

276

~~104~~

**YUVARLANMA HAREKETİNE  
EŞLİK EDEN REGLE YÜZEYLER**

**Doktora Tezi**

<b>İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ GENEL KÜTÜPHANESİ</b>
Demirbaş No. : <b>3301</b>
Tasnif No. :
Geliş Tarihi :

**Ali İhsan SİVRİDAĞ**  
**İ. Ü. Fen - Edebiyat Fakültesi**  
**Mat. Böl. Araştırma Görevlisi**

**MALATYA - 1983**

Bu çalışmamın hazırlanmasında bütün imkanlarıyla bana yardımcı olan, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanı, hocam; sayın Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na sonsuz şükranlarımı sunarım.

## ÖZET

Bu çalışma üç bölümden ibaret olup, birinci bölüm diferensiyel geometrinin temel tanım ve teoremlerine ayrılmıştır. Ayrıca seritler teorisi ve regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar da bu bölümde ifade edilmiştir.

İkinci bölüm ise, son bölümde yapılacak çalışmalara hazırlık olması için kinematik ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Özellikle bir yüzeyin bir başka yüzey üzerinde kapalı bir eğri boyunca kaymasız ( ve kaymalı ) yuvarlanması ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Orijinal çalışmamızın yer aldığı üçüncü bölümde de bir yüzeyin bir başka yüzey üzerinde, kapalı bir eğri boyunca kaymasız ve kaymalı yuvarlanmasına eşlik eden kapalı regle yüzey çiftleri tanımlanmış, kaymasız ( veya kaymalı ) yuvarlanmaya eşlik eden bu regle yüzey çiftlerinin de birbiri üzerinde kaymaksızın ( veya kayarak ) yuvarlandıkları gösterilmiştir. Özellikle, yuvarlanma hareketlerine eşlik eden hareketli ve sabit eksen yüzeyleri için analitik bir ifade verilmiş ve bu çiftin de birbiri üzerinde, her t anında doğrultmanları çakışık olacak şekilde yuvarlandıkları gösterilmiştir. Ayrıca yuvarlanma hareketlerine eşlik eden bu regle yüzey çiftlerinin invaryantları arasındaki bağıntılar da araştırılmış olup, elde edilen sonuçlardan bazıları şöyledir:

1) Kaymasız yuvarlanmaya eşlik eden hareketli ve sabit regle yüzeylerin açılım uzunlukları eşit olmasına rağmen, dağılma parametreleri ve açılım açıları genellikle farklıdır.

- 2) Kaymasız yuvarlanmaya eşlik eden hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin dağılma parametreleri eşittir.
- 3) Kaymasız yuvarlanmaya eşlik eden regle yüzeylerin doğrultman vektörlerinin teğet vektörler olarak seçilmesi özel halinde, açılım uzunlukları dayanak eğrilerinin uzunluğuna eşit ve dağılma parametreleri sıfırdır. Yine bu özel durumda her bir regle yüzeyin açılım açısı kendi dayanak eğrisinin total burulması cinsinden verilebilir.
- 4) Doğrultman vektörlerinin eğriler boyunca yüzey normaleri olarak seçilmesi halinde, her bir regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfırdır. Açılım açıları ise şeritlerin total geodezik eğriliği cinsinden verilebilir.
- 5) Kaymalı ve kaymasız yuvarlanmaya eşlik eden hareketli regle yüzeyin dayanak eğrisi striksiyon çizgisi ise sabit regle yüzeyin dayanak eğrisi de striksiyon çizgisi olmak zorundadır.
- 6) Kaymasız yuvarlanmaya eşlik eden hareketli regle yüzeyin dayanak eğrisi bir geodezik ise sabit regle yüzeyin dayanak eğrisi de bir geodeziktir.



## 1.BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

#### 1.1. ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE DÖNÜŞÜMLER

##### 1.1.1 TANIM (Öklid Uzayı):

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V (n-boyutlu) olsun. V de bir

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı  $\forall x, y \in V$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı olarak tanımlanırsa A afin uzayı n-boyutlu Öklid uzayı adını alır.  $A = \mathbb{R}^n$  ve  $V = \mathbb{R}^n$  alınması halinde Öklid uzayı standart Öklid uzayı olarak bilinir ve  $E^n$  ile gösterilir[4].

##### 1.1.2 TANIM (Parametrik eğri):

$I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere, diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

dönüşümü  $E^3$  de bir eğri olarak adlandırılır ve bu eğri  $\alpha$  veya  $\alpha(I)$  şeklinde gösterilir[4].

Burada I aralığı  $a, b \in \mathbb{R}$  ve  $t \in I$  olmak üzere  $a < t < b$  alınabilir. t değerine eğrinin parametresi denir.

##### 1.1.3 TANIM (Eğrinin hız vektörü):

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilsin.  $\forall t \in I$  için  $\alpha(I)$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki hız vektörü diye

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt} \right) \Big|_{\alpha(t)}$$

ölmak üzere,  $\alpha'(t) \in T_{E^3} \alpha(t)$  tanjant vektörüne denir[4].

1.1.4 TANIM (yay-parametresi):

$E^3$  de bir eğri,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüyle verilmek üzere  $\forall t \in I$  için

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

oluyorsa  $\alpha(I)$  eğrisine birim hızlı eğridir denir. Bu durumda  $t \in I$  parametresine de yay-parametresi adı verilir.

1.1.5 TANIM (regüler eğri):

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir.

1.1.1 TEOREM:  $E^3$  de herbir parametrik regüler eğri daima kendi yay-parametresi cinsinden ifade edilebilir[4]

1.1.6 TANIM:

Bir

$$F : E^n \longrightarrow E^m$$

$$F(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$$

fonksiyonu verilsin. Buradaki reel-değerli

$$f_1, f_2, \dots, f_m : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına  $F$  nin Öklid koordinat fonksiyonları denir ve

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

yazılır.  $1 \leq i \leq m$  için  $f_i$  fonksiyonları diferensiyellenebilir iseler  $F$  ye dönüşüm denir.

1.1.7 TANIM:

Bir  $\alpha(I)$  eğrisi

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilsin. Ayrıca bir de

$$F : E^n \longrightarrow E^m$$

dönüşümü verildiğinde,

$$\beta = F \circ \alpha : I \longrightarrow E^m$$

bileşke fonksiyonu da  $E^m$  de bir eğri tanımlar ki bu eğriye  $\alpha(I)$  eğrisinin  $F$  dönüşümü altındaki resmi denir.

Bir

$$F : E^n \longrightarrow E^m$$

dönüşümünün bir  $P \in E^n$  noktasındaki türevi  $(F_*)_p$  ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:  $(F_*)_p, \forall v_p \in T_{E^n}(p)$  vektörüne  $F(p)$  noktasında

$$(F_*)_p(v_p) \in T_{E^m}(F(p))$$

vektörünü karşılık getirir öyle ki,  $v_p$

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = p + tv$$

olmak üzere  $\alpha(I)$  eğrisinin  $\alpha(0) = P$  noktasındaki hız vektörü iken,  $(F_*)_p(v_p)$  de  $\beta = F \circ \alpha$  ile tanımlı  $\beta(I)$  eğrisinin  $\beta(0) = F(p)$  noktasındaki hız vektörü olarak alınır[4].

1.1.8 TANIM:

Bir

$$F : E^n \longrightarrow E^m$$

dönüşümü verilsin. Eğer  $v_p \in T_{E^n}(p)$  ise  $(F_*)_p(v_p)$  vektörü de  $E^m$  nin

$$t \longrightarrow F(p+tv)$$

eğrisinin  $t=0$  daki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı

$$(F_*)_p : T_{E^n}(p) \longrightarrow T_{E^m}(F(p))$$

fonksiyonuna  $F$  dönüşümünün  $p$  noktasındaki türev dönüşümü (Jakobian Dönüşümü) denir.

1.1.2 TEOREM:

$$(F_*)_p : T_{E^n}(p) \longrightarrow T_{E^m}(F(p))$$

türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür[4].

## 1.1.3 TEOREM:

Bir

$$F : E^n \longrightarrow E^m$$

dönüşümü verilsin.  $E^n$  deki bir  $\alpha(I)$  eğrisinin  $F$  dönüşümü altındaki resmi  $\beta(I)$  ise

$$\beta'(t) = (F_*(\alpha'))(t), \quad t \in I$$

dir. Yani Jakobian dönüşümü hız vektörü olma özelliğini korur [4].

Bir  $p \in E^n$  noktasında Jakobian dönüşümünün matrisi

$$J(F,p) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_p \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_p \end{bmatrix}_{m \times n}$$

dir [4].

## 1.2 ŞERİTLER TEORİSİ

## 1.1.2 TANIM ( Şerit ):

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey  $M$  ve  $M$  üzerinde bir eğri

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow M \subset E^3 \\ t &\longrightarrow x(t) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilmek üzere,  $(x(I), M) = (\text{eğri}, \text{yüzey})$  2-lisine bir şerit adı verilir ve kısaca  $(x(t), \xi(t))$  ile gösterilir, burada  $\xi(t)$ ,  $M$  yüzeyinin  $x(I)$  eğrisi boyunca birim normalini ve  $t$  de  $x(I)$  eğrisinin parametresini göstermektedir.

$T, x(I)$  eğrisinin teğet vektör alanı,  $\eta$ ,  $\forall t \in I$  için  $T_M(x(t))$  de  $\langle \eta, T \rangle = 0$  olacak şekilde  $E^3$  de bir vektör alanı ve  $\xi$  de  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere,  $T(t), \eta(t), \xi(t)$  vektörlerine şerit vektörleri denir. Şerit vektörlerinin türevleri,

$$\begin{bmatrix} dT/dt \\ d\eta/dt \\ d\xi/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada;  $a, b, c$  şerit eğrilikleridir.  $x(I)$  eğrisinin  $T, N, B$  Frenet vektörleriyle yukarıda ifade edilen şerit vektörleri arasında

$$\begin{aligned} T &= T \\ N &= \frac{c\eta - b\xi}{(b^2 + c^2)^{1/2}} \\ B &= \frac{c\xi + b\eta}{(b^2 + c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} N &= \cos \theta \eta + \sin \theta \xi \\ B &= -\sin \theta \eta + \cos \theta \xi \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

bağıntılarının da olduğu kolayca görülebilir (Şekil 1.2.1).

$$T' = k_1 N = k_1 (\cos\theta \eta + \sin\theta \xi)$$

olduğundan, (1.2.1) eşitliği yardımıyla

$$k_1 \cos\theta \eta + k_1 \sin\theta \xi = 0 T + c \eta - b \xi$$

$$c = k_1 \cos\theta; b = -k_1 \sin\theta$$

(1.2.4)

$$(k_1)^2 = b^2 + c^2$$

elde edilir. Böylece b ve c şerit eğriliklerinin geometrik yorumu şöyle verilebilir:

Şeritin b normal eğriliği, eğrinin  $k_1$  eğriliğinin normal düzlem üzerindeki izdüşümüne eşittir. Şeritin c geodezik eğriliği de  $k_1$  eğriliğinin teğet düzlem üzerindeki izdüşümüne eşittir.

