T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇ ÇARPIM QUASİLİNEER UZAYLARI VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Hacer BOZKURT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2016

Tezin Başlığı : İç Çarpım Quasilineer Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri

Tezi Hazırlayan: Hacer BOZKURT

Sınav Tarihi: 01/06/2016

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ** ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Sadık KELEŞ ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ ....
Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Yavuz ALTIN ....
Fırat Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN ....
İnönü Üniversitesi

....

Prof. Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

Annem, babam, kardeşlerim ve eşim Kenan ile oğlum Ahmet Mîrzâ'ya ...

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "İç Çarpım Quasilineer Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri" başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hacer BOZKURT

ÖZET

Doktora Tezi

İÇ ÇARPIM QUASİLİNEER UZAYLARI VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Hacer BOZKURT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

v+118 sayfa
2016

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

"İç Çarpım Quasilineer Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri" isimli bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde quasilineer uzay kavramının gelişim süreci, kullanım alanları ve bir quasilineer uzay örneği verilmiştir.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde quasilineer uzay, normlu quasilineer uzay, $\Omega-$uzayı ve quasilineer operatör kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili temel teorem ve sonuçlar da bu bölümde verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölüm çalışmamızın orjinal kısmıdır. Dördüncü bölümde lineer iç çarpım uzaylarının bir genelleştirmesi olan iç çarpım quasilineer uzayları ve Hilbert quasilineer uzaylar tanıtılmıştır. Bu bölüm iç çarpım quasilineer uzaylarıyla ilgili bazı yeni tanım, teorem ve sonuçlardan oluşmaktadır. Quasilineer uzaylarda ortogonal ve ortonormal sistemler ile Hilbert quasilineer uzayların bazı yeni özellikleri bu bölümde incelenmiştir. Ayrıca lineer uzaylardaki bazı teoremlerin quasilineer karşılıkları verilmiştir.

Son bölümde ise farklı bir quasilineer uzay örneği olan $I\mathbb{R}^n$ interval uzayı ve $Is, Il_\infty, Ic, Ic_0, Il_2$ interval dizi uzayları tanıtılarak bu uzaylarla ilgili bazı cebirsel çalışmalar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Quasilineer Uzaylar, Normlu Quasilineer Uzaylar, Hausdorff Metrik, İç Çarpım Quasilineer Uzayları, Hilbert Quasilineer Uzaylar, Ortogonallik, Ortonormallik, İnterval Uzaylar, İnterval Dizi Uzayları.

ABSTRACT

PhD Thesis

INNER PRODUCT QUASILINEAR SPACES AND SOME GENERALIZATIONS

Hacer BOZKURT

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

v+118 pages
2016

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

This study which is entitled "Inner Product Quasilinear Spaces and Some Generalizations" contains five chapters. In the first chapter, the necessary knowledge about development of quasilinear spaces, usage areas and an example of quasilinear spaces are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters, are given.

In the third chapter, quasilinear spaces, normed quasilinear spaces, $\Omega-$space and quasilinear operators are introduced. Also some basic theorems and results which are related to these spaces are given.

The fourth and fifth chapters are original parts of this study. In the fourth chapter, the concept of inner product quasilinear spaces which are generalization of the inner product spaces and Hilbert quasilinear spaces are defined. Furthermore, in this chapter deals with the some new definitions, theorems and results which are concerned with inner product quasilinear spaces. In addition, orthogonal and orthonormal systems in quasilinear spaces and some new properties of Hilbert quasilinear spaces are examined. Also, quasilinear counterpart of some theorems in linear spaces, are given.

In the last chapter, $I\mathbb{R}^n$ interval spaces and $Is, Il_\infty, Ic, Ic_0, Il_2$ interval sequences spaces which are another examples of the quasilinear spaces are introduced. Furthermore, some algebraic studies on these spaces are given.

KEY WORDS: Quasilinear Spaces, Normed Quasilinear Spaces, Hausdorff Metric, Inner Product Quasilinear Spaces, Hilbert Quasilinear Spaces, Orthogonality, Orthonornality, Interval Spaces, Interval Sequences Spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgisini, deneyimini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın **Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ**'a teşekkür ederim.

Her konuda desteğini esirgemeyen değerli hocam **Prof. Dr. Sadık KELEŞ**'e ve doktora öğrenimim süresince verdikleri destekden dolayı **Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN**'a teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca fikirleriyle destek ve yardımlarını gördüğüm sevgili arkadaşım **Araş Gör. Dr. Sümeyye ÇAKAN**'a teşekkür ederim.

Bu çalışma sürecinde desteklerini benden esirgemeyen **anneme, babama, kardeşlerime** ve her zaman yanımda olan eşim **Kenan BOZKURT**'a, bu süreçte ailemize dahil olup hayatımıza renk katan oğlum **Ahmet Mîrzâ**'ya teşekkür ederim.

Ayrıca TÜBİTAK- Yurt İçi Doktora Bursiyeri olarak tez çalışmamı gerçekleştirme ve bilime katkı sağlama yolunda doktora eğitimim boyunca sağladıkları maddi destek için **TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB)**'na sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi,
$\Omega(E)$	:	Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi,
$\Omega_C(E)$	:	Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi,
$C[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$S_\epsilon(\theta)$	:	θ merkezli ϵ yarıçaplı açık yuvar,
$D(A,B)$	:	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık,
inf (sup)	:	infimum (supremum),
$X_r(X_s)$	:	X quasilineer uzayının regüler (singüler) alt uzayı,
X_d	:	X quasilineer uzayının simetrik alt uzayı,
X_{od}	:	X quasilineer uzayının simetrik üstü alt uzayı,
$r-boyX$ $(s-boyX)$	:	X quasilineer uzayının regüler (singüler) boyutu,
F_x^M	:	x elemanının M deki zemini,
F_x (F_X)	:	x elemanının zemini (X quasilineer uzayının zemini),
F_M^X	:	M kümesinin X deki zemini,
$A^\perp$	:	A nın ortogonal tümleyeni,
$\widehat{X}$	:	X quasilineer uzayının sağlamlaştırması,
$I\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu intervallerin kümesi,
Is	:	tüm interval dizilerin kümesi,
Il_∞	:	$I\mathbb{R}^\infty$ içinde tüm sınırlı diziler kümesi,
Ic_0	:	$I\mathbb{R}^\infty$ içinde sıfıra yakınsayan tüm diziler kümesi,
Il_2	:	$I\mathbb{R}^\infty$ içinde $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|_{I\mathbb{R}}^2 < \infty$ olan tüm (X_n) dizilerinin kümesi.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Normlu uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzayları klasik analizde önemli bir yeri olan lineer uzay kavramı üzerine inşa edilmiştir. Bu uzayların kendilerine has özellikleri sayesinde, klasik tek değerli fonksiyonlarla oluşturulan diferansiyel denklemler, birçok bilimsel problemin modellenmesinde önemli olmuştur. Ancak bazı doğa problemlerinin tek değerli fonksiyonların ürettiği diferansiyel denklemler ile modellenmediği görülmüş ve bu sorunu çözmek için küme değerli fonksiyonlarla elde edilen küme diferansiyel denklemleri ortaya çıkarılmıştır. Aseev, [1] numaralı çalışmasında bu tip denklemleri incelemiştir. Aseev [1]'de quasilineer uzay kavramını tanımlamış ve bu tanımlamayı yaparken bir kısmi sıralama bağıntısı kullanmıştır. Yine burada lineer fonksiyonel analizdeki önemli tanım ve teoremlerin tutarlı karşılıklarını quasilineer uzay teorisinde verebilmiştir. "$=$" bağıntısı, aynı zamanda bir kısmi sıralama bağıntısı olduğundan, Aseev [1]'de her reel lineer uzayın aslında özel bir çeşit quasilineer uzay olduğunu da belirtmiştir. Quasilineer uzaylarda tanımlanan norm fonksiyonun da aynı kısmi sıralama bağıntısıyla lineer uzaylardaki norm fonksiyonuna dönüştüğünü göstermiştir. Bu sayede klasik tek değerli fonksiyonların analizinde önemli yeri olan teoremlerin karşılıklarını, küme değerli fonksiyonların normlu quasilineer uzaylarında da verebilmiştir.

Tek değerli fonksiyonlarla elde edilen diferansiyel denklemlerin çözüm kümelerinin bulunması mümkün olmasına rağmen, küme değerli diferansiyel denklemler için çözüm kümelerini bulmak çok zor veya mümkün değildir. Bunun nedeni ise küme diferansiyel denklemlerini meydana getiren fonksiyon uzaylarının lineer uzay yapısına sahip olmamasıdır. Burada bahsedilen lineer uzay teşkil etmeyen küme ailelerinin en önemlileri, $\mathbb{R}^n$'in kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin sınıfı olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Bu nedenle çalışmamızda quasilineer uzayın yapısını daha iyi anlayabilmek için ikinci bölümde [2]'den yaralanarak $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ aileleri incelenmiştir. Burada verilen en önemli husus da $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ veya $\Omega(\mathbb{R}^n)$ gibi lineer yapıda olmayan küme ailelerinde toplama $(+)$ işlemi Minkowski toplamı ve skalerle çarpma $(\cdot)$ işlemi bir reel sayı ile bir kümenin çarpımı olmak üzere keyfi bir $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için

$$A + (-1) \cdot A \neq \{0\}$$

olmasıdır. Bu nedenle $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'deki her elemanın tersi mevcut olmadığından bu uzaya lineer uzaydır diyemeyiz.

Klasik analizden her iç çarpım uzayın bir normlu uzay olduğunu, [1]'den ise normlu quasilineer uzayın normlu uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu biliyoruz. Biz de çalışmamızda, bu bağıntıdan ve [1]'den yola çıkarak quasilineer fonksiyonel analizin geliştirilebilmesi için iç çarpım quasilineer uzayı kavramının tanımlanması gerektiğini düşündük. Bu nedenle $X \times X$ quasilineer uzayı üzerinde yeni bir fonksiyon tanımladık ve bu fonksiyonu, quasilineer uzaylardaki iç çarpım fonksiyonu olarak adlandırdık. İç çarpım quasilineer uzayları tarafından tanımlayacağımız bu iç çapım fonksiyonunun tıpkı normlu quasilineer uzayların tanımlanışındaki metoda benzer şekilde bir kısmi sıralama bağıntısına dayalı olarak verilmesi gerektiğini düşündük. Oluşturduğumuz iç çarpım fonksiyonu ile quasilineer uzay üzerinde bir norm oluşturabileceğimizi, dolayısıyla lineer uzaylarda olduğu gibi iç çarpım quasilineer uzayların da aslında özel normlu quasilineer uzaylar olduğunu gördük. Çalışmamızın devamında ise lineer iç çarpım uzaylarındaki bazı tanım ve teoremlerin tutarlı karşılıklarının, iç çarpım quasilineer uzaylarında da verilebileceği sonucuna ulaştık.

Bir iç çarpım quasilineer uzayında ortogonal ve ortonormal kümelerin bazı özelliklerini çalışmamızda inceledik. Ayrıca bir normlu quasilineer uzayın bazı (Schauder Bazı) kavramını tanımlayıp ardından bu yeni kavramla ilgili bazı sonuçlar elde ettik. Quasilineer uzaylar lineer uzaylardan farklı olarak kısmi sıralama bağıntısı içerdiğinden bu tanımlamayı yaparken bu kapsama bağıntısını da kullanmamız gerektiğini gördük. Böylece normlu lineer uzaylarda verilen Schauder baz tanımından daha genel bir tanım elde ettik. Elde ettiğimiz bu yeni tanımla birlikte tıpkı lineer uzaylarda olduğu gibi; sonlu boyutlu sağlam zeminli bir quasilineer uzayda Hamel baz kavramı, Schauder baz kavramıyla çakışır ve sağlam zeminli bir normlu quasilineer uzay Schauder baza sahip ise ayrılabilirdir sonuçlarını sağlam zeminli quasilineer uzaylarda da verilebileceği sonucuna ulaştık. Bunun yanı sıra, iç çarpım quasilineer uzaylarında önemli olan ortonormal baz kavramını tanımlayıp bu yeni kavramla ilgili bir takım araştırmalar yaptık. Bu tanımlamayla birlikte lineer uzaylara benzer olarak bazı yeni ve gerekli sonuçlar verebildik. Bu da bize ortonormal bazın bazı özelliklerinin quasilineer uzay teorisinde de tartışılabileceğini göstermiş oldu. Yine burada lineer uzaylarda verilen bir kümenin ortogonal tümleyeni ile ilgili teoremlerin quasilineer karşılıklarını inceyip lineer uzaylardan daha farklı analizlerin olduğunu tespit ettik.

Quasilineer fonksiyonel analizde çalışırken lineer fonskiyonel analizden farklı olarak karşılaştığımız durumlar vardır. Bunlardan bazıları quasilineer uzaylarda her elemanın lineer uzaylarda olduğu gibi tersinin mevcut olmaması ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

eşitliğinin sadece $\alpha\beta \geq 0$ için homojenize quasilineer uzaylarda sağlandığı, diğer durumlarda ise

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır. Bu da teoremlerimizi ispatlarken lineer uzaylardan daha farklı analizlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Yaptığımız araştırmalar doğrultusunda ilerleme sağlayabilmek için iç çarpım quasilineer uzaylarının bir genelleştirmesi olan yarı iç çarpım quasilineer uzaylarının da tanımlanması gerektiğinden, dördüncü bölümde yarı iç çarpım quasilineer uzayı kavramını tanımlayıp bu kavramla ilgili bazı örnek ve sonuçları verdik.

Çalışmamızda elde ettiğimiz önemli bir bulgu da bir Hilbert quasilineer uzayın her elemanın bu uzayın kapalı alt uzayının bir elemanı ve bu alt uzayın dikey kümesinin bir elemanının toplamı olarak ifade edilememesidir. Yani Hilbert quasilineer uzaylarda Ortogonal Parçalanma Teoremi'nin sağlanmamasıdır. Bununla ilgili elde edilen önemli örnek ve sonuçlar beşinci bölümde verilmiştir. Ayrıca, quasilineer uzay teorisinde yeni bir kavram olarak [3]'de tanımlanan quasilineer bağımlılık, quasilineer bağımsızlık, baz ve zemin kavramlarıyla ilgili bazı araştırmalar yapılmış ve bu kavramla ilgili önemli teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Son bölümde ise farklı bir quasilineer uzay örneği olan $I\mathbb{R}^n$ interval uzayı incelenmiştir. Yine burada $I\mathbb{R}^n$ quasilineer uzayı üzerinde bir norm tanımlanmış ve bu normla birlikte normlu quasilineer uzay olduğu gösterilmiştir. Ayrıca burada [3]'den yararlanılarak interval uzaylarının bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bundan başka farklı bir quasilineer uzay örneği olan Is, Il_{∞}, Il_p, Ic_0 ve Il_2 interval dizi uzayları tanıtılmış ve bu uzaylarla ilgili bazı yeni teorem ve örnekler verilmiştir.

Bu düşünceler kapsamında " İç Çarpım Quasilineer Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri" isimli tez çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Aseev'in [1] numaralı çalışmasından yararlanılarak lineer yapıda olmayan uzayların ait olabildiği uzay tiplerinden, quasilineer uzay ve normlu quasilineer uzay kavramları ele alınmıştır. Tezin orjinal kısmı olarak sunulan dördüncü ve beşinci bölümlerde ise özel bir normlu quasilineer uzay olan iç çarpım quasilineer uzayı ve Hilbert quasilineer uzay kavramı tanıtılmış ve bunun yanı sıra iç çarpım uzaylarında önemli bir yeri olan diklik kavramı ele alınmıştır. Hilbert quasilineer uzaylarda elde edilen yeni tanım, teorem ve örnekler burada verilmiştir. Bölüm, genel olarak lineer uzaylarda verilen bazı tanım ve teoremlerin quasilineer karşılıkları ve lineer uzaylardan farklı olarak iç çarpım quasilineer uzaylarında elde edilen bazı sonuçlardan oluşmaktadır. Son bölümde ise yeni bir quasilineer uzay örneği olan $I\mathbb{R}^n$ interval uzayı incelenmiş ve bu uzayla ilgili bazı yeni cebirsel araştırmalar yapılmıştır. Yine burada Is, Il_{∞}, Il_p, Ic_0 ve Il_2 interval dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarla ilgili bazı yeni teorem ve örnekler verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyulan lineer cebir ve lineer fonksiyonel analizin bazı temel tanım, teorem ve sonuçlarına yer verilecektir. Ayrıca Hausdorff ayrımı ve Hausdorff uzaklığıyla birlikte Hausdorff metriği tanımlanacaktır. Yine bu bölümde $\mathbb{R}^n$'nin kompakt alt kümelerinin ailesi ve kompakt-konveks alt kümelerinin ailesi incelenecektir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. *[4] Bir X kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan "$\leq$" bağıntısına bir **kısmi sıralama bağıntısı**, $(X, \leq)$ ikilisine de bir **kısmi sıralı küme** denir. $\forall x, y, z \in X$ için*

$$x \leq x,$$

$$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z,$$

$$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$$

'dir.

Tanım 2.1.2. *[4] $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde $x \leq y$ ya da $y \leq x$ önermesini sağlayan (x, y) elemanlarına **karşılaştırılabilir elemanlar** denir. Her iki elemanı karşılaştırılabilir olan bir kısmi sıralı kümeye de **tam sıralı küme** veya **zincir** denir.*

Örnek 2.1.1. *[4] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi olan $P(\mathbb{N})$, "$\subseteq$" ile gösterilen içerme bağıntısı ile kısmi sıralı bir kümedir, ancak bir zincir değildir.*

Tanım 2.1.3. *[4] $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $M \subset X$ olsun.*

*Bir $m \in M$ için $n \leq m$ olacak şekilde m'den farklı bir $n \in M$ bulunamıyorsa m elemanına M kümesinin bir **minimal elemanı,*** *Bir $u \in M$ için $u \leq v$ olacak şekilde u'dan farklı bir $v \in M$ bulunamıyorsa u elemanına M kümesinin bir* ***maksimal elemanı,***

Her $m \in M$ için $a \leq m$ olacak şekilde bir $a \in M$ varsa a elemanına M kümesinin ***en küçük elemanı*** *veya* ***minimumu,***

Her $m \in M$ için $m \leq b$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa b elemanına M kümesinin ***en büyük elemanı*** *veya* ***maksimumu*** *denir.*

Lemma 2.1.1. *[4]* ***(Zorn Lemması)*** *$M \neq \emptyset$ bir kısmi sıralı küme olsun. M'deki her C zincirinin bir üst sınıra sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda M kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir.*

Tanım 2.1.4. *[5] X boştan farklı bir küme ve K bir cisim olsun. X üzerinde $+$ ve $\cdot$ skalerle çarpma diye adlandırılan işlemleri,*

$$+ : X \times X \to X \ , \ \ (x, y) \to x + y$$

$$\cdot : K \times X \to X \ , \ \ (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

olarak tanımlayalım. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$x + \theta = x$ olacak şekilde X'in ***sıfır elemanı*** *denilen bir $\theta \in X$ vardır,*

$\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde x'in ***tersi*** *denilen bir $-x \in X$ vardır,*

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x$$

şartları sağlanıyorsa X'e K üzerinde bir ***lineer uzay (vektör uzayı)*** *denir.*

Tanım 2.1.5. *[5] X bir K cismi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi de $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleriyle K üzerinde bir lineer uzay yapısına sahipse Y uzayına X'in bir* ***alt vektör uzayı*** *denir.*

Teorem 2.1.1. *[5] X bir K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Y kümesinin X'in bir alt vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in Y$'dir.*

Tanım 2.1.6. *[6] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $A \subseteq X$ verilsin. Eğer*

$$\forall x, y \in A \text{ ve } \forall \lambda \in [0,1] \text{ için } \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in A$$

*oluyorsa A'ya **konveks küme** denir.*

Örnek 2.1.2. *[6] $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ birim küresi $\mathbb{R}^2$'nin konveks bir alt kümesidir. Ayrıca her alt vektör uzayının da bir konveks küme olduğu tanımdan görülür.*

Tanım 2.1.7. *[5] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$$

*vektörüne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerinin bir **lineer kombinasyonu** denir.*

Tanım 2.1.8. *[5] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\emptyset \neq A \subset X$ alt kümesini alalım. A'nın sonlu sayıdaki elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının kümesine A**'nın gereni** veya A**'nın gerdiği alt uza**y denir. $SpanA$ veya SpA ile gösterilir. $SpanA = X$ ise A kümesi X**'i geriyor** denir.*

Tanım 2.1.9. *[5] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = A \subset X$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k = \theta \Leftrightarrow \alpha_k = 0, \ (1 \leq k \leq n)$$

*oluyorsa A kümesi **lineer bağımsız**, aksi halde **lineer bağımlıdır** denir.*

Tanım 2.1.10. *[5] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X'in lineer bağımsız ve X'i geren alt kümesine X için bir **baz** diğer adıyla **Hamel baz** denir.*

Teorem 2.1.2. *[7] Her vektör uzayı bir Hamel baza sahiptir.*

Tanım 2.1.11. *[7] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X'in içerdiği maksimum lineer bağımsız vektör sayısına X'in* ***boyutu*** *denir ve* $\dim X$ *ile gösterilir.* $\dim X < \infty$ *ise X'e* ***sonlu boyutlu****, aksi halde* ***sonsuz boyutludur*** *denir.*

Tanım 2.1.12. *[4] X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için*

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x,y) = d(y,x),$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

şartlarını sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir ***metrik,*** *(X,d) ikilisine ise bir* ***metrik uzay*** *denir. Eğer $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartı yerine $d(x,x) = 0$ şartı yazılırsa, d'ye bir* ***yarımetrik****, (X,d) ikilisine de* ***yarımetrik uzay*** *denir.*

Örnek 2.1.3. *[4] $\mathbb{R}^2$ üzerinde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

fonksiyonu bir metrik tanımlar. Bu metriğe $\mathbb{R}^2$'nin alışılmış metriği denir.

Tanım 2.1.13. *[4] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. Eğer M kümesi herbir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa M'ye* ***açık küme*** *denir. Eğer M kümesinin X'e göre tümleyeni açık ise M'ye* ***kapalı küme*** *denir.*

Tanım 2.1.14. *[7] X boştan farklı bir küme ve τ'da X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer*

$$\emptyset \in \tau \text{ ve } X \in \tau,$$

$$\tau\text{'nun elemanlarının herhangi sayıda birleşimi } \tau\text{'nun elemanıdır,}$$

$$\tau\text{'nun elemanlarının sonlu sayıda kesişimi } \tau\text{'nun elemanıdır}$$

şartları sağlanıyorsa τ'ya X üzerinde bir ***topoloji****, (X,τ) ikilisine de* ***topolojik uzay*** *denir.*

Tanım 2.1.15. *[7]* *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için x ve y'yi içeren τ'nun iki ayrık açık alt kümesi bulunabiliyorsa (X, τ)'nun* ***Hausdorff uzayı*** *denir.*

Tanım 2.1.16. *[4]* *(X, τ) bir topolojik uzay, $K \subseteq X$ olsun. Eğer K'nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse K'ya* ***kompakt küme*** *denir.*

Teorem 2.1.3. *[4]* *$\mathbb{R}^n$'in bir A alt kümesi verilsin. A kompakttır $\Leftrightarrow$ A kapalı ve sınırlıdır.*

Tanım 2.1.17. *[4]* *$X = (X, d_1)$ ve $Y = (Y, d_2)$ birer metrik uzay olsun. $T : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $d_1(x, x_0) < \delta$ iken*

$$d_2(Tx, Tx_0) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T'ye x_0 noktasında ***sürekli dönüşüm*** *denir. Eğer T, X'in her noktasında sürekli ise X* ***üzerinde süreklidir*** *denir.*

Teorem 2.1.4. *[4]* *X ve Y birer metrik uzay ve $T : X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. X'in kompakt bir M alt kümesinin T altındaki görüntüsü de kompakttır.*

Tanım 2.1.18. *[4]* *X bir K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için*

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir ***norm,*** *$(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise* ***normlu uzay*** *denir. Eğer $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı yerine sadece $\|x\| \geq 0$ şartı alınırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir* ***yarınorm,*** *$(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise* ***yarı normlu uzay*** *denir.*

Örnek 2.1.4. *[4]* *$C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli$\}$ kümesi, fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir reel lineer uzay yapısına sahiptir. $f \in C[a, b]$ olmak üzere,*

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

biçiminde tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu $C[a,b]$ üzerinde bir norm teşkil eder. Dolayısıyla $(C[a,b], \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek 2.1.5. *[4] c yakınsak diziler uzayında tanımlı $g(x) = \sup |x_n|$ fonksiyonu bir yarınormdur.*

Teorem 2.1.5. *[4] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$d(x,y) = \|x - y\|$$

*olarak tanımlı d fonksiyonu, X üzerinde bir metrik fonksiyonudur. Bu teoremde tanımlanan d metriğine **normun ürettiği metrik** ya da **norm metriği** denir.*

Sonuç 2.1.1. *[4] Her normlu uzay norm metriğiyle bir metrik uzaydır.*

Teorem 2.1.6. *[4] Sonlu boyutlu normlu bir X uzayında herhangi bir M alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart M'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.1.19. *[7] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \epsilon > 0$ için bir N doğal sayısı vardır öyle ki her $n > N$ için $\|x_n - x\| < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$'e yakınsaktır denir. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.20. *[7] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \epsilon > 0$ için bir M doğal sayısı vardır öyle ki her $m, n > M$ için $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.*

Tanım 2.1.21. *[7] Bir normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tam normlu uzay** adı verilir. Tam normlu bir uzaya **Banach uzayı** denir.*

Örnek 2.1.6. *[7] $C[a,b]$ uzayı $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ ile verilen norm altında bir Banach uzayıdır.*

Örnek 2.1.7. *[7] $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, mutlak değer normuna göre Banach uzayı değildir. Örneğin; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\mathbb{Q}$'da bir Cauchy dizisidir, fakat $\mathbb{Q}$'nun hiçbir noktasına yakınsamaz.*

Tanım 2.1.22. *[8] Bir* $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayında bir dizi* $\{x_n\}$ *olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\| = 0$$

olacak şekilde K *içinde bir tek* $\{\alpha_n\}$ *dizisi varsa bu* $\{x_n\}$ *dizisine* X *uzayının bir Schauder bazı denir.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

serisine de $\{x_n\}$ *dizisine ya da Schauder bazına göre açılımı denir ve*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

yazılır.

X sonlu boyutlu ve $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset X$, X için bir Hamel baz ise biliyoruz ki her bir $x \in X$ tek türlü olarak $x = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$x_n = \begin{cases} v_k, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi X için bir Schauder bazdır. O halde sonlu boyutlu uzaylarda bir Hamel baz bir Schauder bazıdır [8].

Teorem 2.1.7. *[8] Eğer bir normlu uzay Schauder tabanına sahipse bu normlu uzay ayrılabilirdir.*

Tanım 2.1.23. *[4] Bir* T *lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşümdür:*

(i) T*'nin* $D(T)$ *tanım kümesi bir vektör uzayıdır ve* $R(T)$ *görüntü kümesi* $D(T)$ *vektör uzayı ile aynı cisim üzerindeki bir vektör uzayının içindedir.*

(ii) Her $x, y \in D(T)$ *ve* α *skaleri için*

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

ve

$$T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

'dir.

Örnek 2.1.8. *[4] X vektör uzayı üzerinde*

$$T_X : X \to X, \qquad T_X(x) = x$$

şeklinde tanımlı özdeşlik operatörü lineerdir.

Tanım 2.1.24. *[4]* $\ker T = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ *kümesine T**'nin çekirdeği** denir.*

Tanım 2.1.25. *[4] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$$

*olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa T'ye **sınırlıdır** denir.*

Tanım 2.1.26. *[4] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü verilsin.*

$$\sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

değerine T operatörünün normu denir. Yani

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

'dir.

Teorem 2.1.8. *[4]* $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X = 1\}$*'dır.*

Teorem 2.1.9. *[4] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,*

(a) T süreklidir $\Leftrightarrow$ T sınırlıdır,

(b) T bir noktada sürekliyse her noktada süreklidir.

Tanım 2.1.27. *[4] X ve Y bir K cismi üzerinde birer normlu uzay olsunlar.*

$$B(X, Y) = \{T \in L(X, Y) | T \text{ sınırlı}\}$$

kümesi, dönüşümlerin toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzaydır. Üstelik;

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

normuyla bu uzay bir normlu uzaydır.

Teorem 2.1.10. *[4] X ve Y bir K cismi üzerinde birer normlu uzay olsunlar. Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$'de bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.1.28. *[9] $K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir lineer uzay olsun. $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu fonksiyona X'de bir iç çarpım ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir* ***iç çarpım uzayı*** *denir. $\forall\ x, y, z \in X$ ve $\lambda \in K$ için*

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Örnek 2.1.9. *[9] $\mathbb{C}^n$ de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

bir iç çarpımdır.

Önerme 2.1.1. *[8] X bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ ise*

(i) $\langle 0, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0,$

(ii) $\langle x, \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle,$

(iii) $\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha\overline{\beta} \langle x, y \rangle + \beta\overline{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle,$

(iv) her $t \in X$ için $\langle t, y \rangle = \langle t, z \rangle$ ise $y = z$'dir.

Teorem 2.1.11. *[9] (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı ise, $\forall$ $x, y \in X$ için*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

'dir.

Sonuç 2.1.2. *[9] (Üçgen Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı ise, $\forall\ x, y \in X$ için*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

'dir.

Teorem 2.1.12. *[4] Her iç çarpım uzayı*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

ile bir normlu lineer uzaydır.

Teorem 2.1.13. *[4] (Paralelkenar Özelliği) X bir iç çarpım uzayı ise $\forall\ x, y \in X$ için*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

'dir.

Paralelkenar özelliğini sağlamayan bir normun, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ kullanılmasıyla bir iç çarpımdan elde edilemeyeceğini söyleyebiliriz. Bu nedenle normlu uzayların hepsi bir iç çarpım uzayı değildir.

Teorem 2.1.14. *[9] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ x, y \in X$ vektörleri için Paralelkenar Özelliğinin sağlanmasıdır.*

Tanım 2.1.29. *[5] Bir H iç çarpım uzayı, iç çarpımla tanımlanan norm altında Banach uzayı ise H'ye bir **Hilbert uzayı** denir.*

Örnek 2.1.10. *[5] $\mathbb{C}^n$ uzayı*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

iç çarpımı altında, n-boyutlu bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.1.11. *[4] $C[a,b]$ uzayı*

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

ile bir iç çarpım uzayıdır. Fakat iç çarpımla tanımlanan

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

normuyla tam değildir. Dolayısıyla Hilbert uzayı değildir.

Teorem 2.1.15. *[8] Bir X vektör uzayı üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu verildiğinde bu $\|\cdot\|$ normu indirgeyen X üzerinde eğer varsa en çok bir iç çarpım vardır.*

Tanım 2.1.30. *[10] $K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir lineer uzay olsun. $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu fonksiyona X'de bir **yarı iç çarpım** ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir **yarı iç çarpım uzayı** denir. $\forall\ x, y, z \in X$ ve $\lambda \in K$ için*

$$\langle x, x \rangle \geq 0,$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

[10] Her iç çarpım uzayı bir yarı iç çarpım uzayıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.1.12. *[10] K kümesi olarak sonlu sayıdaki n değerleri için $\alpha_n = 0$ olmak üzere $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ olacak şekilde ki F'deki tüm α_n skalerlerinin dizisini alalım. K daki toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.*

$$\begin{aligned} \{\alpha_n\} + \{\beta_n\} &= \{\alpha_n + \beta_n\}, \\ \alpha \cdot \{\alpha_n\} &= \{\alpha \cdot \alpha_n\}. \end{aligned}$$

Bu işlemlerle K bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerindeki her α_n ve β_n elemanı için $\langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}\beta_{2n}$ ile tanımlı iç çarpımı bir yarı iç çarpımdır. Fakat iç çarpım değildir.

Önerme 2.1.2. *[5] Bir iç çarpım uzayında $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$'dir.*

Tanım 2.1.31. *[5] X bir iç çarpım uzayı olsun. X'in x ve y gibi iki elemanı verildiğinde eğer*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

*ise, x elemanı, y elemanına dikdir denir ve $x \perp y$ şeklinde yazılır. $S \subseteq X$ olsun. $\forall x,\ y \in S$ için $x \perp y$ ise S'ye **ortogonaldir** denir. Ayrıca her $x \in S$ için $\|x\| = 1$ oluyorsa S'ye **ortonormal** küme denir.*

x ve y ortogonal elemanları için $\langle x, y\rangle = 0$ yazılabileceğinden

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

bağıntısı kolayca elde edilebilir.

Örnek 2.1.13. *[4] $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, k. terimi 1 olmak üzere $S = \{e_1, e_2, \ldots\}$ kümesi l_2'de ortonormal bir kümedir.*

Herhangi bir X iç çarpım uzayında $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ortonormal kümesi lineer bağımsızdır [8].

Teorem 2.1.16. *[5]* ***(Pisagor Teoremi)*** *Eğer $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi ortogonal ise*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

'dir.

Teorem 2.1.17. *[5]* ***(Bessel eşitliği ve eşitsizliği)*** *Eğer $\{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi bir E iç çarpım uzayındaki vektörlerin ortonormal bir kümesi ise her $x \in E$ için*

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

'dir.

Tanım 2.1.32. *[5] E bir iç çarpım uzayı, (x_n)'de E'de ortonormal bir dizi olsun. Eğer her $x \in E$ için*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$$

ise (x_n) dizisine tamdır denir.

Tanım 2.1.33. *[5] E bir iç çarpım uzayıve $\{x_n\}$, E içinde ortonormal bir dizi olsun. Eğer her $x \in E$'ye karşılık*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

olacak şekilde tek türlü belirlenen $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in F$ dizisi mevcut ise, $\{x_n\}$ dizisine E'nin bir ortonormal bazıdır denir.

