73

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİREKT VARYASYONEL-ARDIŞIK YAKLAŞTIRMA YÖNTEMİ
İLE
NON-LİNEER BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

ALİ ÖZDEŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne"

İş bu çalışma, jüriniz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabül edilmiştir.

Başkan ~~Prof.Dr. Orhan ÖZER~~

Üye Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

Üye Doç.Dr. Turgut ÖZİŞ

Onay

Yukardaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..9./.4./1991

Prof.Dr.A. [illegible] BOZCUK

SEVGİLİ EŞİM VE OĞ

ÖZET

Burgers denkleminin çözümü, genelde, Hopf-Cole dönüşümü yardımı ile elde edilebilmektedir. Bu dönüşüm yardımıyla, non-lineer Burgers denklemi, lineer ısı denklemine indirgenmekte ve analitik olarak çözülebilmektedir. Bu yaklaşım altında geliştirilen çeşitli teknikler le, farklı model problemler ve farklı sınır şartları için çok sayıda çözümler literatürde yer almaktadır. Fakat bu tekniklerin çoğunda, sınır ve başlangıç değerleri kullanımı, bu yaklaşımların hemen hepsinin azami bir sınır içinde kaldığını göstermektedir. Bu sınırlama belki, Hopf-Cole dönüşümünden sonra indirgenmiş denkleme Direkt Varyasyonel yöntemlerin yaklaşımı kullanılarak giderilebilir.

Bu çalışmada, bu açıdan yaklaşılarak, non-lineer Burgers difuzyon denklemine Direkt varyasyonel yöntem uygulanmış, bir ardışık yaklaştırma yöntemi geliştirilmiş ve limit durumu için çözüm, çok basit kapalı bir fonksiyon halinde, çok farklı sınır ve başlangıç şartlarına uygulanabilecek şekilde verilmiştir.

ABSTRACT

Analytical solutions to Burgers equation are often available through use of the Hopf-Cole transformation. The transformation to the linear heat-conduction equation of course renders the non-linear Burgers equation analytically solvable and a great variaty of solutions have been developed following this technique. However, the boundary and initial conditions must be similarly transformed into the transformed space and this is where the limitations of the tecnnique expose themselves. This limitation may be overcomed by the application of direct variational methods to this kind of problems after Hopf-Cole transformation. This thesis, in this sense,generates an approximate solution to Burgers non-linear diffusion equation and a very simple limiting solution is given.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli Hocam Sayın Doç.Dr.Turgut ÖZİŞ' e ve Matematik Bölümü 'ün değerli elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Burgers denklemi, girdaplı akımlara kendi ismindeki modeli vermesinden ve vizkositeli sıvılarda şok dalgaları ile ilgili oluşturulan yaklaştırma (aproximate) teorisinden dolayı araştırmacılar arasında oldukça ilgi çekmiş bir denklemdir..

Tarihsel olarak, Burgers denklemine v bir parametre ve $U=U(x,t)$ verilen bölgede olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = v\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1}$$

şeklinde ilk defa Bateman'ın[5] makalesinde rastlanmıştır. Bateman'ın (1) denkleminin iki temel çözümünü verdiği makalesinde, ayrıca üzerinde çalışılmasının ilginç olabileceğini belirttiği bu denklemin bu denklemin, bugün, yukarda belirtilen teorilere ek olarak birbirinden çok farklı alanlarda; sayılar teorisi, gaz dinamiği, ısı transferi elastisiti vs. çeşitli uygulamalarına da sıkça raslanmaktadır. Bu yönüde dikkate alınırsa Bateman'ın o yıllarda verdiği mesajın ne kadar yerinde olduğu daha iyi anlaşılabilir. Fakat,1939-65 arasında Burgers' ın[7],[8],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15], yazdığı makalelerde, girdaplı akımların çok çeşitli yönleri incelendiğinden ve bu konuda bir teori oluşturulmasındaki katkısından dolayı (1) denklemi o tarihlerden sonra Burgers denklemi olarak anılmaya başlamıştır.

Yine bu denklemin en önemli özelliklerinden birisi, conveksiyon ve diffuzyon arasındaki çekişmeyi en iyi temsil eden matematik formlu olmasıdır. Dolayısıyla, girdaplı akımların yanında, distortion problemlerinde ve ayrıca distortionlar tarafından oluşturulan dağılma tabakalarının bozunmasında da çokça kullanılan bir denklemdir. Fakat denklemin en çarpıcı yanı $U(x,t)$, (1) denkleminin çözümü olmak üzere

$$U = -(2v/\theta)(\partial\theta/\partial x) \tag{2}$$

dönüşümü ile $\theta(x,t)$ lineer diffusyon denklemi:

$$\partial\theta/\partial t = \nu(\partial^2\theta/\partial x^2) \tag{3}$$

nin çözümünü verebilmesidir. Bu da denklemin ne kadar esnek bir yapıya sahip olduğunun diğer bir kanıtını oluşturduğu açıktır. Burgers denklemi ile ilgili olarak verilen (2) dönüşümü ilk olarak Lagerstrom Cole ve Trilling[26] in teknik raporlarında görülmüş, daha sonra bu çalışma Cole[20] tarafından makale olarak yayınlanmıştır. Yine aynı yıllarda (2) dönüşümü, bağımsız olarak Hopf[25] tarafından da verilmiş, ayrıca denklemin tam ve açık çözümüde bu makalede yer almıştır. Bu dönüşümler Burgers[15] in benzerlik dönüşümleri; $U = t^{-1/2}S(z)$, $z=(4\nu t)^{-1/2}$ altında yaptığı çözümlerde de görülmektedir. Bunun yanında Burgers denkleminin benzerlik dönüşümü altındaki yapısı, $S(z)$, ayrıca bir Riccati denklemidir.(Bakınız, Rodin[34]). Diğer yandan bu dönüşümün daha genel hidrodinamik uygulamaları Ames[1], Chu[19] ve Shvets ve Meleshko[35] tarafından incelenmiştir. Bunun yanında bazı kısıtlamalar altında Burgers denkleminin acustik analogu Mendousse[28] tarafından araştırılmış, Su ve Gardner[38]; Lighthill[27]; Soluyan ve Khokhlow[36] ve Hayes[22] bu denklemin çeşitli yönlerini değişik kısıtlamalar altında incelemişlerdir. Daha başka, denklemin sonlu-amplitülü transvers hidromağnetik dalgalarla olan bağıntısı Goldberg[21] tarafından araştırılmış, izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilgili yapısı Pospelov[31] tarafından ortaya çıkarılmıştır. Burgers denkleminin sayılar teorisi ile ilgisi van der Pol[40] ın incelemeleri ile ortaya konmuştur. 1970 lere kadar Burgers denklemi ile ilgili literatür ve yaklaşık otuzbeş farklı çözümü içeren tabloları Benton ve Platzman[6] ın yaptıkları kapsamlı çalışmalarından ve verdikleri referanslardan kolayca görülebilir.

Görüldüğü gibi 70 li yıllara kadar bu önemli denklemin yalnız analitik yönleri ve çeşitli disiplinler ile olan kısıtlı çözümlerine yer verilmiştir. Daha sonraki yıllarda, teknolojinin gelişiminede paralel olarak hızlı ve büyük hafızalı bilgisayarların gelişmesi üzerine bu denklem üzerindeki çalışmalar bir nebze yön değiştirmiş, çeşitli sayısal yöntemler altındaki çözümleri araştırılır olmuştur. Öncüler arasında Varoğlu ve Finn[39] Burgers denkleminin uzay-zaman değişimini sonlu-elemanlarla sağlamaya çalışmış ve ağırlıklı kalanlar formülasyonu(weighted residual formulation) ile birleştirerek Burgers denkleminin hiperbolik karakteristiklerini incelemişlerdir. Bu yöntemle Burgers denkleminin viskosite katsayısının çok küçükten büyüğe değişim göstermesi durumunda sayısal çözümlerinin yeterli olduğunu ifade etmişler ve bu iddialarını çeşitli örneklerle açıklamışlardır.

Yine, Coldwell, Wanless ve Cook[18] aynı denklemi piecewize polinom yaklaştırması ile sonlu-elemanlar kullanarak çözüme kavuşturmuşlar, çözümlerinin v nin küçük değerleri için yetersiz olduğunu ifade etmişlerdir. Daha sonra, Burgers denkleminin standart sonlu-farklar kullanılarak, method of lines yöntemi ile adi diferensiyel denklemlere indirgenip, dinamik sistemler teorisi açısından incelemesi yapılmıştır.(Bakınız,Aref ve Darıpa[4]). Ayrıca Ames ve Nucci[2] akışkan denklemlerinin analizini grup metodu yaklaşımı ile incelediklerinde, bu yöntemle Burgers denklemini de incelemişlerdir.

Saunders, Coldwell ve Wanless[37] "complemantary variational" prensibe dayanan varyasyonel-ardışık yaklaşımı, non-lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerine uygulamışlar, bu arada Burgers denkleminin "steady-state" hale indirgenmiş yapısını bu yaklaşımla çözmüşler, çözümlerinin hesaplama ölçüleri içinde yeterli olduğunu verdikleri örneklerle göstermişlerdir.

Sonolarak, Ali, Gardner ve Gardner[3] Burgers denklemini Galerkin yaklaşımı altında sonlu-elemanlarla çözmüşler, [39] dekinden farklı interpolasyon fonksiyonları kullanarak çeşitli sayısal çözümler elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, Burgers denklemi için bir yarı-analitik çözüm yöntemi verilmiş, denklemde Hopf-Cole dönüşümü uygulandıktan sonra direkt varyasyonel yöntem (Ritz yöntemi) kullanarak kapalı bir çözüm formülü elde edilmiştir. Daha sonra, bulunan kapalı çözüm formülünün nümerik davranışını incelemek amacıyla; viskositenin ve bağımsız değişkenlerin çeşitli değerleri için grafikler çizilmiş ve çözümün çeşitli değerlerine karşı gelen nümerik yorumlar verilmiştir.

I. BÖLÜM

I.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, varyasyonel yaklaşımların yapı taşları olan fonksiyonel ve operatör kavramlarına kısaca değinilecek ve bunlarla ilgili teoremlerden bahsedilecektir. Ayrıca varyasyonel yaklaşımlar için bir uzay (H_A uzayı) oluşturulacak, bu uzayda bir fonksiyonelin minumumundan sözedilecektir.

I.1.1 Tanım: Herhangi iki M_1 ve M_2 cümlesi verilsin. Her $U \in M_1$ elemanına bir $V \in M_2$ elemanını karşılık getiren; $V = AU$ şeklinde tanımlı A kuralına M_1 den M_2 ye bir operatör denir. [33]

I.1.2 Tanım: Eğer bir A operatörünün D_A tanım cümlesi lineer ve eğer D_A dan keyfi $U_1, U_2, \ldots, U_n$ elemanları ve keyfi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayıları için

$$A(a_1U_1+a_2U_2+\ldots+a_nU_n) = a_1AU_1+a_2AU_2+\ldots+a_nAU_n$$

eşitliği sağlanıyorsa A ya lineerdir denir. [33]

I.1.3. Tanım: P, Q metriği ile bir metrik uzay olsun. Bu uzayı tekrar kendi içine dönüştüren bir A operatörü; eğer her $x,y \in P$ çifti için, 0 $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde, $Q(Ax,Ay) \leqslant \alpha Q(x,y)$ eşitsizliğini gerçeklerse A ya bir büzülme denir. [33]

Şimdi nümerik yöntemlerle çok yakın ilişkisi olan bir teorem ifadesi verelim:

I.1.1 Teorem: (Banach Sabit Nokta Teoremi) A, tam metrik uzay P de bir büzülme operatörü olsun. Bu durumda, $x=Ax$ denklemi bu uzayda bir ve yalnız bir tek çözüme sahibtir. Yani, tam olarak bir $U \in P$ vardırki $U=AU$ sağlanır ve bu eleman $U_n \in P$ elemanlarının bir dizisinin limiti olarak elde edilebilir. Yani, $U=\lim_{n\to\infty} U_n$ ve burada $U_{n+1}=AU_n$ $(n=1,2,\ldots,)$ dir. ($U_1 \in P$ elemanı keyfi olarak seçilebilir). [33]

I.1.4 Tanım: Eğer her $U_n \in D_A$ elemanlar dizisi için $\lim_{n \to \infty} AU_n = AU_o$ bağıntısı sağlanıyorsa A operatörüne $U_o \in D_A$ noktasında süreklidir denir.

I.1.5 Tanım: Eğer her $U \in D_A$ için $||AU|| \leq K||U||$ sağlanacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı bulmak mümkün ise A operatörüne D_A da sınırlıdır denir. [33]

Bu şekildeki K sayılarının en küçüğüne A operatörünün normu diyeceğiz. Aşikar olarak $||AU|| \leq ||A|| \, ||U||$ dır.

I.1.6 Tanım: Eğer her $U, V \in D_A$ eleman çifti için $(AU,V)=(U,AV)$ özelliği sağlanıyorsa A ya D_A da simetriktir denir. [33]

I.1.7 Tanım: Eğer bir A operatörü simetrik ve her $U \in D_A$ için $(AU,U) \geq 0$ ve $(AU,U)=0 \Longrightarrow U=0$ bağıntılarını sağlarsa A ya D_A da pozitiftir denir. Ayrıca eğer her $U \in D_A$ için $(AU,U) \geq C^2||U||^2$ olacak şekilde $C>0$ sabiti mevcutsa bu takdirde A ya pozitif tanımlı denir. [33]

I.1.8 Tanım: Eğer bir F operatörü tanım bölgesi D_F yi reel veya komplex sayılar içine dönüştürürse bu operatöre sırasıyla reel veya komplex fonksiyonel denir.

Bir fonksiyonel operatörlerin özel bir durumu olduğundan, dolayısıyle, operatörler için verilen yukardaki tüm ifadeler fonksiyoneller içinde geçerlidir.

Ayrıca fonksiyoneller için çok önemli bir teoremin ifadesini de verelim:

I.1.2 Teorem: (Riesz Teoremi) Bir H Hilbert uzayında her sınırlı lineer F fonksiyoneli $FU=(U,V)$ şeklinde ifade edilebilir. Üstelik, $||V||=||F||$ dir. [33] Burada V, H nın, F fonksiyoneli ile tek olarak tanımlanmış elamanıdır.

Bu teorem ile her $U \in H$ için geçerli olacak şekilde bir $V \in H$ elemanının varlığı garanti edilmiş olur. Bununla birlikte bir F fonksiyoneli verildiği zaman genelde bu elemanı bulmak kolay değildir.

Şimdi

$$AU = f \qquad (1.1.1)$$

formundaki denklemler gözönüne alınsın. Burada A belirli bir operatör (çoğunlukla diferensiyel operatör), f belirli bir Hilbert uzayının elemanı ve U da aranan çözümdür.

Bu tip denklemlerle ilgili olarak şu teoremi verebiliriz:

I.1.3 Teorem: Eğer A, D_A da bir pozitif operatör ise o zaman (1.1.1) denklemi H Hilbert uzayında en çok bir $U \varepsilon D_A$ çözümüne sahibtir.

İspat: $U_1 \varepsilon D_A$ ve $U_2 \varepsilon D_A$ iki çözüm olsun. Bu takdirde $AU_1=f$ ve $AU_2=f$ denklemleri sağlanır. İki denklem taraf tarafa çıkarılır ve A nın lineerliği de gözönünde bulundurulursa

$$AU_2 - AU_1 = A(U_2-U_1) = 0$$

olur. Bu denklemi $(U_2-U_1) \varepsilon D_A$ elemanı ile sağdan skalar çarpılırsa

$$(A(U_2-U_1),U_2-U_1) = 0$$

ve A nın pozitifliğinden dolayı $U_2-U_1 = 0$ bulunur. Buradan da $U_2=U_1$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki teorem bu çalışmanın temel taşlarından olması bakımından çok önemlidir:

I.1.4 Teorem: (Bir Quadratik Fonksiyonelir Minumumu Üzerine Teorem) A, D_A da bir pozitif operatör, $f \varepsilon H$ ve (1.1.1) denklemi $U_0 \varepsilon D_A$ olmak üzere bir U_0 çözümüne sahib olsun. Diğer bir değişle H da

$$AU_0 = f \quad , \quad U_0 \varepsilon D_A \tag{1.1.2}$$

geçerli olsun. Bu takdirde ;

$$FU = (AU,U) - 2(f,U) \tag{1.1.3}$$

quadratik fonksiyoneli D_A da U_0 elamanı için minimal değerini alır.