#### 1.2.2 TANIM:

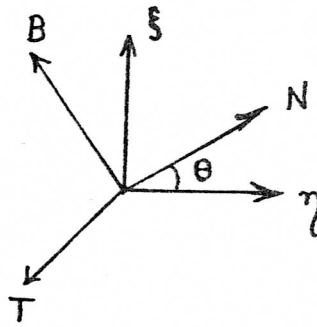
a, b, c şerit eğrilikleri olmak üzere şerit,

a=0 için eğrilik şeridi,

b=0 için oskülatör şeridi,

c=0 için geodezik şerit

olarak adlandırılır.



Şekil 1.2.1

## 1.3 REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

## 1.3.1 TANIM (Regle yüzey):

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey  $M$  olsun. Eğer  $\forall p \in M$  noktasında  $E^3$  ün tamamen  $M$  de kalan bir doğrusu varsa,  $M$  ye bir regle yüzey;  $p \in M$  noktasından geçen ve  $M$  de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir.

Regle yüzeylerin parametrik denklemini bulmak için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyillenebilir bir

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow E^3, & I \subset \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow x(t) \end{aligned}$$

eğrisi seçilir ve regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak bilinir.  $x(I)$  dayanak eğrisinin  $x(t)$  noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişen bir nokta,

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ l &\longrightarrow \beta(l) = x(t) + l a(t) \end{aligned}$$

ile verilir, burada;  $a(t)$  birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey,

$$\begin{aligned} \psi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ \psi(t, l) &= x(t) + l a(t) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur.

## 1.3.2 TANIM:

Bir

$$\begin{aligned} \psi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ \psi(t, l) &= x(t) + l a(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi,  $\forall t \in I$  için

$$\psi(t+p, l) = \psi(t, l) \tag{1.3.2}$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir. Buradan da görülür ki kapalı bir regle yüzey için  $l$  nin sabit bırakılmasıyla elde edilen  $t$ -parametri eğrisi (dayanak eğrisi) kapalı bir egridir.

## 1.3.3 TANIM:

Bir  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz noktası, boğaz noktalarının geometrik yerine de regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Bir  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinin merkez noktasının  $\bar{x}$  yer vektörü; dayanak eğrisinin  $x(t)$  yer vektörü,  $a(t)$  doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan  $\bar{u}$  uzaklığı cinsinden

$$\bar{x}(t, \bar{u}) = x(t) + \bar{u}(t) a(t) \quad (1.3.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\bar{u}$  değerini hesaplayalım. Regle yüzeyin ilk ikisi  $a(t)$  ve  $a(t)+da(t)$  olan üç komşu anadoğrusunu gözönüne alalım (Şekil 1.3.1).

Komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin doğrular üzerindeki dikme ayakları  $P, p'$  ve  $Q, Q'$  olsun

$$a(t) \wedge (a(t)+a'dt) = a(t) \wedge a'dt$$

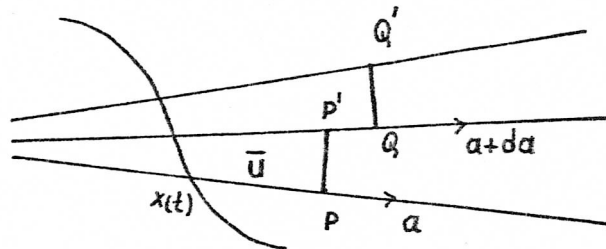
bağıntısından dolayı, ilk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi  $a \wedge a'$  vektörüne paraleldir. Limit halinde  $\vec{PQ}$  vektörü  $\vec{PP}'$  vektörü çakışarak striksiyon çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla,

$$\langle a, \vec{PQ} \rangle = 0 \quad ; \quad \langle a+a'dt, \vec{PQ} \rangle = 0 \quad (1.3.4)$$

olacağından

$$\langle a', \vec{PQ} \rangle = 0$$

olacaktır. (1.3.3) ve (1.3.4) eşitliklerinden,



Şekil 1.3.1



$$\left\langle \frac{da}{dt}, \frac{d\bar{x}}{dt} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{da}{dt}, T + \frac{d\bar{u}}{dt} a + \bar{u} \frac{da}{dt} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{da}{dt}, T \right\rangle + \bar{u} \left\| \frac{da}{dt} \right\|^2 = 0$$

$$\bar{u} = \frac{-\left\langle \frac{da}{dt}, T \right\rangle}{\left\| \frac{da}{dt} \right\|^2} \quad (1.3.5)$$

bulunur. Böylece striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\bar{x} = x(t) - \frac{\langle \dot{a}, T \rangle}{\|\dot{a}\|^2} a(t) \quad (1.3.6)$$

ifadesiyle verilebilir. Böylece striksiyon çizgisi regle yüzeyler için dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için

$$\bar{u} = 0, \quad \langle \dot{a}, T \rangle = 0 \quad (1.3.7)$$

alınması yeterlidir

#### 1.3.4 TANIM:

Bir  $\varphi(t, l)$  regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemi aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilir dendir.

#### 1.3.5 TANIM:

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü  $a$  olan bir regle yüzeyin dralini  $P_a$  ile gösterelim. Komşu anadoğrular arasındaki dikme doğrultusunun birim vektörü

$$a^* = \frac{a \wedge \dot{a}}{\|\dot{a}\|} \quad (1.3.8)$$

dır. Dayanak eğrisinin komşu iki noktası  $x(t)$  ve  $x(t)+dx(t)$  olduğundan, bu noktalar arasındaki en kısa uzaklık  $dx$  vektörünün  $a^*$  vektörü üzerindeki dik izdüşümü olacağından,

$$\begin{aligned}
1 &= \left\langle dx, \frac{a \wedge \dot{a}}{\|\dot{a}\|} \right\rangle \\
&= \frac{\det(dx, a, \dot{a})}{\|\dot{a}\|}
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

dir. Anadoğruların küresel göstergesinin yay elementi olan

$$d\psi = \|\dot{a}\| dt, \tag{1.3.10}$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilileceğinden,

$$P_a = \frac{\det(dx/dt, a, \dot{a})}{\|\dot{a}\|^2} \tag{1.3.11}$$

bulunur. Regle yüzeylerin dağılma parametreleri koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invariantsdır[6].

#### 1.3.1 TEOREM:

Bir  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır[8].

#### 1.3.6 TANIM:

$$\psi(t,1) = x(t) + 1 a(t)$$

regle yüzeyi için

$$L_a = \oint_{(x)} \langle dx, a \rangle$$

olarak tanımlanan

$$L_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinin açılım uzunluğu ( adımı ) denir.

#### 1.3.7 TANIM (Açılım açısı):

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü  $a$  olan bir  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrunun, bir periyod sonra ilk konumuyla yaptığı açıya bu regle yüzeyin açılım açısı denir.

## 2. BÖLÜM

### $E^n$ DE HAREKETLER

#### 2.1 $E^n$ DE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Genel olarak  $E^n$ , n-boyutlu Öklid uzayında bir hareket ile,  $E^n$  nin yön koruyan bir izometrisini kastediyoruz. Böyle bir izometri,  $A \in SO(n)$  ve  $a \in \mathbb{R}_1^n$  olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlanan bir

$$f : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümüyle belirtilir. Buna göre bir  $x \in E^n$  noktasının f dönüşümü altındaki resmi y ile gösterilir ise

$$y = Ax + a \quad (2.1.1)$$

dır.

#### 2.1.1 TANIM (1-parametrelî hareket):

$I \subset \mathbb{R}$  sıfırını ihtiva eden açık veya kapalı bir aralık olsun.  $I \subset \mathbb{R}$  deki değişken t ve  $E^n$  nin direkt hareketleri grubu  $R(n)$  olmak üzere, elemanları

$$\{f_t\} = \begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

ile verilen  $\{f_t\}$  cümlesine  $E^n$  nin bir 1-parametrelî hareketi denir, burada;  $A(t)$   $SO(n)$ -değerli ve  $a(t)$   $\mathbb{R}_1^n$ -değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca t zaman anlamında hareketin parametresi kabüledilir[3].

Buna göre  $f_t$  yi  $I$  dan  $E^n$  ye diferensiyellenebilir bir dönüşüm olarak düşünüyoruz. Ayrıca  $t=0$  için

$$f_0^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Yani  $f_0$  özdeşlik dönüşümüdür. Kısalığın hatırı için (2.1.2) ifadesindeki  $A(t)$  ve  $a(t)$  yerine çoğu zaman sırasıyla,  $A$  ve  $a$  gösterimini kullanacağız.

$$f_t(x) = A(x) + a \quad (2.1.3)$$

ile verilen  $f_t$  dönüşümü izometri olduğundan  $f_t$  nin inversi daima mevcuttur.  $\forall t \in I$  için  $f_t$  nin inversini  $f_t^{-1}$  ile gösterirsek,  $f_t^{-1}$  in matrisel ifadesi

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & -A^T a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

dir.

Bir  $x \in E^n$  noktasının  $\{f_t\}$  altındaki yörüngesi  $E^n$  de bir ekridir. Bu eğriyi  $(y_t)$  ile gösterelim. Buna göre  $(y_t)$  eğrisinin her hangi bir  $y(t)$  noktası için,

$$\begin{aligned} y(t) &= f_t(x) \\ &= A(t)x + a(t) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

dir.  $(y_t)$  eğrisinin teğet vektör alanı

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dt} \quad (2.1.6)$$

olup, burada;  $x = f_t^{-1}(y(t))$  dir.  $\left(\frac{df}{dt}\right) f_t^{-1}$  hesaplanacak olursa,

$$\frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{dA}{dt} A^T & -\frac{dA}{dt} A^T a + \frac{da}{dt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada kısalığın hatırı için

$$S_t = (dA/dt) A^T, \quad v_t = -S_t a + \frac{da}{dt}$$

gösterimini kullanırsak

$$\frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} S_t & v_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

elde edilir.