Teorem 2.1.18. *[5] H bir Hilbert uzay, (x_n)'de E'de ortonormal bir dizi olsun. (x_n) dizisinin tam olabilmesi için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $\langle x, x_n \rangle = 0$ iken $x = 0$ olmasıdır.*

Teorem 2.1.19. *[5]* ***(Parseval Formulü)*** *H bir Hilbert uzay, (x_n)'de E'de ortonormal bir dizi olsun.*

$$(x_n) \text{ tamdır } \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$$

Teorem 2.1.20. *[8] X bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ vektörleri ortogonaldir ancak ve ancak her $\alpha \in K$ için $\|x + \alpha \cdot y\| = \|x - \alpha \cdot y\|$'dir.*

Teorem 2.1.21. *[8] X bir reel iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $\|x\| = \|y\|$ ise $x + y$ ile $x - y$ ortogonaldir.*

Tanım 2.1.34. *[8] X bir iç çarpım uzayı, A'da X'in boştan farklı alt kümesi olsun.*

$$A^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, \ y \in A\}$$

*kümesine A**'nın dikeyi** denir.*

Örnek 2.1.14. *[8] $X = \mathbb{R}^4$ ve $A = \{(0, a_2, a_3, a_4) : a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ ise o zaman $A^{\perp} = \{(x_1, 0, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$'dir.*

Önerme 2.1.3. *[8] X bir iç çarpım uzayı ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde*

(a) $0 \in A^{\perp}$,

(b) Eğer $0 \in A$ ise $A \cap A^{\perp} = \{0\}$'dir. Aksi halde $A \cap A^{\perp} \neq \varnothing$'dir,

(c) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$,

(d) Eğer $B \subset A$ ise $A^{\perp} \subset B^{\perp}$'dir,

(e) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$,

(f) $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$

'dir.

Teorem 2.1.22. *[5] X bir iç çarpım uzayı, A'da X'in boştan farklı alt kümesi olsun.*

$A^{\perp}$ kapalı bir alt uzaydır.

Önerme 2.1.4. *[8] X bir iç çarpım uzayı ve Y, X'in bir lineer alt uzayı olsun. Bu takdirde*

$$x \in Y^{\perp} \Leftrightarrow \|x-y\| \geq \|x\|, \quad \forall y \in Y.$$

Teorem 2.1.23. *[5]* ***(Ortogonal Parçalanış Teoremi)*** *H bir Hilbert uzayı, Y'de H'nin kapalı bir alt uzayı olsun. Her $x \in H$ için*

$$x = y + z$$

olacak şekilde bir tek $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ vardır, yani

$$H = Y + Y^{\perp}$$

'dir. Ayrıca

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

'dir.

Teorem 2.1.24. *[4] H bir Hilbert uzayı, Y'de H'nin kapalı bir alt uzayı ise $Y^{\perp} \neq \{0\}$'dır.*

Teorem 2.1.25. *[5] S kümesi H Hilbert uzayının kapalı bir alt uzayı ise $S^{\perp\perp} = S$'dir.*

2.2 $\mathbb{R}^n$'nin Kompakt Konveks Alt Kümeleri ve Hausdorff Metrik

Burada $\mathbb{R}^n$'nin tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini $\Omega(\mathbb{R}^n)$, tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.1. *[2] A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı herhangi iki alt kümesi olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Bu kümeler arasında Minkowski toplamı ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : a \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.1. *[2] $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ küme aileleri yukarıda tanımlanan işlemlere göre kapalıdır. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır. Her $A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,*

$$A + \theta = \theta + A = A \text{ olacak şekilde } \theta = \{0\} \text{ birim elemanı vardır,}$$

$$A + B = B + A,$$

$$A + B = A + C \Rightarrow B = C,$$

$$1 \cdot A = A,$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B,$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A \subseteq \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

olur.

Uyarı 2.2.1. *[11] Genel olarak $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'nin bir A elemanı için $A + (-1) \cdot A \neq \theta$ eşitsizliği doğrudur. Örneğin; $n = 1$ için $A = [-2, 1]$ olsun. O halde $(-1) \cdot A = [-1, 2]$ olur. Buradan*

$$A + (-1) \cdot A = [-2, 1] + [-1, 2] = [-3, 3]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $A + (-1) \cdot A = [-3, 3] \neq \theta$ 'dır.

Yukarıda verilen örnekten anlaşılacağı üzere $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'nin bir elemanının -1 katının kendisiyle toplamı birim elemanı vermek zorunda değildir. Bu ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ küme ailelerinin lineer uzay yapısına sahip olmayacaklarını gösterir. İşte bu nedenle bu küme aileleri lineer uzay kavramının kapsamlı bir genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına uymaktadır [11].

Uyarı 2.2.2. *Genel olarak $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'de $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ şartı sağlanmaz. Örneğin; $n = 1$ için $A = [-2, 1] \subseteq \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun.*

$$(1 + (-1)) \cdot [-2, 1] = 0 \cdot [-2, 1] = \{0\}$$

olduğu halde

$$1 \cdot [-2, 1] + (-1) \cdot [-2, 1] = [-2, 1] + [-1, 2] = [-3, 3]$$

olur. $\{0\} \subset [-3, 3]$ olduğundan her $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $(\lambda + \mu) \cdot A \subset \lambda \cdot A + \mu \cdot A$'dır.

Tanım 2.2.2. *[2] $x \in \mathbb{R}^n$ ve A kümesi $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. x noktasının A'ya olan $d(x, A)$ uzaklığı,*

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$S_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \epsilon\}$$

*kümesine A'nın ϵ-**komşuluğu** denir. $S_\epsilon(A)$'nın kapanışı ise,*

$$\overline{S}_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \epsilon\}$$

alt kümesidir. $\mathbb{R}^n$'nin θ merkezli 1 yarıçaplı birim küresini ise

$$\overline{S_1^n} = \overline{S_1}(\theta)$$

ile gösteririz. Burada $\forall \epsilon > 0$ ve boştan farklı herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\overline{S}_\epsilon(A) = A + \epsilon \cdot \overline{S_1^n}$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.3. *[2] A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.*

$$d_H(B, A) = \sup \{d(b, A) : b \in B\}$$

ya da buna denk olarak

$$d_H(B, A) = \inf \left\{\epsilon > 0 : B \subseteq A + \epsilon \cdot \overline{S_1^n}\right\}$$

*değerine B'nin A'dan **Hausdorff ayrımı** denir. Genelde,*

$$d_H(A, B) \neq d_H(B, A)$$

olduğundan Hausdorff ayrımı bir metrik fonksiyonu teşkil etmez.

Tanım 2.2.4. *[2] $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı A ve B alt kümeleri arasında*

$$D(A, B) = \max \{d_H(A, B), d_H(B, A)\}$$

*uzaklığına **Hausdorff uzaklığı** denir. Bu D fonksiyonu,*

$$D(A,B) \geq 0,$$

$$D(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B},$$

$$D(A,B) = D(B,A),$$

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$$

*bağıntılarını sağladığından dolayı $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi üzerinde bir metrik tanımlar. Buna **Hausdorff metrik** denir.*

Eğer $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı kapalı ve sınırlı ailelerinin kümesi olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$'yi alırsak Hausdorff uzaklığıyla tanımlı D fonksiyonu üzerinde bir metrik tanımlar. Yani $(\Omega(\mathbb{R}^n), D)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.2.1. *$\left[0, \frac{5}{4}\right] \in \Omega_C(\mathbb{R})$'nin $[0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$'ye olan Hausdorff uzaklığını bulalım.*

$$D\left(\left[0, \frac{5}{4}\right], [0,1]\right) = \max\left\{d_H\left(\left[0, \frac{5}{4}\right], [0,1]\right), d_H\left([0,1], \left[0, \frac{5}{4}\right]\right)\right\}$$

'dır. Burada

$$d_H\left(\left[0, \frac{5}{4}\right], [0,1]\right) = \sup\left\{d\left(b, [0,1]\right) : b \in \left[0, \frac{5}{4}\right]\right\}$$

ve

$$d_H\left([0,1], \left[0, \frac{5}{4}\right]\right) = \sup\left\{d\left(b, \left[0, \frac{5}{4}\right]\right) : b \in [0,1]\right\}$$

olur. Buradan

$$d_H\left(\left[0, \frac{5}{4}\right], [0,1]\right) = 0.25 \text{ ve } d_H\left([0,1], \left[0, \frac{5}{4}\right]\right) = 0$$

bulunur. Bu nedenle $D\left(\left[0, \frac{5}{4}\right], [0,1]\right) = \max\{0.25, 0\} = 0.25$ elde edilir.

Teorem 2.2.1. *[2] A, A', B ve $B' \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda \geq 0$ için*

$$D\left(A + A', B + A'\right) = D\left(A, B\right),$$

$$D\left(A + A', B + B'\right) \leq D(A,B) + D(A',B'),$$

$$D(\lambda \cdot A, \lambda \cdot B) = \lambda \cdot D(A,B)$$

eşitlikleri sağlanır.

BÖLÜM 3

QUASİLİNEER VE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR

Bu bölümde quasilineer uzay ve normlu quasilineer uzaylardaki bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir. Bölüm, genel olarak Aseev'in ([1]) çalışması temel alınarak oluşturulacaktır. Burada Aseev'in verdiği tanımın bir kısmi sıralama bağıntısına dayandığı görülmektedir. Bu sıralama vasıtasıyla quasilineer uzaylar üzerinde norm kavramı tanımlanacak ve bağıntının özel olarak "=" bağıntısı olması durumunda quasilineer uzay bir lineer uzay olacaktır. Ayrıca üzerindeki norm tanımı da bilinen norm tanımıyla çakışacaktır. Quasilineer uzayların en belirgin özelliği bu uzaydaki her elemanın tersinin mevcut olmamasıdır. Eğer bir quasilineer uzayda her elemanın tersi mevcut ise burada tanımlı olan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür ve bu uzay lineer bir uzay olur. Dolayısıyla her lineer uzay bir quasilineer uzay teşkil eder. Fakat tersi doğru olmaz.

Yine bölüm içerisinde [1]'den yararlanarak quasilineer operatörlerle ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Burada Aseev, quasilineer uzaylar arasında quasilineer operatör tanımını yaparken yine bir kısmi sıralama bağıntısı kullanmış ve böylece quasilineer operatör tanımının lineer operatör tanımı ile uyum içinde olmasını sağlamıştır. Quasilineer uzayların, lineer uzayların bir genelleştirmesi olması gibi quasilineer operatörlerin de lineer operatörlerin bir genelleştirmesi olduğunu Aseev'in çalışmasından yaralanarak göreceğiz.

Ayrıca burada quasilineer uzaylarda lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık ve baz kavramlarını [3]'den yararlanarak vereceğiz. Yine bu kısımda [12]'den yararlanarak bir quasilineer uzayın regüler ve singüler boyutu kavramları tanıtılıp bununla ilgili açıklayıcı örnekler verilecektir. Quasilineer uzay teorisinde yeni bir kavram olarak [13]'de verilen sağlam zeminli quasilineer uzay kavramı da bu bölüm içerisinde bulunmaktadır.

3.1 Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.1.1. *[1] Bir X kümesine, kendisi üzerinde her $x, y, z, v \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı, bir cebirsel toplama işlemi ve reel sayılarla çarpma işlemi tanımlıysa bir* ***quasilineer uzay*** *denir:*

$$x \preceq x, \tag{3.1.1}$$

$$x \preceq y,\ y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z, \tag{3.1.2}$$

$$x \preceq y,\ y \preceq x \Longrightarrow x = y, \tag{3.1.3}$$

$$x + y = y + x, \tag{3.1.4}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \tag{3.1.5}$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır,} \tag{3.1.6}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \tag{3.1.7}$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \tag{3.1.8}$$

$$1 \cdot x = x, \tag{3.1.9}$$

$$0 \cdot x = \theta, \tag{3.1.10}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \tag{3.1.11}$$

$$x \preceq y,\ z \preceq v \Longrightarrow\ x + z \preceq y + v, \tag{3.1.12}$$

$$x \preceq y \Longrightarrow \alpha \cdot x \preceq \alpha \cdot y. \tag{3.1.13}$$

Bir lineer uzay $x \preceq y \Longleftrightarrow x = y$ kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.1.1. *[1] E bir reel normlu lineer uzay olmak üzere E'nin tüm kapalı-sınırlı alt kümelerinin ailesi $\Omega(E)$, yine E'nin tüm kapalı-sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi $\Omega_C(E)$ ise $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ kümeleri bir "$\subseteq$" kapsama bağıntısı*

$$A + B = \overline{\{a + b : a \in A,\ b \in B\}}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : \ a \in A\}$$

skalerle çarpma işlemleriyle birlikte birer quasilineer uzaydır. Burada eğer E *sonlu boyutlu ise cebirsel toplama işlemi*

$$A + B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi $\Omega(E)$*'nin bir quasilineer uzay olduğunu gösterelim.*

$\forall A, B, C, D \in \Omega(E)$ *ve* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için;*

$$A \subseteq A,$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C,$$

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

bağıntıları sağlandığından "$\subseteq$*" bağıntısı* $\Omega(E)$ *üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Açık olarak*

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, $\theta = \{0_E\}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} A + \theta &= \overline{\{a + 0_E : a \in A, 0_E \in \theta\}} \\ &= \overline{\{a : a \in A\}} = \overline{A} = A \end{aligned}$$

sağlayacak şekilde $\theta = \{0_E\} \in \Omega(E)$ *birim elemanı vardır. Dahası,*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot A) &= \{\alpha \cdot (\beta \cdot a) : \beta \cdot a \in \beta \cdot A\} \\ &= \{(\alpha\beta) \cdot a : a \in A\} = (\alpha\beta) \cdot A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (A + B) &= \alpha \cdot \overline{\{a + b : a \in A, b \in B\}} \\ &= \overline{\{\alpha \cdot (a + b) : a \in A, b \in B\}} \\ &= \overline{\{\alpha \cdot a + \alpha \cdot b : a \in A, b \in B\}} \\ &= \overline{\{\alpha \cdot a : a \in A\}} + \overline{\{\alpha \cdot b : b \in B\}} \\ &= \alpha \cdot \overline{\{a : a \in A\}} + \alpha \cdot \overline{\{b : b \in B\}} \\ &= \alpha \cdot \overline{A} + \alpha \cdot \overline{B} = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \end{aligned}$$

$$1 \cdot A = \{1 \cdot a : a \in A\} = \{a : a \in A\} = A,$$

$$0 \cdot A = \{0 \cdot a : a \in A\} = \{0_E\} = \theta$$

eşitlikleri doğrudur. Şimdi de $A \subseteq B$ *ve* $C \subseteq D$ *olsun.*

$$A + C = \overline{\{a + c : a \in A, c \in C\}}$$

$$B + D = \overline{\{b + d : b \in B, d \in D\}}$$

kümelerini ele alalım. $x \in A + C$ *olsun. Eğer* $x \in \{a + c : a \in A, c \in C\}$ *ise,* $x = a_1 + c_1$ *olacak şekilde* $\exists a_1 \in A$ *ve* $\exists c_1 \in C$ *vardır. Hipotezden* $a_1 \in B$ *ve* $c_1 \in D$ *olur. O halde* $x = a_1 + c_1 \in \{b + d : b \in B, d \in D\}$ *demektir. Böylece* $x \in B + D$ *olur. Yani* $A + C \subseteq B + D$ *bulunur. Eğer* $x \in \{a + c : a \in A, c \in C\}'$ *ise* $\forall \epsilon > 0$ *için*

$$\{a + c : a \in A, c \in C\} \cap [B(x, \epsilon) \setminus \{x\}] \neq \emptyset$$

olur. Buradan $\exists y \in [B(x, \epsilon) \setminus \{x\}]$ *için* $y \in \{a + c : a \in A, c \in C\}$ *olduğu görülür. O halde yine hipotezden dolayı* $y \in \{b + d : b \in B, d \in D\}$ *olur. Buradan* $\forall \epsilon > 0$ *için*

$$\{b + d : b \in B, d \in D\} \cap [B(x, \epsilon) \setminus \{x\}] \neq \emptyset$$

'dır. Bu ise $x \in \{b + d : b \in B, d \in D\}'$ *anlamındadır. Böylece yine* $x \in B + D$*'dir. O halde* $A + C \subseteq B + D$ *olur.*

Son olarak $A \subseteq B$ iken $\beta \cdot A \subseteq \beta \cdot B$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in \beta \cdot A$ için $x = \beta \cdot a$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Hipotezden dolayı $a \in B$'dir. O halde $x = \beta \cdot a \in \beta \cdot B$ olur. Öyleyse $\beta \cdot A \subseteq \beta \cdot B$'dir. (3.1.1) - (3.1.13) şartları sağlandığından $\Omega(E)$ bir quasilineer uzaydır.

Lemma 3.1.1. *[1] Bir* X *quasilineer uzayında* θ *elemanı minimaldir. Yani*

$$x \preceq \theta \Longrightarrow x = \theta$$

olur.

İspat. [1] $x \preceq \theta$ olsun. $(-1) \cdot x \preceq (-1) \cdot \theta$ olduğundan (3.1.12) şartından,

$$x + (-1) \cdot x \preceq \theta + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x$$

yani,

$$x + (-1) \cdot x \preceq (-1) \cdot x$$

elde edilir. (3.1.10) ve (3.1.11) şartlarından,

$$\theta = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x \preceq x + (-1) \cdot x \preceq (-1) \cdot x$$

ve dolayısıyla

$$\theta \preceq (-1) \cdot x$$

elde edilir. (3.1.13) şartından

$$(-1) \cdot \theta \preceq (-1) \cdot ((-1) \cdot x) = x$$

olur. Ayrıca,

$$(-1) \cdot \theta = (-1) \cdot (0 \cdot x) = (-1 \cdot 0) \cdot x = \theta$$

olduğundan

$$\theta \preceq x$$

elde edilir. Hipotezde $x \preceq \theta$ olduğundan $x = \theta$ bulunur. Dolayısıyla θ elemanı minimal elemandır. □

Tanım 3.1.2. *[14] Bir X quasilineer uzayında $x^{'} + x = \theta$ olacak şekilde bir $x^{'} \in X$ var ise $x^{'}$ elemanına x'in* ***tersi*** *denir. Eğer bir ters eleman mevcut ise tektir. Bir x elemanının tersi mevcut ise* ***regüler eleman*** *mevcut değilse* ***singüler eleman*** *'dır denir. X'in tüm regüler ve singüler elemanlerının kümesi sırasıyla X_r ve X_s ile gösterilir.*

Daha sonra sadece θ elemanının minimal olmadığı, regüler elemanların da minimal olabileceği gösterilecektir.

Lemma 3.1.2. *[1] Bir X quasilineer uzayında her elemanın tersi mevcut ise X'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile verilir. Bu durumda (3.1.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür. Dolayısıyla X bir lineer uzay olur.*

İspat. X'in her elemanın tersi mevcut ve $x \preceq y$ olsun. $y' \preceq y'$ olduğunu biliyoruz. Buradan X bir quasilineer uzay olduğundan $x+y' \preceq y+y'$ olur. X'deki her elemanın tersi mevcut olduğundan $y + y' = \theta$'dır. Yani $x + y' \preceq \theta$ olur. θ elemanı minimal olduğundan $x + y' = \theta$'dır. Ters eleman tek olduğundan $x = y$ bulunur. Böylece X'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (3.1.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür. (3.1.12) ve (3.1.13) şartları otomatik olarak sağlanır. Dolayısıyla X bir lineer uzay olur. □

Sonuç 3.1.1. *Her reel lineer uzay bir quasilineer uzaydır. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.*

Sonuç 3.1.2. *[1] Bir reel lineer uzayda (3.1.1)-(3.1.13) şartlarını sağlayacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı sadece eşitlik ile elde edilir.*

İlerleyen konularda $-x = (-1) \cdot x$ eşitliğini kabul edeceğiz. Bir X quasilineer uzayındaki $x \in X$'in regüler olması için gerek ve yeter şart $x - x = 0$ yani $x^{'} = -x$ olmasıdır.

Önerme 3.1.1. *[14] Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir.*

İspat. Her $x \in X_r$ için $y \preceq x$ ise $y = x$ olduğunu göstermeliyiz. Her $x \in X_r$ için $y \preceq x$ olsun. Bu durumda

$$y \preceq x \Rightarrow y + x^{'} \preceq x + x^{'} = \theta \Rightarrow y + x^{'} \preceq \theta$$

olur. θ elemanı minimal olduğundan $y + x^{'} = \theta$ olur. Ters elemanın tekliğinden $x = y$ elde edilmiş olur. □

Tanım 3.1.3. *[14] X bir quasilineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ verilsin. Eğer Y kümesi de X'deki aynı işlemler ve kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa Y'ye X'in* ***bir alt uzayı*** *denir.*

Örnek 3.1.2. *[14] E bir reel normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega_C(E)$, $\Omega(E)$'nin bir alt uzayıdır.*

Teorem 3.1.1. *[14] X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun.*

$$Y \text{ alt uzaydır } \Longleftrightarrow \forall\ x, y \in Y,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$$

olur.

Bu teoremin ispatı klasik lineer cebirdeki karşılığının ispatına oldukça benzerdir.

X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y kümesindeki her bir x elemanın $x' \in Y$ olacak şekilde tersi mevcut ise Lemma 3.1.2'den Y kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Bu nedenle Y üzerindeki dağılma koşulları sağlanır ve Y, X'in lineer alt uzayı olur.

Tanım 3.1.4. *[14] X bir quasilineer uzay olsun. Eğer bir $x \in X$ için $-x = x$ ise x elemanına* ***simetriktir*** *denir. X'in tüm simetrik elemanlarının kümesi X_d ile gösterilir. Ayrıca X_r ve X_s kümeleri sırasıyla X'in regüler ve singüler elemanlarının kümelerini göstermektedir.*

Teorem 3.1.2. *[14] X_r, X_d ve $X_s \cup \{0\}$ kümeleri X quasilineer uzayının alt uzaylarıdır.*

İspat. $x, y \in X_r$ olsun. Bu durumda x ve y nin sırasıyla $x + x' = \theta$ ve $y + y' = \theta$ olacak şekilde x' ve y' tersleri mevcuttur. Dolayısıyla bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $x' + \lambda \cdot y' \in X$ elemanı $x + \lambda \cdot y$ elemanının tersidir. Böylece $x + \lambda \cdot y \in X_r$, X'in bir alt uzayıdır.

$x, y \in X_s \cup \{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $x = y = 0$ için ispat açıktır. $x \neq 0$ ve $x + \lambda y \notin X_s \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$(x + \lambda \cdot y) + u = 0$$

olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Buradan

$$x + (\lambda \cdot y + u) = 0$$

yazılırsa

$$x' = \lambda \cdot y + u$$

olur. Bu ise $x \in X_r$ olması demektir. Benzer şekilde $y \neq 0$ için de $y \in X_r$ olduğu görülür. Bu durum $x, y \in X_s \cup \{0\}$ olması ile çelişir. O halde $x + \lambda \cdot y \in X_s \cup \{0\}$ olup Teorem 3.1.3'den $X_s \cup \{0\}$ kümesi X'in bir alt uzayıdır.

$x, y \in X_d$ ise $x = -x$ ve $y = -y$ olup bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$x + \lambda \cdot y = -x + \lambda \cdot (-y) = -(x + \lambda \cdot y)$$

olduğundan $x + \lambda \cdot y \in X_d$ olur. Buradan X_d kümesinin X'in bir alt uzayı olduğu görülmüş olur. $\square$

Uyarı 3.1.1. *[14] X_r, X'in lineer bir alt uzayı iken $X_s \cup \{0\}$ lineer olmayan bir alt uzayıdır.*

Örnek 3.1.3. *[11] $X = \Omega_C(\mathbb{R})$ ve*

$$Z = \{0\} \cup \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \neq b\}$$

olsun. Z kümesi X'in singüler bir alt uzayıdır. Fakat

$$W = \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$$

tüm tek noktalardan oluşan küme X_r'nin elemanıdır ve X'in bir alt uzayıdır. Aslında her E normlu lineer uzayı için, her $\{a\}$ tek noktası, yani $\{a\} \in E$, a ile belirlenir ve böylece E kümesi hem $\Omega(E)$'nin hemde $\Omega_C(E)$'nin regüler alt uzayı olur.

Uyarı 3.1.2. *Bir $t \in \mathbb{R}$ ve $A \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $t \subseteq A$ demek $\{t\} \subseteq A$ anlamına gelir. Ayrıca*

$$\begin{aligned} T &: (\Omega(\mathbb{R}))_r \to \mathbb{R} \\ \{t\} &\to T(\{t\}) = t \end{aligned}$$

ile tanımlı T dönüşümü [1]'den

$$\begin{aligned} |T(t_1) - T(t_2)| &= h(T(\{t_1\}), T(\{t_2\})) \\ &= h(t_1, t_2) \\ &= |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

olacağından bir izometri dönüşümüdür. Dolayısıyla $\Omega(\mathbb{R})$'nin regüler elemanlarının kümesi $\mathbb{R}$'ye denk yani $(\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}$ olur.

Örnek 3.1.4. *Örnek 3.1.3 de verilen $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin Z alt uzayını alalım. $\{0\}$, Z'deki tek minimal elemandır ve Z'nin başka minimali yoktur.*

3.2 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.2.1. *[1] X bir quasilineer uzay olsun. Bir $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, X üzerinde bir* ***norm*** *denir.*

$$x \neq \theta \Rightarrow \|x\|_X > 0, \tag{3.2.1}$$

$$\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X\,, \tag{3.2.2}$$

$$\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha|\,\|x\|_X\,, \tag{3.2.3}$$

$$x \preceq y \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X\,, \tag{3.2.4}$$

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists x_\epsilon \in X \text{ vardır öyle ki} \\ x \preceq y + x_\epsilon \text{ ve } \|x_\epsilon\|_X \leq \epsilon \Rightarrow x \preceq y \text{ olur.} \end{gathered} \tag{3.2.5}$$

Bir X quasilineer uzayında bir norm fonksiyonu tanımlıysa X'e bir **normlu quasilineer uzay** denir. Normlu quasilineer uzayda her elemanın toplamsal tersi varsa bu normlu quasilineer uzay, bilinen reel normlu lineer uzay yapısıyla örtüşür.

Örnek 3.2.1. *[1] Örnek 3.1.1 de verilen $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayları*

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A} \|a\|_E$$

normu ile birer normlu quasilineer uzaylardır.

$\forall A, B \in \Omega(E)$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $A \neq \theta$ olsun. Bu durumda $\exists\, a \in A$ için $a \neq 0_E$'dir. Öyleyse $\|\cdot\|_E$ normunun pozitiflik özelliği gereği $\|a\|_E > 0$ olur. Bu ise

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A} \|a\|_E > 0$$

demektir.

$$\begin{aligned} \|A+B\|_{\Omega(E)} &= \sup_{(a+b)\in A+B} \|a+b\|_E \\ &\leq \sup_{(a+b)\in A+B} \left(\|a\|_E + \|b\|_E\right) \\ &\leq \sup_{a\in A} \left(\|a\|_E\right) + \sup_{b\in B} \left(\|b\|_E\right) \\ &\leq \|A\|_{\Omega(E)} + \|B\|_{\Omega(E)} \end{aligned}$$

bağıntısı doğrudur. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}\|\alpha \cdot A\|_{\Omega(E)} &= \sup_{a\in A} \|\alpha \cdot a\|_E = |\alpha|\, sup_{a\in A} \|a\|_E \\ &= |\alpha|\, \|\ A\|_{\Omega(E)}\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $A \subseteq B$ olsun.

$$\|A\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A} \|a\|_E = k \ \ ve \ \ \|B\|_{\Omega(E)} = \sup_{b\in B} \|b\|_E = l$$

dersek, hipotez gereği $a \in B$ olacağından $k \leq l$, yani $\|A\|_{\Omega(E)} \leq \|B\|_{\Omega(E)}$ olur. Son olarak $\forall\epsilon > 0$ için

$$A \subseteq B + A_\epsilon \ \ ve \ \ \|A_\epsilon\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A_\epsilon} \|a\|_E \leq \epsilon$$

şartını sağlayan $\exists A_\epsilon \in \Omega(E)$ olsun. Şimdi bu şartın hipotezinin keyfi $A, B \in \Omega(E)$ için sağlandığını fakat $A \nsubseteq B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir $a \in A$ vardır ve $a \notin B$'dir. B kapalı olduğundan a noktasının B kümesine olan uzaklığı

$$d(a, B) = \inf_{b\in B} \|a - b\|_E \neq 0$$

'dır. Hipotezden, $\epsilon = \frac{d(a,B)}{2}$ için $A \subseteq B + A_\epsilon$ ve $\|A_\epsilon\|_{\Omega(E)} = \sup_{a\in A_\epsilon} \|a\|_E \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $A_\epsilon \in \Omega(E)$ mevcuttur. $a \in A$ olduğundan $a \in B + A_\epsilon$'dur. Öyleyse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n \in B$ ve $a_n \in A_\epsilon$ olmak üzere

$$a = \lim_{n\to\infty} (b_n + a_n)$$

olur. Fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\|a - (b_n + a_n)\|_E &\geq |\|a - b_n\|_E - \|a_n\|_E| \\ &\geq |d(a, B) - \|a_n\|_E| \\ &\geq \left| d(a, B) - \frac{d(a, B)}{2} \right| \\ &= \frac{d(a, B)}{2}\end{aligned}$$

olur. Bu durum $a = \lim_{n\to\infty}(b_n + a_n)$ eşitliği ile çelişir. Öyleyse $A \subseteq B$'dir.

Böylece $\Omega(E)$ bir normlu quasilineer uzaydır. $\Omega_C(E)$ ise $\Omega(E)$'nin bir altuzayı olup aynı normla bir normlu guasilineer uzay teşkil eder. Bu durumda bu uzaylar için Hausdorff metrik, $S_r(\theta)$, θ merkezli r yarıçaplı kapalı küre olmak üzere

$$h(A,B) = \inf\{r \geq 0 : \ A \subseteq B + S_r(\theta), \ B \subseteq A + S_r(\theta)\}$$

'dir.

Tanım 3.2.2. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun. X üzerinde Hausdorff metrik tanımı şu şekilde yapılır. Her $x, y \in X$ için*

$$h_X(x,y) = \inf\{r \geq 0 : \ x \preceq y + a_1^r, \ y \preceq x + a_2^r, \ \|a_i^r\|_X \leq r\} \tag{3.2.6}$$

'dir. $x, y \in X$ için

$$x \preceq y + (x-y) \ ve \ y \preceq x + (y-x)$$

bağıntıları doğru olduğundan $h_X(x,y)$ iyi tanımlıdır. Ayrıca tanımdan dolayı $\forall$ $x, y \in X$ için $h_X(x,y) \leq \|x-y\|_X$ eşitsizliği doğrudur. $h_X(x,y)$ fonksiyonu metrik aksiyomlarını sağlar. Bu metriğe ***norm metriği*** *ya da* ***Hausdorff metrik*** *denir. Dikkat edelim ki $h_X(x,y)$ norm vasıtasıyla elde edilmiş olsa da $h_X(x,y) = \|x-y\|_X$ olmayabilir.*

Örnek 3.2.2. *[1] X bir reel tam normlu lineer uzay (bir reel Banach uzayı) olsun. Bu durumda X bir tam normlu quasilineer uzaydır. X'i quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısıdır. Diğer taraftan, eğer X bir tam normlu quasilineer uzay ise ve $\forall x \in X$ için bir $x' \in X$ ters elemanı mevcut ise bu durumda X bir reel Banach uzayı olur ve kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Üstelik $h_x(x,y) = \|x-y\|_X$ olur.*

Lemma 3.2.1. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun. Cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri, Hausdorff metriğe göre süreklidir. Ayrıca X'deki norm fonksiyonu da Hausdorff metriğe göre süreklidir.*

İspat. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun. O halde $\forall \epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir N doğal sayısı vardır:

$$x_n \preceq x + a_{1,n}^\epsilon, \ x \preceq x_n + a_{2,n}^\epsilon, \quad \left\|a_{i,n}^\epsilon\right\| \leq \epsilon,$$
$$y_n \preceq y + b_{1,n}^\epsilon, \ y \preceq y_n + b_{2,n}^\epsilon, \quad \left\|b_{i,n}^\epsilon\right\| \leq \epsilon$$

olur. (3.1.12) şartından

$$x_n + y_n \preceq x + y + a^{\epsilon}_{1,n} + b^{\epsilon}_{1,n}$$

ve

$$x + y \preceq x_n + y_n + a^{\epsilon}_{2,n} + b^{\epsilon}_{2,n}$$

elde edilir. Bu ise $x_n + y_n \to x + y$ demektir. Sonuç olarak cebirsel toplama süreklidir. Reel sayılarla çarpma işleminin sürekliliği ve norm fonksiyonunun sürekliliğinin ispatı benzer şekilde yapılır. □

Hausdorff metriğe göre

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } h_X(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = |\alpha|\, h_X(x, y), \tag{3.2.7}$$

$$h_X(x + y, z + v) \leq h_X(x, z) + h_X(y, v), \tag{3.2.8}$$

$$\|x\|_X = h_X(x, \theta) \tag{3.2.9}$$

şartları sağlanır.

Lemma 3.2.2. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun.*

a) Eğer $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n$ ise, bu takdirde $x_0 \preceq y_0$'dir.

b) Eğer $x_n \to x_0$, $z_n \to x_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n \preceq z_n$ ise $y_n \to x_0$'dir.

c) Eğer $x_n + y_n \to x_0$ ve $y_n \to \theta$ ise bu takdirde $x_n \to x_0$'dir.

