu quasilineer uzaylar için lokalizasyon prensibinin sınırları çizilmeye çalışıldı.

Beşinci bölümde, normlu quasilineer uzaylarda bir dizinin alt ve üst yarı yakınsaklığı kavramları tanıtıldı ve bu kavramlara ilişkin bazı sonuçlar verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Quasilineer uzaylar, Normlu quasilineer uzaylar, Hausdorff metrik, Regüler ve singüler boyut, Bir elemanın zemini, Proper quasilineer uzaylar, Sağlam zeminli quasilineer uzaylar, Bir elemanın doldurulması, Lokalizasyon prensibi, Alt ve üst yarı yakınsaklık.

ABSTRACT

PhD Thesis

SOME NEW RESULTS RELATED TO THEORY OF NORMED QUASILINEAR SPACES

Sümeyye ÇAKAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

vi+111 pages
2016

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

In the first chapter of this thesis consisting of five chapters, a brief overview of the literature is presented.

In the second chapter, some fundamental definitions, theorems and results used in the next chapters are given.

In the third chapter, after introducing the concepts of regular and singular dimension of a quasilinear space and proper quasilinear space, some basic theorems and results about these concepts are obtained. Also, some evaluations about the theories of finite regular and singular dimensional normed quasilinear spaces and normed proper quasilinear spaces have been made. Next, special proper quasilinear spaces which are called "solid floored quasilinear spaces" are defined and their some properties are examined.

In the fourth chapter, one of the general methods to construct a topology on any quasilinear space is presented and the necessary preparations for this method are stated. In this chapter, it is proved that the important property of the normed linear spaces namely "the localization principle" may not hold in normed quasilinear spaces. Then, it has been tried to draw a border of the localization principle in the normed quasilinear spaces.

In the fifth chapter, the concepts of lower and upper semi convergence of a sequence in normed quasilinear spaces are introduced and some results related to these concepts are obtained.

KEY WORDS: Quasilinear spaces, Normed quasilinear spaces, Hausdorff metric, Regular and singular dimension, Floor of an element, Proper quasilinear spaces, Solid floored quasilinear spaces, Stuff of an element, Localization principle, Lower and upper semi convergence.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yılmaz Yılmaz'a, gösterdikleri yakın ilgi ve alaka dolayısıyla Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanımız Sayın Prof. Dr. Rıfat Güneş'e ve katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine teşekkür ederim.

Ayrıca haklarını asla ödeyemeyeceğim aileme ve kıymetli eşim Ümit Çakan'a, hiçbir zaman eksik etmedikleri maddi ve manevi her türlü destekleri için minnettarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}^+$	:	Negatif olmayan reel sayılar cümlesi,
c_0	:	Sıfıra yakınsak olan dizilerin uzayı,
$\Omega(E)$	:	Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi,
$\Omega_C(E)$	:	Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesi,
$C\left[a,b\right]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$C\left(\left[a,b\right],\Omega_C(E)\right)$	:	$[a,b]$ aralığından $\Omega_C(E)$'ye tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayı,
$B\left(\theta,r\right)$	:	θ merkezli, r yarıçaplı açık yuvar,
$S\left(\theta,r\right)$	:	θ merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar,
$inf\ (sup)$	:	İnfimum (Supremum),
$\underset{(\preceq)}{sup}$	:	"$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı üzerinden supremum,
$X_r\ (X_s)$	:	X quasilineer uzayının regüler (singüler) alt uzayı,
X_d	:	X quasilineer uzayının simetrik alt uzayı,
$r\text{-}boyX\ (s\text{-}boyX)$	:	X quasilineer uzayının regüler (singüler) boyutu,
$boyX$	:	X quasilineer uzayının boyutu,
$diam\ x$	:	Quasilineer uzaylarda bir x elemanının çapı,
$\delta(A)$	:	A cümlesinin çapı,
F_x^M	:	x elemanının M'deki zemini,
$F_x\ (F_X)$	:	x elemanının zemini (X quasilineer uzayının zemini),
F_M^X	:	M cümlesinin X'deki zemini,
$\overleftarrow{x}$	:	x elemanının doldurulması,
$\overleftarrow{A}$	:	A cümlesinin doldurulması,
$\mathcal{N}_x$	:	x elemanının komşuluklarının ailesi,
$ls\text{-}lim\ x_n\ (us\text{-}lim\ x_n)$	:	(x_n) dizisinin alt yarı limiti (üst yarı limiti).

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Klasik analizde lineer uzay kavramı önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle, fonksiyonel analiz sahasında yer alan normlu uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzayları temel olarak lineer uzay kavramı üzerine inşaa edilmiştir. Bu uzayların kendilerine has bir takım özellikleri sayesinde fizik, mekanik, biyoloji, tıp, mühendislik ve ekonomi gibi bir çok alanda karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde diferensiyel denklemler kullanılmaktadır, [1, 2]. Örneğin ekonomide, optimal kontrol teorisi [3, 4]; tıpta, insan kalbindeki aort'un mitral kapakları gibi yapıların modellenmesi [5]; mekanikte, viskoelastik malzemelerin yapısının modellenmesi [6] gibi daha bir çok problemin matematiksel modelinde diferensiyel ve integral denklemlerle karşılaşılmaktadır. Diğer taraftan, kalitatif fizik, biyomatematik, matematiksel ekonomi, kontrol teorisi, oyun teorisi, sistem bilimleri, yapay zeka gibi alanlarda karşılaşılan bazı problemler, klasik diferensiyel denklemler ile modellenememektedir, [1]. Bu sorunu aşmak için yapılan araştırmalar, küme değerli fonksiyonlarla elde edilen küme diferensiyel denklemleri ortaya çıkarmıştır. [1] ve [2] numaralı çalışmalarda, bu tip denklemlerin bazıları incelenmiştir.

Klasik diferensiyel denklemlerin çözüm kümelerinin analizi ile denklemlerin modellediği problemleri açıklamada önemli mesafeler kat edilmiş olmasına rağmen, küme diferensiyel denklemler için benzer analizleri yapmak oldukça zordur ve küme diferensiyel denklemler teorisi henüz ciddi anlamda ilerletilememiştir. Bunun temel sebebi küme diferensiyel denklemlerin çözümlerinin araştırıldığı uzayların lineer uzay yapısına sahip olmayışı ve bu uzaylarda klasik teorideki analiz araçlarının muadillerinin henüz geliştirilememiş olmasıdır. Örneğin, bir E normlu uzayının boş olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesi olan $\Omega_C(E)$ Minkowski toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil etmez; fakat quasilineer uzay yapısına sahiptir. Bu durum $\mathbb{R}$'nin bir $I=[a,b]$ kapalı aralığından $\Omega_C(E)$'ye tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı $C\left(I,\Omega_C(E)\right)$ için de geçerlidir. Bahsedilen bu eksiklik, klasik analizdeki bazı tekniklerin küme diferensiyel denklemler için kullanılmasına engel olmaktadır. Böylece quasilineer uzaylarda bu gibi eksiklikleri giderme isteği doğmaktadır. Bu bağlamda son yıllarda interval analizi ve küme değerli analiz alanındaki çalışmalar önem kazanmıştır, [1, 2, 7, 8].

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada quasilineer uzay kavramı, S. M. Aseev'in [9] 1986 yılında yayınlanan çalışmasından yararlanılarak ele alınacaktır. Literatürde quasilineer uzay tanımı S. Markow [10, 11] tarafından da verilmiş olmasına rağmen, Aseev'in verdiği tanım, içinde ihtiva ettiği sıralama bağıntısının avantajlarından dolayı bazı özel durumlarda klasik teorideki analiz ile uyum sağlaması bakımından Markow'un yaklaşımına göre daha elverişlidir.

Aseev bu çalışmasında lineer uzayların daha genel bir formu olan quasilineer uzay kavramını tanımlamıştır. Aseev'in verdiği quasilineer uzay tanımının en dikkat çeken yanı, tanımda kullanılan kısmi sıralama bağıntısıdır. Aseev quasilineer uzaylarda norm tanımını verirken kısmi sıralama bağıntısını da kullanmış ve bu sayede klasik fonksiyonel analizin önemli bazı teoremlerinin tutarlı karşılıklarını quasilineer uzaylarda da verebilmiştir.

Yukarıda bahsedilen lineer uzay teşkil etmeyen cümlelerin en önemlilerinden ikisi $\mathbb{R}^n$'nin, boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesi olan $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Bir çok doğa probleminin matematiksel modelini oluşturan küme diferensiyel denklemler incelenirken $C\left(I, \Omega_C(\mathbb{R}^n)\right)$ uzayı önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle, büyük ölçüde [2] numaralı kaynaktan yararlanılan bu çalışmada $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ aileleri ve bu aileler üzerindeki quasilineer yapı incelenecektir.

Quasilineer uzaylar teorisindeki temel bir eksiklik, lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının bu uzaylardaki karşılıklarının tanımlanmamış olmasıdır. Bu durum quasilineer uzaylar teorisinin gelişimi önündeki en büyük engellerden biridir. Ayrıca quasilineer uzaylarda, lineer uzaylardaki bazı mevcut sonuçların benzerleri dahi incelenmemiştir. Bu nedenle, quasilineer uzaylar teorisini irdelemek ve bu sınıfa ait bazı eksiklikleri gidermek adına son yıllarda bazı çalışmalar yapılmıştır, [11-21].

Beş bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde quasilineer uzayların genel teorisinde eksik olan quasilineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının verilen yeni tanımları çerçevesinde çalışılmış ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler araştırılarak, bu özelliklere ilişkin bazı teorem ve sonuçlar lineer uzaylardaki sonuçlarla tutarlılık içinde verilmiştir. Bu kısımda öncelikle quasilineer uzayların regüler ve singüler boyutu tanımlanmış ve normlu quasilineer uzaylarda normlu lineer uzaylar teorisindeki sonuçlara benzer ve farklı bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, proper ve proper olmayan quasilineer uzay kavramı tanıtılmış ve quasilineer uzayların proper uzay olmaları halinde sahip olduğu bir takım özellikler verilmiştir. Bunlara ek olarak, bu kısımda proper quasilineer uzayların önemli bir sınıfı olan sağlam zeminli quasilineer uzaylar tanıtılmış ve bu sınıf için bazı değerlendirmeler yapılmıştır.

Bir quasilineer uzay üzerinde bir topoloji kurmanın genel yöntemlerinden biri ve bu yöntem için bazı hazırlıkların verildiği dördüncü bölümde, öncelikle, dengeli cümleler, yutan cümleler, bir cümle ailesinin toplamsallık özelliği, süzgeç ve süzgeç tabanı gibi kavramlar tanımlanmıştır. Ardından bu kavramlar yardımıyla quasilineer uzaylar üzerinde bir topoloji oluşturulmuştur. Ayrıca normlu lineer uzaylar için sağlanan lokalizasyon prensibinin normlu quasilineer uzaylar için sağlanmadığı gösterilmiştir. Son olarak normlu quasilineer uzaylar için lokalizasyon prensibinin sınırları çizilmeye çalışılmıştır.

Beşinci ve son bölümde ise normlu quasilineer uzaylarda, bir dizinin alt ve üst yarı yakınsaklığı kavramları tanıtılmış ve bu kavramlara ilişkin bir takım örnekler ve önemli bazı sonuçlar verilmiştir. Bu yeni tanımlar normlu quasilineer uzaylarda yakınsak olmayan dizilerin yakınsaklığına ilişkin alternatif tanımlardır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Bazı Cebir, Topoloji ve Fonksiyonel Analiz Kavramları

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. *X boş olmayan bir cümle ve "$\preceq$", X üzerinde bir bağıntı olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için*

i) $x \preceq x$,

ii) $x \preceq y$ *ve* $y \preceq z$ *ise* $x \preceq z$,

iii) $x \preceq y$ *ve* $y \preceq x$ *ise* $x = y$

şartları sağlanıyorsa, $\preceq$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı, X cümlesine de $\preceq$ kısmi sıralama bağıntısı ile birlikte bir kısmi sıralı cümle denir. $\preceq$ kısmi sıralama bağıntısı ile kısmi sıralı bir X cümlesi $(X, \preceq)$ şeklinde gösterilir, [22].

Kolaylıkla görülebileceği gibi boş olmayan her X cümlesi

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y$$

bağıntısı ile kısmi sıralı bir cümledir.

Tanım 2.1.2. *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir cümle ve $a \in X$ olmak üzere, her $x \in X$ için $x \preceq a$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa, a elemanına X'in maksimum elemanı (X'in bir üst sınırı) denir.*

Benzer olarak her $x \in X$ için $b \preceq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ varsa, b elemanına X'in minimum elemanı (X'in bir alt sınırı) denir, [22].

Tanım 2.1.3. *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir cümle olsun. $a \in X$ olmak üzere, her $x \in X$ için $a \preceq x$ koşulunun sağlanması $x = a$ olmasını gerektiriyorsa a elemanına X'in bir maksimal elemanı denir.*

$b \in X$ olmak üzere, her $x \in X$ için $x \preceq b$ koşulunun sağlanması $x = b$ olmasını gerektiriyorsa b elemanına X'in bir minimal elemanı denir, [22].

Tanım 2.1.4. *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir cümle ve $A \subset X$ olmak üzere, her $a \in A$ için,*

$$a \preceq x$$

ve

$$a \preceq y \text{ olan her } y \in X \text{ için } x \preceq y$$

koşulları sağlanacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x elemanına A cümlesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir.

Eğer her $a \in A$ için,

$$x \preceq a$$

ve

$$y \preceq a \text{ olan her } y \in X \text{ için } y \preceq x$$

koşulları sağlanacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x elemanına A cümlesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir, [22].

Tanım 2.1.5. *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir cümle olmak üzere, her $x, y \in X$ için,*

$$x \preceq y \text{ veya } y \preceq x$$

önermesi doğru ise $\preceq$ bağıntısına X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı, X cümlesine ise $\preceq$ tam sıralama bağıntısı ile birlikte tam sıralı bir cümle denir, [23].

Tanım 2.1.6. *Kısmi sıralı bir X cümlesinin tam sıralı her alt cümlesine X'de bir zincir denir, [23].*

Lemma 2.1.1 (Zorn Lemması). *X kısmi sıralı bir cümle olmak üzere, X'deki her C zinciri bir üst sınıra sahip ise X cümlesi en az bir maksimal elemana sahiptir, [22].*

2.1.1 Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.7. *X boş olmayan bir cümle ve τ X'in alt cümlelerinin bir ailesi olmak üzere,*

T1) $\emptyset \in \tau$ *ve* $X \in \tau$,

T2) $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ *için* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$,

T3) *I herhangi bir indis cümlesi ve her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \tau$ olmak üzere,* $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

şartları sağlanıyorsa τ' ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine ise topolojik uzay denir, [24].

Tanım 2.1.8. *X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere, birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olan $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne homeomorfizm (topolojik eş yapı dönüşümü), X ve Y uzaylarına da homeomorf topolojik uzaylar denir.*

X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda X üzerindeki topolojik özellikler f dönüşümü altında korunur, [25].

2.1.2 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.9. *X boş olmayan bir cümle olmak üzere, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için*

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir, [22].

Örnek 2.1.1. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \; d(x, y) = |x - y|$$

fonksiyonu ile bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$'nin alışılmış metriği (mutlak değer metriği) denir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^2$ *üzerinde* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ *olmak üzere,*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}^2$*'nin alışılmış metriği denir.*

Örnek 2.1.3. *Kompleks terimli ve sınırlı bütün dizilerin cümlesi olan*

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{C} : \sup_n |x_n| < \infty \right\},$$

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu ile bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.10. (X, d) *bir metrik uzay,* $x_0 \in X$ *ve* $r > 0$ *olmak üzere,* X*'in*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

ve

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

şeklinde tanımlı alt cümlelerine sırasıyla, x_0 *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar ve* x_0 *merkezli* r *yarıçaplı kapalı yuvar denir, [22].*

Tanım 2.1.11. (X, d) *bir metrik uzay,* $A \subseteq X$ *ve* $x_0 \in A$ *olmak üzere,* $B(x_0, r) \subseteq A$ *olacak şekilde bir* $r > 0$ *sayısı mevcut ise A cümlesine* x_0 *elemanının bir komşuluğu denir. Her elemanının komşuluğu olan cümleye açık cümle, tümleyeni açık olan cümleye ise kapalı cümle denir, [22].*

Teorem 2.1.1. *Herhangi bir X metrik uzayında her bir kapalı yuvar bir kapalı cümledir, [26].*

Tanım 2.1.12. (X, d) *bir metrik uzay,* $x_0 \in X$ *ve* $A \subseteq X$ *olmak üzere, verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ *ise* x_0 *elemanına A cümlesinin bir yığılma noktası denir. A'nın bütün yığılma noktalarının cümlesi* A' *ile gösterilir, [26].*

Tanım 2.1.13. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *olmak üzere,* $A \cup A'$ *cümlesine A'nın kapanışı denir ve* $\overline{A}$ *ile gösterilir, [26].*

Tanım 2.1.14. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *boş olmayan bir cümle olmak üzere,*

$$diam\, A = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

değerine A *cümlesinin çapı denir, [22].*

Tanım 2.1.15. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *olmak üzere, her* $x, y \in A$ *için* $d(x, y) \leq K$ *olacak şekilde bir* $K > 0$ *sayısı mevcut ise* A *cümlesine sınırlıdır denir, [27].*

Tanım 2.1.16. (X, d) *bir metrik uzay ve* (x_n) X*'de bir dizi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için* $m, n > N(\varepsilon)$ *iken* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (x_n) *dizisine bir Cauchy dizisi denir, [22].*

Tanım 2.1.17. (X, d) *bir metrik uzay,* (x_n) X*'de bir dizi ve* $x \in X$ *olmak üzere, her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* $n > N(\varepsilon)$ *olan her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *mevcut ise* (x_n) *dizisi* x *noktasına yakınsaktır veya* (x_n) *dizisinin limiti* x*'dir denir ve* $x_n \to x$ *veya* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ile gösterilir, [26].*

Teorem 2.1.2. (X, d) *bir metrik uzay,* $A \subset X$ *ve* $x \in X$ *olmak üzere,* $x \in \overline{A}$ *olması için gerek ve yeter koşul* $x_n \to x$ *olacak şekilde* A*'da bir* (x_n) *dizisinin var olmasıdır, [22].*

Teorem 2.1.3. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subset X$ *olsun.* A*'nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul* A*'daki her yakınsak dizinin limitinin* A*'nın bir elemanı olmasıdır, [22].*

Tanım 2.1.18. (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere,* X*'deki her* (x_n) *Cauchy dizisi* X*'de yakınsak ise* (X, d)*'ye bir tam metrik uzay denir, [22].*

Örnek 2.1.4. ℓ_∞ *dizi uzayı*

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

Teorem 2.1.4. (X, d) *bir tam metrik uzay ve* A*,* X*'in bir alt uzayı olsun.* A*'nın tam olması için gerek ve yeter koşul* A*'nın* X*'de kapalı olmasıdır, [22].*

Tanım 2.1.19. *X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere, X'in alt cümlelerinin bir $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ ailesi $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{G}$ ailesine A için bir örtüdür denir. $\mathcal{G}$ ailesinin sayılabilir olması durumunda $\mathcal{G}$'ye sayılabilir örtü, sonlu olması durumunda sonlu örtü ve $\mathcal{G}$'nin her elemanının açık olması halinde ise $\mathcal{G}$'ye açık örtü denir. Eğer bir $J \subseteq I$ için $A \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ ise $\{G_i : i \in J\}$ ailesine $\mathcal{G}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir, [26].*

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}$ *alışılmış metrik ile düşünüldüğünde $\mathcal{G} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir örtü (hatta açık örtü) ve $\{(-k, k) : k = 2n$ ve $n \in \mathbb{N}\}$ ailesi de $\mathcal{G}$'nin bir alt örtüsüdür.*

Tanım 2.1.20. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcut ise A cümlesine kompakttır denir, [26].*

Tanım 2.1.21. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A cümlesinden alınan her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise A cümlesine dizisel kompakttır denir, [26].*

Tanım 2.1.22. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A' nın her sayılabilir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcut ise A cümlesine sayılabilir kompakttır denir, [26].*

Metrik uzaylara ilişkin yukarıda verilen kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık kavramları birbirine denktir, [26].

Kompakt bir uzayın herhangi bir alt uzayı kompakt olmayabilir.

Teorem 2.1.5. *Bir kompakt uzayın kapalı alt cümlesi kompakttır, [28].*

Önerme 2.1.1. *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul A'daki her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır, [22].*

Teorem 2.1.6 (Heine-Borel Teoremi). *$A \subset \mathbb{R}^n$ cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır, [28].*

Tanım 2.1.23. *(X, d), (Y, d') metrik uzaylar, $f : A \subseteq X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x, x_0) < \delta$ olan her $x \in A$ için*

$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ *sayısı mevcut ise,* f *fonksiyonu* x_0 *noktasında süreklidir denir. Eğer* f *fonksiyonu* A *cümlesinin her noktasında sürekli ise, bu durumda* f *fonksiyonu* A *üzerinde (veya* A*'da) süreklidir denir, [26].*

Teorem 2.1.7. *X ve Y metrik uzaylar ve $T : X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda X'in kompakt bir A alt cümlesinin T altındaki görüntüsü de kompakttır, [22].*

Teorem 2.1.8. *Bir X metrik uzayının kompakt bir A alt cümlesini $\mathbb{R}$'nin içine dönüştüren sürekli bir T dönüşümü, A'nın bazı noktalarında bir maksimuma ve bir minimuma sahiptir, [22].*

2.1.3 Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.24. *X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks cisim olsun. X üzerinde,*

$$+ : X \times X \to X \ , \ (x, y) \to x + y$$

ve

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X \ , \ (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

işlemleri tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için,

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) $x + \theta = \theta + x = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *vardır,*

L4) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ *olacak şekilde bir* $-x \in X$ *vardır,*

L5) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

L6) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

L7) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,

L8) $1 \cdot x = x$ *olacak şekilde bir* $1 \in \mathbb{K}$ *vardır*

şartları sağlanıyor ise X'e $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı), X'in elemanlarına ise vektör denir.

θ elemanına X'in sıfırı, $-x$ elemanına ise x'in tersi denir. X'e, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınması durumunda reel lineer uzay, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması durumunda ise kompleks lineer uzay

denir. Hangi cismin söz konusu olduğunun bilindiği durumlarda X'e sadece lineer uzay demek yeterlidir, [22].

Tanım 2.1.25. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay olsun. Eğer $Y \subseteq X$ alt cümlesi de aynı işlemler ile aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay yapısına sahip ise Y'ye X'in bir alt lineer uzayı denir, [22].*

Teorem 2.1.9. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda Y cümlesinin X'in bir alt lineer uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ve her $y_1, y_2 \in Y$ için $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in Y$ olmasıdır, [22].*

Tanım 2.1.26. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu durumda*

$$[x, y] = \{z \in X : z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y,\ \lambda \in [0, 1]\}$$

cümlesine x ile y noktalarını birleştiren doğru parçası denir, [22].

Tanım 2.1.27. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, her $x, y \in A$ için $[x, y] \subseteq A$ ise A'ya konveks cümle denir.*

Buna göre, A cümlesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in A$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in A$ olmasıdır, [22].

Örnek 2.1.6. *$a < b$ olmak üzere $\mathbb{R}$'de $[a, b]$ kapalı aralığı konveks bir cümledir.*

Örnek 2.1.7.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

kapalı birim yuvarı $\mathbb{R}^2$'nin konveks bir alt cümlesidir.

Tanım 2.1.28. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ ve $c_1, c_2, c_3, ..., c_n \in \mathbb{K}$ olmak üzere $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot x_k$ toplamına $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ vektörlerinin lineer kombinasyonu denir, [22].*

Tanım 2.1.29. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olmak üzere, A'nın elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının cümlesine A'nın gereni veya A'nın gerdiği alt uzay denir ve SpA ile gösterilir.*

Ayrıca $SpA = X$ ise A cümlesi X'i geriyor denir, [22].

Tanım 2.1.30. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve*

$$A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \subset X$$

olsun. $c_1, c_2, c_3, ..., c_n \in \mathbb{K}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x_k = 0 \Leftrightarrow c_k = 0 \ , \ 1 \leq k \leq n$$

oluyorsa A cümlesi lineer bağımsızdır, aksi durumda lineer bağımlıdır denir, [22].

Tanım 2.1.31. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X'in içerdiği maksimum lineer bağımsız vektör sayısına X'in boyutu denir ve boy$X$ ile gösterilir.*

boy$X < \infty$ ise X'e sonlu boyutludur, aksi halde sonsuz boyutludur denir, [22].

Tanım 2.1.32. *X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X'in lineer bağımsız ve X'i geren alt cümlesine X için bir baz (Hamel bazı) denir, [22].*

Teorem 2.1.10. *Her lineer uzay bir Hamel baza sahiptir, [22].*

2.1.4 Kısmi Sıralı Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.33. *Bir kısmi sıralı lineer uzay, lineer uzay işlemleri ile uyumlu olan bir kısmi sıralama bağıntısı ile donatılmış bir lineer uzaydır. Daha açık olarak, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir X lineer uzayı ve X üzerinde bir "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı verilsin. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda \geq 0$ reel skaleri için*

$$\begin{aligned} x &\preceq y \text{ ise } x + z \preceq y + z \\ x &\preceq y \text{ ise } \lambda \cdot x \preceq \lambda \cdot y \end{aligned}$$

aksiyomları sağlanıyorsa $(X, \preceq)$ ikilisine kısmi sıralı lineer uzay adı verilir, [29].

Örnek 2.1.8. *$\mathbb{R}$, üzerinde tanımlı alışılmış sıralama olan "$\leq$" bağıntısı ile bir kısmi sıralı lineer uzaydır.*

Örnek 2.1.9. *$\mathbb{R}^2$, üzerinde aşağıdaki üç farklı yöntemden herhangi biri ile tanımlanacak olan "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı ile birlikte bir kısmi sıralı lineer uzaydır:*

i) $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$ veya ($a = c$ ve $b \leq d$) ile tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

ii) $(a,b) \preceq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ *ve* $b \leq d$ *ile tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

iii) $(a,b) \preceq (c,d) \Leftrightarrow (a < c$ *ve* $b < d)$ *veya* $(a = c$ *ve* $b = d)$ *ile tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Örnek 2.1.10. $\mathbb{R}^n$*, yukarıdaki durumlara benzer şekilde tanımlanan bağıntılar ile bir kısmi sıralı lineer uzaydır. Örneğin ii)'de tanımlanan bağıntıya benzer bağıntı* $\mathbb{R}^n$ *üzerinde,*

$$x \preceq y \Leftrightarrow \text{her } 1 \leq i \leq n \text{ için } x_i \leq y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağıntı ile $\mathbb{R}^n$ *bir kısmi sıralı lineer uzaydır.*

Örnek 2.1.11.

$$C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

olarak tanımlanan $C[a,b]$ *cümlesi,* $t \in [a,b]$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (\lambda \cdot f)(t) = \lambda f(t)$$

işlemleri ile bir reel lineer uzay yapısına sahip olup, bu uzay $f, g \in C[a,b]$ *olmak üzere,*

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(t) \leq g(t)$$

bağıntısı ile kısmi sıralı bir lineer uzaydır.

2.1.5 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.34. X*,* $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere,* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* x*,* $y \in X$ *ve her* $\alpha \in \mathbb{K}$ *için*

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$

N2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \, \|x\|,$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir norm,* $(X, \|\cdot\|)$ *ikilisine de bir normlu uzay denir, [22].*

Örnek 2.1.12. $\mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{C}$ *üzerinde* $|\cdot|$ *(mutlak değer) fonksiyonu bir norm tanımlar. Bu norma alışılmış norm (mutlak değer normu) denir.*

Tanım 2.1.35. $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay olmak üzere,*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

olarak tanımlanan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu* X *üzerinde bir metrikdir.* d *metriğine normun ürettiği metrik ya da norm metriği denir, [22].*

Sonuç 2.1.1. *Her normlu uzay norm metriğiyle bir metrik uzaydır, [22].*

Tanım 2.1.36. $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay ve* (x_n) X*'de bir dizi olmak üzere, her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $m, n > N(\varepsilon)$ *olan her* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *mevcut ise* (x_n) *dizisine bir Cauchy dizisi denir, [30].*

Tanım 2.1.37. $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay,* (x_n) X*'de bir dizi ve* $x \in X$ *olsun.* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ *ise* (x_n) *dizisi* x *noktasına yakınsaktır ya da* (x_n) *dizisinin limiti* x*'dir denir ve* $x_n \to x$ *veya* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ile gösterilir, [30].*

Tanım 2.1.38. $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay olsun. Eğer* X, $\|\cdot\|$ *normunun ürettiği* $d(x,y) = \|x-y\|$ *norm metriği ile tam ise, yani* X *normlu uzayından alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise* $(X, \|\cdot\|)$ *ikilisine (veya kısaca* X*'e) Banach uzayı denir, [30].*

Örnek 2.1.13. $p \geq 1$ *olmak üzere,*

$$\ell_p = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

lineer uzayı

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Ayrıca ℓ_p

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

norm metriği ile tam olduğundan bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.1.14. $\mathbb{R}^n$ *ve* $\mathbb{C}^n$,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

öklid normu ile birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.1.15. *ℓ_∞ ve c_0 dizi uzayları*

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.1.16. *$f \in C[a,b]$ olmak üzere $C[a,b]$,*

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.39. *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere, X'in*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

ve

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

şeklinde tanımlı alt cümlelerine sırasıyla, x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir, [30].

