

47

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ  
VE  
YAKINSAKLIK ANALİZİ

Ali ÜZDEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1987  
MALATYA

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım suresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın Hocam; Doç.Dr.Iurgut Ziř'e ve konunun ihtiyaç duyduğum kısımlarını kendisiyle konuşup-tartışma imkanı veren sayın Arř.Grv.Selçuk KUTLUAY'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ali ZDEř

## İÇİNDKİLLR

	Sayfa
ÖZET	(i)
1. GİRİŞ	1
2. SONLU FARKI AR	2
3. PREDICTOR-CORRECTOR YÖNTEMİ	5
4. PARABOLİK DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE	9
4.1 Temel Tanımlar	9
4.2 Lemmalar	10
4.3 Yaklaşık Çözümlerin Yakınsaklığı Hakkında	17
5. MODEL PROBLEME YAKINSAKLIK ANALİZİNİN UYARLAMASI	25
6. MODEL PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	31
SONUÇ	35
KAYNAKLAR	37

(i)

ü/ü

Lees 1959 da genel şekli;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ P(x,t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] = F(x,t,U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$$

olan non-linear parabolik kısmi diferensiyel denklemler için düzeltilmiş geri fark ve Crank-Nicolson yaklaşımının analitik çözüme yakınsadığını göstermiştir[5].

Yine 1963 de Douglas ve Jones;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x,t,U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$$

şeklindeki non-linear parabolik kısmi diferensiyel denklemler için Crank-Nicolson yaklaşımı üzerine kurulan Predictor-Corrector yöntemi ile elde edilen çözümlerin, analitik çözüme yakınsadığını ispat etmişlerdir[4].

Bu çalışmada;

$$v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$$

Burgers denklemi için Crank-Nicolson yaklaşımı üzerine kurulan Predictor-Corrector çözümünün yakınsaklığı gösterildi ve denklemin sayısal çözümü yapıldı.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci, ikinci ve üçüncü bölümlerde sırasıyla; kısmi diferensiyel denklemler, sonlu farklar ve Predictor-Corrector yöntemi hakkında bilgi verilmektedir.

Dördüncü bölüm ise parabolik denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yakınsaklığıyla ilgili lemmalar ve teoremlerden oluşmak-

tadır. Çalışmanın esasını oluşturan beşinci bölümde, model problemi dördüncü bölümde verilen yakınsaklık analizi uyarlanmıştır. Altıncı bölümde de model problemin sayısal çözümü yapılarak, sonuçlar verilmiştir.

## 1. GİRİŞ

Bir kısmî türevli diferensiyel denklem, iki veya daha çok bağımsız değişken ile bir veya daha çok bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenlere göre kısmî türevlerini içeren bir denklemdir.  $n$  tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkenli, kısmî türevli denklemin genel şekli;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bağımsız değişkenleri ve  $U_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, U_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, U_{x_3} = \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, U_{x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n}$   $U$  bağımlı değişkeninin kısmî türevlerini göstermek üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, U, U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}, U_{x_1 x_1}, U_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

dir.

Bir veya birden fazla bağımlı değişkeni ve onların bir veya birden fazla bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denklem takımına, diferensiyel denklem sistemi denir.

Kısmî türevli denklemlerin fiziksel bilimlerde ve mühendislikte pek çok uygulamalarına rastlanır.

Model problem olarak alınan Burgers denklemi, turbulence teorisinin basit bir matematiksel modeli olarak ilk defa 1948 de J.M.Burgers tarafından kullanıldı[6]. Daha sonra Cole, Burgers denkleminin genel özelliklerini inceleyip, çeşitli uygulama alanları ile (turbelence ve şok dalga teorisi) bağlantı kurmaya çalıştı[3].

Bu çalışmada; model problemin çözümünde kullanılacak olan sonlu farklar ile Predictor-Corrector yöntemi hakkında bilgiler verildikten sonra, non-linear parabolik denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yakınsaklığı ile ilgili temel tanımlar, lemmalar ve teoremler verildi. Ayrıca model probleme bu verilen yakınsaklık analizi uyarlandı ve daha sonra model problemin sayısal çözümü verildi.

## 2. SONLU FARKLAR

Uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan problemlerin bir çoğunda, teorik çözümlerin yanısıra pratik yönden önemi güngeçtikçe artan sayısal yaklaşımlar da kullanılmaya başlanmıştır. Hatta bazı durumlarda, problemin analitik çözümü olsa bile sayısal yöntemlerin kullanılmasıyla çözüm, çok daha basit hale getirilebilmektedir.

Genelde, bir diferensiyel denklem halinde ifade edilebilen problemlerin sayısal çözümünde en çok kullanılan yöntem sonlu fark yaklaşımlarıdır. Sonlu farklar ile bir problemin çözülmesinde temel mantık, denklemdeki diferensiyellerin sonlu fark operatorleri ile yer değiştirmesidir. Bu yer değiştirme, Taylor serisi açılımı kullanılarak gerçekleşir. Çözüme geçmeden önce problem bölgesi geometrik şekilleri içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü, kafesin her bir kesim noktası üzerinden hesaplanır.

Sonlu fark yaklaşımları; Açık(explicit) ve Kapalı(implicit) yöntemler olmak üzere iki sınıfta incelenir. Açık yöntem,  $U(x,t+k)$  bilinmeyen değerlerini, adım - adım  $U(x,t)$  bilinen değerlerini kullanarak, direkt çözer. Dolayısıyla  $t$  yönünde non-iteratif işlem yapar. Bir non-linear probleme uygulanırsa sonuçta bir denklem sistemi verir. Ancak kararlılık söz konusu olduğunda, kısıtlamalar getirdiğinden yeterli değildir. Kapalı yöntem, kararlılık ve yakınsaklık bakımından yeterli olmasına rağmen, bir non-linear denkleme uygulandığında yine non-linear denklem sistemi vereceğinden, çözümde iteratif işlemler kullanır[1].

Eğer herhangi bir  $U(x,t)$  fonksiyonu  $x$ 'e göre dördüncü,  $t$ 'ye göre ikinci mertebeye kadar diferensiyellenebiliyorsa, bu fonksiyon için sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki gibi verilebilir:

Bunun için  $U(x,t)$  fonksiyonu,  $(x,t)$  civarında Taylor serisine açılırsa;

$$U(x+\Delta x, t) = U(x, t) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, t) + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(x, t) - \dots \quad (2.1)$$

$$U(x-\Delta x, t) = U(x, t) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, t) + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(x, t) - \dots \quad (2.2)$$

elde edilir. Buradan  $\frac{\partial U}{\partial x}$  için (2.1) den;

$$[U(x+\Delta x, t) - U(x, t)](\Delta x)^{-1} + O(\Delta x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \quad (2.3)$$

ve (2.2) den;

$$[U(x, t) - U(x-\Delta x, t)](\Delta x)^{-1} + O(\Delta x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \quad (2.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada "0", sonsuz terimli bir Taylor serisinin sonlu bir terimde kesildiğini,  $O(\Delta x)$  terimi de hatanın  $\Delta x \rightarrow 0$  olduğunda,  $\Delta x$  ile orantılı olduğunu gösterir. Buna kesme(truncation) hatası denir.

Eğer (2.1) ve (2.2) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa;

$$U(x+\Delta x, t) - U(x-\Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) - \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, t) - \dots$$

bulunur. Buradan yine  $\frac{\partial U}{\partial x}$  için

$$[U(x+\Delta x, t) - U(x-\Delta x, t)](2\Delta x)^{-1} + O((\Delta x)^2) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \quad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. (2.1) ve (2.2) denklemleri taraf tarafa



toplandığında;

$$U(x+\Delta x, t) + U(x-\Delta x, t) = 2U(x, t) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) + \frac{(\Delta x)^4}{2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(x, t) - \dots$$

bulunur. Bu eşitlikten  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  için

$$\begin{aligned} [U(x+\Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x-\Delta x, t)] (\Delta x)^{-2} + O((\Delta x)^2) \\ = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitliği elde edilir[8]. (2.3), (2.4), (2.5) ve (2.6) denklemlerine sırasıyla ileri fark, geri fark, birinci merkezî fark ve ikinci merkezî fark yaklaşımları denir.