İspat. a) Hipotezden her $\epsilon > 0$ için bir N elemanı vardır öyle ki $n \geq N$ için $x_0 \preceq x_n + a^{\epsilon}_n, \|a^{\epsilon}_n\|_X \leq \epsilon$ ve $y_n \preceq y_0 + b^{\epsilon}_n, \|b^{\epsilon}_n\|_X \leq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $a^{\epsilon}_n, b^{\epsilon}_n \epsilon X$ vardır. Buradan $x_n \preceq y_n$ olduğundan $n \geq N$ için $x_0 \preceq y_0 + a^{\epsilon}_n + b^{\epsilon}_n$ olur. $\|a^{\epsilon}_n + b^{\epsilon}_n\|_X \leq \|a^{\epsilon}_n\|_X + \|b^{\epsilon}_n\|_X \leq 2\epsilon$ olduğundan (3.2.5)'den $x_0 \preceq y_0$'dır. b) ve c)'nin ispatı benzer şekilde yapılır. □

Tanım 3.2.3. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun. Eğer*

$$\|x\| \leq \|B_X\| \Rightarrow x \preceq B_X \tag{3.2.10}$$

şartını sağlayan bir $B_X \neq \theta$ elemanı varsa X uzayına bir $\mathbf{\Omega}-$uzayı denir.

Eğer X bir $\Omega-$uzayı ise

$$\begin{aligned} B_X &: [0,+\infty) \to X \\ t &\to B_X(t) = t \cdot B_X \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar.

$$x \preceq B_X\left(\|x\|_X\right),$$

$$t \preceq s \Rightarrow B_X(t) \preceq B_X(s),$$

$$B_X(t) = t \cdot B_X,$$

$$B_X(t+s) = B_X(t) + B_X(s).$$

Eğer X bir reel normlu lineer uzay ise $\Omega(X)$ bir $\Omega-$uzayıdır.

Örnek 3.2.3. *[1] S kompakt topolojik uzay, X'de tam $\Omega-$uzayı olsun. S'den X'e tüm sürekli f fonksiyonlarının kümesini $C(S,X)$ ile gösterelim. Her $s \in S$ için $f_1(s) \preceq f_2(s)$ ise $f_1 \preceq f_2$ olsun. Bu küme üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$\begin{aligned} (f_1+f_2)(s) &= f_1(s)+f_2(s), \\ (\alpha \cdot f)(s) &= \alpha \cdot f(s). \end{aligned}$$

$C(S,X)$ kümesi üzerindeki norm

$$\|f\|_C = \max_{s \in S} \|f(s)\|_X$$

ise $C(S,X)$ bir $\Omega-$uzayı'dır.

Tanım 3.2.4. *[1] X ve Y birer quasilineer uzay olsunlar. $\Lambda : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere, $\forall x, x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlarsa Λ'ya bir **quasilineer operatör** denir.*

$$\Lambda(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \Lambda(x), \tag{3.2.11}$$

$$\Lambda(x_1+x_2) \preceq \Lambda(x_1) + \Lambda(x_2), \tag{3.2.12}$$

$$x_1 \preceq x_2 \Rightarrow \Lambda(x_1) \preceq \Lambda(x_2). \tag{3.2.13}$$

X ve Y birer lineer uzay ise quasilineer operatör tanımı klasik lineer operatör tanımıyla çakışır. (3.2.13) şartı kendiliğinden sağlanır.

Tanım 3.2.5. *[1] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsun. $\Lambda : X \to Y$ quasilineer dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\left\|\Lambda(x)\right\|_Y \leq k \left\|x\right\|_X$$

*olacak şekilde $\exists k > 0$ reel sayısı varsa Λ'ya **sınırlı quasilineer operatör** denir.*

Lemma 3.2.3. *[1] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsun. $\Lambda : X \to Y$ quasilineer operatörü verilsin.*

$$\Lambda \text{ sınırlıdır } \Leftrightarrow \Lambda, \theta \in X \text{ noktasında süreklidir.}$$

Ayrıca Λ'nın θ'daki sürekliliği, Λ'nın X üzerinde düzgün sürekliliğini gerektirir.

Şimdi sınırlı quasilineer operatörlerin uzayını tanıyalım [1] :

X ve Y birer normlu quasilineer uzay olmak üzere, X'den Y'ye tüm sınırlı quasilineer operatörlerin ailesi $\Lambda(X,Y)$ ile gösterilir. $\Lambda(X,Y)$ sınırlı quasilineer operatörler ailesi

$$\Lambda_1 \lesssim \Lambda_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \Lambda_1(x) \preceq \Lambda_2(x)$$

şeklinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve

$$+ : \Lambda(X,Y) \times \Lambda(X,Y) \to \Lambda(X,Y)$$

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \Lambda(X,Y) \to \Lambda(X,Y)$$

$$(\alpha \cdot \Lambda)(x) = \alpha \cdot \Lambda(x)$$

işlemleri ile bir quasilineer uzaydır. Burada "$\preceq$" sembolü Y'deki kısmi sıralamadır. "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri Y'nin işlemleri olup aynı semboller $\Lambda(X,Y)$ için de kullanılmıştır. Ayrıca,

$$\left\|\Lambda\right\|_\Lambda = \sup_{\left\|x\right\|_X = 1} \left\|\Lambda(x)\right\|_Y$$

normuyla $\Lambda(X,Y)$ bir normlu quasilineer uzaydır [1].

Teorem 3.2.1. *[1] X bir normlu quasilineer uzay, Y ise tam normlu quasilineer uzay olsun. Bu durumda $\Lambda(X,Y)$ bir tam normlu quasilineer uzaydır.*

Tanım 3.2.6. *[14]* ***(Yarı Normlu Quasilineer Uzay)*** *X bir quasilineer uzay olsun. Bir $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, X üzerinde bir* ***yarı norm*** *denir.*

$$x = \theta \Rightarrow \|x\|_X = 0,$$

$$\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \,,$$

$$\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X \,,$$

$$x \preceq y \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X \,.$$

Bir X quasilineer uzayında bir yarı norm fonksiyonu tanımlıysa X'e bir ***yarı normlu quasilineer uzay*** *denir. Yarı normlu quasilineer uzayda her elemanın toplamsal tersi varsa bu yarı normlu quasilineer uzay, bilinen reel yarı normlu lineer uzay yapısıyla örtüşür.*

3.3 Quasilineer Uzaylarda Baz ve Boyut

Bu kısımda 4. ve 5. bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler [3], [12] ve [13]'den yararlanılarak verilecektir.

Tanım 3.3.1. *[3] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = x$$

olacak şekildeki x elemanına $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir ***lineer kombinasyonu****,*

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \preceq x$$

olacak şekildeki x elemanına ise $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir ***quasilineer kombinasyonu*** *(kısaca ql-kombinasyonu) denir.*

Tanım 3.3.2. *[3] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın quasi gerdiği küme;*

$$QspA = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \preceq x, \;\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in A, \;\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Yani $QspA$, A'nın muhtemel quasilineer kombinasyonlarının kümesidir. Şunu belirtelim ki A'nın tüm muhtemel quasilineer kombinasyonlarının kümesi, A'nın tüm muhtemel lineer kombinasyonları (yani SpA) ve muhtemel kombinasyonlardan sıralama bağıntısına göre büyük veya eşit olan elemanlardan ibarettir. Burada

$$SpA = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in A,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

'dır. $SpA \subseteq QspA$ olduğu açıktır. Eğer X bir lineer uzay ise $SpA = QspA$ olur. O halde $QspA$ kavramına ihtiyaç kalmaz.

Örnek 3.3.1. *[3] $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $A = \{[1,3]\} \subset \Omega_C(\mathbb{R})$ alt kümesi olsun. A, $\Omega_C(\mathbb{R})$'de tek elemanlı bir küme olup A'nın quasi gerdiği küme;*

$$QspA = Qsp\{[1,3]\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot [1,3] \subseteq x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

'dir. Örneğin; $[1,3] \in QspA$ iken $[2,3] \notin QspA$'dır. Çünkü; $\lambda \cdot [1,3] \subseteq [2,3]$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcut değildir. Buradan da görülmektedir ki $QspA \neq \Omega_C(\mathbb{R})$'dir. Ayrıca $[-3,3]$ elemanı SpA'nın elemanı değil iken $QspA$'nın bir elemanıdır.

Örnek 3.3.2. *[3] $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $B = \{\{\sqrt{2}\}\}$ kümesinin quasi gerdiği küme*

$$QspB = Qsp\{\{\sqrt{2}\}\} = \left\{ x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \alpha \cdot \{\sqrt{2}\} \subseteq x,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \Omega_C(\mathbb{R})$$

'dir. Gerçekten de $\forall x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için

$$\alpha \cdot \{\sqrt{2}\} \subseteq x$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $SpB = (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$'dir.

Sonuç 3.3.1. *[3] $\mathbb{R}$'nin bir aralığına yani $\mathbb{R}$'nin bir tek nokta kümesine dejenere aralık dediğimizi hatırlayalım. Tek noktadan oluşan bir dejenere aralık, yani $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$'yi quasi gerer.*

Sonuç 3.3.2. *[3] Yukarıdaki sonuçta verilen durum $\mathbb{R}$'deki bir tek nokta kümesinin ($\{0\}$ hariç) $\mathbb{R}$'yi germesine benzer. Örneğin $Sp\{1\} = \mathbb{R}$'dir. Buradan da $Qsp\{\{1\}\} = \Omega_C(\mathbb{R})$ yazarız.*

Teorem 3.3.1. *[3] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ olsun. $QspA$, X'in bir alt uzayıdır.*

Tanım 3.3.3. *[3] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olsun.*

$$0_X \preceq \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$$

*eşitliği ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ için mümkün oluyorsa $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesine **quasilineer bağımsız** (ql-bağımsız), aksi halde **quasilineer bağımlı** (ql-bağımlı) denir.*

Örnek 3.3.3. *[3] $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $\{[1, 2]\}$ kümesini ele alalım.*

$$\{0\} \subseteq \alpha \cdot [1, 2]$$

olması ancak ve ancak $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ için mümkündür. O halde $\{[1, 2]\}$ kümesi quasilineer bağımsızdır. Yine bu uzayda $\{[-1, 2]\}$ kümesini ele alalım.

$$\{0\} \subseteq \beta \cdot [-1, 2]$$

ifadesi tüm $\beta \in \mathbb{R}$ sayıları için (sözgelimi $\beta = 2 \neq 0$ sayısı için) sağlandığından $\{[-1, 2]\}$ kümesi quasilineer bağımlıdır.

Bu durum lineer uzaylarda alışılagelmiş durumdan farklıdır. Bir lineer uzayın sıfırdan farklı bir tek nokta kümesi lineer bağımsızdır. Fakat bir quasilineer uzayın sıfırdan farklı her tek nokta kümesi lineer bağımsız olmayabilir. Örneğin $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayının $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ tek nokta kümesi ve dejenere olmayıp sıfırı da ihtiva etmeyen bir tek nokta kümesi quasilineer bağımsızdır. Fakat $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi sıfırı ihtiva eden bir tek nokta kümesi quasilineer bağımlı olabilir. Bu durumda bir lineer uzayın sıfırdan farklı bir tek noktaya sahip alt kümesi quasilineer bağımsız olmasına rağmen bir quasilineer uzayın sıfırdan farklı bir tek noktaya sahip alt kümesi quasilineer bağımlı da olabilir quasilineer bağımsız da olabilir.

Örnek 3.3.4. *[3] $(\Omega_C(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ quasilineer uzayında,*

$$\begin{aligned} v_1 &= \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}, \\ v_2 &= \{(x, y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\{v_1, v_2\}$ *kümesini ele alalım.*

$$\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$$

olsun. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *alalım. Bu durumda*

$$\{(0,0)\} \subseteq v_1 + v_2$$

olduğundan $\{v_1, v_2\}$ *kümesi* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayında quasilineer bağımlıdır.*

Örnek 3.3.5. $A = \left\{[1,3], \left\{-\sqrt{5}, -1, 0, 2, 7\right\}\right\}$ *kümesi* $(\Omega(\mathbb{R}), \subseteq)$ *quasilineer uzayının iki elemanlı bir alt kümesidir ve*

$$\{0\} \subseteq 0 \cdot [1,3] + 1 \cdot \left\{-\sqrt{5}, -1, 0, 2, 7\right\}$$

sağlanacağından A kümesi quasilineer bağımlıdır. Fakat, $(\Omega(\mathbb{R}), \subseteq)$ *quasilineer uzayının* $\left\{\left\{-\sqrt{5}, -1, 2, 7\right\}\right\}$ *tek nokta kümesi* $\Omega(\mathbb{R})$*'de quasilineer bağımsızdır.*

Teorem 3.3.2. *[3]* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında iki elemanlı her küme quasilineer bağımlıdır.*

Sonuç 3.3.3. *[3]* $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *quasilineer uzayında* $n+1$ *elemanlı her küme quasilineer bağımlıdır.*

Tanım 3.3.4. *[3]* X *bir quasilineer uzay ve* $A \subset X$ *olsun. Eğer* A *kümesi quasilineer bağımsız ve* $QspA = X$ *ise* A*'ya* X*'in bir* ***bazı*** *(Hamel Bazı) denir.*

Örnek 3.3.6. *[3]* $A = \{\{1\}\}$ *kümesi* $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ *quasilineer uzayı için bir baz teşkil eder.*

Şimdi bir quasilineer uzayın boyutu kavramını [12]'den yararlanarak verelim. Lineer uzaylardaki klasik anlayıştan farklı olarak bir quasilineer uzayın boyutu denildiğinde "singüler boyut" ve "regüler boyut" olmak üzere iki yeni kavram ortaya çıkacaktır.

Tanım 3.3.5. *[12] Bir* X *quasilineer uzayının singüler alt uzayının barındırabileceği ql-bağımsız elemanların maksimum sayısına* X*'in* ***singüler boyutu*** *denir. Singüler boyut kısaca s-boyut olarak yazılır ve* $s - boyX$ *ile gösterilir.* X*'in regüler alt uzayı olan lineer uzayın boyutuna da* X*'in* ***regüler boyutu*** *denir. Regüler boyut kısaca r-boyut olarak yazılır ve* $r - boyX$ *ile gösterilir.*

Eğer bir quasilineer uzayda $r - boyX = a$ ve $s - boyX = b$ ise bu uzaya (a_r, b_s) boyutlu quasilineer uzay denir. Tanımdan açıkca görüyoruz ki n-boyutlu bir lineer uzay $(n_r, 0_s)$ boyutlu bir quasilineer uzaydır.

Tanım 3.3.6. *[12] X bir quasilineer uzay olmak üzere,*

$$s - boyX = r - boyX = n$$

ise (n_r, n_s) sayısına X quasilineer uzayının boyutu denir ve X, n boyutlu bir quasilineer uzaydır denir. Eğer bir X quasilineer uzayının boyutu $(n_r, 0_s)$ ise X, n boyutlu bir lineer uzaydır.

Uyarı 3.3.1. *Quasilineer uzaylarda regüler boyut ve singüler boyut kavramları, lineer uzaylardaki boyut kavramı düşüncesinin bir genelleştirmesidir. Quasilineer uzay olarak bir X lineer uzayı gözönüne alınırsa X'in singüler boyutunun 0 olduğu görülür. Aslında lineer uzaylarda singüler boyut 0 olduğundan, söz konusu uzayın boyutu, tanımı yukarıda verilen regüler boyuta karşılık gelmektedir. Böylece lineer uzaylarda regüler boyut yerine sadece " boyut" ifadesi kullanılacaktır.*

Şimdi bir quasilineer uzayın boyutu kavramını daha iyi anlayabilmek için bazı örnekler verelim.

Örnek 3.3.7. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayının singüler alt uzayına A diyelim. $A_r = \{0\}$ olduğundan $r - boyA = 0$'dır. Ayrıca, $\{[1,2]\}$, A_s nin quasilineer bağımsız bir elemanı olduğundan $s - boyA = 1$ olur. Böylece A, $(0_r, 1_s)$ boyutlu bir quasilineer uzay olur. Açık olarak $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayının regüler alt uzayının boyutu $(1_r, 0_s)$'dir.*

Uyarı 3.3.2. *Bir quasilineer uzayın singüler boyutunun 0 olması o uzayın lineer uzay olduğu anlamına gelmez. Örneğin; $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik elemanlarının kümesi olan $\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_d$ alt uzayını düşünelim. Burada $r - boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_d = s - boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_d = 0$ olmasına rağmen $\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_d$ quasilineer bir uzaydır.*

Örnek 3.3.8. *[12] $\mathbb{R}$, $\Omega_C(\mathbb{R}), \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_s \cup \{\{0\}\}$ ve $\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$ quasilineer uzaylarının* *regüler ve singüler boyutları sırasıyla şu şekildedir:*

$$\begin{aligned} r-boy\mathbb{R} &= 1 \text{ } ve \text{ } s-boy\mathbb{R}=0, \\ r-boy\Omega_C(\mathbb{R}) &= 1 \text{ } ve \text{ } s-boy\Omega_C(\mathbb{R})=1, \\ r-boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_s \cup \{\{0\}\} &= 0 \text{ } ve \text{ } s-boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_s \cup \{\{0\}\}=1, \\ r-boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r &= 1 \text{ } ve \text{ } s-boy\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r=0. \end{aligned}$$

Örnek 3.3.9. *[12] $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayının*

$$W=\left(\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)\right)_s \cup \{\{(t,0)\}: t\in\mathbb{R}\}$$

alt uzayı ve W_s nin

$$w_1=\{(0,s): 1\le s\le 2\}$$

ve

$$w_2=\{(t,0): 1\le t\le 2\}$$

elemanları verilsin. $\{(0,0)\}\subseteq \lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2$ *kapsamını sağlayan* 0 *dan farklı* λ_1 *ve* λ_2 *skalerleri olmadığından* $\{w_1,w_2\}$ *kümesi W_s'de quasilineer bağımsızdır. Buna göre* $s-boyW\ge 2$ *olur.* W, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$*'nin alt quasilineer uzayı olduğundan Sonuç 3.3.3 gözönünde bulundurulursa* $s-boyW=2$ *elde edilir. Ayrıca*

$$W_r=\{\{(t,s)\}: t\in\mathbb{R},\ s=0\}$$

olup, W*'nin regüler alt uzayı* $\mathbb{R}$ *kümesine denktir. Böylece* $r-boyW=1$*'dir.*

Örnek 3.3.10. *[12]* $\mathbb{R}^2$, $\Omega_C(\mathbb{R}^2), (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_s\cup\{\theta\}$ *ve* $(\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ *quasilineer uzaylarının regüler ve singüler boyutları sırasıyla şu şekildedir:*

$$\begin{aligned} r-boy\mathbb{R}^2 &= 2 \text{ } ve \text{ } s-boy\mathbb{R}^2=0, \\ r-boy\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right) &= 2 \text{ } ve \text{ } s-boy\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)=2, \\ r-boy\left(\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)\right)_s \cup \{\theta\} &= 0 \text{ } ve \text{ } s-boy\left(\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)\right)_s \cup \{\theta\}=2, \\ r-boy\left(\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)\right)_r &= 2 \text{ } ve \text{ } s-boy\left(\Omega_C\left(\mathbb{R}^2\right)\right)_r=0. \end{aligned}$$

Örnek 3.3.11. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *quasilineer uzayının regüler alt uzayı* $\mathbb{R}^n$ *ve* $(\Omega_C(\mathbb{R}^n))_s\cup\{\theta\}$ *alt uzayında en fazla n tane eleman quasilineer bağımsız olacağından* $r-boy\Omega_C(\mathbb{R}^n)=n$ *ve* $s-boy\Omega_C(\mathbb{R}^n)=n$*'dir.*

Şimdi, dördüncü bölümde bir iç çarpım quasilineer uzayında tanımlayacağımız Schauder baz, ortonormal baz ve tam ortonormal baz kavramlarını verebilmemiz için gerekli ve önemli olan sağlam zeminli quasilineer uzay kavramını [13] ve [12]'den yararlanarak verelim.

Tanım 3.3.7. *[12] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $M \subseteq X$ ve $x \in M$ olsun. "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısına göre x elemanından önce gelen M kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine x elemanının M'deki zemini, x elemanından önce gelen X kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine ise x elemanının X'deki zemini denir ve sırasıyla F_x^M ve F_x^X ile gösterilir. Buna göre*

$$F_x^M = \{y \in M_r : y \preceq x\}$$

ve

$$F_x^X = \{y \in X_r : y \preceq x\}$$

'dir.

Tanım 3.3.8. *[12] X bir quasilineer uzay ve $M \subseteq X$ olsun. M kümesinin zemini, M kümesindeki tüm elemanların M'deki zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve F_M ile gösterilir. Buna göre,*

$$F_M = \bigcup_{x \in M} F_x^M$$

'dir.

M kümesinin X'deki zemini, M kümesindeki tüm elemanların X'deki zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve F_M^X ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{F}_M^X = \bigcup_{x \in M} F_x^X$$

'dir.

Bir X quasilineer uzayının zemini ise, X'deki tüm elemanların zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve F_X ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{F}_X = \bigcup_{x \in X} F_x$$

'dir.

Sonuç 3.3.4. *[3] Bir X quasilineer uzayının zemini olan F_X kümesi X'in bir alt uzayıdır.*

Uyarı 3.3.3. *[3] Bir X quasilineer uzayında bir $x \in X$ elemanının zemini alt uzay olmayabilir.*

Tanım 3.3.9. *[13] Bir X quasilineer uzayında her $y \in X$ için $\sup F_y$ mevcut ve*

$$y = \sup \{x \in X_r : x \preceq y\}$$

oluyorsa X quasilineer uzayına ***sağlam zeminli*** *(solid-floored) denir. Eğer yukarıdaki şart sağlanmıyorsa bu durumda X'e* ***sağlam zeminli olmayan*** *(non-solid floored) quasilineer uzay denir.*

Bu tanımdaki supremumdan anladığımız X quasilineer uzayının "$\preceq$" bağıntısına göre supremumudur. Yani bir X quasilineer uzayının sağlam zeminli quasilineer uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $y \in X$ için $\sup F_y$ mevcut ve $y = \sup F_y$ olmasıdır.

Örnek 3.3.12. *[13] E bir normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayları sağlam zeminli quasilineer uzaylardır. $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler alt uzayı olan $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{0\}$ sağlam zeminli olmayan quasilineer uzaydır. Örneğin; $y = [-2, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{0\}$ için*

$$\sup \left\{x : x \in ((\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{0\})_r\,,\ x \subseteq y\right\} = \{0\} \neq y$$

'dır. Ayrıca $z = [1, 3] \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{0\}$ elemanı için $x \subseteq z$ olacak şekilde $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \cup \{0\}$'nin hiçbir elemanı yoktur.

Örnek 3.3.13. *[12] $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayı verilsin. $r > 0$ olmak üzere,*

$$A = \left\{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq r\right\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$'nin boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir ve dolayısıyla $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ olur. $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$'nin standart bazı olan $\{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ yardımıyla A kümesindeki bir x elemanı için $\{x\} = \{(x_1, x_2)\} \in (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ elemanı

$$\{x\} = x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\}$$

şeklinde tek türlü bir gösterime sahiptir. Ayrıca $\{x\} \in (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ *ve* $\{x\} = \{(x_1, x_2)\} \subseteq A$ *olduğundan* $x_1^2 + x_2^2 \leq r$*'dir. Diğer taraftan* A *ile üstten sınırlı olan*

$$F_A = \left\{\{x\} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r : \{x\} \subseteq A\right\}$$

kümesinde "$\subseteq$*" kısmi sıralama bağıntısı üzerinden supremum alınırsa,*

$$\begin{aligned} & \sup_{\subseteq} \left\{\{x\} = \{(x_1, x_2)\} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R}^2)\right)_r : \{x\} \subseteq A\right\} \\ = \; & \sup_{\subseteq} \left\{\{x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\}\} : x_1^2 + x_2^2 \leq r\right\} \\ = \; & A \end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

İÇ ÇARPIM QUASİLİNEER UZAYLARI VE HİLBERT QUASİLİNEER UZAYLAR

Üçüncü bölümde görüyoruz ki, Aseev [1] numaralı çalışmasında quasilineer uzay ve normlu quasilineer uzay teorisini geliştirmiş ve bu uzaylarla ilgili bir takım sonuçlar elde etmiştir. Biz de bu bölümde Aseev'in çalışmasından yola çıkarak quasilineer uzay teorisinin gelişimine önemli ölçüde katkı sağlayacağını düşündüğümüz iç çarpım quasilineer uzayı ve Hilbert quasilineer uzay kavramını tanıtacağız. Bu nedenle, X bir quasilineer uzay olmak üzere $X \times X$ quasilineer uzayı üzerinde yeni bir fonksiyon tanımlayacağız ve bu fonksiyonu iç çarpım fonksiyonu olarak adlandıracağız. Tanımlanan bu yeni fonksiyon lineer iç çarpım uzaylarından farklı olarak Aseev'in [1] numaralı çalışmasında kullandığı kısmi sıralama bağıntısını da içerecek ve bu iç çarpım ile X üzerinde bir norm oluşturulacaktır. Dolayısıyla, inceleyeceğimiz iç çarpım quasilineer uzaylarının aslında bir özel normlu quasilineer uzay olduğu görülecektir. Yine burada iç çarpımın oluşturduğu norm altında, X bir Banach uzayı ise X uzayına bir Hilbert quasilineer uzay denilmiş ve lineer iç çarpım uzaylarında sağlanan bazı özelliklerin, iç çarpım quasilineer uzaylarında da sağlandığı, bazılarının ise sağlanmayacağı gösterilmiştir. Burada tanımlanacak olan iç çarpım quasilineer uzayı kavramı [15]'de verilmiştir.

Lineer iç çarpımın sahip olduğu en önemli özelliklerden biri de vektörlerinin ortogonalliğinin tanımlanabilmesidir. Bu da Hilbert uzay teorisini Banach uzayı teorisinden daha zengin ve faydalı kılmaktadır. Bu nedenle, burada lineer iç çarpım uzaylarının bir genelleştirmesi olarak tanımladığımız iç çarpım quasilineer uzaylarının geometrisini daha iyi anlayabilmek için quasilineer uzay teorisinde yeni olan iki elemanın dikliği kavramı tanımlanmış ve bu kavram ile ilgili bazı araştırmalar yapılmıştır. Yine burada bir normlu quasilineer uzayın Schauder bazı kavramı verilmiş ve bununla ilgili önemli teorem ve sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde yarı iç çarpım quasilineer uzayı kavramı tanıtılmıştır.

Çalışmalarımızın devamında ise klasik fonksiyonel analizde verilen tanım ve teoremlerin, tanımlamış olduğumuz iç çarpım quasilineer uzaylarındaki karşılıkları incelenmiştir. Burada çalışmalarımızı yaparken unutmamamız gereken en önemli unsurlar, quasilineer uzaylarda singüler eleman olarak ifade ettiğimiz tersi olmayan elemanların olması ve burada alacağımız iki eleman arasındaki uzaklığın Hausdorff metriğe göre olduğudur. Bu bölümde elde ettiğimiz önemli bir bulgu da bir Hilbert quasilineer uzayın her elemanının Hilbert uzayın kapalı alt uzayının bir elemanı ve bu alt uzayın dikey kümesinin bir elemanının toplamı olarak ifade edilememesidir. Yani quasilineer uzay teorisinde "Ortogonal Parçalanma Teoreminin" sağlanmamasıdır. Bununla ilgili önemli örnek ve sonuçlar burada verilmiştir. Ayrıca bu bölüm içerisinde quasilineer uzay teorisinde yeni olan, [3] ve [12]'de verilen zemin, quasilineer bağımlılık, quasilineer bağımsızlık kavramlarıyla ilgili bir takım araştırmalar bulunmaktadır.

4.1 İç Çarpım Quasilineer Uzayları ve Hilbert Quasilineer Uzaylar

Bu kısımda lineer iç çarpım uzaylarının bir genelleştirmesi olan iç çarpım quasilineer uzayı kavramını vereceğiz. Burada bir quasilineer uzay üzerinde tanımlayacağımız iç çarpım fonksiyonu klasik analizden farklı olarak küme değerli bir fonksiyon olarak tanımlanacaktır. Nasıl ki Aseev lineer operatörlerin quasilineer uzaylarda yerini tutan $\Omega(\mathbb{R})$ değerli yani küme değerli operatörleri incelemiş ise biz de burada $\Omega(\mathbb{R})$ değerli fonksiyon olarak iç çarpımı vereceğiz.

İlk olarak iç çarpım quasilineer uzayı tanımını vermeden önce bu kavram için gerekli olan bazı yeni tanım ve örnekleri verelim.

Tanım 4.1.1. *X bir quasilineer uzay olsun. X'i kapsayan sağlam zeminli quasilineer uzayların en küçüğüne X'**in sağlamlaştırılması** denir ve $\widehat{X}$ ile gösterilir. Yani, X'i kapsayan başka bir sağlam zeminli Y quasilineer uzayı varsa $\widehat{X} \subseteq Y$'dir.*

Bazı sağlam zeminli X quasilineer uzayları için $\widehat{X} = X$ olduğu açıktır. Örneğin; $\Omega_C(\mathbb{R})$ sağlam zeminli bir quasilineer uzay olduğundan $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin sağlamlaştırması kendisine eşittir. Yine aynı şekilde $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})})_r = (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$'dir. X bir quasilineer uzay ve $y \in X$ ise y nin $\widehat{X}$'deki zemini

$$F_y^{\widehat{X}} = \left\{ z \in \left(\widehat{X}\right)_r : z \preceq y \right\}$$

ile gösterilir.

Lemma 4.1.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin singüler elemanlarının kümesi olan $\Omega_C(\mathbb{R})_s$ alt uzayının sağlamlaştırması $\Omega_C(\mathbb{R})$'dir. Yani $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})})_s = \Omega_C(\mathbb{R})$'dir.*

İspat. Kabul edelimki $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})})_s \neq \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda sağlamlaştırma tanımı gereği $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s$'yi kapsayan $\Omega_C(\mathbb{R})$'den daha küçük sağlam zeminli bir Y alt uzayı vardır. Yani

$$(\Omega_C(\mathbb{R}))_s \subset Y \subset \Omega_C(\mathbb{R})$$

olacak şekilde Y sağlam zeminli alt uzayı vardır. Buradan her $y \in Y$ için $y = \sup\{x \in Y_r : x \subseteq y\}$'dir. $Y \neq \Omega_C(\mathbb{R})$ kabulümüzden $Y_r \neq (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$, buradan da en az bir $\{a\} \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ için $\{a\} \notin Y_r$ olur. Dolayısıyla $y = [0, a] \in Y$ için

$$[0, a] \neq \sup\{x \in Y_r : x \subseteq [0, a]\}$$

'dir. Bu da Y'nin sağlam zeminli olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s$'yi kapsayan en dar sağlam zeminli quasilineer uzay $\Omega_C(\mathbb{R})$'dir. $\Omega_C(\mathbb{R})$'den başka $(\Omega_C(\mathbb{R}))_s$'yi kapsayan $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin sağlam zeminli bir alt kümesi yoktur. □

Sonuç 4.1.1. *Daha genel olarak $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R}^n)})_s = \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dır.*

Tanım 4.1.2. *Bir X quasilineer uzayında bir iç çarpım, $X \times X$'den $\Omega(\mathbb{R})$ içine tanımlı aşağıdaki şartları sağlayan bir $\langle .,. \rangle$ fonksiyonudur. Her $x, y, z, u, v \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için;*

$$x, y \in X_r \text{ ise } \langle x, y \rangle \in (\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}, \tag{4.1.1}$$

$$\langle x + y, z \rangle \subseteq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \tag{4.1.2}$$

$$\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle, \tag{4.1.3}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \tag{4.1.4}$$

$$x \in X_r \text{ için } \langle x, x\rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x\rangle = \{0\} \Leftrightarrow x = \{0\}, \tag{4.1.5}$$

$$\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\|\langle a, b\rangle\| : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\}, \tag{4.1.6}$$

$$x \preceq y \text{ ve } u \preceq v \Rightarrow \langle x, u\rangle \subseteq \langle y, v\rangle\,, \tag{4.1.7}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için bir } x_\varepsilon \in X \text{ vardır öyle ki}$$

$$x \preceq y + x_\varepsilon \text{ ve } \langle x_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle \subseteq S_\epsilon(\theta) \text{ ise } x \preceq y \tag{4.1.8}$$

'dir. Burada $S_\epsilon(\theta)$ kümesi $\Omega(\mathbb{R})$'de θ-merkezli ϵ-yarıçaplı küreyi göstermektedir.

Bu iç çarpım ile birlikte X quasilineer uzayına bir iç çarpım uzayı denir. $x \in X$ için

$$\|x\|_X = \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir norm tanımlar ve bu norma iç çarpım normu denir.

Uyarı 4.1.1. *Eğer X bir lineer uzay ise bu şartlar klasik reel iç çarpım uzayı şartlarına dönüşür. Şöyle ki; bu durumda $X = X_r$ olacağından (4.1.1) şartı sağlanır ve iç çarpım fonksiyonu reel değerlidir. (4.1.2) şartında ise iç çarpım reel değerli olduğundan "$\subseteq$" bağıntısı "$=$" halini alacaktır. (4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.5) şartları lineer iç çarpım uzaylarındaki şartlarla aynıdır. (4.1.6) şartına şu nedenle gerek yoktur: X lineer uzay olduğundan $\widehat{X} = X$'dir. $F_x = \{a \in X_r : a \leq x\}$ yani x elemanının zemini, x bir regüler eleman olduğundan $\{x\}$ şeklinde bir tek nokta kümesidir. Aynı durum y elemanı için de söz konusudur. O halde*

$$\{\|\langle a, b\rangle\| : a \in F_x, b \in F_y\} = \left\{\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}\right\}$$

tek nokta kümesi olup bu kümenin supremumu $\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}$'dir. $\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = |\langle x, y\rangle|$ olduğunu unutmamak gerekir ve tabi ki lineer uzaydaki bir iç çarpım için $|\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|$ yazmak gereksizdir. (4.1.7) şartı için, lineer uzaylarda "$\preceq$" bağıntısı "$=$" bağıntısı olmak zorunda olup $\langle x, u\rangle = \langle y, v\rangle$ olacağı aşikardır ve böylece gereksizdir. (4.1.8) şartta $\langle x_\epsilon, x_\epsilon\rangle$ bir reel sayı olup $\langle x_\epsilon, x_\epsilon\rangle \subseteq S_\epsilon(\theta)$ olması $\|x_\epsilon\|^2 \leq \epsilon$ anlamına gelir. Yani son şart, her $\epsilon > 0$ için bir $x_\epsilon \in X$ vardır öyle ki $x = y + x_\epsilon$ ve $\|x_\epsilon\|^2 \leq \epsilon$ ise $x = y$ olacağını söylemektedir. Klasik bir normlu uzay için bu durum zaten geçerlidir ve söylenmesine gerek yoktur.