Yani her $U \varepsilon D_A$ için $FU \geqslant FU_0$ dır. $FU=FU_0$ durumu sadece $U=U_0$ için doğrudur. Tersine olarak, (1.1.3) fonksiyoneli bütün $U \varepsilon D_A$ elemanları arasında minimal değerini U_0 elemanı için kabul etsin. O zaman U_0 (1.1.1) denkleminin H da çözümüdür. Yani (1.1.2) geçerlidir. [33]

İspat: İlk olarak açıktırki bütün $U \varepsilon D_A$ için FU funksiyoneli tanımlıdır.

($\Longrightarrow$) (1.1.2) denklemi H da $U=U_0$ için sağlansın, yani $f=AU_0$ olsun. (1.1.3) de f nin bu değeri yerine yazılırsa, $U \in D_A$ için

$$FU = (AU,U) - 2(AU_0,U)$$

elde edilir. Buradan kolayca görülürki;

$$\begin{aligned} FU &= (AU,U) - 2(AU_0,U) = (AU,U) - (AU_0,U) - (U,AU_0) \\ &= (AU,U) - (AU_0,U) - (AU,U_0) \\ &= (AU,U) - (AU_0,U) - (AU,U_0) + (AU_0,U_0) - (AU_0,U_0) \\ &= (A(U-U_0),U-U_0) - (AU_0,U_0) \end{aligned}$$

dır. (Burada, bir yandan iç çarpımın simetrikliği $(AU_0,U)=(U,AU_0)$ ve diğer yandan A operatörünün simetrikliği $(U,AU_0)=(AU,U_0)$ kullanıldı).

Netice olarak, eğer $AU_0=f$ sağlanırsa, o zaman

$$FU = (A(U-U_0),U-U_0) - (AU_0,U_0) \tag{1.1.4}$$

dır. Bu eşitlikte (AU_0,U_0) terimi U dan bağımsızdır ve değişmez, dolayısıyla sabittir. Kabülden dolayı A operatörü pozitif olduğundan (1.1.4) ün sağ tarafındaki ilk terimi her $U \in D_A$ için $(A(U-U_0),U-U_0)\geqslant 0$ dır, ancak ve ancak $U-U_0=0$ ise $(A(U-U_0),U-U_0)=0$ dır. (1.1.4) den görülürki $FU\geqslant FU_0$ dır, ancak ve ancak $U=U_0$ ise $FU=FU_0$ dır. Sonuç olarak eğer $AU_0=f$ denklemi sağlanırsa, o zaman FU fonksiyoneli D_A da kesin olarak $U=U_0$ elemanı için minimal değerini alır.

($\Longleftarrow$) FU fonksiyoneli D_A da U_0 elemanı için minimal değerini kabul etsin. Bunun anlamı, eğer keyfi bir $V\in D_A$ elemanı ve keyfi bir t reel sayısı seçilirse

$$F(U_0+tV) \geqslant FU_0 \tag{1.1.5}$$

olur. Tekrar A nın ve iç çarpımın simetrikliği kullanılarak

$$\begin{aligned} F(U_0+tV) &= (A(U_0+tV),U_0+tV) - 2(f,U_0+tV) \\ &= (AU_0+tAV,U_0+tV) - 2(f,U_0) - 2t(f,V) \\ &= (AU_0,U_0)+t(AV,U_0)+t(AU_0,V)+t^2(AV,V) \\ &\quad -2t(f,V)-2(f,U_0) \end{aligned}$$

$$=(AU_0,U_0)+2t(AU_0,V)+t^2(AV,V)-2t(f,V)-2(f,U_0)$$

elde edilir. $U_0 \in D_A$ ve $f \in H$ sabit elemanlar olduklarından, bu eşitlikten açıktırki sabit bir $V \in D_A$ için $F(U_0+tV)$ fonksiyoneli t değişkenli bir quadratik fonksiyoneldir. (1.1.5) den bu fonksiyonel $t=0$ da bir lokal minumuma sahibtirki bu $t=0$ da birinci türevin sıfıra eşit olduğunu söyler:

$$\frac{d}{dt}F(U_0+tV)\Big|_{t=0}=0$$

veya

$$2(AU_0,V) - 2(f,V) = 0$$

yani

$$(AU_0-f,V) = 0$$

dır. $V \in D_A$ elemanı sabit fakat keyfi seçilmiştir. Böylece

$$AU_0-f = 0$$

elde edilir. Yani U_0, $AU_0=f$ denkleminin çözümüdür. Bu ispatı tamamlar.

Bu teoremin önemi, gerçekte, $AU=f$ denkleminin çözümü problemini, lineer D_A cümlesinde (1.1.3) fonksiyonelini minimize eden bir $U_0 \in D_A$ elemanını bulma problemine dönüştürmesidir. İlerki bölümlerde bu U_0 elemanını bulmak için bazı yöntemlerden bahsedeceğiz.

I.2. H_A UZAYI

Bir H Hilbert uzayında, yoğun bir D_A cümlesi ve bu cümle üzerinde pozitif tanımlı, D_A dan H içine bir A operatörü verilsin. Bu durumda A simetriktir ve öyle bir $C>0$ sabiti vardırki her $U \in D_A$ için

$$(AU,U) \geqslant C^2||U||^2 \qquad (1.2.1)$$

sağlanır. Şimdi, D_A üzerinde aşağıdaki gibi bir iç çarpım tanımlayalım

$$(U,V)_A = (AU,V) \qquad \forall\, U,V \in D_A \qquad (1.2.2)$$

Bu iç çarpım yardımıyla;

$$||U||_A = \sqrt{(U,U)_A} \qquad (1.2.3)$$

$$\rho_A(U,V) = ||U-V||_A \qquad (1.2.4)$$

norm ve metrik bağıntıları kolayca tanımlanabilir. Sonuç olarak (1.2.4) metriği ile D_A lineer cümlesi bir metrik uzay oluşturur. Bu metrik uzay (1.2.2) iç çarpımı ile bir pre-Hilbert uzayıdır. Bu uzayı S_A ile gösterelim. (1.2.2), (1.2.3) ve (1.2.1) den

$$||U|| = \frac{1}{C} ||U||_A \tag{1.2.5}$$

olduğu açıktır. Böylece D_A daki elemanların bir $\{U_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} ||U_n - U_o||_A = 0$$

veya

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} ||U_m - U_n||_A = 0$$

ise bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} ||U_n - U_o|| = 0$$

veya

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} ||U_m - U_n|| = 0$$

dır.

Yani S_A da bir dizi U_o elemanına yakınsarsa H da da aynı elemana yakınsar veya S_A da bir dizi esas dizi ise, bu H da da esas dizidir.

Genelde S_A uzayının tam olması gerekmez. Ama, tam ise bir Hilbert uzayıdır ve amaçlarımız için uygundur. Bununla birlikte S_A tam değilse H uzayının elemanları arasından seçilebilen ve ideal elemanlar denilen elemanların eklenmesi ile S_A nın tamlanmışı denilen bir tam uzay elde edilebilir. [33] İşte bu uzaya H_A uzayı diyeceğiz. Böylece daha önce D_A üzerinde tanımlanmış iç çarpım bu uzaya aşağıdaki gibi genişletilebilir; Her $U_o, V_o \in H_A$ eleman çifti için

$$(U_o, V_o)_A = \lim_{n\to\infty} (U_n, V_n)_A \tag{1.2.6}$$

ve buradan norm ve metrik bağıntıları da sırasıyla

$$||U||_A = \sqrt{(U,V)_A} \tag{1.2.7}$$

$$\rho_A(U,V) = ||U-V||_A \tag{1.2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Yine bu bağıntılarda D_A üzerinde tanımlanan norm ve metrik ifadelerinin genişletilmişi olur.

O halde H_A uzayı için şu tanımı verebiliriz:

I.2.1 Tanım: D_A lineer cümlesinin elemanları ile oluşturulmuş pre-Hilbert uzayına, (1.2.6) iç çarpımı ve (1.2.8) metriği ile H_A uzayı denir.

I.2.1 Teorem: H_A uzayı (1.2.8) metriği ile tamdır. Dolayısıyla bir Hilbert uzayıdır ve D_A lineer cümlesi bu uzayda yoğundur. [3]

İspat: a) Yoğunluk: U, H_A nın keyfi bir elemanı olsun. Göstermek zorundayızki her $\varepsilon>0$ için bir $V\in D_A$ bulmak mümkündür öyleki

$$\rho_A(U,V) = ||U-V||_A \leqslant \varepsilon$$

dır. S_A da (böylece H_A da) bu U elemanına tek olarak karşılık gelen esas dizilerin belirli bir sınıfı vardır. Bunların birisi $\{U_n\}$ ile gösterilsin. $\varepsilon>0$ verilmiş olsun. Bu takdirde, $\{U_n\}$ H_A da bir esas dizi olduğundan bir n_0 sayısı mevcuttur öyleki her bir $m,n>n_0$ sayı çifti için

$$||U_m-U_n|| \leqslant \varepsilon \tag{1.2.9}$$

geçerlidir. $n>n_0$ olmak üzere gözönüne alınan diziden seçilmiş sabit bir eleman U_n olsun. S_A da U ya karşılık gelen dizilerden birisi de $\{U_m\}$ olduğundan $\{U_m-U_n\}$ (sabit n için) S_A da $U-U_n$ elemanına karşılık gelen dizilerden biridir. H_A daki iç çarpımı kullanarak

$$||U-U_n||_A = \lim_{m\to+\infty} ||U_m-U_n||_A$$

bulunabilir. Fakat $n>n_0$, $m>n_0$ sayı çifti için (1.2.9) geçerli olduğundan bu limit ε dan büyük olamaz. Yani

$$||U-U_n||_A \leqslant \varepsilon$$

dur. Bu H_A da D_A nınyoğunluğunu ispatlar.

b) Tamlık: $\{V_n\}$ H_A da keyfi bir esas dizi olsun. Göstermek zorundayızki bu dizi H_A da bir limite sahibtir.

D_A H_A da yoğun olduğundan, bu uzayda, $\{V_n\}$ nin her bir elemanına

D_A daki bazı z_n elemanları ile yaklaşmak mümkündür. Özel olarak, D_A daki elemanların bir $\{z_n\}$ dizisini bulmak mümkündür öyleki her $n=1,2,\ldots,$ için

$$||z_n-V_n||_A < \frac{1}{n} \qquad (1.2.10)$$

gerçeklenir. Buradan görülürki H_A da sadece $\{V_n\}$ değil $\{z_n\}$ de bir esas dizidir. Gerçekten;

$$||z_m-z_n||_A=||(z_m-V_m)+(V_n-z_n)+(V_m-V_n)||_A$$

$$\leqslant||z_m-V_m||_A+||z_n-V_n||_A+||V_m-V_n||_A$$

dır. $\{V_n\}$ nin esas dizi olduğu ve (1.2.10) bağıntısı da gözönünde bulundurulursa $\{z_n\}$esas dizi dir. $\{z_n\}H_A$ da esas ve böylecede S_A da esas dizi olduğundan bu diziye belirli bir z elemanı karşılık gelir.

Buradan da H_A da $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$ veya $\lim\limits_{n\to\infty}||z_n-z||_A=0$ dır. Böylece

$$||z-V_n||_A \leqslant ||z-z_n||_A + ||z_n-V_n||_A$$

yazılabilir. Netice olarak

$$\lim_{n\to\infty}||z-V_n||_A = 0$$

oldğu açıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

I.3.H_A UZAYINDA F FONKSİYONELİNİN VARLIĞI. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜMLER

$$FU = (AU,U) - 2(f,U) \qquad U\in D_A \qquad (1.3.1)$$

fonksiyoneli gözönüne alınsın. A operatörünün, D_A lineer cümlesi üzerinde pozitif tanımlı olması kabülü altında, gösterildiki, eğer $AU=f$ denklemi bir $U_o\in D_A$ çözümüne sahibse F fonksiyoneli bütün $U\in D_A$ elemanları arasından bu U_o elemanı için minimal değerini alır. Aksine olarak, eğer F, D_A da bir U_o elemanı için minimal değerini alırsa o zaman bu eleman $AU=f$ denkleminin çözümüdür. Bununla birlikte böyle bir U_o elemanının varlığı önceden garanti edilmemişken teoremde ya verilen denklemin $U_o\in D_A$ çözümünün varlığı veya F fonksiyonelini minimize eden

$U_0 \varepsilon D_A$ nın varlığı kabül edilir.

A operatörü pozitif tanımlı verildiği zaman D_A nın tamlanmışı olan H_A uzayını oluşturmak mümkündü. Bu uzayın iç çarpımı ise D_A daki $(U,V)_A = (AU,V)$, $U,V \varepsilon D_A$, iç çarpımının genişletilmişi idi. Bu takdirde (1.3.1) fonksiyoneli

$$FU = (U,U)_A - 2(f,U) \qquad (1.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece F fonksiyoneli H_A uzayına bu bağıntıyla genişletilmiş olur. Bu fonksiyonel H_A da minimal değerini, $f \varepsilon H$ elemanı ile tek olarak belirtilen $U_0 \varepsilon H_A$ elemanı için kabül eder.

Şimdi bu iddiayı kanıtlayalım:

(f,U) fonksiyoneli lineerdir ve aynı zamanda her sabit $f \varepsilon H$ için H da sınırlıdır, yani $|(f,U)| \leqslant ||f||\,||U||$ dır. (f,U) fonksiyoneli H_A da da lineer ve sınırlıdır, dolayısıyla her $f \varepsilon H$ ve $U \varepsilon H_A$ için $|(f,U)| \leqslant (1/C)||f||\,||U||_A$ olur. H_A bir Hilbert uzayı, F, H_A da sınırlı oldğundan Riesz teoremi de gözönünde bulundurularak, $f \varepsilon H$ elemanı ile tek olarak belirtilen bir $U_0 \varepsilon H$ elemanı vardır öyleki bütün $U \varepsilon H_A$ için

$$(U_0,U)_A = (f,U) \qquad (1.3.3)$$

sağlanır. Eğer (1.3.3), (1.3.2) de (f,U) yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} FU &= (U,U)_A - 2(U_0,U)_A \\ &= (U,U)_A - 2(U_0,U)_A + (U_0,U_0) - (U_0,U_0)_A \\ &= (U-U_0,U-U_0)_A - (U_0,U_0)_A \\ &= ||U-U_0||_A^2 - ||U_0||_A^2 \end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

elde edilir. $||U||_A$ H_A da norm olduğundan ya $||U-U_0||_A=0$ dır, eğer $U=U_0$ ise, veya $||U-U_0||_A>0$ dır, eğer $U \neq U_0$ ise.

O halde açıktırki F fonksiyoneli H_A da minumum değirini (1.3.3) bağıntısı ile tek olarak tanımlanan $U_0=U$ elemanı için almaktadır.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

I.3.1 Teorem: A, H Hilbert uzayında yoğun bir D_A lineer cümlesinde pozitif tanımlı bir operatör ve H_A ise önceki bölümde tanımlanan uzay olsun. Bu takdirde H_A da (1.3.2) ile verilen F fonksiyoneli, (1.3.3) ile tek olarak belirtilmiş bir U_0 elemanı için minimal değerini alır.