Bu tezde, θ merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar kısaca $S(\theta, r)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.40. *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $\|x\| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut ise A cümlesine sınırlıdır denir, [26].*

Teorem 2.1.11. *Normlu bir X uzayının sonlu boyutlu her Y alt uzayı X'de kapalıdır, [22].*

Teorem 2.1.12. *Bir metrik uzayın kompakt bir alt cümlesi kapalı ve sınırlıdır, [22].*

Bu teoremin karşıtı genelde doğru değildir. Buna karşılık, sonlu boyutlu bir normlu uzayda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.13. *Sonlu boyutlu normlu bir X uzayında herhangi bir A alt cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır, [22].*

Lemma 2.1.2 (F. Riesz Lemması). *X normlu bir uzay, Y ve Z, X'in alt uzayları ve Y, Z alt uzayının kapalı bir özalt cümlesi olmak üzere, her $\gamma \in (0,1)$ sayısına karşılık $\|z\| = 1$ olan ve her $y \in Y$ için $\|z - y\| \geq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $z \in Z$ mevcuttur, [22].*

Sonlu boyutlu normlu bir uzayın kapalı birim yuvarının kompakt olduğu Teorem 2.1.13'den kolaylıkla görülebilir. Diğer taraftan, Riesz Lemması kullanılarak aşağıdaki önemli teorem verilebilir.

Teorem 2.1.14. *Normlu bir X uzayında, $S(\theta, 1) = \{x : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı kompakt ise, X sonlu boyutludur, [22].*

2.2 Quasilineer Uzaylar

S. M. Aseev [9] 1986 yılında klasik lineer uzayların bir genelleştirmesi olan quasilineer uzay kavramını ortaya atmıştır. Aseev'in yaklaşımı klasik lineer cebire geniş bir bakış açısı getirmiş, böylelikle quasilineer cebir ve quasilineer fonksiyonel analiz teorisi için zemin oluşturmuştur. Markow [10], [11] lineer uzay yapısı taşımayan sınıfların cebirsel ve topolojik incelemesinde yine quasilineer uzay adını verdiği bir uzay çeşidi ile çalışmıştır. Fakat Aseev'in yaklaşımı, kullandığı sıralama bağıntısının da avantajlarından dolayı, klasik teoridekine benzer ve onlarla tutarlı bir analiz takip etmek için, diğer yaklaşımlara göre daha genel ve avantajlıdır.

Aseev'in verdiği tanımda özel olarak "=" kısmi sıralama bağıntısının alınması durumunda söz konusu olan quasilineer uzay, lineer uzay olmaktadır. Ayrıca verilen norm tanımı da bilinen norm tanımı ile çakışmaktadır. Bu ise tek değerli fonksiyonların analizinde, bilinen fonksiyonel analiz prensiplerinin bazılarının benzerlerinin, tutarlı bir şekilde kümelerin ve küme değerli fonksiyonların quasilineer uzayları için de verilebileceği anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2.1. *X boş olmayan bir cümle, "$+$", "$\cdot$" ve "$\preceq$" sırasıyla X üzerindeki cebirsel toplama işlemi, reel skaler ile çarpma işlemi ve kısmi sıralama bağıntısı olmak üzere, her $x, y, z, v \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için, aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda X cümlesine quasilineer uzay denir ve $(X, +, \cdot, \preceq)$ şeklinde veya sade* *olarak* $(X, \preceq)$ *şeklinde gösterilir, [9].*

$$x \preceq x, \tag{2.2.1}$$

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq z \text{ ise } x \preceq z, \tag{2.2.2}$$

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq x \text{ ise } x = y, \tag{2.2.3}$$

$$x + y = y + x, \tag{2.2.4}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \tag{2.2.5}$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır,} \tag{2.2.6}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \tag{2.2.7}$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \tag{2.2.8}$$

$$1 \cdot x = x, \tag{2.2.9}$$

$$0 \cdot x = \theta, \tag{2.2.10}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \tag{2.2.11}$$

$$x \preceq y \text{ ve } z \preceq v \text{ ise } x + z \preceq y + v, \tag{2.2.12}$$

$$x \preceq y \text{ ise } \alpha \cdot x \preceq \alpha \cdot y. \tag{2.2.13}$$

Burada θ *ile* X*'in "+" işlemine göre birim elemanı kastedilmektedir.*

Örnek 2.2.1. *Her lineer uzay*

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y$$

kısmi sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzaydır.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{R}$ *reel sayılar cümlesinin boş olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin oluşturduğu* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *ailesi "*$\subseteq$*" kapsama bağıntısı, her* $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *için*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

şeklinde tanımlı cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{2.2.14}$$

ile tanımlanan reel skaler ile çarpma işlemi ile bir quasilineer uzay yapısı teşkil eder.

"$\subseteq$" bağıntısı, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte diğer bir quasilineer uzay örneği olarak ise $\mathbb{R}$'nin boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi olan $\Omega(\mathbb{R})$ verilebilir.

Örnek 2.2.3. *E herhangi bir normlu lineer uzay olsun. $\Omega(E)$, E'nin boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi ve $\Omega_C(E)$ ise E'nin boş olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesi olmak üzere, $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ üzerinde "$\subseteq$" kapsama bağıntısı, $A, B \in \Omega(E)$ olmak üzere*

$$A + B = \begin{cases} \overline{\{a+b : a \in A,\ b \in B\}}, & E \text{ sonsuz boyutlu ise} \\ \{a+b : a \in A,\ b \in B\}, & E \text{ sonlu boyutlu ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı cebirsel toplama işlemi ve (2.2.14) ile verilen reel skalerle çarpma işlemi tanımlansın.

E sonsuz boyutlu kabul edilerek $\Omega(E)$'nin bir quasilineer uzay olduğu aşağıdaki kısımda ispatlanmıştır. E sonlu boyutlu ise, ispat kolaylıkla yapılabilir.

Öncelikle her $A, B, C, D \in \Omega(E)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$A \subseteq A,$$

$$A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq C \text{ ise } A \subseteq C,$$

ve

$$A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A \text{ ise } A = B$$

özellikleri sağlandığından "$\subseteq$" bağıntısı $\Omega(E)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır. Ayrıca, E normlu lineer uzayının "$+$" işlemine göre birim elemanı 0_E ve $\theta = \{0_E\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A + \theta &= \overline{\{a + 0_E : a \in A,\ 0_E \in \theta\}} \\ &= \overline{\{a : a \in A\}} \\ &= \overline{A} = A \end{aligned}$$

olur. Böylece θ*,* $\Omega(E)$*'nin birim (sıfır) elemanıdır. Diğer taraftan,*

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot A) &= \{\alpha\cdot(\beta\cdot a):\beta\cdot a\in\beta\cdot A\}\\ &= \{(\alpha\beta)\cdot a: a\in A\}\\ &= (\alpha\beta)\cdot A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(A+B) &= \alpha\cdot\overline{\{a+b: a\in A,\ b\in B\}}\\ &= \overline{\{\alpha\cdot(a+b): a\in A,\ b\in B\}}\\ &= \overline{\{\alpha\cdot a+\alpha\cdot b: a\in A,\ b\in B\}}\\ &= \overline{\{\alpha\cdot a: a\in A\}}+\overline{\{\alpha\cdot b: b\in B\}}\\ &= \alpha\cdot\overline{\{a: a\in A\}}+\alpha\cdot\overline{\{b: b\in B\}}\\ &= \alpha\cdot\overline{A}+\alpha\cdot\overline{B}\\ &= \alpha\cdot A+\alpha\cdot B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot A &= \{1\cdot a: a\in A\}\\ &= \{a: a\in A\}\\ &= A\end{aligned}$$

ve

$$0\cdot A=\{0\cdot a: a\in A\}=\theta_E$$

eşitlikleri sağlanır.

$A\subseteq B$ *ve* $C\subseteq D$ *olmak üzere,*

$$A+C=\overline{\{a+c: a\in A,\ c\in C\}}$$

$$B+D=\overline{\{b+d: b\in B,\ d\in D\}}$$

cümleleri göz önüne alınırsa herhangi bir $x\in A+C$ *için* $x\in\{a+c: a\in A, c\in C\}$ *veya* $x\in\{a+c: a\in A, c\in C\}'$ *olur.*

Eğer

$$x\in\{a+c: a\in A,\ c\in C\}$$

ise, bu durumda $x = a_1 + c_1$ *olacak şekilde en az bir* $a_1 \in A$ *ve* $c_1 \in C$ *vardır. Bu durumda hipotez gereği* $a_1 \in B$ *ve* $c_1 \in D$ *olur. Dolayısıyla*

$$x = a_1 + c_1 \in \{b + d : b \in B,\ d \in D\}$$

ve $x \in B + D$ *elde edilir. Böylece*

$$A + C \subseteq B + D$$

kapsaması sağlanır.

Eğer

$$x \in \{a + c : a \in A,\ c \in C\}'$$

ise, her $\varepsilon > 0$ *için*

$$\{a + c : a \in A,\ c \in C\} \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

olur. Buradan,

$$y \in \{a + c : a \in A,\ c \in C\}$$

olacak şekilde en az bir $y \in (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\})$ *elemanının olduğu görülür. Bu durumda hipotez gereğince*

$$y \in \{b + d : b \in B,\ d \in D\}$$

dir. Böylece her $\varepsilon > 0$ *için*

$$\{b + d : b \in B,\ d \in D\} \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu ise

$$x \in \{b + d : b \in B,\ d \in D\}'$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $x \in B + D$ *ve* x *keyfi olarak seçildiğinden*

$$A + C \subseteq B + D$$

elde edilir.

Diğer taraftan $A \subseteq B$ *olmak üzere, herhangi bir* x *elemanına ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sayısına karşılık* $x = \alpha \cdot a$ *olacak şekilde* $a \in A$ *vardır. Hipotez gereğince* $a \in B$ *olduğundan* $x = \alpha \cdot a \in \alpha \cdot B$ *elde edilir. Sonuç olarak* $\alpha \cdot A \subseteq \alpha \cdot B$ *dir.*

(2.2.1) - (2.2.13) şartları sağlandığından $\Omega(E)$ *bir quasilineer uzaydır.*

Benzer olarak $\Omega_C(E)$*'nin de (2.2.1) - (2.2.13) şartlarını sağladığı gösterilebilir.*

$\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ cümleleri lineer olmayan quasilineer uzay örneklerinin en önemlilerinden ikisidir. Aşikâr olarak $\Omega_C(E) \subseteq \Omega(E)$ dir.

Küme değerli fonksiyonların önemli uygulama alanlarından biri bu fonksiyonlarla oluşturulan küme diferensiyel denklemlerdir. Küme diferensiyel denklemleri içeren bilimsel problemlerin çözümünde, $\mathbb{R}$'nin bir I kapalı aralığından $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesine tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı çok önemli yer tutmaktadır, [2]. Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinden ve bu cümleler ailesinin oluşturduğu uzaylardan bahsetmek yararlı olacaktır.

$\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ile, boş olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerinin ailesi ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilecektir. Bazı kaynaklarda bu ailelerin elemanları kompakt konveks cümleler ya da konveks body'ler olarak da nitelendirilmekte ve gösteriminde farklı semboller kullanılmaktadır.

Örnek 2.2.4. *$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ cümleleri, bir kısmi sıralama bağıntısı olan "$\subseteq$" kapsama bağıntısı,*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

ile tanımlı cebirsel toplama ve

$$\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : a \in A\}$$

şeklindeki skalerle çarpma işlemleri ile birlikte birer quasilineer uzaydır.

$\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ aileleleri yukarıda tanımlanan işlemlere göre kapalıdır. Ayrıca her $A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır, [2]:

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$A + \theta = \theta + A = A$ *olacak şekilde* θ *birim elemanı vardır,*

$$1 \cdot A = A,$$

$$0 \cdot A = \theta,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A,$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B,$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A \subseteq \lambda \cdot A + \mu \cdot A,$$

$$A \subseteq B \text{ ve } C \subseteq D \text{ ise } A + C \subseteq B + D,$$

$$A \subseteq B \text{ ise } \lambda \cdot A \subseteq \lambda \cdot B.$$

Uyarı 2.2.1. *Genel olarak $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'in bir A elemanı için $A+(-1)\cdot A \neq \theta$ olmaktadır. Bu durum aşağıdaki örnek ile açıklanabilir.*

Örnek 2.2.5. *$n = 1$ olmak üzere $\Omega_C(\mathbb{R})$ cümlesi ve $A = [-1, 3] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ elemanı göz önüne alınsın. Bu durumda*

$$(-1) \cdot A = [-3, 1]$$

olur. Buradan,

$$A + (-1) \cdot A = [-1, 3] + [-3, 1] = [-4, 4]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $A + (-1) \cdot A = [-4, 4] \neq \theta$ dır.

Yukarıdaki örnekden anlaşılacağı üzere $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki bir elemanın -1 katının kendisiyle toplamı birim eleman olan θ'yı vermek zorunda değildir. Bu ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ailelerinin lineer uzay yapısına sahip olamayacaklarını gösterir. Diğer taraftan bu aileler, lineer uzay kavramının kapsamlı bir genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına uymaktadır.

2.2.1 Quasilineer Uzaylarda Bazı Temel Sonuçlar

Lemma 2.2.1. *Bir X quasilineer uzayında θ elemanı minimaldir. Bir başka ifade ile,*

$$x \preceq \theta \Rightarrow x = \theta$$

dır, [9].

İspat. $x \preceq \theta$ olsun. $(-1) \cdot x \preceq (-1) \cdot x$ sıralaması ve (2.2.12) göz önüne alınırsa,

$$x + (-1) \cdot x \preceq \theta + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x$$

elde edilir. Bu sonuç ile birlikte (2.2.10) ve (2.2.11) şartları dikkate alınırsa,

$$\theta = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x \preceq x + (-1) \cdot x \preceq (-1) \cdot x$$

ve dolayısıyla

$$\theta \preceq (-1) \cdot x$$

olduğu görülür. Ayrıca (2.2.13) şartı da kullanılarak

$$(-1) \cdot \theta \preceq (-1) \cdot ((-1) \cdot x) = x$$

elde edilir. Bunun yanısıra,

$$(-1) \cdot \theta = (-1) \cdot (0 \cdot x) = 0 \cdot x = \theta$$

olduğundan

$$\theta \preceq x$$

elde edilir. Bu sonuç hipotez ile birleştirilirse $x = \theta$ bulunur. Böylece θ minimal eleman olur. $\square$

Minimal eleman olma özelliğinin sadece θ elemanına has olmadığını, aynı zamanda θ'dan farklı bazı özel elemanların da minimal olabileceği ilerleyen kısımlarda gösterilecektir.

Tanım 2.2.2. *Bir X quasilineer uzayında $x + x' = \theta$ olacak şekilde bir $x' \in X$ mevcut ise x' elemanına x'in tersi denir, [9].*

Eğer bir elemanın tersi mevcut ise bu eleman tektir. Gerçekten de; x'in $x+x' = \theta$ ve $x + x'' = \theta$ olacak şekilde x' ve x'' gibi iki farklı tersinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} & x + x' = \theta \\ \Rightarrow\ & (x + x') + x'' = \theta + x'' \\ \Rightarrow\ & x + (x' + x'') = x'' \\ \Rightarrow\ & (x + x'') + x' = x'' \\ \Rightarrow\ & \theta + x' = x'' \\ \Rightarrow\ & x' = x'' \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2. *Bir X quasilineer uzayındaki her x elemanının bir x' tersi mevcut olsun. Bu durumda X'deki kısmi sıralama, eşitlik ile belirlenir. Dağılma özellikleri sağlanır ve sonuç olarak X lineer bir uzaydır, [9].*

İspat. X'in her elemanının bir tersi mevcut ve $x \preceq y$ olsun. Diğer taraftan y', y'nin tersi olmak üzere, $y' \preceq y'$ olduğundan (2.2.12)'den $x + y' \preceq y + y'$ yazılır. Buradan $x + y' \preceq \theta$ elde edilir. θ minimal eleman olduğundan $x + y' = \theta$ ve ters eleman tek olduğundan $x = y$ olur. Böylece X'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (2.2.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür ve (2.2.12) ile (2.2.13) şartları sağlanır. Dolayısıyla X lineer bir uzaydır. $\square$

Sonuç 2.2.1. *Bir reel lineer uzayda "=" bağıntısı (2.2.1)-(2.2.13) şartlarını sağlayacak şekildeki tek kısmi sıralama bağıntısıdır, [9].*

Bundan sonraki kısımlarda, aksi belirtilmedikçe $-x$ ile $(-1) \cdot x$ kastedilecektir.

Tanım 2.2.3. *Bir X quasilineer uzayında tersi mevcut olan elemana regüler eleman, tersi mevcut olmayan elemana ise singüler eleman denir. X'in tüm regüler ve singüler elemanlarının cümlesi sırasıyla X_r ve X_s ile gösterilir, [12].*

Tanım 2.2.4. *X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere, Y cümlesi X uzayındaki aynı işlemler ve aynı kısmi sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa Y'ye X'in bir alt quasilineer uzayı (kısaca alt uzayı) denir, [12].*

Teorem 2.2.1. *X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda Y'nin X'in bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in Y$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$ olmasıdır, [12].*

Lemma 2.2.3. *X bir quasilineer uzay ve Y, X'in bir alt uzayı olmak üzere, her $x \in Y$ elemanının $x' \in Y$ tersi mevcut olsun. Bu durumda Lemma 2.2.2 gereğince Y'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile belirlenir, dağılma şartları sağlanır ve Y, X'in bir lineer alt uzayı olur.*

Örnek 2.2.6. *E bir reel normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega_C(E)$, $\Omega(E)$'nin bir alt uzayıdır.*

Tanım 2.2.5. *X bir quasilineer uzay ve $x \in X$ olmak üzere, $-x = x$ ise x'e simetrik eleman denir ve X'in tüm simetrik elemanlarının cümlesi X_d ile gösterilir, [12].*

Teorem 2.2.2. *X_r, X_d ve $X_s \cup \{\theta\}$ cümleleri X'in alt uzaylarıdır, [12].*

X_r, X_d ve $X_s \cup \{\theta\}$ uzaylarına sırasıyla X'in regüler, simetrik ve singüler alt uzayları denir.

Uyarı 2.2.2. *X_r, X'in lineer bir alt uzayı iken $X_s \cup \{\theta\}$, X'in lineer olmayan bir alt uzayıdır, [12].*

Örnek 2.2.7. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $Z = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\{0\}\}$ olsun. Bu durumda Z, X'in singüler alt uzayıdır. Öte yandan, $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$ tek nokta cümlelerinin oluşturduğu aile X_r'yi teşkil eder ve X'in lineer bir alt uzayıdır.*

Daha genel olarak, herhangi bir E normlu lineer uzayı için her bir tek nokta cümlesi, $a \in E$ olmak üzere $\{a\}$ biçiminde yazılır. E'nin tek nokta cümlelerinin oluşturduğu aile $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$'nin regüler alt uzayı olup, bu alt uzay E'nin bir kopyası olarak görülebilir.

Önerme 2.2.1. *Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir, [12].*

İspat. $x \in X_r$ keyfi bir eleman ve $y \preceq x$ olsun. Bu durumda

$$y + x' \preceq x + x' = \theta$$

ve θ minimal eleman olduğundan $y + x' = \theta$ elde edilir. Ters eleman tek olduğundan $y = x$ olur. Böylece $x \in X_r$ minimaldir. □

Örnek 2.2.8. *Örnek 2.2.7'deki Z alt uzayının tek minimal elemanı $\{0\}$ dır. Z'de bundan başka minimal eleman yoktur.*

2.2.2 Quasilineer Uzaylarda Qusilineer Bağımlılık-Bağımsızlık

2.2.2 ve 2.2.3 alt başlıklarında verilen tanım, teorem ve örnekler [14], [17] ve [21] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 2.2.6. *X bir quasilineer uzay, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k = x$$

olacak şekildeki x elemanına $\{x_k\}_{k=1}^n$ cümlesinin bir lineer kombinasyonu,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \preceq x$$

olacak şekildeki x elemanına ise $\{x_k\}_{k=1}^n$ cümlesinin bir quasilineer kombinasyonu (kısaca ql-kombinasyonu) denir.

Açık olarak, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ skalerlerine karşılık gelen $\{x_k\}_{k=1}^n$ elemanlarının lineer kombinasyonu bir tek iken, ql-kombinasyonları tek değildir.

Tanım 2.2.7. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, A'nın gereni*

$$SpA = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k, \;\; x_1, x_2, ..., x_n \in A \;\; ve \;\; \alpha_1, \alpha_2, ..., \;\; \alpha_n \in \mathbb{R} \right\},$$

A'nın quasi gereni ise

$$QspA = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \preceq x, \;\; x_1, x_2, ..., x_n \in A \;\; ve \;\; \alpha_1, \alpha_2, ..., \;\; \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır.

$QspA = X$ olduğunda A cümlesi X'i quasi geriyor denir.

$SpA \subseteq QspA$ olduğu açıktır.

Ayrıca lineer bir uzayda $SpA = QspA$ olduğundan $QspA$ kavramı, lineer olmayan quasilineer uzaylarda daha anlamlıdır.

Örnek 2.2.9. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $A = \{[1, 3]\}$ cümlesinin quasi gereni,*

$$Qsp\{[1, 3]\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot [1, 3] \subseteq x, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

dır. Burada $\lambda = 1$ için $\lambda \cdot [1, 3] \subseteq [1, 3]$ olduğundan $[1, 3] \in QspA$ dır. Diğer taraftan $\lambda \cdot [1, 3] \subseteq [2, 3]$ olacak şekilde hiçbir λ reel sayısı mevcut olmadığından $[2, 3] \notin QspA$ dır. Böylece $QspA \neq \Omega_C(\mathbb{R})$ sonucuna varılabilir.

Diğer taraftan, $2 \cdot [1, 3] \subseteq [2, 7]$ olduğundan $[2, 7] \in QspA$, fakat $\lambda . [1, 3] = [2, 7]$ olacak şekilde hiçbir λ reel sayısı mevcut olmadığından $[2, 7] \notin SpA$ dır.

Örnek 2.2.10. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $B = \{\{1\}\}$ cümlesi verilsin. Her $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $\lambda \cdot \{1\} \subseteq x$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan B'nin quasi gereni,*

$$Qsp\{\{1\}\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot \{1\} \subseteq x,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \Omega_C(\mathbb{R})$$

dir.

Sonuç 2.2.2. *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ cümlesi $\Omega_C(\mathbb{R})$'yi quasi gerer.*

Teorem 2.2.3. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ olmak üzere, $QspA$, X'in bir alt quasilineer uzayıdır.*

İspat. $x, y \in QspA$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda bazı $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ ve $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ için $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k \preceq x$ ve $\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k \preceq y$ dir. Ayrıca quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.11), (2.2.12) ve (2.2.13) kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \cdot x_k \preceq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k \preceq x + y$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k \cdot x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k \preceq \lambda \cdot x$$

yazılır. Böylece $x + y \in QspA$ ve $\lambda \cdot x \in QspA$ sonuçları elde edilir. □

Tanım 2.2.8. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset X$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\theta_X \preceq \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$$

sıralaması ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ halinde gerçekleniyorsa $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ cümlesine quasilineer bağımsız (ql-bağımsız), aksi halde quasilineer bağımlı (ql-bağımlı) denir.

Sonsuz bir $A \subset X$ cümlesinin sonlu her alt cümlesi quasilineer bağımsız ise A cümlesine quasilineer bağımsızdır denir.

Uyarı 2.2.3. *Her lineer uzayın "=" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğu dikkate alınırsa, lineer uzaylarda quasilineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarıyla çakışır.*

Örnek 2.2.11. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında* $\{[1,2]\}$ *cümlesi verilsin. Bu durumda*

$$\{0\} \subseteq \alpha \cdot [1,2]$$

kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter koşul $\alpha = 0$ *olmasıdır. Dolayısıyla* $\{[1,2]\}$ *cümlesi ql-bağımsızdır.*

Diğer taraftan

$$\{0\} \subseteq \beta \cdot [-1,2]$$

kapsaması tüm $\beta \in \mathbb{R}$ *sayıları için sağlandığından* $\{[-1,2]\}$ *cümlesi ql-bağımlıdır.*

Sonuç 2.2.3. $\Omega_C(\mathbb{R})$*'de* 0*'ı ihtiva eden bir kapalı aralığın oluşturduğu tek nokta cümlesi ql-bağımlıdır. Bu durum lineer cebirde* $\{0\}$ *tek nokta cümlesinin lineer bağımlı olmasına benzer.*

Sonuç 2.2.4. $(X, \preceq)$ *quasilineer uzayında* $\theta_X \preceq x$ *olacak şekildeki* x *elemanını barındıran bir* A *cümlesi ql-bağımlı olmak zorundadır. Örneğin* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında* $\{0\}$*'ı kapsayan bir* $[a,b]$ *aralığını barındıran aralıkların cümlesi ql-bağımlıdır. Bu durum ise, lineer cebirde sıfırı ihtiva eden bir cümlenin lineer bağımlı olmasına benzer.*

Örnek 2.2.12. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında* $\{[1,2], [-2,-1]\}$ *cümlesi verilsin.* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *için*

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot [1,2] + \lambda_2 \cdot [-2,-1] = [-1,1]$$

kapsaması sağlanacağından $\{[1,2], [-2,-1]\}$ *cümlesi* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında ql-bağımlıdır.*

Örnek 2.2.13. $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayında,*

$$v_1 = \{(x,y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$v_2 = \{(x,y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

olmak üzere, $\{v_1, v_2\}$ *cümlesi verilsin. Bu durumda* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *için*

$$\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$$

olduğundan $\{v_1, v_2\}$ *cümlesi* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayında ql-bağımlıdır.*

Teorem 2.2.4. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *quasilineer uzayında* $n+1$ *elemanlı herhangi bir cümle ql-bağımlıdır.*

2.2.3 Quasilineer Uzaylarda Baz

Tanım 2.2.9. *X bir quasilineer uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, A cümlesi ql-bağımsız ve $QspA = X$ ise A'ya X'in bir bazı denir.*

Örnek 2.2.14. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $A = \{\{1\}\}$ cümlesi verilsin. Bu durumda*

$$\{0\} \subseteq \lambda \cdot \{1\}$$

kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $\lambda = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla A cümlesi ql-bağımsızdır.

Ayrıca, her $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için

$$\lambda \cdot \{1\} \subseteq x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunabileceğinden $QspA = \Omega_C(\mathbb{R})$ dir.

Böylece A cümlesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ için bir bazdır. Özel olarak A'ya $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin standart (kanonik) bazı denir.

Sonuç 2.2.5. *$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ cümlesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ için bazdır.*

Örnek 2.2.15. *$\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayında $B = \{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ cümlesi verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \{(0,0)\} &\subseteq \alpha_1 \cdot \{(1,0)\} + \alpha_2 \cdot \{(0,1)\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2)\} \end{aligned}$$

kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ olmasıdır. Bu nedenle B cümlesi ql-bağımsızdır.

Ayrıca her $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için

$$\alpha_1 \cdot \{(1,0)\} + \alpha_2 \cdot \{(0,1)\} \subseteq x$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan $QspB = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ dir.

Böylece B cümlesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bir bazdır ve $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$'nin standart (kanonik) bazı olarak adlandırılır.

Sonuç 2.2.6. *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere $\{\{(a,0)\},\{(0,b)\}\}$ cümlesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bir bazdır. Daha genel olarak, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\}$ cümlesi $\mathbb{R}^2$ için baz ise, $\{\{(a_1,b_1)\},\{(a_2,b_2)\}\}$ cümlesi de $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bazdır.*

Örnek 2.2.16. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı olan*

$$Z = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\{0\}\}$$

cümlesinde ql-bağımsız cümleler, 0'ı ihtiva etmeyen bir aralıktan oluşan tek nokta cümleleridir. Ancak bu tip cümleler Z'yi quasi geremez. Dolayısıyla Z cümlesi bir baza sahip olamaz.

2.3 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. *X bir quasilineer uzay olmak üzere, $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için,*

$$x \neq \theta \text{ ise } \|x\|_X > 0, \tag{2.3.1}$$

$$\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \tag{2.3.2}$$

$$\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X, \tag{2.3.3}$$

$$x \preceq y \text{ ise } \|x\|_X \leq \|y\|_X, \tag{2.3.4}$$

$$\begin{gathered} \text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } x \preceq y + x_\varepsilon \text{ ve } \|x_\varepsilon\|_X \leq \varepsilon \\ \text{olacak şekilde en az bir } x_\varepsilon \in X \text{ var ise } x \preceq y \text{ olur} \end{gathered} \tag{2.3.5}$$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|_X)$ ikilisine ise bir normlu quasilineer uzay denir, [9].

Tanım 2.3.2. *X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için,*

$$\begin{aligned} & h_X(x,y) \\ = \; & \inf\{r \geq 0 : x \preceq y + a_1^r,\ y \preceq x + a_2^r \text{ ve } \|a_i^r\|_X \leq r,\ i = 1,2\} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe Hausdorff metrik veya norm metriği adı verilir, [9].

Herhangi $x, y \in X$ elemanları için

$$x \preceq y + (x - y) \text{ ve } y \preceq x + (y - x) \tag{2.3.7}$$

bağıntıları doğru olduğundan, $h_X(x, y)$ değeri her zaman tanımlıdır. Ayrıca, her $x, y \in X$ için

$$h_X(x, y) \leq \|x - y\|_X$$

eşitsizliği doğrudur.