Sonuç 4.1.2. *Bir X iç çarpım quasilineer uzayının regüler alt uzayı olan X_r aynı iç çarpım ile bir (lineer) iç çarpım uzayıdır.*

Yukarıda verilen $\|x\|_X = \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}}$'nin X üzerinde bir norm olduğunu göstermek için en zor olan nokta üçgen eşitsizliğini sağlatmaktır. Bu ise tıpkı klasik iç çarpım uzaylarında olduğu gibi öncelikle bir iç çarpım quasilineer uzayında aşağıda verilecek olan Schwarz Eşitsizliğini sağlatmamız gerektiğini söyler.

Lemma 4.1.2. *(Schwarz Eşizsizliği) X bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere, her $x, y \in X$ için*

$$\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|x\|_X \, \|y\|_X \tag{4.1.9}$$

olur.

İspat. X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise (4.1.5) ve Sonuç 4.1.2'den her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\left\{\|\langle a, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&= \sup\left\{|\langle a, b\rangle| : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&\leq \sup\left\{\|a\|_{\widehat{X}} \, \|b\|_{\widehat{X}} : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&\leq \sup\left\{\|a\|_{\widehat{X}} : a \in F_x^{\widehat{X}}\right\} \sup\left\{\|b\|_{\widehat{X}} : b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&= \|x\|_X \, \|y\|_X
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.1.1. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere*

$$\|x\|_X = \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}} \tag{4.1.10}$$

eşitliği X üzerinde bir norm tanımlar.

İspat. İlk olarak (4.1.10) ile verilen normun X iç çarpım quasilineer uzayında üçgen eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Her $x, y \in X$ için (4.1.2) ve Schwarz Eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|x+y\|_X^2 &= \|\langle x+y, x+y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\langle x,x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle y,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + 2\,\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &\leq \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\,\|x\|_X\,\|y\|_X \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$$

elde edilir. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot x\|_X &= \sqrt{\|\langle \alpha\cdot x, \alpha\cdot x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= |\alpha|\sqrt{\|\langle x,x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= |\alpha|\,\|x\|_X \end{aligned}$$

dir. (4.1.7)'den her $u, v \in X$ için $u \preceq v$ ise $\langle u,u\rangle \subseteq \langle v,v\rangle$ olacağından

$$\|u\|_X^2 = \|\langle u,u\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|\langle v,v\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|u\|_X^2$$

olur. Buradan da $\|u\|_X \leq \|u\|_X$ bulunur. İç çarpım quasilineer uzayında normun son şartını sağlatmak için; eğer, her $\epsilon > 0$ için bir $x_\epsilon \in X$ vardır öyle ki $x \preceq y + x_\epsilon$ ve $\|x_\epsilon\|_X \leq \epsilon$ ise $\|\langle x_\epsilon, x_\epsilon\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon^2$ olur. Buradan da $\langle x_\epsilon, x_\epsilon\rangle \subseteq S_{\epsilon^2}(\theta)$ olur. X bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan (4.1.8) şartından $x \preceq y + x_\epsilon$ ve $\langle x_\epsilon, x_\epsilon\rangle \subseteq S_{\epsilon^2}(\theta)$ ise $x \preceq y$ elde edilir. □

Böylece her iç çarpım quasilineer uzayı (4.1.10) normuyla bir normlu quasilineer uzayı olur. Bu norma iç çarpım normu denir.

Örnek 4.1.1. *$A, B \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için*

$$\langle A, B\rangle = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} \tag{4.1.11}$$

fonksiyonu bir iç çarpımdır ve bu iç çarpım ile $\Omega_C(\mathbb{R})$ bir iç çarpım quasilineer uzayıdır. Tanımlanan iç çarpımın iyi tanımlı olduğu aşikardır. Her $A, B \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$

için $a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $A = \{a\}$ *ve* $B = \{b\}$ *olacağından* $\langle A, B\rangle = \{a \cdot b : a \in \{a\}, b \in \{b\}\} = a \cdot b \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ *olur. Her* $A, B, C, D \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}\langle A+B, C\rangle &= \{(a+b)\cdot c : a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= \{a\cdot c + b \cdot c : a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &\subseteq \{a \cdot c : a \in A, c \in C\} + \{b \cdot c : b \in B, c \in C\} \\ &= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle\end{aligned}$$

olduğundan (4.1.2) şartı sağlanmış olur.

$$\begin{aligned}\langle \alpha \cdot A, B\rangle &= \{(\alpha \cdot a)\cdot b : a \in A, b \in B\} \\ &= \alpha \cdot \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} \\ &= \alpha \cdot \langle A, B\rangle\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. (4.1.4) eşitliği açık olarak sağlanır. $(\Omega_C(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}$ *olduğundan her* $A \in \mathbb{R}$ *için*

$$\langle A, A\rangle = \{a \cdot a : a \in A\} = \left\{a^2 : a \in A\right\} \geq 0$$

olur. $\langle A, A\rangle = 0$ *ise verilen iç çarpım tanımı gereği* $A = \{0\}$ *olmalıdır.* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan* $\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})} = \Omega_C(\mathbb{R})$*'dir. Her* $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *için*

$$\begin{aligned}\|\langle A, B\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\{|x| : x \in \langle A, B\rangle\} \\ &= \sup\{|x| : x \in \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}\} \\ &= \sup\{|a \cdot b| : a \in F_A, b \in F_B\} \\ &= \sup\left\{\|\langle a, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a \in F_A^{\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})}}, b \in F_B^{\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})}}\right\}\end{aligned}$$

'dır. $A \subseteq B, C \subseteq D$ *olsun. [16]'dan* $A{\cdot}C \subseteq B{\cdot}D$ *olacağından bir* $a \in A, b \in B, c \in C$ *ve* $d \in D$ *için*

$$\{a \cdot c : a \in A, c \in C\} \subseteq \{b \cdot d : b \in B, d \in D\}$$

yazılabilir. Yani

$$\langle A, C\rangle \subseteq \langle B, D\rangle$$

olur. Böylece (4.1.7) şartı da sağlanmış olur. Son şart için ise, her $\epsilon > 0$ için bir $A_\epsilon \in \Omega_c(\mathbb{R})$ bulunsun öyle ki $A, B \in \Omega_c(\mathbb{R})$ için

$$A \subseteq B + A_\epsilon \text{ ve } \langle A_\epsilon, A_\epsilon \rangle \subseteq S_\epsilon(0)$$

olsun. $\langle A_\epsilon, A_\epsilon \rangle \subseteq S_\epsilon(0)$ ise $\{x^2 : x \in A_\epsilon\} \subseteq S_\epsilon(0)$ olacağından $\|A_\epsilon\|^2_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ elde edilir. $\Omega(\mathbb{R})$ kendi normuyla bir normlu quasilineer uzay olduğundan ve normlu quasilineer uzayın son şartından $A \subseteq B$ olur.

Şimdi Örnek 4.1.1'de verilen sonucun daha genelini bir teorem olarak verelim.

Teorem 4.1.2. *n pozitif tamsayı olmak üzere $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için*

$$\langle A, B \rangle = \{\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B\}$$

fonksiyonu bir iç çarpımdır ve bu iç çarpım ile $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ bir iç çarpım quasilineer uzayıdır.

İspat. Öncelikle bu $\langle , \rangle : \Omega_C(\mathbb{R}^n) \times \Omega_C(\mathbb{R}^n) \to \Omega(\mathbb{R})$ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz. $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için A ve B, $\mathbb{R}^n$'nin kompakt alt kümeleridir. (A, B) ikilisi de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kartezyen çarpım topolojisine göre kompakt kümedir. $\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasik iç çarpım fonksiyonu sürekli olduğundan, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ topolojik uzayının bir elemanı olan (A, B) kompakt kümesini

$$\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} ((A, B)) = \{\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B\} = \langle A, B \rangle$$

kompakt kümesine dönüştürür. O halde $\langle A, B \rangle \in \Omega(\mathbb{R})$'dir. Böylece iç çarpım iyi tanımlıdır.

Her $A, B \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r$ için $(\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r \equiv \mathbb{R}^n$ olacağından $\langle A, B \rangle \in (\Omega(\mathbb{R}))_r$ olur. Her $A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\langle A + B, C \rangle &= \{\langle a + b, c \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B, c \in C\} \\
&= \{\langle a, c \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle b, c \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B, c \in C\} \\
&\subseteq \{\langle a, c \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, c \in C\} + \{\langle b, c \rangle_{\mathbb{R}^n} : b \in B, c \in C\} \\
&= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Her $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha \cdot A, B \rangle = \{\langle \alpha \cdot a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B\} = \alpha \cdot \{\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B\} = \alpha \cdot \langle A, B \rangle$ olur. (4.1.4) şartının sağlandığı açıkça görülür. $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \{\langle a, a \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A\} = 0 \Rightarrow \langle a, a \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ olması gerektiğinden $a = 0$, buradan da $A = \{0\}$ olur. Tersi açıkça sağlanır. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan $\widehat{\Omega_C(\mathbb{R}^n)} = \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Her $A \in (\Omega_C(\mathbb{R}^n))_r$ için $\langle A, A \rangle$ pozitif reel sayı olduğu açıktır. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan $\widehat{\Omega_C(\mathbb{R}^n)} = \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Her $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\|\langle A, B \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup \{|x| : x \in \langle A, B \rangle\} \\
&= \sup \{|x| : x \in \{\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, b \in B\}\} \\
&= \sup \{|\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n}| : a \in F_A, b \in F_B\} \\
&= \sup \left\{\|\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n}\|_{\Omega_C(\mathbb{R})} : a \in F_A, b \in F_B\right\}
\end{aligned}$$

olur. Her $A, B, C, D \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ olsun. Buradan her $a \in A, b \in C$ için $a \in B$ ve $b \in D$ olur. Bu durumda iç çarpım tanımı gereği $\langle A, C \rangle = \{\langle a, c \rangle_{\mathbb{R}^n} : a \in A, c \in C\}$ için $\langle a, c \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \langle A, C \rangle$ iken $\langle a, c \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \langle B, D \rangle$ olur. Bu da bize istenileni verir. Her $\epsilon > 0$ için bir $A_\epsilon \in \Omega_c(\mathbb{R}^n)$ bulunsun öyle ki $A, B \in \Omega_c(\mathbb{R}^n)$ için

$$A \subseteq B + A_\epsilon \text{ ve } \langle A_\epsilon, A_\epsilon \rangle \subseteq S_\epsilon(\theta)$$

olsun. $\langle A_\epsilon, A_\epsilon \rangle \subseteq S_\epsilon(\theta)$ ise $\{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n} : x \in A_\epsilon\} \subseteq S_\epsilon(\theta)$ olacağından $\|A_\epsilon\|^2_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ olur. $\Omega(\mathbb{R})$ kendi normuyla bir normlu quasilineer uzay olduğundan ve normlu quasilineer uzayın son şartından $A \subseteq B$ bulunur. □

Uyarı 4.1.2. *Bir iç çarpım quasilineer uzayının normu paralelkenar kuralını sağlamak zorunda değildir.*

Örnek 4.1.2. *Örnek 4.1.1'den biliyoruz ki $\Omega_C(\mathbb{R})$, (4.1.11) iç çarpımı ile bir iç çarpım quasilineer uzayıdır. Bu iç çarpımın normu da*

$$\|A\| = \sqrt{\|\langle A, A \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}} = \sqrt{\|\{a^2 : a \in A\}\|_{\Omega(\mathbb{R})}} = \sup_{a \in A} |a|$$

'dır.

$A = B = [0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $A + B = [0,2]$ ve $A - B = [-1,1]$'dir. Ayrıca $\|A\| = \|B\| = 1$, $\|A+B\| = 2$ ve $\|A-B\| = 1$ dir. Fakat

$$\|A+B\|^2 + \|A-B\|^2 \neq 2\left(\|A\|^2 + \|B\|^2\right)$$

'dir.

Sonuç 4.1.3. *Sonuç 4.1.2'den her iç çarpım quasilineer uzayının regüler alt uzayı üzerinde bu iç çarpım klasik iç çarpım olacağından paralelkenar kuralı sağlanır.*

Teorem 4.1.3. *Bir iç çarpım quasilineer uzayının regüler altuzayı üzerinde paralelkenar kuralı sağlanır.*

İspat. X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise X'in regüler alt uzayı lineer uzaydır. Bu lineer alt uzay üzerindeki iç çarpım klasik iç çarpım olacağından paralelkenar kuralı sağlanır. □

Uyarı 4.1.3. *Aşağıda verilecek olan önermenin ispatı klasik lineer fonksiyonel analizde verilene benzerdir. Ancak burada lineer uzaylardaki bir dizinin yakınsaklığının, quasilineer uzaylardaki dizinin yakınsaklığından farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Buradaki yakınsaklık quasilineer uzayın Hausdorff metriğine göre yakınsaklıktır.*

Önerme 4.1.1. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$'dir.*

İspat. (Buna iç çarpımın sürekliliği de denir.) $x_n \to x$ ise her $\epsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ iken

$$x_n \preceq x + a^{\epsilon}_{1,n},\ x \preceq x_n + a^{\epsilon}_{2,n},\ \left\|a^{\epsilon}_{i,n}\right\|_X \leq \epsilon$$

'dur. Benzer şekilde $y_n \to y$ ise her $\epsilon > 0$ için bir $n_0^{'} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0^{'}$ iken

$$y_n \preceq y + b^{\epsilon}_{1,n},\ y \preceq y_n + b^{\epsilon}_{2,n},\ \left\|b^{\epsilon}_{i,n}\right\|_X \leq \epsilon$$

'dur. (4.1.2) ve (4.1.7)'den

$$\langle x_n, y_n\rangle \subseteq \left\langle x + a^{\epsilon}_{1,n}, y + b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle \subseteq \langle x, y\rangle + \left\langle x, b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n}, y\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n}, b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle$$

ve

$$\langle x,y\rangle \subseteq \left\langle x_n+a^{\epsilon}_{2,n},y_n+b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle \subseteq \langle x_n,y_n\rangle + \left\langle x_n,b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},y_n\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle$$

olur. Eğer

$$c^{\epsilon}_{1,n} = \left\langle x,b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n},y\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n},b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle$$

ve

$$c^{\epsilon}_{2,n} = \left\langle x_n,b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},y_n\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle$$

dersek $c^{\epsilon}_{1,n}, c^{\epsilon}_{2,n} \in \Omega(\mathbb{R})$'dir. (4.1.9)'dan

$$\begin{aligned} \left\|c^{\epsilon}_{1,n}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \left\|\left\langle x,b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n},y\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{1,n},b^{\epsilon}_{1,n}\right\rangle\right\| \\ &\leq \|x\|_X \left\|b^{\epsilon}_{1,n}\right\|_X + \left\|a^{\epsilon}_{1,n}\right\|_X \|y\|_X + \left\|a^{\epsilon}_{1,n}\right\|_X \left\|b^{\epsilon}_{1,n}\right\|_X \end{aligned}$$

olacağından $n\to\infty$ iken$\left\|c^{\epsilon}_{1,n}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \to 0$'dır. Benzer şekilde yine (4.1.9)'dan

$$\begin{aligned} \left\|c^{\epsilon}_{2,n}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \left\|\left\langle x_n,b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},y_n\right\rangle + \left\langle a^{\epsilon}_{2,n},b^{\epsilon}_{2,n}\right\rangle\right\| \\ &\leq \|x_n\|_X \left\|b^{\epsilon}_{2,n}\right\|_X + \left\|a^{\epsilon}_{2,n}\right\|_X \|y_n\|_X + \left\|a^{\epsilon}_{2,n}\right\|_X \left\|b^{\epsilon}_{2,n}\right\|_X \end{aligned}$$

olacağından $n\to\infty$ iken$\left\|c^{\epsilon}_{2,n}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \to 0$ dır. Buradan

$$\langle x_n,y_n\rangle \subseteq \langle x,y\rangle + c^{\epsilon}_{1,n}, \;\; \langle x,y\rangle \subseteq \langle x_n,y_n\rangle + c^{\epsilon}_{2,n} \text{ ve } \left\|c^{\epsilon}_{i,n}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon$$

ise $n\to\infty$ iken $\langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ elde edilir. □

Lemma 4.1.3. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı olsun. Her $x,y\in X$ için $x+y\in X_r$ ise $x\in X_r$ ve $y\in X_r$'dir.*

İspat. $x+y\in X_r$ ve $x\notin X_r$ olsun. Bu durumda, bir $z\in X_r$ vardır ve $(x+y)+z=0$'dır. Buradan

$$x+(y+z)=0$$

olacağından x'in bir $y+z$ tersi vardır. Kabulümüzden x in $x+x'=0$ olacak şekilde bir $x'\in X_r$ tersi mevcut değildir. Bu da $y+z$'nin x'in tersi olmasıyla çelişir. Bu nedenle $x\in X_r$'dir. Benzer şekilde $y\in X_r$ olduğu da gösterilebilir. □

Tanım 4.1.3. *Bir X iç çarpım quasilineer uzayına*

$$\|x\| \leq \|B_X\| \ \text{iken} \ x \preceq B_X$$

şartını sağlayan $B_X \neq \theta$ bulunması durumunda ***iç çarpım $\Omega-$uzayı*** *denir. Burada $\|x\| = \sqrt[2]{\|\langle x, x\rangle\|}$ olduğunu hatırlatalım. Bu tanım [1]'de verilen normlu quasilineer uzaylarla ilgili olan $\Omega-$uzayı tanımının doğal bir sonucudur.*

Hatırlatalım ki bir normlu lineer uzay $\Omega-$uzayı olamaz. Çünkü $\|x\| \leq \|B_X\|$ olması durumunda $x = B_X$ olacaksa $\left\|\frac{x}{2}\right\| \leq \|B_X\|$ olacağından $\frac{x}{2} = B_X$ olması gerekirdi. Bu ise doğru değildir. Öyleyse $\Omega-$uzayı kavramı normlu lineer uzaylar için anlamsız bir kavramdır ve sadece nonlineer quasilineer uzaylar için anlamlı hale gelir.

Örnek 4.1.3. *E bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\Omega(E)$ ve $\Omega_c(E)$ quasilineer uzayları bir iç çarpım $\Omega-$uzayıdır. Her $A, B \in \Omega(E)$ için*

$$\langle A, B\rangle = \overline{\{\langle a, b\rangle_E : a \in A, b \in B\}}$$

bir iç çarpım tanımlar. Yukarıda tanımlı iç çarpım iyi tanımlıdır. Tanımlanan iç çarpım fonksiyonunun (4.1.1)-(4.1.8) şartlarını sağladığı Teorem 4.1.2'deki gibi gösterilebilir. Şimdi $\Omega(E)$'nin bir $\Omega-$uzayı olduğunu gösterelim. B_E'yi E'nin birim küresi olarak alalım. Bu durumda $B_E \in \Omega(E)$ ve $\|B_E\| = 1$'dir. Şimdi $A \in \Omega(E)$ için $\|A\| \leq \|B_E\|$ iken $A \subseteq B_E$ olduğunu gösterelim. $\|A\| \leq \|B_E\|$ ise $\|A\| \leq 1$'dir. x, A nın keyfi bir elemanı olmak üzere

$$\|A\| = \sup_{x \in A} \|x\| \leq 1$$

olacağından her $x \in A$ için $\|x\| \leq 1$ olur. $B_E = \{a \in \Omega(E) : \|a\| \leq 1\}$ olduğundan $x \in B_E$'dir.

[1] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu quasilineer uzay ise

$$h(x, y) = \inf\{r \geq 0 : x \preceq y + a_1^r, \ y \preceq x + a_2^r, \ \|a_i^r\|_X \leq r\} \tag{4.1.12}$$

eşitliğinin X üzerinde bir metrik tanımladığını biliyoruz. Önemle belirtmek gerekir ki her $x, y \in X$ için $h_X(x, y) = \|x - y\|_X$ eşitliği burada sağlanmayabilir. Fakat

$$h_X(x, y) \leq \|x - y\|_X$$

eşitsizliği daima doğrudur. Bu eşitsizlikten dolayı, normlu quasilineer uzayların topolojik özelliklerini norma göre incelemek yerine bu normdan türetilen metriğe göre incelemek daha doğru olacaktır. Zira,

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{4.1.13}$$

bir metrik belirtmeyebilir. Bu sebeple bu normun norm metriği (4.1.13) ile verilen metrikle değil, onun yerine (4.1.12) ile verilen norm metriğiyledir. Bu metriğe **Hausdorff metrik** de denir. Eğer X lineer uzaysa $h(x, y) = d(x, y)$ olduğunu biliyoruz.

Tanım 4.1.4. *Bir normlu quasilineer uzay, $h(x, y)$ norm metriğine göre tam ise bir* ***Banach quasilineer uzay*** *adını alır. Şimdi, bir iç çarpım quasilineer uzayının iç çarpım normundan türetilen norm metriğine yani Hausdorff metriğe göre tam olması halinde, kısaca bir Banach quasilineer uzay olması halinde* ***Hilbert quasilineer uzay*** *adını alacağını söyleriz.*

Tanım 4.1.5. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı olsun. Eğer X Hilbert quasilineer uzay ve $\Omega-$uzayı ise X'e* ***Hilbert $\Omega-$uzayı*** *denir.*

Örnek 4.1.4. *E bir iç çarpım uzayı olsun. $\Omega(E)$'nin bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğunu biliyoruz. [1] den bu uzayın Hausdorff metriğe göre tam olduğunu ve $\Omega-$uzayı olduğunu da biliyoruz. Böylece, $\Omega(E)$ bir Hilbert $\Omega-$uzayı olur.*

Tanım 4.1.6. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı olsun. Eğer $x, y \in X$ için*

$$\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

ise x ve y'ye ***ortogonaldir*** *denir. $x \perp y$ ile gösterilir.*

Tanım 4.1.7. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $M \subset X$ ortogonal alt kümesi olsun. Her $x \in M$ için $\|x\| = 1$ ise M ye* ***ortonormaldir*** *denir.*

Örnek 4.1.5. *$\Omega(\mathbb{R})$'nin $X = [0, 1]$ ve $Y = \{0\}$ elemanlarını alalım.*

$$\|\langle X, Y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\{a \cdot b : a \in [0, 1], b \in \{0\}\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\{0\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

olduğundan X ve Y, $\Omega(\mathbb{R})$'nin ortogonal elemanlarıdır.

Örnek 4.1.6. *$\Omega(\mathbb{R})$'nin $X = [0,1]$ ve $Y = [-1,0]$ elemanlarını alalım.*

$$\|\langle X,Y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\{a\cdot b : a\in[0,1], b\in[-1,0]\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|[-1,0]\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 1$$

olduğundan X ve Y, $\Omega(\mathbb{R})$'nin ortogonal elemanları değildirler.

$A, B \in \Omega(\mathbb{R})$ için $\langle A,B\rangle = \{a\cdot b : a\in A, b\in B\} = \{0\}$ olması durumu A ya da B kümelerinden en az birinin $\{0\}$ tek noktası olması ile sağlanır. Kısacası $\Omega(\mathbb{R})$'nin her bir elemanına dik olan eleman sadece $\{0\}$ tek noktasıdır.

Örnek 4.1.7. *$A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \Omega(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere*

$$A_1 = \{(0,t) : 0\le t\le 1\},$$
$$A_2 = \{(t,0) : 0\le t\le 1\},$$
$$A_3 = \{(0,-t) : 0\le t\le 1\},$$
$$A_4 = \{(-t,0) : 0\le t\le 1\}$$

olsun. A_1, A_2, A_3 ve A_4 kümeleri $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin birer elemanıdır. Ayrıca, Tanım 4.1.6'dan $\{A_1, A_2\}$ ve $\{A_3, A_4\}$ kümeleri $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin ortogonal alt kümeleridir.

Sonuç 4.1.4. *$\{A_1, A_2\}$ ve $\{A_3, A_4\}$ kümeleri Tanım 4.1.7'den $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin birer ortonormal alt kümesidirler.*

Teorem 4.1.4. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $x\perp y$ olması için gerek ve yeter şart $F_x^{\widehat{X}} \perp F_y^{\widehat{X}}$ olmasıdır.*

İspat. X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise (4.1.6)'dan

$$\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\|\langle a,b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a\in F_x^{\widehat{X}}, b\in F_y^{\widehat{X}}\right\}$$

eşitliği sağlanır. Eğer $x\perp y$ ise $\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olacağından

$$\sup\left\{\|\langle a,b\rangle\| : a\in F_x^{\widehat{X}}, b\in F_y^{\widehat{X}}\right\} = 0$$

olur. $\sup\left\{\|\langle a,b\rangle\| : a\in F_x^{\widehat{X}}, b\in F_y^{\widehat{X}}\right\} = 0$ ise norm fonksiyonu pozitif tanmlı olduğundan her $a\in F_x^{\widehat{X}}, b\in F_y^{\widehat{X}}$ için $\|\langle a,b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ ise $\langle a,b\rangle = 0$ olur. Bu da bize $F_x^{\widehat{X}} \perp F_y^{\widehat{X}}$ olduğunu söyler.

Tersine $F_x^{\widehat{X}} \perp F_y^{\widehat{X}}$ ise her $a\in F_x^{\widehat{X}}$ ve her $b\in F_y^{\widehat{X}}$ için $\|\langle a,b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$'dır. X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise (4.1.6)'dan $\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ bulunur. □

Sonuç 4.1.5. *Herhangi bir X iç çarpım quasilineer uzayında $A, B \in X$ ise (4.1.6) dan*

$$\|\langle A, B\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\|\langle a, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a \in F_A^{\widehat{X}}, b \in F_B^{\widehat{X}}\right\}$$

olduğunu biliyoruz. Tanım 4.1.6 gereğince $\|\langle A, B\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ ise A ve B birbirlerine dik olur. Bu ise herhangi bir X iç çarpım quasilineer uzayında iki elemanın dik olabilmesi için gerek ve yeter şartın elemanların $\widehat{X}$ 'daki zeminleri olan kümelerin, klasik iç çarpım uzayı olan X_r regüler alt uzayında birbirine dik olmasıdır.

Örnek 4.1.8. *Bir X iç çarpım quasilineer uzayında $x \in X_r$ ve $y \in X_s$ ise*

$$\begin{aligned}
\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\left\{\|\langle a, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&= \sup\left\{\|\langle x, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : b \in F_y^{\widehat{X}}\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olması için her $b \in F_y^{\widehat{X}}$ için $\|\langle x, b\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olması gerekir. Bu da her $b \in F_y^{\widehat{X}}$ için $\langle x, b\rangle = \theta$ olması demektir.

Sonuç 4.1.6. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı $x, y \in X$ ve $x \perp y$ olsun. Bu durumda,*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

'dir. Ayrıca $\{x_1, \ldots, x_n\}$, X'de ortogonal vektörler ise

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspatını tümevarım yöntemiyle yapalım. $x_1, x_2, \ldots, x_n$, E iç çarpım quasilineer uzayında ortogonal vektörler olduğundan $x_1 \perp x_2$ ise

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2\|^2 &= \|\langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\langle x_1, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\langle x_1, x_1\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_1, x_2\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_2, x_1\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_2, x_2\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece yukarıda ki eşitsizlik $n = 2$ için sağlanmış olur. Eşitsizliğin $k-1$ içinde doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\left\|\sum_{n=1}^{k-1} x_n\right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{k-1} \|x_n\|^2$$

olsun. $x = \sum_{n=1}^{k-1} x_n$ ve $y = x_n$ alalım. $x \perp y$ olduğundan

$$\left\|\sum_{n=1}^{k} x_n\right\|^2 = \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \sum_{n=1}^{k-1} \|x_n\|^2 + \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^2$$

elde edilir. □

Tanım 4.1.8. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı, A'da X'in boştan farklı alt kümesi olsun.*

$$A^{\perp} = \left\{x \in X : \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0,\ y \in A\right\}$$

*kümesine A'**nın dikeyi** denir.*

Teorem 4.1.5. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı, A'da X'in boştan farklı alt kümesi olsun. $A^{\perp}$ kapalı bir alt uzaydır.*

İspat. $x, y \in A^{\perp}$ ve $z \in A$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için (4.1.2) ve (4.1.3)'den

$$\|\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq |\alpha| \, \|\langle x, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + |\beta| \, \|\langle y, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

olur. Norm fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in A^{\perp}$'dir. Yani $A^{\perp}$ bir alt uzaydır. $(x_n) \in A^{\perp}$ ve $x_n \to a \in X$ $(n \to \infty)$ olsun. Quasilineer uzaylardaki yakınsaklık tanımından her $\epsilon > 0$ için bir N vardır öyle ki her $n \geq N$ iken

$$x_n \preceq a + b_{1,n}^{\epsilon},\ a \preceq x_n + b_{2,n}^{\epsilon},\ \left\|b_{i,n}^{\epsilon}\right\| \leq \epsilon^{1/2}$$

olur. Her iç çarpım quasilineer uzayı, normlu quasilineer uzay olduğundan, normun son şartından $n \geq N$ ler için

$$x_n \preceq a \text{ ve } a \preceq x_n$$

bulunur. Her $z \in X$ için $z \preceq z$ olacağından (4.1.7) şartından

$$0 = \|\langle x_n, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|\langle a, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \text{ ve } \|\langle a, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|\langle x_n, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

olacağından $\|\langle a, z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$, ve $a \in A^{\perp}$ olur. Yani $A^{\perp}$, X'in kapalı bir alt uzayıdır.

□

Uyarı 4.1.4. *Eğer, X bir klasik iç çarpım uzayı olsaydı, $A^{\perp}$'nin kapalılığı $|\langle x_n - a, z\rangle| \leq \|x_n - a\| \, \|z\|$ eşitsizliğinden kolayca görülebilirdi.*

4.2 İç Çarpım Quasilineer Uzaylarında Ortogonal ve Ortonormal Kümeler

Bu kısımda iç çarpım quasilineer uzaylarında tanımlanan ortogonal ve ortonormallik kavramlarıyla ilgili bazı önemli tanım, teorem ve örnekler verilecektir. Ayrıca normlu bir quasilineer uzayın Schauder bazı kavramı tanımlanacak ve bu kavram ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 4.2.1. *X bir sağlam zeminli normlu quasilineer uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. (x_n) dizisine aşağıdaki şartı sağlaması durumunda X'in bir* ***Schauder bazı*** *denir. Eğer her bir $y \in X$ için; her $z \in F_y$ ye karşılık tek türlü belirlenen bir $\left\{\alpha_n^{(z)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi mevcuttur öyle ki*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(z)} \cdot x_n \text{ ve } y = \sup\{z \in X_r : z \preceq y\}$$

'dir. Bu tanım aşağıdaki söylemle aynıdır. (x_n) dizisinin X'in bir Schauder bazı olabilmesi için gerek ve yeter şart her bir $y \in X$ için ve her $z \in F_y$ için

$$h\left(z, \sum_{n=1}^{k} \alpha_n^{(z)} \cdot x_n\right) \to 0 \;\; (k \to \infty) \text{ ve } y = \sup\{z \in X_r : z \preceq y\}.$$

olmasıdır.

Önerme 4.2.1. *Sağlam zeminli bir X quasilineer uzayının bir (x_n) Schauder bazının bütün elemanları regülerdir.*

İspat. X bir sağlam zeminli quasilineer uzay ve (x_n), X için bir Schauder baz olsun. $y \neq 0$ ve $y \in X_r$ elemanı için; (X sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan böyle bir y elemanı mevcuttur.)

$$F_y = \{y\} \text{ olup } \sup\{F_y\} = y$$

olacağından

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n$$

olacak şekilde tek türlü $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ skaler dizisi bulunur.

Burada (x_n) dizisinin bütün terimleri singüler eleman olamaz. Çünkü bu durumda $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n$ yazılamaz.