I.3.1 Tanım: H_A da (1.3.2) fonksiyonelini minimize eden U_0 elemanına $AU=f$ denkleminin genelleştirilmiş çözümü denir. [33]

$(U_0,U)_A = (f,U)$ ve $||U||\leqslant(1/C)||U||_A$ bağıntılarından her $U \in H_A$ için

$$|(U_0,U)|_A = |(f,U)| \leqslant ||f||\,||U|| \leqslant \frac{||f||}{C}\,||U_0||_A$$

dır. Özel olarak $U=U_0$ için

$$||U_0||_A^2 = (U_0,U_0)_A \leqslant \frac{||f||}{C}\,||U_0||_A$$

ve buradan

$$||U_0||_A \leqslant \frac{||f||}{C} \tag{1.3.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu verilen bir $AU=f$ denkleminin genelleştirilmiş U_0 çözümünün, denklemin sağ tarafındaki f fonksiyonuna sürekli bağımlı olduğunu ifade eder. Üstelik, eğer U_0 ve V_0 sırasıyla $AU=f$ ve $AV=g$ denklemlerinin genelleştirilmiş çözümleri iseler, yani $(U_0,U)_A=(f,U)$ ve $(V_0,U)_A=(g,U)$ ($\forall\, U \in H_A$ için) bağıntıları sağlanıyorsa o zaman $z_0=V_0-U_0$ olmak üzere z_0, $Az=g-f$ denkleminin genelleştirilmiş çözümüdür. Böylece (1.3.5) e benzer

$$||z_0||_A \leqslant \frac{||g-f||}{C} \tag{1.3.6}$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntı, yaklaşım yöntemleri ile çözüme giderken hata tahmininde geçerli olacaktır. Aşikar olarak, $AU=f$ denkleminin U_0 genelleştirilmiş çözümü ve onun $AU_n=f_n$ denklemini sağlayan n-inci yaklaşımı için $||U_n-U_0||\leqslant||f_n-f||/C$ dir. Böylece, eğer C sabiti biliniyorsa, bu bağıntı yardımıyla U_n yaklaşık çözümünün hatası tahmin edilebilir.

Yukarda da görüldüğü gibi $AU=f$ denkleminin genelleştirilmiş U_0 çözümü (1.3.3) bağıntısıyla tek olarak tanımlanmıştır. Bununla beraber pratik açıdan bu bağıntı kendi kendine çözümü oluşturan bir yol vermez. Daha ilerki bölümlerde F fonksiyonelinin minimizasyonuna dayanarak çözüm veren etkili yöntemler tanıtılacaktır.

Nümerik yöntemlerin çoğunda olduğu gibi varyasyonel yöntemler de, H_A uzayında, istenen U_0 çözümüne yakınsayan belli bir U_n dizisi oluşturmayı içerir, ki bunun için

$$\lim_{n\to\infty} ||U_n-U_0||_A = 0 \qquad (1.3.7)$$

sağlanacaktır.

Önceden de bahsedildiği gibi F fonksiyoneli (1.3.3) ile tek olarak belirtilen U_0 elemanı için minimal değerini alır. (1.3.4) den görülürki bu minimal değer $-||U_0||_A^2$ sayısına eşittir. Yani ,

$$\min_{U\in H_A} FU = -||U_0||_A^2$$

dır. O halde şu tanımı vermeye hakkımız vardır:

I.3.2 Tanım: Eğer H_A da bir $\{U_n\}$ dizisi

$$\lim_{n\to\infty} FU_n = -||U_0||_A^2 \qquad (1.3.8)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu diziye F fonksiyoneli için bir minimizasyon dizisi denir.

I.3.2 Teorem: Eğer $\{U_n\}$ bir minimizasyon dizisi ise o zaman (1.3.7) sağlanır. Tersine (1.3.7) sağlanırsa o zaman $\{U_n\}$ bir minimizasyon dizisidir.

İspat: (==>) Eğer $\{U_n\}$ bir minimizasyon dizisi ise (1.3.8) vardır ve (1.3.4) den

$$\lim_{n\to\infty} ||U_n-U_0||_A^2 = \lim_{n\to\infty} (FU_n+||U_0||_A^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} FU_n + ||U_0||_A^2$$

$$= -||U_o||_A^2 + ||U_o||_A^2 = 0$$

bulunur.

(<==) Eğer (1.3.7) geçerli ise o zaman yine (1.3.4) den

$$\lim_{n \to \infty} FU_n = \lim_{n \to \infty} ||U_n - U_o||_A^2 - ||U_o||_A^2 = -||U_o||_A^2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç olarak, eğer bir $\{U_n\}$ dizisinin minimizasyon dizisi olduğu gösterilirse, bu dizi H_A da $AU=f$ denkleminin U_o çözümüne yakınsar.

I.4. NON-HOMOGEN SINIR ŞARTLARI DURUMU

Buraya kadar incelenen teoride, A operatörünün tanım bölgesinin lineer bir cümle olduğu kabül edilmiştir. Aynı zamanda, verilen problemin çözümünün yaklaşımının bu lineer cümledeki veya en azından H_A daki elemanların, doyayısıyla yine bir lineer cümledeki elemanların lineer kombinasyonu olduğu kabül edilir. Örneğin; Poisson denklemi için Dirichlet problemi durumundu, yani

$$-\Delta U = f \qquad G \text{ de} \tag{1.4.1}$$

$$U = 0 \qquad \Gamma \text{ da} \tag{1.4.2}$$

probleminde lineer D_A cümlesi olarak (1.4.2) yi sağlayan ve $\bar{G}=G+\Gamma$ da birinci ve ikinci kısmi türevleri ile sürekli fonksiyonların cümlesi seçilebilir. Ancak, D_A daki fonksiyonlar gibi aynı düzgünlük şartını sağlayan fakat Γ da $U=2$ değerini alan fonksiyonları eleman kabül eden M cümlesi lineer değildir. Çünkü U ve V, M deki iki fonksiyon ise bu takdirde Γ da $U+V=4$ olur. Böylece $U+V$ elemanı Γ da $U+V=2$ şartını gerçeklemez, dolayısıyla M ye ait değildir.

Benzer olarak, D_A daki fonksiyonlar gibi aynı düzgünlük şartını sağlayan ve Γ da $\partial U/\partial \nu=-U$ sınır şartını gerçekleyen fonksiyonların cümleside lineerdir.(burada $\partial/\partial \nu$ normale göre türevdir.) Yine aynı fonksiyonların $\partial U/\partial \nu = -(U-3)$ sınır şartını sağlayan cümlesi ise lineer değildir.

Uygulamada bu ve buna benzer non-homogen sınır şartlı problemlere raslanabilir. Bu tip problemlerin çözümleri ise çoğunlukla bir dönüşüm yardımıyla, problemi homegen sınır şartlı duruma dönüştürmekle mümkün olabilir. Bir örnek vermek gerekirse;

$$-\Delta U = f \qquad G \text{ de} \tag{1.4.3}$$

$$U = g \qquad \Gamma \text{ da} \tag{1.4.4}$$

problemi gözönüne alınsın ve $\bar{G}=G+\bar{\Gamma}$ da sürekli ve (1.4.3)-(1.4.4) ü sağlayan bir W fonksiyonunun bulunabildiği kabül edilsin. Eğer bu problemin $U=W+Z$ formunda bir çözümü aranırsa, Z fonksiyonu için

$$-\Delta Z = f+ W \qquad G \text{ de} \tag{1.4.5}$$

$$Z = 0 \qquad \Gamma \text{ da} \tag{1.4.6}$$

problemi elde edilir. $f+ W = h$ denirse problem

$$-\Delta Z = h \qquad G \text{ de}$$

$$Z = 0 \qquad \Gamma \text{ da}$$

şeklinde homogen sınır şartlı probleme dönüşmüş olur.

Genelde, bu şekilde dönüşümü sağlayacak bir W fonksiyonu bulmak kolay değildir. Bununla birlikte, bilimsel veya tekniksel alanlarda ortaya çıkan birçok problemlerde bu sorunun çözümü nispeten kolaydır ve çoğunlukla W fonksiyonu doğrudan verilir. Örnek olarak; $G(0<x<a$, $0<y<b)$ dikdörtgeni üzerinde Laplace denklemi için Dirichlet problemini gözönüne alalım. Γ üzerinde sınır şartları; $0<x<a$, $y=0$ için $g=\mathrm{Sin}(\pi x/a)$ ve Γ nın geri kalan kısmında $g=0$ şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda, aşikar olarak W yı; $W = (1-y/b)\mathrm{Sin}(\pi x/a)$ olarak seçmek uygundur. Çünkü bu, yukarda verilen sınır şartlarını sağlar ve problemi

$$-\Delta Z = -\frac{\pi^2}{a^2}(1-y/b)\mathrm{Sin}(\pi x/a) \qquad G \text{ de}$$

$$Z = 0 \qquad \text{da}$$

şeklinde homogen sınır şartlı probleme dönüştürür. Bu takdirde orijinal problemin çözümü $U_0 = W+Z_0$ olacaktır

II.BÖLÜM

VARYASYONEL YÖNTEMLER

Varyasyonel yöntemler diferensiyel denklemlerin çözümlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur.(bakınız, Hlavacek[23],[24]; Burrows ve Perks[16],[17]; Sounders,Coldwell ve Wanless[37]; Ali,Gardner ve Gardner[3]) Burada varyasyonel yöntemlerden bazıları tanıtılacak, diferensiyel denklemlerin çözümüne nasıl uygulanabildikleri hakkında geniş bilgiler verilecektir.

II.1.ORTONORMAL SERİ YÖNTEMİ

Bir H Hilbert uzayı ve bir pozitif tanımlı A operatörü gözönüne alınsın. H_A ayrılabilir ve bu uzayda D_A lineer cümlesinin elemanlarından oluşturulmuş

$$\emptyset_1,\emptyset_2,\ldots,\emptyset_n,\ldots \tag{2.1.1}$$

sistemi bir ortonormal baz olsun. Bu bazın elemanları için

$$(\emptyset_i,\emptyset_k)_A = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}$$

yazılabilir. Bu takdirde. $AU = f$ denkleminin U_0 çözümü

$$U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \emptyset_k \tag{2.1.2}$$

şeklinde bir fourier serisi ile arana bilir. Burada

$$a_k = (U_0,\emptyset_k)_A \qquad k=1,2,\ldots \tag{2.1.3}$$

dir. Her $U \in H_A$ için $(U_0,U)_A = (f,U)$ bağıntısından her $\emptyset_k$ $(k=1,2,\ldots)$ için

$$a_k = (U_0,\emptyset_k)_A = (f,\emptyset_k) \tag{2.1.4}$$

elde edilir. (2.1.2) serisinin katsayıları, böylece, $\emptyset_k$ baz fonksiyonları ve verilen denklemin sağ tarafındaki f fonksiyonunun iç çarpımı olarak çok basit bir yolla verilir. Bunu aşağıdaki teoremle özetlemek mümkündür:

II.1.1 Teorem: Ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun bir D_A lineer cümlesi üzerinde, pozitif tanımlı bir operatör A ve $f \in H$ olsun. Ayrıca $\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots$ H_A uzayında bir ortonormal baz olsun. Bu takdirde AU=f denkleminin genelleştirilmiş U_o çözümü

$$U_o = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \emptyset_k$$

serisi ile verilir. Burada $a_k = (f, \emptyset_k)$ dır.

Sonuç olarak verilen problemi (2.1.2) serisi ile çözmek çok kolaydır. Bunun için (2.1.4) den a_k katsasılarını hesaplamak yeterli olacaktır. Bununla beraber, genelde H_A da bir ortonormal bazın oluşturulması kolay değildir. Bazende bir baz bulunsa da onun ortogonalizasyonu ve neticede ortonormalizasyonu aşırı derecede zahmetli bir işlemdir. Bu da nümerik açıdan pratik değildir. Bu nedenle bazın ortonormalizasyonunu gerektirmeyen başka yöntemlerde geliştirilmiştir.

II.2.RİTZ YÖNTEMİ

A, ayrılabilir bir H Hilbert uzayına yoğun bir D_A lineer cümlesi üzerinde pozitif tanımlı bir operatör ve $f \in H$ olsun. H_A da

$$\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots \qquad (2.2.1)$$

bazı gözönüne alınsın. Önceki bölümde olduğu gibi bu bazın ortagonal olması gerekmez. Bu nedenle buyöntem teknik uygulamalarda çok sık kullanılır. Birinci bölümde değinildiği gibi AU=f denkleminin genelleştirilmiş U_o çözümü H_A da

$$FU = (U,U)_A - 2(f,U) \qquad (2.2.2)$$

fonksiyonelini minimize eder. Yani

$$FU_o = \min_{U \in H_A} FU \qquad (2.2.3)$$

dır. Pozitif bir n tamsayısı seçilerek U_o elemanının

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \emptyset_k \qquad (2.2.4)$$

şeklinde bir yaklaşımı aransın. Burada ϕ_k, (2.2.1) bazının elemanları ve a_k henüz bilinmeyen reel sabitlerdir. Bu sabitler

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\phi_k \qquad (2.2.5)$$

bütün yaklaşımlar arasındaki

$$FV_n = \min \qquad (2.2.6)$$

olma koşulundan tanımlanır. Burada b_k lar keyfi reel sayılardır.

Böylece n yeterince büyük seçilirse (2.2.6) dan katsayıları belirlenmiş (2.2.4) yaklaşımı, H_A da aranan U_o çözümüne oldukça yakın olacağı düşünülmektedir.

(2.2.4) deki a_k katsayılarının tanımlanması oldukça kolay bir işlemdir. Bu gerçek Ritz yönteminin uygulanabilirliği açısından önemlidir. (2.2.5), (2.2.2) fonksiyonelinde U yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
FV_n &= (b_1\phi_1+\dots+b_n\phi_n,\, b_1\phi_1+\dots+b_n\phi_n)_A - 2(f,\, b_1\phi_1+\dots+b_n\phi_n) \\
&= (\phi_1,\phi_1)_A b_1^2 + (\phi_1,\phi_2)_A b_1b_2 + \dots + (\phi_1,\phi_n)_A b_1b_n \\
&\quad + (\phi_2,\phi_1)_A b_2b_1 + (\phi_2,\phi_2)_A b_2^2 + \dots + (\phi_2,\phi_n)_A b_2b_n \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad + (\phi_n,\phi_1)_A b_nb_1 + (\phi_n,\phi_2)_A b_nb_2 + \dots + (\phi_n,\phi_n)_A b_n^2 \\
&\quad -2(f,\phi_1)_A b_1 - 2(f,\phi_2)_A b_2 - \dots - 2(f,\phi_n)_A b_n
\end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

elde edilir. İç çarpımın simetri özelliği gözönüne alınırsa bu sistem

$$\begin{aligned}
FV_n &= (\phi_1,\phi_1)_A b_1^2 + 2(\phi_1,\phi_2)_A b_1b_2 + \dots + 2(\phi_1,\phi_n)_A b_1b_n \\
&\quad + (\phi_2,\phi_2)_A b_2^2 + 2(\phi_2,\phi_3)_A b_2b_3 + \dots + 2(\phi_2,\phi_n)_A b_2b_n \\
&\quad + \dots + (\phi_n,\phi_n)_A b_n^2 - 2(f,\phi_1)b_1 - \dots - 2(f,\phi_n)b_n
\end{aligned} \qquad (2.2.8)$$

şekline indirgenir. $(\phi_j,\phi_k)_A$ iç çarpımı, verilen bazın elemanlarıyla tanımlanmış sabit sayılardır. Sonuç olarak, (2.2.2) deki U yerine (2.2.5) yaklaşımı konursa, $b_1,\dots b_n$ değişkenlerine göre quadratik bir F fonksiyoneli elde edilmiş olur. Bu fonksiyonelin $(a_1,\dots,a_n)$

noktalarında minumum kabül etmesi için

$$\frac{\partial}{\partial b_1} FV_n \Big|_{b_1=a_1,\ldots,b_n=a_n} = 0, \ldots \frac{\partial}{\partial b_n} FV_n \Big|_{b_1=a_1,\ldots,b_n=a_n} = 0 \quad (2.2.9)$$

şartlarının sağlanması gerekir. Yani,

$$(\emptyset_1,\emptyset_1)_A a_1 + (\emptyset_1,\emptyset_2)_A a_2 + \ldots + (\emptyset_1,\emptyset_n)_A a_n = (f,\emptyset_1)$$

$$(\emptyset_1,\emptyset_2)_A a_1 + (\emptyset_2,\emptyset_2)_A a_2 + \ldots + (\emptyset_2,\emptyset_n)_A a_n = (f,\emptyset_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\emptyset_1,\emptyset_n)_A a_1 + (\emptyset_2,\emptyset_n)_A a_2 + \ldots + (\emptyset_n,\emptyset_n)_A a_n = (f,\emptyset_n) \quad (2.2.10)$$

denklemleri sağlanmalıdır.