Notasyon 2.3.1. *(2.3.6) eşitliğinde geçen a^r gösterimi ile, X quasilineer uzayının r sayısına karşılık bulunan ve $\|a^r\|_X \leq r$ eşitsizliğini sağlayan elemanı kastedilmektedir. Ayrıca bu çalışmada söz konusu quasilineer uzayın açıkça belirtildiği durumlarda, gösterimde kısalık olması amacıyla X quasilineer uzayı üzerindeki Hausdorff metriği belirtmek için h_X yazılımı yerine yalnızca h yazılımı kullanılmıştır.*

Önerme 2.3.1. *h_X Hausdorff metriği aşağıdaki özelliklere sahiptir, [9].*

$$h_X(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = |\alpha| \, h_X(x, y) \ \ , \ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.3.8}$$

$$h_X(x + y, z + v) \leq h_X(x, z) + h_X(y, v), \tag{2.3.9}$$

$$\|x\| = h_X(x, \theta). \tag{2.3.10}$$

Örnek 2.3.1. *X normlu lineer bir uzay olsun. Bu durumda X normlu quasilineer uzaydır. X'i quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısıdır. Diğer taraftan, eğer X bir normlu quasilineer uzay ve her $x \in X$ için $x' \in X$ ters elemanı mevcut ise (her elemanın toplama işlemine göre tersi varsa) bu durumda X normlu lineer uzay olur ve kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Ayrıca*

$$h_X(x, y) = \|x - y\|_X$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.3.2. *E bir normlu reel lineer uzay olmak üzere, $\|\cdot\|_{\Omega(E)}$ fonksiyonu her $A \in \Omega(E)$ için*

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a \in A} \|a\|_E \tag{2.3.11}$$

şeklinde tanımlansın.

Her $A \in \Omega(E)$ *için* $A \neq \theta$ *olsun. Bu durumda* $a \neq \theta_E$ *olacak şekilde en az bir* $a \in A$ *vardır.* E *bir normlu uzay olduğundan, normun pozitiflik özelliği gereği* $\|a\|_E > 0$ *olur. Bu ise*

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A} \|a\|_E > 0$$

demektir. Ayrıca her $A, B \in \Omega(E)$ *için*

$$\begin{aligned} \|A+B\|_{\Omega(E)} &= \sup_{a+b\in A+B} \|a+b\|_E \\ &\leq \sup_{a+b\in A+B} (\|a\|_E + \|b\|_E) \\ &\leq \sup_{a\in A}(\|a\|_E) + \sup_{b\in B}(\|b\|_E) \\ &= \|A\|_{\Omega(E)} + \|B\|_{\Omega(E)} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan her $A \in \Omega(E)$ *ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot A\|_{\Omega(E)} &= \sup_{a\in A} \|\alpha \cdot a\|_E \\ &= |\alpha| \sup_{a\in A} \|a\|_E \\ &= |\alpha| \, \|A\|_{\Omega(E)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca $A \subseteq B$ *ve*

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A} \|a\|_E = k$$

ve

$$\|B\|_{\Omega(E)} = \sup_{b\in B} \|b\|_E = l$$

olmak üzere, hipotez gereği her $a \in A$ *için* $a \in B$ *olacağından* $k \leq l$*, yani* $\|A\| \leq \|B\|$ *dir.*

Son olarak, herhangi $A, B \in \Omega(E)$ *ve her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$A \subseteq B + A_\varepsilon \text{ ve } \|A_\varepsilon\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A_\varepsilon} \|a\|_E \leq \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $A_\varepsilon \in \Omega(E)$ *elemanının mevcut, fakat* $A \nsubseteq B$ *olduğu kabul edilirse, bu durumda* $a \notin B$ *olacak şekilde bir* $a \in A$ *vardır.* B *kapalı olduğundan* a

noktasının B cümlesine olan uzaklığı

$$d(a,B)=\inf_{b\in B}\|a-b\|_E\neq 0$$

dır. Hipotez gereği

$$\varepsilon=\frac{d(a,B)}{2}$$

için

$$A\subseteq B+A_\varepsilon \text{ ve } \|A_\varepsilon\|_{\Omega(E)}=\sup_{a\in A_\varepsilon}\|a\|_E\leq\varepsilon$$

olacak şekilde bir $A_\varepsilon\in\Omega(E)$ mevcuttur. $a\in A$ olduğundan $a\in B+A_\varepsilon$ dur. Böylece her $n\in\mathbb{N}$ için $b_n\in B$ ve $a_n\in A_\varepsilon$ olmak üzere,

$$a=\lim_{n\to\infty}(b_n+a_n)$$

olur. Diğer taraftan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\|a-(b_n+a_n)\|_E&\geq\left|\|a-b_n\|_E-\|a_n\|_E\right|\\&\geq\left|d(a,B)-\|a_n\|_E\right|\\&\geq\left|d(a,B)-\frac{d(a,B)}{2}\right|\\&=\frac{d(a,B)}{2}\end{aligned}$$

olur. Bu durum $a=\lim_{n\to\infty}(b_n+a_n)$ eşitliği ile çelişir. Dolayısıyla $A\subseteq B$ dir. Bu, (2.3.11) eşitliği ile tanımlanan $\|\cdot\|_{\Omega(E)}$ fonksiyonunun normlu quasilineer uzay aksiyomlarından sonuncusunu da sağladığını gösterir.

Böylece $\Omega(E)$ bir normlu quasilineer uzaydır.

$\Omega_C(E)$ ise $\Omega(E)$'nin bir alt uzayı olup aynı normla bir normlu quasilineer uzay teşkil eder. Bu durumda θ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar $S(\theta,r)$ olmak üzere, bu uzaylar için Hausdorff metrik

$$h_\Omega(A,B)=\inf\{r\geq 0: A\subseteq B+S(\theta,r),\ B\subseteq A+S(\theta,r)\}$$

şeklinde verilir.

Uyarı 2.3.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin $x = [x_1, x_2]$ ve $y = [y_1, y_2]$ gibi herhangi iki elemanı arasındaki uzaklık*

$$h(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonu ile de kolaylıkla belirlenir, [8].

Önerme 2.3.2. *$(\Omega(\mathbb{R}^n), h_\Omega)$ ve $(\Omega_C(\mathbb{R}^n), h_{\Omega_C})$ uzayları tam ve ayrılabilir metrik uzaylardır, [2].*

Lemma 2.3.1. *X bir normlu quasilineer uzay olsun. Cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri Hausdorff metriğe göre süreklidirler. Ayrıca X'deki norm fonksiyonu Hausdorff metriğe göre süreklidir, [9].*

İspat. $i = 1, 2$ olmak üzere, $x, y, a^{\varepsilon}_{i,n}, b^{\varepsilon}_{i,n} \in X$ ve x_n ile y_n, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak şekilde X'de birer dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir N doğal sayısı vardır:

$$x_n \preceq x + a^{\varepsilon}_{1,n},\ x \preceq x_n + a^{\varepsilon}_{2,n} \text{ ve } \left\|a^{\varepsilon}_{i,n}\right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},\ i = 1, 2,$$
$$y_n \preceq y + b^{\varepsilon}_{1,n},\ y \preceq y_n + b^{\varepsilon}_{2,n} \text{ ve } \left\|b^{\varepsilon}_{i,n}\right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},\ i = 1, 2.$$

Böylece (2.2.12) şartı göz önüne alınırsa

$$x_n + y_n \preceq x + y + a^{\varepsilon}_{1,n} + b^{\varepsilon}_{1,n}$$

ve

$$x + y \preceq x_n + y_n + a^{\varepsilon}_{2,n} + b^{\varepsilon}_{2,n}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\|a^{\varepsilon}_{1,n} + b^{\varepsilon}_{1,n}\right\|_X \leq \left\|a^{\varepsilon}_{1,n}\right\|_X + \left\|b^{\varepsilon}_{1,n}\right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ve

$$\left\|a^{\varepsilon}_{2,n} + b^{\varepsilon}_{2,n}\right\|_X \leq \left\|a^{\varepsilon}_{2,n}\right\|_X + \left\|b^{\varepsilon}_{2,n}\right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise

$$x_n + y_n \to x + y$$

demektir. Sonuç olarak cebirsel toplama işlemi süreklidir. Reel sayılarla çarpma işleminin sürekliliği ve norm fonksiyonunun sürekliliğinin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Lemma 2.3.2. *X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere,*

a) *$x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n$ olsun. Bu durumda $x_0 \preceq y_0$ dır.*

b) *$x_n \to x_0$ ve $z_n \to x_0$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n \preceq z_n$ ise $y_n \to x_0$ dır.*

c) *$x_n + y_n \to x_0$ ve $y_n \to \theta$ olsun. Bu durumda $x_n \to x_0$ olur, [9].*

İspat. a) $x_n \to x_0$ ve $y_n \to y_0$ olduğunda, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$x_0 \preceq x_n + a_n^{\varepsilon}, \ \ \|a_n^{\varepsilon}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$y_n \preceq y_0 + b_n^{\varepsilon}, \ \ \|b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ ve $a_n^{\varepsilon}, b_n^{\varepsilon} \in X$ vardır. $x_n \preceq y_n$ kabulü de göz önüne alınırsa $n \geq N$ için

$$x_0 \preceq y_n + a_n^{\varepsilon}$$

ve

$$x_0 \preceq y_0 + a_n^{\varepsilon} + b_n^{\varepsilon}$$

olur. Ayrıca,

$$\|a_n^{\varepsilon} + b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \|a_n^{\varepsilon}\|_X + \|b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan (2.3.5) şartı gereği $x_0 \preceq y_0$ dır.

b) $x_n \to x_0$ ve $z_n \to x_0$ olduğunda, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ için,

$$x_0 \preceq x_n + a_n^{\varepsilon}, \ \ \|a_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon,$$
$$z_n \preceq x_0 + b_n^{\varepsilon}, \ \ \|b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ ve $a_n^{\varepsilon}, b_n^{\varepsilon} \in X$ vardır. $x_n \preceq y_n$ olduğundan

$$x_0 \preceq x_n + a_n^{\varepsilon} \preceq y_n + a_n^{\varepsilon} \ , \ \ \|a_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon$$

ve $y_n \preceq z_n$ olduğundan

$$y_n \preceq z_n \preceq x_0 + b_n^{\varepsilon}, \ \ \|b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu iki bağıntıdan

$$x_0 \preceq y_n + a_n^{\varepsilon}, \ \ \|a_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon$$

ve

$$y_n \preceq x_0 + b_n^{\varepsilon}, \ \|b_n^{\varepsilon}\|_X \leq \varepsilon$$

yazılır. Bu ise $y_n \to x_0$ demektir.

c) $x_n + y_n \to x_0$ olduğunda, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ için

$$x_n + y_n \preceq x_0 + b_{1,n}^{\varepsilon}, \, x_0 \preceq x_n + y_n + b_{2,n}^{\varepsilon} \text{ ve } \left\|b_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ i = 1, 2$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ ve $b_{i,n}^{\varepsilon} \in X$ vardır.

Benzer olarak $y_n \to \theta$ ise her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N'$ iken

$$y_n \preceq \theta + a_{1,n}^{\varepsilon}, \ \theta \preceq y_n + a_{2,n}^{\varepsilon} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ i = 1, 2$$

olacak şekilde en az bir $N' \in \mathbb{N}$ ve $a_{i,n}^{\varepsilon} \in X$ vardır.

Ayrıca

$$n_0 = \max\{N, N'\}$$

denilirse, $n \geq n_0$ iken, $y_n \preceq \theta + a_{1,n}^{\varepsilon} = a_{1,n}^{\varepsilon}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} x_0 &\preceq x_n + y_n + b_{2,n}^{\varepsilon} \\ &\preceq x_n + a_{1,n}^{\varepsilon} + b_{2,n}^{\varepsilon} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$x_0 \preceq x_n + a_{1,n}^{\varepsilon} + b_{2,n}^{\varepsilon}, \ \left\|a_{1,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \left\|b_{2,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.12}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\theta \preceq y_n + a_{2,n}^{\varepsilon}, \ \left\|a_{2,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$x_n \preceq x_n$$

olduğundan

$$x_n \preceq x_n + y_n + a_{2,n}^{\varepsilon}, \ \left\|a_{2,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir.

$$x_n + y_n \preceq x_0 + b_{1,n}^{\varepsilon}, \ \left\|b_{1,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olup buradan

$$x_n \preceq x_0 + a^{\varepsilon}_{2,n} + b^{\varepsilon}_{1,n}, \ \left\|a^{\varepsilon}_{2,n}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \left\|b^{\varepsilon}_{1,n}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left\|a^{\varepsilon}_{1,n} + b^{\varepsilon}_{2,n}\right\| \leq \left\|a^{\varepsilon}_{1,n}\right\| + \left\|b^{\varepsilon}_{2,n}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ve

$$\left\|a^{\varepsilon}_{2,n} + b^{\varepsilon}_{1,n}\right\| \leq \left\|a^{\varepsilon}_{2,n}\right\| + \left\|b^{\varepsilon}_{1,n}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dir. (2.3.12) ve (2.3.13), yukarıdaki iki eşitsizlikle birlikte düşünüldüğünde $x_n \to x_0$ elde edilir. □

BÖLÜM 3

QUASİLİNEER UZAYLARDA BAZI YENİ SONUÇLAR VE PROPER QUASİLİNEER UZAYLAR

Tezin bundan sonraki bölümlerinde ilk kez ortaya atılan kavramlar ve sonuçlar yer almaktadır.

Aşağıda, daha sonraki kısımlarda bazı teoremlerin ispatında kullanılacak olan quasilineer uzaylar ile ilgili önemli birkaç sonuç yer almaktadır.

Lemma 3.0.1. *X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere, X_r lineer alt uzayı X'de kapalıdır.*

İspat. X_r'den alınan bir (x_n) dizisinin $x \in X$ noktasına yakınsak olduğu kabul edilirse, cebirsel işlemlerin sürekliliğinden $-x_n \to -x$ ve $x_n - x_n \to x - x$ olur. Her bir n indisi için $x_n \in X_r$ olduğundan $x_n - x_n = \theta$ olup, buradan $x - x = \theta$ bulunur. Böylece $x \in X_r$'dir. □

X_r, X'in lineer alt uzayı olduğundan $x \in X_r$ ve $y \in X_r$ iken $x + y \in X_r$ dir. Bu önermenin karşıtı da doğrudur:

Lemma 3.0.2. *X bir quasilineer uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x+y \in X_r$ ise bu durumda $x \in X_r$ ve $y \in X_r$'dir.*

İspat. $x + y \in X_r$ ve $x \notin X_r$ olsun. Bu durumda $(x + y) + z = \theta$ olacak şekilde bir $z \in X_r$ mevcuttur. Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.5) gereğince $x+(y + z) = \theta$ olacağından x elemanı bir $y + z$ tersine sahiptir. $x \notin X_r$ kabulü gereğince x'in $x + x' = \theta$ olacak şekilde bir $x' \in X$ tersi mevcut değildir. Bu durum $y + z$'nin x'in tersi olması ile çelişir. Bu nedenle kabul yanlış olup $x \in X_r$'dir.

Benzer olarak $y \in X_r$ olduğu da gösterilebilir. □

Lemma 3.0.1 ve Lemma 3.0.2 den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.0.1. *X bir quasilineer uzay, $x \in X_r$ ve $y \in X_s$ olsun. Bu durumda $x + y \in X_s$'dir.*

İspat. $x \in X_r$ ve $y \in X_s$ iken $x+y \notin X_s$ olsun. Bu durumda $x+y$ elemanı $(x + y)+z = \theta$ olacak şekilde $z \in X_r$ tersine sahiptir. Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.4) ve (2.2.5) gereğince $y+(x + z) = \theta$ olacak şekilde $x+z$ elemanı mevcut olup, Lemma 3.0.1 gereğince $x + z \in X_r$ dir. Böylece $x + z$, y'nin tersidir. Bu ise $y \in X_s$ hipotezi ile çelişmektedir. Dolayısıyla $x \in X_r$ ve $y \in X_s$ ise $x + y \in X_s$ dir. □

Önerme 3.0.1. *X lineer uzay olmayan bir quasilineer uzay ise, X'deki her regüler elemandan sonra en az bir singüler eleman gelir.*

İspat. $x \in X_r$ ve $y \in X_s$ olsun. Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.1), (2.2.11) ve (2.2.12) gereğince, $x \preceq x$ ve $\theta \preceq y - y$ olup, $x \preceq x + (y - y)$ yazılır. x regüler ve $y - y$ singüler eleman olduğundan, Sonuç 3.0.1 gereğince, $x + (y - y)$ singüler bir elemandır. Dolayısıyla, lineer olmayan bir X quasilineer uzayında her regüler elemandan sonra singüler bir eleman gelir. □

Buna göre, lineer uzay olmayan bir X quasilineer uzayındaki her $x \in X_r$ elemanı için $x \preceq z$ olacak şekilde bir $z \in X_s$ mevcuttur. Bu önermenin bir sonucu olarak aşağıdaki önemli teorem verilebilir.

Teorem 3.0.1. *X bir quasilineer uzay ve x_0 bu uzaydaki herhangi bir regüler eleman olmak üzere, x_0 elemanından sonra singüler bir eleman gelmiyorsa, X lineer uzaydır.*

İspat. $x_0 \in X_r$ olmak üzere, x_0 elemanından sonra hiçbir singüler eleman gelmesin. $z \neq x_0$ ve $z \in X_r$ olsun. $z \preceq y$ olacak şekilde en az bir $y \in X_s$ elemanının mevcut olduğu kabul edilsin ve S, X_r'nin bir bazı olsun. Bu durumda her $x_0 \in X_r$ elemanı, S'den seçilen $a_1, a_2, ..., a_n$ elemanları ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalerleri yardımıyla

$$x_0 = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \cdots + \lambda_n \cdot a_n$$

şeklinde tek türlü yazılır.

Benzer şekilde, $z \in X_r$ olduğundan, S'den seçilen $b_1, b_2, ..., b_m$ elemanları ve $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ skalerleri yardımıyla

$$z = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \cdots + \beta_m \cdot b_m$$

şeklinde tek türlü yazılır. (Burada $a_1, a_2, ..., a_n$ elemanları ile $b_1, b_2, ..., b_m$ elemanları aynı olabilir, fakat bu durum ispat için bir sorun teşkil etmez.)

Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.12) gereğince

$$x_0 + z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot a_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot b_k \tag{3.0.1}$$

elde edilir. $z \preceq y$ olduğundan quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.13) gereğince $-z \preceq -y$ olup, (3.0.1) göz önüne alınırsa

$$x_0 \preceq -y + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot a_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot b_k \tag{3.0.2}$$

yazılır. (3.0.2) bağıntısındaki, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot a_k$ ve $\sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot b_k$ elemanları regüler elemanlar olup, $-y$ ise singüler bir elemandır. Sonuç 3.0.1 gereğince, singüler bir eleman ile regüler bir elemanın toplamı singüler bir eleman olacağından,

$$-y + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot a_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot b_k$$

singüler bir elemandır. Bu sonuç ise, "x_0 elemanından sonra hiçbir singüler eleman gelmesin" hipotezine aykırı olduğundan, x_0'dan farklı herhangi bir z regüler elemanından sonra bir y singüler elemanının var olduğu kabulü yanlıştır. O halde herhangi bir x_0 regüler elemanından sonra singüler bir elemanın gelmiyor olduğu hipotezi, x_0'dan farklı herhangi bir regüler elemandan sonra da hiçbir singüler elemanın gelemeyeceği sonucunu doğurur.

Ayrıca regüler elemanların minimal olduğu da hatırlanırsa, herhangi regüler elemandan önce de bir singüler eleman gelemeyeceği sonucu çıkar.

Önerme 3.0.1 ile birlikte bu sonuçlar göz önüne alındığında, bir regüler elemandan sonra singüler bir eleman gelmiyorsa, uzayda hiçbir singüler eleman olmayacağından ve Lemma 2.2.2 gereğince quasilineer uzay aksiyomları lineer uzay aksiyomlarına dönüşeceğinden uzay lineer uzay olur. □

3.1 Quasilineer Uzaylarda Regüler ve Singüler Boyut

Bu kısımda, yeni kavramlar olarak bir quasilineer uzayın regüler ve singüler boyutu tanıtılacak ve örnekler ile bazı uzayların regüler ve singüler boyutuna ilişkin bilgiler sunulacaktır. İlerleyen kısımlarda lineer olmayan bir quasilineer uzayın regüler boyutunun singüler boyutundan küçük veya ona eşit olduğu, proper quasilineer uzaylar tanıtıldıktan sonra da, lineer olmayan proper quasilineer uzaylarda regüler boyut ve singüler boyutun birbirine eşit olduğu ispatlanacak ve proper quasilineer uzaylarda aynı olan "regüler boyut" ve "singüler boyut" söylemleri yerine sadece "boyut" kullanılacaktır.

Tanım 3.1.1. *Bir X quasilineer uzayının singüler alt uzayının barındırabileceği ql-bağımsız elemanların maksimum sayısına X'in singüler boyutu denir. Singüler boyut kısaca s-boyut olarak yazılır ve s-boy$X$ ile gösterilir.*

X'in regüler alt uzayının barındırabileceği lineer bağımsız elemanların maksimum sayısına ise X'in regüler boyutu denir. Regüler boyut kısaca r-boyut olarak yazılır ve r-boy$X$ ile gösterilir. Tanımdan da açık olarak görülebileceği gibi X'in regüler boyutu X'in regüler alt uzayı olan lineer uzayın boyutudur.

Tanım 3.1.2. *X bir quasilineer uzay olmak üzere,*

$$s\text{-}boyX = r\text{-}boyX = n$$

ise n sayısına X uzayının boyutu denir.

Uyarı 3.1.1. *Quasilineer uzaylarda regüler boyut ve singüler boyut kavramı, lineer uzaylardaki boyut kavramındaki düşüncenin genelleştirmesidir. Quasilineer uzay olarak bir X lineer uzayı göz önüne alınırsa X'in singüler boyutunun 0 olduğu görülür. Aslında lineer uzaylarda singüler boyut 0 olduğundan, söz konusu uzayın boyutu, tanımı yukarıda verilen regüler boyuta karşılık gelmektedir. Böylece lineer uzaylarda regüler boyut yerine sadece "boyut" ifadesi kullanılacaktır.*

Sonuç 3.1.1. *Bir X lineer uzayı için s-boy$X = 0$ dır. Buna göre s-boy$X > 0$ ise X lineer olmayan bir quasilineer uzaydır.*

Uyarı 3.1.2. *s-boy*$X = 0$ *olması, X'in lineer uzay olmasını gerektirmez. Aşağıdaki örnek bu durumu yansıtmaktadır.*

Örnek 3.1.1. $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = \{[-a,a] : a \in \mathbb{R}\}$, $\Omega_C(\mathbb{R})$*'nin simetrik alt uzayı olmak üzere, r-boy* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d =$ *s-boy* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = 0$ *olmasına rağmen* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d$ *lineer olmayan bir quasilineer uzaydır.*

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}$, $\Omega_C(\mathbb{R})$, $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ *ve* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ *quasilineer uzaylarının regüler ve singüler boyutları sırasıyla şu şekildedir:*

$$\begin{aligned} r\text{-}boy\mathbb{R} &= 1 \quad ve \quad s\text{-}boy\mathbb{R} = 0, \\ r\text{-}boy\Omega_C(\mathbb{R}) &= 1 \quad ve \quad s\text{-}boy\Omega_C(\mathbb{R}) = 1, \\ r\text{-}boy\left((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}\right) &= 0 \quad ve \quad s\text{-}boy\left((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}\right) = 1, \\ r\text{-}boy\,(\Omega_C(\mathbb{R}))_r &= 1 \quad ve \quad s\text{-}boy\,(\Omega_C(\mathbb{R}))_r = 0. \end{aligned}$$

Örnek 3.1.3. $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayının*

$$W = \left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_s \cup \{\{(t,0)\} : t \in \mathbb{R}\}$$

alt uzayı ve W_s*'nin*

$$w_1 = \{(0,s) : 1 \leq s \leq 2\}$$

ve

$$w_2 = \{(t,0) : 1 \leq t \leq 2\}$$

elemanları verilsin. $\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ *kapsamasını sağlayan 0'dan farklı* λ_1 *ve* λ_2 *skalerleri olmadığından* $\{w_1, w_2\}$ *cümlesi* W_s*'de ql-bağımsızdır. Buna göre s-boy*$W \geq 2$ *olur.* W, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$*'nin alt quasilineer uzayı olduğundan, Teorem 2.2.4 gözönünde bulundurulursa s-boy*$W = 2$ *elde edilir. Ayrıca*

$$W_r = \{\{(t,0)\} : t \in \mathbb{R}\}$$

olup, W*'nın regüler alt uzayı* $\mathbb{R}$ *cümlesine denktir. Böylece r-boy*$W = 1$*'dir.*

Örnek 3.1.4. $\mathbb{R}^2$, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$, $(\Omega_C(\mathbb{R}^2))_s \cup \{\theta\}$ *ve* $(\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ *quasilineer uzaylarının* *regüler ve singüler boyutları sırasıyla şu şekildedir:*

$$\begin{aligned} r\text{-}boy\mathbb{R}^2 &= 2 \quad ve \quad s\text{-}boy\mathbb{R}^2 = 0, \\ r\text{-}boy\Omega_C(\mathbb{R}^2) &= 2 \quad ve \quad s\text{-}boy\Omega_C(\mathbb{R}^2) = 2, \\ r\text{-}boy\left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)_s \cup \{\theta\}\right) &= 0 \quad ve \quad s\text{-}boy\left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)_s \cup \{\theta\}\right) = 2, \\ r\text{-}boy\left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r &= 2 \quad ve \quad s\text{-}boy\left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r = 0. \end{aligned}$$

Örnek 3.1.5. *Sıfıra yakınsak tüm dizilerin cümlesi c_0 ve $\theta = (0,0,0,...) \in c_0$ olmak üzere,*

$$X_1 = (\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$$

quasilineer uzayı için r-boy$X_1 = 0$ ve s-boy$X_1 = \infty$ dur.

X_1'in singüler alt uzayı kendisi olup, bu uzayda sonsuz çoklukta ql-bağımsız eleman vardır. Gerçekten de; $e_k = \left(0,0,...,0,\overset{k.\ terim}{1},0,0,...\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \{\{(t,0,0,...) : 1 \leq t \leq 2\},\ \{(0,t,0,0,...) : 1 \leq t \leq 2\},...\} \\ = \ & \{[1,2]\cdot e_1, [1,2]\cdot e_2, ...\} \end{aligned}$$

cümlesi X_1'de ql-bağımsızdır. Bunu söyleyebilmek için, bu cümlenin sonlu herhangi bir alt cümlesinin ql-bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta = \{(0,0,...)\} \subseteq \lambda_1 \cdot ([1,2]\cdot e_{n_1}) + \lambda_2 \cdot ([1,2]\cdot e_{n_2}) + \cdots + \lambda_k \cdot ([1,2]\cdot e_{n_k})$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \theta &= \{(0,0,...)\} \\ &\subseteq \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 t \cdot \left(0,0,...,0,\overset{n_1.\ terim}{1},0,0,...\right) + \lambda_2 t \cdot \left(0,0,...,0,\overset{n_2.\ terim}{1},0,0,...\right) + \cdots \\ +\lambda_k t \cdot \left(0,0,...,0,\overset{n_k.\ terim}{1},0,0,...\right) : 1 \leq t \leq 2 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \left(0,0,...,0,\overset{n_1.\ terim}{\lambda_1 t},0,0,...,0,\overset{n_2.\ terim}{\lambda_2 t},0,0,...,0,\overset{n_k.\ terim}{\lambda_k t},0,0,...\right) : 1 \leq t \leq 2 \right\} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

dır.

Diğer taraftan $(X_1)_r = \{\theta\}$ olduğundan r-boy$X_1 = 0$ dır.

Örnek 3.1.6.

$$X_2 = \Omega_C(c_0)$$

quasilineer uzayı için r-boy$X_2 = \infty$ *ve s-boy*$X_2 = \infty$ *dur.*

Örnek 3.1.7.

$$X_3 = \left(\Omega_C(l_\infty)\right)_s \cup \{\{(0,0,...,0,k,0,0,...,0,l,0,0,...)\} : k,l \in \mathbb{R}\}$$

quasilineer uzayı için r-boy$X_3 = 2$ *ve s-boy*$X_3 = \infty$ *dur.*

Örnek 3.1.8. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *quasilineer uzayının regüler alt uzayı* $\mathbb{R}^n$ *ve* $\left(\Omega_C(\mathbb{R}^n)\right)_s \cup \{\theta\}$ *alt uzayında en fazla* n *tane eleman ql-bağımsız olacağından r-boy*$\Omega_C(\mathbb{R}^n) = n$ *ve s-boy*$\Omega_C(\mathbb{R}^n) = n$ *dir.*

Önerme 3.1.1. X *bir quasilineer uzay ve* $x_1 \in X_r$ *olmak üzere,* $Qsp\{x_1\}$, X*'in 1-regüler boyutlu bir alt uzayıdır.*

İspat. $x_1 \in X_r$ olsun. Bu durumda

$$Qsp\{x_1\} = \{x \in X : \lambda \cdot x_1 \preceq x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

olup, $Qsp\{x_1\}$, X'in bir alt uzayıdır.

Diğer taraftan

$$r - boyQsp\{x_1\} = boy\left(Qsp\{x_1\}\right)_r$$

eşitliği ve $Sp\{x_1\}$'in boyutunun 1 olduğu göz önüne alınırsa $\left(Qsp\{x_1\}\right)_r = Sp\{x_1\}$ olduğunu göstermek $Qsp\{x_1\}$'in 1 regüler boyutlu olduğunu kanıtlamak için yeterli olacaktır.

Herhangi bir $y \in \left(Qsp\{x_1\}\right)_r$ elemanı verilsin. $\left(Qsp\{x_1\}\right)_r \subset Qsp\{x_1\}$ olduğundan $y \in Qsp\{x_1\}$ dir. Buna göre $\lambda \cdot x_1 \preceq y$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca y regüler elemanı minimal olduğundan $\lambda \cdot x_1 = y$ dir. Bu ise $y \in Sp\{x_1\}$ anlamına gelir. Böylece $\left(Qsp\{x_1\}\right)_r \subseteq Sp\{x_1\}$ dir.