Benzer şekilde fonksiyonun  $\frac{\partial U}{\partial t}(x, t)$  türevi için

$$[U(x, t+\Delta t) - U(x, t)] (\Delta t)^{-1} + O(\Delta t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x, t)$$

yaklaşımı verilebilir. Bu yaklaşımlar sonlu fark operatörleri ile ifade edilmek istenirse;  $\Delta x = h$  ve  $\Delta t = k$  alınarak,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \cong \Delta_x U(x, t) = h^{-1} [U(x+h, t) - U(x, t)] + O(h)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \cong \nabla_x U(x, t) = h^{-1} [U(x, t) - U(x-h, t)] + O(h)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) \cong \mathcal{J}_x U(x, t) = (2h)^{-1} [U(x+h, t) - U(x-h, t)] + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) \cong \Delta_x^2 U(x, t) = h^{-2} [U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)] + O(h^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) \cong \Delta_t U(x, t) = k^{-1} [U(x, t+k) - U(x, t)] + O(k)$$

şeklinde yazılabilir[6].

### 3. PREDICTOR-CORRECTOR YÖNTEMİ

Bir non-linear denkleme Kapalı yöntemin uygulanması ile her bir adımda elde edilen cebirsel denklemler yine non-lineerdir. Fakat bazı genelleştirilmiş şekillerine Predictor-Corrector yönteminin uygulanması ile bu non-linearlik ortadan kaldırılabilir [1], [2], [4].

Predictor-Corrector yöntemi, predictor ve corrector formüllü olmak üzere iki denklemden oluşur. Yöntemin denkleme uygulamasında önce predictor için  $(t + \frac{k}{2})$  inci adımda fonksiyon değerleri hesaplanır. Sonra da corrector yardımıyla, bu bulunan değerler kullanılarak istenen  $(t+k)$  inci adımdaki fonksiyon değerleri hesaplanır.

Douglas ve Jones genel şekli;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) \quad (3.1)$$

olan non-linear parabolik denklemler için Predictor-Corrector yöntemini incelediler [4]. Bu çalışmalarında;

$$F = f_1(x, t, U) \frac{\partial U}{\partial t} + f_2(x, t, U) \frac{\partial U}{\partial x} + f_3(x, t, U) \quad (3.1a)$$

ve

$$F = g_1(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}) \frac{\partial U}{\partial t} + g_2(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}) \quad (3.1b)$$

yapısındaki F nin iki genel sınıfı için Predictor-Corrector formüllerini verdiler. Buna göre (3.1a) şeklindeki F için predictor formülü;

$$\Delta_x^2 U(x, t + \frac{k}{2}) = f \left[ x, t + \frac{k}{2}, U(x, t), \int_x U(x, t), [U(x, t + \frac{k}{2}) - U(x, t)] / (k/2) \right] \quad (3.2)$$

ve corrector formülü;

$$\frac{1}{2}\Delta_x^2 [U(x,t+k) + U(x,t)] = F\left[x, t + \frac{k}{2}, U(x, t + \frac{k}{2}), \frac{1}{2}\mathcal{J}_x [U(x,t+k) + U(x,t)], [U(x,t+k) - U(x,t)]/k\right] \quad (3.3)$$

şeklindedir. (3.1b) şeklindeki  $F$  için predictor formülü yine (3.2) şeklindedir. Corrector formülü ise

$$\frac{1}{2}\Delta_x^2 [U(x,t+k) + U(x,t)] = F\left[x, t + \frac{k}{2}, U(x, t + \frac{k}{2}), \mathcal{J}_x U(x, t + \frac{k}{2}), [U(x,t+k) - U(x,t)]/k\right] \quad (3.4)$$

şeklindedir. Böylece (3.1) denkleminde (3.2), (3.3) veya (3.2), (3.4) predictor-corrector formüllerinin uygulanması ile her adımda, bir lineer denklem sistemi elde edilir. Her bir denklem sadece üç bilinmeyen içereceğinden (yani ya  $U(x-h, t + \frac{k}{2})$ ,  $U(x, t + \frac{k}{2})$ ,  $U(x+h, t + \frac{k}{2})$  veya  $U(x-h, t+k)$ ,  $U(x, t+k)$ ,  $U(x+h, t+k)$  bilinmeyenlerini) elde edilen sistem üçlü-diagonal olacaktır. Bu sistem,  $I_i$  bilinmeyenler olmak üzere;

$$B_1 I_1 + C_1 I_2 = D_1$$

$$A_i I_{i-1} + B_i I_i + C_i I_{i+1} = D_i \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$A_N I_{N-1} + B_N I_N = D_N$$

şeklinde ifade edilebilir. Gauss eliminasyon yöntemi kullanılarak sistemin çözümü;

$$(i) \quad b_1 = c_1/B_1 \quad ; \quad b_i = c_i/R_i \quad , \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$(ii) \quad q_1 = D_1/B_1 \quad ; \quad q_i = (D_i - A_i q_{i-1})/R_i \quad , \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$(iii) \quad I_N = q_N ; I_i = q_i - b_i I_{i-1} , i = N-1, N-2, \dots, N$$

ve

$$R_i = B_i - A_i b_{i-1}$$

şeklinde bulunur [1].

Burgers denklemi için predictor-corrector formülleri aşağıdaki gibi verilir:

Burgers denklemi (3.1a) şeklinde olduğundan, predictor formülü,

$$\begin{aligned} & v h^{-2} U(x+h, t + \frac{k}{2}) - 2v h^{-2} U(x, t + \frac{k}{2}) + v h^{-2} U(x-h, t + \frac{k}{2}) \\ & = 2k^{-1} U(x, t + \frac{k}{2}) - 2k^{-1} U(x, t) + (2h)^{-1} U(x, t) U(x+h, t) \\ & \quad - (2h)^{-1} U(x, t) U(x-h, t) \end{aligned}$$

dir. Elde edilecek denklem sisteminin katsayılar matrisinin, pozitif tanımlılığına garanti altına almak için, denklem  $v h^{-2}$  ile bölünür ve  $A_1 = -2[1+(vk)^{-1}h^2]$ ,  $A_2 = (2v)^{-1}h$  ve  $A_3 = -4hk^{-1}$  alınırsa;

$$\begin{aligned} & U(x+h, t + \frac{k}{2}) + A_1 U(x, t + \frac{k}{2}) + U(x-h, t + \frac{k}{2}) \\ & = A_2 [U(x+h, t) + A_3 - U(x-h, t)] U(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Corrector formülü ise

$$\begin{aligned} & [B_3 - 2^{-1} U(x, t + \frac{k}{2})] U(x+h, t+k) + B_1 U(x, t+k) \\ & \quad + [B_3 + 2^{-1} U(x, t + \frac{k}{2})] U(x-h, t+k) \\ & = -[B_3 - 2^{-1} U(x, t + \frac{k}{2})] U(x+h, t) + B_2 U(x, t) \\ & \quad - [B_3 + 2^{-1} U(x, t + \frac{k}{2})] U(x-h, t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada da yukardaki nedenden,  $B_1 = -2h(vh^{-2}+k^{-1})$   
 $B_2 = 2h(vh^{-2}-k^{-1})$  ve  $B_3 = vh^{-1}$  olarak seçilmiştir[6].

## 4. PARABOLİK DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

## 4.1. Temel Tanımlar

$R$  ;  $0 < x < 1$  ,  $0 < t < 1$  eşitsizlikleri ile tanımlanan dikdörtgen bölgeyi ve  $\bar{R}$  de  $R$  nin kapanışını gösterebiliriz.

$B_0$  ( $0 \leq x \leq 1$  ,  $t=0$ ) ,  $B_1$  ( $x=0$  ,  $0 < t < 1$ ) ,  $B_2$  ( $x=1$  ,  $0 < t < 1$ ) doğru parçalarının birleşimi olan  $B$  cümlesine  $R$  nin sınırı denir.

$\bar{R}_{hk}$  :  $x=nh$  ( $n=0,1,\dots,N$ ) ,  $t=mk$  ( $m=0,1,\dots,M$ ) koordinat doğrularının kesişimi ile tanımlanan,  $\bar{R}$  ile örtülen dikdörtgen kafes bölge olsun. Burada  $h=1/N$  ,  $k=1/M$  dir.

$B_{hk}^i = B_i \cap \bar{R}_{hk}$  ( $i=0,1,2$ ) cümlelerinin birleşimine  $\bar{R}_{hk}$  kafesinin sınırı,  $R_{hk} = \bar{R}_{hk} - B_{hk}$  cümlesine  $\bar{R}_{hk}$  nin içi ve  $\sigma_m = \{(x,t) : (x,t) \in \bar{R}_{hk} , t=mk\}$  cümlesinde kafesin  $m$  inci satırı denir.