2.1.2 TANIM ( Ani hareket):

(2.1.7) ile verilen harekete  $t$  anındaki ani hareket denir[7].

2.1.3 TANIM ( Ani duraklama ):

$S_t=0$  ve  $v_t=0$  ise ani harekete ani duraklama denir[7].

2.1.4 TANIM ( Ani öteleme ):

$S_t=0$  ve  $v_t \neq 0$  ise ani harekete ani öteleme denir[7].

2.1.5 TANIM ( Ani dönme ve ani dönme merkezi ):

$\dot{y}|_{y_0} = 0$  olacak şekilde bir  $y_0 \in E^n$  noktası varsa ani harekete ani dönme ve  $y_0 \in E^n$  noktasına da ani dönme merkezi denir[7].

Diğer yandan,  $S_t$  bir anti-simetrik matristir. Dolayısıyla 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux vektörü adı verilen bir vektörün tanımlanmasına yol açar. Dolayısıyla  $t$  anında Darboux vektörüyle belli olan bir eksen vardır ki bu eksen üzerindeki bütün  $y(t)$  noktaları  $t$  anında sabittirler, yani böyle noktalar için

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y_0} = 0 \quad (2.1.8)$$

dir.

2.1.6 TANIM ( Darboux vektörü ):

$n=3$  halinde

$$S_t = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$w_t = (w_1, w_2, w_3)$$

olmak üzere,  $\forall u \in \mathbb{R}^3$  için

$$S_t(u) = w \wedge u \quad (2.1.9)$$

eşitliği ile tanımlı  $w_t$  vektörüne hareketin Darboux vektörü veya açısal hız vektörü denir[2].

2.1.7 TANIM ( Ani dönme eksenini ):

Her  $t$  anında (2.1.8) ile belli olan doğruya ani dönme eksenini veya Darboux eksenini denir.

$\{f_t\}$  1-parametrelili hareketinde  $x_t$  ve  $y_t$  mütekabil pol noktalarıysa

$$dy/dt = (dA/dt)x + A(dx/dt) + da/dt \quad (2.1.10)$$

ifadesinde  $(dy/dt)=0$  ve  $(dx/dt)=0$  değerlerinin konulması ile  $v_f$  sürüklenme hızı için

$$v_f = (dA/dt)x + (da/dt) \quad (2.1.11)$$

olduğu görülür.

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey  $M$  ve  $N$  olsun.  $E^3$  de bir  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketini, her  $t$  anında  $f_t(M)$  yüzeyi  $N$  yüzeyine bir  $y(t)$  noktasında teğet kalacak şekilde verelim.  $t$  anında  $S_t$  anti-simetrik matrisiyle belli Darboux vektörü  $w_t$  olmak üzere,  $M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde yuvarlanması şöyle tanımlanır.

2.1.8 TANIM ( Yuvarlanma ):

$w_t$ ,  $y(t)$  noktasında  $N$  yüzeyine teğet ise,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{f_t}^{-1} = \begin{bmatrix} S_t & v_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilen ani harekete bir yuvarlanma denir. Eğer  $\forall t \in I$  için ani hareket bir yuvarlanma ise,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketine  $M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde bir yuvarlanması denir[7].

## 2.2 $E^n$ DE 1-PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER

### 2.2.1 TANIM (Homotetik hareket ):

$E^n$ , n-boyutlu Öklid uzayında

$$F = \begin{bmatrix} hA & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

ile belirli dönüşüme  $E^n$  de bir homotetik hareket denir, burada;  $h=hI_n$  bir skalar matris,  $A \in SO(n)$  ve  $a \in \mathbb{R}_1^n$  dir [1].

buna göre bir  $x \in E^n$  nin resmi  $Y \in E^n$  ise,

$$\begin{aligned} Y &= F(x) \\ &= (hA)x + a \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

### 2.2.2 TANIM (1-parametrelili homotetik hareket):

$I$ , sıfırı ihtiva eden bir aralık olsun.  $t \in I$  olmak üzere,

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu,  $A \in SO(n)$  matrisi ve  $a \in \mathbb{R}_1^n$  matrisi  $t$  ye göre diferensiyellenebilir olmak üzere elemanları,

$$F_t = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

biçiminde tanımlı  $\{F_t\}$  cümlesine  $E^n$  nin bir 1-parametrelili homotetik hareketi denir, burada;  $t$  hareketin zaman anlamında parametresi kabul edilir [1].

Her  $t$  için  $h(t) > 0$  ve  $h(t) \neq st$  alınacaktır. Ayrıca yalnızca öteleme ve dönmeden kaçınmak için sırasıyla,

$$(dh/dt)A + h(dA/dt) \neq 0 \quad \text{ve} \quad (da/dt) \neq 0 \quad (2.2.4)$$

alınacaktır.  $B=hA$  denirse,  $h$  bir skalar matris olduğundan

$$B^{-1} = (hA)^{-1} = (1/h)A^{-1} = (1/h)A^T$$

elde edilir.

Bir  $x \in E^n$  noktasının bir  $\{F_t\}$  1-parametrelili homotetik hareketi altındaki yörüngesi  $E^n$  de bir eğri olup, bu eğri  $(Y_t)$  ile gösterilirse  $(Y_t)$  nin herhangi bir  $Y(t)$  noktası için,

$$Y_t = F_t(x) = Bx + a \quad (2.2.5)$$

dır. Ayrıca  $(Y_t)$  eğrisinin teğet vektör alanı

$$\frac{dY}{dt} = \dot{Y} = \frac{dB}{dt} x + B \frac{dx}{dt} + \frac{da}{dt} \quad (2.2.6)$$

dir. Hareketli ve sabit uzayın mütekabil sabit noktalarında,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dB}{dt} x + \frac{da}{dt} = 0$$

olacağından bu noktalardaki sürüklenme hızı

$$v_f = \frac{dB}{dt} x + \frac{da}{dt} = 0 \quad (2.2.7)$$

olur. Bu sabit ortak noktalar  $\{F_t\}$  1-parametrelili homotetik hareketinin ani pol noktalarıdır ki bu noktalar (2.2.7) denkleminin çözülmesiyle elde edilirler.

2.2.3 TANIM (Mutlak hız, sürüklenme hızı, izafi hız):

(2.2.6) eşitliğindeki  $(dY/dt)$  mutlak hız,  $B(dx/dt)$  izafi hız,  $(dB/dt)x + (da/dt)$  de sürüklenme hızı olarak adlandırılır.

(2.2.3) ifadesinden

$$F_t^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{dF}{dt} F_t^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{dB}{dt} B^{-1} & -\frac{dB}{dt} B^{-1}a + \frac{da}{dt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$= \begin{bmatrix} H_t & v_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$



elde edilir. Ayrıca  $\varphi_t = (dh/dt)h^{-1}$  ve  $S_t = (dA/dt)A^T$  denirse

$$H_t = \varphi_t + S_t \quad (2.2.11)$$

bulunur, burada;  $\varphi_t$  bir skalar matris  $S_t$  ise bir anti-simetrik matristir [5]. Görüldüğü gibi  $\varphi_t$  ve  $S_t$  hareketin kayma ve yuvarlanma kısmına ait matrislerdir. Hareketin kaymalı yuvarlanma olmasını sağlamak için

$$\varphi_t \neq 0 \quad \text{ve} \quad S_t \neq 0$$

alınacaktır.

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey  $M$  ve  $N$  olsun.  $E^3$  de bir  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketini şöyle verelim:

$(x_t) \subset M$ ,  $0 \leq t \leq 1$  diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere, her  $t$  anında  $F_t(M)$  yüzeyi  $N$  yüzeyine  $Y_t(t) = F_t(x_t(t))$  noktasında teğet kalsın. Ayrıca  $Y_t(t)$  noktaları değme noktalarının ve ani dönme merkezlerinin geometrik yeri olsunlar. Bu verilenlere bağlı kalarak aşağıdaki tanımı verebiliriz:

2.2.4 TANIM (Kaymalı yuvarlanma):

$H_t = \varphi_t + S_t$  ve  $w_t$ ,  $S_t$  ile belli Darboux vektörü olmak üzere, belli bir  $t$  anında  $w_t$   $N$  ye teğet ise  $(dF/dt)F_t^{-1}$  ile verilen ani harekete  $t$  anında bir kaymalı yuvarlanma denir. Eğer her  $t$  anında ani hareket bir kaymalı yuvarlanma ise  $\{F_t\}$  ye  $M$  nin  $N$  üzerinde  $(x_t)$  eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanması denir[5].

2.3 BİR KÜRENİN BİR DÜZLEM ÜZERİNDE KAPALI BİR EĞRİ  
BOYUNCA KAYMASIZ YUVARLANMASI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir birim küre  $S^2$  olsun. Bir  $x_0 \in S^2$  noktasında  $S^2$ 'nin teğet düzlemi de  $\Sigma$  olsun. Ayrıca  $E^3$  deki bir  $\{x_1, x_2, x_3\}$  dik koordinat sistemini,  $S^2$  birim küresini

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

ve  $\Sigma$  düzlemini de

$$x_3 = -1$$

denklemleriyle verilecek şekilde seçelim. Buna göre  $x_0 = (0, 0, -1)$  olsun.  $S^2$  birim küresi üzerinde  $x_0$  noktasında başlayan kapalı diferensiyellenebilir bir  $(x_t)$  eğrisini gözönüne alalım.

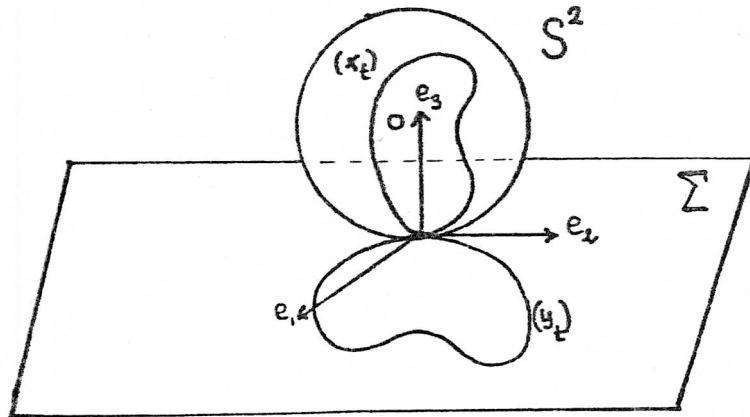
$E^3$  de bir  $\{f_t\}$  1-parametrel hareketi,

$$f_t = \begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(t) \in SO(3), \quad a(t) \in \mathbb{R}_1^3 \quad (2.3.1)$$

her  $t$  anında  $x_t(t)$  noktası  $\Sigma$  düzlemi ile değme noktası olacak şekilde verilsin ve  $x_t(t)$  noktası  $t$  anında

$$y_t(t) = f_t(x_t(t)) \quad (2.3.2)$$

noktasıyla çakışsın (Şekil:2.3.1).