(2.2.10) sistemi, aranan n tane $a_1,\ldots,a_n$ sabitleri için n tane denklem sistemidir. Kabülden dolayı, $\emptyset_1,\ldots\emptyset_n$ lineer bağımsızdır, dolayısıyla (2.2.10) sisteminin determinantı sıfırdan farklıdır. Böylece bu sistem tek olarak çözülebilir.

Özel durumda, eğer (2.2.1) bazı H_A da ortonormal seçilirse (2.2.10) sistemi

$$a_1 = (f,\bar{\emptyset}_1)$$
$$a_2 = (f,\bar{\emptyset}_2)$$
$$\vdots$$
$$a_n = (f,\bar{\emptyset}_n) \quad (2.2.11)$$

şekline indirgenir. Sonuç olarak, Ritz yöntemi bu durumda

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (f,\bar{\emptyset}_k)\bar{\emptyset}_k \quad (2.2.12)$$

formunda bir yaklaşım verir. (Burada $\bar{\emptyset}_k$,ortonormal bazın elemanlarıdır)

Bu gerçek Ritz dizisi denilen, (2.2.4) bağıntısı ile tanımlı ve katsayıları (2.2.10) ile belirlenen U_n yaklaşımlar dizisinin H_A da $AU=f$ denkleminin U_0 genelleştirilmiş çözümüne yakınsadığını ispat etmekte kullanılabilir:

H_A da $\emptyset_1,\ldots,\emptyset_n$ bazından ortonormalizasyon işlemi ile

$$\bar{\emptyset}_1,\bar{\emptyset}_2,\ldots \tag{2.2.13}$$

bazı elde edildiği kabül edilsin. Netice itibariyle (2.2.13) bazının elemanları $\emptyset_1,\emptyset_2,\ldots$ bazının elemanlarının bir lineer kombinasyonudur.

Yani

$$\begin{aligned}
\bar{\emptyset}_1 &= d_{11}\emptyset_1 \\
\bar{\emptyset}_2 &= d_{21}\emptyset_1+d_{22}\emptyset_2 \\
&\vdots \\
\bar{\emptyset}_n &= d_{n1}\emptyset_1+d_{n2}\emptyset_2+\ldots+d_{nn}\emptyset_n
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\emptyset_1 &= d'_{11}\bar{\emptyset}_1 \\
&\vdots \\
\emptyset_n &= d'_{n1}\bar{\emptyset}_1+\ldots+d'_{nn}\bar{\emptyset}_n
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

yazılabilir. Burada d_{kk} ve d'_{kk} lar sıfırdan farklıdırlar. (2.2.2) fonksiyonelinde (2.2.5) serisi U yerine yazılır ve (2.2.6) uygulanırsa katsayıları (2.2.10) ile belirlenen U_n yaklaşımlar dizisi elde edildiği gibi benzer olarak, (2.2.13) ortonormal bazının

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\bar{\emptyset}_k \tag{2.2.15}$$

lineer kombinasyonu yine U yerine (2.2.2) de yerine konursa

$$FW_n = \min \tag{2.2.16}$$

gerçekleşecek şekilde bütün (2.2.15) lineer kombinasyonlar cümlesi üzerinden

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\bar{\emptyset}_k \tag{2.2.17}$$

yaklaşımı için

$$\alpha_1=(f,\bar{\emptyset}_1)\ ,\ \alpha_2=(f,\bar{\emptyset}_2),\ldots,\ \alpha_n=(f,\bar{\emptyset}_n) \tag{2.2.18}$$

katsayıları elde edilir. Bununla birlikte kolayca gösterilebilirki

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\emptyset_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\bar{\emptyset}_k = z_n \tag{2.2.19}$$

dir. Gerçekten; $\emptyset_1,\ldots,\emptyset_n$ elemanlarının bütün lineer kombinasyonları, yani b_k keyfi reel sabitler olmak üzere (2.2.5) formunun bütün elemanları bir lineer cümle oluştururlar. Bu cümle M ile gösterilsin.

Halbuki, (2.2.13) bazının elemanlarının oluşturulmasında görülürki aynı lineer cümle $\bar{\emptyset}_1,\bar{\emptyset}_2,\ldots,\bar{\emptyset}_n$ elemanlarının lineer kombinasyonu ile meydana getirilmiştir. Neticede, (2.2.6) dan dolayı problem, bu M cümlesi üzerinde F nin minumum kabül ettiği U_n elemanını bulma problemine dönüşmüştür. Bilindiği gibi bu problem bir tek çözüme sahibtir. Çünkü (2.2.4) deki a_k sabitleri (2.2.10) dan tek olarak tanımlanabilir. Aynı şey (2.2.13) bazına göre düşünülürse, yine problem (2.2.16) dan M üzerinde F yi minimize eden z_n elemanını bulma problemidir. Bu da bir tek çözüme sahib olduğundan $z_n \neq U_n$ olması mümkün değıldir. Sonuç olarak (2.2.19) sağlanır. Bununla beraber (2.2.17) dizisi önceden bilinen(II.1.1 teorem den)

$$U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\emptyset}_k$$

serisinin kısmi toplamlar dizisidir. Böylece (2.2.4) dizisi (2.2.10) ile belirlenen katsayılarıyle H_A da U_0 a yakınsar.

Özet olarak şu teorem verilebilir:

II.2.1 Teorem: A, ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun bir D_A lineer cümlesi üzerinde pozitif tanımlı operatör ve $f \in H$ olsun. Ayrıca $\emptyset_1,\emptyset_2,\ldots$ H_A da bir baz olsun. Bu takdirde (2.2.10) sisteminden tek olarak belirlenen $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sabitleri ile $\{U_n\}$ dizisi H_A da $AU=f$ denkleminin U_0 çözümüne yakınsar.

Böylece Ritz yöntemi Ortonormal Seri yöntemi ile aynı sonuca götürür. Fakat verilen bazın ortonormalizasyonu gibi güç bir işi ortadan kaldırır. Bununla birlikte $a_1,\ldots,a_n$ sabitlerinin n-lineer sistemini oluşturmayı ve çözmeyi gerektirir. Sistemin çözümü bilinen nümerik yöntemlerle çok basittir.

Yukardaki teoriden ve onun ifadesi olan II.2.1 teoremden şu sonuç çıkarılabilir:

Sonuç: n artarken Ritz dizisinin U_n elemanları U_o çözümüne çok iyi bir yaklaşım oluştururlar. Yani n>m için

$$||U_n-U_o||_A \leq ||U_m-U_o||_A \qquad (2.2.20)$$

dir. Gerçekten, $U_o=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\bar{\emptyset}_k$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca (2.2.19) dan $U_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\bar{\emptyset}_k=z_n$ idi. (burada $\alpha_k=(f,\bar{\emptyset}_k)$ dır.) Böylece

$$U_o-U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\bar{\emptyset}_k \qquad (2.2.21)$$

elde edilir. $\bar{\emptyset}_1,\bar{\emptyset}_2,\ldots$ H_A da ortonormol baz olduğundan

$$(\bar{\emptyset}_i,\bar{\emptyset}_k)_A=\begin{cases}0 & i\neq k\\ 1 & i=K\end{cases}$$

dır. Bu takdirde, (2.2.21) den

$$||U_o-U_n||_A^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k^2$$

elde edilir. Sonuç olarak, n artarken $||U_o-U_n||_A$ normu azalır veya en azından artmaz. Üstelik, n yi artırmakla, sadece, orijinal olarak oluşturulmuş (2.2.10) sistemi genişletilmiş olur. Yani sistemin sağ ve sol tarafına yeni iç çarpımlar, dolayısıyla sistemin matrisine ek sutun ve z satır eklenmiş olur. Bununla birlikte önceden hesaplanan iç çarpımlar değişmez kalır. Aynı şey tersi içinde doğrudur. Yani daha düşük dereceden yaklaşımlar bizim için yeterli olursa sistemden bir kısım iç çarpımları düşürebiliriz. Bu Ritz yönteminin nümerik açıdan önemli bir özelliğidir.

II.3.GALERKİN YÖNTEMİ

Ayrılabilir bir H Hilbert uzayı ve H da yoğun bir M cümlesi gözönüne alınsın. Eğer bir $U \in H$ için

$$(U,V) = 0 \quad \forall\ V\in M \qquad (2.3.1)$$

sağlanıyorsa o zaman U=0 dır.

Şimdi

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \tag{2.3.2}$$

H da baz olsun. Bu takdirde eğer $\forall$ $k=1,2,\ldots$ için $(U,\phi_k)=0$ ise H da $U=0$ dır. Kısaca $\forall$ $k=1,2,\ldots$ için

$$(U,\phi_k) = 0 \Longrightarrow U=0 \tag{2.3.3}$$

dır. Kabülden dolayı (2.3.2) baz olduğundan n keyfi pozitif bir tam sayı ve a_k keyfi reel sayılar olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \tag{2.3.4}$$

şeklindeki bütün elemanların N cümlesi H da yoğundur. $\forall$ k için $(U,\phi_k)=0$ olduğundan N nin herbir (2.3.4) elemanı için $(U, \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k)=0$ sağlanır. Şimdi,

$$AU = f \tag{2.3.5}$$

H da bir denklem olsun. Eğer bir $U_0 \in D_A$ bulunabilirse öyleki $\forall$ $k=1,2,\ldots$ için

$$(AU_0 - f, \phi_k) = 0 \tag{2.3.6}$$

ise o zaman (2.3.3) e göre H da $AU_0 - f = 0$ dır. Böylece bu $U_0 \in D_A$ elemanı H da (2.3.5) denkleminin çözümü olur. Bu Galerkin yönteminin temel fikrini oluşturur.

(2.3.2) bir baz olsun ve (2.3.5) denkleminin

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \tag{2.3.7}$$

formunda bir yaklaşık çözümü aransın. Burada n keyfi fakat sabit pozitif tamsayı ve a_k lar henüz bilinmeyen sabitlerdir. Galerkin yönteminde bu sabitler

$$(AU_n - f, \phi_k) = 0 \tag{2.3.8}$$

şartından tanımlanır. Bu n tane bilinmeyen $a_1, \ldots, a_n$ sabitleri için n tane denklem ifade eder. A operatörünün lineerliğinden dolayı (2.3.8) $k=1,2,\ldots,n$ için $(a_1 A\phi_1 + a_2 A\phi_2 + \ldots + a_n A\phi_n - f, \phi_k)=0$ şeklinde veya daha açık

$$(A\phi_1,\phi_1)a_1+(A\phi_2,\phi_1)a_2+\ldots+(A\phi_n,\phi_1)a_n=(f,\phi_1)$$
$$(A\phi_1,\phi_2)a_1+(A\phi_2,\phi_2)a_2+\ldots+(A\phi_n,\phi_2)a_n=(f,\phi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(A\phi_1,\phi_n)a_1+(A\phi_2,\phi_n)a_2+\ldots+(A\phi_n,\phi_n)a_n=(f,\phi_n) \qquad (2.3.9)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer A operatörü pozitif ise (dolayısıyla simetriktir) bu takdirde (2.3.9) sistemini, Ritz yöntemindeki (2.2.10) sistemine özdeş olarak;

$$(\phi_1,\phi_1)_A a_1+(\phi_1,\phi_2)_A a_2+\ldots+(\phi_1,\phi_n)_A a_n=(f,\phi_1)$$
$$(\phi_1,\phi_2)_A a_1+(\phi_2,\phi_2)_A a_2+\ldots+(\phi_2,\phi_n)_A a_n=(f,\phi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\phi_1,\phi_n)_A a_1+(\phi_2,\phi_n)_A a_2+\ldots+(\phi_n,\phi_n)_A a_n=(f,\phi_n) \qquad (2.3.10)$$

formunda yazmak mümkündür. Böylece Ritz dizisinin yakınsaklığını ifade eden II.2.1 teorem Galerkin dizisinin yakınsaklığı içinde geçerli olur. Sonuç olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

II.3.1 teorem: A, ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun bir lineer D_A cümlesinde pozitif tanımlı operatör ve $f \in H$ olsun. $\phi_1 \in D_A, \phi_2 \in D_A, \ldots,$ elemanları H_A da bir baz oluştursun. Bu takdirde (2.3.9) sistemi ile tek olarak tanımlanmış $a_1,\ldots,a_n$ sabitleri ile (2.3.7) Galerkin dizisi $AU=f$ denkleminin U_0 çözümüne yakınsar.

Görüldüğü gibi pozitif tanımlı operatör durumunda Galerkin yöntemi Ritz yöntemi ile karşılaştırmada yeni hiçbir şey getirmez. Her iki yöntemde lineer denklemlerin özdeş sistemlerine ve yaklaşık çözümlerin özdeş dizilerine götürür. Bununla birlikte Galerkin yönteminin uygulama imkanı Ritz yönteminden daha geniştir. Galerkin yöntemi A operatörü üzerine önceden hiçbir kısıtlama yüklemez. Böylece çok genel operatörler durumunda da uygulanabilir. Ancak bu durumda (2.3.9) sisteminin çözülebilirliği ve Galerkin dizisinin yakınsaklığı zorlukları ortaya çıkmaktadır. Her ne kadar pozitif tanımlı operatörler durumunda Galerkin ve Ritz yöntemleri aynı sonuca götürse lerde, yöntemlerin fikir olarak tamamen farklı oldukları açıktır.

II.4. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

A, ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun lineer bir D_A cümlesinde pozitif tanımlı bir operatör ve $f \in H$ olsun.

$$AU = f \tag{2.4.1}$$

denklemi gözönüne alınsın. $\emptyset_k \in D_A$ olmak üzere $(k=1,2,\dots)$

$$A\emptyset_1, A\emptyset_2, \dots \tag{2.4.2}$$

H da bir baz olsun. Netice olarak, verilen her $f \in H$ ya ve her $\varepsilon > 0$ a karşılık bir pozitif m tamsayısı ve $c_1,\dots,c_m$ sabitleri bulmak mümkündür öyleki

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{m} c_k A\emptyset_k - f \right|\right| < \varepsilon \tag{2.4.3}$$

veya A nın lineerliğinden

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{m} A(c_k\emptyset_k) - f \right|\right| < \varepsilon \tag{2.4.4}$$

dir. En küçük kareler yönteminde $AU=f$ denkleminin

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \emptyset_k \tag{2.4.5}$$

şeklinde bir yaklaşık çözümünü arar. Burada a_k sabitleri

$$||AU_n - f||^2 = \min \tag{2.4.6}$$

şartından tanımlanmıştır. Daha detaylı olarak;

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \emptyset_k \tag{2.4.7}$$

şeklinde elemanların n-boyutlu uzayında, $||AV_n - f||^2$ ifadesi (2.4.5) elemanı için minimal olacaktır. Bu nedenle (2.4.7), $||AV_n - f||^2$ de yerine konursa o zaman bu ifade b_k değişkenlerine göre quadratik fonksiyondur. (2.4.6) şartının sağlanması için de $a_1,\dots,a_n$ noktalarında

$$\frac{\partial}{\partial b_1}||AV_n - f||^2 = 0, \dots, \frac{\partial}{\partial b_n}||AV_n - f||^2 = 0$$

denklemlerinin sağlanması gerekir. Ritz yöntemi durumuna benzer bir yolla aşağıdaki sistem elde edilir:

$$(A\phi_1,A\phi_1)a_1+(A\phi_1,A\phi_2)a_2+\ldots+(A\phi_1,A\phi_n)a_n=(f,A\phi_1)$$
$$(A\phi_1,A\phi_2)a_1+(A\phi_2,A\phi_2)a_2+\ldots+(A\phi_2,A\phi_n)a_n=(f,A\phi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(A\phi_1,A\phi_n)a_1+(A\phi_2,A\phi_n)a_2+\ldots+(A\phi_n,A\phi_n)a_n=(f,\phi_n) \qquad (2.4.8)$$

Bu sistem tek olarak çözülebilir. Çünkü $A\phi_k$ lar H da bir bazdır. Dolayısıyla katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır.