Ayrıca  $\sigma_m^-$  ve  $\sigma_m^+$  cümleleride

$$\sigma_m^- = \sigma_m \cup (0, mk) \cup (1, mk)$$

ve

$$\sigma_m^+ = \sigma_m \cup (1, mk)$$

şeklinde tanımlansın.  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlı bir  $\vartheta$  fonksiyonu için ileri, geri ve merkezî fark denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\vartheta_x(x,t) = [\vartheta(x+h,t) - \vartheta(x,t)]/h$$

$$\vartheta_{\bar{x}}(x,t) = [\vartheta(x,t) - \vartheta(x-h,t)]/h$$

$$\vartheta_t(x,t) = [\vartheta(x,t+k) - \vartheta(x,t)]/k$$

$$\vartheta_{\bar{t}}(x,t) = [\vartheta(x,t) - \vartheta(x,t-k)]/k$$

$$\vartheta_{\bar{x}\bar{x}}(x,t) = [\vartheta_{\bar{x}}(x,t) + \vartheta_x(x,t)]/2$$

$$= [\vartheta(x+h,t) - \vartheta(x-h,t)]/2h$$

Buradan ileri ve geri fark denklemleri arasında basit fakat önemli bir bağıntıyı;

$$\vartheta_x(x-h, t) = \vartheta_x(x, t)$$

$$\vartheta_t(x, t-k) = \vartheta_t(x, t)$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir.

Herhangi G bölgesinde tanımlı bir  $\vartheta$  fonksiyonu için supremum normu;

$$\|\vartheta\|_G = \sup_G |\vartheta(x, t)|$$

şeklinde verilebilir.  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlı fonksiyonlar için uygun normlar da aşağıdaki gibi verilsin:

$$(\|\widetilde{\vartheta}\|_0^m)^2 = h \sum_{\sigma_m} \vartheta^2$$

$$(\|\vartheta\|_0^m)^2 = h \sum_{\sigma_m} \vartheta^2$$

$$(\|\vartheta\|_1^m)^2 = (\|\vartheta\|_0^m)^2 + (\|\vartheta_x\|_0^m)^2$$

Ayrıca,  $\vartheta$  fonksiyonu için  $\vartheta^*$ ,  $\vartheta_x \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\vartheta^* = \max_{\bar{R}_{hk}} \vartheta$  ve  $\vartheta_x = \min_{\bar{R}_{hk}} \vartheta$  olarak seçilsin.

#### 4. 2. Lemmalar

LEMMA 1:

f ve g 1,2,...,M tamsayıları üzerinde tanımlı non-negatif fonksiyonlar, ayrıca g azalmayan olsun. Eğer C bir sabit ve

$$f_m \leq g_m + Ck \sum_{r=1}^{m-1} f_r, \quad k > 0 \quad \text{ise} \quad f_m \leq g_m \exp(Ckm) \quad \text{dir.}$$

İSPAT :

$\forall s > 0$  tamsayısı için

$$f_m \leq g_m \sum_{j=0}^s \frac{(Ckm)^j}{j!} + Ck \frac{(Ckm)^s}{s!} \sum_{r=1}^{m-1} f_r \quad (4.2.1)$$

dir.

$$f_{\bar{m}} = \max_{1 \leq r \leq m} f_r$$

ile gösterilirse, (4.2.1) den

$$\begin{aligned} f_m &\leq g_m \sum_{j=0}^s \frac{(Ckm)^j}{j!} + Ck \frac{(Ckm)^s}{s!} f_{\bar{m}} \\ &< g_m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ckm)^j}{j!} + \frac{(CkM)^{s+1}}{s!} f_{\bar{m}} \\ f_m &= g_m \exp(Ckm) + \frac{(CkM)^{s+1}}{s!} f_{\bar{m}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $q$  azalmayan olduğundan,

$$f_{\bar{m}} \leq g_m \exp(Ckm) + \frac{(CkM)^{s+1}}{s!} f_{\bar{m}}$$

yazılabilir.  $s$  nin yeterince büyük değeri için  $\frac{(CkM)^{s+1}}{s!} < 1$  vardır.  $0$  zaman yukarıdaki eşitlikten;

$$\left[ 1 - \frac{(CkM)^{s+1}}{s!} \right] f_{\bar{m}} \leq g_m \exp(Ckm)$$

bulunabilir. Buradan  $s \rightarrow \infty$  için

$$f_m \leq f_{\bar{m}} \leq g_m \exp(Ckm)$$

elde edilir.



LEMMA 2:

$\vartheta$  fonksiyonu,

$$A(x,t)\vartheta_{\bar{t}}(x,t) = [B(x,t)\vartheta_x(x,t)]_{\bar{x}} + G(x,t) \quad (4.2.2)$$

fark denkleminin  $R_{hk}$  da bir çözümü olsun. Eğer  $\vartheta$ ,  $B_{hk}$  da sıfır ve  $A_x > 0$ ,  $B_x > 0$  ise, yeterince küçük  $k$  için yalnız  $1$ ,  $B_x$ ,  $B_x^*$ ,  $A_x$  ve  $\|\vartheta_{\bar{x}}\|_{R_{hk}}$  ya bağlı.

$$(\|\vartheta\|_1^m)^2 \leq Q \sum_{r=1}^m (\|\tilde{G}\|_0^r)^2 k$$

olacak şekilde bir  $Q$  sabiti vardır.

İSPAT :

$$(B\vartheta_x)_{\bar{x}} = B\vartheta_{x\bar{x}} + B_x\vartheta_{\bar{x}}$$

olduğundan (4.2.2) fark denklemi;

$$\bar{A}\vartheta_{\bar{t}} = \vartheta_{x\bar{x}} + \bar{G} \quad (4.2.3)$$

şekline indirgenir. Burada

$$\bar{A} = A/B \quad (4.2.4)$$

$$\bar{G} = [G + B_x\vartheta_{\bar{x}}]/B \quad (4.2.5)$$

dır. (4.2.3) denklemi  $\vartheta_{\bar{t}}hk$  ile çarpılır ve  $\bar{R}_{hk}$  nin bütün iç noktaları üzerinden toplama geçilirse,

$$hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}\bar{G} = hk \sum_{R_{hk}} \bar{A}(\vartheta_{\bar{t}})^2 - hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}\vartheta_{x\bar{x}} \quad (4.2.6)$$

yazılabilir.  $\vartheta$ ,  $B_{hk}$  üzerinde sıfır olduğundan  $\vartheta_{\bar{t}}$ ,  $B_{hk}^2$  üzerinde sıfır-  
dır. Bundan dolayı, eğer toplam bölgesi  $D_{hk} = R_{hk} \cup B_{hk}^2$  ya genişletilirse (4.2.6) nin sağ tarafındaki ikinci toplamın değeri değişmez.

0 halde (4.2.6),

$$hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \bar{G} = hk \sum_{R_{hk}} \bar{A} (\vartheta_{\bar{t}})^2 - hk \sum_{D_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \vartheta_{x\bar{x}} \quad (4.2.7)$$

şeklinde yazılabilir.  $\vartheta$ ,  $\bar{R}_{hk}$  nin dışında da keyfi olarak tanımlanmış olabilir. Böyle bir  $\vartheta$  fonksiyonu için

$$(\vartheta_{\bar{t}} \vartheta_x)_{\bar{x}} = \vartheta_{\bar{t}} \vartheta_{x\bar{x}} + \vartheta_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{x}\bar{t}}$$

ve

$$(\vartheta_{\bar{x}}^2)_{\bar{t}} = 2\vartheta_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{x}\bar{t}} - k\vartheta_{\bar{x}\bar{t}}^2$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan,

$$\vartheta_{\bar{t}} \vartheta_{x\bar{x}} = (\vartheta_{\bar{t}} \vartheta_x)_{\bar{x}} - \frac{1}{2} (\vartheta_{\bar{x}}^2)_{\bar{t}} - \frac{k}{2} \vartheta_{\bar{x}\bar{t}}^2 \quad (4.2.8)$$

elde edilir. Bu ifade (4.2.7) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \bar{G} &= hk \sum_{R_{hk}} \bar{A} \vartheta_{\bar{t}}^2 + hk \sum_{D_{hk}} \frac{k}{2} \vartheta_{\bar{x}\bar{t}}^2 + hk \sum_{D_{hk}} \frac{1}{2} (\vartheta_{\bar{x}}^2)_{\bar{t}} \\ &\quad - hk \sum_{D_{hk}} (\vartheta_{\bar{t}} \vartheta_x)_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

olur.  $\vartheta$ ,  $B_{hk}^1$  ve  $B_{hk}^2$  üzerinde sıfır olduğundan

$$hk \sum_{D_{hk}} (\vartheta_{\bar{t}} \vartheta_x)_{\bar{x}} = k \sum_{t=1}^I [\vartheta_{\bar{t}}(1,t) \vartheta_x(1,t) - \vartheta_{\bar{t}}(0,t) \vartheta_x(0,t)] = 0$$

dır. Böylece (4.2.9),

$$\begin{aligned} hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \bar{G} &\geq \bar{A}_* hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 + \frac{1}{2} hk \sum_{D_{hk}} (\vartheta_{\bar{x}}^2)_{\bar{t}} \\ &= \bar{A}_* hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 + \frac{h}{2} \sum_{\bar{m}} \vartheta_x^2 \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