Şekil 2.3.1

Diğer yandan, ICIR sıfırını ihtiva eden bir aralık olmak üzere,  $S^2$  birim küresi üzerindeki  $(x_t)$  kapalı eğrisi ,

$$\begin{aligned} x_t : I &\longrightarrow S^2 \\ t &\longrightarrow x_t(t) \end{aligned}$$

ile verilmek üzere  $\Sigma$  düzlemi üzerindeki  $(y_t)$  kapalı eğrisi

$$\begin{aligned} y_t = f_t \circ x_t : I &\longrightarrow E^2 \\ t &\longrightarrow y_t(t) \end{aligned}$$

dir. Buradan  $(y_t)$  eğrisinin hız vektörü için,

$$\frac{dy}{dt} = A \frac{dx}{dt} + \frac{dA}{dt} x + \frac{da}{dt} \quad (2.3.3)$$

olduğu görülür. Halbuki  $f_t$  dönüşümünün matrisi

$$f_t = \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan,  $f_t$  nin Jakobian matrisi

$$(f_t)_* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

dir.  $x_t(t) \in (x_t)$  noktasında  $(x_t)$  eğrisinin hız vektörü  $dx/dt$  olduğuna göre

$$\frac{dy}{dt} = (f_t)_* \left( \frac{dx}{dt} \right) \quad (2.3.5)$$

olacağı da gözönüne alınırsa,  $(y_t)$  eğrisi boyunca

$$\frac{dy}{dt} = A \frac{dx}{dt} \quad (2.3.6)$$

olmak zorundadır. (2.3.6) nın (2.3.3) ile mukayesesinden ortaya çıkan

$$v_f = \frac{dA}{dt} x + \frac{da}{dt} \quad (2.3.7)$$

hareketin sürüklenme hızı olup, değme noktalarında bu hızın sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar pol noktaları olarak adlandırılacağından,  $(x_t)$  ve  $(y_t)$  eğrileri sırasıyla, hareketli ve sabit pol eğrileridirler. Böyle noktaların varlığı  $v_f=0$  denkleminde görülür.

veya

$$\lambda_1 = \langle \xi_t, da_1/dt \rangle; \lambda_2 = \langle \xi_t, da_2/dt \rangle \quad (2.4.3)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  uygun reel değerli fonksiyonlardır. Bazı hesaplamalardan sonra

$$d\xi / dt = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \quad (2.4.4)$$

elde edilir. Halbuki  $\{b_1, b_2, \bar{\xi}_t\}$  sistemi A ortogonal matrisinin karşılık geldiği lineer dönüşüm altında  $\{a_1, a_2, \xi_t\}$  ortonormal sisteminin resmi olduğundan, ortonormal bir sistem teşkil eder. Benzer işlemlerle

$$db_1/dt = (c_1 + \lambda_1) \bar{\xi}_t, \quad (2.4.5)$$

$$db_2/dt = (c_2 + \lambda_2) \bar{\xi}_t$$

elde edilir. Burada  $c_1$  ve  $c_2$  uygun reel-değerli dif.bilir fonksiyonlardır. (2.4.5) eşitliklerinden  $b_1$  ve  $b_2$  vektör alanlarının  $(y_t)$  eğrisi boyunca, N nin konneksiyonuna göre paralel vektör alanı oldukları görülür. Ayrıca

$$d\bar{\xi} / dt = - (c_1 + \lambda_1) b_1 - (c_2 + \lambda_2) b_2 \quad (2.4.6)$$

dir.

2.5 BİR YÜZEYİN DİĞER BİR YÜZEY ÜZERİNDE KAYMALI  
YUVARLANMASINA AİT BAZI ÖZELLİKLER

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yönlendirilebilir yüzey M ve N olsun. M üzerinde bir dif.bilir kapalı eğri  $(x_t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , M ve N yüzeyleri  $x_0$  noktasında birbirlerine teğet ve M ile N nin birim normal vektör alanları sırasıyla,  $\xi$  ve  $\bar{\xi}$  olmak üzere  $x_0$  noktasında  $\xi_0 = \bar{\xi}_0$  olsun.

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  kapalı eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanması  $\{F_t\}$  1-parametrelili homotetik hareketi ile verilsin.

$$F_t = \begin{bmatrix} hA & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_0 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,  $Y_t = F_t(x_t)$  değme noktaları ve ani pol noktaları olsunlar.  $(x_t)$  ve  $(Y_t)$  eğrileri boyunca, M ve N yüzeylerinin birim normal vektör alanları sırasıyla,  $\xi_t$  ve  $\bar{\xi}_t$  ile gösterilmek üzere, her t anında  $F_t(M)$  ve N yüzeyleri birbirlerine teğet olacaklarından,

$$(hA)(\xi_t) = h\bar{\xi}_t \quad (2.5.1)$$

olur. M üzerinde,  $(x_t)$  eğrisi boyunca M nin konneksiyonuna göre paralel iki ortonormal vektör alanı  $a_1 = a_1(t)$  ve  $a_2 = a_2(t)$  olmak üzere,  $(Y_t)$  eğrisi boyunca iki vektör alanını,

$$\begin{aligned} b_1 &= h^{-1}B(a_1) \\ b_2 &= h^{-1}B(a_2) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada,  $B=hA$  dır.  $a_1$  ve  $a_2(x_t)$  boyunca paralel vektör alanı olduklarından;  $\lambda_1, \lambda_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$  reel-değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} da_1/dt &= \lambda_1 \xi_t \\ da_2/dt &= \lambda_2 \xi_t \\ d\xi/dt &= -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

ve

$$d\xi / dt = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \quad (2.5.4)$$

dir.

$\{a_1, a_2, \xi_t\}$  sistemi  $(x_t)$  boyunca ortonormal bir sistem teşkil ettiğinden  $\{b_1, b_2, \bar{\xi}_t\}$  sistemi de  $(Y_t)$  boyunca hareket esnasında ortonormal bir sistem teşkil eder. Buna göre,

$$\begin{aligned} db_1/dt &= (\|w_t \wedge b_1\| + \lambda_1) \bar{\xi}_t \\ db_2/dt &= (\|w_t \wedge b_2\| + \lambda_2) \bar{\xi}_t \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

$$d\xi / dt = -(\|w_t \wedge b_1\| + \lambda_1) b_1 - (\|w_t \wedge b_2\| + \lambda_2) b_2$$

dir. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

2.5.1 SONUÇ: (2.5.2) ile tanımlanan  $b_1$  ve  $b_2$  vektör alanları  $(Y_t)$  eğrisi boyunca N nin konneksiyonuna göre paraleldirler.

### 3. BÖLÜM

#### KAPALI YUVARLANMA HAREKETLERİNE EŞLİK EDEN REGLE YÜZEYLER

##### 3.1 KAPALI KAYMASIZ YUVARLANMA HAREKETLERİNE EŞLİK EDEN REGLE YÜZEYLER

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir iki yüzey M ve N olsun. Başlangıçta, M yüzeyi üzerinde tesbit edilen bir kapalı  $(x_t)$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$ , sıfırını ihtiva eden kapalı bir aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_t &: I \longrightarrow M \\ t &\longrightarrow x_t(t) \end{aligned}$$

dif.bilir dönüşümü ile verilsin. Burada  $t, (x_t)$  eğrisinin yay-parametresi kabul edilecektir. Ayrıca M ve N yüzeyleri  $x_0$  noktasında birbirlerine teğet ve M ile N nin birim normal vektör alanları da sırasıyla,  $\xi$  ve  $\bar{\xi}$  olsun.

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanması  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketiyle verilsin.

$$f_t = \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,  $y_t = f_t(x_t)$  noktaları değme ve ani pol noktaları olsunlar. Bu noktaların N yüzeyi üzerinde oluşturdukları kapalı eğriyi  $(y_t)$  ile gösterelim. Buna göre

$$\begin{aligned} y_t &= f_t \circ x_t : I \longrightarrow N \\ y_t(t) &= f_t(x_t(t)), \quad t \in I \end{aligned}$$

dir.

$u = u_1 a_1 + u_2 a_2$ ,  $\|u\| = 1$ , olmak üzere,  $u(t)$  doğrultman vektörlerinin  $(x_t)$  kapalı eğrisi (dayanak eğrisi) ile meydana getirdikleri kapalı regle yüzey,

$$\varphi(t, l) = x_t(t) + l u(t), \quad l \in \mathbb{R}, \quad \|u\| = 1$$

olsun. Burada,  $a_1$  ve  $a_2$  daha önce belirtildiği gibi,  $(x_t)$  eğri-  
si boyunca  $M$  nin konneksiyonuna göre paralel iki ortonormal vek-  
tör alanıdır.  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketinde  $\varphi(t, l)$  regle  
yüzeyinin resmi olan kapalı regle yüzey de

$$\bar{\varphi}(t, m) = y_t(t) + m (f_t)_* (u(t)), \quad m \in \mathbb{R}$$

ile verilsin. Burada  $(f_t)_*$ ,  $f_t$  nin Jakobian dönüşümünü gös-  
termektedir. Bu kabul ve notasyonlara bağlı kalarak aşağıdaki  
teoremi verebiliriz.

### 3.1.1 TEOREM:

$M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  kapalı eğrisi bo-  
yunca kaymasız yuvarlanmasına;  $\varphi(t, l)$  regle yüzeyi  
de aynı eğri boyunca  $\varphi(t, m)$  regle yüzeyi üzerinde  
kaymaksızın yuvarlanarak eşlik eder.