Gösterilebilirki (2.4.6) şartı ile katsayıları tanımlanmış (2.4.5) yaklaşımlar dizisi H_A da $AU=f$ denkleminin U_0 çözümüne yakınsar

Böylece $\forall\ \varepsilon>0$ a karşılık pozitif bir m tamsayısı bulmak mümkündür öyleki $n>m$ için $||U_n-U_0||<\varepsilon$ dır. O halde $\varepsilon>0$ seçilsin. A operatörü D_A da pozitif tanımlı olduğundan bir $C>0$ sabiti vardır öyleki $\forall\ U\in H_A$ için

$$||U||_A \geqslant C||U|| \qquad (2.4.9)$$

sağlanır. Ayrıca $AU=f$ denkleminin U_0 çözümünün her $U_n\in D_A$ yaklaşımı için

$$||U_n-U_0||_A \leqslant \frac{1}{C}\,||AU_n-f|| \qquad (2.4.10)$$

olduğu gösterilmişti. Böylece eğer n yeterince büyük seçilirse $||AU_n-f||$ ifadesinin keyfi küçük yapılabildiğini göstermek yeterlidir.

$$\zeta = C\ \varepsilon \qquad (2.4.11)$$

seçilsin. Bu ζ ye karşılık bir $m>0$ sayısı ve $c_1,\ldots,c_m$ sabitleri bulmak mümkündür öyleki (2.4.4) sağlanır.

$U_m=\sum_{k=1}^{m} b_k\phi_k$ lineer kombinasyonunda b_k katsayıları $||AU_m-f||^2=\min$ veya

$$||\sum_{k=1}^{m} A(b_k\phi_k)-f||^2 = \min \qquad (2.4.12)$$

olacak şekilde belirlenmiş olsun. Gözönüne alınan mevcut m tane $c_1,\ldots,c_m$ sabitleri için (2.4.4) sağlandığından, belirlenen b_k sabit leri için

$$||\sum_{k=1}^{m} A(b_k\emptyset_k)-f|| < \zeta \qquad (2.4.13)$$

dir. Bununla birlikte, eğer $n>m$ ve eğer (2.4.5) dizisinin a_k sabitleri (2.4.6) şartı sağlanacak şekilde belirlenmişse bu takdirde

$$||\sum_{k=1}^{n} A(a_k\emptyset_k)-f|| < \zeta \qquad (2.4.14)$$

de sağlanır. Gerçekten, $a_1=b_1,\ldots a_m=b_m, a_{m+1}=0,\ldots,a_n=0$ için (2.4.14) ile (2.4.13) eşitsizlikleri aynıdır. Üstelik a_k sabitleri (2.4.6) sağlanacak şekilde tanımlanmışsa o zaman (2.4.14) deki norm sadece azalabilir. Böylece eğer (2.4.5) dizisi (2.4.6) dan belirlenen a_k sabitleri ile tanımlanmışsa, bu takdirde $\forall$ $\varepsilon>0$ a karşılık bir m sayısı mevcuttur öyleki $\forall$ $n>m$ için

$$||AU_n-f|| < \zeta = C\varepsilon \qquad (2.4.15)$$

dir. (2.4.10) den $||U_n-U_0||< \varepsilon$ elde edilir. Ayrıca (2.4.15) den H da $\lim_{n\to\infty} AU_n=f$ olduğuda görülür.

Netice olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

II.4.1 Teorem: A, ayrılabilir bir H Hilbert uzayında yoğun lineer bir D_A cümlesinde pozitif tanımlı operatör ve $f \in H$ olsun. (2.4.2) dizisi de H da bir baz olsun. Bu takdirde (2.4.5) ile verilen ve (2.4.6) dan tek olarak belirlenen a_k katsayıları ile U_n dizisi $AU=f$ denkleminin U_0 çözümüne yakınsar.

(2.2.1) bazı seçilerek oluşturulmuş Ritz dizisi $\{V_n\}$ olsun. Aşikar olarak, V_n diziside (2.4.5) formundaki elemanların bir dizisidir. Fakat, en küçük kareler ile elde edilmiş $\{U_n\}$ dizisine tezat, katsayılar burada $FV_n=\min$ şartı ile tanımlanmıştır. Böylece direkt olarak görülürki $\forall n$ için $FV_n\leq FU_n$ dir veya $FU=||U-U_0||_A^2-||U_0||^2$ den $||V_n-U_0||_A\leq||U_n-U_0||_A$ dır. Buradan açıktırki bazın aynı seçimi altında Ritz dizisi H_A da $AU=f$ denkleminin U_0 çözümüne en küçük kareler ile oluşturulmuş $\{U_n\}$ dizisinden daha iyi bir yaklaşımdır.

II.5.STEEPEST DESCENT YÖNTEMİ

A bir H Hilbert uzayında pozitif tanımlı bir operatör, $f \in H$, ve U_o $AU=f$ denkleminin çözümü olsun. Önceden bilindiği gibi bu U_o elemanı

$$FU = (AU,U) - 2(f,U) \tag{2.5.1}$$

fonksiyonelini minimize eder.

Steepest Descent yöntemi aşağıdaki geometrik düşünce üzerine kurulmuştur:

F fonksiyoneli her $U \in H$ için belirli bir değer alır. Geometrik olarak bu fonksiyonel H uzayı üzerinde en küçük koordinatı U_o kabül eden bir yüzey olarak düşünülebilir. Böylece bir başlangıç noktasından başlayarak, bu minimal koordinata mümkün olduğunca çabuk yaklaşmak arzu edilir.

Belli bir $U_1 \in H$ elemanı seçilsin. Eğer $AU_1=f$ ise o zaman problem çözülmüştür. Eğer $AU_1=f$ ise U_1 elemanı aranan çözüm için birinci yaklaşım olarak alınabilir. H da öyle bir V_1 elemanı bulunsunki bunun için

$$||V_1|| = ||AU_1-f|| \tag{2.5.2}$$

ve

$$\frac{d}{dt} F(U_1+tV_1)|_{t=o} = \max \tag{2.5.3}$$

olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} F(U_1+tV_1) &= (A(U_1+tV_1),U_1+tV_1)-2(f,U_1+tV_1) \\ &= (AU_1,U_1)+2t(AU_1,V_1)+t^2(AV_1,V_1)-2(f,U_1) \\ &\quad -2t(f,V_1) \\ &= FU_1+2t(AU_1-f,V_1)+t^2(AV_1,V_1) \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

ve

$$\frac{d}{dt} F(U_1+tV_1)=2(AU_1-f,V_1)+2t(AV_1,V_1) \tag{2.5.5}$$

dir. $t=0$ için

$$\frac{d}{dt} F(U_1+tV_1)|_{t=o} = 2(AU_1-f,V_1) \tag{2.5.6}$$

elde edilir. (2.5.2) ve (2.5.3) den

$$V_1 = AU_1 - f \tag{2.5.7}$$

dir. Aynı zamanda (2.5.4) ve (2.5.5) den V_i in bu seçimiyle F fonksiyoneli minimal değrini

$$t=t_1=-\frac{(AU_1-f,V_1)}{(AV_1,V_1)} = -\frac{(V_1,V_1)}{(AV_1 . V_1)} \tag{2.5.8}$$

için $U=U_1+tV_1$ doğrusu boyunca alır. Çözümün ikinci yaklaşımı olarak

$$U_2 = U_1+tV_1 \tag{2.5.9}$$

elemanı alınabilir. Eğer $AU_2 \neq f$ ise aynı şekilde devam edilerek

$$V_2 = AU_2 - f \tag{2.5.10}$$

ve

$$U_3 = U_2+t_2V_2 \tag{2.5.11}$$

elemanları oluşturulabilir. Böylece $U_1, U_2, \ldots$ elemanlarının dizisi elde edilir. Şimdi, m ve M $\forall$ $U \in H$ için $m\|U\|^2 \leqslant (AU,U) \leqslant M\|U\|^2$ olacak şekilde pozitif sabitler olsun. Bu takdirde $\{U_n\}$ dizisi H da verilen denklemin U_o çözümüne yakınsar ve $\|U_{n+1}-U_o\|_A \leqslant \|U_1-U_o\|_A((M-m/M+m))^n$ hata tahmini geçerlidir.(bakınız,Miklin[29])

Steepest descent yöntemi pozitif tanımlı ve sınırlı operatör durumunda uygulanabilme imkanına sahibtir. Bu yöntemin tercih edildiği denklemlere tipik bir örnek integral denklemleridir.

III.BÖLÜM

Bu bölümde zaman içeren denklemlerin çözümlerinde varyasyonel yöntemlerden Ritz yönteminin nasıl uygulandığı anlatılacak ve yöntemin yakınsaklığı üzerinde durulacaktır.

III.1.PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE RİTZ YÖNTEMİ

Önceki bölümde değinildiği gibi Ritz yöntemi baz seçimi üzerine bir kısıtlama getirmemesi ve oluşturulan dizinin çözüme yakınsaklığı açısından uygulamalarda tercih edilen bir yöntemdir.(Rektors[32])

G, E_N de sınırlı bir bölge olsun. Bir $0\leqslant t\leqslant T$ zaman aralığı seçilsin ve $Q=G\times(0,T)$ ile gösterilsin. Q da

$$\partial U/\partial t + AU = f \tag{3.1.1}$$

denlemi

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{3.1.2}$$

başlangıç ve

$$U = 0 \tag{3.1.3}$$

sınır şartı ile gözönüne alınsın. Burada

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right]$$

dir. Ayrıca

$$((V,U)) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}dx \tag{3.1.4}$$

olsun. $[0,T]$ aralığı $h=T/p$ uzunluğunda p alt aralıklarına bölünsün ve aşağıdaki fonksiyoneller tanımlansın:

$$G_1U = ((U,U))+h^{-1}(U,U)-2(f,U)-2h^{-1}(U_0,U)$$

$$G_2U = ((U,U))+h^{-1}(U,U)-2(f,U)-2h^{-1}(U_1,U)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_pU = ((U,U))+h^{-1}(U,U)-2(f,U)-2h^{-1}(U_{p-1},U) \tag{3.1.5}$$

İfade edilen kabüller altında, seçilen V baz uzayında G_1U fonksiyonelini minimize eden tam olarak bir $U_1\in V$ fonksiyonu mevcuttur.

Bu fonksiyon her $v \in V$ için

$$((v,U))+h^{-1}(v,U) = (v,f)+h^{-1}(v,U_o) \tag{3.1.6}$$

integral özdeşliğini sağlar. Böylece bu fonksiyon G de

$$\begin{aligned} AU + h^{-1}(U-U_o) &= f \\ U &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

probleminin çözümüdür. Benzer olarak V de G_2U fonksiyonelini minimize eden tam olarak bir $U_2 \in V$ mevcuttur ve bu fonksiyon G de

$$\begin{aligned} AU + h^{-1}(U-U_1) &= f \\ U &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

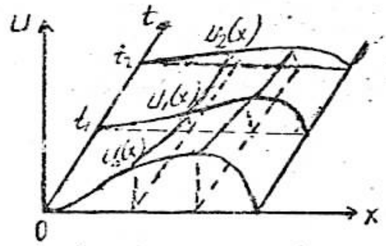
probleminin çözümüdür. Bu yolla devam ederek G_pU fonksiyonelini minimize eden $U_p \in V$ fonksiyonu elde edilirki bu

$$\begin{aligned} AU + h^{-1}(U-U_{p-1}) &= f \\ U &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

probleminin çözümüdür. Böylece, $t=o, t=h, \ldots, t=T$ için (3.1.1)-(3.1.3) probleminin yaklaşık çözümleri olan $U_o(x), U_1(x), \ldots, U_p(x)$ fonksiyonları gözönüne alınsın. G de tanımlanan bu fonksiyonlar yardımıyla $Q=\bar{G}\times[0,T]$ de aşağıdaki formülle verilen $U_1(x,t)$ fonksiyonunu oluşturulsun:

$$U_1(x,t)=U_j(x)+(t-t_j)h^{-1}[U_{j+1}(x)-U_j(x)] \tag{3.1.10}$$

$(t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1})$, burada $t_j=jh$ $(j=1,2,\ldots,p-1)$ $[0,T]$ aralığının bölünmüş noktalarıdır. Böylece her sabit $x_1 \in G$ için (3.1.10) $[0,T]$ aralığında t değişkeninin bir sürekli ve lineer fonksiyonudur. $t=t_j$ için bu fonksiyon x_1 noktasında $U_j(x)$ fonksiyonu ile çakışır.



$[0,T]$ aralığı orijinal p alt aralıklarına değilde, sırasıyla, $h_2=h/2$, $h_3=h/4$, ..., $h_n=h/2^{n-1}$ uzunluklarında $2p, 4p, \ldots, 2^{n-1}p$ alt aralıklarına bölünsün. Bu durumda, $U_1(x,t)$ fonksiyonunun oluşturulmasına benzer, aşağıdaki eşitlikle $U_2(x,t), U_3(x,t), \ldots, U_n(x,t), \ldots$ fonksiyonları oluşturulabilir:

$$U_n(x,t)=U_j^{(n)}+(t-t_j^{(n)})h_n^{-1}[U_{j+1}^{(n)}(x)-U_j^{(n)}(x)] \qquad (3.1.11)$$

$(t_j^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{j+1}^{(n)})$ burada $t_j^{(n)}=jh_n(j=0,1,\ldots,2^{n-1}p-1)$ dir. Sonuç olarak bu $U_n(x.t)$ fonksiyonlarının herbirinin grafiği şekilde gösterilen formda olacaktır. Doğal olarak, $[t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}]$ zaman aralıklarının uzunlukları n artarken azalır. Bu alt aralıkların herbirinde $U_n(x,t)$ fonksiyonu t değişkenine göre

$$[U_{j+1}^{(n)}(x)-U_j^{(n)}(x)]h_n^{-1} \qquad (3.1.12)$$

ifadesiyle tanımlanan $t=t_j^{(n)}$ için sağ taraflı, $t=t_{j+1}^{(n)}$ için sol taraflı türeve sahibtir. Yani $t=t_j^{(n)}$ noktalarının herbirinde t ye göre türev genelde farklıdır. Sezgisel olarak bu sıçramanın her $t=t_j$ için $n \to \infty$ iken azalacağını beklemek mümkündür. Böylece $U_n(x,t)$ dizisinin $U(x,t)$ limit fonksiyonu Q da $\partial U/\partial t$ türevine sahipolacaktır ve Q da

$$AU + \partial U/\partial t = f \qquad (3.1.13)$$

denklemini sağlayacaktır. Ayrıca, $U_n(x,t)$ fonksiyonlarının oluşturulmasından görülürki $U(x,t)$ fonksiyonu başlangıç ve sınır şartlarını da sağlayacaktır. Sonuç olarak $U(x,t)$ aranan çözüm olacaktır.

(3.1.10) fonksiyonunu oluşturan $U_j(x)$ fonksiyonlarının elde edilmesi Ritz yöntemi kullanılarak yapılır. Bu fonksiyonlar, V uzayın da (3.1.5)fonksiyonellerini minimize ederler. Böylece

$$v_1(x), v_2(x), \ldots \qquad (3.1.14)$$

V uzayında baz olsunlar. Bu bazın ilk r tanesi

$$v_1(x), v_2(x), \ldots, v_r(x) \qquad (3.1.15)$$

seçilmiş olsun. Ayrıca

$$(((v,U))) = ((v,U)) + h^{-1}(v,U) \qquad (3.1.16)$$

ile gösterilsin. (3.1.5) fonksiyonellerinden ilki olan G_1 i minimize eden

$$U_{r1}(x) = c_{11}^{(r)} v_1(x) + \dots + c_{1r}^{(r)} v_r(x) \qquad (3.1.17)$$

fonksiyonunun $c_{11}^{(r)}, \dots, c_{r1}^{(r)}$ katsayıları için Ritz denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&(((v_1,v_1)))c_{11}^{(r)} + (((v_1,v_2)))c_{12}^{(r)} + \dots + (((v_1,v_r)))c_{1r}^{(r)} = (v_1,f) + h^{-1}(v_1,U_o)\\
&(((v_1,v_2)))c_{11}^{(r)} + (((v_2,v_2)))c_{12}^{(r)} + \dots + (((v_2,v_r)))c_{1r}^{(r)} = (v_2,f) + h^{-1}(v_2,U_o)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(((v_1,v_r)))c_{11}^{(r)} + (((v_2,v_r)))c_{12}^{(r)} + \dots + (((v_r,v_r)))c_{1r}^{(r)} = (v_r,f) + h^{-1}(v_r,U_o)
\end{aligned} \qquad (3.1.18)$$

olacaktır. Buradan $c_{11}^{(r)}, \dots, c_{1r}^{(r)}$ elde edilerek (3.1.17) de yerine yazılır ve böylece $U_{r1}(x)$ elde edilmiş olur.