Farzedelim ki, x_n terimlerinden bazıları regüler eleman olsun. Sözgelimi x_1 regüler, diğer terimler singüler olsun. (Bu durum genelliği bozmayacaktır.) Bu durumda, her bir x_n $(n \neq 1)$ için, $u_n \leq x_n$ olacak şekilde bir $u_n \in X_r$ mevcuttur. Buradan;

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n \preceq \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n$$

yazılır. Ayrıca

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n \preceq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n = y$$

olup, y regüler elemanı minimal olduğundan

$$y = \alpha_1 \cdot x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$$

yazılır. Bu da bize $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n$ olduğunu verir. Halbuki $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$ sırasıyla X'in singüler ve regüler elemanlarıdır. Bu da bir çelişkidir. Buradan da x_n terimlerinin tümünün regüler eleman olması gerektiği sonucunu elde ederiz. $\square$

Eğer (x_n) dizisi sonlu boyutlu ve sağlam zeminli bir X quasilineer uzayının bazı ise (x_n) dizisinin bütün elemanları regülerdir. Doğruluğu yukarıdaki önermenin ispatına benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 4.2.1. *Sonlu boyutlu ve sağlam zeminli quasilineer uzaylarda bir Hamel baz aynı zamanda bir Schauder bazdır.*

İspat. X sonlu boyutlu ve sağlam zeminli quasilineer uzay ve $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, X'in bir Hamel bazı olsun. Buradan biliyoruz ki her bir $y \in X$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \preceq y$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalerleri vardır. Diğer yandan her $k \in [1, n]$ için $\{x_k\}$ dizisinin tüm terimleri X'in bir regüler elemanı olacağından $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \in X_r$, buradan da $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \in F_y$ elde edilir. Eğer $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k$ dersek X_r, X'in lineer bir alt uzayı olduğundan

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \preceq y$$

olacak şekilde tek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalerleri vardır. Bu durumda

$$b_n = \begin{cases} x_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi X için bir Schauder baz olur. □

Teorem 4.2.2. *Bir sağlam zeminli normlu quasilineer uzay Schauder baza sahip ise bu normlu uzay ayrılabilirdir.*

İspat. X bir sağlam zeminli normlu quasilineer uzay ve $\{x_n\}$, X için bir Schauder baz olsun. M kümesi $\mathbb{R}$ skaler cisminin sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. Her $y \in X$ ve her $z \in F_y$ için

$$z = \sum_{i=1}^{n} m_i^{(z)} \cdot x_i, \qquad m_i \in M$$

olarak ifade edilebilen bütün $z \in F_y$'lerin kümesi E_n olsun. Burada m_i katsayıları z tarafından tek türlü belirlenir. Bu nedenle E_n ve M arasında birebir bir ilişki vardır. Bundan dolayı E_n sayılabilirdir.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

dersek E sayılabilirdir. Şimdi E'nin X'de yoğun olduğunu gösterelim. Bir $y \in X$ ve $z \in F_y$ için

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot x_n$$

olacak şekilde z tarafından tek türlü belirlenen, $\mathbb{R}$ içinde $\{k_n\}$ vardır. $\epsilon > 0$ verilsin. Buradan da bir $n_0(\epsilon)$ vardır ve her $n > n_0(\epsilon)$ için

$$h\left(z, \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

olur. $M, \mathbb{R}$ içinde yoğun olduğundan $1 \leq j \leq n$ için

$$|k_j - m_j| \, \|x_j\| < \frac{\epsilon}{2n}$$

olacak şekilde M'de m_j elemanları vardır. Kabul edelim ki bir $y \in X$ ve $l \in F_y$ için $l = \sum_{i=1}^{n} m_i^{(l)} x_i$ olsun. Bu durumda $l \in E_n \subset E$'dir. Önerme 4.2.1'den

$$\begin{aligned} h(z,l) &\leq h\left(z, \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j\right) + h\left(\sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j, l\right) \\ &= h\left(z, \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j\right) + h\left(\sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j, \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot x_j\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \left\| \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot x_j \right\| \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} |k_j - m_j| \, \|x_j\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + n\frac{\epsilon}{2n} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $l \in E$ için $h(z,l) < \epsilon$'dir. Bu E'nin X'içinde yoğun olduğunu gösterir. $\square$

Tanım 4.2.2. *E bir sağlam zeminli iç çarpım quasilineer uzayı, B'de (x_n) dizilerinden oluşan E'de ortonormal bir küme olsun. B kümesine aşağıdaki şartı sağlaması durumunda X'in bir* ***ortonormal bazı****dır denir. Eğer her bir $y \in E$ için; her $z \in F_y$'ye karşılık tek türlü belirlenen bir $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi mevcuttur öyle ki*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(z)} \cdot x_n \text{ ve } y = \sup\{z \in X_r : z \preceq y\}$$

'dir.

Örnek 4.2.1. *$B = \{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$'nin ortonormal bir alt kümesidir ve Örnek 3.3.9 gereğince $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ sağlam zeminli bir quasilineer uzay olduğundan her $y \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için $y = \sup\{F_y\}$'dir. Ayrıca her $y \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ ve her $z \in F_y$ için*

$$z = \alpha_1 \cdot \{(0,1)\} + \alpha_2 \cdot \{(1,0)\}$$

olacak şekilde tek bir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Bu nedenle B kümesi, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$'nin ortonormal bir bazıdır.

Uyarı 4.2.1. *Klasik lineer uzaylarda ortonormal bir küme lineer bağımsız olmasına rağmen lineer olmayan uzaylarda bu doğru olmayabilir. Örneğin; $A = \{(0,t) : 0 \leq$*

$t \leq 1\}$ ve $B = \{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$ ise $\{A, B\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$'nin ortonormal bir alt kümesidir. Fakat $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B$$

eşitliği $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ için de sağlanabileceğinden $\{A, B\}$ kümesi quasilineer bağımlıdır. Dolayısıyla quasilineer uzaylarda ortonormal bir kümenin quasilineer bağımsız olması gerekmez.

Şimdi Sonuç 4.1.6'dan daha genel bir teorem verelim.

Teorem 4.2.3. *(x_n), H Hilbert quasilineer uzayında ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda herhangi bir $\alpha_n \in F$ ve $n = 1, 2, \ldots, k$ sayıları için*

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \cdot x_n \right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2$$

'dir.

İspat. (x_n) ortonormal bir dizi ve H bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \cdot x_n \right\|^2 &= \left\| \left\langle \sum_{m=1}^{k} \alpha_m \cdot x_m, \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \cdot x_n \right\rangle \right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\| \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \alpha_m \cdot \alpha_n \cdot \langle x_m, x_n \rangle \right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n| \, |\alpha_n| \, \| \langle x_n, x_n \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Uyarı 4.2.2. *Bir Hilbert uzayında (x_n) ortonormal dizisinin her bir elemanının birbirine olan uzaklığı $\sqrt{2}$'ye eşit olmasına rağmen bir H Hilbert quasilineer uzayında (x_n) ortonormal bir dizi ise*

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= \|\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\langle x_n, x_n \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_n, x_m \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_m, x_n \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_m, x_m \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 + \|\langle x_n, x_m \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \|\langle x_m, x_n \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= 2
\end{aligned}$$

olacağından $h(x_n, x_m) \leq \sqrt{2}$'dir. Yani (x_n) ortonormal dizisinin her alt kümesinin elemanlarının birbirine olan uzaklığı $\sqrt{2}$'den küçük ya da eşittir diyebiliriz.

Tanım 4.2.3. *(x_n), E sağlam zeminli iç çarpım quasilineer uzayında ortonormal bir dizi olsun. Eğer her $y \in E$ ve her $z \in F_y$ için*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \|\langle z, x_k \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_k \text{ ve } y = \sup\{F_y\}$$

*sağlanıyorsa (x_n) dizisine **tam ortonormal dizi** denir. Buradaki eşitliğin manası ise h, E iç çarpım quasilineer uzayının Hausdorff metriği olmak üzere*

$$h\left(z, \sum_{k=1}^{n} \|\langle z, x_k \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_k\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

'dır.

H Hilbert quasilineer uzayında tıpkı lineer uzaylarda olduğu gibi her tam ortonormal dizi ortonormal bir bazdır. Şimdi $z = \sum_{k=1}^{\infty} \|\langle z, x_k \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_k$'nın tek türlü temsil edildiğini gösterelim. Kabul edelim ki her $y \in H$ ve her $z \in F_y$ için her bir $k \in [1, \infty)$ iken $\alpha_k \neq \beta_k$ olmak üzere $z = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot x_k$ ve $z = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot x_k$ olsun. Böylece Teorem 4.2.3 ve Önerme 4.2.1'den

$$0 = \|z - z\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot x_k - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot x_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \beta_k) \cdot x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k|$$

bulunur. Bu da bize her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = \beta_k$ olması gerektiğini söyler.

Teorem 4.2.4. *H, sağlam zeminli Hilbert quasilineer uzay (x_n) de H de ortonormal bir dizi olsun. (x_n) tam ortonormal dizi ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\langle x, x_n \rangle = 0 \Rightarrow x = \theta$'dır.*

İspat. (x_n)'de H'de tam ortonormal bir dizi olsun. Böylece her $y \in H$ ve her $z \in F_y$ için $z = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle z, x_n \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_n$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\langle z, x_n \rangle = 0$ ise $\|\langle z, x_n \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olacağından $z = \theta$ bulunur. □

Teorem 4.2.5. *(x_n), H sağlam zeminli Hilbert quasilineer uzayında ortonormal bir dizi olsun. $\forall y \in H$ ve $\forall z \in F_y$ için (x_n) tam ortonormal dizi ise $\|z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle z, x_n \rangle\|^2_{\Omega(\mathbb{R})}$'dir.*

İspat. (x_n) ortonormal dizisi, H Hilbert quasilineer uzayında tam olsun. Bu durumda her $y \in H$ ve her $z \in F_y$ için $z = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle z, x_n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_n$'dir. Lemma 3.2.1'den

$$\|z\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle z, x_n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \cdot x_n \right\|^2$$

bulunur. Teorem 4.2.3'den

$$\|z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle z, x_n\rangle\|^2$$

elde edilir. □

Tanım 4.2.4. *İç çarpım quasilineer uzayında bir kümenin her vektörüne ortogonal vektör sadece o kümenin sıfır vektörü ise, o kümeye* ***tam küme*** *denir.*

Örnek 4.2.2. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ kümesi Örnek 4.1.1'de tanımlanan iç çarpım ile bir iç çarpım quasilineer uzayıdır. Bu iç çarpım ile $\Omega_C(\mathbb{R})$ kümesinin her elemanına dik vektör sadece $\{0\}$ elemanı olduğundan $\Omega_C(\mathbb{R})$ tam bir kümedir. Yine $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik elemanlarının kümesi olan X_d kümesinde de her elemana dik olan eleman sadece $\{0\}$ olduğundan X_d kümesi de tamdır.*

Önerme 4.2.2. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve Y, X'in bir alt uzayı olsun. O zaman her $y \in Y$ için*

$$x \perp Y \Rightarrow \|x - y\| \leq \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

'dir.

İspat. $\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle \subseteq \alpha \cdot \langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, x\rangle + \beta \cdot \langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, y\rangle \subseteq \alpha^2 \cdot \langle x, x\rangle + \alpha \cdot \beta \cdot \langle x, y\rangle + \beta \cdot \alpha \cdot \langle x, y\rangle + \beta^2 \cdot \langle y, y\rangle$ olduğundan $\alpha = 1$ ve $\beta = -\alpha$ için

$$\begin{aligned}
\|x - \alpha \cdot y\|^2 &= \|\langle x - \alpha \cdot y, x - \alpha \cdot y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \alpha \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \alpha \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \alpha^2 \|\langle y, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= \|x\|^2 + \alpha \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \alpha \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} + \alpha^2 \|y\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$x \perp Y$ ve $y \in Y$ olsun. Yukarıda bulunan eşitlikte $\alpha = 1$ alınırsa $\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan

$$\|x - y\| \leq \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. □

Uyarı 4.2.3. *Bir lineer uzayın Y alt uzayında $\forall y \in Y$ için $\|x - y\| \geq \|x\|$ ise $x \perp Y$ olmasına rağmen, bir iç çarpım quasilineer uzayının Y alt uzayında $\forall y \in Y$ için $\|x - y\| \geq \|x\|$ ise $x \perp Y$ olmayabilir.*

Örnek 4.2.3. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $Y = X_r$ olsun. Bu durumda Y, X'in bir alt uzayıdır. $x = [-1, 1] \in X$ olsun. $\|x\| = 1$'dir. Her $y \in Y$ için $Y = X_r$ olduğundan $\{y\} = [y, y]$ biçiminde yazılabilir. $y \in \mathbb{R}^+$ ise*

$$\|x - y\| = \|[-1, 1] - [y, y]\| = \|[-1 - y, 1 - y]\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^+} |-1 - y| = 1 + y \geq 1 = \|x\|$$

'dir. $y \in \mathbb{R}^-$ ise

$$\|x - y\| = \|[-1, 1] - [y, y]\| = \|[-1 - y, 1 - y]\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^-} |1 - y| = 1 - y \geq 1 = \|x\|$$

olur. Fakat $x \notin Y^{\perp}$'dir.

4.3 İç Çarpım Quasilineer Uzaylarında Bazı Yeni Sonuçlar

Bir quasilineer uzayın regüler ve singüler olmak üzere iki kısıma ayırabildiğimiz elemanları vardır. Singüler olarak adlandırdığımız kısım içerisinde uzayın $x = -x$ şartını sağlayan elemanlarının kümesine uzayın simetrik elemanlarının kümesi denir. Şimdi bu şekildeki elemanları da kapsayan daha geniş, yeni bir küme tanımlayalım. Bu yeni küme ile ilgili bazı teorem ve örnekler verelim.

Tanım 4.3.1. *X bir quasilineer uzay olsun.*

*Bir y elemanına **simerik üstü** denir $\Leftrightarrow$ Bir $x \in X_d$ simetrik elemanı için $x \preceq y$'dir.*

X'in simetrik üstü elemanlarının kümesi X_{od} ile gösterilir.

Bir quasilineer uzayda her simetrik eleman simetrik üstü bir elemandır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin; $[-1,2]$, $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayının simetrik üstü bir elemanıdır. Fakat, $[-1,2] \neq -1 \cdot [-1,2]$ olduğundan $[-1,2]$, $\Omega_C(\mathbb{R})$ nin simetrik bir elemanı değildir. Ayrıca, $[-1,2]$, $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik üstü bir elemanı iken $[1,2]$, $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik üstü olmayan bir elemanıdır.

Teorem 4.3.1. *X bir quasilineer uzay olsun. X'deki simetrik üstü elemanların kümesi bir alt uzaydır.*

İspat. X'deki simetrik üstü elemanların kümesi A olsun. Her $x, y \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için tanım gereği bir $a \in X_d$ vardır ve $a \preceq x$'dir. Yine bir $b \in X_d$ vardır ve $b \preceq y$'dir. Teorem 3.1.2'den X'in simetrik elemanlarının kümesi yani X_d kümesi X'in bir alt uzayıdır ve her $a, b \in X_d$ için $a + b \in X_d$'dir. (3.1.12)'den

$$a \preceq x \text{ ve } b \preceq y \text{ iken } a + b \preceq x + y$$

ve $a + b \in X_d$ olduğundan $x + y \in A$'dır.

$x \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Benzer şekilde $x \in A$ ise bir $a \in X_d$ vardır öyle ki $a \preceq x$'dir. (3.1.13)'den her α skaleri için $\alpha \cdot a \preceq \alpha \cdot x$ olur. X_d kümesi X'in bir alt uzayı olduğundan $\alpha \cdot a \in X_d$'dir. Buradan $\alpha \cdot x \in A$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla X'in simetrik üstü elemanlarının kümesi X'in bir alt uzayıdır. $\square$

Teorem 4.3.2. *Bir Hilbert quasilineer uzayda simetrik üstü elemanların kümesi kapalıdır.*

İspat. X bir Hilbert quasilineer uzay ve A, X'in simetrik üstü elemanlarının kümesi olsun. Ayrıca, (x_n), A da bir dizi ve X'de $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olsun. Bu durumda $x_n \to x \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > N$ için

$$x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon}, \quad x \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon}, \quad \|a_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$$

olur. Aynı zamanda $(x_n) \in A$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\text{bir } b_n \in X_d \text{ vardır öyle ki } b_n \preceq x_n$$

dir. Bu durumda $x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon}$ ve $b_n \preceq x_n$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon}$ elde edilir. $\|a_{1n}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$ olduğundan $\|a_{1n}^{\epsilon}\| = \|\langle a_{1n}^{\epsilon}, a_{1n}^{\epsilon}\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$ ve $\|\langle a_{1n}^{\epsilon}, a_{1n}^{\epsilon}\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq$

$\epsilon^2 = \epsilon^\imath$ olacak şekilde $\epsilon^\imath > 0$ vardır. Buradan her $\epsilon^\imath > 0$ için

$$b_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon} \text{ ve } \langle a_{1n}^{\epsilon}, a_{1n}^{\epsilon} \rangle \subseteq S_{\epsilon^\imath}(\theta)$$

olduğundan, (4.1.6) dan her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \preceq x$ elde edilir. Tanım 4.3.1 gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \in X_d$ olduğundan $x \in A$ bulunur. Bu da bize A kümesinin kapalı olduğunu söyler. □

Uyarı 4.3.1. *Lineer uzaylarda $\{0\}$'dan başka simetrik elemanın olmadığını hatırlayalım. Bir nonlineer quasilineer uzayda $\{0\}$'dan başka simetrik elemanlar vardır. Ayrıca bir quasilineer uzayın simetrik elemanlardan oluşan bir alt kümesi sıfırı barındırmayabilir.*

Lemma 4.3.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik elemanlarının kümesi sıfır ile quasilineer bağımlıdır.*

İspat. $A \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_d$ olsun. (3.1.10) ve (3.1.11)'den

$$\begin{aligned} \{0\} &= 0 \cdot A \\ &= (1 + (-1)) \cdot A \\ &\subseteq A - A \end{aligned}$$

bulunur. $A \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_d$ olduğundan $-A$ yerine A alırsak, [2]'den

$$\{0\} \subseteq 2A \text{ buradan da } \{0\} \subseteq A$$

elde edilmiş olur. □

$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin aksine $\Omega(\mathbb{R})$'nin herhangi bir simetrik alt kümesi sıfır ile quasilineer bağımlı olmayabilir.

Örnek 4.3.1. *$x = \{-1, 1\} \subseteq \Omega(\mathbb{R})$ olsun. $-x = \{-1, 1\}$ olduğundan $x = -x$'dir. Dolayısıyla x, $\Omega(\mathbb{R})$'nin simetrik bir elemanıdır. Fakat $\{0\} \nsubseteq x$'dir.*

Önerme 4.3.1. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik üstü elemanlarının kümesi quasilineer bağımlıdır.*

İspat. $\Omega_C(\mathbb{R})$, [1]'de tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir quasilineer uzaydır. $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (\Omega_C(\mathbb{R}))_{od}$ ve $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olsun. Tanım 4.3.1 gereğince her $1 \leq k \leq n$ için

$$a_k \subseteq x_k$$

olacak şekilde $\{a_k\}_{k=1}^n \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_d$ vardır. Ayrıca, Lemma 4.3.1'den $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin simetrik elemanlarının kümesinin $\{0\}$'ı barındırması gerektiğinden her bir $1 \leq k \leq n$ için

$$\{0\} \subseteq \{a_k\}$$

'dır. Buradan her $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ skalerleri için (3.1.13)'den

$$0 = \lambda_1 \cdot \{0\} + \lambda_2 \cdot \{0\} + \ldots + \lambda_n \cdot \{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot \{a_1\} + \lambda_2 \cdot \{a_2\} + \ldots + \lambda_n \cdot \{a_n\}$$

ve

$$\{0\} \preceq \lambda_1 \cdot \{a_1\} + \lambda_2 \cdot \{a_2\} + \ldots + \lambda_n \cdot \{a_n\} \subseteq \lambda_1 \cdot \{x_1\} + \lambda_2 \cdot \{x_2\} + \ldots + \lambda_n \cdot \{x_n\}$$

elde edilir. Yani yukarıdaki eşitsizlik her $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}$ için sağlanır. Buradan da $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (\Omega_C(\mathbb{R}))_{od}$ kümesinin quasilineer bağımlı olduğu elde edilmiş olur. $\square$

Önerme 4.3.2. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise X'in simetrik elemanlarının kümesi kapalı bir alt uzaydır.*

İspat. X bir iç çarpım quasilineer uzayının simetrik elemanlarının kümesi $X_d = \{x \in X : x = -x\}$ kümesidir. $(x_n) \in X_d$ ve $x_n \to x \in X$ olsun. Lemma 3.2.1'den

$$x_n \to x \Rightarrow -x_n \to -x$$

'dir. $(x_n) \in X_d$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = -x_n$'dir. Buradan

$$x_n \to x \Rightarrow x_n \to -x$$

olacağından $x = -x$ olmak zorundadır. Bu da bize $x \in X_d$ olduğunu gösterir. X_d kümesinin X'in alt uzayı olduğu Teorem 3.1.2'de gösterilmiştir. $\square$

Teorem 4.3.3. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve (x_n), X uzayında bir dizi olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$y \perp x_n \text{ ve } x_n \to x \Rightarrow y \perp x$$

'dir.

İspat. $y \perp x_n$ ve $x_n \to x$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\langle y, x_n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ ve $x_n \to x$ ise her $\epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için

$$x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon},\ x \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon}, \|\ a_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$$

olur. Bir X iç çarpım quasiliner uzayı $\|\cdot\|$ normuyla normlu quasilineer uzay olduğundan

$$x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon} \text{ ve} \|\ a_{1n}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$$

ise (3.2.5)'den $x_n \preceq x$ elde edilir. Benzer şekilde

$$x \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon} \text{ ve} \|\ a_{2n}^{\epsilon}\| \leq \epsilon = \epsilon^{\imath}$$

ise $x \preceq x_n$'dir. Buradan $x_n \preceq x$, $x \preceq x_n$ ve $y \preceq y$ olduğundan (4.1.7)'den

$$\langle x_n, y\rangle \subseteq \langle x, y\rangle \text{ ve } \langle x, y\rangle \subseteq \langle x_n, y\rangle$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\langle y, x_n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olduğundan $0 \leq \|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}$ ve $\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq 0$ elde edilir ki bu da bize $\|\langle x, y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olması gerektiğini söyler. Böylece $x \perp y$ elde edilmiş olur. □

X bir lineer iç çarpım uzayı ve her $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\|$ ise $x + y \perp x - y$'dir. Fakat X bir iç çarpım quasilineer uzayı ise bu durum geçerli olmayabilir.

Örnek 4.3.2. *$\Omega_C(\mathbb{R})$'nin her $A \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $\|A\| = \sup_{a\in A} |a|$ normu ile normlu quasilineer uzay olduğunu biliyoruz. $A = [-1, 1]$, $B = [0, 1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ ise*

$$\|A\| = \sup_{a\in[-1,1]} |a| = 1 \text{ ve } \|B\| = \sup_{b\in[0,1]} |b| = 1$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} A + B &= [-1, 1] + [0, 1] = [-1, 2] \\ A - B &= [-1, 1] - [0, 1] = [-2, 1] \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \|\langle A + B, A - B\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \|\{a \cdot b : a \in [-1, 2], b \in [-2, 1]\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &= \|[-4, 2]\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &= 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.3.2. ***(Yarı iç çarpım quasilineer uzayı)*** *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir quasilineer uzay olsun.*

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to \Omega(\mathbb{R})$$

fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$x, y \in X_r \text{ ise } \langle x, y \rangle \in (\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R},$$

$$\langle x + y, z \rangle \subseteq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$x \in X_r \text{ için } \langle x, x \rangle \text{ pozitif reel sayıdır ve } \langle 0, 0 \rangle = 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle \geq 0,$$

$$\|\langle x, y \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\|\langle a, b \rangle\| : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\},$$

$$x \preceq y \text{ ve } u \preceq v \Rightarrow \langle x, u \rangle \subseteq \langle y, v \rangle$$

şartları sağlanıyorsa $\langle .,. \rangle$ fonksiyonuna ***yarı iç çarpım*** *denir.*

Örnek 4.3.3. *$\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ kümesinde $A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ alalım.*

$$\langle A, B \rangle = \{a_1 \cdot b_1 : (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\}$$

iç çarpımı ile $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ bir yarı iç çarpım quasilineer uzayıdır. Yukarıda tanımlı iç çarpım iyi tanımlıdır. Her $A, B \in (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_r$ için $\langle A, B \rangle \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}$ olur. Her $A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için

$$\begin{aligned}
\langle A + B, C \rangle &= \{(a_1 + b_1) \cdot c_1 : (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B, (c_1, c_2) \in C\} \\
&= \{a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1 : (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B, (c_1, c_2) \in C\} \\
&\subseteq \{a_1 \cdot c_1 : (a_1, a_2) \in A, (c_1, c_2) \in C\} + \{b_1 \cdot c_1 : (b_1, b_2) \in B, (c_1, c_2) \in C\} \\
&= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle
\end{aligned}$$

olur. Her $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha \cdot A, B \rangle = \alpha \cdot \langle A, B \rangle$ ve $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ olduğu verilen iç çarpımın tanımı gereği kolayca görülür. Her $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için

$$\begin{aligned}
\|\langle A, B \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\{|x| : x \in \langle A, B \rangle\} \\
&= \sup\{|x| : x \in \{a_1 b_1 : a = (a_1, a_2) \in A, b = (b_1, b_2) \in B\}\} \\
&= \sup\{|\langle a, b \rangle| : a \in F_A, b \in F_B\} \\
&= \sup\left\{\|\langle a, b \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : a \in F_A, b \in F_B\right\}
\end{aligned}$$

'dır. $\langle A, A\rangle = \{a_1 \cdot a_1 : (a_1, a_2) \in A\} = \{a_1^2 : (a_1, a_2) \in A\} \geq 0$. *Her* $A, B, C, D \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *için* $A \preceq B$ *ve* $C \preceq D$ *ise* $\langle A, C\rangle \subseteq \langle B, D\rangle$*'nin doğruluğunu gösterelim.*

$$\langle A, C\rangle = \{a_1 \cdot c_1 : (a_1, a_2) \in A, (c_1, c_2) \in C\}$$

ve

$$\langle B, D\rangle = \{b_1 \cdot d_1 : (b_1, b_2) \in B, (d_1, d_2) \in D\}$$

olacağından her $(a_1, a_2) \in A$, $(c_1, c_2) \in C$ *için* $A \preceq B$ *ve* $C \preceq D$ *ise* $(a_1, a_2) \in B$, $(c_1, c_2) \in D$*'dir. Buradan da*

$$\{a_1 \cdot c_1 : (a_1, a_2) \in A, (c_1, c_2) \in C\} \subseteq \{b_1 \cdot d_1 : (b_1, b_2) \in B, (d_1, d_2) \in D\}$$

elde edilir.

Uyarı 4.3.2. *Yukarıda tanımlı iç çarpım ile* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *yarı iç çarpım quasilineer uzayıdır fakat iç çarpım quasilineer uzayı değildir. Bunun nedeni ise* $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = \theta$ *şartının sağlanmamasıdır. Eğer* $\langle A, A\rangle = 0$ *ise*

$$\begin{aligned} \langle A, A\rangle &= \{a_1 a_1 : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= \{a_1^2 : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

'dır. Fakat burada $A = \theta$ *değildir.*

Teorem 4.3.4. X *bir quasilineer uzay ve* $\langle ., .\rangle$, X*'de yarı iç çarpım olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \|.\| &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \|x\| = \|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}^{1/2} \end{aligned}$$

normu bir yarı-norm tanımlar.

Buradan her yarı iç çarpım quasilineer uzayı $\|x\| = \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}}$ ile yarı normlu quasilineer uzaydır. İspatı Teorem 4.1.1'den yaralanılarak yapılabilir.

Teorem 4.3.5. *X bir quasilineer uzay ve $\langle .,. \rangle$, X'de yarı iç çarpım quasilineer olsun. $\forall y \in X$ için*

$$\begin{aligned} f_y &: X \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}) \\ f_y(x) &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu $\langle .,. \rangle$ yarı iç çarpımı tarafından üretilen normla sürekli quasilineer fonksiyoneldir. Ayrıca $\|f_y\| = \|y\|$'dir.

İspat. $\forall x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f_y(\alpha \cdot x) = \langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle = \alpha \cdot f_y$'dir. $\forall x, y, z \in X$ için $f_y(x+z) = \langle x+z, y \rangle \subseteq \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = f_y(x) + f_y(z)$ bulunur. Ayrıca $x_1 \preceq x_2$ ve $y \preceq y$ olduğundan yarı iç çarpım quasilineer uzayı özelliklerinden $\langle x_1, y \rangle \subseteq \langle x_2, y \rangle$ ve buradan da fonksiyon tanımından $f_y(x_1) \preceq f_y(x_2)$ olur. Buradan f_y öperatörünün quasilineer bir operatör olduğu görülmüş olur. (4.1.9)'dan

$$\begin{aligned} \|f_y(x)\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \|\langle x, y \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &\leq \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{\|f_y(x)\|}{\|x\|} \leq \|y\|$ elde edilir. Buradan $\sup \frac{\|f_y(x)\|}{\|x\|} \leq \|y\|$ olacağından

$$\|f_y\| \leq \|y\|$$

elde edilir. Dolayısıyla f_y fonksiyonu sınırlıdır. Lemma 3.2.3'den f_y süreklidir. Ayrıca

$$\|f_y\| \geq \frac{\|f_y(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|\langle y, y \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$$

olacağından $\|f_y\| = \|y\|$ elde edilir. □

Genel olarak herhangi bir quasilineer uzayda her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ eşitliği sağlanmaz. Örneğin; $A = [-2, 1] \subseteq \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun.

$$(1 + (-1)) \cdot [-2, 1] = 0 \cdot [-2, 1] = \{0\}$$

olduğu halde

$$1 \cdot [-2, 1] + (-1) \cdot [-2, 1] = [-2, 1] + [-1, 2] = [-3, 3]$$

olur. $\{0\} \subset [-3, 3]$ olduğundan her $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $(\lambda + \mu) \cdot A \subset \lambda \cdot A + \mu \cdot A$'dır.

Tanım 4.3.3. *X bir quasilineer uzay ve $\alpha\beta \geq 0$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için*

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

oluyorsa X'e ***homojenize quasilineer uzay*** *denir.*

Açık olarak her lineer uzay bir homojenize quasilineer uzaydır. Fakat tersi doğru değildir.

Teorem 4.3.6. *Bir X normlu lineer uzayı için $\Omega_C(X)$ homojenize quasilineer uzay iken $\Omega(X)$ homojenize olmayan quasilineer uzaydır.*

İspat. $\Omega_C(X)$'in homojenize quasilineer uzay olması için $\forall A \in \Omega_C(X)$ ve $\alpha\beta \geq 0$ için $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz. $\Omega_C(X)$ bir quasilineer uzay olduğundan (3.1.11) şartı gereğince $(\alpha + \beta) \cdot A \subseteq \alpha \cdot A + \beta \cdot A$'dır. $a \in \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ olsun. Buradan bir $x, y \in A$ için

$$a = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$$

olur.

$$a = (\alpha + \beta) \cdot \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot y \right] \tag{4.3.1}$$

olarak yazılabilir. $t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $k = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ denirse $\alpha\beta \geq 0$ olduğundan

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha \leq \alpha + \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \leq 1$ ve $0 \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ bulunur.

(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ için $\alpha + \beta \leq \alpha \Rightarrow 1 \geq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ve $0 \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ bulunur.

Bu durumda (i) ve (ii) den $0 \leq t \leq 1$ elde edilir. Aynı zamanda $t + k = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 1$ olduğundan quasilineer uzaylarda verilen konvekslik tanımı gereğince $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot x + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot y \in A$ olur. Bu durumda (4.3.1)'den bir $z \in A$ için

$$a = (\alpha + \beta) \cdot z \in A$$

elde edilmiş olur. □

Örnek 4.3.4. *$\mathbb{R}$ bir reel normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega(\mathbb{R})$ bir homojenize quasilineer uzay değildir. $A = \{1, 2, 3\} \in \Omega(\mathbb{R})$ alalım. $2A = \{2, 4, 6\}$'dır. Fakat $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ olur. Bu nedenle $\alpha\beta \geq 0$ için $2A \neq A + A$'dır. Buradan da $\Omega(\mathbb{R})$ bir homojenize quasilineer uzay olmadığı görülür.*

Uyarı 4.3.3. *Lineer uzaylarda H Hilbert uzay ve Y'de H'nin kapalı lineer bir alt uzayı ise $\forall x \in H$ için $x = y + z$ olacak şekilde bir tek $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ vardır. Yani $H = Y + Y^{\perp}$'dir. Bu özelliğe de lineer uzaylarda* ***Ortogonal Parçalanış Teoremi*** *adı verilir. Fakat quasilineer uzay teorisinde bu durum sağlanmayabilir. Yani H Hilbert quasilineer uzay ve Y'de H'nin kapalı quasilineer bir alt uzayı ise $\forall x \in H$ için $x = y + z$ olacak şekilde bir $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ bulunamayabilir.*

Örnek 4.3.5. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda X bir Hilbert quasilineer uzaydır. Y kümesi olarak da $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin regüler elemanlarının alt kümesini alalım. Teorem 3.1.2'den $Y = X_r$'nin X'in alt uzayı olduğunu biliyoruz.*

$(x_n) \in X_r$ ve $x_n \to x \in X$ olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n > n_0$ iken

$$x_n \subseteq x + a_{1n}^{\epsilon}, \quad x \subseteq x_n + a_{2n}^{\epsilon}, \qquad \|a_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

olur. $(x_n) \in X_r$ olduğundan $(x_n) + (-x_n) = 0$ olacak şekilde $(-x_n) \in X_r$ vardır. Lemma 3.2.1'den

$$-x_n \subseteq -x + (-a_{1n}^{\epsilon}), \quad -x \subseteq -x_n + (-a_{2n}^{\epsilon}), \qquad \|a_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

yazılır. (3.1.12)'den

$$x_n + (-x_n) \subseteq x + (-x) + a_{1n}^{\epsilon} + (-a_{1n}^{\epsilon}), \ x + (-x) \subseteq x_n + (-x_n) + a_{2n}^{\epsilon} + (-a_{2n}^{\epsilon})$$
$$0 \subseteq x + (-x) + a_{1n}^{\epsilon} + (-a_{1n}^{\epsilon}), \ x + (-x) \subseteq 0 + a_{2n}^{\epsilon} + (-a_{2n}^{\epsilon})$$

ve $i \in \{1,2\}$ için $\|a_{in}^{\epsilon} + (-a_{in}^{\epsilon})\| \leq \epsilon$ olduğundan Hausdorff metrik tanımı gereğince $x+(-x) = 0$ olur. Buradan $x \in X_r$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla X_r, X'de kapalıdır.