İSPAT:  $M$  nin  $N$  yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanması  $\{f_t\}$   
1-parametrelili hareketiyle verilsin. Bu harekette  $\bar{\varphi}(t, m)$  reg-  
le yüzeyi sabit iken;  $\varphi(t, l)$  yüzeyi,  $\bar{\varphi}(t, m)$  üzerinde her  $t$  anın-  
da,  $y_t = f_t(x_t)$  noktası ortak olacak şekilde hareket eder. Ayrıca  
 $y_t(t)$  noktası  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketinin  $t$  anındaki pol  
noktasıdır ve  $y_t = f_t(x_t)$  noktalarında  $f_t(\varphi)$  ile  $\bar{\varphi}$  regle yü-  
zeylerinin teğet düzlemleri çakışıktır. Hatta bu ortak teğet  
düzlem  $T_N(y_t(t))$  ile de aynıdır. Her bir resim doğrultman  
vektörü, başlangıçtaki pozisyonundan  $A$  ortogonal matrisinin  
yaptırdığı dönme ile farkedir. Yalnız  $t=0$  için,  $A_0 = I_3$  olacağıın-  
dan

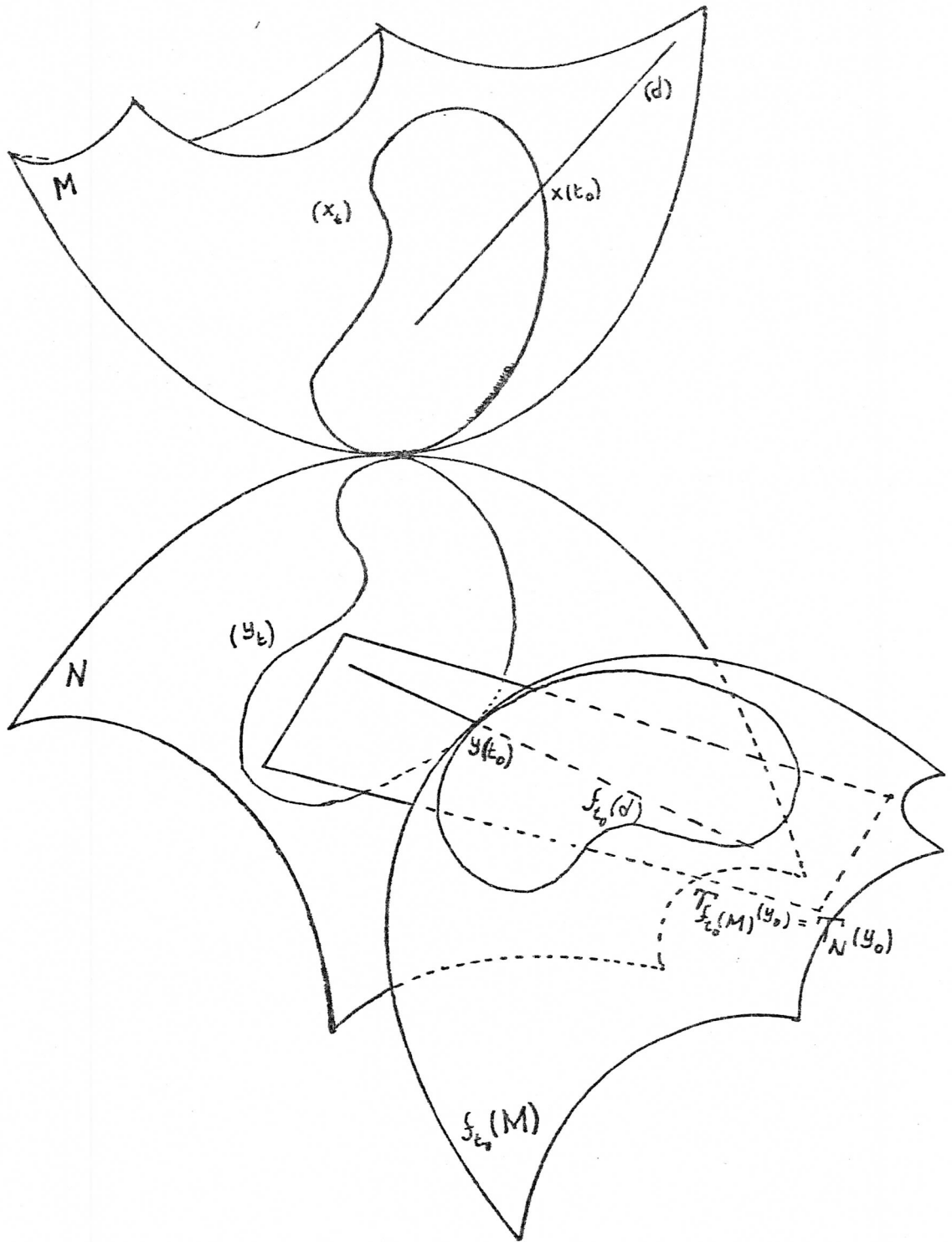
$$A_0(u_0) = u_0$$

olur. Dolayısıyla yalnız başlangıç anında bu iki doğrultman vek-  
tör aynı pozisyona sahiptir.

Ayrıca  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketiyle belli olan  $w_t$  Dar-  
boux vektörü, her  $t$  anında,

$$T_{f_t(\varphi)} f_t(x_t(t)) = T_{f_t(M)} Y_t(t)$$





(Şek. 3.1.1)

ve

$$T_{\bar{\varphi}} Y_t(t) = T_N Y_t(t)$$

ortak teğet düzlemlerde kalacağından,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketi,  $\varphi(t,1)$  regle yüzeyinin  $\bar{\varphi}(t,m)$  regle yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasından ibarettir. Yani  $\varphi(t,1)$  ve  $\bar{\varphi}(t,m)$  regle yüzeyleri, M nin N üzerindeki yuvarlanmasına birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanarak eşlik ederler.

Özellikle, M nin N yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin nasıl eşlik ettiklerini araştırabiliriz. Önce bu iki regle yüzey çifti için bir analitik ifade verelim. Bunun için t anındaki Darboux vektörünün her iki sistemde de ortak olma özelliğinden faydalanacağız. Çünkü Darboux vektörü t anındaki ani dönme eksenini ile bellidir ve tekdir. Ayrıca,  $f_t : x_t \longrightarrow y_t$  olduğundan,

$$(f_t)_*^{-1} : T_N(y_t) \longrightarrow T_M(x_t)$$

ve

$$(f_t)_*^{-1} = A^T$$

dir. Dolayısıyla hareketli ve sabit eksen yüzeyleri sırasıyla,

$$\bar{\Phi}(t,1) = x_t(t) + 1 A^T \Omega_t(t),$$

$$\bar{\Phi}(t,m) = y_t(t) + m \Omega_t(t)$$

denklemleriyle ifade edilebilir. Burada  $w_t(t)$ ,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketinin t anındaki Darboux vektörü olmak üzere,

$$\Omega_t(t) = \frac{w_t(t)}{\|w_t(t)\|}$$

dir.

Böylece M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde yuvarlanmasına  $\bar{\Phi}$  ve  $\Phi$  eksen yüzeylerinin nasıl eşlik ettiklerini aşağıdaki teorem ile ifade edebiliriz.

## 3.1.2 TEOREM:

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t) \subset M$  kapalı eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanmasına, hareketli eksen yüzeyi de sabit eksen yüzeyi üzerinde aynı  $(x_t)$  eğrisi boyunca, her t anında doğrultman vektörleri ortak olacak şekilde kaymaksızın yuvarlanarak eşli eder.

İSPAT: M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t) \subset M$  kapalı eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanması,  $y_t = f_t(x_t)$  değme ve ani pol noktalarının geometrik yeri olacak şekilde,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketi ile bellidir. Burada,

$$f_t = \begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(t) \in SO(n), \quad a(t) \in \mathbb{R}_1^n$$

dir. Herhangi bir t anında,  $S_t = (dA/dt) A^T$  anti-simetrik matrisi ile belli  $w_t$  Darboux vektörü  $\bar{\Phi}(t,1)$  ve  $\bar{\Phi}(t,m)$  eksen yüzeylerinin ortak doğrultman vektörü olduğundan,

$$w_t(t) \in T_{f_t(\bar{\Phi})} f_t(x_t) = T_{\bar{\Phi}} y_t$$

olmak zorundadır. Bu ise  $\{f_t\}$  nin,  $\bar{\Phi}(t,1)$  nin  $\bar{\Phi}(t,m)$  üzerinde kaymasız yuvarlanması olduğunu gösterir ■

## 3.1.3 TEOREM:

M nin N üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eder hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin dağılma parametreleri aynıdır.

İSPAT: Hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla,  $P_\Omega$  ve  $\bar{P}_\Omega$  ile gösterilirse,

$$\bar{P}_\Omega = \frac{\det(dy/dt, \Omega_t, \dot{\Omega}_t)}{\|\dot{\Omega}_t\|^2}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\det\left(\frac{dx}{dt}, A^T \Omega_t, \frac{d}{dt}(A^T \Omega_t)\right)}{\left\|\frac{d}{dt}(A^T \Omega_t)\right\|^2} \\
&= \frac{\det\left(A^T \frac{dy}{dt}, A^T \Omega_t, A^T \dot{\Omega}_t\right) + \det\left(\frac{dx}{dt}, A^T \Omega_t, \dot{A}^T \Omega_t\right)}{\left\|\dot{A}^T \Omega_t + A^T \dot{\Omega}_t\right\|^2}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\dot{A}^T &= -A^T \dot{A} A^T, \\
\dot{A}^T \Omega_t &= -A^T (S_t \Omega_t), \\
\dot{A}^T \Omega_t &= -A^T (w_t \wedge \Omega_t) \\
&= -\frac{1}{\|w_t\|} A^T (w_t \wedge w_t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve  $A^T$  ortogonal olduğundan

$$\bar{p}_\Omega = p_\Omega$$

elde edilir. ■

3.2 İKİ YÜZEYİN BİRBİRİ ÜZERİNDE KAPALI BİR EĞRİ BOYUNCA  
KAYMASIZ YUVARLANMASINA EŞLİK EDEN REGLE YÜZEYLERİN  
İNVARYANTLARI

M ve N yönlendirilebilir iki yüzey olsunlar. M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t) \subset M$  kapalı eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanması  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketi ile verilsin. Daha önce tanımlandığı gibi,  $(x_t)$  eğrisi boyunca M nin konneksiyonuna göre paralel olan ve M nin tanjant uzayında kalan ortonormal vektör alanları  $a_1$  ve  $a_2$  olsun.  $u = u_1 a_1 + u_2 a_2$ ,  $\|u\|=1$ , doğrultman vektörlerinin  $(x_t)$  kapalı eğrisi boyunca oluşturdukları kapalı regle yüzey

$$\varphi(t, l) = x_t(t) + l u(t), \quad l \in \mathbb{R}, \quad (3.2.1)$$

ve  $\varphi(t, l)$  regle yüzeyinin  $\{f_t\}$  kaymasız yuvarlanmasındaki resmi de

$$\bar{\varphi}(t, m) = y_t(t) + m (f_t)_*(u(t)), \quad m \in \mathbb{R} \quad (3.2.2)$$

ile verilsin. Burada  $(f_t)_*$ ,  $f_t$  nin Jakobian dönüşümünü göstermektedir. Ayrıca t-parametresi  $(x_t)$  nin yay-parametresi olarak alınmıştır.