Şimdi de herhangi bir $z \in Sp\{x_1\}$ elemanı verilsin. Bu durumda $\lambda \cdot x_1 = z$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcuttur. x_1 regüler olduğundan, $\lambda \cdot x_1 = z$ elemanı da regülerdir. $z = \lambda \cdot x_1$ olduğundan $z \preceq \lambda \cdot x_1$ ve $\lambda \cdot x_1 \preceq z$ dir. Böylece $z \in \left(Qsp\{x_1\}\right)_r$'dir. Buradan $Sp\{x_1\} \subseteq \left(Qsp\{x_1\}\right)_r$ olduğu söylenir.

O halde $(Qsp\{x_1\})_r = Sp\{x_1\}$ dir.

Sonuç olarak, $x_1 \in X_r$ olmak üzere, $Sp\{x_1\}$, X'in 1 boyutlu alt uzayı, $(Qsp\{x_1\})_r = Sp\{x_1\}$ ve $Qsp\{x_1\}$'in regüler boyutu $(Qsp\{x_1\})_r$'nin boyutuna eşit olduğundan, r-$boy\,(Qsp\{x_1\}) = 1$ elde edilir. $\square$

3.2 Quasilineer Uzaylarda Bir Elemanın Zemini

Quasilineer uzayların özel bir sınıfı olan proper quasilineer uzayların tanıtıldığı ve proper olan quasilineer uzaylar ile ilgili bazı önemli sonuçların verildiği 3.3 alt bölümüne hazırlık niteliği taşıyan bu kısımda, quasilineer uzaylarda bir elemanın ve bir cümlenin zemini kavramı verilmiş ve bu kavramla ilgili bazı değerlendirmeler yapılmıştır.

Tanım 3.2.1. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $M \subseteq X$ ve $x \in M$ olsun. "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısına göre x elemanından önce gelen M cümlesindeki tüm regüler elemanların cümlesine x elemanının M'deki zemini, x elemanından önce gelen X cümlesindeki tüm regüler elemanların cümlesine ise x elemanının X'deki zemini denir ve sırasıyla F_x^M ve F_x^X ile gösterilir. Buna göre,*

$$F_x^M = \{z \in M_r : z \preceq x\}$$

ve

$$F_x^X = \{z \in X_r : z \preceq x\}$$

dir.

Notasyon 3.2.1. *Bu çalışmada bir X quasilineer uzayındaki x elemanının zemini, eğer quasilineer uzayın özel olarak bir alt cümlesindeki zemini kastedilmiyor ise F_x biçiminde sade halde yazılacak ve sadece "x elemanının zemini" biçiminde söylenecektir. Eğer x elemanının, X quasilineer uzayının bir M alt cümlesindeki zemininden bahsediliyorsa bu ayrıca belirtilerek F_x^M yazılımı kullanılacaktır.*

Uyarı 3.2.1. *Lineer uzaylarda her elemanın zemini sadece kendisinden oluşan cümledir. Bu nedenle zemin kavramı lineer olmayan quasilineer uzaylarda daha anlamlıdır.*

Tanım 3.2.2. *X bir quasilineer uzay ve $M \subseteq X$ olsun. M cümlesinin zemini, M cümlesindeki tüm elemanların M'deki zeminlerinin birleşiminden oluşan cümledir ve $\mathcal{F}_M$ ile gösterilir. Buna göre,*

$$\mathcal{F}_M = \bigcup_{x \in M} F_x^M$$

dir.

M cümlesinin X'deki zemini, M cümlesindeki tüm elemanların X'deki zeminlerinin birleşiminden oluşan cümledir ve $\mathcal{F}_M^X$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{F}_M^X = \bigcup_{x \in M} F_x$$

dir.

Bir X quasilineer uzayının zemini ise, X'deki tüm elemanların zeminlerinin birleşiminden oluşan cümledir ve $\mathcal{F}_X$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{F}_X = \bigcup_{x \in X} F_x$$

dir.

Bu tanımdan hareketle bir X quasilineer uzayında $\mathcal{F}_X = X_r$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla bir quasilineer uzayın zemini onun lineer olan regüler alt uzayıdır.

Lemma 3.2.1. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay $x, y \in X$ olsun. $x \preceq y$ ise $F_x \subseteq F_y$ dir.*

İspat. $x \preceq y$ olsun. Herhangi bir $z \in F_x$ için $z \preceq x$ ve $z \in X_r$ dir. "$\preceq$", kısmi sıralama bağıntısı olduğundan geçişmeli olup $z \preceq y$ yazılır. $z \preceq y$ ve $z \in X_r$ olduğundan $z \in F_y$ elde edilir. z keyfi seçildiğinden $x \preceq y$ olması durumunda $F_x \subseteq F_y$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.1. *X bir quasilineer uzay, $M \subseteq N \subseteq X$ ve $x \in M$ olmak üzere, $F_x^M \subseteq F_x^N \subseteq F_x^X$ dir.*

İspat. $M \subseteq N \subseteq X$ olsun. Bu durumda $M_r \subseteq N_r \subseteq X_r$ kapsamalarının sağlandığı açıktır. Herhangi bir $z \in F_x^M$ elemanı için $z \preceq x$ olup $z \in M_r$ dir. $M_r \subseteq N_r$

olduğundan $z \in N_r$ elde edilir. Buradan $z \in F_x^N$ olduğu söylenir. z keyfi olduğundan $F_x^M \subseteq F_x^N$ elde edilir. Benzer şekilde $F_x^N \subseteq F_x^X$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Sonuç 3.2.2. *X bir quasilineer uzay ve $M \subseteq X$ olsun. $\mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{F}_X$ dir.*

İspat. Sonuç 3.2.1 göz önünde bulundurulursa, ispat aşikârdır. $\square$

Uyarı 3.2.2. *Bir X quasilineer uzayında bir x elemanının zemini olan F_x cümlesi X'in bir alt uzayı olmayabilir. Örneğin $x = [2,3] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olmak üzere $\{2\}, \{3\} \in F_{[2,3]}$ dir; fakat $\{2\} + \{3\} = \{5\} \notin F_{[2,3]}$ dir.*

Lemma 3.2.2. *X bir normlu quasilineer uzay ve $x \in X$ olmak üzere, F_x cümlesi kapalı ve sınırlıdır.*

İspat. (z_n) F_x'de bir dizi, $(z_n) \to z$ ve $z \in X$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \preceq x$ ve $z_n \in X_r$ dir. Diğer taraftan, (x) X'de sabit bir dizi olmak üzere, Lemma 2.3.2 kullanılırsa $(z_n) \to z$, $(x) \to x$ ve her n için $z_n \preceq x$ olduğundan $z \preceq x$ elde edilir.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in X_r$ ve $(z_n) \to z$ olduğundan, Lemma 3.0.1 gereğince $z \in X_r$ dir.

Böylece $z \in F_x$ olup F_x, X'de kapalıdır.

Diğer taraftan, her $z \in F_x$ için $z \preceq x$ olduğundan, normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.4) gereğince, $\|z\| \leq \|x\|$ olur. Böylece F_x sınırlı bir cümledir. $\square$

Teorem 3.2.1. *s-boy$X \neq 0$ yani X lineer olmayan bir quasilineer uzay olsun. Bu durumda,*

$$r\text{-}boyX \leq s\text{-}boyX$$

olur.

İspat. s-boy$X \neq 0$ olmak üzere, s-boy$X < r$-boy$X$ olduğu kabul edilsin. r-boy$X = n$ olsun. Bu durumda $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, X_r'nin bir bazı ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalerler olmak üzere,

$$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \cdots + \lambda_n \cdot b_n \preceq s$$

olacak şekilde bir $s \in X_s$ elemanının mevcut olmadığını göstermek Teorem 3.0.1 gereğince X'in lineer uzay olmasını gerektireceğinden, hipotez ile çelişeceği için ispatı tamamlayacaktır.

s-boy$X = m$ olsun. *s-boy*$X <$ *r-boy*X olması kabulü gereğince $m < n$ dir.

Şimdi $F_{X_s}^X$ cümlesi göz önüne alınarak $boyF_{X_s}^X < n$ olduğu gösterilip bu bilgi kullanılacaktır.

Herhangi $x_1, x_2, ..., x_n \in F_{X_s}^X$ elemanları için

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n = \theta \tag{3.2.1}$$

olsun. Bu durumda, Önerme 3.0.1 gereğince,

$x_1 \in F_{X_s}^X$ olduğundan $x_1 \preceq y_1$ olacak şekilde en az bir $y_1 \in X_s$,

$x_2 \in F_{X_s}^X$ olduğundan $x_2 \preceq y_2$ olacak şekilde en az bir $y_2 \in X_s$,

$\vdots$

$x_n \in F_{X_s}^X$ olduğundan $x_n \preceq y_n$ olacak şekilde en az bir $y_n \in X_s$ mevcuttur.

Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.12) ve (2.2.13) gereğince, sırasıyla

$$\lambda_1 \cdot x_1 \preceq \lambda_1 \cdot y_1, \quad \lambda_2 \cdot x_2 \preceq \lambda_2 \cdot y_2, \quad ..., \quad \lambda_n \cdot x_n \preceq \lambda_n \cdot y_n$$

olup, buradan

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n \preceq \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \cdots + \lambda_n \cdot y_n \tag{3.2.2}$$

yazılır. (3.2.1) eşitliği (3.2.2) ile birlikte düşünüldüğünde

$$\theta \preceq \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \cdots + \lambda_n \cdot y_n \tag{3.2.3}$$

elde edilir. $y_1, y_2, ..., y_n \in X_s$ ve *s-boy*$X = m < n$ olduğundan $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ cümlesi X_s'de ql-bağımlıdır. O halde (3.2.3) bağıntısını sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (3.2.1) eşitliğini de sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacağından $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. Buna göre $boyF_{X_s}^X < n$ olur.

$F_{X_s}^X \subset X_r$, $F_{X_s}^X$ X_r'nin lineer bir alt uzayı ve $boyF_{X_s}^X < boyX_r$ olduğundan $v \notin F_{X_s}^X$ olacak şekilde bir $v \in X_r$ vardır. Ayrıca v regüler elemanı için $v \preceq u$ olacak şekilde bir $u \in X_s$ elemanının varlığı $v \in F_{X_s}^X$ olmasını gerektireceğinden, $v \preceq u$ olacak şekilde bir $u \in X_s$ mevcut değildir.

Böylece bir v regüler elemanından sonra singüler bir eleman gelmeyeceği sonucu elde edilir. Buna göre, Teorem 3.0.1 gereğince X lineer bir uzaydır ve Sonuç 3.1.1'den $s\text{-}boyX = 0$ olduğu söylenir. Bu ise hipotezle çelişir. Böylece $s\text{-}boyX \neq 0$ yani X lineer olmayan bir quasilineer uzay olmak üzere, "$s\text{-}boyX < r\text{-}boyX$ olsun" kabulü yanlıştır. O halde $s\text{-}boyX \neq 0$ yani X lineer olmayan bir quasilineer uzay olmak üzere, $r\text{-}boyX \leq s\text{-}boyX$ dir. □

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak aşağıdaki önemli yorum yapılabilir.

Sonuç 3.2.3. *$s\text{-}boyX \neq 0$ ve $s\text{-}boyX < r\text{-}boyX$ ise X bir quasilineer uzay değildir.*

Buna göre X lineer olmayan bir quasilineer uzay olmak üzere, sözgelimi, $s\text{-}boyX = 1$, $r\text{-}boyX = 2$ olamaz.

3.3 Proper Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.3.1. *X bir quasilineer uzay, $M \subseteq X$ ve $x, y \in M$ olmak üzere,*

i) $\forall x \in M$ için $F_x^M \neq \emptyset$,

ii) $x \neq y$ iken $F_x^M \neq F_y^M$

özellikleri sağlanıyor ise M cümlesine X quasilineer uzayında bir proper cümle denir.

X bir quasilineer uzay olmak üzere, X bir proper cümle ise X'e proper quasilineer uzay denir.

Bir quasilineer uzayın proper olması tanımı daha açık olarak şu şekilde ifade edilebilir:

X bir quasilineer uzay olmak üzere, X'deki her elemanın zemini boştan farklı ve X'deki farklı iki elemanın zeminleri de farklı ise X proper quasilineer uzaydır.

Bir $M \subseteq X$ cümlesi için, Tanım 3.3.1'deki $ii)$ şartının sağlanması, $x \neq y$ olmak üzere, aşağıdaki üç durumdan sadece birinin sağlanması gerektiği anlamını taşımaktadır.

♦ $y \preceq x$ ise, $F_y^M \subseteq F_x^M$ olacağından, bu iki elemanın M'deki zeminlerinin farklı olabilmesi için en az bir $z \in F_x^M \backslash F_y^M$ regüler elemanının mevcut olması gerekir. Bu ise $z \preceq x$ ve $z \npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z \in M_r$ elemanının mevcut olmasını gerektirir.

♦ $x \preceq y$ ise, $F_x^M \subseteq F_y^M$ olacağından, bu iki elemanın M'deki zeminlerinin farklı olabilmesi için en az bir $m \in F_y^M \backslash F_x^M$ regüler elemanının mevcut olması gerekir. Bu ise $m \preceq y$ ve $m \npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m \in M_r$ elemanının mevcut olmasını gerektirir.

♦ x ile y elemanları karşılaştırılamıyor ise, x ile y'nin M'deki zeminlerinin farklı olabilmesi için $F_x^M \subsetneq F_y^M$ veya $F_y^M \subsetneq F_x^M$ olması gerekmektedir. Bu ise $z \preceq x$ ve $z \npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z \in M_r$ veya $m \preceq y$ ve $m \npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m \in M_r$ elemanının mevcut olabilmesi ile mümkündür.

Örnek 3.3.1. *Her lineer uzayın "$=$" bağıntısı ile bir proper quasilineeer uzay olduğu aşikârdır.*

Örnek 3.3.2. $X = \{\theta\}$ *aşikâr uzayı proper uzaydır.*

Örnek 3.3.3. *E normlu lineer bir uzay olmak üzere, $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ birer proper quasilineeer uzaylardır:*

i) $A \in \Omega_C(E)$ elemanı için $F_A \neq \emptyset$ dir.

ii) $A \neq B$ olacak şekildeki $A, B \in \Omega_C(E)$ elemanları için,

♦ *$B \subset A$ ise, bu durumda $a \notin B$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ vardır. Buradan $z = \{a\} \in (\Omega_C(E))_r$ olmak üzere $z \subseteq A$ ve $z \nsubseteq B$ dir.*

♦ *$A \subset B$ ise, bu durumda $b \notin A$ olacak şekilde en az bir $b \in B$ vardır. Buradan $m = \{b\} \in (\Omega_C(E))_r$ olmak üzere $m \subseteq B$ ve $m \nsubseteq A$ dır.*

♦ *A ile B karşılaştırılamaz elemanlar ise $a \in A$, $a \notin B$ ve $b \in B$, $b \notin A$ olacak şekilde a ve b elemanları vardır. $a \in A$ ve $a \notin B$ iken $z = \{a\} \in (\Omega_C(E))_r$ olmak üzere $z \subseteq A$ ve $z \nsubseteq B$ dir. Ayrıca $b \in B$ ve $b \notin A$ iken $m = \{b\} \in (\Omega_C(E))_r$ olmak üzere $m \subseteq B$ ve $m \nsubseteq A$ dır.*

Böylece $\Omega_C(E)$ proper quasilineeer uzay aksiyomlarını sağlar.

$\Omega(E)$'nin proper quasilineeer uzay olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.3.4. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı*

$$(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\} = \{[a,b] : a < b \text{ ve } a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{0\}\}$$

verilsin. Bu uzaydan alınan herhangi farklı iki elemanın zemini aynı veya bu uzaya ait bazı elemanların zeminleri boş cümle olabilmektedir. Örneğin, $[a,b] \neq [c,d]$ *olmak üzere* $a,b > 0$ $(c,d > 0)$ *veya* $a,b < 0$ $(c,d < 0)$ *iken* $F_{[a,b]} = F_{[c,d]} = \emptyset$ *olmaktadır. Diğer taraftan* $a < 0 < b$ *ve* $c < 0 < d$ *olmak üzere,* $[a,b] \neq [c,d]$ *iken* $F_{[a,b]} = F_{[c,d]} = \{\{0\}\}$ *olmaktadır. Dolayısıyla* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ *proper olmayan bir quasilineer uzaydır.*

Örnek 3.3.5. $\Omega_C(\mathbb{R})$*'nin simetrik alt uzayı*

$$(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = \{[-a,a] : a \in \mathbb{R}\}$$

proper değildir. Çünkü bu uzaydan alınan herhangi farklı iki elemanın zemini hep aynıdır ve $\{\{0\}\}$ *cümlesidir.*

Aynı sebepten, $\Omega_C(\mathbb{R})$*'nin bir alt uzayı olan*

$$A = \{[a,b] : a \leq 0 \leq b \text{ ve } a,b \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi de proper olmayan bir cümledir.

Sonuç 3.3.1. *Aşikâr olmayan bir* X *quasilineer uzayı için* $X_r = \{\theta\}$ *ise* X *proper olmayan bir uzaydır. Dolayısıyla herhangi bir* X *quasilineer uzayının, singüler alt uzayı proper değildir.*

Uyarı 3.3.1. *Proper bir quasilineer uzayın proper olmayan alt uzayları mevcut olabilir.*

Örnek 3.3.6. $X = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *ve*

$$V = X_s \cup \{\{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere, V X*'in bir alt uzayıdır, ayrıca*

$$V_s = X_s \quad \text{ve} \quad V_r = \{\{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}\}$$

dir.

$$v_1 = \{\{(0,y)\} : 1 \leq y \leq 2\}$$

ve

$$v_2 = \{\{(0,y)\} : 3 \leq y \leq 4\}$$

V'nin birbirinden farklı iki elemanı olmak üzere, $F_{v_1}^V = F_{v_2}^V = \emptyset$ dir. Böylece X proper bir uzay olmasına rağmen, X'in alt uzayı olan V proper olmayan bir uzaydır.

Uyarı 3.3.2. *Proper olmayan bir quasilineer uzayın proper alt uzayları mevcut olabilir.*

Örnek 3.3.7. *Örnek 3.3.6'da proper olmayan V'nin $V_r = \{\{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}\}$ alt uzayı proper uzaydır.*

Uyarı 3.3.3. *Proper bir quasilineer uzayın her elemanından önce regüler bir eleman gelir. Fakat, bir quasilineer uzayın her elemanından önce regüler bir elemanın geliyor olması o uzayın proper olmasını gerektirmez. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.*

Örnek 3.3.8. $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$*'de*

$$U = \{\{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere,

$$V = X_s \cup U$$

cümlesi verilsin. Ayrıca U ve V yardımı ile, W cümlesi

$$W = \{x \in V : bir\ z \in U\ için\ z \subseteq x\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$w_1 = \{\{(x,0)\} : 1 \leq x \leq 2\}$$

ve

$$w_2 = \{\{(x,y)\} : 1 \leq x \leq 2,\ \ -1 \leq y \leq 0\},$$

olmak üzere, birbirinden farklı $w_1, w_2 \in W$ elemanları için

$$F_{w_1}^W = \{\{(x,0)\} : 1 \leq x \leq 2\}$$

ve

$$F_{w_2}^W = \{\{(x,0)\} : 1 \leq x \leq 2\}$$

olup $F_{w_1}^W = F_{w_2}^W$ dir. Böylece her elemanından önce regüler bir elemanın geldiği W uzayı proper bir uzay değildir.

Teorem 3.3.1. *Lineer olmayan proper bir X quasilineer uzayı için*

$$s - boyX = r - boyX$$

dir.

İspat. X bir proper quasilineer uzay, r-$boyX = n$ $(= boyX_r)$ ve $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ X_s'nin ql-bağımsız vektörleri olsun. Bu durumda $X_s \subset X$ olduğundan $y_1, y_2, ..., y_n$, $y_{n+1} \in X$ ve X proper olduğundan

$$a_1 \preceq y_1, \quad a_2 \preceq y_2, \quad ..., \quad a_n \preceq y_n, \quad a_{n+1} \preceq y_{n+1} \tag{3.3.1}$$

olacak şekilde $a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1} \in X_r$ elemanları mevcuttur. X_r, $n-$boyutlu lineer bir uzay olduğundan $n + 1$ tane eleman X_r'de lineer bağımlı olacaktır. Dolayısıyla

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot a_k$$

olacak şekilde γ_k $(1 \leq k \leq n)$ skalerleri bulunabilir. Ayrıca quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.12) ve (2.2.13) kullanılarak, (3.3.1)'den,

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot a_k \preceq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k$$

yazılır. $a_{n+1} \in X_r$ olduğundan

$$\theta \preceq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k - a_{n+1} \tag{3.3.2}$$

elde edilir. Quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.1), (2.2.12) ve (2.2.13) göz önüne alındığında

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k \preceq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k \text{ ve } -a_{n+1} \preceq -y_{n+1}$$

olup, buradan

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k - a_{n+1} \preceq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k - y_{n+1} \tag{3.3.3}$$

yazılır. (3.3.2) ve (3.3.3) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$$\theta \preceq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot y_k - y_{n+1} \tag{3.3.4}$$

elde edilir. $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ X_s'nin ql-bağımsız elemanları olarak seçildiğinden $1 \leq k \leq n+1$ olmak üzere, her k indisi için $\gamma_k = 0$ olması gerekirdi; fakat (3.3.4) bağıntısının $\gamma_{n+1} = -1$ olması durumunda da sağlandığı görülmektedir. Buradan $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\}$ cümlesinin ql-bağımlı olduğu söylenir. Bu ise

$$s\text{-}boyX < n+1$$

yani

$$s\text{-}boyX \leq r\text{-}boyX \tag{3.3.5}$$

olacağı anlamına gelir.

Diğer taraftan, Teorem 3.2.1 gereğince, lineer olmayan herhangi bir X quasilineer uzayı için

$$r\text{-}boyX \leq s\text{-}boyX \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak (3.3.5) ve (3.3.6)'dan, X lineer olmayan proper bir quasilineer uzay ise $s\text{-}boyX = r\text{-}boyX$ dir. $\square$

Uyarı 3.3.4. *Teorem 3.3.1'in karşıtı doğru olmayabilir. Yani lineer olmayan bir quasilineer uzayda regüler ve singüler boyutların eşit olması, uzayın proper olmasını gerektirmez. Aşağıdaki iki örnek bu durumu açıklar.*

Örnek 3.3.9. $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = \{[-a, a] : a \in \mathbb{R}\}$ *cümlesi* $\Omega_C(\mathbb{R})$*'nin simetrik alt uzayıdır.* $r\text{-}boy\,(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = s\text{-}boy\,(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = 0$ *olduğu halde* $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d$ *proper olmayan bir alt uzaydır.*

Örnek 3.3.10.

$$X = (\Omega_C(l_\infty))_s \cup \{\{(0, t_1, t_2, t_3, ...)\} : t_k \in \mathbb{R} \text{ ve } k \in \mathbb{N}\}$$

quasilineer uzayı için $r\text{-}boyX = s\text{-}boyX = \infty$ *dur; ancak* X *proper değildir.*

Uyarı 3.3.5. *Lineer olmayan bir* X *proper quasilineer uzayının regüler ve singüler boyutları aynı olduğu için iki ayrı söylem kullanılmadan* X*'in boyutu şeklinde ifade edilir ve bu sayı* $boyX$ *biçiminde yazılır. Eğer* X *quasilineer uzayının regüler boyutu ve singüler boyutu farklı ise,* $r\text{-}boyX$ *ve* $s\text{-}boyX$ *ifadeleri kullanılacaktır.*

Önerme 3.3.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin aşikâr olmayan proper alt quasilineer uzayı 1 boyutludur.*

İspat. Y, $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin aşikâr olmayan bir proper alt quasilineer uzayı olsun. Bu durumda $boy\Omega_C(\mathbb{R}) = 1$ ve $Y \subset \Omega_C(\mathbb{R})$ olduğundan $boyY \leq 1$ dir.

Ayrıca Y proper olduğundan, $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in Y$ elemanları için,

♦ $y \preceq x$ ise, $z \preceq x$ ve $z \npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z \in Y_r$ elemanı mevcuttur,

♦ $x \preceq y$ ise, $m \preceq y$ ve $m \npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m \in Y_r$ elemanı mevcuttur,

♦ x ve y elemanları karşılaştırılamıyor ise, $z \preceq x$, $z \npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z \in Y_r$ elemanı veya $m \preceq y$, $m \npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m \in Y_r$ elemanı mevcuttur.

Böylece Y_r, z ve m regüler elemanlarından en az birini içerir. Genelliği bozmayacağından $z \in Y_r$ seçilirse, $\lambda \cdot z$ regüler elemanı minimal olacağından

$$\theta \subseteq \lambda \cdot z$$

kapsaması sadece $\lambda = 0$ sayısı için sağlanır.

z ve m regüler elemanlarının ikisinin de mevcut olması veya birden fazla z (veya m) regüler elemanının mevcut olması durumu söz konusu ise de, Y_r'de iki veya daha fazla sayıdaki eleman ql-bağımlı olacağından Y_r'nin barındırabileceği maksimum sayıdaki ql-bağımsız (Y_r lineer alt uzay olduğu için, lineer bağımsız) vektör sayısı 1 dir. Böylece Y proper ve Y'nin boyutu, Y_r'nin barındırabileceği maksimum sayıdaki ql-bağımsız (lineer bağımsız) vektör sayısına eşit olduğundan,

$$boyY = s\text{-}boyY = r\text{-}boyY = boyY_r = 1$$

olur. □

Uyarı 3.3.6. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin proper olmayan alt uzaylarının regüler veya singüler boyutunun 1 olması gerekmez:*

Örnek 3.3.11. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin proper olmayan $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ singüler alt uzayının regüler boyutu 0, singüler boyutu ise 1 dir.*

Örnek 3.3.12. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin proper olmayan $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = \{[-a, a] : a \in \mathbb{R}\}$ alt uzayı için r-boy $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = s$-boy $(\Omega_C(\mathbb{R}))_d = 0$ dır.*

Teorem 3.3.2. *X normlu proper bir quasilineer uzay olsun. Bu durumda, X'in kapalı birim yuvarı*

$$S(\theta,1)=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$$

cümlesi proper bir cümledir.

İspat. X proper olduğundan her $x\in X$ için $F_x\neq\emptyset$ ve $x\neq y$ olacak şekildeki her $x,y\in X$ elemanları için $F_x\neq F_y$ dir. Buna göre, $x\neq y$ olacak şekildeki her $x,y\in X$ elemanları için,

♦ $y\preceq x$ ise, $z_1\preceq x$ ve $z_1\npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z_1\in X_r$ mevcuttur,

♦ $x\preceq y$ ise, $m_1\preceq y$ ve $m_1\npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m_1\in X_r$ mevcuttur,

♦ x ile y elemanları karşılaştırılamıyor ise, $z_1\preceq x$ ve $z_1\npreceq y$ olacak şekilde en az bir $z_1\in X_r$ elemanı veya $m_1\preceq y$ ve $m_1\npreceq x$ olacak şekilde en az bir $m_1\in X_r$ elemanı mevcuttur.

Herhangi bir $u\in S(\theta,1)$ elemanı için $\|u\|\leq 1$ olup, $S(\theta,1)\subset X$ olduğundan $u\in X$ dir. X proper olduğundan $F_u\neq\emptyset$ dir. Buna göre $z\preceq u$ olacak şekilde en az bir $z\in X_r$ mevcuttur. Normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.4) gereğince $z\preceq u$ iken $\|z\|\leq\|u\|$ olup $\|u\|\leq 1$ olduğundan $\|z\|\leq 1$ elde edilir. Böylece $z\in S(\theta,1)$ ve z regüler eleman olduğundan $z\in(S(\theta,1))_r$ dir. Sonuç olarak herhangi bir $u\in S(\theta,1)$ elemanı için $z\preceq u$ olacak şekilde en az bir $z\in(S(\theta,1))_r$ mevcuttur. $u\in S(\theta,1)$ elemanı keyfi olduğundan, her $u\in S(\theta,1)$ elemanı için $F_u^{S(\theta,1)}\neq\emptyset$ dir.

Ayrıca $S(\theta,1)$'in $u\neq v$ olacak şekildeki herhangi iki u ve v elemanı için $u,v\in X$ ve X normlu proper quasilineer uzay olduğundan, $F_u\neq F_v$ dir. Böylece

♦ $v\preceq u$ ise,

$$z_2\preceq u \text{ ve } z_2\npreceq v \text{ olacak şekilde en az bir } z_2\in X_r \text{ mevcuttur.} \tag{3.3.7}$$

♦ $u\preceq v$ ise,

$$m_2\preceq v \text{ ve } m_2\npreceq u \text{ olacak şekilde en az bir } m_2\in X_r \text{ mevcuttur.} \tag{3.3.8}$$

♦ u ile v elemanları karşılaştırılamıyor ise,

$$\begin{aligned} z_2 &\preceq u \text{ ve } z_2\npreceq v \text{ olacak şekilde en az bir } z_2\in X_r \text{ elemanı veya}\\ m_2 &\preceq v \text{ ve } m_2\npreceq u \text{ olacak şekilde en az bir } m_2\in X_r \text{ elemanı}\\ &\text{mevcuttur.} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Buna göre, normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.4) dikkate alınarak, $z_2 \preceq u$ ve $z_2 \npreceq v$ iken, $u \in S(\theta, 1)$ olduğundan $\|u\| \leq 1$ olup $\|z_2\| \leq \|u\| \leq 1$, yani $z_2 \in S(\theta, 1)$ olduğu, $m_2 \preceq v$ ve $m_2 \npreceq u$ iken, $v \in S(\theta, 1)$ olduğundan $\|v\| \leq 1$ olup $\|m_2\| \leq \|v\| \leq 1$, yani $m_2 \in S(\theta, 1)$ olduğu ve son durum söz konusu ise $z_2 \preceq u$, $z_2 \npreceq v$ olacak şekildeki z_2 elemanları için $\|z_2\| \leq 1$ olduğundan $z_2 \in S(\theta, 1)$, veya $m_2 \preceq v$, $m_2 \npreceq u$ olacak şekildeki m_2 elemanları için $\|m_2\| \leq 1$ olduğundan $m_2 \in S(\theta, 1)$ sonucuna ulaşılır.