$U_{r1}(x)$ fonksiyonunun G_2 fonksiyonelinde $U_1(x)$ fonksiyonu ile yerdeğiştirmesinden $\widetilde{G}_2$ fonksiyoneli oluşurki bunu minimize eden $U_{r2}(x)$ fonksiyonu $U_{r1}(x)$ gibi benzer yolla bulunabilir. Böylece devam edilerek, $U_{r2}(x)$, G_3 de $U_2(x)$ yerine yazılıp $\widetilde{G}_3$ fonksiyoneli ve bunu minimize eden $U_{r3}(x)$ elde edilir. Sonuç olarak, G_p fonksiyonelini minimize eden $U_{rj}(x)$ $(j=1,\dots,p)$ fonksiyonunun $c_{j1}^{(r)},\dots,c_{jr}^{(r)}$ katsayıları için Ritz sistemi;

$$\begin{aligned}
&(((v_1,v_1)))c_{j1}^{(r)} + (((v_1,v_2)))c_{j2}^{(r)} + \dots + (((v_1,v_r)))c_{jr}^{(r)} = (v_1,f) + h^{-1}(v_1,U_{rj-1})\\
&(((v_1,v_2)))c_{j1}^{(r)} + (((v_2,v_2)))c_{j2}^{(r)} + \dots + (((v_2,v_r)))c_{jr}^{(r)} = (v_2,f) + h^{-1}(v_2,U_{j-1})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(((v_1,v_r)))c_{j1}^{(r)} + (((v_2,v_r)))c_{j2}^{(r)} + \dots + (((v_r,v_r)))c_{jr}^{(r)} = (v_r,f) + h^{-1}(v_r,U_{j-1})
\end{aligned} \qquad (3.1.19)$$

olacaktır. Burada $U_{ro} = U_o$ dır.

$U_1(x,t)$ fonksiyonuna benzer olarak $U_1^{(r)}(x,t)$ fonksiyonunuda

$$U_1^{(r)}(x,t) = U_{rj}(x) + (t-t_j)h^{-1}\left[U_{rj+1} - U_{rj}\right] \qquad (3.1.20)$$

ile tanımlansın. Burada, sadece, (3.1.10) daki $U_j(x)$ fonksiyonları ile Ritz yönteminden elde edilen $U_{rj}(x)$ fonksiyonları yerdeğiştirmiştir.

O halde $U_n^{(r)}(x,t)$ fonksiyonları da $U_n(x,t)$ ye benzer olarak;

$$U_n^{(r)}(x,t)=U_{rj}^{(n)}(x)+(t-t_j^{(n)})h^{-1}[U_{rj+1}^{(n)}-U_{rj}^{(n)}] \qquad (3.1.21)$$

bağıntısı ile tanımlanabilir.

III.3.1 Teorem: $U_n^{(r)}(x,t)$, Ritz yöntemi ile elde edilen fonksiyonlar ve $U(x,t)$ de verilen başlangıç-sınır değer probleminin genel çözümü olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{(r)}(x,t) = U(x,t)$$

dir.(bakınız, Rektors[32])

III.2. YÖNTEMİN YAKINSAKLIĞI

Daha önceki bölümlerde de değinildiği gibi;

$$\partial U/\partial t + AU = f \tag{3.2.1}$$

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{3.2.2}$$

$$U(0,t) = 0 \tag{3.2.3}$$

probleminin çözümü ile, seçilen baz uzayında

$$G_1(z)=A(z,z)+h^{-1}(z,z)-2(z,f)-2h^{-1}(z,z_0)$$

$$G_2(z)=A(z,z)+h^{-1}(z,z)-2(z,f)-2h^{-1}(z,z_1)$$

....

$$G_r(z)=A(z,z)+h^{-1}(z,z)-2(z,f)-2h^{-1}((z,z_{r-1})$$

fonksiyonellerinin minumumunu bulma problemi eşdeğerdir. Burada r $[0,T]$ zaman aralığının bölünmüş alt aralıklarının sayısı ve $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ fonksiyonları da sırasıyla $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_r(z)$ fonksiyonellerini minimize eden elemanlardır. Bu elemanlara, (3.1.10) tipinde bir fonksiyonun karşılık geldiği açıktır.($z_0(x)=U_0(x)$ olmak şartıyla) Bu fonksiyon

$$U_r(x,t) \tag{3.2.4}$$

ile gösterilsin. Minimizasyon fonksiyonları $z_1, \ldots, z_r$ nin Ritz yöntemi ile elde edildiği kabül edilsin. Bu takdirde V baz uzayından seçilmiş $\emptyset_1(x), \emptyset_2(x), \ldots, \emptyset_j(x)$ baz fonksiyonları için

$$z_k^{sk} = \sum_{j=1}^{sk} a_j^k \emptyset_j(x) \tag{3.2.5}$$

ile gösterilsin.(burada k indisi G_k fonksiyoneline karşılık gelir)

Buradan s1 seçilerek, z_1^{s1}; $G_1(z)$ fonksiyonelinde z yerine yazılır ve a_j^1 (j=1,...,s1) katsayıları $G_1(z_1^{s1})$ in minumum olma şartından belirlenebilir. Bu, lineer cebirsel denklemlerin bir sisteminin çöüzümü problemidirki bu da tek olarak çözülebilir. Böylece, s1 in seçilmesi ile z_1^{s1} tek olarak tanımlanmış olur. z_1^{s1}, $G_2(z)$ de z_1 yerine yazılarak oluşturulan yeni fonksiyonel $\widetilde{G}_2(z)$ ile gösterilsin ve s2 seçilsin. Bu kez $\tilde{G}_2(z)$ de z yerine z_1^{s2} yazılıp $\tilde{G}_2(z)$ nin minumum olma şartından a_j^2 $(j=1,2,\ldots,s2)$ katsayıları belirlenebilir. Buradan da z_2^{s2} tek olarak tanımlanlanmış olur. Bu şekilde devam edilerek

$$z_1^{s1}, z_2^{s2}, \ldots, z_r^{sr} \tag{3.2.6}$$

fonksiyonları tek olarak belirlenir. Burada yöntemin şu ilginç yanını belirlmekte yarar vardır:

(3.2.6) fonksiyonlarının tanımlanması a_j^k katsayılarının belirlenmesi ile mümkündür. Bu bizi lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümüne götürür. Ayrıca $G_k(z)$ fonksiyonellerinin $\tilde{G}_k(z)$ ye dönüşümünde $A(z,z)$, $h^{-1}(z,z)$ terimleri değişmez kalır. Dolayısıyla eğer $s_1=s_2=\ldots=s_k$ seçilirse, bütün sistemlerin sol tarafları aynıdır. Bu durumda nümerik işlemler çok basittir.

Şimdi, (3.2.6) fonksiyonları belirlenmiş olsun. Bu takdirde $z_1(x),\ldots,z_k(x)$ fonksiyonlarına (3.2.4) şeklinde bir fonksiyon karşılık geldiği gibi (3.2.6) fonksiyonlarına da (3.1.21) tipinde bir fonksiyon karşılık gelir. Bu fonksiyon

$$^{s1,s2,\ldots,sr}U_r(x,t) \tag{3.2.7}$$

ile gösterilsin. Eğer r ve $s_1,\ldots,s_r$ yeterince büyük seçilirse

$$||U(x,t)-{}^{s1,\ldots,sr}U_r(x,t)||_{L_2(Q)}$$

normunun keyfi olarak küçük yapılabildiğini göstermek gerekir.

$\varepsilon>0$ verilmiş olsun. Ayrıca $d_1, d_2,\ldots$ ile $[0,T]$ aralığının, $h_1, h_2,\ldots$ uzunluğunda bölünmüş alt aralıklarının dizisi gösterilsin. III.3.1 teoreme göre $\varepsilon/2$ verildiğinde, bir n_0 bulmak mümkündür öyleki $n>n_0$ olduğunda

$$||U(x,t) - U_n(x,t)||_{L_2(Q)} < \varepsilon/2 \tag{3.2.8}$$

sağlanır. Böyle bir n belirtilmiş ve kısaca $h=h_n$, $r=T/h$ denirse

$$||U(x,t) - U_r(x,t)||_{L_2(Q)} < \varepsilon/2 \qquad (3.2.9)$$

(3.2.8) e eşdeğerdir. (3.2.6) ve (3.2.7) fonksiyonları önceki bölümde anlatılan testle oluşturulmuş olsun. Bu durumda gösterilmelidirki;

$$||U_r(x,t) - {}^{s1,\ldots,sr}U_r(x,t)||_{L_2(Q)} < \varepsilon/2 \qquad (3.2.10)$$

olacak şekilde $s1,\ldots,sr$ sayılarının seçimi mümkündür. Bunun için $U_r(x,t)$, ${}^{s1,\ldots,sr}U_r(x,t)$ fonksiyonlarının yapısıda gözönünde bulundurularak, her $k=1,2,\ldots,r$ için

$$||z_k(x) - z_k^{sk}(x)||_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/2\sqrt{T} \qquad (3.2.11)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$s1$ yeterince büyük öyleki $L_2(\Omega)$ da $z_1(x)$ ve $z_1^{s1}(x)$ arasındaki fark δ_1 den küçük olsun. Eğer $z_2(x)$ ve $z_2^*(x)$ sırasıyla $G_2(z)$ ve $\widetilde{G}_2(z)$ fonksiyonellerinin minimizasyon elemanları iseler bu takdirde

$$||z_2^*(x) - z_2(x)||_{L_2(\Omega)} < \varepsilon_1 \qquad (3.2.12)$$

yazılabilir. Benzer olarak $s2$, $L_2(\Omega)$ da yeterince büyük öyleki $z_2^*(x)$ ile $z_2^{s2}(x)$ arasındaki fark δ_2 den küçük olacak şekilde seçilirse ozaman

$$||z_3^*(x) - z_3(x)||_{L_2(\Omega)} < \delta_1 + \varepsilon_2$$

yazılabilir. Burada $z_3(x)$ ve $z_3^*(x)$ sırasıyla $G_3(z)$ ve $\widetilde{G}_3(z)$ fonksiyonellerinin minimizasyon elemanlarıdır. Bu yolla devam edilerek $s1,\ldots,sr$ seçilirse her $k=1,2,\ldots,r$ için

$$||z_k^*(x) - z_k^{sk}(x)||_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/2r\sqrt{T}$$

elde edilir. Böylece özetlenecek olursa; n yeterince büyük ve $G_k(z)$ fonksiyonellerinin minimizasyonunda (3.2.5) serisinin yeterince büyük sayıda terimi alınırsa, o zaman problemin analitik çözümü ile Ritz yönteminden elde edilmiş ${}^{s1,\ldots sr}U_r(x,t)$ fonksiyonu arasındaki fark keyfi küçük yapılabilir.

IV. BÖLÜM

Bu bölümde Burgers denklemi ile lineer diffuzyon denlemi arasında Hopf-Cole dönüşümü vasıtasıyla bir ilişki kurulacaktır. Daha sonra diffuzyon denleminin çözümüne Ritz yöntemi uygulanacak ve aynı dönüşümle Burgers denkleminin çözümüne ulaşılacaktır.

IV.1.BURGERS DENKLEMİ VE HOPF-COLE DÖNÜŞÜMÜ

$$\nu U_{xx} = U_t + UU_x \tag{4.1.1}$$

non-lineer Burgers denklemi ile

$$\nu Q_{xx} = Q_t \tag{4.1.2}$$

lineer diffuzyon denklemi arasında

$$U(x,t) = -2\,\nu Q_x/Q \tag{4.1.3}$$

Hopf-Cole dönüşümü vasıtasıyla bir ilgi kurulabilir.(Miller[30], Cole[20],Hopf[25]) Aşağıdaki teorem bize bunu sağlayacaktır:

IV.1.1 Teorem: $Q(x,t)$; (4.1.2) denkleminin herhangi bir çözümü olsun.

Bu takdirde (4.1.3) Burgers denleminin çözümüdür.

İspat:

$$U(x,t) = f_x(x,t) \tag{4.1.4}$$

olsun. Bu (4.1.1) de yerine yazılırsa;

$$\nu f_{xxx} = f_{xt} + f_x f_{xx} \tag{4.1.5}$$

olur. Bu denklem x e göre integre edilirse

$$\nu f_{xx} = f_t + 2^{-1}(f_x)^2 \tag{4.1.6}$$

elde edilir. $f(x,t) = F[Q(x,t)]$ seçilsin. Burada $Q(x,t)$, (4.1.2) yi sağlayan bir fonksiyondur. Bu takdirde;

$$\nu F''(Q)Q_x^2 + \nu F'(Q)Q_{xx} = F'(Q)Q_t + 2^{-1}[F'(Q)Q_x]^2$$

dir. $Q(x,t)$, (4.1.2) nin çözümü olduğundan

$$2\nu\, F''(Q) = [F'(Q)]^2$$

kalır. $P(Q)=F'(Q)$ değişimi yapılarak integral alınırsa

$$dF = -2\nu Q^{-1}dQ$$

ve buradan

$$f(x,t) = F(Q) = -2\nu \ln Q + c_1$$

bulunur. (4.1.4) den dolayı

$$U(x,t) = -2\nu\left[\ln Q + c_1\right]_x = -2\nu Q_x/Q$$

elde edilirki bu teoremin ispatını tamamlamış olur.

Şimdi, (4.1.3) bağıntısında $x=\zeta$ değişken değişimi yapılır ve 0 dan x e kadar integral alınırsa;

$$\int_0^x U(\zeta,t)d\zeta = -2\nu \ln Q(\zeta,t)\Big|_0^x = -2\nu\left[\ln Q(x,t) - \ln Q(0,t)\right]$$

$$= -2\nu \ln\left[Q(x,t)/Q(0,t)\right]$$

bulunur. Buradan da

$$Q(x,t) = Q(0,t)\exp\{-(2\nu)^{-1}\int_0^x U(\zeta,t)d\zeta\} \qquad (4.1.7)$$

elde edilebilir. Eğer $U(x,t)$ için başlangıç değeri $U(x,0)=U_o(x)$ seçilir ve $C_o=Q(0,0)$ denirse, bu takdirde

$$Q(x,0) = C_o \exp\{-(2\nu)^{-1}\int_0^x U_o(\zeta)\,d\zeta\} \qquad (4.1.8)$$

olur. Böylece $Q(x,t)$ için başlangıç değeri bir C_o sabiti çarpımı ile tanımlanmış olur. Ancak (4.1.3) dönüşümünden dolayı C_o a verilecek değerin (4.1.1) denkleminin çözümü üzerinde etkisi olmayacaktır.

IV.4.2 Teorem: Burgers denkleminin (4.1.3) ile verilen çözümü tek dir.

İspat: Burgers denkleminin $U(x,t)$ çözümü; (4.1.2) denklemini sağlayan ve (4.1.7) ile verilen bir $Q(x,t)$ fonksiyonu tanımlar. Şimdi, (4.1.1) in iki farklı çözümü olduğu kabül edilsin. Yani $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ iki çözüm olsun. Bu takdirde, başlangıç şartından dolayı $U(x,0)=V(x,0)$ olmak zorundadır. $Q(x,t)$ nin başlangıç değeri (4.1.8) ile bir C_o sabitine bağlı olarak tanımlanmıştı. $Q(x,0)$ sadece $U(x,0)=V(x,0)$ a bağlı olduğundan $Q(x,0)$ her iki durumda da aynı dır. Aynı şekilde, sınır değerleri için de bu iki durum özdeş olduğundan (4.1.2) denkleminin $Q(x,t)$ çözümü her iki durumda da aynıdır. Halbuki $U(x,t)$ ve $V(x,t)$, (4.1.3) den hesaplandığından $U(x,t)=V(x,t)$ olur.

Böylece, (4.1.1) denklemi yerine (4.1.2) denklemi çözülerek (4.1.3) dönüşümü ile (4.1.1) in çözümü elde edilebilir. Doğalolarak (4.1.1) için verilen başlangıç ve sınır şartlarıda (4.1.3) vasıtasıyla (4.1.2) denkleminin başlangıç ve sınır şartlarına dönüştürülmelidir.