$\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinin açılım uzunlukları sırasıyla,  $L_u$  ve  $\bar{L}_u$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \bar{L}_u &= \int_{(y_t)} \left\langle (f_t)_*(u), \frac{dy}{dt} \right\rangle dt, \quad (f_t)_* = A \\ &= \int_{(y_t)} \left\langle A(u), \frac{dy}{dt} \right\rangle dt \\ &= \int_{(y_t)} \left\langle A(u), A \frac{dx}{dt} \right\rangle dt \\ &= \int_{(x_t)} \left\langle u, \frac{dx}{dt} \right\rangle dt \\ &= L_u \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre şu sonucu ifade edebiliriz.

3.2.1 SONUÇ: M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden,

$\varphi(t, l) = x_t(t) + l u(t)$  ;  $\bar{\varphi}(t, m) = y_t(t) + m (f_t)_*(u)$   
regle yüzeylerinin açılım uzunlukları birbirine eşittir.

(3.2.1) ve (3.2.2) ile ifade edilen regle yüzeylerin dayanak eğrileri ortogonal yörünge olmak üzere, açılım açıları, sırasıyla  $\lambda_u$  ve  $\bar{\lambda}_u$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \int_{(x_1)} \left\langle d\left(\frac{dx}{dt}\right), u \wedge \left(\frac{dx}{dt}\right) \right\rangle, \\ \lambda_u &= \int_{(x_1)} \det\left(u, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) dt\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_u &= \int_{(y_1)} \det\left(Au, \frac{dy}{dt}, d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right) \\ \bar{\lambda}_u &= \int_{(y_1)} \det\left(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A} \frac{dx}{dt} + A \frac{d^2x}{dt^2}\right) dt \\ \bar{\lambda}_u &= \int_{(y_1)} \det\left(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A} \frac{d^2x}{dt^2}\right) dt \\ &\quad + \int_{(x_1)} \det\left(u, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) dt\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

bulunur. Böylece (3.2.3) ve (3.2.4) ifadelerinden dolayı aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

3.2.2 SONUÇ: M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.2.1), (3.2.2) ifadeleriyle verilen regle yüzeylerin dayanak eğrileri ortogonal yörünge ise bunların açılım açıları arasında

$$\bar{\lambda}_u = \lambda_u + \int_{(y_1)} \det\left(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A} \frac{dx}{dt}\right) dt$$

bağıntısı vardır.

(3.2.1) ve (3.2.2) ile ifade edilen  $\Psi(t,1)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla,  $P_u$  ve  $\bar{P}_u$  ile gösterilirse

$$P_u = \frac{\det\left(\frac{dx}{dt}, u, \frac{du}{dt}\right)}{\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2} \quad (3.2.5)$$

ve

$$\bar{P}_u = \frac{-\det\left(Au, \frac{dy}{dt}, \frac{d}{dt}(Au)\right)}{\left\|\frac{d}{dt}(Au)\right\|^2}$$

dir. Ayrıca

$$\frac{d}{dt}(Au) = \dot{A}u + A \frac{du}{dt}$$

olduğundan,

$$\bar{P}_u = \frac{-\det\left(u, \frac{dx}{dt}, \frac{du}{dt}\right) - \det\left(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A}u\right)}{\left\|\dot{A}u + A \frac{du}{dt}\right\|^2}$$

bulunur. (3.2.5) ifadesinin de gözönüne alınmasıyla bu regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$\bar{P}_u = \frac{\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 P_u - \det\left(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A}u\right)}{\left\|\dot{A}u + A \frac{du}{dt}\right\|^2} \quad (3.2.6)$$

bağıntısı bulunur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**3.2.3 SONUÇ:** M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.2.1), (3.2.2) denklemleriyle verilen kapalı regle yüzeylerin dralleri genellikle farklıdır. Dolayısıyla  $\Psi(t,1)$  regle yüzeyinin açılabilir olması,  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeyinin açılabilir olmasını gerektirmez.

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.2.1), (3.2.2) ifadeleriyle verilen  $\Psi(t,1)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerini göz önüne alalım.  $\Psi(t,1)$  nin  $(x_t)$  dayanak eğri-

si striksiyon çizgisi olsun. Bu takdirde  $(y_t)$  eğrisinin de  $\bar{\Psi}(t,m)$  nin striksiyon çizgisi olup olmadığını araştırabiliriz.  $(y_t)$  nin striksiyon çizgisi olması için

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dy}{dt} \right\rangle = 0$$

olmalıdır. Halbuki

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dy}{dt} \right\rangle &= \left\langle \dot{A}u + A \frac{du}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle A \frac{du}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle + \left\langle \dot{A}u, \frac{dy}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{du}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle + \left\langle \dot{A}u, \frac{dy}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

dir.  $(x_t)$  eğrisi striksiyon çizgisi olduğundan

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dy}{dt} \right\rangle = \left\langle \dot{A}u, \frac{dy}{dt} \right\rangle$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \dot{A}u &= \dot{A}(A^T A)u \\ &= S_t(Au) \\ &= w_t \wedge (Au) \end{aligned}$$

olduğundan ve  $\{f_t\}$  nin kaymasız yuvarlanma olarak verilmesinden dolayı, reel-değerli dif.bilir bir  $\kappa$  fonksiyonu için

$$w_t \wedge (Au) = \kappa \bar{\xi}_t$$

dir. Böylece

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dy}{dt} \right\rangle = \kappa \left\langle \bar{\xi}_t, \frac{dy}{dt} \right\rangle = 0$$

bulunur. O halde şu sonucu verebiliriz.

**3.2.4 SONUÇ:** M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden  $\Psi(t,l)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzey çiftinden;  $\Psi(t,l)$  nin dayanak eğrisi striksiyon çizgisi ise,  $\bar{\Psi}(t,m)$  nin dayanak eğrisi de strik-



siyon çizgisi olmak zorundadır.

Şimdi,  $M$  nin  $N$  yüzeyi üzerinde  $(x_t) \subset M$  eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden  $\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinden,  $\varphi(t, l)$  nin dayanak eğrisi  $M$  üzerinde bir geodezik ise  $\bar{\varphi}(t, m)$  nin dayanak eğrisinin de  $N$  üzerinde bir geodezik olup olmayacağına bakacağız.  $(x_t)$ ,  $M$  üzerinde bir geodezik ise,

$$D_{\frac{dx}{dt}} \frac{dx}{dt} = \nu \xi_t, \quad \nu \in C^\infty(I, \mathbb{R})$$

dir. Burada  $D, E^3$  üzerindeki konneksiyonu göstermektedir.  $N$  üzerindeki konneksiyon  $\bar{D}$  olmak üzere, Gauss denkleminden,

$$D_{\frac{dy}{dt}} \frac{dy}{dt} = \bar{D}_{\frac{dy}{dt}} \frac{dy}{dt} + \langle \bar{S}(\frac{dy}{dt}), \frac{dy}{dt} \rangle \bar{\xi}_t$$

dir. Burada  $\bar{S}$ ,  $N$  nin şekil operatörünü göstermektedir. Halbuki

$$\begin{aligned} D_{\frac{dy}{dt}} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( A \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \dot{A} \frac{dx}{dt} + A \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right) \\ &= \dot{A} \frac{dx}{dt} + A(\nu \xi_t) \\ &= \dot{A} \frac{dx}{dt} + \nu A(\xi_t) \\ &= \left( \| w_t \wedge \frac{dy}{dt} \| + \nu \right) \bar{\xi}_t \end{aligned}$$

olduğundan

$$\bar{D}_{\frac{dy}{dt}} \frac{dy}{dt} = 0$$

bulunur. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**3.2.5 SONUÇ:**  $M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.2.1), (3.2.2) denklemleri ile ifade edilen  $\varphi(t, l)$ ,  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinden;  $\varphi(t, l)$  nin  $(x_t)$  dayanak eğrisi  $M$  üzerinde geodezik ise,  $\bar{\varphi}(t, m)$  nin  $(y_t)$  dayanak eğrisi de  $N$  üzerinde geodezik olmak zorundadır.

3.3 M YÜZEYİNİN KAPALI BİR EĞRİ BOYUNCA N YÜZEYİ ÜZERİNDE  
KAYMASIZ YUVARLANMASINA EŞLİK EDEN  
BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  kapalı eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden regle yüzey çiftinin özel olarak

$$\psi(t,1) = x_t(t) + 1 T(t)$$

ve

$$\bar{\psi}(t,m) = y_t(t) + m (f_t)_*( T(t) )$$

(3.3.1)

seçilmesi halini ele alalım. Burada  $T$ ,  $(x_t)$  nin teğet vektör alanıdır.

Bu regle yüzeylerin açılım uzunlukları sırasıyla,  $L_T$  ve  $\bar{L}_T$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \bar{L}_T &= \int_{(y_t)} \left\langle A \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle dt, \\ &= \int_{(x_t)} \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle dt, \\ &= L_T \end{aligned}$$

dir. Burada  $t$ ,  $(x_t)$  eğrisinin yay-parametresini göstermektedir. Bu özel halde,  $\psi(t,1)$  ve  $\bar{\psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin dağılma parametreleri, sırasıyla,  $P_T$  ve  $\bar{P}_T$  ile gösterilsin. Buna göre

$$P_T = \bar{P}_T = 0$$

olur. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

**3.3.1 SONUÇ:** (3.3.1) ile verilen  $\psi(t,1)$  ve  $\bar{\psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin herbiri açılabiliridir. Ayrıca bu regle yüzeylerin açılım uzunlukları kendi dayanak eğrilerinin uzunluğuna eşittir

(3.3.1) ile verilen regle yüzeylerin açılım açıları, sırası ile,  $\lambda_T$  ve  $\bar{\lambda}_T$  olsun. Buna göre

$$\lambda_T = \int_{(x_t)} \langle dN, B \rangle$$

$$\lambda_T = \int_{(x_t)} \langle -k_1 T + k_2 B, B \rangle dt ,$$

$$\lambda_T = \int_{(x_t)} k_2 dt , \quad (\text{Total burulma}) ;$$

$$\bar{\lambda}_T = \int_{(y_t)} \bar{k}_2 dt$$

dir. Burada  $k_2$  ve  $\bar{k}_2$ , sırasıyla  $(x_t)$  ve  $(y_t)$  eğrilerinin burulmalarıdır. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3.2 SONUÇ: (3.3.1) ile verilen  $\Psi(t,1)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin açılım açıları kendi dayanak eğrilerinin total burulmaları ile ifade edilebilir.