Yukarıdaki ifadelerden z_2 ve m_2 elemanlarının regüler ve z_2, $m_2 \in S(\theta, 1)$ olduğu söylenir. Böylece

$$z_2, m_2 \in (S(\theta, 1))_r \tag{3.3.10}$$

sonucu elde edilmiş olur.

(3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) ve (3.3.10) göz önüne alınırsa, $u \neq v$ olarak seçilen herhangi iki u ve v elemanları için $F_u^{S(\theta,1)} \neq F_v^{S(\theta,1)}$ olduğu söylenir.

Sonuç olarak, X normlu proper quasilineer uzayının $S(\theta, 1)$ kapalı birim yuvarı proper bir cümledir. □

3.4 Kompaktlık ve Sonlu Boyut

Fonksiyonel analizde önemli bir yer tutan kompakt cümleler, sonlu cümlelerinkine benzeyen ve kompakt olmayan cümlelerce paylaşılmayan, bazı temel özelliklere sahiptir. Bu alt başlıkta normlu quasilineer uzaylar ve bunların alt uzaylarında kompaktlık kavramına ilişkin birkaç temel özellik ele alınacaktır.

Tanım 3.4.1. *X normlu bir quasilineer uzay olmak üzere, X'deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayı kompakttır denir. X'in bir M alt cümlesi, X'in bir alt quasilineer uzayı olarak ele alındığında kompakt oluyorsa, yani M'deki her dizi, limiti M'nin bir elemanı olan yakınsak bir alt diziye sahip oluyorsa, M'ye kompakttır denir.*

Uyarı 3.4.1. *Burada tanımlanan kompaktlık, dizisel kompaktlık olarak da bilinir. Bu tanımın dışında başka iki önemli kompaktlık türü varsa da, metrik uzaylarda bu üç kavram birbirine denktir. Her normlu quasilineer uzay, önceki kısımlarda* *tanımlanan Hausdorff metrik ile bir metrik uzay olduğundan normlu bir X quasilineer uzayının veya X'in bir alt cümlesinin kompaktlığı tanımlanırken kompaktlık tanımlarından kullanışlılığa nazaran daha elverişli olan dizisel kompaktlık tanımı kullanılmıştır.*

Lemma 3.4.1. *Normlu bir quasilineer uzayın kompakt M alt cümlesi kapalı ve sınırlıdır.*

İspat. Her normlu quasilineer uzay, önceki kısımlarda tanımlanan Hausdorff metrik ile bir metrik uzay olduğundan, bu lemma metrik uzayların kompakt alt cümlelerinin kapalı ve sınırlı olmasının direkt sonucudur. □

Uyarı 3.4.2. *Bu lemmanın karşıtı doğru olmayabilir.*

Örnek 3.4.1. *$\Omega_C(c_0)$ normlu quasilineer uzayının kapalı birim yuvarı, θ, $\Omega_C(c_0)$'ın birim elemanı olmak üzere*

$$S(\theta, 1) = \left\{x \in \Omega_C(c_0) : \|x\|_{\Omega_C(c_0)} \leq 1\right\}$$

ve bu yuvarda $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0...)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0...)$,... olmak üzere, $(\{e_k\})$ dizisi verilsin. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\|\{e_k\}\|_{\Omega_C(c_0)} = \sup_{e_k \in (\{e_k\})} \|e_k\|_{c_0} = \sup_{e_k \in (\{e_k\})} \sup_{i \in \mathbb{N}} \left|e_k^i\right| = 1$$

olduğundan, $(\{e_k\})$ dizisi $S(\theta, 1)$ yuvarının yüzeyindedir. Ayrıca $(\{e_k\})$ dizisinin herhangi bir $(\{e_{k_n}\})$ alt dizisi için, $\{e_{k_n}\}$ ve $\{e_{k_m}\}$ terimleri regüler elemanlar olduğundan $h_{\Omega_C(c_0)}(\{e_{k_n}\}, \{e_{k_m}\}) = \|\{e_{k_n}\} - \{e_{k_m}\}\|$ olup, genelliği bozmayacağından $k_m > k_n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& h_{\Omega_C(c_0)}(\{e_{k_n}\}, \{e_{k_m}\}) \\
= \; & \|\{e_{k_n}\} - \{e_{k_m}\}\|_{\Omega_C(c_0)} \\
= \; & \left\|\left\{\left(0, 0, ..., 0, \overset{k_n.\ terim}{1}, 0, 0, ...\right)\right\} - \left\{\left(0, 0, ..., 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{1}, 0, 0, ...\right)\right\}\right\|_{\Omega_C(c_0)} \\
= \; & \left\|\left\{\left(0, 0, ..., 0, \overset{k_n.\ terim}{1}, 0, ..., 0, \overset{k_m.\ terim}{-1}, 0, 0, ...\right)\right\}\right\|_{\Omega_C(c_0)} \\
= \; & \left\|\left(0, 0, ..., 0, \overset{k_n.\ terim}{1}, 0, ..., 0, \overset{k_m.\ terim}{-1}, 0, 0, ...\right)\right\|_{c_0} \\
= \; & 1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(\{e_{k_n}\})$ *alt dizisine ait herhangi iki eleman arasındaki uzaklık daima* 1 *dir. Dolayısıyla* $(\{e_{k_n}\})$ *alt dizisi Cauchy dizisi değildir. Bu nedenle* $(\{e_{k_n}\})$ *dizisi asla yakınsak olamaz.* $(\{e_{k_n}\})$ *alt dizisi keyfi seçildiğinden* $(\{e_k\})$ *dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olamadığı sonucuna ulaşılır. Böylece* $\Omega_C(c_0)$*'ın birim yuvarı olan* $S(\theta, 1)$ *cümlesi, kapalı ve sınırlı olduğu halde kompakt değildir.*

Buna karşılık, normlu bir quasilineer uzayın regüler alt uzayı sonlu boyutlu ise yani bir quasilineer uzay sonlu regüler boyutlu ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.1. *Sonlu regüler boyutlu olan normlu bir* X *quasilineer uzayında herhangi bir* $M \subset X_r$ *alt cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul* M*'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

İspat. X_r regüler alt uzayı X'in lineer alt uzayı olduğundan teoremin ispatı klasiktekinin benzeridir. □

Uyarı 3.4.3. *Sonsuz regüler boyutlu olan quasilineer uzaylarda kapalılık ve sınırlılık kompaktlığı gerektirmeyebilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.1'de quasilineer uzayın sonlu regüler boyutlu olması önemlidir. Aşağıdaki örnek bu durumu yansıtmaktadır.*

Örnek 3.4.2. *"*$\subseteq$*" kısmi sıralama bağıntısı ile* $\Omega_C(c_0)$ *normlu quasilineer uzayı verilsin. Bu uzay sonsuz regüler boyutlu olan bir uzaydır.*

$$z = \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, ... \right) \right\} \in \Omega_C(c_0)$$

olmak üzere, $S(z, 1)$ *kapalı yuvarı göz önüne alınırsa, bu yuvarın sınırlı olduğu açıktır.*

Ayrıca Teorem 2.1.1 gereğince herhangi bir metrik uzayda bir kapalı yuvar kapalı bir cümle olduğundan $S(z, 1)$ *kapalı yuvarı kapalı bir cümledir.*

Diğer taraftan $e_n = \left(0, 0, ..., 0, \overset{n.\ terim}{1}, 0, 0, ...\right)$ *olmak üzere,* $\Omega_C(c_0)$*'da genel terimi*

$$z_n = z + \frac{1}{4}\{e_n\}$$

olan (z_n) *dizisi verilsin. Bu dizinin terimleri sırasıyla*

$$\begin{aligned}
z_1 &= z+\frac{1}{4}\{e_1\}=\left\{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4},0,0,\cdots\right)\right\},\\
z_2 &= z+\frac{1}{4}\{e_2\}=\left\{\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4},0,0,\cdots\right)\right\},\\
z_3 &= z+\frac{1}{4}\{e_3\}=\left\{\left(\frac{1}{5},0,\frac{1}{4},0,0,\cdots\right)\right\},\\
&\vdots\\
z_n &= z+\frac{1}{4}\{e_n\}=\left\{\left(\frac{1}{5},0,0,\cdots,0,0,\overset{n.\ terim}{\frac{1}{4}},0,0,\cdots\right)\right\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Öncelikle her $n\in\mathbb{N}$ *için* $h(z_n,z)\leq 1$ *olduğundan bu dizi* $\Omega_C(c_0)$*'ın* $S(z,1)$ *yuvarındadır. Gerçekten de, Önerme 2.3.1 - (2.3.9) gereğince,*

$$\begin{aligned}
h_{\Omega_C(c_0)}\left(z+\frac{1}{4}\{e_n\},z\right) &\leq h_{\Omega_C(c_0)}(z,z)+h_{\Omega_C(c_0)}\left(\frac{1}{4}\{e_n\},\theta\right)\\
&= 0+\left\|\frac{1}{4}\{e_n\}\right\|_{\Omega_c(c_0)}\\
&= \sup_{a\in\frac{1}{4}\{e_n\}}\|a\|_{c_0}\\
&= \sup_{a\in\frac{1}{4}\{e_n\}}\sup_{b\in a}|b|\\
&= \frac{1}{4}<1
\end{aligned}$$

olmaktadır.

Terimleri $S(z,1)$ *yuvarından alınan bu dizinin herhangi bir alt dizisinin Cauchy dizisi olmadığını göstermek,* $S(z,1)$*'in kompakt olmadığını söylemek için yeterlidir.* $\left(z+\frac{1}{4}\{e_{k_n}\}\right)$ *dizisi,* $\left(z+\frac{1}{4}\{e_n\}\right)$ *dizisinin herhangi bir alt dizisi ve genelliği bozmayacağından* $k_m>k_n$ *kabul edilmek üzere,*

$$\begin{aligned}
&h_{\Omega_C(c_0)}\left(z+\frac{1}{4}\{e_{k_n}\},z+\frac{1}{4}\{e_{k_m}\}\right)\\
&= \inf\left\{\begin{array}{c} r\geq 0: z+\frac{1}{4}\{e_{k_n}\}\subseteq z+\frac{1}{4}\{e_{k_m}\}+S(\theta,r),\\ z+\frac{1}{4}\{e_{k_m}\}\subseteq z+\frac{1}{4}\{e_{k_n}\}+S(\theta,r)\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \inf \left\{ \begin{array}{c} r \geq 0 : \\ \left\{ \left(\tfrac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} \\ \subseteq \left\{ \left(\tfrac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r), \\ \left\{ \left(\tfrac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} \\ \subseteq \left\{ \left(\tfrac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r) \end{array} \right\}$$

olup

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} \\ \subseteq \ & \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} \\ \subseteq \ & \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

kapsamalarından (3.4.1)'in sağlanması için yani

$$\left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \in \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r)$$

olabilmesi için $S(\theta, r)$*'nin*

$$z' = \left(0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{-\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right)$$

şeklindeki bir elemanı içermesi ve benzer olarak (3.4.2)'nin sağlanması için yani

$$\left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \in \left\{ \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \right\} + S(\theta, r)$$

olabilmesi için $S(\theta, r)$*'nin*

$$z'' = \left(0,0,0,\cdots,0,0,\overset{k_n.\ terim}{-\frac{1}{4}},0,0,\cdots,0,0,\overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}},0,0,\cdots\right)$$

şeklindeki bir elemanı içermesi gerekmektedir. Buna göre $S(\theta, r)$*'nin* z' *ve* z'' *elemanlarını içerebilmesi için*

$$h_{\Omega_C(c_0)}(z', \theta) \le r$$

ve

$$h_{\Omega_C(c_0)}(z'', \theta) \le r$$

olmalıdır. Buradan,

$$h_{\Omega_C(c_0)}(z', \theta) = \|z'\|_{c_0} = \frac{1}{4}$$

ve

$$h_{\Omega_C(c_0)}(z'', \theta) = \|z''\|_{c_0} = \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$r \ge \frac{1}{4}$$

olmalıdır.

O halde $r \ge \frac{1}{4}$ *olacak şekildeki* $S(\theta, r)$ *yuvarları için ancak (3.4.1) ve (3.4.2) kapsamalarının ikisi birden sağlanır. Böylece*

$$h_{\Omega_C(c_0)}\left(z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\}, z + \frac{1}{4}\{e_{k_m}\}\right) = \frac{1}{4}$$

olarak elde edilir.

Bu sonuç $\left(z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\}\right)$ *alt dizisinin herhangi iki terimi arasındaki uzaklığın daima* $1/4$ *olduğunu söyler. Böylece bu alt dizi Cauchy dizisi olamaz. Bu durumda* $\left(z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\}\right)$ *alt dizisi yakınsak değildir. Bu ise,* $S(z, 1)$ *kapalı yuvarından alınan* (z_n) *dizisinin yakınsak bir alt dizisinin olamayacağı demektir ki; bu durum* $S(z, 1)$ *yuvarının kompakt olmadığı anlamına gelir.*

Sonuç olarak, sonsuz regüler boyutlu olan $\Omega_C(c_0)$ *normlu quasilineer uzayında,* $S(z, 1)$ *kapalı yuvarı kapalı ve sınırlıdır; fakat kompakt değildir.*

Uyarı 3.4.4. *Teorem 3.4.1'de sonlu regüler boyutlu olan X quasilineer uzayında bir $M \subset X$ cümlesinin kapalı ve sınırlı olması kompakt olmasını gerektirmeyebilir. Aşağıdaki örnek bu durumu yansıtmaktadır. Örnekteki kapalı ve sınırlı olduğu halde kompakt olmadığı ispatlanacak olan cümle, $\Omega_C(c_0)$'ın singüler alt uzayı olan $(\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$'dan seçilmiştir.*

Örnek 3.4.3. *"$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı ile $\Omega_C(c_0)$ normlu quasilineer uzayının 0 regüler boyutlu olan $(\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$ singüler alt uzayı ve*

$$z = \{(t, 0, 0, ...) : 0 \leq t \leq 1\} \in (\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$$

olmak üzere, $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ kapalı yuvarı verilsin.

$S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ yuvarında hiçbir regüler elemanın olmadığını göstermek, bu yuvarın $(\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$'ın bir alt cümlesi olduğunu söylemek için yeterlidir. Ayrıca $\Omega_C(c_0)$ uzayındaki regüler elemanlar sadece tek nokta cümlelerinden oluştuğundan $u = (u_1, u_2, ...) \in c_0$ olmak üzere, $\{u\}$ keyfi elemanı için $\{u\} \notin S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ olduğunu göstermek $S\left(z, \frac{1}{4}\right) \subset (\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$ olması için yeterli olacaktır.

$S(\theta, r)$, $(\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$'ın θ merkezli r yarıçaplı yuvarı olmak üzere,

$$\begin{aligned} h(\{u\}, z) &= \inf\{r \geq 0 : \{u\} \subseteq z + S(\theta, r),\ z \subseteq \{u\} + S(\theta, r)\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{c} r \geq 0 : \\ \{(u_1, u_2, ...)\} \subseteq \{(t, 0, 0, ...) : 0 \leq t \leq 1\} + S(\theta, r)\ , \\ \{(t, 0, 0, ...) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \{(u_1, u_2, ...)\} + S(\theta, r) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\{(u_1, u_2, ...)\} \subseteq \{(t, 0, 0, ...) : 0 \leq t \leq 1\} + S(\theta, r) \tag{3.4.3}$$

ve

$$\{(t, 0, 0, ...) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \{(u_1, u_2, ...)\} + S(\theta, r) \tag{3.4.4}$$

kapsamalarının sağlanması için gerek ve yeter şart, sırasıyla, $S(\theta, r)$ yuvarının bir $t' \in [0, 1]$ sabiti için $w = (u_1 - t', u_2, u_3, ...)$ elemanını ve her $t \in [0, 1]$ için $w_t = (t - u_1, -u_2, -u_3, ...)$ elemanlarını içermesidir. Bunun için ise bir $t' \in [0, 1]$ sabiti için

$$h(w, \theta) = \|w\|_{c_0} \leq r$$

ve her $t \in [0,1]$ için

$$h(w_t, \theta) = \|w_t\|_{c_0} \leq r$$

yani

$$r \geq \max\left\{ \|w\|_{c_0}, \sup_{t\in[0,1]} \|w_t\|_{c_0} \right\}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\|w\|_{c_0} = \max\left\{ |u_1 - t'|, \sup_{n\geq 2} |u_n| \right\}$$

ve

$$\|w_t\|_{c_0} = \max\left\{ |t - u_1|, \sup_{n\geq 2} |-u_n| \right\}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
& h(\{u\}, z) \\
= \;& \inf\{r \geq 0 : \{u\} \subseteq z + S(\theta, r)),\ z \subseteq \{u\} + S(\theta, r)\} \\
= \;& \inf\left\{ r \geq 0 : r \geq \max\left\{ \|w\|_{c_0}, \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \|w_t\|_{c_0} \right\} \right\} \right\} \\
= \;& \inf\left\{ r \geq 0 : r \geq \max\left\{ \begin{array}{c} \max\left\{ |u_1 - t'|, \sup_{n\geq 2} |u_n| \right\}, \\ \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \max\left\{ |t - u_1|, \sup_{n\geq 2} |-u_n| \right\} \right\} \end{array} \right\} \right\} \\
\geq \;& \inf\left\{ r \geq 0 : r \geq \max\left\{ |u_1 - t'|, \sup_{t\in[0,1]} |t - u_1| \right\} \right\} \\
\geq \;& \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$h(\{u\}, z) \geq \frac{1}{2}$$

olur. $1/2 > 1/4$ *olduğundan*

$$\{u\} \notin S\left(z, \frac{1}{4}\right)$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ yuvarında hiçbir regüler eleman olmadığından $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ kapalı yuvarının $(\Omega_C(c_0))_s \cup \{\theta\}$'ın bir alt cümlesi olduğu ispatlanmış olur.

Ayrıca $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ kapalı yuvarının sınırlı olduğu açıktır ve Teorem 2.1.1 gereğince herhangi bir metrik uzayda her kapalı yuvar kapalı bir cümle olduğundan $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ kapalı yuvarı kapalı bir cümledir.

Diğer taraftan $e_n = \left(0, 0, ..., 0, 0, \overset{n.\ terim}{1}, 0, 0, ...\right)$ *olmak üzere,* $\left(\Omega_C(c_0)\right)_s \cup \{\theta\}$*'da genel terimi*

$$z_n = z + \frac{1}{4}\{e_n\}$$

olan (z_n) *dizisi verilsin.*

Bu dizinin terimleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
z_1 &= z + \frac{1}{4}\{e_1\} = \left\{\left(t + \frac{1}{4}, 0, 0, \cdots\right) : 0 \leq t \leq 1\right\}, \\
z_2 &= z + \frac{1}{4}\{e_2\} = \left\{\left(t, \frac{1}{4}, 0, 0, \cdots\right) : 0 \leq t \leq 1\right\}, \\
z_3 &= z + \frac{1}{4}\{e_3\} = \left\{\left(t, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \cdots\right) : 0 \leq t \leq 1\right\}, \\
&\vdots \\
z_n &= z + \frac{1}{4}\{e_n\} = \left\{\left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots\right) : 0 \leq t \leq 1\right\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 2.3.1 - (2.3.9) gereğince,

$$\begin{aligned}
h\left(z + \frac{1}{4}\{e_n\}, z\right) &\leq h(z, z) + h\left(\frac{1}{4}\{e_n\}, \theta\right) \\
&= 0 + \left\|\frac{1}{4}\{e_n\}\right\|_{\Omega_C(c_0)} \\
&= \sup_{a \in \frac{1}{4}\{e_n\}} \|a\|_{c_0} \\
&= \sup_{a \in \frac{1}{4}\{e_n\}} \sup_{b \in a} |b| \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

olduğundan (z_n) *dizisi* $S\left(z, \frac{1}{4}\right)$ *yuvarındadır.* $\left(z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\}\right)$ *dizisi* $\left(z + \frac{1}{4}\{e_n\}\right)$ *dizisinin herhangi bir alt dizisi ve genelliği bozmayacağından* $k_m > k_n$ *kabul edilmek üzere,*

$$\begin{aligned}
&h\left(z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\}, z + \frac{1}{4}\{e_{k_m}\}\right) \\
&= \inf\left\{\begin{array}{c} r \geq 0 : z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\} \subseteq z + \frac{1}{4}\{e_{k_m}\} + S(\theta, r), \\ z + \frac{1}{4}\{e_{k_m}\} \subseteq z + \frac{1}{4}\{e_{k_n}\} + S(\theta, r) \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \inf \left\{ \begin{array}{c} r \geq 0 : \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ \subseteq \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} + S(\theta, r) \ ve \\ \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ \subseteq \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\tfrac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} + S(\theta, r) \end{array} \right\}$$

olur.

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ \subseteq \ & \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} + S(\theta, r) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ \subseteq \ & \left\{ \left(t, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} + S(\theta, r) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

kapsamalarının sağlanması için gerek ve yeter koşul $S(\theta, r)$ yuvarının

$$z' = \left(0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{-\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \tag{3.4.7}$$

ve

$$z'' = \left(0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_n.\ terim}{-\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \overset{k_m.\ terim}{\frac{1}{4}}, 0, 0, \cdots \right) \tag{3.4.8}$$

elemanlarını içermesidir. Bunun için ise

$$h(z', \theta) \leq r$$

ve

$$h(z'', \theta) \leq r,$$

buradan,

$$h(z', \theta) = \|z'\|_{c_0} = \frac{1}{4}$$

ve

$$h\left(z'',\theta\right)=\left\|z''\right\|_{c_0}=\frac{1}{4}$$

olduğundan

$$r\geq\frac{1}{4}$$

olmalıdır. O halde $r\geq 1/4$ olacak şekildeki $S(\theta,r)$ cümleleri için ancak (3.4.5) ve (3.4.6) kapsamalarının ikisi birden sağlanır. Böylece

$$h\left(z+\frac{1}{4}\left\{e_{k_n}\right\},z+\frac{1}{4}\left\{e_{k_m}\right\}\right)=\frac{1}{4}$$

elde edilir.

Bu sonuç $\left(z+\frac{1}{4}\left\{e_{k_n}\right\}\right)$ alt dizisinin herhangi iki terimi arasındaki uzaklığın daima $1/4$ olduğunu söyler. Böylece bu alt dizi Cauchy dizisi olamaz. Bu durumda $\left(z+\frac{1}{4}\left\{e_{k_n}\right\}\right)$ alt dizisi yakınsak değildir. Bu ise, $S\left(z,\frac{1}{4}\right)$ kapalı yuvarından alınan (z_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisinin olamayacağı demektir ki; bu $S\left(z,\frac{1}{4}\right)$ yuvarının kompakt olmadığı anlamına gelir.

Sonuç olarak sonlu regüler boyutlu $\left(\Omega_C(c_0)\right)_s\cup\{\theta\}$ normlu quasilineer uzayının $S\left(z,\frac{1}{4}\right)$ alt cümlesi kapalı ve sınırlıdır; fakat kompakt değildir.

Sonuç 3.4.1. *E sonlu boyutlu normlu lineer bir uzay olsun. $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayında herhangi bir $M\subset\left(\Omega_C(E)\right)_r$ alt cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Özel olarak $E=\mathbb{R}$ alınırsa $\Omega_C(\mathbb{R})$ normlu quasilineer uzayında herhangi bir $M\subset\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$ alt cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul M'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Teorem 3.4.2. *E normlu lineer bir uzay olsun. E'nin kapalı birim yuvarı kompakt ise $\Omega_C(E)$ sonlu boyutludur.*

İspat. $S(\theta,1)=\{x\in E:\ \|x\|\leq 1\}$, E normlu lineer uzayının kapalı birim yuvarı olmak üzere, $S(\theta,1)$ kompakt olsun. Bu durumda, Teorem 2.1.14 gereğince E sonlu boyutludur. $\Omega_C(E)$ proper quasilineer uzayı için

$$boy\Omega_C(E)=r\text{-}boy\Omega_C(E)=boy\left(\Omega_C(E)\right)_r=boyE$$

olduğundan $\Omega_C(E)$ sonlu boyutludur. □

3.5 Sağlam Zeminli Quasilineer Uzaylar

Aşağıdaki kısımda bir quasilineer uzayın, Tanım 3.5.1'de verilen özelliği sağlaması halinde, "sağlam zeminli quasilineer uzay" tabiri kullanılacak olan özel proper uzaylar olduğu ifade edilmiştir.

Notasyon 3.5.1. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay olmak üzere, X'in "$\preceq$" bağıntısına göre üstten sınırlı olan ve regüler elemanlardan oluşan bir alt cümlesi üzerinden bu bağıntıya göre supremum alındığını daha da vurgulamak amacıyla bundan sonraki kısımda $\sup\limits_{(\preceq)}$ gösterimi kullanılacaktır.*

Tanım 3.5.1. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay olmak üzere, her $y \in X$ için $\sup\limits_{(\preceq)} F_y$ mevcut ve*

$$\sup_{(\preceq)} F_y = y \tag{3.5.1}$$

özelliği sağlanıyor ise X quasilineer uzayına sağlam zeminli quasilineer uzay denir.

Uyarı 3.5.1. *$\sup\limits_{(\preceq)} F_y$ değeri mevcut ise tektir. Gerçekten de, $F_y = \{x \in X_r : x \preceq y\}$ cümlesinin "$\preceq$" bağıntısına göre tüm üst sınırlarının cümlesi Δ_y ile gösterilmek üzere, $\sup\limits_{(\preceq)} F_y = \min\limits_{(\preceq)} \Delta_y$ olduğu göz önüne alınır ve $\min\limits_{(\preceq)} \Delta_y = y_1$ ve $\min\limits_{(\preceq)} \Delta_y = y_2$ olarak kabul edilirse,*

$$y_1 \in \Delta_y \text{ olduğundan } y_2 \preceq y_1$$

ve

$$y_2 \in \Delta_y \text{ olduğundan } y_1 \preceq y_2$$

elde edilir. Buradan $y_1 = y_2$ olduğu söylenir. Bu ise $\sup\limits_{(\preceq)} F_y$ değerinin bir tek olduğu sonucunu verir.

Önerme 3.5.1. *Sağlam zeminli bir quasilineer uzay proper bir quasilineer uzaydır.*

İspat. X sağlam zeminli bir quasilineer uzay olsun. Bu durumda her $y \in X$ için $\sup\limits_{(\preceq)} F_y = y$ dir. $\sup\limits_{(\preceq)} F_y$ değerinin mevcut olması F_y cümlesinin boştan farklı olacağı anlamına geldiğinden X'deki her y elemanından önce en az bir regüler eleman gelir.

Diğer taraftan sağlam zeminli olan X'in $y \neq z$ olacak şekildeki herhangi iki elemanı için,

$$\sup_{(\preceq)} F_y \neq \sup_{(\preceq)} F_z$$

olacağından $F_y \neq F_z$ elde edilir. Çünkü, aksi yani $F_y = F_z$ olsaydı, bu durumda $\underset{(\preceq)}{\sup} F_y = \underset{(\preceq)}{\sup} F_z$ olurdu ki, X sağlam zeminli olduğundan, bu $y = z$ anlamına gelirdi. Böylece sağlam zeminli bir quasilineer uzay olan X, aynı zamanda proper bir quasilineer uzaydır. $\square$

Örnek 3.5.1. *Her lineer uzayın sağlam zeminli olduğu tanımdan açıktır.*

Örnek 3.5.2. *E normlu lineer bir uzay olmak üzere, $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ sağlam zeminli quasilineer uzaylardır:*

$\Omega_C(E)$ proper olduğundan her $B \in \Omega_C(E)$ için $F_B = \{A \in (\Omega_C(E))_r : A \subseteq B\}$ cümlesi boş değildir. Ayrıca her $A \in F_B$ için $A \subseteq B$ olduğundan F_B cümlesi "$\subseteq$" bağıntısına göre B ile üstten sınırlıdır.

F_B cümlesinin "$\subseteq$" bağıntısına göre tüm üst sınırlarının cümlesi Δ_B ile gösterilsin. Bu durumda $C \neq B$ olan herhangi bir $C \in \Delta_B$ için;

i) $C \subseteq B$ ise, $A \subseteq B$ ve $A \subsetneq C$ olacak şekilde bir $A \in F_B$ mevcut olacağından, bu durum $C \in \Delta_B$ olması ile çelişir.

ii) C ile B karşılaştırılamaz ise, $A \subseteq C$, $A \subsetneq B$ ve $A' \subseteq B$, $A' \subsetneq C$ olacak şekilde $A, A' \in F_B$ elemanları bulunabileceğinden, bu durum $C \in \Delta_B$ olması ile çelişir.

Dolayısıyla $C \neq B$ olan her $C \in \Delta_B$ için $B \subseteq C$ dir. Böylece Δ_B cümlesinin "$\subseteq$" bağıntısına göre minimumu, yani F_B cümlesinin "$\subseteq$" bağıntısına göre üst sınırlarının en küçüğü B elemanı olup, $\underset{(\subseteq)}{\sup} \{A \in (\Omega_C(E))_r : A \subseteq B\}$ anlamlıdır ve

$$\underset{(\subseteq)}{\sup} \{A \in (\Omega_C(E))_r : A \subseteq B\} = B$$

elde edilir. Diğer taraftan $\underset{(\subseteq)}{\sup} F_B$ değeri bir tektir. Böylece $\Omega_C(E)$ sağlam zeminli bir quasilineer uzaydır.