şekline indirgenir. Burada,

$$\bar{A}_* = (A/B)_* \geq A_*/B^*$$

dır. (4.2.10) eşitsizliği biraz kuvvetlendirilirse,

$$\bar{A}_* \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 \leq \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \bar{G}$$

olur. Bunun üzerine Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\bar{A}_* \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 \leq \left( \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{R_{hk}} \bar{G}^2 \right)^{1/2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\bar{A}_* \left( hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 \right)^{1/2} \leq \left( hk \sum_{R_{hk}} \bar{G}^2 \right)^{1/2} \quad (4.2.11)$$

yazılabilir. Yine (4.2.10) eşitsizliğinden benzer düşünceyle

$$\left( \|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^M \right)^2 = h \sum_{\sigma_M} \vartheta_{\bar{x}}^2 \leq 2hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}} \bar{G}$$

yazılır ve Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left( \|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^M \right)^2 \leq 2 \left( hk \sum_{R_{hk}} \vartheta_{\bar{t}}^2 \right)^{1/2} \left( hk \sum_{R_{hk}} \bar{G}^2 \right)^{1/2} \quad (4.2.12)$$

elde edilir. Böylece (4.2.11) ve (4.2.12) den,

$$\left( \|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^M \right) \leq \frac{2}{\bar{A}_*} hk \sum_{R_{hk}} \bar{G}^2 \leq 2 \frac{B^*}{\bar{A}_*} k \sum_{r=1}^M \left( \|\tilde{G}\|_0^r \right)^2 \quad (4.2.13)$$

bulunur.

$$\vartheta(x,t) = \vartheta(x,t) - \vartheta(0,t) = h \sum_{y=h}^x \vartheta_{\bar{x}}(y,t)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} h \sum_{\sigma_M} \vartheta^2 &= h \sum_{\sigma_M} \left( h \sum_{y=h}^X \vartheta_{\bar{x}}(y, \tau) \right)^2 \leq h \sum_{\sigma_M} \left( h \sum_{y=h}^X \vartheta_{\bar{x}}^2(y, \tau) \right) \\ &\leq h \sum_{\sigma_M} \vartheta_{\bar{x}}^2 = (\|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^M)^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.2.13) eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$(\|\vartheta\|_1^M)^2 \leq \frac{4B^*}{A_*} k \sum_{r=1}^M (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2$$

elde edilir.  $M$  keyfi olduğundan  $M=m$  seçilirse;

$$(\|\vartheta\|_1^m)^2 \leq \frac{4B^*}{A_*} k \sum_{r=1}^m (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2 \quad (4.2.14)$$

olur. (4.2.5) den yararlanarak;

$$\|\widetilde{G}\|_0^r \leq \frac{1}{B_*} \|\widetilde{G}\|_0^r + \frac{1}{B_*} \|B_{\bar{x}}\|_{R_{hk}} \|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^r$$

yazılabilir. Buradan da

$$(\|\widetilde{G}\|_0^r)^2 \leq 2(B_*)^{-2} (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2 + 2(B_*)^{-2} (\|B_{\bar{x}}\|_{R_{hk}})^2 (\|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^r)^2$$

elde edilip (4.2.14) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\|\vartheta\|_1^m)^2 &\leq \frac{8B^*}{A_* B_*^2} k \sum_{r=1}^m (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2 \\ &\quad + \frac{8B^*}{A_* B_*^2} \|B_{\bar{x}}\|_{R_{hk}}^2 k \sum_{r=1}^m (\|\vartheta_{\bar{x}}\|_0^r)^2 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

bulunur. Eğer (4.2.15) de özel olarak

$$f_m = (\|\vartheta\|_1^m)^2, \quad C = \frac{8B^*}{A_* B_*^2} \|B_{\bar{x}}\|_{R_{hk}}^2$$

$$g_m = \frac{8B^*}{A_* B_*^2} k \sum_{r=1}^m (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2$$

seçilirse Lemma 1 in sağlandığı görülür. Böylece yeterince küçük  $k$  için

$$(\|\vartheta\|_1^m)^2 \leq Qk \sum_{r=1}^m (\|\widetilde{G}\|_0^r)^2$$

bulunur. Burada,

$$Q = \frac{8B^*}{A_* B_*^2} \exp \frac{CT}{1-kC}$$

dır. Eğer (4.2.2) denkleminde  $[B(x,t)\vartheta_x(x,t)]_{\bar{x}}$  ifadesi yerine daha genel olan,

$$\alpha [B(x,t)\vartheta_x(x,t)]_{\bar{x}} + (1-\alpha) [B(x,t)\vartheta_x(x,t-k)]_{\bar{x}}$$

alınırsa Lemma 2 genelleştirilmiş olur. Burada  $\alpha$ ,  $2\alpha-1 \leq 0$  şartını sağlayan reel bir parametredir.

LEMMA 3 :

$\vartheta$ ,  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlı,  $B_{hk}$  da sıfır olan herhangi bir fonksiyon

ise

$$\|\vartheta\|_{\bar{R}_{hk}}^2 \leq \frac{1}{4} \max_{1 \leq m \leq M} (\|\vartheta\|_1^m)^2$$

dir.

İSPAT :

$\vartheta$ ,  $B_{hk}$  üzerinde sıfır olduğundan,

$$2\vartheta(x,t) = h \sum_{y=h}^x \vartheta_{\bar{x}}(y,t) - h \sum_{y=x+h}^{Nh} \vartheta_{\bar{x}}(y,t)$$

dir. Bu eşitlik

$$2\vartheta(x,t) = h \sum_{y=h}^{Nh} \text{sgn}(y-x) \vartheta_{\bar{x}}(y,t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\text{sgnz} = \begin{cases} 1 & z \leq 0 \\ -1 & z > 0 \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Yukardaki eşitliğe Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$4\vartheta^2(x,t) \leq h \sum_{y=n}^{Nh} [\text{sgn}(y-x)]^2 \vartheta_x^2(y,t) = h \sum_{y=n}^{Nh} \vartheta_x^2(y,t)$$

elde edilir ve

$$4\vartheta^2(x,t) \leq (\|\vartheta\|_1^m)^2 \quad (t=mk)$$

yazılabildiğinden,

$$\|\vartheta\|_{R_{tk}}^2 \leq \frac{1}{4} \max_{1 \leq m \leq M} (\|\vartheta\|_1^m)^2$$

bulunur.

#### 4. 3. Yaklaşık Çözümlerin Yakınsaklığı Hakkında

Genel yapısı;

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(x,t) \frac{\partial U}{\partial x}) = F(x,t,U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) \quad (4.3.1)$$

olan non-linear parabolik kısmi diferensiyel denklemi gözönüne alınsın.  $U(x,t)$ ,  $R$  de (4.3.1) denklemini sağlayan,  $\bar{R}$  de dördüncü mertebeye kadar diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun.  $P(x,t)$  de  $\bar{R}$  de üçüncü mertebeye kadar diferensiyellenebilen ve  $P_*$ ,  $P^*$  sabit sayılar olmak üzere;

$$0 < P_* < P(x,t) < P^* \quad (4.3.2)$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olarak verilsin.