Bir başka özel hal olarak; M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden,

$$\begin{aligned} \Psi(t,1) &= x_t(t) + 1 \eta(t) \\ \bar{\Psi}(t,m) &= y_t(t) + m (f_t)_* (\eta(t)) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

regle yüzey çiftini gözönüne alalım. Burada  $\eta(t)$ ,  $T_M(x_t(t))$  de kalan ve  $\langle T, \eta \rangle = 0$  ile belli olan şerit vektörüdür. Bu regle yüzeylerin açılım uzunlukları sırasıyla,  $L_\eta$  ve  $\bar{L}_\eta$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \bar{L}_\eta &= \int_{(y_t)} \left\langle \frac{dy}{dt}, A\eta \right\rangle dt , \\ &= \int_{(x_t)} \left\langle \frac{dx}{dt}, \eta \right\rangle dt , \\ &= L_\eta \quad ; \\ \bar{L}_\eta &= L_\eta = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

3.3.3 SONUÇ: (3.3.2) ile ifade edilen  $\Psi(t,1)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin herbirinin açılım uzunluğu sıfırdır.

(3.3.2) ile verilen  $\Psi(t,1)$  ve  $\bar{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin açılım açılarını sırasıyla,  $\lambda_\eta$  ve  $\bar{\lambda}_\eta$  ile gösterelim. Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda_\eta &= \int_{(x_t)} \left\langle d\left(\frac{dx}{dt}\right), \eta \wedge \frac{dx}{dt} \right\rangle , \\ &= \int_{(x_t)} \left\langle \eta, \frac{dx}{dt} \wedge \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_\eta &= \int_{(x_t)}^{+k_1} \langle \eta, B \rangle dt \quad , \\
&= \int_{(x_t)}^{-k_1} \sin \theta dt \quad , \\
&= \int_{(x_t)} b(t) dt \quad ; \\
\bar{\lambda}_\eta &= \int_{(y_t)} \bar{b}(t) dt
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

dir. Burada  $b$  ve  $\bar{b}$ , sırasıyla,  $(x_t(I), \xi_t)$  ve  $(y_t(I), \bar{\xi}_t)$  seridlerinin normal eğrilikleridir. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

3.3.4 SONUÇ:  $M$  nin  $N$  üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.3.2) ile verilen  $\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinin herbirinin açılım açısı kendi dayanak eğrilerinin total normal eğriliğine eşittir.

Daha önce tanımlandığı gibi,  $(x_t)$  boyunca  $M$  nin konneksiyonuna göre paralel iki ortonormal vektör alanı  $a_1, a_2$  olmak üzere  $\forall t \in I$  için,  $\langle \eta(t), a_2(t) \rangle = 0$  şartı sağlansın. Bu durumda,  $T=a_2$  olacağından  $(x_t)$   $M$  üzerinde bir geodezik olmak zorundadır. Dolayısıyla (3.3.3) ifadesinde  $\theta=90^\circ$  olacağından

$$\lambda_\eta = - \int_{(x_t)} k_1 dt \quad ,$$

olur. Benzer şekilde,  $\eta = a_1$  özel halinde  $(y_t)$  eğrisi de  $N$  üzerinde bir geodezik olacağından

$$\bar{\lambda}_\eta = - \int \bar{k}_1 dt \quad ,$$

bulunur. Burada,  $k_1$  ve  $\bar{k}_1$ ; sırasıyla,  $(x_t)$  ve  $(y_t)$  eğrilerinin eğrilikleridir. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

3.3.5 SONUÇ:  $\{a_1, a_2\}$ ,  $(x_t)$  boyunca  $M$  nin konneksiyonuna göre paralel ortonormal sistem ve  $a_1 = \eta$  olmak üzere; (3.3.2) ile tanımlı  $\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinin her birinin açılım açısı, kendi dayanak eğrisinin total eğriliği ile ifade edilebilir.

$M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde  $(x_t)$  kapalı eğrisi boyunca kaymasız yuvarlanması,  $y_t = f_t(x_t)$  değme noktaları ve ani pol noktaları olacak şekilde,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketiyle verilsin.  $\xi_t$ ,  $M$  nin  $(x_t)$  boyunca birim normal vektör alanını göstermek üzere, bu yuvarlanma hareketine eşlik eden,

$$\varphi(t, l) = x_t(t) + l \xi_t(t), \quad l \in \mathbb{R} \quad (3.3.4)$$

$$\bar{\varphi}(t, m) = y_t(t) + m (f_t)_* (\xi_t(t)), \quad m \in \mathbb{R}$$

regle yüzeylerinin açılım invaryantları ve bunlar arasındaki ilişkileri araştıralım.

$\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinin açılım uzunlukları sırasıyla,  $L_\xi$  ve  $\bar{L}_\xi$  ile gösterilmek üzere,

$$L_\xi = \int_{(x_t)} \left\langle \frac{dx}{dt}, \xi_t \right\rangle dt = 0 ;$$

$$\bar{L}_\xi = \int_{(y_t)} \left\langle \frac{dy}{dt}, A \xi_t \right\rangle dt = 0$$

dir. Benzer şekilde bu regle yüzeylerin açılım açılarını  $\lambda_\xi$  ve  $\bar{\lambda}_\xi$  ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} \lambda_\xi &= \int_{(x_t)} \left\langle d\left(\frac{dx}{dt}\right), \xi_t \wedge \frac{dx}{dt} \right\rangle \\ &= \int_{(x_t)} \left\langle \xi_t, \frac{dx}{dt} \wedge \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle dt \\ &= \int_{(x_t)} k_1 \langle \xi_t, B \rangle dt \\ &= \int_{(x_t)} k_1 \cos \theta dt \\ &= \int_{(x_t)} c(t) dt \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada  $k_1$ ,  $(x_t)$  eğrisinin eğriliği ve  $c(t)$  de  $(x_t(I), \xi_t)$  şeridinin geodezik eğriliğidir. Ayrıca  $\theta$ ,  $\xi_t$  ile  $B$  binormal vektörü arasındaki açıdır.

(3.3.4) ile verilen  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeyinin  $\bar{\lambda}_\xi$  açılım açısı için de,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_\xi &= \int_{(y_t)} \left\langle A \xi_t, \frac{dy}{dt} \wedge \frac{d^2y}{dt^2} \right\rangle dt \\ &= \int_{(y_t)} \left\langle \bar{\xi}_t, \bar{k}_1 \cdot \bar{B} \right\rangle dt \\ &= \int_{(y_t)} \bar{c}(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada,  $\bar{k}_1$   $(y_t)$  eğrisinin eğriliği ve  $\bar{c}(t)$  de ilgili şeridin geodezik eğriliğidir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**3.3.4 SONUÇ:** (3.3.4) ile ifade edilen  $\varphi(t, l)$  ve  $\bar{\varphi}(t, m)$  regle yüzeylerinin açılım açıları, sırasıyla,  $(x_t(I), M)$

ve  $(y_t(I), N)$  şeridlerinin total geodezik eğrilikleri ile verilebilir.

3.2.6 sonucuna göre  $(x_t(I), M)$  bir geodezik şerit ise  $(y_t(I), N)$  de bir geodezik şerit olmak zorundadır. Dolayısı ile aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

3.3.5 SONUÇ:  $(x_t)$ ,  $M$  üzerinde bir geodezik şerit ise (3.3.4) ile ifade edilen  $\psi(t, l)$  ve  $\bar{\psi}(t, m)$  regle yüzeylerinin açılım açıları sıfıra eşittir.

Son bir özel hal olarak;  $S^2$  birim küresinin  $\Sigma$  düzlemi üzerinde  $(x_t) \subset M$  kapalı eğrisi boyunca yuvarlanmasına eşlik eden

$$\begin{aligned}\psi(t, l) &= x_t(t) + l \int_t (t) , \quad l \in \mathbb{R} , \\ \bar{\psi}(t, m) &= y_t(t) + m (f_t)_* (\int_t (t)) , \quad m \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

regle yüzey çiftini göz önüne alalım. Burada,  $S^2$  nin  $\Sigma$  üzerinde yuvarlanmasını,  $\{f_t\}$  1-parametrelili hareketiyle verilmiş kabul ediyoruz.

Bu regle yüzeylerin açılım uzunlukları, sırasıyla,  $L_\Sigma$  ve  $\bar{L}_\Sigma$  ile gösterilirse,

$$L_\Sigma = \bar{L}_\Sigma = 0$$

olduğu görülür. Yine (3.3.5) ile ifade edilen  $\psi(t, l)$  ve  $\bar{\psi}(t, m)$  regle yüzeylerinin açılım açılarını sırasıyla,  $\lambda_\Sigma$  ve  $\bar{\lambda}_\Sigma$  ile gösterelim. Bazı hesaplamalardan sonra

$$\lambda_\Sigma = \int_{(x_t)} c(t) dt ,$$

$$\bar{\lambda}_\Sigma = \int_{(y_t)} \bar{k}_1 \langle e_3, \bar{B} \rangle dt$$

bulunur. Burada  $c(t)$  ve  $\bar{k}_1$ , sırasıyla  $(x_t(I), S^2)$  şeridinin geodezik eğriliği ve  $y_t(I)$  eğrisinin eğriliğidir. Halbuki  $(y_t)$  eğrisi  $\Sigma$  düzleminde kaldığından,  $\langle e_3, \bar{B} \rangle = 1$  dir. Dolayısıyla

$$\bar{\lambda}_\Sigma = \int_{(y_t)} \bar{k}_1(t) dt$$

olur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3.5 SONUÇ: (3.3.5) ile verilen  $\bar{\psi}(t, m)$  resim regle yüzeyinin açılım açısı,  $(y_t)$  nin total eğriliği ile ifade edilebilir.