$\Omega(E)$ quasilineer uzayının sağlam zeminli olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.5.3. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı olan $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ uzayının sağlam zeminli olmadığı açıktır. Örneğin; $y = [-2, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ elemanı için $x \subseteq y$ olacak şekildeki x regüler elemanı sadece $x = \{0\}$ olup,*

$$\sup \left\{x : x \in ((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\})_r ,\ x \subseteq y\right\} = \{0\} \neq y$$

dir. Diğer taraftan $y = [2, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ elemanı için $F_y = \emptyset$ dir.

Aşağıdaki örnekler bir quasilineer uzayın (3.5.1) eşitliğini sağlaması durumunu açıklayıcı niteliktedir.

Örnek 3.5.4. *$u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ lineer uzayının ancak "$x \preceq y \Leftrightarrow x = y$" şeklinde tanımlanan bağıntı ile quasilineer uzay olduğu ve her elemanının regüler olduğu hatırlanırsa, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ elemanı için $x \preceq (u_1, u_2)$ özelliğini sağlayan $x \in (\mathbb{R}^2)_r = \mathbb{R}^2$ elemanı bir tanedir ve $x = (u_1, u_2)$ dir. Böylece*

$$\begin{aligned} & \sup_{(=)} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = (u_1, u_2) \right\} \\ = \; & \sup_{(=)} \left\{ u_1(1,0) + u_2(0,1) \right\} \\ = \; & (u_1, u_2) \end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.5.5. *$\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayı verilsin. $r > 0$ olmak üzere,*

$$A = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le r\}$$

cümlesi $\mathbb{R}^2$'nin boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks bir alt cümlesidir ve dolayısıyla $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ dir.

$(\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$'nin standart bazı olan $\{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ yardımıyla A cümlesindeki bir x elemanı için $\{x\} = \{(x_1, x_2)\} \in X_r$ elemanı

$$\{x\} = x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\} \tag{3.5.2}$$

şeklinde tek türlü bir gösterime sahiptir. Ayrıca $\{x\} \in (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ ve $\{x\} = \{(x_1, x_2)\} \subseteq A$ olduğundan $x_1^2 + x_2^2 \le r$ dir. Diğer taraftan A ile üstten sınırlı olan

$$F_A = \{\{x\} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r : \{x\} \subseteq A\}$$

cümlesinde "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sup_{(\subseteq)} \left\{ \{x\} = \{(x_1, x_2)\} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r : \{x\} \subseteq A \right\} \\ & = \sup_{(\subseteq)} \left\{ \{x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\}\} : x_1^2 + x_2^2 \le r \right\} \\ & = A \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıda $\Omega_C(\mathbb{R})$ sağlam zeminli normlu quasilineer uzayının bir y elemanı verildiğinde, normu, y elemanının normuna eşit olacak şekilde, y'nin zemininden bir elemanın daima bulunabileceği anlamını taşıyan önemli bir sonuç verilecektir.

Önerme 3.5.2. *Herhangi bir $y \in \Omega_C(\mathbb{R})$ elemanı için*

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \sup_{(\subseteq)} \left\{ x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r : x \subseteq y \right\} \right\| \qquad (3.5.3) \\ &= \sup \left\{ \|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \,,\; x \subseteq y \right\} \end{aligned}$$

dir.

İspat. y, $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin herhangi bir elemanı olmak üzere, $x \subseteq y$ olan her $x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ için $\|x\| \leq \|y\|$ olacağından

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \,,\; x \subseteq y \right\} &\leq \|y\| \\ &= \left\| \sup_{(\subseteq)} \left\{ x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r : x \subseteq y \right\} \right\| \end{aligned}$$

dir. Böylece $x \subseteq y$ olan en az bir $x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ için, $\|x\| = \|y\|$ olduğunu göstermek

$$\sup \left\{ \|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \,,\; x \subseteq y \right\} = \|y\|$$

eşitliğinin sağlandığını söylemek için yeterli olacaktır.

$y \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olduğundan $y = [y_1, y_2]$ şeklinde olup,

$$\|y\| = \max \left\{ |y_1| \,, |y_2| \right\}$$

dir.

$|y_1| = |y_2|$ ise, $x = \{y_1\}$ veya $x = \{y_2\}$ alınırsa, $x \subseteq y$ ve $\|x\| = \|y\|$ olur.

$|y_1| > |y_2|$ ise, $x = \{y_1\}$ alınırsa, $x \subseteq y$ ve $\|x\| = \|y\|$ olur.

$|y_1| < |y_2|$ olması durumunda ise, $x = \{y_2\}$ alınırsa, $x \subseteq y$ ve $\|x\| = \|y\|$ elde edilir.

Böylece her $y \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $\|x\| = \|y\|$ olacak şekilde bir $x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \,,\; x \subseteq y \right\} &= \|y\| \\ &= \left\| \sup_{(\subseteq)} \left\{ x \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r : x \subseteq y \right\} \right\| \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. □

Uyarı 3.5.2. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin sağlam zeminli olmayan herhangi bir Y alt uzayındaki bir y elemanı için*

$$\begin{aligned}\|y\| &= \left\|\sup_{(\subseteq)}\{x \in X_r : x \subseteq y\}\right\| \\ &= \sup\{\|x\| : x \in X_r,\ x \subseteq y\}\end{aligned}$$

eşitliği sağlanmayabileceğinden Önerme 3.5.2'de söz konusu uzayın sağlam zeminli olması önemlidir. Örneğin; $y = [-2, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ elemanı için $\|y\| = 3$ dür. Fakat, $x \subseteq y$ olacak şekildeki x regüler elemanı sadece $x = \{0\}$ olup,

$$\sup\left\{\|x\| : x \in ((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\})_r,\ x \subseteq y\right\} = 0$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} & \sup\left\{\|x\| : x \in ((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\})_r,\ x \subseteq y\right\} \\ \neq & \left\|\sup_{(\subseteq)}\left\{x \in ((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\})_r : x \subseteq y\right\}\right\| \end{aligned}$$

olmaktadır.

Diğer taraftan, $z = [1, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ elemanı için $x \subseteq z$ olacak şekilde hiçbir x regüler elemanı mevcut değildir.

Önerme 3.5.3. *$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ sağlam zeminli normlu quasilineer uzayının herhangi bir y elemanına karşılık*

$$\|x_0\| = \|y\|$$

olacak şekilde bir $x_0 \in F_y$ mevcuttur.

İspat. Lemma 3.2.2 gereğince $y \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, F_y, $\mathbb{R}^n$'de kapalı ve sınırlıdır. Ayrıca, $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ sağlam zeminli quasilineer uzayı proper olup, sonlu boyutlu ($n-$ boyutlu) olduğundan Teorem 3.4.1 gereğince F_y kompakttır. Norm fonksiyonu F_y kompakt cümlesini $\mathbb{R}$'nin içine dönüştüren sürekli bir dönüşüm olduğundan, Teorem 2.1.8 gereğince bu dönüşüm F_y'nin bazı noktalarında bir maksimuma sahiptir. Buna göre $\max\{\|x\| : x \in F_y\}$ mevcuttur.

$$\max\{\|x\| : x \in F_y\} = z$$

olsun. Bu durumda bir $x_0 \in F_y$ için $\|x_0\| = z$ dir. Buradan $y \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \sup\{\|x\|_{\mathbb{R}^n} : x \subseteq y\} \\
&= \sup\{\|x\|_{\mathbb{R}^n} : x \in F_y\} \\
&= \max\{\|x\|_{\mathbb{R}^n} : x \in F_y\} \\
&= z \\
&= \|x_0\|
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.5.1. $y \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *olmak üzere,*

$$\|y\| = \sup\{\|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r\,,\ x \subseteq y\}$$

olur.

İspat. Sağlam zeminli olan $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'deki her y elemanı için

$$y = \sup_{(\subseteq)}\{x \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r : x \subseteq y\}$$

eşitliğinin sağlandığı hatırlanırsa, normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.4) gereğince $x \subseteq y$ olan her x elemanı için $\|x\| \leq \|y\|$ olduğundan

$$\sup\{\|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r\,,\ x \subseteq y\} \leq \|y\|$$

elde edilir.

Önerme 3.5.3 gereğince, $x_0 \subseteq y$ ve $\|y\| = \|x_0\|$ olacak şekilde bir $x_0 \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r$ elemanı mevcuttur. Buna göre,

$$\sup\{\|x\| : x \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r\,,\ x \subseteq y\} = \|y\|$$

elde edilir. □

Teorem 3.5.2. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *normlu quasilineer uzayı tamdır, [2].*

Uyarı 3.5.3. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ tam normlu quasilineer uzayının regüler alt uzayı, $\mathbb{R}$ lineer uzayı olup, regüler alt uzayının tam olduğu açıktır. Diğer taraftan $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı tam değildir:*

$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$'da genel terimi

$$u_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

olan (u_n) dizisi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} u_n - u_m &= \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] - \left[1 - \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right] \end{aligned}$$

olup her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n > N$ için

$$\|u_n - u_m\| = \left|-\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{m+n}{mn}\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabilir. $h(u_n, u_m) \leq \|u_n - u_m\|$ olduğundan $h(u_n, u_m) < \varepsilon$ dur. Böylece (u_n), $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$'da bir Cauchy dizisidir.

Örnek 3.5.6. *Diğer taraftan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ için $h(u_n, u) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısının bulunabilmesi ancak $u = \{1\}$ olması ile mümkündür; fakat $\{1\} \notin (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ olduğundan (u_n) dizisi $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ uzayında yakınsak değildir. Böylece $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{\{0\}\}$ tam değildir.*

Aşağıdaki kısımda, sağlam zeminli normlu bir quasilineer uzayın $S(\theta, 1)$ kapalı birim yuvarının kompakt olması için gerek ve yeter koşulun, uzayın sonlu boyutlu olduğunu söyleyen önemli bir teorem verilecektir. Teoremin öncesinde, ispatında kullanılacak olan ve klasik fonksiyonel analizde Riesz lemması olarak bilinen sonucun quasilineer uzaylardaki karşılığı verilecektir.

Lemma 3.5.1. *X normlu bir quasilineer uzay, Y ve Z, X'in iki alt uzayı ve Y, Z alt uzayının kapalı bir özalt cümlesi olmak üzere, her $\gamma \in (0,1)$ sayısına karşılık, her $y \in Y$ için $\|z\| \geq 1$ ve $\|z - y\| \geq \gamma$ olacak şekilde bir $z \in Z$ mevcuttur.*

İspat. Herhangi bir $v \in Z \backslash Y$ elemanı verilsin. v elemanının Y'ye olan uzaklığı

$$a = \inf_{y \in Y} \{h(v, y)\}$$

olsun. Y kapalı olduğundan $a > 0$ dır. Herhangi bir $\gamma \in (0,1)$ sabiti için, infimum tanımı gereğince

$$a \leq h(v, y_0) \leq \frac{a}{\gamma} \tag{3.5.4}$$

olacak şekilde bir $y_0 \in Y$ vardır. Ayrıca

$$c = \frac{1}{h(v, y_0)}$$

olmak üzere,

$$z = c \cdot (v - y_0)$$

olsun. Bu durumda quasilineer uzaylarda $h(v, y_0) \leq \|v - y_0\|$ eşitsizliğinin sağlandığı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|c \cdot (v - y_0)\| \\ &= |c| \, \|v - y_0\| \\ &= \frac{1}{h(v, y_0)} \|v - y_0\| \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{c} \cdot y$$

olmak üzere, $y_1 \in Y$ olur ve quasilineer uzay aksiyomlarından (2.2.8) dikkate alınırsa

$$\|z - y\| = \|c \cdot (v - y_0) - y\| = c \left\| v - y_0 - \frac{1}{c} \cdot y \right\| = c \, \|v - y_1\| \tag{3.5.5}$$

yazılabilir. Ayrıca $y_1 \in Y$ olduğundan, a'nın tanımı gereğince

$$h(v, y_1) \geq a$$

dır. $\|v - y_1\| \geq h(v, y_1)$ olduğu göz önüne alınırsa, $\|v - y_1\| \geq a$ dır. c'nin değeri (3.5.5)'de yerine yazılıp, (3.5.4) kullanılarak

$$\|z - y\| = c \, \|v - y_1\| \geq ca = \frac{1}{h(v, y_0)} a \geq \gamma$$

elde edilir. $y \in Y$ keyfi olduğundan, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki lemma, herhangi regüler ve singüler boyutlu bir X normlu quasilineer uzayının sağlam zeminli olan Y alt uzayı için daha iyi sonuç verecek şekilde aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Lemma 3.5.2. *X normlu bir quasilineer uzay, Y ve Z, X'in alt uzayları ve Y, Z alt uzayının sağlam zeminli ve kapalı bir özalt cümlesi olmak üzere, her $\gamma \in (0,1)$ sayısına karşılık, her $u \in Y$ için $\|z\| = 1$ ve $\|z-u\| \geq \gamma$ olacak şekilde bir $z \in Z$ mevcuttur.*

İspat. Klasik fonksiyonel analizdeki Riesz lemması gereğince, her $\gamma \in (0,1)$ sayısına karşılık, her $y \in Y_r$ için

$$\|z-y\| \geq \gamma \text{ ve } \|z\| = 1 \tag{3.5.6}$$

olacak şekilde bir $z \in Z_r \subset Z$ mevcuttur. Y sağlam zeminli normlu bir quasilineer uzay olduğundan, her $u \in Y$ elemanı için

$$u = \sup_{(\preceq)} \{t \in Y_r : t \preceq u\}$$

olur. Bu durumda, (3.5.6)'dan $t \preceq u$ olacak şekildeki her $t \in Y_r$ için de,

$$\|z-t\| \geq \gamma \text{ ve } \|z\| = 1 \tag{3.5.7}$$

olacak şekilde $z \in Z$ mevcuttur. Quasilineer uzay aksiyomlarından, (2.2.1), (2.2.12) ve (2.2.13) kullanılırsa, $z \preceq z$ ve $-t \preceq -u$ olup, $z-t \preceq z-u$ olduğu söylenir. Ayrıca normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.4) kullanılırsa,

$$\|z-t\| \leq \|z-u\|$$

yazılabilir. Buna göre, (3.5.7)'den,

$$\|z-u\| \geq \|z-t\| \geq \gamma$$

ve

$$\|z\| = 1$$

olacak şekilde $z \in Z$ elemanının mevcut olduğu söylenir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.5.3. *X sağlam zeminli normlu bir quasilineer uzay olsun. X'in $S(\theta,1)$ kapalı birim yuvarı kompakt ise X sonlu boyutludur.*

İspat. $S(\theta,1)$ kompakt ve $boyX = \infty$ olsun. Bu durumda X sağlam zeminli olduğundan, proper olup

$$r - boyX \ (= boyX_r) = s - boyX = \infty$$

olacaktır.

Diğer taraftan X proper olduğundan Teorem 3.3.2 gereğince $S(\theta,1)$ proper olup, $S(\theta,1)$'den seçilen ve normu 1 olan birbirinden farklı x_1 ve y_1 elemanları için,

♦ $y_1 \preceq x_1$ ise, $z_1 \preceq x_1$ ve $z_1 \npreceq y_1$ olacak şekilde en az bir $z_1 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur,

♦ $x_1 \preceq y_1$ ise, $m_1 \preceq y_1$ ve $m_1 \npreceq x_1$ olacak şekilde en az bir $m_1 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur,

♦ x_1 ve y_1 elemanları karşılaştırılamaz elemanlar ise, $z_1 \preceq x_1$, $z_1 \npreceq y_1$ olacak şekilde en az bir $z_1 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı veya $m_1 \preceq y_1$, $m_1 \npreceq x_1$ olacak şekilde en az bir $m_1 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur.

Bu durumda en az birinin varlığı kesin olan z_1 ve m_1 regüler elemanlarından herhangi biri seçilsin (burada genelliği bozmayacağından z_1 elemanı seçilecektir). Böylece bir tek regüler elemandan oluşan $\{z_1\}$ cümlesi X_r'nin boyutu 1 olan X_1 alt uzayını gerer. X_r regüler alt uzayının normlu lineer uzay olduğu hatırlanırsa, Teorem 2.1.11'den dolayı X_1 kapalı ve $boyX_r = \infty$ olduğundan X_1, X_r'nin bir özalt cümlesidir.

Lemma 3.5.2 gereğince,

$$\|x_2\| = 1 \text{ ve } \|x_2 - z_1\| \geq \gamma = \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in X_r$ elemanı vardır. $X_r \subseteq X$ olduğundan $x_2 \in X$ olur. Ayrıca $\|x_2\| = 1$ ve $x_2 \in X$ olduğundan $x_2 \in S(\theta,1)$ dir.

$S(\theta,1)$ proper olduğundan $S(\theta,1)$'in $x_2 \neq x_1$ olacak şekildeki x_1 ve x_2 elemanları için,

♦ $x_1 \preceq x_2$ ise, $z_2 \preceq x_2$ ve $z_2 \npreceq x_1$ olacak şekilde en az bir $z_2 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur,

♦ $x_2 \preceq x_1$ ise, $m_2 \preceq x_1$ ve $m_2 \npreceq x_2$ olacak şekilde en az bir $m_2 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur,

♦ x_1 ve x_2 elemanlarının karşılaştırılamaz olması durumu sözkonusu ise, $z_2 \preceq x_2$, $z_2 \npreceq x_1$ olacak şekilde en az bir $z_2 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı veya $m_2 \preceq x_1$, $m_2 \npreceq x_2$ olacak şekilde en az bir $m_2 \in (S(\theta,1))_r$ elemanı mevcuttur.

Böylece yukarıda olduğu gibi genelliği bozmayacağından z_2 regüler elemanı seçilerek oluşturulan $\{z_1, z_2\}$ cümlesi X_r'nin boyutu 2 olan X_2 alt uzayını gerer. X_r regüler alt uzayı normlu lineer uzay olduğundan Teorem 2.1.11 gereğince X_2 kapalı ve $boyX_r = \infty$ olduğundan X_2, X_r'nin bir özalt cümlesidir.

Yine Lemma 3.5.2 gereğince, her $x \in X_2$ için,

$$\|x_3\| = 1 \text{ ve } \|x_3 - x\| \geq \gamma = \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $x_3 \in X_r$ elemanı vardır. Özel olarak,

$$\|x_3 - z_1\| \geq \frac{1}{2}$$

ve

$$\|x_3 - z_2\| \geq \frac{1}{2}$$

dir. Bu şekilde devam edilir ve $m \geq 3$ için $k = 1, 2, ..., m-1$ olmak üzere, $x_m = z_m$ seçilirse

$$\|z_m - z_k\| \geq \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $S(\theta,1)$'de bir (z_k) dizisi elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi (z_k) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu ise $S(\theta,1)$'in kompaktlığı ile çelişir. O halde $boyX = \infty$ $(= r\text{-}boyX = boyX_r = s\text{-}boyX)$ kabulü yanlış olup $boyX < \infty$ elde edilir. □

Aşağıdaki ispat Teorem 3.5.3 için alternatif bir ispat olarak düşünülebilir:

İspat. X'in kapalı birim yuvarı $(S(\theta,1))_X$ ile, X_r'nin kapalı birim yuvarı ise $(S(\theta,1))_{X_r}$ ile gösterilsin. Bu durumda açık olarak $(S(\theta,1))_{X_r} \subseteq (S(\theta,1))_X$ dir.

X'in kapalı birim yuvarı olan $(S(\theta,1))_X$ kompakt olsun.

Teorem 2.1.1 gereğince $(S(\theta,1))_{X_r}$, X_r'de kapalıdır.

$(S(\theta,1))_{X_r}$'den alınan bir (x_n) dizisinin $x \in (S(\theta,1))_X$ noktasına yakınsak olduğu kabul edilirse cebirsel işlemlerin sürekliliğinden $-x_n \to -x$ ve $x_n - x_n \to x - x$ olur. Her bir n indisi için $x_n \in X_r$ olduğundan $x_n - x_n = \theta$ olup, buradan $x - x = \theta$ olduğu söylenir. Böylece $x \in X_r$ dir.

$(S(\theta,1))_{X_r}$, X_r'de kapalı olduğundan $x \in (S(\theta,1))_{X_r}$ elde edilir.

Böylece $(S(\theta,1))_{X_r}$, $(S(\theta,1))_X$'de kapalıdır.

Teorem 2.1.5, $(S(\theta,1))_{X_r} \subseteq (S(\theta,1))_X$ kapsaması ve $(S(\theta,1))_{X_r}$'nin $(S(\theta,1))_X$'de kapalı olduğu göz önüne alınırsa, $(S(\theta,1))_X$ kompakt olduğunda $(S(\theta,1))_{X_r}$'nin de kompakt olacağı sonucuna ulaşılır. X_r lineer uzayının kapalı birim yuvarı olan $(S(\theta,1))_{X_r}$ kompakt olduğundan, Teorem 2.1.14 gereğince X_r sonlu boyutludur. Böylece X sağlam zeminli bir quasilineer uzay olmak üzere,

$$boyX = r\text{-}boyX = s\text{-}boyX$$

ve

$$r\text{-}boyX = boyX_r$$

olduğundan X'in sonlu boyutlu olduğu sonucuna ulaşılır. □

BÖLÜM 4

NORMLU QUASİLİNEER UZAYLARIN TOPOLOJİSİNE İLİŞKİN BAZI SONUÇLAR

Bir quasilineer uzay üzerinde bir topoloji kurmanın genel yöntemlerinden biri ve bu yöntem için bazı hazırlıkların verildiği tezin bu bölümünde, öncelikle, dengeli, yutan cümleler, bir cümle ailesinin toplamsallık özelliği, süzgeç ve süzgeç tabanı gibi kavramlar topolojik yapıdan bağımsız olarak ve detaylarına girilmeden tanımlanmıştır. Ardından bu kavramlar yardımıyla bir quasilineer uzay üzerindeki topolojik yapı oluşturulmuştur. Ayrıca normlu lineer uzaylar için sağlanan lokalizasyon prensibinin normlu quasilineer uzaylar için sağlanmadığı gösterilmiştir. Sonrasında normlu quasilineer uzaylar için lokalizasyon prensibinin sınırları çizilmeye çalışılmıştır.

4.1 Quasilineer Uzaylarda Bir Elemanın Doldurulması

Tanım 4.1.1. $(X, \preceq)$ *bir quasilineer uzay ve* $x \in X$ *olmak üzere,*

$$\{y \in X : y \preceq x\}$$

cümlesine x *elemanının doldurulması denir ve* $\overleftarrow{x}$ *ile gösterilir.*

Buna göre bir $(X, \preceq)$ *quasilineer uzayındaki bir elemanın doldurulması "*$\preceq$*" bağıntısına göre, o elemandan önce gelen tüm elemanların cümlesidir.*

$A \subset X$ *olmak üzere,*

$$\overleftarrow{A} = \bigcup_{x \in A} \overleftarrow{x}$$

cümlesine ise A *cümlesinin doldurulması denir ve* $\overleftarrow{A}$ *ile gösterilir.*

Tanımdan da anlaşılacağı gibi $\overleftarrow{x} \subset X$ ve $\overleftarrow{A} \subset X$ dir. Ayrıca bir elemanın dolduruluşu, o elemanın zeminini de ihtiva etmektedir. Yani $F_x \subseteq \overleftarrow{x}$ dır.

Sonuç 4.1.1. $(X, \preceq)$ *bir quasilineer uzay ve* $x \in X_r$ *olsun. Bu durumda*

$$\overleftarrow{x} = \{x\}$$

dir.

İspat. $x \in X_r$ olduğundan x minimal elemandır. Böylece, $y \preceq x$ olması için gerek ve yeter şart $y = x$ olup $\overleftarrow{x} = \{x\}$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.2. $(X, \preceq)$ *bir quasilineer uzay ve* $A \subset X_r$ *olsun. Bu durumda* $\overleftarrow{A} = A$ *dır.*

$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $a, b \in X$ ve $C \subset X$ olsun. Bu durumda Tanım 4.1.1'den hareketle,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{a} + \overleftarrow{b} &= \left\{u + v : u \in \overleftarrow{a},\ v \in \overleftarrow{b}\right\} \\ &= \{u + v : u \preceq a,\ v \preceq b\}, \end{aligned}$$

$$\overleftarrow{a + b} = \{z : z \preceq a + b\}$$

ve

$$\overleftarrow{a + C} = \{z : z \preceq a + c,\ c \in C\}$$

şeklinde olacaktır.

Uyarı 4.1.1. X *bir lineer uzay ve* $x \in X$ *olmak üzere* $\overleftarrow{x} = \{x\}$ *olduğundan, bir elemanın doldurulması kavramı lineer olmayan quasilineer uzaylarda daha anlamlıdır.*

4.2 Normlu Quasilineer Uzaylarda Bir Elemanın Çapı

Tanım 4.2.1. $(X, \preceq)$ *bir normlu quasilineer uzay ve* $x \in X$ *olsun.* h_X*,* X *üzerindeki normdan türeyen Hausdorff metrik olmak üzere,* $h_X(x - x, \theta)$ *sayısına* x *elemanının çapı denir ve* $diam(x)$ *ile gösterilir.*

Ayrıca bir $U \subset X$ için, bilindiği üzere,

$$\delta(U) = \sup_{x,y \in U} h_X(x, y)$$

değerine U cümlesinin çapı denir. Burada tanımı verilen bir elemanın çapı, o elemanın oluşturduğu tek nokta cümlesinin çapı demek değildir.

Sonuç 4.2.1. X *normlu bir quasilineer uzay ve* $x \in X_r$ *olsun. Bu durumda her regüler* x *elemanı için* $x - x = \theta$ *olacağından* $diam(x) = 0$ *olur.*

Uyarı 4.2.1. *X normlu lineer bir uzay ve $x \in X$ olmak üzere, $diam(x) = 0$ olur. Böylece bir elemanın çapı kavramı lineer olmayan quasilineer uzaylarda daha anlamlıdır. Örneğin; $\Omega_C(\mathbb{R})$'de $[-1, 3]$ elemanı için,*

$$\begin{aligned} diam([-1,3]) &= h([-1,3] - [-1,3], \{0\}) \\ &= h([-4,4], \{0\}) \\ &= \|[-4,4]\| \\ &= \sup_{a \in [-4,4]} |a| \\ &= 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin tek elemanlı $U = \{[-1,3]\}$ alt cümlesi için $\delta(U) = 0$ dır.

4.3 Quasilineer Uzaylarda Dengeli ve Yutan Cümleler

Tanım 4.3.1. *$(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $U \subset X$ olmak üzere, $|t| \leq 1$ olan her $t \in \mathbb{R}$ için $t \cdot U \subseteq U$ kapsaması sağlanıyor ise U'ya dengeli cümle adı verilir, [23].*

Örnek 4.3.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'de $S(\{0\}, 1)$ birim yuvarı verilsin. $|t| \leq 1$ olmak üzere, herhangi bir $y \in t \cdot S(\{0\}, 1)$ için $y = t \cdot z$ olacak şekilde bir $z \in S(\{0\}, 1)$ vardır. Ayrıca $z \in S(\{0\}, 1)$ olduğunda $h(z, \{0\}) \leq 1$ dir. Bu ise $z \subseteq [-1, 1]$ olmasını gerektirir. $|t| \leq 1$ olduğundan*

$$y = t \cdot z \subseteq t \cdot [-1,1] = [-t,t] \subseteq [-1,1]$$

olup $y \in S(\{0\}, 1)$ elde edilir. Böylece $S(\{0\}, 1)$ yuvarı dengeli bir cümledir.

Benzer olarak, $r > 0$ olmak üzere $\Omega_C(\mathbb{R})$'de $\{0\}$ merkezli r yarıçaplı yuvarların dengeli olacağı görülebilir.

Örnek 4.3.2.

$$A = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \ x \subseteq [-2,3]\}$$

olmak üzere $t = -1$ ve $x = [-2,3] \in A$ için $t \cdot x = [-3,2] \notin A$ dır. Dolayısıyla $\Omega_C(\mathbb{R})$'de, A cümlesi dengeli cümle değildir.

Örnek 4.3.3. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'de $S\left(\{2\}, \frac{1}{2}\right)$, $S(\{2\}, 3)$ ve $S([-2,3], 4)$ yuvarları dengeli değildir.*

Örnek 4.3.4. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'de $S\left([-1,1], \frac{1}{4}\right)$ yuvarı verilsin. $t = 1/2$ ve $x = [-1,1] \in S\left([-1,1], \frac{1}{4}\right)$ olmak üzere,*

$$h\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [-1,1]\right) = \max\left\{-\frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}-1\right\} = \frac{1}{2} \nleq \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$t \cdot x = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \notin S\left([-1,1], \frac{1}{4}\right)$$

dir. Böylece $S\left([-1,1], \frac{1}{4}\right)$ yuvarı dengeli değildir.

Aynı merkezli yuvar, bu kez $r = 0.99$ yarıçapı ile düşünüldüğünde, $t = 0$ ve her $x \in S([-1,1], 0.99)$ elemanı için, $t \cdot x = [0,0] \notin S([-1,1], 0.99)$ olup bu durum $S([-1,1], 0.99)$ yuvarının dengeli olmadığı anlamına gelir.

Aynı merkezli yuvar, şimdi de $r = 1$ yarıçapı ile düşünüldüğünde $S([-1,1], 1)$ yuvarının dengeli bir cümle haline geldiği aşağıda gösterilmiştir.