Yine (4.3.1) in sağ tarafındaki  $F(x,t,z,p,q)$  fonksiyonu;  $z$ ,  $p$  ve  $q$  ya göre en azından birinci merteye türeve sahip, ayrıca  $a^*$  ve  $a_*$  sabit sayılar olmak üzere bütün  $z$ ,  $p$  ve  $q$  değerleri için

$$0 < a_* \leq \frac{\partial F}{\partial q} \leq a^* \quad (4.3.3)$$

olsun.  $U(x,t)$  nin yaklaşım fonksiyonu;  $R_{hk}$  da

$$[B(x,t)\vartheta_x(x,t)]_{\bar{x}} = F[x,t,\vartheta(x,t-k),\vartheta_x(x,t-k),\vartheta_t(x,t)] \quad (4.3.4)$$

düzeltilmiş geri fark denklemini sağlayan,  $B_{hk}$  da  $U(x,t)$  ile uyuşan ve  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlanan bir  $\vartheta(x,t)$  ile gösterilsin. (4.3.4) denkleminde

$$B(x,t) = P(x + \frac{h}{2}, t) \quad (4.3.5)$$

olarak seçilmiştir. Yukardaki şartları da gözönüne alarak, yaklaşık çözümün yakınsaklığı hakkında aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 1 :

$P$ ,  $F$  ve  $U$  yukardaki şartları sağlayan fonksiyonlar olacak şekilde verildiğinde, yeterince küçük bütün  $k$  lar için

$$\|U - \vartheta\|_{\bar{R}_{hk}} = O(k+h^2)$$

dir.

İSPAT :

$z(x,t) = U(x,t) - \vartheta(x,t)$  olacak şekilde seçelim. Yukardaki kabullerden dolayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(P(x,t) \frac{\partial U}{\partial x}) &= \frac{1}{h} [P(x + \frac{h}{2}, t) \frac{\partial U}{\partial x}(x + \frac{h}{2}, t) \\ &\quad - P(x - \frac{h}{2}, t) \frac{\partial U}{\partial x}(x - \frac{h}{2}, t)] + O(h^2) \end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x + \frac{h}{2}, t) = U_x(x+h, t) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x - \frac{h}{2}, t) = U_x(x-h, t) + O(h^2)$$

olduğundan;

$$\frac{\partial}{\partial x}(P(x, t) \frac{\partial U}{\partial x}) = [B(x, t)U_x(x, t)]_{\bar{x}} + O(h^2) \quad (4.3.6)$$

elde edilir. (4.3.6) nin kullanılması ile (4.3.1);

$$\begin{aligned} [B(x, t)U_x(x, t)]_{\bar{x}} = & F(x, t, U(x, t), \frac{\partial U}{\partial x}(x, t), \frac{\partial U}{\partial t}(x, t)) \\ & + O(h^2) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

olur. Yine

$$U(x, t) = U(x, t-k) + U(k) \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = U_{\bar{x}}(x, t-k) + O(k+h^2) \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = U_{\bar{t}}(x, t) + O(k) \quad (4.3.10)$$

olduğundan;

$$F(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) = F(x, t, U(x, t-k), U_{\bar{x}}(x, t-k), U_{\bar{t}}(x, t)) + O(k+h^2)$$

yazılabilir. Böylece (4.3.7) denklemini

$$\begin{aligned} [B(x, t)U_x(x, t)]_{\bar{x}} = & F(x, t, U(x, t-k), U_{\bar{x}}(x, t-k), U_{\bar{t}}(x, t)) \\ & + O(k+h^2) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$



olur. (4.3.11) den (4.3.4) çıkarılır ve ortalama değer teoremi uygulanırsa:

$$\begin{aligned} [B(x,t)z_x(x,t)]_{\bar{x}} &= \frac{\bar{\partial F}}{\partial z} z(x,t-k) + \frac{\bar{\partial F}}{\partial p} z_{\hat{x}}(x,t-k) \\ &+ \frac{\bar{\partial F}}{\partial q} z_{\hat{t}}(x,t) + O(k+h^2) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

denklemi elde edilebilir. (4.3.12) denkleminde; birinci, ikinci ve dördüncü terimlerin toplamını  $G(x,t)$  ile, üçüncü terimin katsayısını da  $A(x,t)$  ile gösterilirse

$$G(x,t) = \frac{\bar{\partial F}}{\partial z} z(x,t-k) + \frac{\bar{\partial F}}{\partial p} z_{\hat{x}}(x,t-k) + O(k+h^2) \quad (4.3.13)$$

$$A(x,t) = \frac{\bar{\partial F}}{\partial q} \quad (4.3.14)$$

yazılabilir. Böylece (4.3.12) denklemi,

$$[B(x,t)z_x(x,t)]_{\bar{x}} = A(x,t)z_{\hat{t}}(x,t) + G(x,t) \quad (4.3.15)$$

şekline indirgenir. (4.3.3) ve (4.3.14) denklemlerinden;  $A_* \geq a_* > 0$  olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca (4.3.2) ve (4.3.5) den

$$0 < P_* \leq B(x,t) \leq P^* \quad \text{ve} \quad \|B_{\bar{x}}\|_{R_{hk}} \leq \left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_R$$

yazılabilir.  $z(x,t)$   $B_{hk}$  da sıfır değerini aldığından, Lemma 2 nin bütün şartları sağlanır. O halde yalnız  $T$ ,  $P_*$ ,  $P^*$ ,  $a_*$  ve  $\|\partial P / \partial x\|_R$  ye bağlı bir  $Q$  sabiti vardır. Öyleki

$$(\|z\|_1^m)^2 \leq Qk \sum_{r=1}^m (\|\tilde{G}\|_0^r)^2 \quad (4.3.16)$$

ile sınırlıdır. Ayrıca (4.3.15) den

$$(\|\widetilde{G}\|_0^r)^2 \leq Q_0 (k+h^2)^2 + Q_1 (\|z\|_1^{r-1})^2 \quad (4.3.17)$$

yazılabileceğinden, (4.3.16) ve (4.3.17) eşitsizliklerinin kullanılmasıyla;

$$(\|z\|_1^m)^2 \leq QQ_0 \Gamma (k+h^2)^2 + QQ_1 \sum_{r=1}^{m-1} (\|z\|_1^r)^2 k \quad (4.4.18)$$

elde edilir. (4.3.18) ifadesi Lemma 1 den dolayı yeterince küçük  $k$  lar için

$$(\|z\|_1^m)^2 \leq QQ_0 \Gamma (k+h^2)^2 \exp(QQ_1 \Gamma) \quad (4.3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak (4.3.19) ve Lemma 3 den

$$\|U-\vartheta\|_{\bar{R}_{hk}} = \|z\|_{\bar{R}_{hk}} \leq \frac{1}{2} QQ_0 \Gamma \exp\left(\frac{1}{2} QQ_1 \Gamma\right) [k+h^2]$$

elde edilir.

Aynı şekilde, Yine  $U(x,t)$ ; (4.3.1) non-linear parabolik denkleminin  $R$  de, dördüncü mertebeye kadar türevlenebilen bir çözümü,  $U(x,t)$  nin yaklaşım fonksiyonu  $\vartheta(x,t)$  ise;  $R_{hk}$  da

$$\begin{aligned} [B(x,t)\vartheta_x(x,t)]_{\bar{x}} + [B(x,t)\vartheta_x(x,t-k)]_{\bar{x}} &= 2F(x,t-\frac{k}{2}), \\ [\vartheta(x,t) + \vartheta(x,t-k)]/2, [\vartheta_{\hat{x}}(x,t) + \vartheta_{\hat{x}}(x,t-k)]/2, \\ \vartheta_{\hat{t}}(x,t) & \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Crank-Nicolson yapısındaki fark denklemini sağlayan, ayrıca  $B_{hk}$  da  $U(x,t)$  ile uyuşan ve  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlanan bir fonksiyon olsun. Burada

$$B(x,t) = P(x+\frac{h}{2}, t-\frac{k}{2})$$

olarak seçilmiştir. Benzer şekilde, yukardaki şartları da gözönüne alarak, Crank-Nicolson yaklaşımının yakınsıklığı hakkında aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 2 :

$P$ ,  $F$  ve  $U$  yukardaki şartları sağlayan fonksiyonlar olarak verildiğinde, yeterince küçük bütün  $k$  lar için

$$\|U-\vartheta\|_{\bar{R}_{hk}} = O(k^2+h^2)$$

dir.