X_r, X'in kapalı bir alt uzayı olduğundan her $x \in X$ için $x = y + z$ olacak şekilde $y \in X_r$ ve $z \in X_r^{\perp}$ bulmaya çalışalım. Önce $X_r^{\perp}$ kümesini bulalım.

$$X_r^{\perp} = \{x \in X : \|\langle x, a\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0, \ a \in X_r\}$$

olduğundan $X_r^{\perp} = \{0\}$ tek nokta kümesidir. $x = [0,5] \in X$ olsun. Bu durumda

$$[0,5] = y + \{0\}$$

olacak şekilde $y \in X_r$ bulunamaz. Dolayısıyla $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin her elemanı, kapalı bir alt uzayının elemanı ve bu kapalı alt uzayın dikeyinin elemanının toplamı olarak ifade edilemez. Sadece bir quasilineer uzayın lineer kısmı bu şekilde ifade edilebilir. Bu da lineer uzaylarda bildiğimiz Ortogonal Parçalanış Teoremine denk gelmektedir.

Sonuç 4.3.1. *Quasilineer uzaylarda ortogonal parçalanmanın sağlanmamasının nedeni lineer uzay teorisinde var olan*

$$Y \text{ bir } H \text{ Hilbert uzayın kapalı lineer bir alt uzayı ve } Y \neq H \text{ ise } Y^{\perp} \neq \{0\}$$

şartının quasilineer uzaylarda sağlanmamasıdır. Yani

$$H \text{ Hilbert quasilineer uzayında } Y,\ H\text{'nin kapalı altuzayı iken } Y \neq H \text{ ise } Y^{\perp} = \{0\}$$

olabilir.

Örnek 4.3.6. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda X bir Hilbert quasilineer bir uzaydır. $Y = X_d$ ise Y, X'in kapalı bir alt uzayıdır [14]. $Y \neq X$'dir, fakat $Y^{\perp} = \{0\}$'dır.*

Quasilineer uzaylarda ortogonal parçalanma ancak şu şekilde mümkün olabilir.

Teorem 4.3.7. ***(Kısmi Ortogonal Parçalanma)*** *H Hilbert quasilineer uzay ve Y'de H'nin kapalı bir alt uzayı olsun. Bu durumda $\forall x \in H$ için*

$$x \succeq y + z$$

olacak şekilde $\exists y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ vardır. Yani

$$H \supseteq Y + Y^{\perp}$$

'dir. Ayrıca

$$\|x\|^2 \geq \|y\|^2 + \|z\|^2$$

'dir.

İspat. $Y \subseteq H$ olduğundan her $y \in Y$ için $y \in H$'dir ve $Y^{\perp}$ kümesi H'nin kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle her $z \in Y^{\perp}$ için $z \in H$'dir. $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ ise

$y+z \in Y+Y^{\perp}$ olur. Aynı zamanda her $y,z \in H$ için $y+z \in H$ olacağından $Y+Y^{\perp} \subseteq H$ elde edilmiş olur. Ayrıca her $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ için

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|\langle x,x\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}\\ &\geq \|\langle y+z,y+z\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}\\ &= \|y\|^2+\|z\|^2\end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 4.3.3. *H Hilbert quasilineer uzay ve Y'de H'nin kapalı bir alt uzayı olsun. O zaman $Y \subset Y^{\perp\perp}$'dir.*

İspat. $y \in Y$ olsun. O zaman her $x \in Y^{\perp}$

$$\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}=0$$

'dır ve bu nedenle $y \in \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$'dir. Yani $Y \subset \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$'dir. □

H Hilbert quasilineer uzayının bir Y kapalı alt uzayı için $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$ olmayabileceğini gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.3.7. *$X=\Omega_C(\mathbb{R})$ ve $Y=X_r$ olsun. X_r, X'in kapalı bir alt uzayıdır ve $Y^{\perp}=\{0\}$'dır. Fakat $Y^{\perp\perp}=X=\Omega_C(\mathbb{R})$'nin kendisidir. $\Omega_C(\mathbb{R}) \nsubseteq Y$'dir. Yani $Y^{\perp\perp} \neq Y$'dir.*

Sonuç 4.3.2. *Klasik lineer uzaylarda H Hilbert quasilineer uzay ve Y'de H'nin kapalı bir alt uzayı ise $Y=Y^{\perp\perp}$'dir. Fakat bir nonlineer quasilineer uzayda yukarıda verilen örnek gereği $Y=Y^{\perp\perp}$ eşitliği sağlanmayabilir.*

Lemma 4.3.2. *H bir Hilbert quasilineer uzay ve $\ker f=\{x \in H : f(x)=0\}$ olsun. Bu durumda $\ker f$ kümesi H'nin kapalı bir alt uzayıdır.*

İspat. Her $x,y \in \ker f$ ve her $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}f(\alpha\cdot x+\beta\cdot y) &\leq f(\alpha\cdot x)+f(\beta\cdot y)\\ &= \alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(y)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. [1]'den θ elemanı minimal olduğundan $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0$ olur. Buradan da $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \ker f$ elde edilir. Dolayısıyla $\ker f$, H Hilbert uzayının bir alt uzayıdır.

$x_n \in \ker f$ ve $x_n \to x \in H$ olsun. Bu durumda $f(x_n) = 0$'dır. $x_n \to x$ ise her $\epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $\forall n > n_0$ için

$$x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon}, \quad x \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon}, \quad \|a_{in}^{\epsilon}\| \preceq \epsilon$$

'dir. (4.1.6)'dan $x_n \preceq x + a_{1n}^{\epsilon}$ ve $\|a_{1n}^{\epsilon}\| \preceq \epsilon$ ise

$$x_n \preceq x$$

bulunur. f bir quasilineer operatör olduğundan

$$f(x_n) \preceq f(x) \tag{4.3.2}$$

olur. Benzer şekilde her $\epsilon > 0$ için $x \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon}$, $\|a_{2n}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$ ise

$$x \preceq x_n$$

bulunur. f bir quasilineer operatör olduğundan

$$f(x) \preceq f(x_n) \tag{4.3.3}$$

olur. $x_n \in \ker f$ olduğundan $f(x_n) = 0$'dır. (4.3.2) ve (4.3.3)'den $0 \preceq f(x)$ ve $f(x) \preceq 0$ olacağından $f(x) = 0$ elde edilmiş olur. Böylece $x \in \ker f$'dir. Bu da bize $\ker f$ kümesinin kapalı olduğunu söyler. □

Teorem 4.3.8. *X bir homojenize quasilineer uzay ve $z \in X_d$ ise bir $y \in X$ vardır öyle ki $z = y - y$'dir.*

İspat. Tanım 4.3.3'den biliyoruz ki her $x \in X$ quasilineer uzayında $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ise $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$'dir. z, X homojenize quasilineer uzayının simetrik bir eleman ise $z = -z$'dir. Aynı zamanda $z = z$ olduğundan $z + z = z - z$ olur. Buradan $2z = z - z$ olacağından $z = \frac{z}{2} - \frac{z}{2}$ olur. Buradan da istenilen elde edilmiş olur.

Eğer X bir homojenize quasilineer uzay olmasaydı $2z \preceq z + z = z - z$ olacağından $z \preceq \frac{z}{2} - \frac{z}{2}$ olurdu. □

4.4 İç Çarpım Quasilineer Uzaylarında Zemin Kavramı

Bu kısımda Tanım 3.3.7'de verilen zemin kavramıyla ilgili iç çarpım quasilineer uzaylarında elde edilen bazı sonuçlar verilecektir. Tanım 3.3.7'ye göre bir X quasilineer uzayının bir x elemanın zemini $F_x = \{y \in X_r : y \preceq x\}$ kümesidir. Bir X quasilineer uzayının zemini ise o uzaya ait tüm elemanların zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve F_X ile gösterilir [3].

Teorem 4.4.1. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda*

i) $\{0\} \in F_A^{\perp}$,

ii) $B \subseteq A$ ise $F_B \subseteq F_A$ ve $A^{\perp} \subseteq B^{\perp}$ ise $F_{A^{\perp}} \subseteq F_{B^{\perp}}$,

iii) $F_{\{0\}} = \{0\}$

'dir.

İspat. Her $x \in F_A$ için $\|\langle x, \{0\}\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olduğundan $\{0\} \in F_A^{\perp}$ olur.

$B \subseteq A$ olsun. Buradan her $b \in B$ için $b \in A$ olur. $F_B = \bigcup_{b\in B} F_b$ ve $F_A = \bigcup_{a\in A} F_a$ olduğundan her $c \in F_B$ için $c \in F_A$ olduğunu göstermeliyiz. $c \in F_B$ ise $\exists b \in B$ vardır ve $c \in F_b$'dir. $B \subseteq A$ olduğundan $b \in A$, buradan da $F_b \subseteq \bigcup_{a\in A} F_a$ olur. Böylece $c \in F_A$ elde edilir.

$F_{\{0\}} = \{x \in X_r : x \leq \{0\}\} = \{0\}$'dır. □

Önerme 4.4.1. *X homojenize iç çarpım quasilineer uzayı ve $x \in X$ ise X'in zemin kümesi olan F_x kümesi konveks bir kümedir.*

İspat. X homojenize quasilineer uzay olsun. Bir $x \in X$ için $F_x = \{a \in X_r : a \preceq x\}$ ve her $a, b \in F_x$ için

$$a \preceq x \text{ ve } b \preceq x$$

dir. X iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan her $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda \cdot a \preceq \lambda \cdot x \text{ ve } (1-\lambda) \cdot b \preceq (1-\lambda) \cdot x$$

olur. Buradan $\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b \preceq \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot x$ bulunur. X homojenize quasilineer uzay olduğundan her $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot x \;=\; (\lambda + 1 - \lambda) \cdot x = x$$

bulunur. Böylece

$$\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b \preceq x$$

elde edilmiş olur. Buradan da $\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b \in F_x$ elde edilir. $\square$

Uyarı 4.4.1. *Quasilineer uzayın herhangi bir elemanın zeminin konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart quasilineer uzayın homojenize olmasıdır. Eğer yukarıda verilen önermede X uzayı homejenize olmasaydı $(\alpha+\beta)\cdot x \neq \alpha\cdot x+\beta\cdot x$ olabileceğinden F_x konveks olmazdı.*

Teorem 4.4.2. *X bir Hilbert quasilineer uzay, M'de X'in konveks bir alt uzayı ise M'nin zemini olan F_M'de X'in konveks tam olan bir alt uzayıdır.*

İspat. M konveks olduğundan $\forall x, y \in M$ ve her $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \in M$'dir. Tanım 3.3.7 gereğince $a, b \in F_M$ ise bir $x \in M$ vardır öyle ki $a \preceq x$ ve bir $y \in M$ vardır öyle ki $b \preceq y$'dir. (3.1.13)'den

$$\alpha \cdot a \preceq \alpha \cdot x \text{ ve } (1-\alpha) \cdot b \preceq (1-\alpha) \cdot y$$

bulunur. (3.1.12)'den

$$\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \preceq \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y$$

olur. M konveks olduğundan $\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \in M$'dir. Buradan

$$\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \preceq z$$

olacak şekilde bir $z \in M$ bulunur. Ayrıca $a, b \in X_r$ olduğundan α ve β skalerleri için $\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \in X_r$'dir. Böylece $\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \in F_M$ olur.

$(a_n) \in F_M$ ve $n \to \infty$ iken $a_n \to a \in X$ olsun. İlk olarak

$$(a_n) \in F_M \text{ ise } (x_n) \in M \text{ dizisi vardır öyle ki her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a_n \preceq x_n$$

dir. $a_n \to a$ ise yakınsaklık tanımı gereğince her $\epsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$a_n \preceq a + a_{1n}^{\epsilon}, \quad a \preceq a_n + a_{2n}^{\epsilon}, \quad \|a_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$$

olur. $a_n \preceq x_n$ ve $a \preceq a_n + a_{2n}^{\epsilon}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $a \preceq x_n + a_{2n}^{\epsilon}$ elde edilir. $\|a_{2n}^{\epsilon}\| \leq \epsilon$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için (3.2.5)'den $a \preceq x_n$ olur.

Şimdi $a \in X_r$ olduğunu gösterelim. X bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan Lemma 3.2.1'den $a_n \to a$ ise $-a_n \to -a$ ve yine Lemma 3.2.1'den $n \to \infty$ iken $a_n - a_n \to a - a$ olur. Buradan her $\epsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$a_n - a_n \preceq a - a + k_{1n}^{\epsilon}, \quad a - a \preceq a_n - a_n + k_{2n}^{\epsilon}, \quad \|k_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon^{1/2}$$

bulunur. $\forall n \in N$ için $(a_n) \in F_M$ ve X bir normlu quasilineer uzay olduğundan

$$0 \preceq a - a + k_{1n}^{\epsilon}, \qquad a - a \preceq 0 + k_{2n}^{\epsilon}, \qquad \|k_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon^{1/2}$$

iken $0 \preceq a - a$ ve $a - a \preceq 0$ olur. (3.1.3)'den $a - a = 0$ elde edilir. Bu da bize $a \in X_r$ olduğunu söyler. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in M$ iken $a \in F_M$ olur. Yani F_M kapalıdır. □

Sonuç 4.4.1. *X bir Hilbert quasilineer uzay, M'de X'in konveks alt uzayı olsun. Bu durumda M'nin zemini olan F_M'de X'in konveks, tam olan bir alt uzayıdır. Burada dikkat edelim ki bir Hilbert quasilineer uzayın bir alt uzayı tam olsun ya da olmasın zemini her zaman tamdır.*

Önerme 4.4.2. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $x \in X$ ise F_x kümesi kapalıdır.*

İspat. $(b_n) \in F_M$ ve $n \to \infty$ iken $b_n \to b \in X$ olsun. $b_n \to b$ ise her $\epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$b_n \preceq b + c_{1n}^{\epsilon}, \quad b \preceq b_n + c_{2n}^{\epsilon}, \quad \|c_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon^{1/2}$$

olur. $b_n \in F_x$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \preceq x$ olur. X bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan

$$b \preceq b_n + c_{2n}^{\epsilon} \text{ ve } \|c_{2n}^{\epsilon}\|^2 = \|\langle c_{2n}^{\epsilon}, c_{2n}^{\epsilon}\rangle\| \leq \epsilon \text{ ise } b \preceq b_n$$

olur. Buradan

$$b \preceq b_n \text{ ve } b_n \preceq x \text{ ise } b \preceq x$$

bulunur. Şimdi $b \in X_r$ olduğunu gösterelim. X iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan Lemma 3.2.1'den $b_n \to b$ ise $-b_n \to -b$'dir. Buradan

$$\begin{aligned} b_n &\preceq b + c_{1n}^{\epsilon}, \quad b \preceq b_n + c_{2n}^{\epsilon}, \quad \|c_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\epsilon^{1/2}}{2} \\ -b_n &\preceq -b + d_{1n}^{\epsilon}, \quad -b \preceq -b_n + d_{2n}^{\epsilon}, \quad \|d_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\epsilon^{1/2}}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $b_n \in X_r$ olduğundan $b_n - b_n = 0$ olur. Buradan

$$b_n - b_n \preceq b - b + c_{1n}^{\epsilon} + d_{1n}^{\epsilon}, \quad b - b \preceq b_n - b_n + c_{2n}^{\epsilon} + d_{2n}^{\epsilon}, \quad \|c_{in}^{\epsilon} + d_{in}^{\epsilon}\| \leq \epsilon^{1/2}$$

bulunur. Böylece iç çarpım quasilineer uzayı özelliklerinden

$0 \preceq b - b + c_{1n}^{\epsilon} + d_{1n}^{\epsilon}$ ve $\|c_{1n}^{\epsilon} + d_{1n}^{\epsilon}\|^2 = \|\langle c_{1n}^{\epsilon} + d_{1n}^{\epsilon}, c_{1n}^{\epsilon} + d_{1n}^{\epsilon}\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ ise $0 \preceq b - b$ olur. Benzer şekilde

$b - b \preceq 0 + c_{2n}^{\epsilon} + d_{2n}^{\epsilon}$ ve $\|c_{2n}^{\epsilon} + d_{2n}^{\epsilon}\|^2 = \|\langle c_{2n}^{\epsilon} + d_{2n}^{\epsilon}, c_{2n}^{\epsilon} + d_{2n}^{\epsilon}\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ ise $b - b \preceq 0$

bulunur. Dolayısıyla $0 \preceq b - b$ ve $b - b \preceq 0$ bulunur. (3.1.3)'den $b - b = 0$ elde edilir. Bu da bize $b \in X_r$ olduğunu söyler. Böylece F_x'in kapalılığı gösterilmiş olur. $\square$

Lemma 4.4.1. *Bir iç çarpım quasilineer uzayının herhangi bir elemanının zemini alt uzay olmayabilir. Fakat bir elemanın zemin kümesinin dikey kümesi her zaman uzayın bir alt uzayıdır.*

İspat. $x \in X$ iç çarpım quasilineer uzayı için $F_x = \{a \in X_r : a \preceq x\}$'dir. $a, b \in F_x$ ise tanım gereği

$$a \preceq x \text{ ve } b \preceq x$$

'dir. X bir quasilineer uzay olduğundan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha \cdot a \preceq \alpha \cdot x \text{ ve } \beta \cdot b \preceq \beta \cdot x$$

olur. Buradan da

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

elde edilir. Her α, β elemanı için $\alpha \cdot x + \beta \cdot x = x$ eşitliği sağlanmayacağından $\alpha \cdot a + \beta \cdot b \npreceq x$'dir. Bu nedenle X iç çarpım quasilineer uzayının herhangi bir elemanın zemini alt uzay değildir. $F_x^{\perp}$, X'in bir alt uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. $c, d \in F_x^{\perp}$ ve $z \in F_x$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|\langle z, \alpha \cdot c + \beta \cdot d\rangle\| &\leq \|\langle z, \alpha \cdot c\rangle\| + \|\langle z, \beta \cdot d\rangle\| \\ &= |\alpha| \, \|\langle z, c\rangle\| + |\beta| \, \|\langle z, d\rangle\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha \cdot c + \beta \cdot d \in F_x^{\perp}$'dir. Dolayısıyla $F_x^{\perp}$, X'in bir alt uzayıdır. $\square$

Uyarı 4.4.2. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayının simetrik elemanlarından oluşan herhangi bir alt kümesinin zemini bu alt kümenin bağıntıya göre en büyük elemanının zeminine eşittir.*

Örnek 4.4.1. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $M = \{[-1,1],[-2,2],[-5,5]\} \subseteq X$ olsun. Bu durumda M kümesinin zemini;*

$$F_M = \bigcup_{m\in M} F_m$$
$$F_M = \bigcup_{m\in M} \{a \in X_r : a \preceq m\}$$

'dır.

$$\begin{aligned} F_M &= \{a \in X_r : a \subseteq [-1,1]\} \bigcup \{b \in X_r : b \subseteq [-2,2]\} \bigcup \{c \in X_r : c \subseteq [-5,5]\} \\ &= \{c \in X_r : c \subseteq [-5,5]\} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.4.2. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$'nin $RZ = \{[n,0] : n \in \mathbb{R}^-\}$ sağ sıfır alt kümesinin zemini*

$$\begin{aligned} F_{RZ} &= \bigcup_{n\in\mathbb{R}^-} \{a \in X_r : a \subseteq [n,0]\} \\ &= \{\{a\} : a \in \mathbb{R}^-\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

'dır. $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin $LZ = \{[0,n] : n \in \mathbb{R}^+\}$ sol sıfır alt kümesinin zemini ise

$$\begin{aligned} F_{LZ} &= \bigcup_{n\in\mathbb{R}^+} \{a \in X_r : a \subseteq [0,n]\} \\ &= \{\{a\} : a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} F_{RZ} \cup F_{LZ} &= \big\{\{a\} : a \in \mathbb{R}^-\big\} \cup \big\{\{a\} : a \in \mathbb{R}^+\big\} \\ &= \{\{c\} : c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin sağ sıfır ve sol sıfır kümelerinin zeminlerinin birleşimi $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin tüm regüler elemanlarının kümesini verir. Aslında bu da $\mathbb{R}$'nin kendisidir.

Teorem 4.4.3. *X bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A \cup B = X$ ise $F_A \cup F_B = X_r$'dir. Fakat tersi doğru değildir.*

İspat. $A, B \subseteq X$ için $A \cup B = X$ olsun. Zemin tanımı gereğince her $x \in F_A \cup F_B$ için $x \in X_r$ olduğu aşikardır. $x \in X_r$ olsun. Bu durumda her $x \in X_r$ için $x \in X$ ve $A \cup B = X$ olduğundan ya $x \in A$ ya da $x \in B$'dir.

a) $x \in A$ ise $F_A = \bigcup_{a \in A} F_a$ olduğundan bir $a \in A$ vardır öyle ki $a = x$'dir. Ve $x \in X_r$ olduğundan $x \in F_A$'dır.

b) $x \in B$ ise $F_B = \bigcup_{b \in B} F_b$ olduğundan bir $b \in B$ vardır öyle ki $b = x$'dir. Ve $x \in X_r$ olduğundan $x \in F_B$'dir.

Bu durumda a) ve b)'den $x \in F_A \cup F_B$ olur. □

Örnek 4.4.3. *$X = \Omega_C(\mathbb{R})$ iç çarpım quasilineer uzayı $A = X_s \cup \{\{0\}\}$ ve $B = X_r$ olsun. Burada*

$$A \cup B = X_s \cup \{\{0\}\} \cup X_r = X$$

'dir. Ve

$$F_A \cup F_B = F_{X_s} \cup F_{X_r} = X_r$$

bulunur.

Fakat yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Örneğin; $A = LZ$, $B = RZ$ kümeleri $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin alt kümeleridir. Örnek 4.4.2. gereğince $F_{RZ} \cup F_{LZ} = X_r$'dir. Fakat

$$A \cup B = LZ \cup RZ \neq X$$

'dir.

BÖLÜM 5

İNTERVAL VEKTÖRLER VE İNTERVAL DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, farklı bir quasilineer uzay örneği olan $I\mathbb{R}^n$ interval uzayı tanıtılmıştır. Ayrıca, $I\mathbb{R}^n$ quasilineer uzayı üzerinde bir norm tanımlanmış ve bu normla birlikte $I\mathbb{R}^n$'nin normlu quasilineer uzay olduğu gösterilmiştir. Yine burada [3] ve [12]'den yararlanılarak interval uzaylarının bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bundan başka farklı bir quasilineer uzay örneği olan Is, Il_{∞}, Il_p, Ic_0 ve Il_2 interval dizi uzayları tanıtılmış ve bu uzaylarla ilgili bazı cebirsel incelemeler yapılmıştır.

5.1 İnterval Vektörler

$I\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$'nin tüm kapalı aralıklarının kümesi olsun. Bu durumda $I\mathbb{R}, \mathbb{R}$'nin tüm konveks-kompakt alt kümelerinin ailesidir.

$$I\mathbb{R}^2 = \{(X_1, X_2) : X_1, X_2 \in I\mathbb{R}\}$$

ve böylece

$$I\mathbb{R}^n = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) : X_i \in I\mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesine n-boyutlu intervallerin kümesi adı verilir. Şunu belirtelim ki $I\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayı yani lineer uzay değildir. Bundan başka $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ dizisine **interval dizi** adı verilir. Bunların yakınsaklığı [17]'de tartışılmıştır.

Örnek 5.1.1. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in I\mathbb{R}^n$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in I\mathbb{R}^n$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için*

$$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n)$$

$$\lambda \cdot X = (\lambda \cdot X_1, \lambda \cdot X_2, \ldots, \lambda \cdot X_n)$$

işlemleri $I\mathbb{R}^n$ *kümesi üzerinde iyi tanımlıdır. Bu işlemlerle ve*

$$X \preceq Y \Leftrightarrow X_i \subseteq Y_i, \; 1 \leq i \leq n$$

bağıntısıyla $I\mathbb{R}^n$ *bir quasilineer uzaydır. Her* $X, Y, Z \in I\mathbb{R}^n$ *ve her* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için*

$X \preceq X$ *olduğu açıktır.*

$X \preceq Y$ *ve* $Y \preceq Z$ *ise* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *ve* $Y_i \subseteq Z_i$ *olur.* $X_i, Y_i, Z_i \in I\mathbb{R}$ *ve* $I\mathbb{R}$ *bir quasilineer uzay olduğundan* $X_i \subseteq Z_i$ *olur. Buradan da* $X \preceq Z$ *elde edilir.*

$X \preceq Y$ *ve* $Y \preceq X$ *ise* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *ve* $Y_i \subseteq X_i$ *olur.* $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ *ve* $I\mathbb{R}$ *bir quasilineer uzay olduğundan* $X_i = Y_i$ *olur. Buradan da* $X = Y$ *elde edilir.*

$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n)$ *dir. Her* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ *olduğundan* $X_i + Y_i = Y_i + X_i$ *olur. Buradan*

$$\begin{aligned} X + Y &= (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n) \\ &= (Y_1 + X_1, Y_2 + X_2, \ldots, Y_n + X_n) \\ &= Y + X \end{aligned}$$

bulunur.

$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ *olduğu kolayca gösterilebilir.*

$X + \theta = (X_1 + \theta_{I\mathbb{R}}, X_2 + \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots, X_n + \theta_{I\mathbb{R}}) = (X_1, X_2, \ldots, X_n) = X$ *olacak şekilde* $\theta = (\theta_{I\mathbb{R}}, \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots, \theta_{I\mathbb{R}}) \in I\mathbb{R}^n$ *mevcuttur.* $\theta_{I\mathbb{R}} = 0$ *dır.*

$\alpha \cdot (\beta \cdot X) = \alpha \cdot (\beta \cdot X_1, \beta \cdot X_2, \ldots, \beta \cdot X_n) = (\alpha\beta \cdot X_1, \alpha\beta \cdot X_2, \ldots, \alpha\beta \cdot X_n) = (\alpha\beta) \cdot X$ *olur.*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (X + Y) &= \alpha \cdot (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n) \\ &= (\alpha \cdot (X_1 + Y_1), \alpha \cdot (X_2 + Y_2), \ldots, \alpha \cdot (X_n + Y_n)) \\ &= (\alpha \cdot X_1 + \alpha \cdot Y_1, \alpha \cdot X_2 + \alpha \cdot Y_2, \ldots, \alpha \cdot X_n + \alpha \cdot Y_n) \\ &= (\alpha \cdot X_1, \alpha \cdot X_2, \ldots, \alpha \cdot X_n) + (\alpha \cdot Y_1, \alpha \cdot Y_2, \ldots, +\alpha \cdot Y_n) \\ &= \alpha \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) + \alpha \cdot (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ &= \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y \end{aligned}$$

elde edilir.

$1 \cdot X = 1 \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) = (1 \cdot X_1, 1 \cdot X_2, \ldots, 1 \cdot X_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n) = X$*'dir.*

$0 \cdot X = 0 \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) = (0 \cdot X_1, 0 \cdot X_2, \ldots, 0 \cdot X_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \theta$ *olur.*

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot X &= (\alpha+\beta)\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n)\\ &= ((\alpha+\beta)\cdot X_1, (\alpha+\beta)\cdot X_2, \ldots, (\alpha+\beta)\cdot X_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot X+\beta\cdot X &= \alpha\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n)+\beta\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n)\\ &= (\alpha\cdot X_1+\beta\cdot X_1, \alpha\cdot X_2+\beta\cdot X_2, \ldots, \alpha\cdot X_n+\beta\cdot X_n)\end{aligned}$$

bulunur. $X \in I\mathbb{R}^n$ *iken her* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ *ve* $I\mathbb{R}$ *bir quasilineer uzay olduğundan*

$$(\alpha+\beta)\cdot X_i \subseteq \alpha\cdot X_i+\beta\cdot X_i$$

olur. Buradan da

$$(\alpha+\beta)\cdot X \preceq \alpha\cdot X+\beta\cdot X$$

elde edilir.

$X \preceq Y$ *ve* $Z \preceq V$ *ise* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *ve* $Z_i \subseteq V_i$ *olur. Buradan da* $X_i + Z_i \subseteq Y_i + V_i$ *olacağından* $X + Z \preceq Y + V$ *bulunur.*

$X \preceq Y$ *ise* $X_i \subseteq Y_i$ *olduğundan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için* $\alpha \cdot X_i \subseteq \alpha \cdot Y_i$*'dir. Buradan* $\alpha \cdot X \preceq \alpha \cdot Y$ *elde edilir.*

Böylece $I\mathbb{R}^n$*, quasilineer uzay olma şartlarını sağladığından yukarıda verilen işlemlerle ve "*$\preceq$*" bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır.*

Uyarı 5.1.1. $I\mathbb{R}^2$ *ile* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayları birbirinden ayrı iki quasilineer uzaydır. Örneğin;* $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *kümesi* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$*'nin bir elemanı iken* $I\mathbb{R}^2$*'nin bir elemanı değildir.* $B = ([1, 2], \{2\}) \in I\mathbb{R}^2$ *iken* $B \notin \Omega_C(\mathbb{R}^2)$*'dir. Buradan* $I\mathbb{R}^2 \neq \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *olduğunu söyleyebiliriz.*

Örnek 5.1.2. $X = I\mathbb{R}^2$ *olmak üzere* $A = (\{1\}, \{2\})$ *olsun.* A *kümesi* X*'in regüler bir elemanıdır. Çünkü*

$$\begin{aligned}A+(-A) &= (\{1\}, \{2\})+(-A)\\ &= (\{1\}, \{2\})+(\{a\}, \{b\})\\ &= (\{1\}+\{a\}, \{2\}+\{b\})\\ &= (\{0\}, \{0\})\end{aligned}$$

olacak şekilde $-A = (\{-1\}, \{-2\}) \in I\mathbb{R}^2$ *vardır.* $X = I\mathbb{R}^n$ *olmak üzere*

$$B = \{(\{b_1\}, \{b_2\}, \ldots, \{b_n\}) : \{b_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$$

kümesi $I\mathbb{R}^n$*'nin tüm regüler elemanlarının kümesidir ve bu küme* $I\mathbb{R}^n$*'nin alt uzayıdır. Öte yandan en az bir* $1 \leq i \leq n$ *için* $a_i \neq b_i \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$C = \{([a_1, b_1], [a_1, b_2], \ldots, [a_n, b_n]) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $I\mathbb{R}^n$*'nin singüler alt uzayıdır.*

$$h(X,Y) = \inf\{r \geq 0 : X \subseteq Y + B_r(\theta), Y \subseteq X + B_r(\theta)\}$$

metriği $I\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik tanımlar. Açıkca görüyoruz ki $I\mathbb{R} = \Omega_C(\mathbb{R})$'dir. Ayrıca [1]'den $I\mathbb{R}$'nin $\|X\| = \sup_{x \in X} |x|$ normu ile bir normlu quasilineer uzay olduğunuda biliyoruz.

Şimdi $n \geq 1$ olmak üzere $I\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm tanımlayalım.

Örnek 5.1.3. *Örnek 5.1.1'de verilen* $I\mathbb{R}^n$ *uzayı*

$$\|X\| = \|(X_1, X_2, \ldots, X_n)\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} \tag{5.1.1}$$

normuyla birlikte bir normlu quasilineer uzaydır.