Herhangi bir $[a,b] \in S([-1,1], 1)$ elemanı verilsin. Bu durumda

$$h([a,b], [-1,1]) = \max\{|a+1|, |b-1|\} \leq 1$$

olup, buradan

$$|a+1| \leq 1 \text{ ve } |b-1| \leq 1,$$

yani

$$-2 \leq a \leq 0 \text{ ve } 0 \leq b \leq 2$$

elde edilir.

i) $-1 \leq t \leq 0$ olan t elemanları için, $t \cdot [a,b] = [tb, ta]$ olup

$$-1 \leq t \leq 0 \text{ ve } 0 \leq b \leq 2$$

olduğundan

$$-2 \leq tb \leq 0 \text{ ve } -1 \leq tb+1 \leq 1$$

dir. Ayrıca

$$-1 \leq t \leq 0 \text{ ve } -2 \leq a \leq 0$$

olduğundan

$$0 \leq ta \leq 2 \; ve -1 \leq ta - 1 \leq 1$$

elde edilir. Bu ise sırasıyla, $|tb+1| \leq 1$ *ve* $|ta-1| \leq 1$ *olacağı anlamına gelir. Böylece*

$$\max\{|tb+1|, |ta-1|\} \leq 1$$

dir. Dolayısıyla

$$h([tb, ta], [-1, 1]) = \max\{|tb+1|, |ta-1|\} \leq 1$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$t \cdot [a, b] = [tb, ta] \in S([-1, 1], 1)$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $0 \leq t \leq 1$ *olan* t *elemanları için ise,* $t \cdot [a, b] = [ta, tb]$ *olup*

$$0 \leq t \leq 1 \; ve \; 0 \leq b \leq 2$$

olduğundan

$$0 \leq tb \leq 2 \; ve \; -1 \leq tb - 1 \leq 1$$

dir. Ayrıca

$$0 \leq t \leq 1 \; ve \; -2 \leq a \leq 0$$

olduğundan

$$-2 \leq ta \leq 0 \; ve \; -1 \leq ta + 1 \leq 1$$

elde edilir. Bu ise sırasıyla, $|tb-1| \leq 1$ *ve* $|ta+1| \leq 1$ *olacağı anlamına gelir. Buradan*

$$\max\{|ta+1|, |tb-1|\} \leq 1$$

elde edilir. Böylece

$$h([ta, tb], [-1, 1]) = \max\{|ta+1|, |tb-1|\} \leq 1$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$t \cdot [a, b] = [ta, tb] \in S([-1, 1], 1)$$

olur.

Sonuç olarak $|t| \leq 1$ *olan her* t *için,* $t \cdot S([-1,1],1) \subseteq S([-1,1],1)$ *kapsaması sağlandığından,* $S([-1,1],1)$ *yuvarı dengelidir.*

Benzer düşünce ile $[-1,1]$ *simetrik eleman merkezli ve* $r \geq 1$ *yarıçaplı her yuvarın dengeli olacağı da gösterilebilir.*

Örnek 4.3.4, simetrik eleman merkezli bir yuvarın dengeli olup olmayacağının yuvarın yarıçapına göre değişebildiğini göstermektedir. Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.1. $\Omega_C(\mathbb{R})$*'de* $S([-a,a],r)$ *yuvarı verilsin. Bu durumda* $S([-a,a],r)$ *yuvarı* $r \geq \frac{diam([-a,a])}{2} = a$ *için dengeli olmasına rağmen,* $r < \frac{diam([-a,a])}{2} = a$ *için dengeli değildir.*

İspat. $r \geq a$ ise, herhangi bir $[x,y] \in S([-a,a],r)$ elemanı için

$$h([x,y],[-a,a]) = \max\{|x+a|,|y-a|\} \leq r$$

olup, buradan

$$|x+a| \leq r \text{ ve } |y-a| \leq r$$

yani

$$-r-a \leq x \leq r-a \text{ ve } -r+a \leq y \leq r+a$$

olacağı söylenir.

i) $-1 \leq t \leq 0$ olan t elemanları için, $t \cdot [x,y] = [ty,tx]$ olup

$$-r+a \leq y \leq r+a \text{ ve } -1 \leq t \leq 0$$

olduğundan

$$-r-a \leq ty \leq r-a \text{ ve } -r \leq ty+a \leq r$$

elde edilir. Ayrıca

$$-r-a \leq x \leq r-a \text{ ve } -1 \leq t \leq 0$$

olduğundan

$$-r+a \leq tx \leq r+a \text{ ve } -r \leq tx-a \leq r$$

elde edilir. Bu ise sırasıyla, $|ty + a| \leq r$ ve $|tx - a| \leq r$ olacağı anlamına gelir. Buradan

$$\max \{|ty + a|, |tx - a|\} \leq r$$

olduğu söylenir. Böylece

$$h([ty, tx], [-a, a]) = \max \{|ty + a|, |tx - a|\} \leq r$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$t \cdot [x, y] = [ty, tx] \in S([-a, a], r)$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $0 \leq t \leq 1$ olan t elemanları için ise, $t \cdot [x, y] = [tx, ty]$ olup

$$-r + a \leq y \leq r + a \text{ ve } 0 \leq t \leq 1$$

olduğundan

$$-r + a \leq ty \leq r + a \text{ ve } -r \leq ty - a \leq r$$

elde edilir. Ayrıca

$$-r - a \leq x \leq r - a \text{ ve } 0 \leq t \leq 1$$

olduğundan

$$-r - a \leq tx \leq r - a \text{ ve } -r \leq tx + a \leq r$$

elde edilir. Bu ise sırasıyla, $|ty - a| \leq r$ ve $|tx + a| \leq r$ olacağı anlamına gelir. Buradan

$$\max \{|tx + a|, |ty - a|\} \leq r$$

yazılır. Böylece

$$h([tx, ty], [-a, a]) = \max \{|tx + a|, |ty - a|\} \leq r$$

olduğu dikkate alınırsa

$$t \cdot [x, y] = [tx, ty] \in S([-a, a], r)$$

olur.

Sonuç olarak $r \geq a$ olması durumunda, $|t| \leq 1$ olan her t için, $t \cdot S\left([-a,a],r\right) \subseteq S\left([-a,a],r\right)$ kapsaması gerçeklenmektedir. Dolayısıyla $r \geq a$ için $S\left([-a,a],r\right)$ yuvarı dengelidir.

$r < a$ olması durumunda ise, herhangi bir $[x,y] \in S\left([-a,a],r\right)$ elemanı ve $t = 0$ için, $t \cdot [x,y] = [0,0]$ ve $h\left([0,0],[-a,a]\right) = a > r$ olduğundan $[0,0] \notin S\left([-a,a],r\right)$ olup, bu; $S\left([-a,a],r\right)$ yuvarının dengeli olmadığı anlamına gelir.

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 4.3.2. *$(X,\preceq)$ bir quasilineer uzay ve $U \subset X$ olmak üzere, her $x \in X$ elemanına karşılık $|t| \leq \varepsilon$ olan her t için $t \cdot x \in U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ var ise U'ya yutan cümle adı verilir, [23].*

Örnek 4.3.5. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'de dengeli bir cümle olan $S(\{0\},1)$ birim yuvarı aynı zamanda yutan bir cümledir:*

$x \in S(\{0\},1)$ ise, $\varepsilon = 1$ olmak üzere, $|t| \leq \varepsilon = 1$ şartını sağlayan her t için $t \cdot x \in S(\{0\},1)$ dir.

$x \notin S(\{0\},1)$ fakat $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ ise bu durumda

$$h(t \cdot x,\{0\}) = \|t \cdot x\| = |t|\,\|x\|$$

olduğundan $\varepsilon = 1/\|x\|$ olmak üzere, $|t| \leq \varepsilon = 1/\|x\|$ şartını sağlayan her t için $h(t \cdot x,\{0\}) \leq 1$ elde edilir. Buradan $t \cdot x \in S(\{0\},1)$ olduğu söylenir. Böylece $S(\{0\},1)$ yutan bir cümledir.

Benzer olarak, $r > 0$ olmak üzere $\Omega_C(\mathbb{R})$'de $\{0\}$ merkezli r yarıçaplı yuvarların yutan cümleler olduğu görülebilir.

Örnek 4.3.6.

$$U = S\left(\{0\},\frac{1}{4}\right) \cup \{[-2,2],[-3,3]\}$$

şeklinde tanımlı U cümlesi dengeli olmayan bir yutan cümle örneğidir.

$t = 1/4$ ve $x = [-2,2] \in U$ olmak üzere,

$$t \cdot x = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \notin U$$

olduğundan bu cümle dengeli değildir.

Ayrıca herhangi bir $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ elemanına karşılık $\varepsilon = \frac{1}{5\|x\|}$ olmak üzere, $|t| \leq \varepsilon$ şartını sağlayan her t için

$$h(t \cdot x, \{0\}) = \|t \cdot x\| = |t|\,\|x\| \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

olup, bu; $t \cdot x \in S(\{0\}, \frac{1}{4})$ olacağı anlamına gelir. $S(\{0\}, \frac{1}{4}) \subset U$ olduğundan $t \cdot x \in U$ olur. Böylece U cümlesi yutan bir cümledir.

Tanım 4.3.3. *X bir quasilineer uzay ve $\mathcal{F}$, X'in alt cümlelerinin bir ailesi olmak üzere, her $U \in \mathcal{F}$ için $V + V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{F}$ var ise $\mathcal{F}$ ailesine toplamsaldır denir, [23].*

Tanım 4.3.4. *$\mathcal{S}$, herhangi bir X cümlesinin alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{S}$ ailesi,*

S1) $\emptyset \notin \mathcal{S}$,

S2) $A, B \in \mathcal{S}$ *ise* $A \cap B \in \mathcal{S}$,

S3) $A \in \mathcal{S}$ *için* $A \subset B$ *ise* $B \in \mathcal{S}$

koşullarını gerçekliyor ise $\mathcal{S}$ ailesine X üzerinde bir süzgeç denir, [28].

Tanım 4.3.5. *$\mathcal{S}$, X cümlesi üzerinde bir süzgeç ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ bir alt ailesi olsun. Eğer herhangi $A \in \mathcal{S}$ için $B \subset A$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ varsa, $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{S}$ süzgecinin bir tabanı denir, [28].*

Teorem 4.3.1. *X bir quasilineer uzay ve $\mathcal{B}$, X'in dengeli ve yutan alt cümlelerinin toplamsal bir süzgeç tabanı olsun. Bu durumda, X için tek türlü belirlenen bir topoloji üretilebilir. Üstelik $\mathcal{B}$ ailesi (bu topolojiye göre) θ'ın komşuluklarının bir lokal bazıdır.*

İspat. X'in alt cümlelerinin bir ailesi

$$\tau = \{G \subset X : \forall x \in G \text{ için } \exists U \subset \mathcal{B} \text{ vardır } \ni x + U \subset G\}$$

olmak üzere, herhangi $G_1, G_2 \in \tau$ cümlelerine karşılık, her $x \in G_1 \cap G_2$ için $x \in G_1$ olduğundan $x + U_1 \subset G_1$ ve $x \in G_2$ olduğundan $x + U_2 \subset G_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$

cümleleri vardır. $U \in \mathcal{B}$ cümlesi $U \subset U_1 \cap U_2$ olacak şekilde alınırsa, bu durumda $x + U \subset G_1 \cap G_2$ olacağından $G_1 \cap G_2 \in \tau$ olur.

I herhangi bir indis cümlesi ve her $i \in I$ için $G_i \in \tau$ olsun. $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$ olmak üzere herhangi bir $x \in G$ elemanına karşılık bazı $i \in J \subseteq I$ indisleri için $x \in G_i$ dir. Bu durumda her $i \in J$ için $x + U_i \subset G_i$ olacak şekilde $U_i \in \mathcal{B}$ cümleleri vardır. $U = \bigcup\limits_{i \in J} U_i$ olarak tanımlanırsa

$$x + U \subset G$$

olur. Böylece her $i \in I$ için $G_i \in \tau$ iken $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i \in \tau$ olur.

Ayrıca $\emptyset \in \tau$ olduğu açıktır.

Son olarak her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{B}$ için $x + U \subset X$ olduğundan $X \in \tau$ olur.

Böylece τ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Geriye, X'in dengeli ve yutan alt cümlelerinin toplamsal bir süzgeç tabanı olan $\mathcal{B}$'nin, θ'ın komşuluklarının bir lokal bazı olduğunu göstermek kalır. Bunun için, öncelikle θ'ın her komşuluğu tarafından ihtiva edilen $\mathcal{B}$'nin bir U elemanının mevcut olduğu gösterilecektir.

H, θ'ın bir komşuluğu olsun. Komşuluk tanımından, θ'ın her komşuluğu, θ'ı barındıran bir G açık cümlesini içerir. Buna göre $G \subset H$ olacak şekilde θ'ı ihtiva eden bir G açık cümlesi vardır. Böylece G, θ'ı ihtiva ettiğinden ve G açık olduğundan

$$\theta + U = U \subset G \text{ ve } U \subset G \subset H$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır.

Bunun yanısıra, $\mathcal{B}$'nin elemanlarının herbirinin θ'ın bir komşuluğu olduğunun da yani $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ olduğunun da gösterilmesi gerekir. Bunun için herhangi bir $U \in \mathcal{B}$ verilsin.

$$A = \{x : x + V \subset U \text{ ve } V \in \mathcal{B}\}$$

olmak üzere,

i) $\theta + U \subset U$ olup, A'nın tanımı gereği, $\theta \in A$ dır.

ii) Herhangi bir $x \in A$ elemanı verilsin. Bu durumda, $x + V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{B}$ vardır. Ayrıca V yutan bir cümle olduğundan $\theta \in V$ dir. Böylece

$$x = x + \theta \in x + V \subset U$$

olur. Buradan $A \subset U$ sonucuna ulaşılır.

iii) A'nın tanımı gereği herhangi bir $x \in A$ elemanı için

$$x + V \subset U \tag{4.3.1}$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır. Diğer taraftan $\mathcal{B}$ toplamsal ve $V \in \mathcal{B}$ olduğundan

$$W + W \subset V \tag{4.3.2}$$

olacak şekilde $W \in \mathcal{B}$ cümlesi seçilsin. Açık cümle tanımı gereğince

$$x + W \subset A \tag{4.3.3}$$

olduğu ispatlanırsa, A'nın açık olduğu gösterilmiş olur. Bunun için $x + W$'nın herhangi bir t elemanı verilsin. Bu durumda $t = x + w$ olacak şekilde bir $w \in W$ vardır. W yutan bir cümle olduğundan $\theta \in W$ olup

$$t = t + \theta = x + w + \theta \in x + w + W \subset x + W + W \subset x + V \subset U \tag{4.3.4}$$

yazılır. Sonuç olarak $t + W \subset U$ sağlanır. Böylece $t \in A$ ve dolayısıyla $x + W \subset A$ dır. O halde $A \in \tau$ olup A açıktır.

i), *ii*) ve *iii*) gereğince $\mathcal{B}$ ailesinin her elemanı θ'ın bir komşuluğudur.

Sonuç olarak X'in dengeli ve yutan alt cümlelerinin toplamsal bir süzgeç tabanı olan $\mathcal{B}$'nin, X için bir topoloji ürettiği ve $\mathcal{B}$ ailesinin (bu topolojiye göre) θ'ın komşuluklarının bir lokal bazı olduğu ispatlanmış olur. □

4.4 Normlu Quasilineer Uzaylarda Lokalizasyon Prensibi

Bundan sonraki kısımda $\mathcal{N}_x$ ile, $x \in X$'in tüm komşuluklarının cümlesi kastedilecektir.

Normlu lineer uzaylarda sağlanan oldukça önemli özelliklerden biri olan lokalizasyon prensibi aşağıdaki gibidir:

X normlu bir lineer uzay, $U \subset X$ ve $x \in X$ olmak üzere, U'nun θ'ın bir komşuluğu olması için gerek ve yeter şart $x + U$'nun x'in bir komşuluğu olmasıdır.

Bu kısımda normlu quasilineer uzayların, normlu lineer uzayların sağladığı lokalizasyon prensibini sağlamayabileceği gösterilmiştir. Daha sonra normlu quasilineer uzaylar için lokalizasyon prensibinin sınırları çizilmeye çalışılmıştır.

Aşağıdaki teorem normlu lineer uzaylarındaki lokalizasyon prensibinin, normlu quasilineer uzaylarda sağlanan yarısıdır:

Teorem 4.4.1. *X normlu bir quasilineer uzay, $x \in X$ ve $\theta \in U \subset X$ olmak üzere $x + U \in \mathcal{N}_x$ ise $U \in \mathcal{N}_\theta$ dır.*

Teoremin ispatı normlu lineer uzaylar için verilenin aynısı olduğundan tekrar verilmeyecektir.

Bu teoremin karşıtı normlu lineer uzaylarda doğru olmasına rağmen lineer olmayan normlu quasilineer uzaylarda doğru olmayabilir. Yani X normlu quasilineer uzay ve $U \in \mathcal{N}_\theta$ olsun. Bu durumda $x + U$, x'in komşuluğu olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu yansıtmaktadır.

Örnek 4.4.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ normlu quasilineer uzayında $S(\{0\}, 1)$ kapalı birim yuvarı verilsin. $S(\{0\}, 1)$, $\{0\}$'ın bir komşuluğudur; ancak $[2, 3] + S(\{0\}, 1)$ cümlesi $[2, 3]$ elemanının bir komşuluğu değildir.*

Aksi kabul edilerek bu durum ispatlanabilir.

$[2, 3] + S(\{0\}, 1)$ cümlesi, $[2, 3]$ elemanının bir komşuluğu olsun. Bu durumda $[2, 3] + S(\{0\}, 1)$ cümlesi $[2, 3]$ merkezli r yarıçaplı bir $B([2, 3], r)$ açık yuvarını içerir. Buna göre

$$B([2,3], r) \subset [2,3] + (S\{0\}, 1)$$

yazılır.

Öncelikle $[2, 3]$ elemanının çapı

$$\begin{aligned} diam([2,3]) &= h([2,3] - [2,3], \{0\}) \\ &= h([-1,1], \{0\}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup, burada $[2, 3] + S(\{0\}, 1)$ cümlesinin, çapı $[2, 3]$'ün çapından küçük elemanlar içermediğinin belirtilmesi gerekir. Bunun için herhangi bir $[a, b] \in S(\{0\}, 1)$ elemanı *verilsin. Bu durumda*

$$h\left([a,b],\{0\}\right)=\max\{|a|,|b|\}\leq 1$$

olur. Buradan

$$-1\leq a\leq 1 \ \ ve \ -1\leq b\leq 1$$

elde edilir. $S(\{0\},1)$*'in herhangi bir* $[a,b]$ *elemanı için* $[2,3]+S(\{0\},1)$ *cümlesinin elemanları* $[2+a,3+b]$ *şeklinde olup bu elemanların çapı*

$$\begin{aligned} diam\left([2+a,3+b]\right) &= h\left([2+a,3+b]-[2+a,3+b],\{0\}\right) \\ &= h\left([a-b-1,b-a+1],\{0\}\right) \\ &= \max\{|a-b-1|,|b-a+1|\} \end{aligned}$$

dir. $-1\leq a\leq 1$ *ve* $-1\leq b\leq 1$ *olduğundan*

$$-3\leq a-b-1\leq 1$$

ve

$$-1\leq b-a+1\leq 3$$

bağıntıları sağlanır. Ayrıca $[a,b]$ *bir aralık olduğundan* $a\leq b$ *olup*

$$a-b-1\leq -1$$

ve

$$1\leq b-a+1$$

olacağından

$$diam\left([2+a,3+b]\right)\geq 1$$

olacaktır.

Buna göre $[2,3]+S(\{0\},1)$ *cümlesi, çapı* $[2,3]$*'ün çapından küçük elemanlar içermez.* $\cdots$ $(*)$

Halbuki; $[2,3]$ *merkezli* $B([2,3],r)$ *yuvarı;* $r\geq\frac{diam([2,3])}{2}=\frac{1}{2}$ *ise bazı tek nokta cümlelerini,* $r<\frac{diam([2,3])}{2}=\frac{1}{2}$ *olduğunda ise* $0\leq r'<r$ *olmak üzere* $[2+r',3-r']$ *şeklindeki aralıkları ve bazı tek nokta cümlelerini mutlaka ihtiva eder. Gerçekten de,*

$$h([2+r',3-r'],[2,3])=r'<r$$

olup $[2+r', 3-r'] \in B([2,3], r)$ *dir.*

$0 \leq r' < r$ *olmak üzere* $[2+r', 3-r']$ *elemanlarının ve bir tek nokta cümlesinin çapının* $[2,3]$*'ün çapından küçük olduğuna dikkat edilirse,* $B([2,3], r)$ *açık yuvarı, çapı* $[2,3]$*'ün çapından küçük bir eleman mutlaka bulundurmaktadır.* $\cdots$ $(**)$

Buna göre $[2,3] + S(\{0\}, 1)$ *cümlesi,* $[2,3]$ *elemanının bir komşuluğu olsaydı, yani* $B([2,3], r)$ *gibi bir açık yuvarı içerseydi,* $(**)$*'dan* $[2,3]+S(\{0\}, 1)$ *cümlesi de, çapı* $[2,3]$*'ün çapından küçük elemanları ihtiva etmesi gerekirdi. Oysa* $(*)$ *gereğince,* $[2,3] + S(\{0\}, 1)$ *cümlesi böyle elemanlar (çapı* $[2,3]$*'ün çapından küçük elemanlar) içermez. Buna göre,* $[2,3] + S(\{0\}, 1)$ *cümlesi,* $[2,3]$ *elemanının bir komşuluğu değildir.*

Böylece normlu bir quasilineer uzay olan $\Omega_C(\mathbb{R})$'deki singüler elemanlar ile $\{0\}$'ın komşuluğu olan bir cümlenin ötelenmesi durumunda lokalizasyon prensibi sağlanmayabilir.

Buna göre X normlu bir quasilineer uzay ve U, θ'ın bir komşuluğu olmak üzere, $x+U$, x'in komşuluğu olmayabilir, fakat x elemanını içermektedir. Diğer taraftan, normlu quasilineer uzaylarda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.4.2. *X normlu bir quasilineer uzay ve $x \in X_r$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{N}_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $x + U \in \mathcal{N}_x$ olmasıdır.*

İspat. Herhangi bir $x \in X_r$ için $f_x : X \to X$ sürekli öteleme dönüşümü $f_x(v) = v+x$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm birebirdir ve $f_x^{-1} = f_{-x}$ ile gösterilen $f_{-x}(v) = v - x$ şeklindeki tersi mevcuttur. Ayrıca f_{-x} de sürekli bir dönüşümdür. Bu nedenle f_x bir homeomorfizmadır ve komşulukları korur. $\square$

$\Omega_C(\mathbb{R})$ normlu quasilineer uzayında $[2,3]+S(\{0\}, 1)$ cümlesinin, $[2,3]$ elemanının bir komşuluğu olmadığı yukarıdaki kısımda gösterilmişti. Diğer taraftan

$$\overleftarrow{[2,3] + S(\{0\}, 1)}$$

olmak üzere

$$\overleftarrow{[2,3] + S(\{0\}, 1)} = \bigcup_{z \in [2,3]+S(\{0\},1)} \overleftarrow{z}$$

cümlesi, $[2,3]$ merkezli 1 yarıçaplı $B([2,3],1)$ açık yuvarını içerir. Gerçekten de; herhangi $s=[s_1,s_2]\in B([2,3],1)$ elemanı alındığında

$$h([s_1,s_2],[2,3])=\max\{|s_1-2|,|s_2-3|\}<1$$

olup, buradan

$$|s_1-2|<1 \text{ ve } |s_2-3|<1,$$

yani

$$1<s_1<3 \text{ ve } 2<s_2<4$$

olacağı söylenir. Ayrıca $[-1,1]\in S(\{0\},1)$ olduğundan, $z=[2,3]+[-1,1]$ olarak alınırsa

$$z=[z_1,z_2]=[1,4]\in[2,3]+S(\{0\},1)$$

olur. Burada

$$1=z_1<s_1\leq s_2<z_2=4$$

olup $[s_1,s_2]\subset[z_1,z_2]$ dir. Buna göre $s=[s_1,s_2]\in\overleftarrow{[2,3]+S(\{0\},1)}$ ve $s\in B([2,3],1)$ keyfi seçildiğinden $B([2,3],1)\subset\overleftarrow{[2,3]+S(\{0\},1)}$ olur.

Sonuç olarak $\overleftarrow{[2,3]+S(\{0\},1)}$ cümlesi, $[2,3]$'ün bir komşuluğudur.

Bu örnek, quasilineer uzaylarda bir cümlenin dolduruluşu kavramının ortaya atılmasının gerekçesini izah etmektedir.

Normlu bir quasilineer uzayda lokalizasyon prensibi, bir cümlenin doldurulması kavramı ile şu şekilde sunulabilir.

Teorem 4.4.3. *$(X,\preceq)$ normlu bir quasilineer uzay, $x\in X$ ve $D(\theta,r_1)$, X'in θ merkezli, r_1 yarıçaplı açık veya kapalı yuvarı olsun. Bu durumda*

$$\overleftarrow{x+D(\theta,r_1)}\in\mathcal{N}_x$$

dir.

İspat. $\overleftarrow{x+D(\theta,r_1)}$ cümlesinin x elemanının bir komşuluğu olduğunu göstermek için, $B(x,r_1)$, x merkezli r_1 yarıçaplı açık yuvar olmak üzere,

$$B(x,r_1)\subset\overleftarrow{x+D(\theta,r_1)}$$

kapsamasının sağlandığını göstermek gerekir. Herhangi bir $z \in B(x, r_1)$ elemanı için,

$$\begin{aligned} h(z,x) &= \inf\{r \geq 0 : z \preceq x + a_1^r,\ x \preceq z + a_2^r \text{ ve } \|a_i^r\| \leq r,\ i = 1,2\} \\ &< r_1 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

yazılabilir. Gösterimde kısalık olması amacıyla

$$A = \{r \geq 0 : z \preceq x + a_1^r,\ x \preceq z + a_2^r \text{ ve } \|a_i^r\| \leq r,\ i = 1,2\}$$

denilirse, infimum tanımından, her $\varepsilon > 0$ için

$$r < \inf A + \varepsilon \tag{4.4.2}$$

olacak şekilde $r \in A$ bulunabilir. Bu durumda

$$0 < \varepsilon < r_1 - \inf A$$

olacak şekilde sabit bir ε sayısı için de (4.4.2) bağıntısı geçerlidir. Buna göre

$$r < \inf A + \varepsilon < \inf A + r_1 - \inf A = r_1$$

olacak şekilde $r \in A$ bulunabilir. $h(z,x) = \inf A$ olduğundan, infimum tanımı gereğince her $r \in A$ için, $\inf A \leq r$ dir. Böylece

$$h(z,x) \leq r < r_1$$

olacak şekilde bir r vardır. Buna göre $h(z,x) \leq r < r_1$ ve Hausdorff metriğin tanımından,

$$\|a_1^r\| \leq r < r_1$$

olmak üzere,

$$z \preceq x + a_1^r$$

olacak şekilde bir a_1^r vardır. Böylece $a_1^r \in D(\theta, r_1)$ olup $z \in \overleftarrow{x + D(\theta, r_1)}$ yazılır. $z \in B(x, r_1)$ elemanı keyfi seçildiğinden

$$B(x, r_1) \subset \overleftarrow{x + D(\theta, r_1)}$$

dir. Buradan

$$\overleftarrow{x + D(\theta, r_1)} \in \mathcal{N}_x$$

sonucu elde edilir. □

Aşağıdaki teorem quasilineer uzaylar için, Teorem 4.4.3'ün, bir cümlenin doldurulması kavramı kullanılarak sunulabilecek farklı bir formudur.

Teorem 4.4.4. *X bir quasilineer uzay ve $\mathcal{B}$, X'in dengeli ve yutan alt cümlelerinin toplamsal bir süzgeç tabanı olsun. Ayrıca $a \in X$ ve $U \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda,*

$$U \in \mathcal{B} \text{ ise } \overleftarrow{a+U} \in \mathcal{N}_a \tag{4.4.3}$$

dır.

İspat. Teorem 4.3.1'de

$$\tau = \{G \subset X : \forall x \in G \text{ için } \exists U \subset \mathcal{B} \text{ vardır } \ni x + U \subset G\}$$

cümlesinin, X quasilineer uzayı için bir topoloji olduğu ispat edilmişti.

$\mathcal{B}$'nin, $U \in \mathcal{B}$ cümlesi ve a elemanına karşılık G_a cümlesi

$$G_a = \{x \in X : x + V \subset a + U \text{ ve } V \in \mathcal{B}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

(i) $a + U \subset a + U$ olduğundan, $a \in G_a$ dır.

(ii) Herhangi bir $z \in G_a$ için $z + V \subset a + U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır.

$V \in \mathcal{B}$ olduğundan V yutan bir cümle olup, θ'ı içerir. Buna göre her $z \in G_a$ için,

$$z = z + \theta \in z + V \subset a + U$$

olduğundan $z \in a + U$ dur. Ayrıca $a + U \subseteq \overleftarrow{a+U}$ olduğundan, her $z \in G_a$ için $z \in \overleftarrow{a+U}$ olur. Böylece z, G_a'nın keyfi bir elemanı olarak seçildiğinden $G_a \subset \overleftarrow{a+U}$ elde edilir.

(iii) Son olarak G_a cümlesinin açık olduğu gösterilirse $\overleftarrow{a+U}$ cümlesinin a'nın bir komşuluğu olduğu ispatlanmış olacaktır. Bunun için herhangi bir $z \in G_a$ elemanı verilsin. G_a'nın tanımından

$$z + V \subset a + U \tag{4.4.4}$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır. Diğer taraftan $\mathcal{B}$ toplamsal ve $V \in \mathcal{B}$ olduğundan,

$$W + W \subset V$$

olacak şekilde $W \in \mathcal{B}$ cümlesi seçilsin.

τ topolojisine göre, açık cümle tanımı gereğince $z \in G_a$ keyfi seçilimi için $z+W \subset G_a$ olduğu ispatlanırsa, G_a'nın açık olduğu gösterilmiş olur. Bunun için $z+W$'nın herhangi bir t elemanı verilsin. Bu durumda $t = z + w$ olacak şekilde bir $w \in W$ vardır. Buradan

$$t + W \subset z + W + W \subseteq z + V \subset a + U$$

olup, sonuç olarak $t + W \subset a + U$ elde edilmiş olur. Bu ise $t \in G_a$ demektir.