İSPAT :

$z(x,t) = U(x,t) - \vartheta(x,t)$  olacak şekilde seçilsin. Yukardaki kabullerden dolayı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (P \frac{\partial U}{\partial x})(x, t - \frac{k}{2}) &= \frac{1}{h} [P(x + \frac{h}{2}, t - \frac{k}{2}) \frac{\partial U}{\partial x}(x + \frac{h}{2}, t - \frac{k}{2}) \\ &\quad - P(x - \frac{h}{2}, t - \frac{k}{2}) \frac{\partial U}{\partial x}(x - \frac{h}{2}, t - \frac{k}{2})] + O(h^2) \end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{h} [U(x + \frac{h}{2}, t) - U(x - \frac{h}{2}, t)] + O(h^2)$$

$$U_x(x, t - \frac{k}{2}) = \frac{1}{2} U_x(x, t) + \frac{1}{2} U_x(x, t - k) + O(k^2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial x} (P \frac{\partial U}{\partial x})(x, t - \frac{k}{2}) &= [B(x, t) U_x(x, t)]_{\bar{x}} + [B(x, t) U_x(x, t - k)]_{\bar{x}} \\ &\quad + O(k^2 + h^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t - \frac{k}{2}) = \frac{1}{2} U_{\hat{x}}(x, t) + \frac{1}{2} U_{\hat{x}}(x, t-k) + O(k^2+h^2)$$

$$U(x, t - \frac{k}{2}) = \frac{1}{2} U(x, t) + \frac{1}{2} U(x, t-k) + O(k^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \frac{k}{2}) = U_{\hat{t}}(x, t) + O(k^2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} [B(x, t)U_x(x, t)]_{\bar{x}} + [B(x, t)U_x(x, t-k)]_{\bar{x}} &= 2F(x, t - \frac{k}{2}), \\ [U(x, t)+U(x, t-k)]/2, [U_{\hat{x}}(x, t)-U_{\hat{x}}(x, t-k)]/2, \\ U_{\hat{t}}(x, t) &+ O(k^2+h^2) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

yazılabilir. (4.3.21) den (4.3.20) çıkarılır ve ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} [B(x, t)z_x(x, t)]_{\bar{x}} + [B(x, t)z_x(x, t-k)]_{\bar{x}} \\ = A(x, t)z_{\hat{t}}(x, t) + G(x, t) \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

denklemi elde edilir. Yine Teorem 1 de olduğu gibi

$$\begin{aligned} G(x, t) = 2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} [z(x, t)-z(x, t-k)]/2 + 2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial p} [z_{\hat{x}}(x, t)-z_{\hat{x}}(x, t-k)]/2 \\ + O(k^2+h^2) \end{aligned}$$

ve

$$A(x, t) = 2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial q}$$

olarak seçilmiştir.

İspatın bundan sonraki kısmı, Lemma 2 ve Lemma 2 nin genelleştirilmiş şekli kullanılarak Teorem 1 e benzer olarak yapılır.

Sonuç olarak (4.3.1) şeklindeki non-lineer parabolik kısmi diferensiyel denklemlerin nümerik çözümünde, (4.3.4) fark denklemi kullanılırsa elde edilen yaklaşık çözüm analitik çözüme  $O(k+h^2)$  hatası ile, (4.3.20) fark denklemi kullanılırsa elde edilen yaklaşık çözüm, analitik çözüme  $O(k^2+h^2)$  hatası ile yakınsar.

## 5. MODEL PROBLEME YAKINSAKLIK ANALİZİNİN UYARLAMASI

Model problem olarak; bir boyutlu

$$v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (5.1)$$

Burgers denklemini,  $0 < x < 1$  ,  $0 < t \leq 1$  bölgesinde

$$U(x,0) = \sin(\pi x)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0$$

başlangıç-sınır değerleri ile gözönüne alarak, daha önce 4. bölümde verilen analizi uyarlayalım:

$\bar{R}$  ;  $0 < x < 1$  ,  $0 < t \leq T$  ile tanımlanan  $R$  dikdörtgen bölgesinin kapanışını versin.

$$B_0 : 0 \leq x \leq 1 , t=0$$

$$B_1 : x=0 , 0 < t \leq T$$

$$B_2 : x=1 , 0 < t \leq T$$

doğru parçaları  $R$  bölgesinin sınırları, ayrıca  $\bar{R}_{hk}$  ile de  $x=nh$  ( $n=0,1,\dots,N$ ),  $t=mk$  ( $m=0,1,\dots,M$ ) koordinat doğrularının kesim yerleri ile tanımlanan dikdörtgen kafes gösterilsin.

$U(x,t)$ ,  $R$  bölgesinde (5.1) denklemini sağlayan,  $\bar{R}$  de  $x$ 'e göre dördüncü ve  $t$  ye göre ikinci mertebeye kadar türevlenebilen bir fonksiyon olsun. (5.1) denkleminin predictor formülü:

$$\begin{aligned} & v h^{-2} \left[ \vartheta(x+h, t + \frac{k}{2}) - 2\vartheta(x, t + \frac{k}{2}) + \vartheta(x-h, t + \frac{k}{2}) \right] \\ & = 2k^{-1} \left[ \vartheta(x, t + \frac{k}{2}) - \vartheta(x, t) \right] \\ & + (2h)^{-1} \vartheta(x, t) \left[ \vartheta(x+h, t) - \vartheta(x-h, t) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde verilebileceğinden  $\bar{U}(x,t); \bar{R}_{1,k}$  da tanımlı,  $R$  nin sınırları üzerinde  $U(x,t)$  ile uyuşan bir yaklaşım fonksiyonudur.

(5.1) diferensiyel denkleminin çözümü ile (5.2) fark denkleminin çözümü arasındaki fark;

$$z(x,t) = U(x,t) - \bar{U}(x,t)$$

olarak seçilsin.  $U(x,t)$  çözümü için Taylor serisi açılımından faydalanılarak

$$\begin{aligned} & \nu h^{-2} \left[ U(x+h, t + \frac{k}{2}) - 2U(x, t + \frac{k}{2}) + U(x-h, t + \frac{k}{2}) \right] \\ & = 2k^{-1} \left[ U(x, t + \frac{k}{2}) - U(x, t) \right] \\ & \quad + (2h)^{-1} U(x, t) \left[ U(x+h, t) - U(x-h, t) \right] \\ & \quad + O(k+h^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

fark denklemi elde edilebilir [7], [1].

Eğer (5.3) den (5.2) çıkarılır, ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \nu h^{-2} \left[ z(x+h, t + \frac{k}{2}) - 2z(x, t + \frac{k}{2}) + z(x-h, t + \frac{k}{2}) \right] \\ & = (2h)^{-1} \left[ U(x+h, t) - U(x-h, t) \right] z(x, t) \\ & \quad + (2h)^{-1} \left[ z(x+h, t) - z(x-h, t) \right] U(x, t) \\ & \quad + 2k^{-1} \left[ z(x, t + \frac{k}{2}) - z(x, t) \right] + O(k+h^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur ve sonlu fark operatörleri yardımıyla (5.4),

$$\nu \Delta_x^2 z(x, t + \frac{k}{2}) = \mathcal{D}_x U(x, t) z(x, t) + U(x, t) \mathcal{D}_x z(x, t) + \Delta_t z(x, t) + O(k+h^2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yine bu eşitliğin birinci, ikinci ve dördüncü terimlerinin toplamı;

$$G(x,t) = \int_x U(x,t)z(x,t) + U(x,t) \int_x z(x,t) + O(k+h^2) \quad (5.5)$$

ile gösterilirse, eşitlik

$$v \Delta_x^2 z(x, t + \frac{k}{2}) = \Delta_t z(x, t) + G(x, t) \quad (5.6)$$

şekline indirgenir.  $z(x, t)$  fonksiyonu sınırlar üzerinde sıfır olduğundan, Lemma 2 gereğince

$$v ( \|z(x, t)\|_1^m )^2 \leq Qk \sum_{r=1}^m ( \| \widetilde{G}(x, t) \|_0^r )^2 \quad (5.7)$$

olecek şekilde yalnız  $T$  ye bağlı bir  $Q$  sabiti vardır. (5.5) eşitliğinden,

$$( \| \widetilde{G}(x, t) \|_0^r )^2 \leq Q_0 (k+h^2)^2 + Q_1 ( \|z(x, t)\|_1^{r-1} )^2$$

elde edilebileceğinden (5.7) eşitsizliği,

$$v ( \|z(x, t)\|_1^m )^2 \leq QQ_0 T (k+h^2)^2 + QQ_1 \sum_{r=1}^{m-1} ( \|z(x, t)\|_1^r )^2 k \quad (5.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Lemma 1 den yeterince küçük  $k$  için

$$v ( \|z(x, t)\|_1^r )^2 \leq QQ_0 T (k+h^2)^2 \exp(QQ_1 T)$$

elde edilir. Sonuç olarak, Lemma 3 den

$$\|U(x, t) - \emptyset(x, t)\| = \|z(x, t)\| \leq \frac{1}{2} QQ_0 T \exp\left(\frac{1}{2} QQ_1 T\right) [k+h^2]$$

bulunur.