### 3.4 KAYMALI YUVARLANMA HAREKETLERİNE EŞLİK EDEN REGLE YÜZEYLER VE BUNLARIN İNVARYANTLARI

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yönlendirilebilir yüzey  $M$  ve  $N$  olsun.  $M$  üzerinde tesbit edilen bir eğri,

$$\begin{aligned} x_t &: I \longrightarrow M \\ t &\longrightarrow x_t(t) \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca  $t$ ,  $x_t(I)$  eğrisinin yay-parametresi kabul edilsin.  $M$  yüzeyinin  $N$  yüzeyi üzerinde kaymasız yuvarlanmasına eşlik eden regle yüzey çiftleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$M$  üzerinde,  $(x_t)$  eğrisi boyunca  $M$  nin konneksiyonuna göre paralel iki ortonormal vektör alanı  $a_1 = a_1(t)$  ve  $a_2 = a_2(t)$  olmak üzere,  $u = u_1 a_1 + u_2 a_2$ ,  $\|u\| = 1$ , doğrultman vektörlerinin kapalı  $(x_t)$  eğrisi boyunca meydana getirdikleri regle yüzey,

$$\psi(t, l) = x_t(t) + l u(t), \quad l \in \mathbb{R} \quad (3.4.1)$$

olsun.  $M$  nin  $N$  yüzeyi üzerinde,  $(x_t)$  eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanması  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketiyle verilsin.  $\{F_t\}$  kaymalı yuvarlanmasında  $\psi(t, l)$  nin resmi olan regle yüzey de

$$\tilde{\psi}(t, m) = Y_t(t) + m \frac{1}{\|(F_t)_*(u(t))\|} (F_t)_*(u(t))$$

olsun. Diğer yandan  $F_t$  dönüşümü,

$$\begin{bmatrix} (hA)(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

matris formunda verildiğinden,

$$(F_t)_* = hA \quad ,$$

$$(F_t)_*(u) = (hA)(u) = h(Au) \quad ,$$

$$\|(F_t)_*(u)\| = h \|Au\| = h \quad (3.4.3)$$

dir. Dolayısıyla  $\varphi(t,1)$  nin  $\{F_t\}$  kaymalı yuvarlanmasındaki resmi

$$\tilde{\varphi}(t,m) = y_t(t) + m (A(u(t))) \quad , \quad m \in \mathbb{R} \quad (3.4.4)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

#### 3.4.1 TEOREM:

M nin N yüzeyi üzerinde  $(x_t) \subset M$  kapalı eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanmasına,  $\varphi(t,1)$  regle yüzeyi de  $\tilde{\varphi}(t,m)$  regle yüzeyi üzerinde kaymalı yuvarlanma ile eşlik eder.

İSPAT: M nin N üzerinde  $(x_t)$  kapalı eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanması  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketi ile verilsin.  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketinde  $\tilde{\varphi}(t,m)$  regle yüzeyi sabit iken  $\varphi(t,1)$  yüzeyi, her t anında,  $Y_t(t) = F_t(x_t(t))$   $\tilde{\varphi}(t,m)$  ile ortak noktası olacak şekilde hareket eder. Ayrıca  $Y_t(t)$  noktası,  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketinin t anındaki pol noktasıdır ve  $Y_t(t)$  noktasında  $F_t(\varphi)$  ile  $\tilde{\varphi}(t,m)$  regle yüzeylerinin teğet düzlemleri çakışıktır. Bu harekette her bir resim doğrultman vektör, başlangıçtaki pozisyonundan A ortogonal matrisinin yaptırdığı dönme ile farkeder. Yalnız başlangıç anında  $A_0 = I_3$  olacağından bu iki doğrultman vektör aynı pozisyona sahiptir. Diğer taraftan her t anında,

$$T_{F_t(\varphi)}(F_t(x_t(t))) = T_{F_t(M)}(F_t(x_t(t)))$$

ve

$$(3.4.5)$$

$$T_{\tilde{\varphi}} Y_t(t) = T_N Y_t(t)$$

dir. Ayrıca  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketi, M nin N üzerinde kaymalı yuvarlanması olduğundan,  $\{F_t\}$  nin dönme kısmına ait  $w_t$



Darboux vektörü her  $t$  anında,  $F_t(M)$  ve  $N$  nin değme noktasındaki ortak teğet düzlemlerinde bulunacaktır. Böylece, (3.4.5) den dolayı,

$$w_t \in T_{F_t}(\varphi) \quad Y_t(t) = T\tilde{\varphi} \quad Y_t(t)$$

olur. Dolayısıyla (3.4.2) ile verilen  $\{F_t\}$  1-parametrelili hareketi;  $\varphi(t,1)$  nin  $\tilde{\varphi}(t,m)$  üzerinde  $(x_t) \subset \varphi(t,1)$  kapalı eğrisi boyunca kaymalı yuvarlanmasıdır.

Şimdi,  $M$  nin  $N$  üzerinde kaymalı yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.4.1), (3.4.4) ile verilen regle yüzeylerin açılım invariantları arasındaki ilişkileri araştırabiliriz.  $\varphi(t,1)$  ve  $\tilde{\varphi}(t,m)$  nin açılım uzunlukları sırasıyla,  $L_u$  ve  $\tilde{L}_u$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} L_u &= \int_{(x_t)} \left\langle u, \frac{dx}{dt} \right\rangle dt ; \\ \tilde{L}_u &= \int_{(Y_t)} \left\langle Au, \frac{dY}{dt} \right\rangle dt , \\ \tilde{L}_u &= \int_{(Y_t)} h \left\langle u, \frac{dx}{dt} \right\rangle dt \end{aligned} \quad 3.4.6)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.4.1 SONUÇ:  $h=1$  için  $\tilde{L}_u = \bar{L}_u$  olur. Burada  $\bar{L}_u$ ,  $\varphi(t,1)$  nin kaymasız yuvarlanmadaki resminin açılım uzunluğudur

Kaymalı yuvarlanmaya eşlik eden; (3.4.1), (3.4.4) ile verilen regle yüzeylerin dayanak eğrileri ortogonal yörünge olmak üzere, bu regle yüzeylerin açılım açıları  $\lambda_u$  ve  $\tilde{\lambda}_u$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \int_{(x_t)} \det \left( u, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right) dt, \\ \tilde{\lambda}_u &= \int_{(Y_t)} \det \left( Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A} \frac{dx}{dt} + A \frac{d^2x}{dt^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$\tilde{\lambda}_u = \lambda_u + \int_{(Y_t)} \det(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A} \frac{dx}{dt}) dt \quad (3.4.7)$$

dir. (3.4.7) eşitliğinin (3.2.4) ile mukayesesinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\tilde{\lambda}_u = \bar{\lambda}_u .$$

(3.4.1) ve (3.4.4) ile verilen  $\psi(t,1)$ ,  $\tilde{\psi}(t,m)$  regle yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla,  $P_u$  ve  $\tilde{P}_u$  olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{\det\left(\frac{dx}{dt}, u, \frac{du}{dt}\right)}{\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2} \\ \tilde{P}_u &= \frac{\det\left(\frac{dY}{dt}, Au, \frac{d}{dt}(Au)\right)}{\left\|\frac{d}{dt}(Au)\right\|^2} \\ &= \frac{h \det\left(\frac{dx}{dt}, u, \frac{du}{dt}\right) + h \det\left(A \frac{dx}{dt}, Au, \dot{A}u\right)}{\left\|\dot{A}u + A \frac{du}{dt}\right\|^2} \\ &= \frac{h \left\|\frac{du}{dt}\right\| P_u + h \det(Au, A \frac{dx}{dt}, \dot{A}u)}{\left\|\dot{A}u + A \frac{du}{dt}\right\|^2} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

bulunur. Görüldüğü gibi iki regle yüzeyin dağılma parametreleri farklıdır. Böylece aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

3.4.2 SONUÇ:  $h=1$  halinde, (3.4.8) ile (3.2.6) ifadesinin mukayesesinden  $\tilde{P}_u = \bar{P}_u$  olduğu görülür.

Son olarak, (3.4.1) ile verilen  $\psi(t,1)$  regle yüzeyinin  $(x_t)$  dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olduğu zaman,  $(Y_t)$  eğrisinin de striksiyon çizgisi olup olmadığına bakacağız. Eğer,  $(x_t)$  eğrisi striksiyon çizgisi ise, (1.3.7) den dolayı

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle = 0$$

olur. Benzer şekilde  $(Y_t)$  nin de striksiyon çizgisi olması için

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dY}{dt} \right\rangle = 0$$

şartının sağlanması gerekir. O halde

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dY}{dt} \right\rangle &= \left\langle \dot{A}u + A \frac{du}{dt}, (hA) \frac{dx}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{A}u, \frac{dY}{dt} \right\rangle + h \left\langle A \frac{du}{dt}, A \frac{dx}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{A}u, \frac{dY}{dt} \right\rangle &= \left\langle w_t \wedge (Au), \frac{dY}{dt} \right\rangle \\ \left\langle \dot{A}u, \frac{dY}{dt} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$h \left\langle A \frac{du}{dt}, A \frac{dx}{dt} \right\rangle = h \left\langle \frac{du}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle = 0$$

olduğundan,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(Au), \frac{dY}{dt} \right\rangle = 0$$

elde edilir ki bu da  $(Y_t)$  eğrisinin striksiyon çizgisi olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**3.4.3 SONUÇ:** M nin N üzerinde kaymalı yuvarlanmasına eşlik eden ve (3.4.1), (3.4.4) ile verilen  $\Psi(t,1)$ ,  $\tilde{\Psi}(t,m)$  regle yüzeylerini göz önüne alalım. Eğer,  $\Psi(t,1)$  nin  $(x_t)$  dayanak eğrisi striksiyon çizgisi ise bu durumda  $\tilde{\Psi}(t,m)$  nin  $(Y_t)$  eğrisi de striksiyon çizgisidir.

KAYNAKLAR

- [1] HACISALİHOĞLU, H.H. "On the Rolling Of One Curve Or Surface Upon Another." Proceedings Of The Royal Irish Academy. Volume 71, Section A, Number 2. Dublin, 1971
- [2] HACISALİHOĞLU; H.H. " On Closed Spherical Motions." Quarterly Of Applied Mathematics. pp: 269-275, 1971.
- [3] HACISALİHOĞLU, H.H. "On the Geometry Of Motion In The Euclidean n-Space" In The Euclidean Faculty Science de l'Université d'Ankara, Ankara, Turquie, 1974.
- [4] HACISALİHOĞLU, H.H. "Diferensiyel Geometri" Baskıda.
- [5] KARAKAŞ, B. "Alt Manifoldların diferensiyel Geometri ve Kinematiklerine dair", Doktora Tezi, A.Ü.F.F. 1982
- [6] MÜLLER, H.R. "Kinematik Dersleri" A.Ü.F.Fakültesi, 1963.
- [7] NOMIZU, K. "Kinematics And Differential Geometry Of Submanifolds" Tohoku Math.Journ. 30(1978), 623-637, 1977.
- [8] YILMAZ, M. "Regle Yüzeyler Teorisi Üzerine" Doktora Tezi, K.T.Ü. Tem. Bil.Fak. 1980.