Bu çalışmada,

$$\nu U_{xx} = U_t + UU_x \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$$
$$U(0,t) = U(1,t) = 0$$
$$U(x,0) = \mathrm{Sin}(\pi x) \tag{4.1.9}$$

başlangıç-sınır değer problemi, (4.1.3) dönüşümü vasıtasıyla

$$\nu Q_{xx} = Q_t$$
$$Q_x(0,t) = Q_x(1,t) = 0$$
$$Q(x,0) = \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\mathrm{Cos}(\pi x)]\} \tag{4.1.10}$$

başlangıç-sınır değer problemi olarak gözönüne alınmış ve bu problem çözülmüş, daha sonra (4.1.3) ile (4.1.9) un çözümü elde edilmiştir.

IV.2. RİTZ YÖNTEMİNİN İNDİRGENMİŞ DENKLEME UYGULANMASI

(4.1.10) problemi için baz fonksiyonları, sınır şartlarına da uygun olarak;

$$v_1(x)=\mathrm{Cos}(\pi x); v_2(x)=\mathrm{Cos}(2\pi x), \ldots, v_r(x)=\mathrm{Cos}(r\pi x) \qquad (4.2.1)$$

şeklinde seçilebilir. $h=T/p$ ve p, $[0,T]$ zaman aralığının bölünmüş alt aralıkları olsun. Ayrıca, başlangıç şartı için

$$Q(x,0) = \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\mathrm{Cos}(\pi x)]\} = 1-(2\pi\nu)^{-1}(1-\mathrm{Cos}(\pi x))$$

şeklinde ilk iki terimi almak yeterli olacaktır. Böylece (3.1.5) fonksiyonellerinden ilkini minimize eden

$$U_{r1}(x) = c_{11}v_1(x) + \ldots + c_{1r}v_r(x) \qquad (4.2.2)$$

fonksiyonunun $c_{11}, \ldots, c_{1r}$ katsayıları için (3.1.18) sistemi oluşturulabilsin. $\mathrm{Cos}(\pi x)$ ve $\mathrm{Sin}(\pi x)$ fonksiyonlarının ortogonalliği de göz önünde bulundurulursa

$$(((v_i,v_k))) = \nu\int_0^1 i\pi\,\mathrm{Sin}(i x\pi)\cdot k\pi\,\mathrm{Sin}(k x\pi)dx + h^{-1}\int_0^1 \mathrm{Cos}(i\pi x)\mathrm{Cos}(k\pi x)dx$$
$$= \begin{cases} (\nu i^2\pi^2)/2 + 1/2h & i=k \quad \text{ise} \\ 0 & i\neq k \quad \text{ise} \end{cases}$$

olacağı açıktır. sistemin ikinci tarafında ise sadece

$$(v_1 Q_0) = \int_0^1 [1-(2\pi\nu)^{-1}(1-\mathrm{Cos}\pi x)]\mathrm{Cos}\pi x\, dx$$
$$= \int_0^1 \mathrm{Cos}\pi x\, dx - (1/2\pi\nu)\int_0^1 (\mathrm{Cos}\pi x - \mathrm{Cos}^2\pi x)\, dx$$
$$= 1/4\pi\nu$$

olacaktır. çünkü, diğer bütün terimler: $f=0$ ve ortogonallikten dolayı, sıfır dır. sonuç olarak Ritz sistemi;

$$2^{-1}(\nu\pi^2+h^{-1})c_{11} = 1/4h\pi\nu$$

ve buradan da

$$c_{11} = (4h\pi\nu)^{-1}/[2^{-1}(\nu\pi^2+h^{-1})]$$

olacaktır. Bu (4.2.2) de yerine yazılırsa;

$$U_{r1} = 1/(4h\pi\nu(\nu\pi^2+h^{-1})2^{-1})\ \mathrm{Cos}\,\pi x \tag{4.2.4}$$

elde edilebilir. Bu fonksiyon (3.1.5) in G_2 fonksiyonelinde yerine yazılır. Böylece $\tilde{G}_2$ yı minimize eden

$$U_{r2}(x) = c_{21}v_1(x) + \ldots + c_{2r}v_r(x) \tag{4.2.5}$$

fonksiyonunun $c_{21},\ldots,c_{2r}$ katsayıları için Ritz sisteminin sol tarafı yine (4.2.3) şeklinde olduğu görülür. Sağ tarafta ise, bazların ortogonalliğinden dolayı sadece

$$(v_1,U_{r1}) = (4h\nu\pi)^{-1}2(\nu\pi^2+h^{-1})^{-1}\int_0^1 \mathrm{Cos}^2\pi x\ dx$$

$$= (8h\pi\nu)^{-1}2(\nu\pi^2+h^{-1})^{-1}$$

terimi bulunacaktır. Dolayısıyla,

$$2^{-1}(\nu\pi^2+h^{-1})c_{21} = (8h^2\nu\pi)^{-1}2(\nu\pi^2+h^{-1})^{-1}$$

buradan da

$$c_{21} = (8h^2\nu\pi)^{-1}4(\nu\pi^2+h^{-1})^{-2}$$

elde edilebilir. (4.2.5) de yerine yazılırsa

$$U_{r2}(x) = (8h^2\nu\pi)^{-1}4(\nu\pi^2+h^{-1})^{-2}\ \mathrm{Cos}\pi x \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Genelleştirilecek olursa;

$$U_{rj}(x) = (2^{j+1}h^j\pi\nu)^{-1}2^j(\nu\pi^2+h^{-1})^{-j}\ \mathrm{Cos}\pi x\ \ (j=1,2,\ldots,p) \tag{4.2.7}$$

elde edilebilir. Böylece Ritz yöntemiyle (3.1.5) fonksiyonellerini minimize eden $U_{rj}(x)$ fonksiyonları elde edilmiş olur.

Şimdi bu fonksiyonlar lineer diffuzyon denkleminin birinci adım çözümlerini elde etmek için (3.1.21) de n=1 için yerine yazılarak $Q_1(x,t)$ dizisi oluşturulsun: $(t_j \leq t \leq t_{j+1})$, $(j=0,1,\ldots,p)$ için

$$Q_1(x,t) = U_{rj}(x) + (t-t_j)h^{-1}[U_{rj+1}(x)-U_{rj}(x)] \tag{4.2.8}$$

dir.

Şimdi,

j=0 için

$$Q_1(x,t) = U_{ro}(x) + h^{-1}(t-t_o)[U_{r1}(x) - U_{ro}(x)]$$

$$=1-(2\pi\nu)^{-1}(1-\cos\pi x) + h^{-1}(t-t_o)\Big[\frac{\cos\pi x}{4h\pi\nu(\pi^2\nu/2+1/2h)}$$

$$-1 + \frac{(1-\cos\pi x)}{2\pi\nu}\Big]$$

$$= \frac{2\pi\nu-1}{2\pi\nu}[1-(t-t_o)/h] + \frac{(\pi^2\nu h+1)-\pi^2\nu(t-t_o)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)}\cos\pi x$$

j=1 için

$$Q_1(x,t) = U_{r1}(x) + (t-t_1)h^{-1}[U_{r2}(x)-U_{r1}(x)]$$

$$= \frac{(\pi^2\nu h+1) - \pi^2\nu(t-t_1)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^2}\cos\pi x$$

j=2 için

$$Q_1(x,t) = U_{r2}(x) + (t-t_2)h^{-1}[U_{r3}(x)-U_{r2}(x)]$$

$$= \frac{(\pi^2\nu h+1) - \pi^2\nu(t-t_2)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^3}\cos\pi x$$

bağıntıları elde edilsin. Böyle devam edilerek J=p-1 için

$$Q_1(x,t) = \frac{(\pi^2\nu h+1) - \pi^2\nu(t-t_{p-1})}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^p}\cos\pi x$$

sonucuna varılır.

Böylece, (4.1.10) problemi için birinci adım çözümü

$$Q_1(x,t)= \frac{2\pi\nu-1}{2\pi\nu}[1-(t-t_o)/h]+ \frac{(\pi^2\nu h+1)-\pi^2\nu(t-t_j)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^{j+1}}\cos\pi x \qquad (4.2.9)$$

elde edilmiş olur. Benzer şekilde ikinci adım çözümü

$$Q_2(x,t)= \frac{2\pi\nu-1}{2\pi\nu}[1-(t-t_o)/h]^2+ \frac{(\pi^2\nu h+1)-\pi^2\nu(t-t_j)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^{j+2}}B\cos\pi x \qquad (4.2.10)$$

burada

$$B = (\pi^2\nu h+1) - \pi^2\nu(t-t_o) \qquad (4.2.11)$$

dır. Üçüncü adım çözümü ise

$$Q_3(x,t)= \frac{2\pi\nu-1}{2\pi\nu}[1-(t-t_o)/h]^3+ \frac{(\pi^2\nu h+1)-\pi^2\nu(t-t_j)}{2\pi\nu(\pi^2\nu h+1)^{j+3}}B^2\cos\pi x$$

dir.

(burada B (4.2.11) ile tanımlıdır.)

Nihayet n inci adım çözümü için $(j=0,1,\ldots,p-1),(n=1,2,\ldots,)$

$$Q_n(x,t)=\frac{2\pi\nu-1}{2\pi\nu}(1-(t-t_o)/h)^n+\frac{(\nu\pi^2h+1)-\nu\pi^2(t-t_j)}{2\nu\pi(\nu\pi^2h+1)^{j+n}}B^{n-1}\mathrm{Cos}\,\pi x$$

(burada B yine (4.2.11) ile tanımlıdır)

bağıntısını yazmak mümkündür.

Böylece (4.1.10) problemi için bir çözüm dizisi elde edilmiş olur.

Buradan (4.1.3) dönüşümü ile tersine dönersek, (4.1.9) probleminin $U(x,t)$ çözümü için $(j=0,1,\ldots,p,1$ ve $n=1,2,\ldots$ olmak üzere)

$$U_n(x,t) = 2\pi\nu\,\frac{AB^{n-1}\,\mathrm{Sin}\,\pi x}{C+AB^{n-1}\mathrm{Cos}\,\pi x} \tag{4.2.12}$$

yaklaşımlar dizisini elde ederiz. Burada B (4.2.11) ile ve

$$A = \left[(\nu\pi^2h+1)-\nu\pi^2(t-t_j)\right]/\left[2\pi\nu(\nu\pi^2\,h+1)^{j+n}\right]$$

ile

$$C = (2\pi\nu-1)(2\pi\nu)^{-1}(1-(t-t_o)/h)^n$$

gösterilmiştir.

Sonuç olarak (4.1.1) Burgers denklemi için (4.2.12) ile verilen bir yaklaşık çözüm elde edilmiştir. Bu çözümün nümerik olarak davranışını incelemek için $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant T$ çözüm bölgesi, çeşitli uzunluklarda kafeslere bölünmüş ve nokta çözümleri elde edilmiştir.

Sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

SONUÇ

Bu çalışmada, non-lineer Burgers denklemi için bir yarı-analitik çözüm yöntemi verilmiştir. Çözümler viskozite, x ve t nin değişik değerleri için elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

Yöntem; Hopf-Cole dönüşümü vasıtasıyla indirgenmiş denkleme direkt varyasyonel yöntemlerden birinin kullanılması ile kapalı bir çözüm formülünün elde edilmesi üzerine kurulmuştur. Daha sonra, bulunan kapalı çözüm formülünün nümerik davranışını incelemek amacıyla çözüm bölgesi kafeslere bölünerek nokta çözümler elde edilmiş ve bunlara karşı gelen grafikler çizilmiştir.

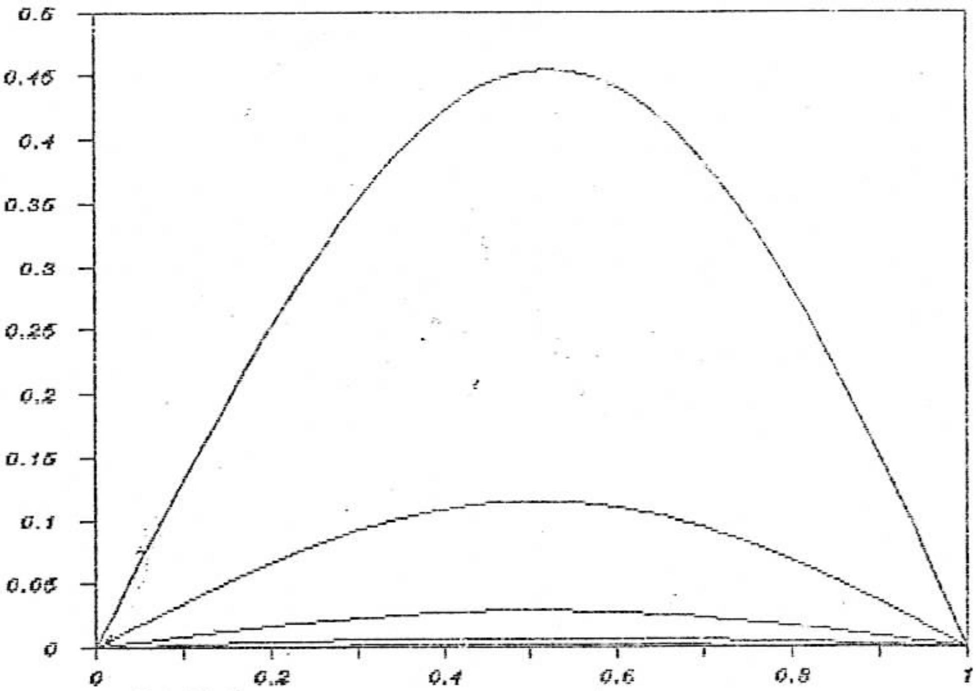
Nümerik çözümler için Ritz yöntemi, baz seçimi üzerinde her hangi bir kısıtlama getirmemesi, dolayısıyla değişik başlangıç ve sınır şartlarınıda kapsaması ve sonlu ortogonal yapısından dolayı hata terimi vermemesi açısından tercih edilmiştir.

Sayısal değerler için (4.1.9) da dolayısıyla (4.1.10) da verilen problem test problemi olarak alınmış, çeşitli sabit viskozite, zaman ve uzay değişkenlerinin farklı değerleri için sonuçlar elde edilmiştir

Durum incelemesine geçersek:

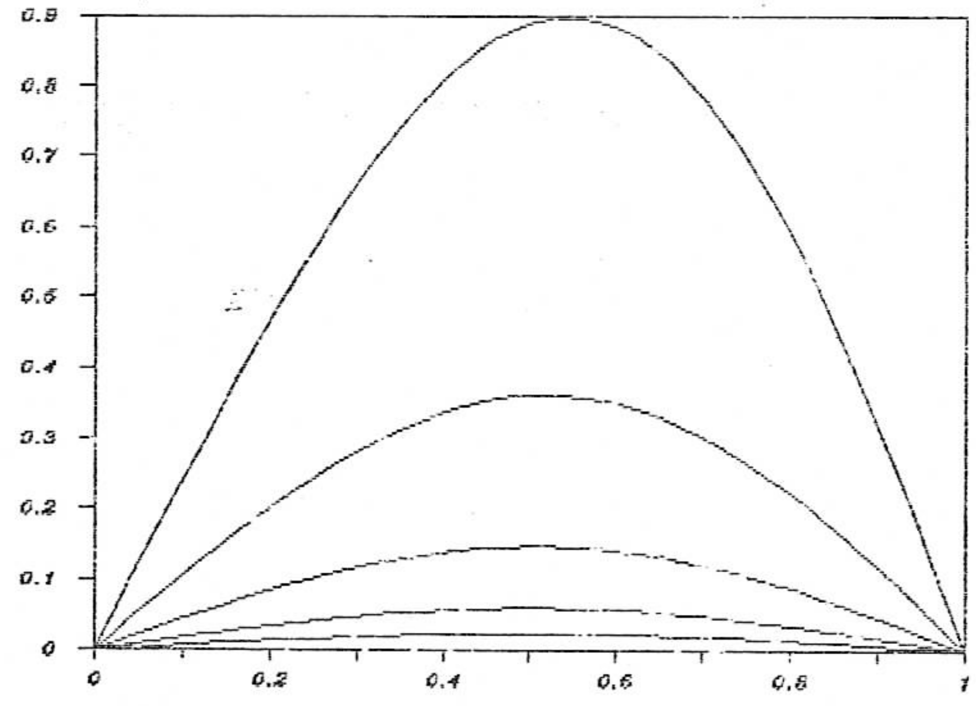
$\nu=1$ ve δx, δt lerin çeşitli değerleri için grafikler oluşturulmuştur. Buna göre ilk olarak $\nu=1$ ve $\delta x=0.02$, $\delta t=0.1$ için elde edilen grafik Şekil 1 de verilmiştir.