Benzer şekilde  $U(x,t)$  yine,  $R$  bölgesinde (5.1) denklemini sağlayan,  $R$  de  $x$ 'e göre dördüncü ve  $t$  ye göre ikinci mertebeye kadar türevlenebilen bir fonksiyon olsun. (5.1) denkleminin corrector formülü:

$$\begin{aligned}
& \nu h^{-2} [\vartheta(x+h, t+k) - 2\vartheta(x, t+k) + \vartheta(x-h, t+k) + \vartheta(x+h, t) - 2\vartheta(x, t) + \vartheta(x-h, t)] \\
& = 2k^{-1} [\vartheta(x, t+k) - \vartheta(x, t)] \\
& \quad + (2h)^{-1} \vartheta(x, t + \frac{k}{2}) [\vartheta(x+h, t+k) - \vartheta(x-h, t+k) \\
& \quad + \vartheta(x+h, t) - \vartheta(x-h, t)] \quad (5.9)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden  $\vartheta(x,t)$ ,  $\bar{R}_{hk}$  da tanımlı ve  $R$  nin sınırları üzerinde  $U(x,t)$  ile uyuşan bir yaklaşım fonksiyonudur.

(5.1) diferensiyel denkleminin çözümü ile (5.9) fark denkleminin çözümleri arasındaki fark yine

$$z(x,t) = U(x,t) - \vartheta(x,t)$$

olarak seçilsin.  $U(x,t)$  çözümü için Taylor serisi açılımından;

$$\begin{aligned}
& \nu h^{-2} [U(x+h, t+k) - 2U(x, t+k) + U(x-h, t+k) + U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)] \\
& = 2k^{-1} [U(x, t+k) - U(x, t)] \\
& \quad + (2h)^{-1} U(x, t + \frac{k}{2}) [U(x+h, t+k) - U(x-h, t+k) \\
& \quad + U(x+h, t) - U(x-h, t)] + O(k^2 + h^2) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

fark denklemi elde edilebilir. Eğer (5.10) dan (5.9) çıkarılır ve ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& v h^{-2} [z(x+h, t+k) - 2z(x, t+k) + z(x-h, t+k) + z(x, t+k) - 2z(x, t) + z(x-h, t)] \\
&= (2h)^{-1} [U(x+h, t+k) - U(x-h, t+k) + U(x-h, t) \\
&\quad - U(x-h, t)] z(x, t + \frac{k}{2}) + (2h)^{-1} [z(x+h, t+k) \\
&\quad - z(x-h, t+k) + z(x+h, t) - z(x-h, t)] U(x, t + \frac{k}{2}) \\
&\quad + Zk^{-1} [z(x, t+k) - z(x, t)] + O(k^2+h^2) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

bulunur ve sonlu fark operatörleri kullanılarak (5.11)

$$\begin{aligned}
v \Delta_x^2 [z(x, t+k) + z(x, t)] &= d_x [U(x, t+k) + U(x, t)] z(x, t + \frac{k}{2}) \\
&\quad + d_x [z(x, t+k) + z(x, t)] U(x, t + \frac{k}{2}) \\
&\quad + 2\Delta_t z(x, t) + O(k^2+h^2) \quad (5.12)
\end{aligned}$$

şekline indirgenir. Eğer (5.12) denkleminin birinci, ikinci ve dördüncü terimlerinin toplamı;

$$\begin{aligned}
G(x, t) &= d_x [U(x, t+k) + U(x, t)] z(x, t + \frac{k}{2}) + d_x [z(x, t+k) + z(x, t)] U(x, t + \frac{k}{2}) \\
&\quad + O(k^2+h^2)
\end{aligned}$$

ile gösterilirse, (5.12) denklemi

$$v \Delta_x^2 [z(x, t+k) + z(x, t)] = 2\Delta_t z(x, t) + G(x, t) \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 2 ve Lemma 2 nin genelleştirilmiş şekli kullanılarak predictor için yapılan benzer işlemler sonucu,

$$||U(x,t) - \varnothing(x,t)|| = ||z(x,t)|| \leq O(k^2+h^2)$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak (5.1) denkleminin nümerik çözümünde, (5.2) predictor denklemi kullanılırsa elde edilen  $\varnothing(x,t)$  yaklaşık çözümü  $U(x,t)$  analitik çözümüne  $O(k+h^2)$  hatası ile, (5.9) corrector denklemi kullanılırsa elde edilen  $\varnothing(x,t)$  yaklaşık çözümü,  $U(x,t)$  analitik çözümüne  $O(k^2+h^2)$  hatası ile yakınsar.

## 6. MODEL PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

$$v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

Burgers denkleminin,

$$U(x,0) = \text{Sin}(\pi x)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0$$

başlangıç ve sınır değerleriyle sayısal çözümü için; verilen bölgeyi  $x=ih$  ( $i=1,2,\dots,N$ ),  $t=jk$  ( $j=1,2,\dots,M$ ) koordinat doğruları yardımıyla dikdörtgen kafeslere böldük. Yine  $U(x,t)$  analitik çözümüne karşı gelen  $\varphi(x,t)$  yaklaşık çözümünün herhangi bir grid nokta üzerindeki değeri;  $h=1/N$ ,  $k=T/M$  olmak üzere  $\varphi(ih,jk)=\varphi_{i,j}$  ile gösterdik. Böylece Burgers denkleminin (5.2) predictor ve (5.9) corrector formülleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} & v h^{-2} \left[ \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2\varphi_{i,j+\frac{1}{2}} + \varphi_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right] \\ & = 2k^{-1} \left[ \varphi_{i,j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i,j} \right] + (2h)^{-1} \varphi_{i,j} \left[ \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & v h^{-2} \left[ \varphi_{i+1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j} \right] \\ & = 2k^{-1} \left[ \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j} \right] + (2h)^{-1} \varphi_{i,j} \frac{1}{2} \left[ \varphi_{i+1,j+1} \right. \\ & \quad \left. - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j} \right] \end{aligned}$$

şeklinde alınarak, yukarıda sonlu farklarla ifade edilen sistemin

bilgisayar programını yazdık ve Elazığ Fırat Üniversitesi Bilgi İşlem Merkezinde çözdük.

Çözümler;  $\epsilon = 10^{-4}$  seçilerek

önce

$$v = 0.0001, h = 1/20, k = 5/1000$$

sonra

$$v = 0.0001, h = 1/15, k = 5/1000$$

değerleri için Double Precision yapılarak elde edildi.