Bu norm $I\mathbb{R}^n$*'de iyi tanımlıdır ve bu normla birlikte* $I\mathbb{R}^n$ *bir normlu quasilineer uzaydır. Her* $X, Y \in I\mathbb{R}^n$ *için* $\|X\| \geq 0$ *olduğu açıktır. Eğer* $\|X\| = 0$ *ise* $\sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} = 0$ *olacağından* $1 \leq i \leq n$ *için* $\|X_i\|_{I\mathbb{R}} = 0$ *olur. Buradan da* $I\mathbb{R}$ *bir normlu quasilineer uzay olduğundan her* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i = 0_{I\mathbb{R}}$ *olur. Bu da bize* $X = \theta$ *olduğunu söyler.*

$$\begin{aligned}
\|X + Y\| &= \|(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n)\| \\
&= \sup_{1 \leq i \leq n} \|(X_i + Y_i)\|_{I\mathbb{R}} \\
&\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} + \sup_{1 \leq i \leq n} \|(Y_i)\|_{I\mathbb{R}} \\
&= \|X\| + \|Y\|
\end{aligned}$$

olduğundan $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ *eşitsizliği doğrudur.*

Ayrıca her $\alpha \in \mathbb{R}$ *için* $\|\alpha \cdot X\| = \sup \|\alpha \cdot X_i\|_{I\mathbb{R}} = |\alpha| \sup \|X_i\|_{I\mathbb{R}} = \alpha \|X\|$ *bulunur.*

$X \preceq Y \Rightarrow X_i \subseteq Y_i \Rightarrow \|X_i\| \leq \|Y_i\| \Rightarrow \sup \|X_i\| \leq \sup \|Y_i\| \Rightarrow \|X\| \leq \|Y\|$*'dir.*

$X \preceq Y + X_\epsilon$ *ve* $\|X_\epsilon\| \leq \epsilon \Rightarrow \|X_\epsilon\| = \sup \|X_{\epsilon_i}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ *olduğundan* $\|X_{\epsilon_i}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ *bulunur.*

$X \preceq Y + X_\epsilon \Rightarrow X_i \subseteq Y_i + X_{\epsilon_i}$ *olacağından* $I\mathbb{R}$ *de* $\|X_{\epsilon_i}\| \leq \epsilon$ *iken* $X_i \subseteq Y_i$ *olur. Böylece* $X \preceq Y$ *elde edilir.*

Örnek 5.1.4. $W = ([-1,2], [0,3], [-2,-1]) \in I\mathbb{R}^3$ *olsun.*

$$\begin{aligned} \|W\| &= \sup \{\|[1,2]\|_{I\mathbb{R}}, \|[0,3]\|_{I\mathbb{R}}, \|[-2,-1]\|_{I\mathbb{R}}\} \\ &= \sup \{2,3,2\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5.1.5. $X = (\{1\}, [-1,1]), Y = ([-1,1], \{1\}), Z = (\{1\}, [-1/2, 1/2]) \in I\mathbb{R}^2$ *olsun. Burada dikkat edelim ki*

$$\{1\} \subseteq [-1,1] \text{ fakat } [-1,1] \nsubseteq \{1\}$$

olduğundan X *ile* Y, $\subseteq$ *bağıntısı ile karşılaştırılamaz. Yine*

$$\{1\} \subseteq [-1/2, 1/2] \text{ fakat } [-1,1] \nsubseteq \{1\}$$

olduğundan Y *ile* Z, $\subseteq$ *bağıntısı ile karşılaştırılamaz. Yani* X *ile* Y *ve* Y *ile* Z *bağlantısız elemanlardır. Fakat*

$$\{1\} \subseteq \{1\} \text{ ve } [-1/2, 1/2] \nsubseteq [-1,1]$$

olduğundan $Z \subseteq X$ *bulunur. Buradan da* X *ile* Z*'nin,* $I\mathbb{R}^2$*'nin bağlantılı elemanları olduğu sonucuna ulaşırız.*

Örnek 5.1.6. $I\mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sup_{1 \leq i \leq 2} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}$ *normu ile bir Banach* Ω*-uzayıdır.*

X^n, $I\mathbb{R}^2$*'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her* $\epsilon > 0$ *için* $\exists N \in \mathbb{N}$ *vardır öyle ki her* $n, m > N$ *iken*

$$X^n \preceq X^m + A^{1\epsilon}, \quad X^m \preceq X^n + A^{2\epsilon}, \quad \|A^{j\epsilon}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Buradan $\|A^{j\epsilon}\| = \sup_i \left\|A_i^{j\epsilon}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *olacağından her* $1 \leq i \leq 2$ *için* $\left\|A_i^{j\epsilon}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *bulunur. Diğer yandan* $I\mathbb{R}^2$ *bir quasilineer uzay olduğundan her* $1 \leq i \leq 2$ *için*

$$X_i^n \subseteq X_i^m + A_i^{1\epsilon}, \quad X_i^m \subseteq X_i^n + A_i^{2\epsilon} \tag{5.1.2}$$

olur. Buradan her $1 \leq i \leq 2$ *için* $\left\|A_i^{j\epsilon}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *olduğundan* X_i^n*,* $I\mathbb{R}$*'de bir Cauchy dizisidir.* $I\mathbb{R}$ *tam olduğundan* $X_i^n \to X_i$ *olacak şekilde* $X_i \in I\mathbb{R}$ *vardır. Yani her* $\epsilon > 0$ *için* $\exists N' \in \mathbb{N}$ *vardır öyle ki her* $n > N'$ *iken*

$$X_i^n \subseteq X_i + B_i^{1\epsilon}, \quad X_i \subseteq X_i^n + B_i^{2\epsilon}, \quad \left\|B_i^{j\epsilon}\right\|_{I\mathbb{R}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

'dir. $\left\|B_i^{j\epsilon}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *iken* $\|B^{j\epsilon}\| = \sup_i \left\|B_i^{j\epsilon}\right\|_{I\mathbb{R}} \leq \frac{\epsilon}{2}$ *olur. Yine burada* $1 \leq i \leq 2$ *için elde edilen* $X = (X_1, X_2)$ *elemanını açık olarak* $I\mathbb{R}^2$*'nin elemanıdır. Ayrıca, (5.1.2)'de* $n \to \infty$ *için limit alırsak*

$$X_i^n \subseteq X_i + A_i^{1\epsilon} + B_i^{1\epsilon}, \quad X_i \subseteq X_i^n + A_i^{2\epsilon} + B_i^{2\epsilon}$$

ve

$$\left\|A_i^{1\epsilon} + B_i^{1\epsilon}\right\| \leq \left\|A_i^{1\epsilon}\right\| + \left\|B_i^{1\epsilon}\right\| \leq \epsilon$$

olur. Buradan da her $1 \leq i \leq 2$ *için*

$$X^n \preceq X + A^{1\epsilon} + B^{1\epsilon}, \quad X \preceq X^n + A^{2\epsilon} + B^{2\epsilon}, \quad \left\|A^{j\epsilon} + B^{j\epsilon}\right\| \leq \epsilon$$

bulunur. Böylece quasilineer uzaylardaki yakınsaklık tanımı gereğince $I\mathbb{R}^2$*'de* $X^n \to X$*'dir. Ayrıca her* $1 \leq i \leq 2$ *için* $X_i \in I\mathbb{R}$ *olduğundan* $X = (X_1, X_2) \in I\mathbb{R}^2$ *bulunur. Buradan da istenilen elde edilmiş olur.*

$I\mathbb{R}^2$*'nin* Ω*-uzayı olabilmesi için her* $X \in I\mathbb{R}^2$ *için* $\|X\| \leq \|B_X\|$ *iken* $X \subseteq B_X$ *olacak şekilde bir* $B_X \in I\mathbb{R}^2$ *bulmalıyız.* $B_X = ([-1,1],[-1,1]) \in I\mathbb{R}^2$ *seçelim.*

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sup\{\|X_1\|, \|X_2\|\} \\
&\leq \|B_X\| \\
&= \sup\{\|[-1,1]\|, \|[-1,1]\|\} \\
&= \sup\{1,1\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|X_1\| \leq 1, \;\; \|X_2\| \leq 1 \Leftrightarrow X_1 \subseteq [-1,1],\, X_2 \subseteq [-1,1] \Leftrightarrow (X_1 \;\, X_2) \subseteq ([-1,1],[-1,1])$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.1. *$I\mathbb{R}^n$ yukarıda verilen norm ile bir Banach Ω-uzayıdır.*

Örnek 5.1.7. *Her $X, Y \in I\mathbb{R}^n$ için $I\mathbb{R}^n$ uzayı*

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2}$$

normuyla birlikte bir normlu quasilineer uzaydır. Öncelikle bu şekilde tanımlı norm her bir $1 \leq i \leq n$ için $\|X_i\|_{I\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ olduğundan iyi tanımlıdır. $\forall X, Y \in I\mathbb{R}^n$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|X\|_2 \geq 0$ olduğu aşikardır. Eğer $\|X\|_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 = 0 \Leftrightarrow$ her $1 \leq i \leq n$ için $\|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 = 0$ olacağından $X_i = \theta$ bulunur. Buradan da $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) = \theta$ elde ederiz. Ayrıca Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|X+Y\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i + Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \\ &= \|X\|_2 + \|Y\|_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\|\alpha \cdot X\|_2 = \alpha \cdot \|X\|_2$ olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer $X \preceq Y$ ise her $1 \leq i \leq n$ için $X_i \subseteq Y_i$ olacağından, $\|X_i\|_{I\mathbb{R}} \leq \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 &\leq \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \\ &\Rightarrow \|X\|_2 \leq \|Y\|_2 \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Her $\epsilon > 0$ için en az bir $X^\epsilon \in I\mathbb{R}^n$ vardır öyle ki $X \preceq Y + X^\epsilon$ ve $\|X^\epsilon\| \leq \epsilon$ olsun. Bu durumda $\|X^\epsilon\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i^\epsilon\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2}$ olduğundan her $1 \leq i \leq n$ için $\|X_i^\epsilon\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \epsilon^2$, yani $\|X_i^\epsilon\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ olur. Diğer yandan $I\mathbb{R}$ bir quasilineer uzay olduğundan $X \preceq Y + X^\epsilon$ ise her $1 \leq i \leq n$ için $X_i \subseteq Y_i + X_i^\epsilon$ bulunur. Buradan da

$I\mathbb{R}$ bir normlu quasilineer uzay olduğundan $X_i \subseteq Y_i + X_i^{\epsilon}$ ve $\|X_i^{\epsilon}\| \leq \epsilon$ iken $X_i \subseteq Y_i$ olur. Böylece her $1 \leq i \leq n$ için $X_i \subseteq Y_i$ olduğundan $X \preceq Y$ bulunur.

$I\mathbb{R}^n$ üzerindeki metrik $\forall X, Y \in I\mathbb{R}^n$ için

$$d(X,Y) = \inf\{r \geq 0 : X \preceq Y + S_r(\theta),\ Y \preceq X + S_r(\theta)\}$$

ve

$$S_r(\theta) = \{X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \|X\| \leq r\}$$

'dir.

Örnek 5.1.8. *$X, Y \in I\mathbb{R}^n$ için*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle X_i, Y_i \rangle_{I\mathbb{R}}$$

tanımıyla $I\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım quasilineer uzayıdır.

Yukarıda tanımlı iç çarpım her $i \in [1,n]$ için $\langle X_i, Y_i \rangle \in \Omega(\mathbb{R})$ olduğundan iyi tanımlıdır. Her $X, Y \in (I\mathbb{R}^n)_r$ için $X, Y \in \mathbb{R}^n$ olacağından yukarıda tanımlanan iç çarpım reel değerli olur.

Her $X, Y, Z, T \in I\mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $I\mathbb{R}$ bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle X+Y, Z \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle X_i + Y_i, Z_i \rangle_{I\mathbb{R}} \\
&\subseteq \sum_{i=1}^{n} \left(\langle X_i, Z_i \rangle_{I\mathbb{R}} + \langle Y_i, Z_i \rangle_{I\mathbb{R}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle X_i, Z_i \rangle_{I\mathbb{R}} + \sum_{i=1}^{n} \langle Y_i, Z_i \rangle_{I\mathbb{R}} \\
&= \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle \alpha \cdot X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha \cdot X_i, Y_i \rangle_{\Omega(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \langle X_i, Y_i \rangle_{\Omega(\mathbb{R})} = \alpha \cdot \langle X, Y \rangle$'dir. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ eşitliği kolayca gösterilebilir.

Her $X,Y \in I\mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
\|\langle X,Y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\{|a| : a \in \langle X,Y\rangle\} \\
&= \sup\left\{|a| : a \in \left\{\sum_{i=1}^{n}\langle X_i,Y_i\rangle_{I\mathbb{R}}\right\}\right\} \\
&= \sup\left\{|a| : a \in \sum_{i=1}^{n}\{xy : x \in X_i, y \in Y_i\}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} xy\right| : x \in F_X,\ y \in F_Y\right\} \\
&= \sup\left\{\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} : x \in F_X,\ y \in F_Y\right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\langle X,X\rangle = 0$ *ise* $\sum_{i=1}^{n}\langle X_i,X_i\rangle_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ *dır. Buradan her* $1 \leq i \leq n$ *için* $\langle X_i,X_i\rangle_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ *olması gerektiğinden her* $i \in [1,n]$ *için* $X_i = \{0\}$ *ve* $X = \theta$ *bulunur. Eğer* $X = \theta$ *ise her* $i \in [1,n]$ *için* $X_i = \{0\}$ *olacağından* $\langle X,X\rangle = 0$ *dır.*

Her $X \in (I\mathbb{R}^n)_r$ *için* $\langle X,X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle X_i,X_i\rangle_{\Omega(\mathbb{R})}$ *olur. Her* $i \in [1,n]$ *için* $\langle X_i,X_i\rangle_{\Omega(\mathbb{R})} \geq 0$ *olduğundan* $\langle X,X\rangle$ *iç çarpımı pozitif tanımlıdır.*

$X \preceq Y$ *ve* $Z \preceq T$ *olsun. Bu durumda her* $1 \leq i \leq n$ *için*

$$X_i \subseteq Y_i \text{ ve } Z_i \subseteq T_i$$

olur. $X_i, Y_i, Z_i, T_i \in I\mathbb{R}$ *olduğundan ve* $I\mathbb{R}$ *kendi üzerinde tanımlı iç çarpım ile iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan* $1 \leq i \leq n$ *için* $\langle X_i,Z_i\rangle \subseteq \langle Y_i,T_i\rangle$ *elde edilir. Buradan da* $\sum_{i=1}^{n}\langle X_i,Z_i\rangle \subseteq \sum_{i=1}^{n}\langle Y_i,T_i\rangle$ *yani* $\langle X,Z\rangle \subseteq \langle Y,T\rangle$ *olur. Her* $\epsilon > 0$ *için bir* X^ϵ *elemanı bulunsun öyle ki*

$$X \preceq Y + X^\epsilon \text{ ve } \langle X^\epsilon, X^\epsilon\rangle \subseteq S_\epsilon(\theta)$$

olsun. $I\mathbb{R}^n$ *bir quasilineer uzay olduğundan her* $1 \leq i \leq n$ *için* $X_i \subseteq Y_i + X_i^\epsilon$ *olur. Ayrıca* $\langle X^\epsilon, X^\epsilon\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle X_i^\epsilon, X_i^\epsilon\rangle_{\Omega(\mathbb{R})}$ *olduğundan her* $1 \leq i \leq n$ *için* $\langle X_i^\epsilon, X_i^\epsilon\rangle_{\Omega(\mathbb{R})} \subseteq S_\epsilon(\theta)$*, buradan da* $\|X_i^\epsilon\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \sqrt{\epsilon}$ *olur.* $I\mathbb{R}$*,* $\|\cdot\|_{I\mathbb{R}}$ *bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan her* $i \in [1,n]$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *buradan da* $X \preceq Y$ *olur.*

Dolayısıyla yukarıda tanımlı iç çarpım ile $I\mathbb{R}^n$ *bir iç çarpım quasilineer uzayıdır.*

Teorem 5.1.1. $I\mathbb{R}^n$ *quasilineer uzayı* $\|\cdot\|_2$ *normuyla bir Banach uzayıdır.*

İspat. X^n, $I\mathbb{R}^n$'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n, m \geq n_0$ iken

$$X^n \preceq X^m + A^{1r},\ X^m \preceq X^n + A^{2r}, \quad \left\| A^{jr} \right\|_2 \leq \epsilon$$

olur. Buradan her $1 \leq i \leq n$ için

$$X_i^n \subseteq X_i^m + A_i^{1r},\ X_i^m \subseteq X_i^n + A_i^{2r} \tag{5.1.3}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\| A^{jr} \right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| A_i^{jr} \right\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

olacağından her $1 \leq i \leq n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| A_i^{jr} \right\|^2 \leq \epsilon^2 \Rightarrow \left\| A_i^{jr} \right\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$$

bulunur. Böylece her $1 \leq i \leq n$ için (5.1.3)'den $h(X_i^n, X_i^m) \leq \epsilon$ elde edilmiş olur. Buradan her $1 \leq i \leq n$ için X_i^n'nin $I\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşırız. $I\mathbb{R}$ tam uzay olduğundan

$$X_i^n \to X_i$$

olacak şekilde $X_i \in I\mathbb{R}$ vardır. (5.1.3)'de $m \to \infty$ için limit alınırsa her $\epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ bulunur öyle ki her $n > n_0$ iken

$$X_i^n \subseteq X_i + B_i^1,\ X_i \subseteq X_i^n + B_i^2 \quad \left\| B_i^j \right\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

olur. $I\mathbb{R}$, $\preceq$ bağıntısı ile bir quasilineer uzay olduğundan

$$X^n \preceq X + B^1,\ X \preceq X^n + B^2$$

elde edilir. Ayrıca her $1 \leq i \leq n$ için

$$\left\| B_i^j \right\|_{I\mathbb{R}} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \left\| B_i^j \right\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left\| B_i^j \right\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \epsilon^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| B_i^j \right\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

olacağından $\|B^j\| \leq \epsilon$ bulunur. Buradan da $X^n \in I\mathbb{R}^n$'nin X elemanına yakınsak olduğu elde edilmiş olur. Yani $n \to \infty$ iken

$$d(X^n, X) \leq \epsilon$$

olur. Her $1 \leq i \leq n$ için $X_i \in I\mathbb{R}$ olduğundan $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X$ dersek $X \in I\mathbb{R}^n$ olur. Yani $X^n \to X \in I\mathbb{R}^n$'dir. $\square$

Teorem 5.1.2. *$I\mathbb{R}^n$ bir homojenize quasilineer uzaydır.*

İspat. $I\mathbb{R}^n$'nin homojenize quasilineer uzay olduğunu gösterebilmek için her $X \in I\mathbb{R}^n$ ve her $\alpha\beta \geq 0$ için $(\alpha+\beta) \cdot X = \alpha \cdot X + \beta \cdot X$ olduğunu göstermemiz gerekir. $X \in I\mathbb{R}^n$ olsun. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ve $1 \leq i \leq n$ için $X_i \in I\mathbb{R}$'dir. $I\mathbb{R}$ bir homojenize quasilineer uzay olduğundan

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta) \cdot X &= (\alpha+\beta) \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&= ((\alpha+\beta) \cdot X_1, (\alpha+\beta) \cdot X_2, \ldots, (\alpha+\beta) \cdot X_n) \\
&= (\alpha \cdot X_1 + \beta \cdot X_1, \alpha \cdot X_2 + \beta \cdot X_2, \ldots, \alpha \cdot X_n + \beta \cdot X_n) \\
&= (\alpha \cdot X_1, \alpha \cdot X_2, \ldots, \alpha \cdot X_n) + (\beta \cdot X_1, \beta \cdot X_2, \ldots, \beta \cdot X_n) \\
&= \alpha \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) + \beta \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&= \alpha \cdot X + \beta \cdot X
\end{aligned}$$

elde edilir. □

5.2 İnterval Dizi Uzayları

Bu kısımda farklı bir quasilineer uzay örneği olan interval dizi uzaylarını tanıtılacaktır. İlk olarak tüm intervallerin dizi uzayı olan Is kümesini tanımlayalım.

$$\mathbf{Is} = \{X = (X_n) \in I\mathbb{R}^\infty : (X_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \in I\mathbb{R}^\infty\}$$

biçimindeki tüm dizilerin kümesini Is olarak tanımlayalım.

Örnek 5.2.1. *Is kümesi her $X, Y \in Is$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$+ : X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots) \tag{5.2.1}$$

$$\cdot : \lambda \cdot X = (\lambda \cdot X_1, \lambda \cdot X_2, \ldots, \lambda \cdot X_n, \ldots) \tag{5.2.2}$$

işlemleri ve

$$X \preceq Y \Leftrightarrow X_i \subseteq Y_i \tag{5.2.3}$$

bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır. Yukarıda tanımlı işlemler Is interval dizi uzayı üzerinde iyi tanımlıdır. Her $X, Y, Z \in Is$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $X \preceq X$'dir. Yine burada

$X \preceq Y$ ve $Y \preceq Z$ ise (5.2.3)'den her $1 \leq i < \infty$ için $X_i \subseteq Y_i$ ve $Y_i \subseteq Z_i$ olur. Buradan her $1 \leq i < \infty$ için $X_i, Y_i, Z_i \in I\mathbb{R}$ ve $I\mathbb{R}$ quasilineer uzay olduğundan $X_i \subseteq Z_i$'dir. Böylece (5.2.3)'den $X \preceq Z$ elde edilmiş olur.

$X \preceq Y$ ve $Y \preceq X$ olsun. Bu durumda yine (5.2.3)'den her $i \in [1, \infty)$ için $X_i \subseteq Y_i$ ve $Y_i \subseteq X_i$ bulunur. $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ ve $I\mathbb{R}$ quasilineer uzay olduğundan $X_i = Y_i$'dir. Buradan da $X = Y$ elde edilir.

$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots)$'dir. Her $1 \leq i < \infty$ için $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ olduğundan $X_i + Y_i = Y_i + X_i$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} X + Y &= (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots) \\ &= (Y_1 + X_1, Y_2 + X_2, \ldots, Y_n + X_n, \ldots) \\ &= Y + X \end{aligned}$$

bulunur.

$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$X + \theta = (X_1 + \theta_{I\mathbb{R}}, X_2 + \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots, X_n + \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots) = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = X$ olacak şekilde $\theta = (\theta_{I\mathbb{R}}, \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots, \theta_{I\mathbb{R}}, \ldots) \in Is$ mevcuttur. $\theta_{I\mathbb{R}} = 0$ dır.

$\alpha \cdot (\beta \cdot X) = \alpha \cdot (\beta \cdot X_1, \beta \cdot X_2, \ldots, \beta \cdot X_n, \ldots) = (\alpha\beta \cdot X_1, \alpha\beta \cdot X_2, \ldots, \alpha\beta \cdot X_n, \ldots) = (\alpha\beta) \cdot X$ olur.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (X + Y) &= \alpha \cdot (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots) \\ &= (\alpha \cdot (X_1 + Y_1), \alpha \cdot (X_2 + Y_2), \ldots, \alpha \cdot (X_n + Y_n), \ldots) \\ &= (\alpha \cdot X_1 + \alpha \cdot Y_1, \alpha \cdot X_2 + \alpha \cdot Y_2, \ldots, \alpha \cdot X_n + \alpha \cdot Y_n, \ldots) \\ &= (\alpha \cdot X_1, \alpha \cdot X_2, \ldots, \alpha \cdot X_n, \ldots) + (\alpha \cdot Y_1, \alpha \cdot Y_2, \ldots, +\alpha \cdot Y_n, \ldots) \\ &= \alpha \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) + \alpha \cdot (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots) \\ &= \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} 1 \cdot X &= 1 \cdot (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \\ &= (1 \cdot X_1, 1 \cdot X_2, \ldots, 1 \cdot X_n, \ldots) \\ &= (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \\ &= X \end{aligned}$$

dir.

$0{\cdot}X = 0{\cdot}(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = (0 \cdot X_1, 0 \cdot X_2, \ldots, 0 \cdot X_n, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0) = \theta$

olur.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot X &= (\alpha+\beta)\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)\\ &= ((\alpha+\beta)\cdot X_1, (\alpha+\beta)\cdot X_2, \ldots, (\alpha+\beta)\cdot X_n, \ldots)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha\cdot X + \beta\cdot X &= \alpha\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) + \beta\cdot(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)\\ &= (\alpha\cdot X_1 + \beta\cdot X_1, \alpha\cdot X_2 + \beta\cdot X_2, \ldots, \alpha\cdot X_n + \beta\cdot X_n, \ldots)\end{aligned}$$

bulunur. $X \in Is$ *iken her* $1 \le i < \infty$ *için* $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ *ve* $I\mathbb{R}$ *bir quasilineer uzay olduğundan*

$$(\alpha+\beta)\cdot X_i \subseteq \alpha\cdot X_i + \beta\cdot X_i$$

olur. Buradan da

$$(\alpha+\beta)\cdot X \preceq \alpha\cdot X + \beta\cdot X$$

elde edilir.

$X \preceq Y$ *ve* $Z \preceq V$ *ise* $1 \le i < \infty$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *ve* $Z_i \subseteq V_i$ *olur. Buradan da* $X_i + Z_i \subseteq Y_i + V_i$ *olacağından* $X + Z \preceq Y + V$ *bulunur.*

$X \preceq Y$ *ise* $X_i \subseteq Y_i$ *olduğundan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için* $\alpha\cdot X_i \subseteq \alpha\cdot Y_i$*'dir. Buradan* $\alpha\cdot X \preceq \alpha\cdot Y$ *elde edilir.*

Böylece Is *interval dizi uzayı, (5.2.1), (5.2.2) işlemleri ve (5.2.3) bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır.*

Örnek 5.2.2. $X, Y \in Is$ *için*

$$d(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\left[\frac{h(X_i,Y_i)}{1+h(X_i,Y_i)}\right]$$

ile tanımlı metrik ile bir metrik uzaydır. Burada h*,* $I\mathbb{R}$ *üzerinde bilinen Hausdorff metriktir. Her* $X, Y \in Is$ *için Hausdorff metrik tanımı gereği* $1 \le i < \infty$ *iken* $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ *olduğundan* $h(X_i, Y_i) \ge 0$ *olur. Buradan* $d(X,Y) \ge 0$ *bulunur. Eğer* $d(X,Y) = 0$ *ise tanım gereği*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\left[\frac{h(X_i,Y_i)}{1+h(X_i,Y_i)}\right] = 0$$

olacağından $1 \leq i < \infty$ *için*

$$\frac{1}{2^i}\left[\frac{h(X_i,Y_i)}{1+h(X_i,Y_i)}\right]=0$$

buradan da $h(X_i,Y_i)=0$ *olur. Hausdorff metrik tanımı gereğince her* $1 \leq i < \infty$ *için* $X_i = Y_i$ *olacağından* $X = Y$ *bulunur.*

Her $X, Y \in Is$ *için* $d(X,Y) = d(Y,X)$ *olduğu açıktır.*

$$\mathbf{Il}_\infty = \{\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n) \in \mathbf{I}\mathbb{R}^\infty \colon (\mathbf{X}_n) < \infty\}$$

Il_∞ uzayı bütün sınırlı interval dizilerin uzayıdır. Bu interval dizilerin sınırlı olması Hausdorff metriğe göre düşünülecektir.

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ ise $X \in Il_\infty$ olup

$$\sup\{\|X_i\|_{I\mathbb{R}}\} < \infty \Leftrightarrow X \in Il_\infty.$$

Örnek 5.2.3. *(5.2.1), (5.2.2) işlemleri ve (5.2.3) bağıntısıyla* Il_∞ *bir quasilineer uzaydır. Her* $X, Y \in Il_\infty$ *ve her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}\sup\{\|X_i + Y_i\|_{I\mathbb{R}}\} &\leq \sup\{\|X_i\|_{I\mathbb{R}} + \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}\}\\ &\leq \sup\{\|X_i\|_{I\mathbb{R}}\} + \sup\{\|Y_i\|_{I\mathbb{R}}\}\\ &< \infty\end{aligned}$$

olduğundan (5.2.1)'de tanımlı "+" işlemi, Il_∞ *da iyi tanımlıdır. Yine*

$$\begin{aligned}\sup\{\|\lambda \cdot X_i\|_{I\mathbb{R}}\} &= \sup\{\lambda \|X_i\|_{I\mathbb{R}}\}\\ &= \lambda \sup\{\|X_i\|_{I\mathbb{R}}\}\\ &< \infty\end{aligned}$$

olduğundan (5.2.2)'de verilen skalerle çarpma işlemi de Il_∞ *da iyi tanımlıdır. Bu işlemlerle* Il_∞*'un quasilineer olduğu Örnek 5.2.1'e benzer şekilde gösterilebilir.*

Şimdi Il_∞ üzerindeki normu tanımlayalım.

Örnek 5.2.4. *Her* $X, Y \in Il_\infty$ *için*

$$\|X\| = \sup_{1 \leq i < \infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}$$

normuyla birlikte bir normlu quasilineer uzaydır.

$$\|X\| = \sup\{\|X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\}$$

eşitliği Il_∞'da bir norm tanımlar. Her $X, Y \in Il_\infty$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|X\| \geq 0$ olduğu açıktır. Eğer $\|X\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{\|X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow$Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|X_n\|_{I\mathbb{R}} = 0$ ve $X_n = 0$ olacağından $X = \theta$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\|X + Y\| &= \|X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots\| \\
&= \sup\{\|X_n + Y_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{\|X_n\|_{I\mathbb{R}} + \|Y_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{\|X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{\|Y_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \|X\| + \|Y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot X\| &= \|(\lambda \cdot X_1, \lambda \cdot X_2, \ldots, \lambda \cdot X_n, \ldots)\| \\
&= \sup\{\|\lambda \cdot X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{\lambda \|X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \lambda \sup\{\|X_n\|_{I\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \lambda \|X\|
\end{aligned}$$

bulunur.

$X \preceq Y$ ise $X_i \subseteq Y_i$ olacağından ve $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ için kendi normuyla $I\mathbb{R}$ bir normlu quasilineer uzay olduğundan $\|X_i\|_{I\mathbb{R}} \leq \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}$'dir. Buradan $\sup_{1 \leq i < \infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} \leq \sup_{1 \leq i < \infty} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}$ olacağından $\|X\| \leq \|Y\|$'dir.

Her $X, Y \in Il_\infty$ için $X \preceq Y + X_\epsilon$ ve $\|X_\epsilon\| \leq \epsilon$ olsun. Buradan $\|X_\epsilon\| = \sup_{1 \leq i < \infty} \|X_{\epsilon_i}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ olacağından $1 \leq i < \infty$ için $\|X_{\epsilon_i}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ olur. Diğer yandan $X \preceq Y + X_\epsilon$ ise $X_i \subseteq Y_i + X_{\epsilon_i}$ ve $I\mathbb{R}$ bir normlu quasilineer uzay olduğundan

$$X_i \subseteq Y_i + X_{\epsilon_i} \text{ ve } \|X_{\epsilon_i}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon \Rightarrow X_i \subseteq Y_i$$

bulunur. Buradan da her $i \in \mathbb{N}$ için $X \preceq Y$ elde edilir.

Dolayısıyla Il_∞ yukarıda tanımlı norm ile birlikte bir normlu quasilineer uzaydır.

Örnek 5.2.5. *Il_∞ sınırlı dizi uzayı*

$$\begin{aligned} d &: Il_\infty \times Il_\infty \to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\to d(X,Y) = \sup\{h(X_i,Y_i) : 1 \leq i < \infty\} \end{aligned}$$

ile tanımlı d fonksiyonuyla birlikte bir metrik uzaydır. Yukarıda tanımlı metrik Il_∞'da iyi tanımlıdır. Her $X,Y \in Il_\infty$ için Hausdorff metrik tanımı gereği $1 \leq i < \infty$ iken $X_i, Y_i \in I\mathbb{R}$ olduğundan $h(X_i,Y_i) \geq 0$, böylece $d(X,Y) \geq 0$ bulunur. Eğer $d(X,Y) = 0$ ise

$$\sup\{h(X_i,Y_i) : 1 \leq i < \infty\} = 0$$

olacağından $1 \leq i < \infty$ için

$$h(X_i,Y_i) = 0$$

buradan da $h(X_i,Y_i) = 0$ dır. Bu da bize Hausdorff metrik, metrik şartlarını sağladığından $X_i = Y_i$ olduğunu söyler. Buradan da $X = Y$ elde edilmiş olur.

Her $X,Y \in Il_\infty$ için $d(X,Y) = d(Y,X)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$I\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı Hausdorff metrik bir metrik tanımladığından her $1 \leq i < \infty$ ve $X_{i,}Y_i, Z_i \in I\mathbb{R}$ için

$$h(X_{i,}Y_i) \leq h(X_i,Z_i) + h(Z_i,Y_i)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sup\{h(X_{i,}Y_i) : 1 \leq i < \infty\} &\leq \sup\{h(X_i,Z_i) + h(Z_i,Y_i) : 1 \leq i < \infty\} \\ &= \sup\{h(X_i,Z_i) : 1 \leq i < \infty\} \\ &\quad + \sup\{h(Z_i,Y_i) : 1 \leq i < \infty\} \end{aligned}$$

olacağından $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla Il_∞, d metriğiyle birlikte bir metrik uzaydır.

$\mathbf{Ic_0} = \{\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n) \in \mathbf{I\mathbb{R}}^\infty : (\mathbf{X}_n) \to \mathbf{0}\}$

Ic_0 ile sıfıra yakınsak tüm interval dizilerin kümesini belirtelim. Her $X \in Ic_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_{I\mathbb{R}} = 0 \Leftrightarrow X \in Ic_0$$

dır. Ic_0 yukarıda tanımlı işlemler ile ve "$\preceq$" bağıntısı ile bir quasilineer uzaydır. Ic_0 üzerindeki norm ise

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: Ic_0 \to \mathbb{R} \\ X &\to \|X\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ic_0 bu norm ile bir normlu quasilineer uzaydır. Il_∞'daki benzer işlemler yapılarak Ic_0'ın yukarıda tanımlı norm ile normlu quasilineer uzay olduğu gösterilebilir.

$\mathbf{Il}_2 = \{\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n) \in \mathbf{I}\mathbb{R}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}}^2 < \infty\}$

Her $X \in \mathbf{Il}_2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}}^2 < \infty \Leftrightarrow X \in \mathbf{Il}_2$$

'dir. Il_2 bir vektör uzayı değildir.