$t \in z + W$ keyfi seçildiğinden $z + W \subset G_a$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece her $z \in G_a$ için $z + W \subset G_a$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{B}$ mevcut olup, bu durum G_a cümlesinin açık olduğu anlamına gelir.

Sonuç olarak $U \in \mathcal{B}$ iken, $\overleftarrow{a+U}$ cümlesinin a'nın bir komşuluğu olduğu ispatlanmış olur. $\square$

BÖLÜM 5

NORMLU QUASİLİNEER UZAYLARDA ALT VE ÜST YARI YAKINSAKLIK

Önceki kısımlarda, X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$h_X(x,y) = \inf\left\{r \geq 0 : x \preceq y + a_1^r,\ y \preceq x + a_2^r \text{ ve } \|a_i^r\|_X \leq r,\ a_i^r \in X,\ i = 1,2\right\}$$

fonksiyonunun Hausdorff metrik olarak adlandırılan X üzerinde bir metrik tanımladığı ve

$$h_X(x,y) \leq \|x - y\|_X$$

eşitsizliğinin sağlandığı ifade edilmişti. Klasik normlu uzaylar teorisinde olduğu gibi, normdan türeyen metrik (norm metriği) olarak bilinen $d(x,y) = \|x - y\|$ eşitliği sağlanmadığından, normlu bir quasilineer uzayda, yakınsama ve Cauchy dizisi olma gibi topolojik özellikleri, norma göre değil de normun türettiği Hausdorff metriğe göre incelemek daha doğru olacaktır.

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle, bu bölümde normlu quasilineer uzaylarda bir dizinin alt ve üst yarı yakınsaklığı kavramları tanıtılmış ve bu kavramlara ilişkin bir takım örnekler verilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu yeni tanımlar normlu quasilineer uzaylarda yakınsak olmayan diziler için yakınsama ile ilgili alternatif tanımlardır.

Normlu quasilineer uzaylarda, bir dizinin alt ve üst yarı yakınsaklığı kavramlarına duyulan ihtiyaç aşağıdaki önermeden sonra açıklanacaktır. Bu kavramları tanımlarken kullanılan temel fikir bu önermenin yorumlanmasına dayanmaktadır.

Önerme 5.0.1. $(X, \preceq)$ *bir normlu quasilineer uzay,* $x \in X$ *ve* h_X*,* X *üzerindeki normdan türeyen Hausdorff metrik olsun.* X*'deki bir* (x_n) *dizisinin* x *elemanına yakınsamasıyla ilgili aşağıdaki çift gerektirmelerin sağ tarafları denktir:*

- $x_n \to x \Leftrightarrow$ *"* $\forall \varepsilon > 0$ *için,* $n \geq N$ *olduğunda* $h_X(x_n, x) \leq \varepsilon$ *olacak şekilde en az bir* $N{=}N(\varepsilon){\in}\mathbb{N}$ *vardır."*

- $x_n \to x \Leftrightarrow$ *" $\forall\varepsilon > 0$ için, $n \geq N$ olduğunda $x_n \preceq x + a_{1,n}^{\varepsilon}$, $x \preceq x_n + a_{2,n}^{\varepsilon}$ ve $\left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \varepsilon$ $(i = 1, 2)$ olacak şekilde $\left(a_{i,n}^{\varepsilon}\right) \subset X$ dizileri ve bir N=$N(\varepsilon)$∈ℕ sayısı vardır."*

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda,

$$h_X(x_n, x) = \inf\left\{r \geq 0 : x_n \preceq x + a_{1,n}^{r},\ x \preceq x_n + a_{2,n}^{r} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{r}\right\| \leq r,\ i = 1, 2\right\} \leq \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir N doğal sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$x_n \preceq x + a_{1,n}^{r},\ x \preceq x_n + a_{2,n}^{r} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{r}\right\| \leq r,\ i = 1, 2$$

özelliklerini sağlayan tüm r değerlerinin infimumu ε değerinden küçük eşit olduğundan,

$$x_n \preceq x + a_{1,n}^{\varepsilon},\ x \preceq x_n + a_{2,n}^{\varepsilon} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2$$

sağlanır.

Diğer taraftan, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x_n \preceq x + a_{1,n}^{\varepsilon},\ x \preceq x_n + a_{2,n}^{\varepsilon} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2$$

olacak şekilde en az bir N=$N(\varepsilon)$ doğal sayısının mevcut olduğu kabul edilirse, infimum tanımı gereğince

$$\inf\left\{r \geq 0 : x_n \preceq x + a_{1,n}^{r},\ x \preceq x_n + a_{2,n}^{r} \text{ ve } \left\|a_{i,n}^{r}\right\| \leq r,\ i = 1, 2\right\} \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $n \geq N$ olduğunda, $h_X(x_n, x) \leq \varepsilon$ olması demektir. □

Önerme 5.0.1, bir X quasilineer uzayında verilen bir (x_n) dizisi için, $x \in X$ olmak üzere, $\lim x_n = x$ olmasının, "Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $x_n \preceq x + a_{1,n}^{\varepsilon}$, $x \preceq x_n + a_{2,n}^{\varepsilon}$ ve $i = 1, 2$ için $\left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\left(a_{i,n}^{\varepsilon}\right) \subset X$ dizileri ve bir N=$N(\varepsilon)$∈ℕ sayısı vardır" anlamına geldiğini ifade etmektedir.

Dikkat edilirse, $i = 1, 2$ için $\left\|a_{i,n}^{\varepsilon}\right\| \leq \varepsilon$ olmak üzere, $x_n \preceq x + a_{1,n}^{\varepsilon}$ ve $x \preceq x_n + a_{2,n}^{\varepsilon}$ sıralamalarının her ikisi aynı anda sağlanmayabilir. Böyle bir durumun olmasından yola çıkılarak, bu bölümde dizilerin yakınsaklığı ile ilgili yeni bir tanım verilecektir. Bu yeni tanımlar normlu quasilineer uzaylarda dizilerin yakınsalığı kavramına bir alternatif oluşturmaktadır.

Tanım 5.0.1. *$(X, \preceq)$ normlu bir quasilineer uzay, (x_n), X'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda*

$$x \preceq x_n + a_n^\varepsilon, \ \ \|a_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(a_n^\varepsilon) \subset X$ dizisi ve N=$N(\varepsilon)$$\in$$\mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (x_n) dizisi x'e alt yarı yakınsaktır denir ve bu durum ls-lim $x_n = x$ ile gösterilir. x elemanına da (x_n)'nin alt yarı limiti denir.

Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x_n \preceq y + b_n^\varepsilon, \ \ \|b_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(b_n^\varepsilon) \subset X$ dizisi ve N=$N(\varepsilon)$$\in$$\mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (x_n) dizisi, y'ye üst yarı yakınsaktır denir ve bu durum us-lim $x_n = y$ ile gösterilir. y elemanına da (x_n)'nin üst yarı limiti denir.

Uyarı 5.0.1. *$(X, \preceq)$ normlu quasilineer uzayında bir (x_n) dizisinin alt yarı limiti ve üst yarı limiti (eğer mevcut ise) tek olmayabilir. Fakat bir dizinin bütün alt (üst) yarı limitleri birbirleriyle karşılaştırılabilirdir. Yani,*

$$ls\text{-}lim x_n = x_1 \text{ ve } ls\text{-}lim x_n = x_2 \text{ ise } x_1 \preceq x_2 \text{ veya } x_2 \preceq x_1 \text{ dir}$$

ve

$$us\text{-}lim\ x_n = y_1 \text{ ve } us\text{-}lim\ x_n = y_2 \text{ ise } y_1 \preceq y_2 \text{ veya } y_2 \preceq y_1 \text{ dir.}$$

Önerme 5.0.2. *$(X, \preceq)$ bir normlu quasilineer uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x, y \in X$ olmak üzere,*

i) ls-lim $x_n = x$ ve $y \preceq x$ ise bu durumda ls-lim $x_n = y$ dir,

ii) us-lim $x_n = x$ ve $x \preceq y$ ise bu durumda us-lim $x_n = y$ dir.

İspat. *i) ls-lim* $x_n = x$ ve $y \preceq x$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^\varepsilon \text{ ve } \|a_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(a_n^\varepsilon) \subset X$ dizisi ve $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. $y \preceq x$ olduğundan, $n \geq N$ iken,

$$y \preceq x_n + a_n^\varepsilon \text{ ve } \|a_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $ls\text{-}lim\ x_n = y$ demektir.

ii) $us\text{-}lim\ x_n = x$ ve $x \preceq y$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken,

$$x_n \preceq x + a_n^\varepsilon \text{ ve } \|a_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(a_n^\varepsilon) \subset X$ dizisi ve $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. $x \preceq y$ olduğundan, $n \geq N$ iken,

$$x_n \preceq y + a_n^\varepsilon \text{ ve } \|a_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olur. Böylece $us\text{-}lim\ x_n = y$ olur. □

Teorem 5.0.1. *$(X, \preceq)$ bir normlu quasilineer uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x, y \in X$ olmak üzere $ls\text{-}lim\ x_n = x$ ve $us\text{-}lim\ x_n = y$ ise $x \preceq y$ dir.*

İspat. $ls\text{-}lim\ x_n = x$ ve $us\text{-}lim\ x_n = y$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^\varepsilon, \;\; \|a_n^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve $n \geq N'$ olduğunda

$$x_n \preceq y + b_n^\varepsilon, \;\; \|b_n^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde sırasıyla (a_n^ε), $(b_n^\varepsilon) \subset X$ dizileri ve $N = N(\varepsilon)$, $N' = N'(\varepsilon)$ doğal sayıları mevcuttur. $N^* = \max\{N, N'\}$ olarak seçilir ve $a_n^\varepsilon \preceq a_n^\varepsilon$ ve $x_n \preceq y + b_n^\varepsilon$ olduğu göz önüne alınırsa, $n \geq N^*$ olduğunda

$$x_n + a_n^\varepsilon \preceq y + a_n^\varepsilon + b_n^\varepsilon$$

elde edilir. "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı geçişmeli olduğundan

$$x \preceq y + a_n^\varepsilon + b_n^\varepsilon$$

yazılır. Ayrıca

$$\|a_n^\varepsilon + b_n^\varepsilon\| \leq \|a_n^\varepsilon\| + \|b_n^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup, normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.5) gereğince $x \preceq y$ elde edilir.

Böylece herhangi bir (x_n) dizisi için $ls\text{-}lim\ x_n \preceq us\text{-}lim\ x_n$ dir. □

Uyarı 5.0.2. *Normlu bir quasilineer uzayda bir dizi üstten a elemanına alttan b elemanına yakınsayabilir. Yani bir dizi üst yarı yakınsak ve alt yarı yakınsak olabilir; ancak bu durum dizinin yakınsak olacağı anlamına gelmez.*

Önerme 5.0.3. *$(X, \preceq)$ normlu bir quasilineer uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisi x elemanına hem alt yarı yakınsak hem de üst yarı yakınsak ise (x_n) dizisi x'e yakınsaktır.*

İspat. (x_n) dizisi x elemanına hem alt yarı yakınsak hem de üst yarı yakınsak olsun.

ls-lim $x_n = x$ olduğundan, verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $n \geq N$ iken

$$x \preceq x_n + a_n^{\epsilon} \text{ ve } \|a_n^{\epsilon}\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(a_n^{\varepsilon}) \subset X$ dizisi ve $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Diğer taraftan *us-lim* $x_n = x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için, $n \geq N'$ iken

$$x_n \preceq x + b_n^{\epsilon} \text{ ve } \|b_n^{\epsilon}\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(b_n^{\epsilon}) \subset X$ dizisi ve $N' = N'(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcuttur. Bu durumda

$$N^* = \max\{N, N'\}$$

olarak seçilirse, her $\varepsilon > 0$ için, $n \geq N^*$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^{\varepsilon}, \quad \|a_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$$

ve

$$x_n \preceq x + b_n^{\varepsilon}, \quad \|b_n^{\epsilon}\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $(a_n^{\epsilon}), (b_n^{\epsilon}) \subset X$ dizileri vardır. Bu ise *lim* $x_n = x$ anlamına gelir.

Dolayısıyla, *ls-lim* $x_n = x$ ve *us-lim* $x_n = x$ ise *lim* $x_n = x$ dir. □

Örnek 5.0.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ normlu quasilineer uzayında, genel terimi $x_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ olmak üzere, (x_n) dizisi verilsin. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık,*

$$N = 1 \text{ ve } a_n^{\epsilon} = \{0\} \in \Omega_C(\mathbb{R})$$

olarak seçilirse, her $n \geq N$ için

$$[0,1] \subseteq \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] + a_n^{\varepsilon} \text{ ve } \|a_n^{\varepsilon}\| = \|\{0\}\| = 0 < \varepsilon$$

sağlanır. Böylece ls-lim $x_n = [0,1]$ olur.

Diğer taraftan, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N} \text{ ve } b_n^\epsilon = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \in \Omega_C(\mathbb{R})$$

olarak seçilirse, $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ olduğunda

$$\|b_n^\epsilon\| = \left\| \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \right\| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

ve

$$\left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \subseteq [0,1] + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

sağlanır. Böylece us-lim $x_n = [0,1]$ olur. Burada $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ ile $\frac{1}{\varepsilon}$ sayısının tam değeri kastedilmektedir.

Sonuç olarak (x_n) dizisi $\Omega_C(\mathbb{R})$'de $[0,1]$ elemanına hem alt yarı yakınsak hem de üst yarı yakınsak olduğundan, (x_n) dizisi $[0,1]$'e yakınsaktır.

Normlu bir quasilineer uzayda bir dizi alt yarı yakınsak olmadığı halde üst yarı yakınsak veya üst yarı yakınsak olmadığı halde alt yarı yakınsak olabilir. Aşağıdaki örnekler bu durumu yansıtmaktadır.

Örnek 5.0.2. *Örnek 5.0.1'deki (x_n) dizisi göz önüne alınırsa, $y = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olmak üzere, (x_n) dizisinin y'ye alt yarı yakınsak olduğu açıktır.*

Diğer taraftan us-lim $x_n = y = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olduğu kabul edilirse $\varepsilon = 1/100$ için, $n = N + 1000$ olmak üzere,

$$\left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = \left[-\frac{1}{N+1000}, 1 + \frac{1}{N+1000}\right] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right] + b_n^\varepsilon \text{ ve } \|b_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon = \frac{1}{100}$$

olacak şekilde $(b_n^\varepsilon) \subset \Omega_C(\mathbb{R})$ dizisi ve bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulunabilmelidir. Ayrıca $\|b_n^\varepsilon\| \leq \frac{1}{100}$ olduğunda $b_n^\varepsilon \subseteq \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$ olmak zorundadır. Fakat bu durumda

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{N+1000}, 1 + \frac{1}{N+1000}\right] &\subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right] \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

olur.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{100} \leq 1 + \frac{1}{N+1000}$$

olduğundan, (5.0.1) kapsamasının sağlanması mümkün değildir. Böylece us-lim $x_n = y = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *olduğu kabulü yanlıştır.*

Dolayısıyla (x_n) *dizisi* y *elemanına alt yarı yakınsaktır; fakat üst yarı yakınsak değildir.*

Örnek 5.0.3. *Örnek 5.0.1'deki* (x_n) *dizisi* $z = [0,2] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *elemanına alt yarı yakınsak olmamasına rağmen üst yarı yakınsaktır.*

Örnek 5.0.4. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında* $x_n = [-n, n]$ *şeklinde tanımlanan* (x_n) *dizisi* $x \subseteq [-1,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *olacak şekildeki tüm* x *elemanlarına alt yarı yakınsaktır. Fakat* (x_n) *dizisi* $\Omega_C(\mathbb{R})$*'de üst yarı yakınsak bir dizi değildir:*

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* $N = 1$ *ve* $a_n^\varepsilon = \{0\} \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *olarak seçilirse, her* $n \geq N$ *için*

$$x \subseteq [-1,1] \subseteq [-n,n] + a_n^\varepsilon \text{ ve } \|a_n^\varepsilon\| = \|\{0\}\| = 0 < \varepsilon$$

sağlanır. Böylece $x \subseteq [-1,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *olacak şekildeki tüm* x *elemanları için ls-lim* $x_n = x$ *olur.*

Diğer taraftan, $n \in \mathbb{N}$ *keyfi olduğundan, herhangi sabit bir* $\varepsilon > 0$ *için*

$$[-n,n] \subseteq y + b_n^\varepsilon \text{ ve } \|b_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *yoktur. Böylece* (x_n) *dizisi* $\Omega_C(\mathbb{R})$*'de herhangi bir elemana üst yarı yakınsak değildir.*

Örnek 5.0.5. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında*

$$x_n = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], & n \text{ tek ise} \\ \left[-1 - \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}\right], & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan (x_n) *dizisi* $[-2,2]$ *elemanına üst yarı yakınsaktır; fakat bu dizi* $\Omega_C(\mathbb{R})$*'de herhangi bir elemana alt yarı yakınsak değildir.*

Aşağıdaki kısımda, normlu quasilineer uzaylarda dizilerin yakınsaklığı ile ilgili Tanım 5.0.1'in bir sonucu olarak bazı özellikler verilmiştir.

Teorem 5.0.2. $(X, \preceq)$ *normlu bir quasilineer uzay,* (x_n) *ve* (y_n) X*'de iki dizi ve* $x, y \in X$ *olsun. Bu durumda,*

i) ls-lim $x_n = x$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \preceq y_n$ *ise ls-lim* $y_n = x$ *dir,*

ii) us-lim $x_n = y$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $y_n \preceq x_n$ *ise us-lim* $y_n = y$ *dir.*

İspat. *i) ls-lim* $x_n = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n$ olduğu kabul edilirse, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^{\varepsilon} \text{ ve } \|a_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(a_n^{\varepsilon}) \subset X$ dizisi ve $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. $x_n \preceq y_n$ olduğundan, $n \geq N$ için $x \preceq y_n + a_n^{\varepsilon}$ yazılır. Buradan, *ls-lim* $y_n = x$ elde edilir.

ii), i)'nin ispatına benzer düşünce ile yapılabileceğinden, ispatın bu kısmı verilmeyecektir. □

Teorem 5.0.3. $(X, \preceq)$ *normlu bir quasilineer uzay,* (x_n) *ve* (y_n) X*'de iki dizi ve* $x, y \in X$ *olsun. Bu durumda ls-lim* $x_n = x$*, us-lim* $y_n = y$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \preceq y_n$ *ise* $x \preceq y$ *olur.*

İspat. *ls-lim* $x_n = x$, *us-lim* $y_n = y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için, $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^{\varepsilon} \text{ ve } \|a_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon/2$$

ve $n \geq N'$ olduğunda

$$y_n \preceq y + b_n^{\varepsilon} \text{ ve } \|b_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $(a_n^{\epsilon}), (b_n^{\epsilon}) \subset X$ dizileri ve $N = N(\varepsilon)$ ve $N' = N'(\varepsilon)$ doğal sayıları mevcuttur.

$N^* = \max\{N, N'\}$ olarak alınır ve $x_n \preceq y_n$ olduğuna dikkat edilirse, $n \geq N^*$ olduğunda $x \preceq y + a_n^{\varepsilon} + b_n^{\varepsilon}$ yazılabilir. Ayrıca

$$\|a_n^{\varepsilon} + b_n^{\varepsilon}\| \leq \|a_n^{\varepsilon}\| + \|b_n^{\varepsilon}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan normlu quasilineer uzay aksiyomlarından (2.3.5) gereğince $x \preceq y$ elde edilir. □

Şimdi dizilerin yakınsaması ile ilgili Sıkıştıma Teoremi (Sandwich Teoremi) olarak bilinen meşhur teoremin bir benzeri normlu quasilineer uzaylardaki diziler için verilecektir.

Teorem 5.0.4. $(x_n), (y_n)$ *ve* (z_n), $(X, \preceq)$ *normlu quasilineer uzayında diziler ve* $x \in X$ *olsun. Bu durumda ls-lim* $x_n = x$, *us-lim* $z_n = x$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için,* $x_n \preceq y_n \preceq z_n$ *ise lim* $y_n = x$ *dir.*

İspat. $(x_n), (y_n)$ ve (z_n) dizileri teoremin hipotezinde ifade edildiği gibi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için, $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^{\varepsilon}, \ \ \|a_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$$

ve $n \geq N'$ olduğunda

$$z_n \preceq x + b_n^{\varepsilon}, \ \ \|b_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $(a_n^{\epsilon}), (b_n^{\epsilon}) \subset X$ dizileri ve $N = N(\varepsilon)$ ve $N' = N'(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır.

$N^* = \max\{N, N'\}$ olarak alınırsa, $x_n \preceq y_n$ ve $y_n \preceq z_n$ olduğundan, $n \geq N^*$ için $x \preceq y_n + a_n^{\varepsilon}$ ve $y_n \preceq x + b_n^{\varepsilon}$ yazılır. Ayrıca $\|a_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ ve $\|b_n^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ olup, buradan *lim* $y_n = x$ elde edilir. □

Teorem 5.0.5. $(X, \preceq)$ *normlu bir quasilineer uzay,* (x_n) *ve* (y_n) X*'de iki dizi ve* $x, y \in X$ *olsun. Bu durumda her* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için,*

i) ls-lim $x_n = x$ *ve ls-lim* $y_n = y$ *ise ls-lim* $(\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ *dir,*

ii) us-lim $x_n = x$ *ve us-lim* $y_n = y$ *ise us-lim* $(\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ *dir.*

İspat. *i) ls-lim* $x_n = x$ ve *ls-lim* $y_n = y$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda

$$x \preceq x_n + a_n^{\varepsilon}, \ \ \|a_n^{\varepsilon}\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

ve $n \geq N'$ olduğunda

$$y \preceq y_n + b_n^{\varepsilon}, \ \ \|b_n^{\varepsilon}\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

olacak şekilde (a_n^ϵ), $(b_n^\epsilon) \subset X$ dizileri ve $N = N(\varepsilon)$ ve $N' = N'(\varepsilon)$ doğal sayıları mevcuttur. (2.2.8), (2.2.12), (2.2.13), (2.3.2) ve (2.3.3) aksiyomları dikkate alınırsa, $N^* = \max\{N, N'\}$ olmak üzere, $n \geq N^*$ için

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \preceq \alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n + \alpha \cdot a_n^\varepsilon + \beta \cdot b_n^\varepsilon$$

ve

$$\|\alpha \cdot a_n^\varepsilon + \beta \cdot b_n^\varepsilon\| \leq |\alpha| \|a_n^\varepsilon\| + |\beta| \|b_n^\varepsilon\| < \varepsilon$$

olur. Buna göre *ls-lim* $(\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ dir.

Benzer düşünce ile *ii*) de ispatlanabilir. □

Aşağıdaki ifade Teorem 5.0.5'un bir sonucudur.

Sonuç 5.0.1. (x_n), $(X, \preceq)$ *normlu quasilineer uzayında bir dizi,* $x, y \in X$ *ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *olsun. Bu durumda,*

i) *ls-lim* $x_n = x$ *ise ls-lim* $(\alpha \cdot x_n + y) = \alpha \cdot x + y$ *olur,*

ii) *us-lim* $x_n = x$ *ise us-lim* $(\alpha \cdot x_n + y) = \alpha \cdot x + y$ *olur.*

KAYNAKLAR

[1] J-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis,* Birkhauser, Boston, 1990.

[2] V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces,* Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006.

[3] D. O'Regan, *Existence theory for nonlinear Volterra integro differential and integral equations*, **Nonlinear Anal.** 31 (1998) 317–341.

[4] I. K. Argyros, *Quadratic equations and applications to Chandrasekhars and related equations*, **Bull. Austral. Math. Soc.,** 32 (1985) 275–292.

[5] A. D. Freed, K. Diethelm,Y. Luchko, *Fractional-order viscoelasticity (FOV): Constitutive developments using the fractional calculus: First annual report*, Technical Memorandum, TM-2002-211914, NASA Glenn Research Center, Cleveland, 2002.

[6] P. J. Torvik, R. L. Bagley, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, **J. Appl. Mech.,** 51 (1984) 294-298.

[7] G. Alefeld, G. Mayer, *Interval Analysis: theory and applications*, **J. Comput. Appl. Math.,** 121, 2000, 421-464.

[8] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[9] S. M. Aseev, *Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings*, **Proc. Steklov Inst. Math.,** 2, 1986, 23-52.

[10] S. Markow, *On the algebraic properties of convex bodies and some applications*, **J. Convex Anal.,** 7(1), 2000, 129-166.

[11] S. Markow, *On quasilinear spaces of convex bodies and intervals*, **J. Comput. Appl. Math.,** 162(1), 2004, 93-112.

[12] Y. Yılmaz, S. Çakan, Ş. Aytekin, *Topological Quasilinear Spaces*, **Abstr. Appl. Anal.,** *(2012), Article ID 951374, 10 pages.*

[13] H. Bozkurt, S. Çakan, Y. Yılmaz, *Quasilinear Inner Product Spaces and Hilbert Quasilinear Spaces*, **International Journal of Analysis**, *(2014), Article ID 258389, 7 pages.*

[14] S. Çakan, *Quasilineer Uzaylarda Bazlar,* Doktora Semineri, Malatya, 2012.

[15] S. Çakan, Y. Yılmaz, *Normed Proper Quasilinear Spaces*, **J. Nonlinear Sci. Appl.,** 8 (2015), 816-836.

[16] S. Çakan, Y. Yılmaz, *On the Quasimodules and Normed Quasimodules*, **Nonlinear Funct. Anal. Appl.,** Vol. 20, No. 2 (2015), 269-288.

[17] S. Çakan, Y. Yılmaz, *Lower and Upper Semi Basis in Quasilinear Spaces*, **Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology,** 31(2), 2015, 97-104.

[18] S. Çakan, Y. Yılmaz, *Localization Principle in Normed Quasilinear Spaces*, **Information in Sciences and Computing,** (2015), Article ID ISC530515, 15 pages.

[19] S. Çakan, Y. Yılmaz, *Lower and Upper Semi Convergence in Normed Quasilinear Spaces,* **Nonlinear Funct. Anal. Appl.,** (Kabul Edildi, 2016).

[20] F. Temizsu, *Bazı Küme Değerli Fonksiyon Uzayları ve Bu Uzaylar Arasındaki Operatörlerin Analizi Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 2012.

[21] H. K. Banazılı, *Quasilineer Uzaylar Arasında Tanımlı Quasilineer Operatörler Üzerine,* Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 2014.

[22] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons Inc., New York, 1989.

[23] A. Wilansky, *Modern methods in topological vector spaces*, McGraw-Hill Int. Book Comp., New York, 1978.

[24] T. Başkan, O. Bizim, İ. N. Cangül, *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş,* Nobel Yayıncılık, 2006.

[25] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1988.

[26] Y. Soykan, *Metrik uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık, 2012.

[27] R. Johnsonbaugh, W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Dover Publications Inc., New York, 2010.

[28] C. Yıldız, *Genel Topoloji,* Gazi Kitabevi, 2005.

[29] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*, ISBN 0-387-13627-4.

[30] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Sümeyye ÇAKAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 13.11.1987

Adres: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

E-Posta: sumeyye.tay@gmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü (2005-2009)

Yüksek Lisans: İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik A.B.D. (2009-2012)

Mesleki Deneyim: İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik A.B.D., Araştırma Görevlisi (2010 - $\cdots$)

Yayın Listesi:

Makaleler

1) S. Çakan, Y. Yılmaz, *Lower and Upper Semi Convergence in Normed Quasilinear Spaces*, **Nonlinear Funct. Anal. Appl.,** (Kabul Edildi, 2016).
(Bu çalışma tezden üretilmiştir.)

2) S. Çakan, Y. Yılmaz, *Localization Principle in Normed Quasilinear Spaces*, **Information in Sciences and Computing,** (2015), Article ID ISC530515, 15 pages.
(Bu çalışma tezden üretilmiştir.)

3) S. Çakan, Y. Yılmaz, *Normed Proper Quasilinear Spaces*, **J. Nonlinear Sci. Appl.,** 8 (2015), 816–836. **(SCI-Expanded)**
(Bu çalışma tezden üretilmiştir.)

4) S. Çakan, Y. Yılmaz, *On the Quasimodules and Normed Quasimodules*, **Nonlinear Funct. Anal. Appl.,** Vol. 20, No. 2 (2015), pp. 269-288.

5) S. Çakan, Y. Yılmaz, *Lower and Upper Semi Basis in Quasilinear Spaces*, **Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology,** 31:2 (2015), 97–104.

6) H. Bozkurt, **S. Çakan**, Y. Yılmaz, *Quasilinear Inner Product Spaces and Hilbert Quasilinear Spaces*, **International Journal of Analysis,** (2014), Article ID 258389, 7 pages.

7) Y. Yılmaz, **S. Çakan,** Ş. Aytekin, *Topological Quasilinear Spaces*, **Abstr. Appl. Anal.,** (2012), Article ID 951374, 10 pages. **(SCI-Expanded)**

Bildiriler

1) S. Çakan, Y. Yılmaz, *Quasimodules and normed quasimodules on a quasiring,* **Karatekin Mathematics Days 2014**, Karatekin University, Çankırı, 11-13 June 2014. **(Uluslararası Sempozyum)**

2) Y. Yılmaz, F. Temizsu, **S. Çakan**, *Quasilineer Uzaylarda Boyut ve Baz Kavramı,* **Türk Matematik Derneği, XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu,** Uludağ Üniversitesi, Bursa, 7-10 Eylül 2011. **(Ulusal Sempozyum)**

3) Y. Yılmaz, **S. Çakan**, *Topological Quasilinear Spaces,* **Conference on Summability and Applications 2011,** İstanbul Commerce University, 12-13 May 2011. **(Uluslararası Sempozyum)**