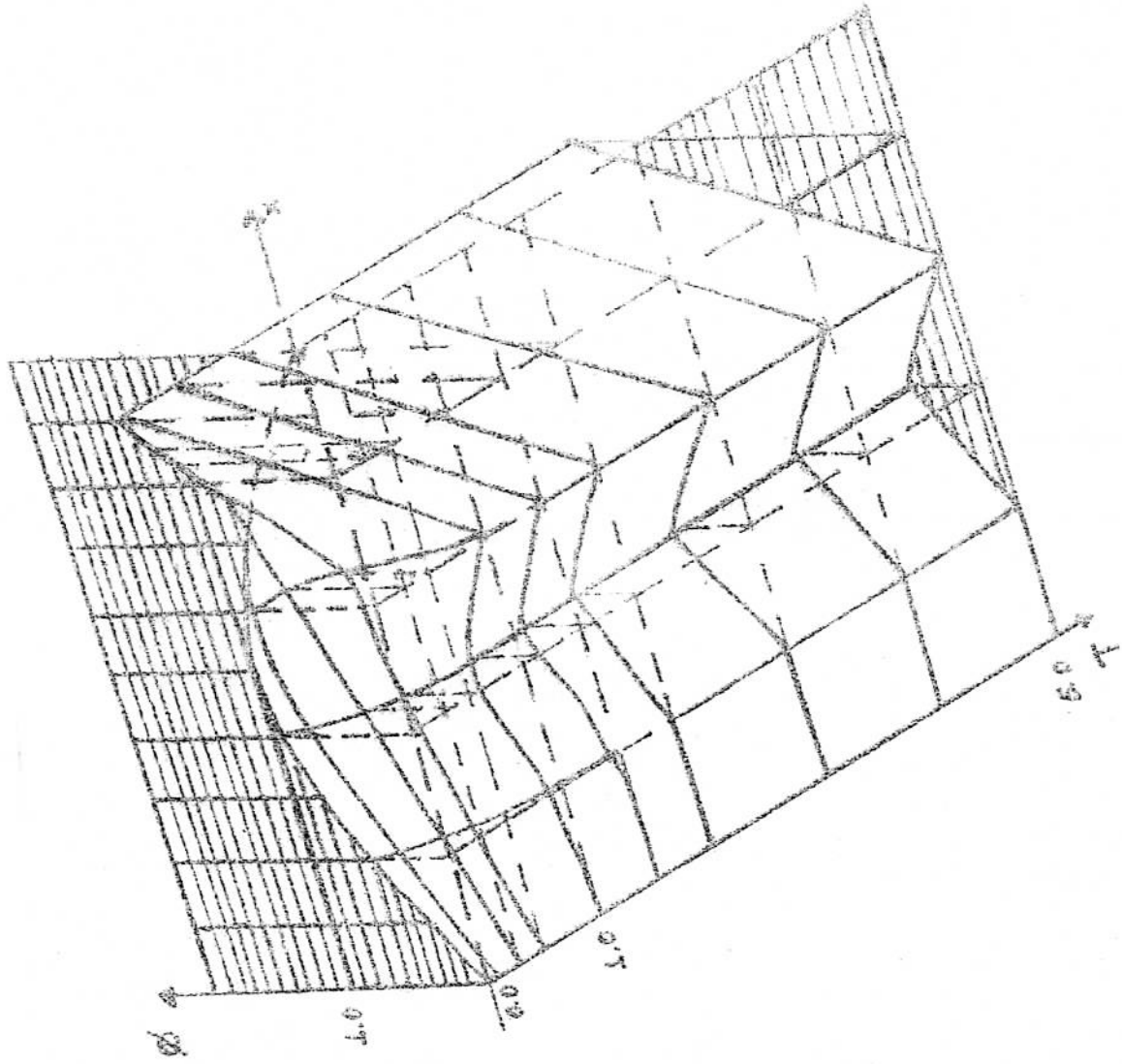
Sonuçlar Tablo 1 ve Tablo 2 de verilmiştir.

$t \backslash x$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
1	0.038	0.076	0.114	0.152	0.190	0.227	0.269	0.287	0.395	0.251	0.740	0.115	1.332	0.050	1.950	0.033	2.635	0.024	3.784
2	0.022	0.043	0.066	0.081	0.134	0.070	0.324	0.030	0.624	0.021	0.950	0.023	1.340	0.025	1.848	0.028	2.605	0.017	4.201
3	0.015	0.030	0.052	0.036	0.158	0.017	0.351	0.016	0.572	0.020	0.855	0.022	1.224	0.023	1.740	0.021	2.568	0.014	4.543
4	0.012	0.021	0.051	0.016	0.164	0.012	0.316	0.016	0.513	0.019	0.773	0.021	1.127	0.021	1.645	0.019	2.525	0.013	4.806
5	0.010	0.015	0.050	0.010	0.152	0.012	0.282	0.016	0.461	0.019	0.703	0.020	1.043	0.020	1.556	0.018	2.474	0.012	5.000

Tablo 1.

$t \backslash x$	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.56	0.63	0.70	0.77	0.84	0.91	0.98
1	0.053	0.107	0.160	0.211	0.279	0.276	0.474	0.333	0.410	1.025	0.056	2.250	0.017	3.407
2	0.030	0.060	0.100	0.101	0.151	0.299	0.030	0.873	0.012	1.458	0.014	2.230	0.012	3.606
3	0.022	0.039	0.068	0.111	0.023	0.436	0.009	0.843	0.012	1.384	0.013	2.170	0.011	3.756
4	0.017	0.031	0.036	0.143	0.007	0.428	0.009	0.795	0.012	1.320	0.012	2.119	0.010	3.880
5	0.014	0.028	0.017	0.157	0.006	0.403	0.009	0.752	0.011	1.260	0.012	2.073	0.009	3.985

Tablo 2.



Burgers Denkleminin Predictor-Corrector Çözümü

## SONUÇ

Program;

1.  $v = 0.0001$  ,  $h = 0.05$  ,  $k = 0.005$  ,  $r = 2$  ve
  2.  $v = 0.0001$  ,  $h = 0.07$  ,  $k = 0.005$  ,  $r = 1.02$
- değerleri için çalıştırıldı.

Bulunan değerlerden;  $v$  nin bu değeri için her iki çözümün birbirleriyle tamamen uyduğu, çözüm grafiğinin aynı karakteristik özelliği gösterdiği, dolayısıyla çözümün  $h$  değerine bağlı olmadığı gözlenmiştir. Elde edilen çözümler, Miller'in  $v = 0.0001$  ,  $h = 0.2$   $k = 0.02$  değerleri için explicit yöntemle elde ettiği çözümle uyumaktadır. Miller'in ve bizim çözümlerin her ikisinde de  $t$ 'nin küçük değerleri için ilk şok,  $x = 0.5$  civarında meydana gelmekte,  $t$  artarken şok dalgalarında sağa doğru kayarak dikleşmekte ve nihayet  $x = 1$  civarında maksimum değere ulaşmaktadır. Yine  $t$  artarken şokun sol tarafında  $U$  değerleri azalmaktadır.

Çözümlerimizde maksimum şok,  $h = 0.05$  için  $x = 0.95$  de meydana gelmekte ve  $U(0.95,5) = 5$  değerini almaktadır.  $h = 0.07$  için ise  $x = 0.98$  de meydana gelmekte ve  $U(0.98,5) = 3.984$  değerini almaktadır.

Teorik olarak,  $h$  ve  $k$  nin küçük değerleri için analitik çözüme daha iyi bir yaklaşım elde edileceği düşüncesiyle,  $h = 0.01$   $k = 0.0004$  ,  $v = 0.0001$  seçerek çözüm aradık. Ancak kullanılan bilgisayarın yapısından dolayı kesin sonuca ulaşamadık. Fakat Miller in aynı değerler için Predictor-Corrector yöntemiyle ulaştığı  $U(0.95,5) = 4.9$  maksimum değer, bizim 1. de elde ettiğimiz maksimum değerle tamamen uyduğu görülür.

$v = 1$  alındığında şok dalgalarının gözükmeyeceği,  $v$  nin



daha küçük değerleri için ise çözüm grafiğinin yukarda söylenen özellikleri, yani maksimum değere  $x = 1$  civarında ulaşılabacağı yine Miller'in çalışmasında görülmüştür[6].

Buradan,  $h$  ve  $k$  ne olursa olsun, Predictor-Corrector yöntemi ile elde edilen çözümlerin,  $x < 0.5$  bölgesinde önemsiz osilasyonlar yaptığı, asıl şokun  $x = 0.5$  civarında meydana geldiği ve sağa doğru gittikçe büyüyerek  $x = 1$  civarında maksimum değeri aldığı söylenebilir.

Bunların dışında;  $v$ 'nin ve  $r = kh^{-2}$  nin değişik değerleri için Predictor-Corrector yöntemiyle elde edilen sonuçlarla, Açık yöntemden elde edilen sonuçların bir karşılaştırması yapılabilirdi.

Ancak yapılan çalışmanın Yüksek Lisans Çalışması için yeterli olduğu kanaatine varıldığından ve bilgisayar imkanının yetersiz oluşundan dolayı bu çalışmalar yapılamadı. Fakat sonuçta her iki çözümün de birbirleriyle uydukları kolayca tahmin edilebilir[6].

## KAYNAKLAR

- [1] Ames, W. F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, 1965.
- [2] Ames, W. F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, London, 1969.
- [3] Cole, J. D., Q. Appl. Math., 9, 225, 1951.
- [4] Douglas, J. Jr. and Jones, B. F., J. Soc. Ind. Appl. Math., 11, 195, 1963.
- [5] Lees, M., J. Soc. Ind. Appl. Math., 7, 167, 1959.
- [6] Miller, E. L., Predictor Corrector Studies of Burgers Model of Turbulent Flow, Master's Thesis, University of Delaware, Newark, Delaware, 1966.
- [7] Mitchell, A. R., Computational Methods in Partial Differential Equations, New York, 1976.
- [8] Şenel, M., Nümerik Analiz, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, 1983.