Örnek 5.2.6. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) \in Il_2, Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots) \in Il_2$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için (5.2.1)'de tanımlı*

$$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots)$$

ve

$$\lambda \cdot X = (\lambda \cdot X_1, \lambda \cdot X_2, \ldots, \lambda \cdot X_n, \ldots)$$

işlemleri Il_2 *kümesi üzerinde iyi tanımlıdır. Bu işlemlerle ve (5.2.3)'de verilen*

$$X \preceq Y \Leftrightarrow X_i \subseteq Y_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

bağıntısıyla Il_2 *bir quasilineer uzaydır. Her* $X, Y \in Il_2$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için Minkowski eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n + Y_n\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|\mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}} + \|Y_n\|_{I\mathbb{R}})^2\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan $X + Y \in Il_2$'dir. Her $X \in Il_2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\|\lambda \cdot X\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda \cdot \mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} = \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} < \infty$$

olduğundan $\lambda \cdot X \in Il_2$ olur. Böylece Il_2'nin yukarıda tanımlı işlemlerle ve "$\preceq$" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 5.2.7. *Örnek 5.2.6'de verilen Il_2 quasilineer uzayı*

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \tag{5.2.4}$$

normu ile bir normlu quasilineer uzaydır. Yukarıda tanımlı normun iyi tanımlı olduğu aşikardır. Her $X \in Il_2$ için $\|X\| \geq 0$ olduğu açıktır. Her $X, Y \in Il_2$ için Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|X + Y\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_i + Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|\mathbf{X}_i\|_{I\mathbb{R}} + \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}\right)^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{,=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\
&= \|X\| + \|Y\|
\end{aligned}$$

bulunur. Her $X \in Il_2$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot X\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda \cdot X_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2 \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\
&= \lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{1/2} \\
&= \lambda \|X\|
\end{aligned}$$

olur. Her $X, Y \in Il_2$ için $X \preceq Y$ ise her $1 \leq i < \infty$ için $X_i \subseteq Y_i$ olacağından

$\|X_i\|_{I\mathbb{R}} \leq \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}$ *bulunur. Buradan da*

$$\begin{aligned}
\|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 &\leq \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \\
&\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right) \\
&\Rightarrow \|X\| \leq \|Y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\epsilon > 0$ *için* $\exists X^{\epsilon} \in Il_2$ *vardır, öyle ki*

$$X \preceq Y + X^{\epsilon} \text{ ve } \|X^{\epsilon}\|_{Il_2} \leq \epsilon$$

olsun. Bu durumda her $1 \leq i < \infty$ *için* $X_i \subseteq Y_i + X_i^{\epsilon}$ *ve*

$$\|X^{\epsilon}\|_{Il_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|X_i^{\epsilon}\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

bulunur. Böylece her $1 \leq i < \infty$ *için* $\|X_i^{\epsilon}\|_{I\mathbb{R}} \leq \epsilon$ *olacağından ve* $I\mathbb{R}$ *bir normlu quasilineer uzay olduğundan her* $1 \leq i < \infty$ *için* $X_i \subseteq Y_i$ *elde edilir. Sonuç olarak (5.2.3)'den* $X \preceq Y$ *olduğu görülür.*

Örnek 5.2.8. Il_2 *quasilineer uzayı*

$$d(X,Y) = \inf \{ r \geq 0 : X \preceq Y + S_r(\theta), Y \preceq X + S_r(\theta) \} \tag{5.2.5}$$

metriğiyle birlikte bir metrik uzaydır. Burada $S_r(\theta) = \{X \in Il_2 : \|X\| \leq r\}$*'dır.*

Uyarı 5.2.1. Il_2 *quasilineer uzayı (5.2.4) normuyla bir Banach quasilineer uzayı değildir. Bunun nedeni ise* X^n*,* Il_2*'de bir dizi olmak üzere,* Il_2 *quasilineer uzayında (5.2.4) normuyla her bir* $1 \leq i < \infty$ *için* $X^n \to X$ *iken* $X_i^n \to X_i$ *olmasına rağmen* $X_i^n \to X_i$ *iken* $X^n \nrightarrow X$ *olmasıdır. Yani her* $\forall \epsilon > 0$ *için* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır öyle ki* $\forall n \geq n_0$ *iken*

$$X^n \preceq X + A^{1r},\ X \preceq X^n + A^{2r}, \quad \left\| A^{jr} \right\|_{Il_2} \leq \epsilon$$

ise, (5.2.3)'den her $1 \leq i < \infty$ *için*

$$X_i^n \subseteq X_i + A_i^{1r},\ X_i \subseteq X_i^n + A_i^{2r}, \quad \left\| A_i^{jr} \right\|_{IR} \leq \epsilon$$

olur. Fakat her $\forall \epsilon > 0$ *için* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır öyle ki* $\forall n \geq n_0$ *iken* $d(X_i^n, X_i) \leq \epsilon$ *iken* $\|A^{jr}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| A_i^{jr} \right\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \nleq \epsilon$ *olabileceğinden* $X^n \to X$ *diyemeyiz.*

Örnek 5.2.9. *Il_2, Ic_o ve Il_∞ interval dizi uzayları sağlam zeminli dizi uzaylarıdır. Yani her $X \in Il_2$ için $\sup F_X = X$'dir. Keyfi bir $X \in Il_2$ alalım.*

$F_X = \{Y \in (Il_2)_r : Y \preceq X\} = \{Y \in l_2 : Y \preceq X\}$'dir. Il_2 interval dizi uzayı (5.2.3) bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğundan her $1 \leq i < \infty$ için $Y_i \subseteq X_i$ ve $Y_i \in \mathbb{R}$, $X_i \in I\mathbb{R}$ olur. $I\mathbb{R}$ quasilineer uzayı sağlam zeminli bir quasilineer uzay olduğundan her $1 \leq i < \infty$ için $\sup F_{X_i} = X_i$ bulunur. Buradan da her $1 \leq i < \infty$ için $X = (X_1, X_2, X_3, \ldots) \in Il_2$ iken $\sup F_X = X$ olur.

Örnek 5.2.10. *Örnek 5.2.6 de verilen Il_2 quasilineer uzayı*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X_i, Y_i \rangle_{I\mathbb{R}} \tag{5.2.6}$$

iç çarpımıyla birlikte bir iç çarpım quasilineer uzaydır.

Öncelikle yukarıda tanımlı iç çarpım, her $X, Y \in Il_2$ için Schwartz ve Hölder eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\|\langle X, Y \rangle\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle X_i, Y_i \rangle_{I\mathbb{R}} \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle X_i, Y_i \rangle_{I\mathbb{R}}\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|X_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Y_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} \\
&= \|X\| \, \|Y\|
\end{aligned}$$

olup $\langle X, Y \rangle$ iç çarpımı sınırlı olur. $\langle X, Y \rangle$'nin $\Omega(\mathbb{R})$'nin bir alt kümesi olabilmesi için $\langle X, Y \rangle$'nin kapalı olduğunu göstermeliyiz. (x_n), $X \times Y$'de bir dizi ve $x_n \to x_0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \langle X, Y \rangle$'dir. $\{x_n\} \subseteq \langle X, Y \rangle$ ve $x_n \to x_0$ ise $\Omega(\mathbb{R})$'de $\{x_n\} \to \{x_0\}$ demektir. Ayrıca $\langle X, Y \rangle \to \langle X, Y \rangle$'dir. Aseev, Lemma 4, a)'dan $\{x_0\} \subseteq \langle X, Y \rangle$ olur. Yani $x_0 \in \langle X, Y \rangle$'dir. Buradan $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X_i, Y_i \rangle_{I\mathbb{R}} \in \Omega(\mathbb{R})$'dir.

Her $X, Y \in (Il_2)_r$ için $X, Y \in l_2$ olacağından her bir $1 \leq i < \infty$ için $X_i, Y_i \in \mathbb{R}$ olur. Buradan da $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X_i, Y_i \rangle_{\mathbb{R}} \in (\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}$ bulunur. Her $X, Y, Z \in$

Il_2 için

$$\begin{aligned}
\langle X+Y,Z\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i+Y_i,Z_i\rangle_{I\mathbb{R}} \\
&\subseteq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\langle X_i,Z_i\rangle_{I\mathbb{R}}+\langle Y_i,Z_i\rangle_{I\mathbb{R}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,Z_i\rangle_{I\mathbb{R}}+\sum_{i=1}^{\infty}\langle Y_i,Z_i\rangle_{I\mathbb{R}} \\
&= \langle X,Z\rangle+\langle Y,Z\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $X,Y\in Il_2$ ve her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\langle\alpha\cdot X,Y\rangle=\alpha\cdot\langle X,Y\rangle$ ve $\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle$ eşitlikleri kolayca sağlanır.

Her $X,Y\in Il_2$ için zemin tanımı gereğince

$$\begin{aligned}
\|\langle X,Y\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,Y_i\rangle_{I\mathbb{R}}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \\
&= \sup\left\{|a| : a\in\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,Y_i\rangle_{I\mathbb{R}}\right\} \\
&= \sup\left\{|a| : a\in\sum_{i=1}^{\infty}\{x\cdot y : x\in X_i,\ y\in Y_i\}\right\} \\
&= \sup\{|\langle x,y\rangle| : x\in F_X,\ y\in F_Y\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\langle X,X\rangle=0$ ise $\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,X_i\rangle_{I\mathbb{R}}=0$ olması gerektiğinden her $1\le i<\infty$ için $X_i=\theta$ olur. Bu da $X=0$ olması demektir. Tersine $X=0$ ise her $1\le i<\infty$ için $X_i=\theta$'dir. $I\mathbb{R}$ bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan $\langle X_i,X_i\rangle_{I\mathbb{R}}=0$ ve buradan da $\langle X,X\rangle=0$ olur. Her $X\in(Il_2)_r$ için $\langle X,X\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,X_i\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2\ge 0$ olacağından $\langle X,X\rangle$ pozitif reel sayı olur.

Her $X,Y,U,V\in Il_2$ için $X\preceq Y$ ve $U\preceq V$ ise her bir $1\le i<\infty$ için $X_i\subseteq Y_i$ ve $U_i\subseteq V_i$ olur. Her $i\in[1,\infty)$ için $X_i,Y_i,U_i,V_i\in I\mathbb{R}$ ve $I\mathbb{R}$ kendi iç çarpımıyla iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan $\langle X_i,Y_i\rangle_{I\mathbb{R}}\subseteq\langle U_i,V_i\rangle_{I\mathbb{R}}$ bulunur. Buradan da $\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i,Y_i\rangle_{I\mathbb{R}}\subseteq\sum_{i=1}^{\infty}\langle U_i,V_i\rangle_{I\mathbb{R}}$ yani $\langle X,Y\rangle\subseteq\langle U,V\rangle$ olduğu görülür.

Her $\epsilon>0$ için bir $X^{\epsilon}\in Il_2$ bulunsun öyle ki $X\preceq Y+X^{\epsilon}$ ve $\langle X^{\epsilon},X^{\epsilon}\rangle\subseteq S_{\epsilon}(\theta)$ olsun. $X\preceq Y+X^{\epsilon}$ ise Il_2 bir quasilineer uzay olduğundan her bir $1\le i<\infty$ için $X_i\subseteq Y_i+X_i^{\epsilon}$'dir. $\langle X^{\epsilon},X^{\epsilon}\rangle\subseteq S_{\epsilon}(\theta)$ ise iç çarpımın tanımı gereği $\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_i^{\epsilon},X_i^{\epsilon}\rangle_{I\mathbb{R}}\subseteq$

$S_\epsilon(0)$ olur. $\langle X_i^\epsilon, X_i^\epsilon \rangle_{I\mathbb{R}} \subseteq S_\epsilon(0)$ ve $I\mathbb{R}$ bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğundan her $1 \leq i < \infty$ için $X_i \subseteq Y_i + X_i^\epsilon$ ve $\|X_i^\epsilon\|_{I\mathbb{R}}^2 \leq \epsilon$ ise $X_i \subseteq Y_i$ ve buradan da $X \preceq Y$ olur.

Böylece, Il_2 quasilineer uzayının (5.2.6) ile birlikte bir iç çarpım quasilineer uzayı olduğu gösterilmiş olur.

5.3 İnterval Vektörlerde Baz ve Boyut

Burada, üçüncü bölümde verilen baz ve boyut tanımlarına ilişkin interval uzaylarında bazı cebirsel araştırmalar yapılacaktır.

Örnek 5.3.1. *$(I\mathbb{R}^2, \preceq)$ quasilineer uzayında $A = \{([1,2],[-1,3])\} \subset I\mathbb{R}^2$ olsun. A, $I\mathbb{R}^2$'de tek elemanlı bir küme olup A nın quasi gerdiği küme;*

$$QspA = Qsp\{([1,2],[-1,3])\} = \left\{X \in I\mathbb{R}^2 : \lambda \cdot ([1,2],[-1,3]) \preceq X,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

'dır. Örneğin; $([1,2],[-1,3]) \in QspA$ iken $([-1,3],[1,2]) \notin QspA$'dır. Çünkü $\lambda \cdot ([1,2],[-1,3]) \subseteq ([-1,3],[1,2])$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcut değildir.

Örnek 5.3.2. *$(I\mathbb{R}^2, \preceq)$ quasilineer uzayında $B = \{([1,2],[-1,3]), ([-1,0],[-2,-1])\} \subset I\mathbb{R}^2$ olsun. B, $I\mathbb{R}^2$'de iki elemanlı bir küme olup B'nin quasi gerdiği küme*

$$\begin{aligned} QspB &= Qsp\{([1,2],[-1,3]), ([-1,0],[-2,-1])\} \\ &= \left\{X \in I\mathbb{R}^2 : \lambda_1 \cdot ([1,2],[-1,3]) + \lambda_2 \cdot ([-1,0],[-2,-1]) \preceq X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

'dır.

Örnek 5.3.3. *$(I\mathbb{R}^2, \preceq)$ quasilineer uzayında $\{([1,2],[-1,3])\}$ kümesini ele alalım.*

$$(\{0\},\{0\}) \preceq \lambda \cdot ([1,2],[-1,3])$$

olması sadece $\lambda = 0$ olması halinde mümkündür. O halde $\{([1,2],[-1,3])\}$ kümesi quasilineer bağımsızdır. Yine bu uzayda $\{([-1,1],[-1,0])\} \subset I\mathbb{R}^2$ olsun.

$$(\{0\},\{0\}) \preceq \beta \cdot ([-1,1],[-1,0])$$

ifadesi tüm $\beta \in \mathbb{R}$ sayıları için sağlandığından $\{([-1,1],[-1,0])\}$ kümesi quasilineer bağımlıdır.

Sonuç 5.3.1. *$X \in I\mathbb{R}^2$ için $X = (X_1, X_2)$ dersek X_1 ve X_2'nin her ikisi birden sıfırı ihtiva eden bir interval ise bu durumda X tek nokta kümesi $I\mathbb{R}^2$'de quasilineer bağımlıdır. Eğer, X_1 veya X_2'nin en az biri sıfırı ihtiva etmeyen bir interval ise bu durumda X tek nokta kümesi $I\mathbb{R}^2$'de quasilineer bağımsızdır. Buradan her bir $X^n \in I\mathbb{R}^n$ için $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dersek $X_{1,}\ X_2, \ldots, X_n$ intervallerinin her biri sıfırı ihtiva eden bir interval ise bu durumda X tek nokta kümesi $I\mathbb{R}^n$'de quasilineer bağımlı olur. Bu durum, lineer cebirde sıfır tek noktasının lineer bağımlı olmasına benzer. Eğer, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intervallerinden en az biri sıfırı ihtiva etmeyen bir interval ise bu durumda X tek nokta kümesi $I\mathbb{R}^n$'de quasilineer bağımsızdır.*

Örnek 5.3.4. *$(I\mathbb{R}^2, \preceq)$ quasilineer uzayında $\{([1,2],[-2,0]),([-2,-1],[2,3])\}$ kümesini göz önüne alalım.*

$$(\{0\},\{0\}) \preceq \lambda_1 \cdot ([1,2],[-2,0]) + \lambda_2 \cdot ([-2,-1],[2,3])$$

olması $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ için sağlanır. Dolayısıyla $\{([1,2],[-2,0]),([-2,-1],[2,3])\}$ kümesi $I\mathbb{R}^2$'de quasilineer bağımlıdır.

Örnek 5.3.5. *$A = \{([1,2],\{0\}),(\{0\},[3,4])\}$ kümesi $I\mathbb{R}^2$'de quasilineer bağımsızdır. Yani*

$$\begin{aligned}(\{0\},\{0\}) &\preceq \lambda_1 \cdot ([1,2],\{0\}) + \lambda_2 \cdot (\{0\},[3,4]) \\ &= ([\lambda_1, 2\lambda_1],[3\lambda_2, 4\lambda_2])\end{aligned}$$

olması için $\{0\} \subseteq [\lambda_1, 2\lambda_1]$ ve $\{0\} \subseteq [3\lambda_2, 4\lambda_2]$ olması gerekir. Bu durum ise ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ için doğrudur.

$A = \{\{1\}\}$ kümesi $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayı için bir baz olduğundan ([3]), A kümesi $I\mathbb{R}$ için de bir bazdır.

Örnek 5.3.6. *$B = \{(\{1\},\{0\}),(\{0\},\{1\})\}$ kümesi $I\mathbb{R}^2$ için bir bazdır. Gerçekten; B kümesi quasilineer bağımsızdır.*

$$\begin{aligned}(\{0\},\{0\}) &\preceq \alpha_1 \cdot (\{1\},\{0\}) + \alpha_2 \cdot (\{0\},\{1\}) \\ &= (\alpha_1 \cdot \{1\},\{0\}) + (\{0\},\alpha_2 \cdot \{1\}) \\ &= (\{\alpha_1\},\{0\}) + (\{0\},\{\alpha_2\}) \\ &= (\{\alpha_1\},\{\alpha_2\})\end{aligned}$$

olması ancak ve ancak $\{\alpha_1\} = \{\alpha_2\} = \{0\}$ *için yani* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *için mümkündür.*

$QspB = I\mathbb{R}^2$ *dir:* $\forall X \in I\mathbb{R}^2$ *için*

$$\alpha_1 \cdot (\{1\}, \{0\}) + \alpha_2 \cdot (\{0\}, \{1\}) \preceq X$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *mevcuttur.* B *kümesine* $I\mathbb{R}^2$*'nin* ***standart bazı*** *denir.*

Sonuç 5.3.2. $\{(\{1\}, \{0\}, \{0\}), (\{0\}, \{1\}, \{0\}), (\{0\}, \{0\}, \{1\})\}$ *kümesi* $I\mathbb{R}^3$ *için bir baz teşkil eder. Daha genel olarak* $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^2$ *için bir baz ise* $\{(\{a_1\}, \{a_2\}), (\{b_1\}, \{b_2\})\}$ *kümesi* $I\mathbb{R}^2$ *için bir bazdır.*

Örnek 5.3.7. $([-1, 1], [0, 2]) \in I\mathbb{R}^2$*'nin zemini*

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \left(I\mathbb{R}^2\right)_r : (x_1, x_2) \preceq ([-1, 1], [0, 2])\right\}$$

kümesidir. $I\mathbb{R}^2$ *quasilineer uzayının zemini* $\mathbb{R}^2$ *lineer uzayıdır.* $(-1, 0) \in A$ *iken* $([-1, 0], 0) \notin A$*'dır. Çünkü* $([-1, 0], 0)$ *elemanı* $I\mathbb{R}^2$*'nin regüler elemanı değildir. Ayrıca,* $I\mathbb{R}^n$ *quasilineer uzayının zemini* $\mathbb{R}^n$ *lineer uzayı olur.*

Örnek 5.3.8. $A = ([-1, 1], [0, 2]) \in I\mathbb{R}^2$ *elemanının zemini*

$$\begin{aligned} F_A &= \left\{(\{y_1\}, \{y_2\}) \in \left(I\mathbb{R}^2\right)_r : (\{y_1\}, \{y_2\}) \preceq A\right\} \\ &= \left\{(\{y_1\}, \{y_2\}) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 5.3.3. $I\mathbb{R}^2 = \{X = (X_1, X_2) : X_1, X_2 \in I\mathbb{R}\}$ *kümesinin zemini* $X_1 = [\underline{X_1}, \overline{X_1}]$, $X_2 = [\underline{X_2}, \overline{X_2}]$ *için* $\underline{X_1}, \overline{X_1}, \underline{X_2}, \overline{X_2} \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} F_{I\mathbb{R}^2} &= \bigcup F_X \\ &= \bigcup \left\{(\{y_1\}, \{y_2\}) \in \left(I\mathbb{R}^2\right)_r : \underline{X_1} \leq y_1 \leq \overline{X_1}, \underline{X_2} \leq y_2 \leq \overline{X_2}\right\} \end{aligned}$$

'dir. Daha genel olarak $I\mathbb{R}^n = \{X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : X_1, X_2, \ldots, X_n \in I\mathbb{R}\}$ *kümesinin zemini*

$$X_1 = [\underline{X_1}, \overline{X_1}], X_2 = [\underline{X_2}, \overline{X_2}], \ldots, X_n = [\underline{X_n}, \overline{X_n}]$$

için $\underline{X_1}, \overline{X_1}, \underline{X_2}, \overline{X_2}, \ldots, \underline{X_n}, \overline{X_n} \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} F_{I\mathbb{R}^n} &= \bigcup_{X \in I\mathbb{R}^n} F_X \\ &= \bigcup_{X \in I\mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{c} (\{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\}) \in \mathbb{R}^n : \underline{X_1} \leq y_1 \leq \overline{X_1}, \\ \underline{X_2} \leq y_2 \leq \overline{X_2}, \ldots, \underline{X_n} \leq y_n \leq \overline{X_n} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olur.

Önerme 5.3.1. $I\mathbb{R}^2$ *quasilineer uzayı sağlam zeminli bir quasilineer uzaydır.*

İspat. Her $X \in I\mathbb{R}^2$ için $\sup F_X = X$ olduğunu gösterirsek ispatı yapmış oluruz. Keyfi bir $X \in I\mathbb{R}^2$ ise $I\mathbb{R}^2$'nin tanımı gereği $X = \{(X_1, X_2) : X_1, X_2 \in I\mathbb{R}\}$'dir. Buradan

$$F_X = \left\{ Y = (Y_1, Y_2) \in \left(I\mathbb{R}^2\right)_r : Y \preceq X \right\}$$

'dır. Buradan da $Y \preceq X$ ise $Y_1 \subseteq X_1$ ve $Y_2 \subseteq X_2$ ve $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}$ olur. Böylece $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}$ ve $X_1, X_2 \in I\mathbb{R}$ için $I\mathbb{R}$ sağlam zeminli bir quasilineer uzay olduğundan

$$\sup F_{X_1} = X_1 \text{ ve } \sup F_{X_2} = X_2$$

bulunur. Buradan da her $1 \leq i \leq 2$ için $I\mathbb{R}^2$, "$\preceq$" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğundan $\sup F_X = X$ olur. □

Sonuç 5.3.4. $I\mathbb{R}^n$ *quasilineer uzayı sağlam zeminli bir quasilineer uzaydır.*

Örnek 5.3.9. $I\mathbb{R}^2$ *quasilineer uzayının simetrik elemanlarının kümesi*

$$\left(I\mathbb{R}^2\right)_d = \{X = (X_1, X_2) : X_1, X_2 \in (I\mathbb{R})_d\}$$

'dir. Örneğin; $A = ([-1,1], [-2,2]) \in I\mathbb{R}^2$ *için*

$$\begin{aligned} -A &= -([-1,1], [-2,2]) \\ &= (\{-1\}[-1,1], \{-1\}[-2,2]) \\ &= ([-1,1], [-2,2]) \\ &= A \end{aligned}$$

olduğundan $A \in (I\mathbb{R}^2)_d$*'dir. Fakat* $B = (\{1\}, [-2,1]) \in I\mathbb{R}^2$ *için*

$$-B = -(\{1\}, [-2,1]) = (\{-1\}, [-1,2]) \neq B$$

olduğundan B*,* $I\mathbb{R}^2$*'in simetrik elemanı olamaz.* $I\mathbb{R}^2$*'nin* $(I\mathbb{R}^2)_d$ *alt uzayında* $X = ([-1,1],[-2,2]) \in (I\mathbb{R}^2)_d$ *için* $F_X = \theta$ *olacağından* $(I\mathbb{R}^2)_d$ *alt uzayı sağlam zeminli olmayan bir quasilineer uzaydır.*

$I\mathbb{R}^2$ quasilineer uzayının simetrik üstü elemanlarının kümesi ise

$$\left(I\mathbb{R}^2\right)_{od} = \left\{X = (X_1, X_2) : \text{bir } Y \in \left(I\mathbb{R}^2\right)_d \text{ için } Y \preceq X\right\}$$

'dir. Tıpkı $(I\mathbb{R}^2)_d$'de olduğu gibi $(I\mathbb{R}^2)_{od}$'de sağlam zeminli olmayan bir quasilineer uzaydır.

Bundan başka Il_2, Ic_o ve Il_∞ interval dizi uzaylarının singüler alt uzayları sağlam zeminli olmayan interval dizi uzaylarıdır.

Örnek 5.3.10. $A = ([0,1], 0, 0, \ldots)$ *olsun.* $A \in Ic_0$ *ve*

$$\begin{aligned} F_A &= \{B \in (Ic_0)_r : B \preceq A\} \\ &= \{(t, 0, 0, \ldots) : 0 \leq t \leq 1\} \end{aligned}$$

'dır. Ayrıca $\sup F_A = A$*'dır.* $B = ([-1,1], 0, 0, \ldots)$ *olsun.* $B \in (Ic_0)_s$ *ve*

$$\begin{aligned} F_B &= \left\{C \in ((Ic_0)_s)_r : C \preceq B\right\} \\ &= (0, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

'dır. Buradan $\sup F_B = 0$ *bulunur. Dolayısıyla* $(Ic_0)_s$ *sağlam zeminli olmayan bir quasilineer uzaydır.*

Örnek 5.3.11. $\mathbb{R}^2$, $I\mathbb{R}^2$, $(I\mathbb{R}^2)_s$ *ve* $(I\mathbb{R}^2)_r$ *quasilineer uzaylarının regüler ve singüler boyutları sırasıyla aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned} r - \dim\left(\mathbb{R}^2\right) &= 2 \textit{ ve } s - \dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 0, \\ r - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right) &= 2 \textit{ ve } s - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right) = 2, \\ r - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_s &= 0 \textit{ ve } s - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_s = 2, \\ r - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_r &= 2 \textit{ ve } s - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_r = 0. \end{aligned}$$

Örnek 5.3.12. $I\mathbb{R}^2$*'nin sırasıyla simetrik alt uzayı* $(I\mathbb{R}^2)_d$ *ve simetrik üstü alt uzayı* $(I\mathbb{R}^2)_{od}$*'nin boyutları ise*

$$r - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_d = 0 \textit{ ve } s - \dim\left(I\mathbb{R}^2\right)_d = 0$$

ve

$$r - \dim \left(I\mathbb{R}^2\right)_{od} = 0 \text{ ve } s - \dim \left(I\mathbb{R}^2\right)_{od} = 0$$

'dır. Burada dikkat edelim ki $(I\mathbb{R}^2)_d$ *ve* $(I\mathbb{R}^2)_{od}$ *alt uzaylarının singüler boyutları sıfır olmasına rağmen bu uzaylar lineer olmayan birer quasilineer uzaydırlar.*

Örnek 5.3.13. $I\mathbb{R}^2$ *quasilineer uzayının*

$$A = \left(I\mathbb{R}^2\right)_s \cup \{(\{t\}, \{0\}) : t \in \mathbb{R}\}$$

alt uzayı ve A_s*'nin* $a_1 = ([1,2], \{0\})$ *ve* $a_2 = (\{0\}, [2,4])$ *elemanları verilsin.*

$(\{0\}, \{0\}) \preceq \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2$ *kapsamasını sağlayan* 0*'dan farklı* λ_1 *ve* λ_2 *skalerleri olmadığından* $\{a_1, a_2\}$ *kümesi* A_s*'de quasilineer bağımsızdır. Buna göre* $s - boyA \geq 2$ *olur.* A*,* $I\mathbb{R}^2$*'nin alt quasilineer uzayı olduğundan Sonuç 3.3.3 dikkate alınırsa* $s - boyA = 2$ *elde edilir. Yine burada*

$$A_r = \{(\{t\}, \{0\}) : t \in \mathbb{R}\}$$

olduğundan, A *nın regüler alt uzayının boyutu* $\mathbb{R}$ *kümesinin boyutuna denk olur. Böylece* $r - boyA = 1$*'dir.*

Örnek 5.3.14. $\mathbb{R}^n$, $I\mathbb{R}^n$, $(I\mathbb{R}^n)_s$ *ve* $(I\mathbb{R}^n)_r$ *quasilineer uzaylarının regüler ve singüler boyutları sırasıyla aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned}
r - \dim (\mathbb{R}^n) &= n \text{ ve } s - \dim (\mathbb{R}^n) = 0, \\
r - \dim (I\mathbb{R}^n) &= n \text{ ve } s - \dim (I\mathbb{R}^n) = n, \\
r - \dim (I\mathbb{R}^n)_s &= 0 \text{ ve } s - \dim (I\mathbb{R}^n)_s = n, \\
r - \dim (I\mathbb{R}^n)_r &= n \text{ ve } s - \dim (I\mathbb{R}^n)_r = 0.
\end{aligned}$$

Örnek 5.3.15. Ic_0*'ın (5.2.1), (5.2.2) ve (5.2.3) bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğunu biliyoruz.* $\{\theta\} = (0, 0, \ldots) \in c_0$ *olmak üzere* $X = (Ic_0)_s \cup \{\theta\}$ *olsun.*

$$B = \{([1,2], 0, 0, 0, \ldots), (0, [1,2], 0, 0, \ldots), \ldots\}$$

kümesi X*'in bir alt kümesidir ve bu küme quasilineer bağımsızdır.* B *kümesinin herhangi sonlu sayıdaki alt kümesinin quasilineer bağımsız olduğunu gösterirsek* B*'nin quasilineer bağımsız olduğunu göstermiş oluruz.*

$$\{(0,0,\ldots)\} \preceq \lambda_1 \cdot ([1,2], 0, 0, 0, \ldots) + \lambda_2 \cdot (0, [1,2], 0, 0, \ldots) + \ldots + \lambda_k \cdot (0, 0, 0, \ldots, [1,2], \ldots)$$

ise buradan

$$\begin{aligned}\{(0,0,\ldots)\} &\preceq (\lambda_1\cdot[1,2],0,0,0,\ldots)+(0,\lambda_2\cdot[1,2],0,0,\ldots)+\\ &\quad \ldots+(0,0,0,\ldots,\lambda_k\cdot[1,2],\ldots)\\ &= (\lambda_1\cdot[1,2],\lambda_2\cdot[1,2],\ldots,\lambda_k\cdot[1,2],0,0,\ldots)\\ &\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla B kümesi, X'in maksimum quasilineer bağımsız alt kümesi olur. Buradan da $r-\dim(X)=0$ ve $s-\dim(X)=\infty$ elde edilir. Ayrıca

$$r-\dim(Ic_0)=\infty \text{ ve } s-\dim(Ic_0)=\infty$$

olur.

Örnek 5.3.16. *$X=(Il_\infty)_s\cup\{(0,0,\ldots 0,k,0,0,\ldots,0,l,0,0,\ldots):k,l\in\mathbb{R}\}$ olsun. X kümesi Il_∞ quasilineer uzayının bir alt uzayıdır. X'in regüler alt uzayının maksimum quasilineer bağımsız eleman sayısı 2 olduğundan $r-\dim(X)=2$'dir. Ayrıca X'in singüler alt uzayının maksimum quasilineer bağımsız eleman sayısı sonsuz olduğundan $s-\dim(X)=\infty$ dur.*

KAYNAKLAR

[1] S. M. Aseev, *Quasilineer operators and their application in the theory of multi-valued mappings*, **Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics**, Issue 2, (1986) 23-52.

[2] V. Lakshmikantham vd. T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006.

[3] H. Keziban Banazılı, *On Quasilinear Operators Between Quasilinear Spaces*, M.Sc. Thesis, İnönü University, Turkey, 2014.

[4] E. Kreyszing, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons Inc. New York, 1989.

[5] L. Debnath, P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, USA, 2005.

[6] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill Int. Book Comp., New York, USA, 1978.

[7] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

[8] Y. Soykan, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayın, Ankara, 2012.

[9] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara, 2000.

[10] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, New York, 1990.

[11] F. Temizsu, *On Some Set-Valued Function Spaces and Analysis of Operators Between Those Spaces*, M.Sc. Thesis, İnönü University, Turkey, 2012.

[12] S. Çakan and Y. Yılmaz, *Normed Proper Quasilinear Spaces*, **Journal of Nonlinear Science and Applications**, 8 (2015) 816-836.

[13] S. Çakan, *Some New Results Related to Theory of Normed Quasilinear Spaces*, PhD Thesis, İnönü University, Turkey, 2016.

[14] Y. Yılmaz, S. Çakan and Ş. Aytekin, *Topological Quasilinear Spaces*, **Abstract and Applied Analysis**, vol.2012, Article ID 951374 (2012) 10 pages. doi:10.1155/2012/951374.

[15] Y. Yılmaz, H. Bozkurt and S. Çakan, *An Orthonormal Sets in Inner Product Quasilinear Spaces*, **Creative Mathematics and Informatics**, (Kabul edildi).

[16] G. Alefeld and G. Mayer, *Interval Analysis: Theory and Applications*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 121 (2000) 421-464.

[17] Ramon E. Moore, R. Baker Kearfott and Michael J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hacer BOZKURT

Doğum Yeri ve Tarihi: Gerede / 06.02.1986

Adres: Batman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

E-Posta: hacerbozkurt86@gmail.com

Lisans: Atatürk Üniversitesi, Erzincan Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2004-2008)

Yüksek Lisans: Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D. (2008-2010)

Mesleki Deneyim: Batman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi (2010 - $\cdots$)

Yayın Listesi:

Makaleler

1) Y. Yılmaz**, H. Bozkurt,** S. Çakan**,** *An Orthonormal Sets in Inner Product Quasilinear Spaces*, **Creative Mathematics and Informatics.** (Kabul edildi)

2) H.Bozkurt, Y. Yılmaz, *New Inner Product Quasilinear Spaces on Interval Numbers*, **Journal of Function Spaces**. (Kabul edildi)

3) H. Bozkurt, Y. Yılmaz, *Some New Properties of Inner Product Quasilinear Spaces*, **Bulletin of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 8, Issue 1 (2016), pages 37-45.

4) H. Bozkurt, S. Çakan, Y. Yılmaz, *Quasilinear Inner Product Spaces and Hilbert Quasilinear Spaces*, **International Journal of Analysis**, (2014), Article ID 258389, 7 pages.

5) H. Demirer, M. Öztürk, M. Başarır, *On Some Maps with P and Q Properties in Non-Normal Cone Metric Spaces*, **International Mathematical Forum**, Vol. 6, 2011, no. 8, 381-387.

Bildiriler

1) H. Bozkurt, Y. Yılmaz, *Some Properties of Orthonormal Sets on Inner Product Quasilinear Spaces*, **International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016)**, May 12-14, 2016, Elazığ, Turkey.

2) H. Bozkurt, Y. Yılmaz, *Some New Theorems in Hilbert Quasilinear Spaces*, **International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015)**, August 25-28, 2015, Van, Turkey.

3) H. Demirer, M. Öztürk, M. Başarır, *Normal Olmayan Koniye Sahip Konik Metrik Uzaylarda P ve Q Özelliklerini Sağlayan Bazı Dönüşümler Üzerine*, **5. Ankara Matematik Günleri**, 06-2010, 52- ANKARA.