Görülebileceği gibi çok kaba δx ve δt adımları için bile elde edilen grafiğin, Varoğlu ve Finn[39] un elde ettiği sonuçlarla (bakınız, Şekil 2 [39]) büyük uyum içinde olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, daha rafine δx ve δt kullanılması durumunda çözümün verilen referansla çok daha uyumlu olacağı açıktır. Bunun için,

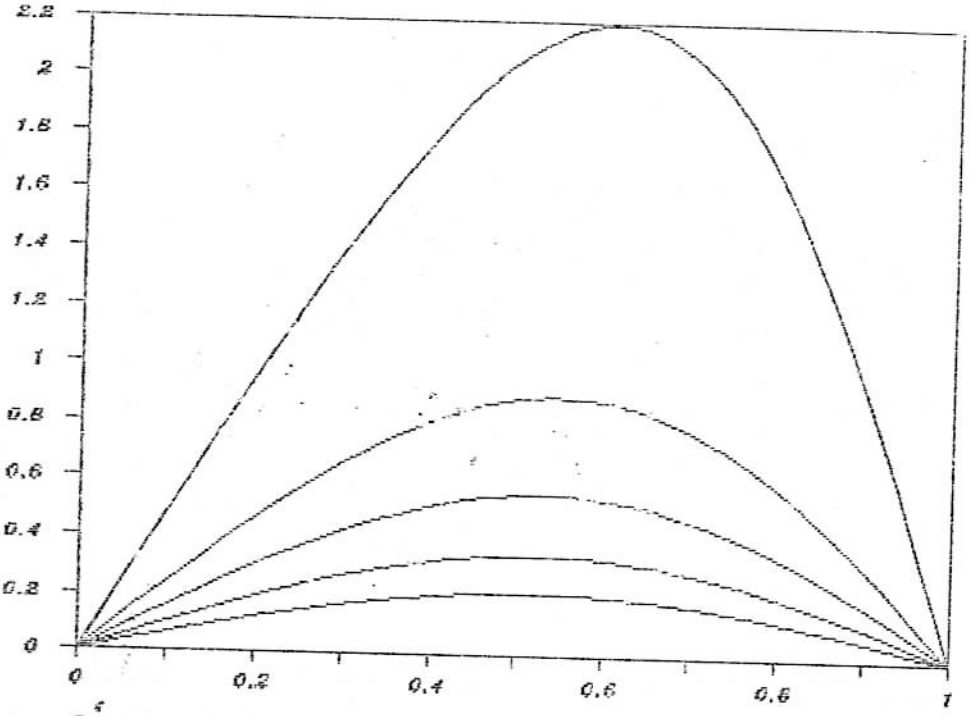


Şekil 1

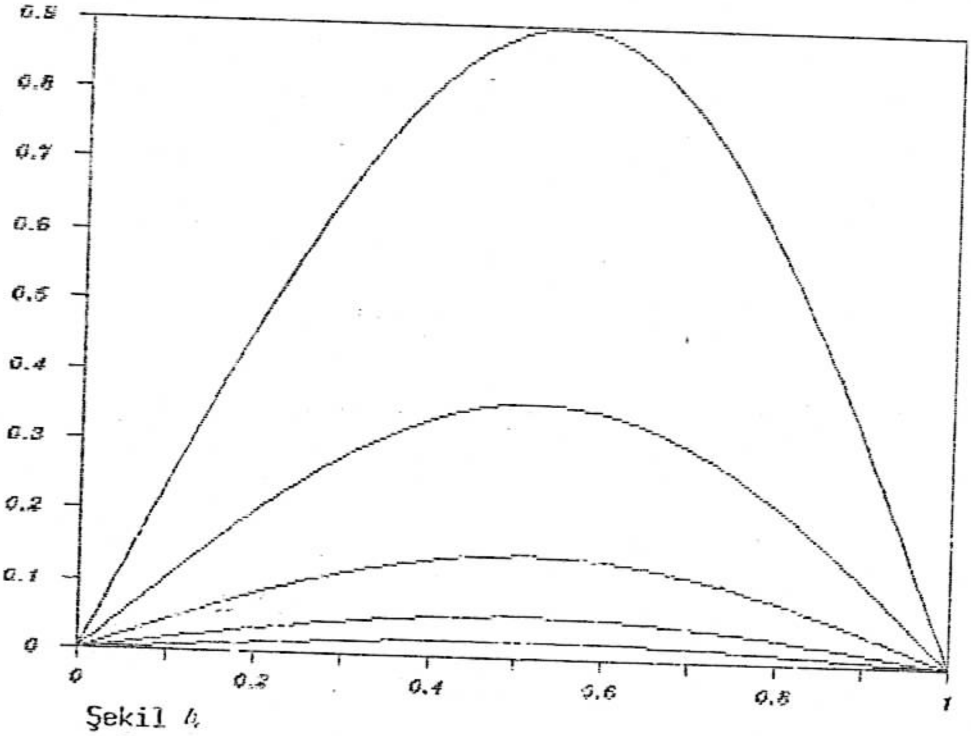
$\delta x=0.02$, $\delta t=0.02$; $\delta x=0.02$, $\delta t=0.01$; $\delta x=0.01$, $\delta t=0.02$; $\delta x=0.01$, $\delta t=0.01$ değerlerine karşı gelen grafikler sırasıyla Şekil 2, 3, 4,ve 5 de verilmektedir.



Şekil 2

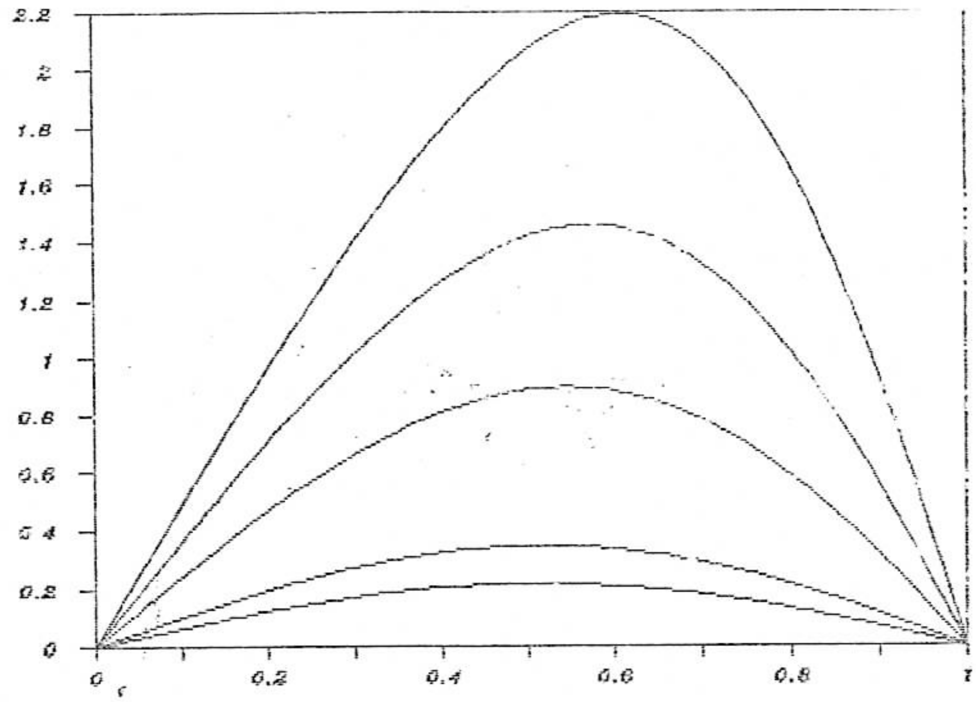


Şekil 3



Şekil 4

Karşılaştırmaların mümkün olduğu kadar aynı bazda yapılabilmesi için onların iterasyon sayısındaki artma ile bizim sayısal çözümdeki kafes noktalarının sayısının artırılmasındaki paralelliğin göz önüne alınması uygun olacaktır. Bu yapıldığı takdirde büyük bir uyuşma



Şekil 5

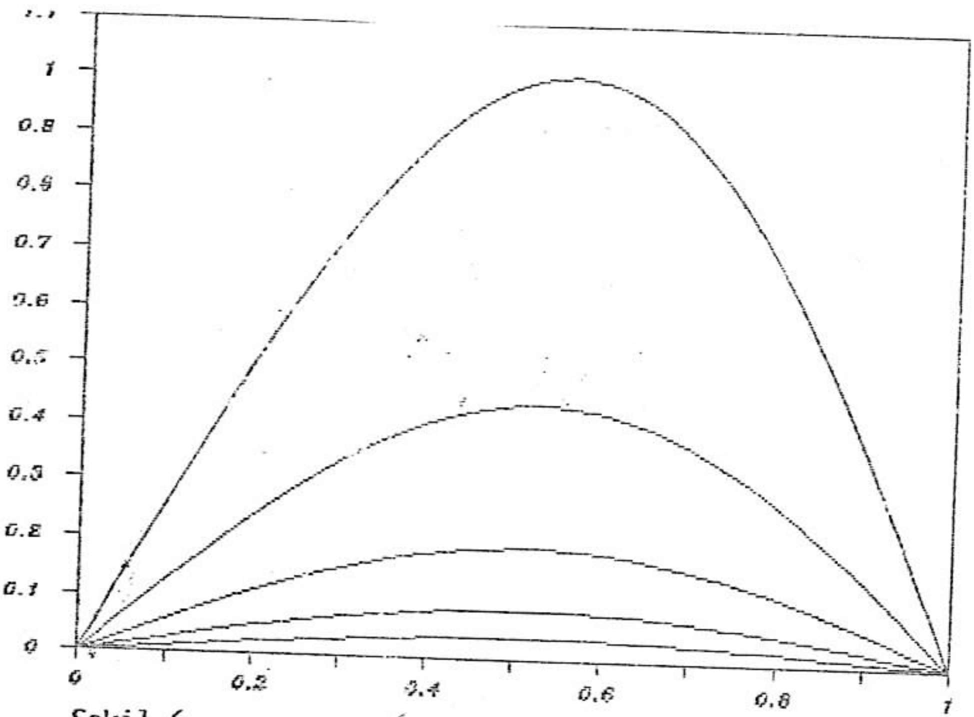
içinde oldukları sezinlenebilir. Buradan çıkarılabilecek matematiksel sonuç, kabaca, yöntemin çeşitli δx ve δt değişimleri için nümerik kararlı olduğudur.

Problemin asıl amacı, çeşitli viskozite (veya Reynold) değerleri için çözümlerin incelenmesi olduğundan, çeşitli viskozite değerleri için sayısal değerlerde elde edilmiştir.

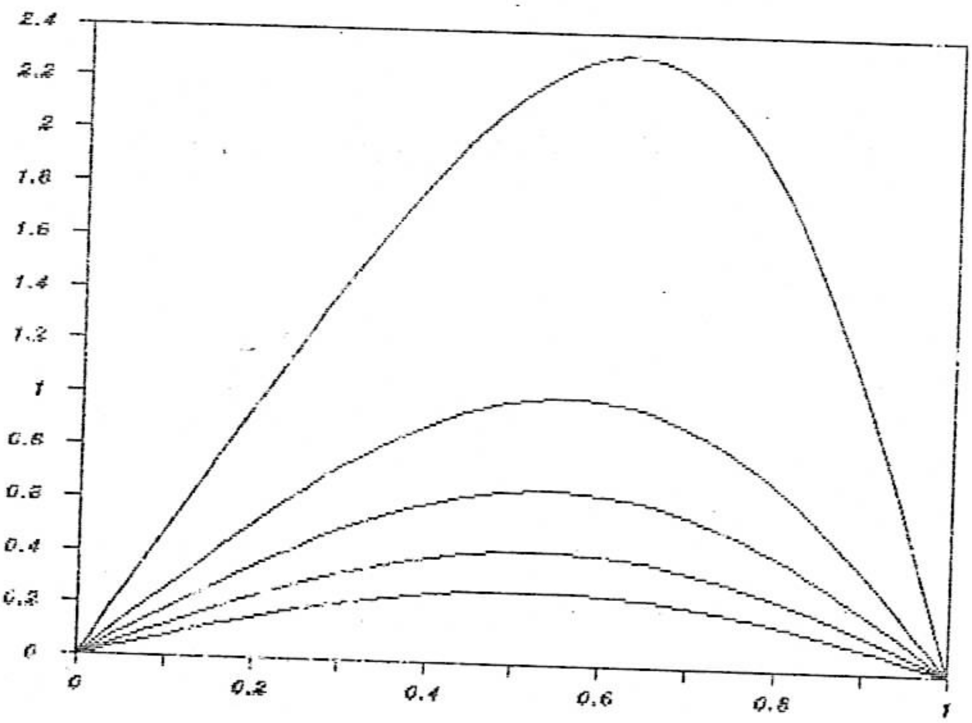
Bunun için, viskozite değeri $\nu=0.9$ alınarak δx ve δt değerleri sırasıyla $\delta x=0.02$, $\delta t=0.02$; $\delta x=0.02$, $\delta t=0.01$; $\delta x=0.01$, $\delta t=0.02$, $\delta x=0.01$, $\delta t=0.01$ değerleri için Şekil 6, Şekil 7, Şekil 8, Şekil 9 daki sonuçlar verilmiştir.

Sonuçların $\nu=1$ değerine çok yakın olması gerektiği kolayca tahmin edilebileceğinden çözüm değişen viskozite değerleri içinde nümerik kararlı olduğu sonucuna varılabilir.

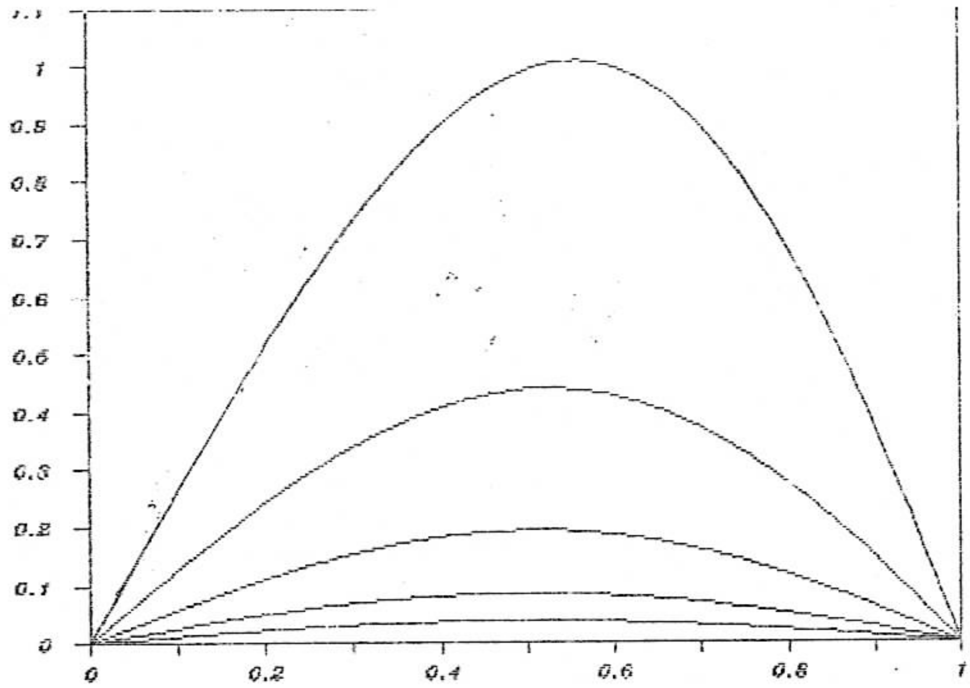
Gözlemleri kuvvetlendirmek için aynı δx ve δt değerleri alınarak $\nu=0.8$, 0.7, 0.6 değerleri içinde grafikler sırasıyla verilmiştir:



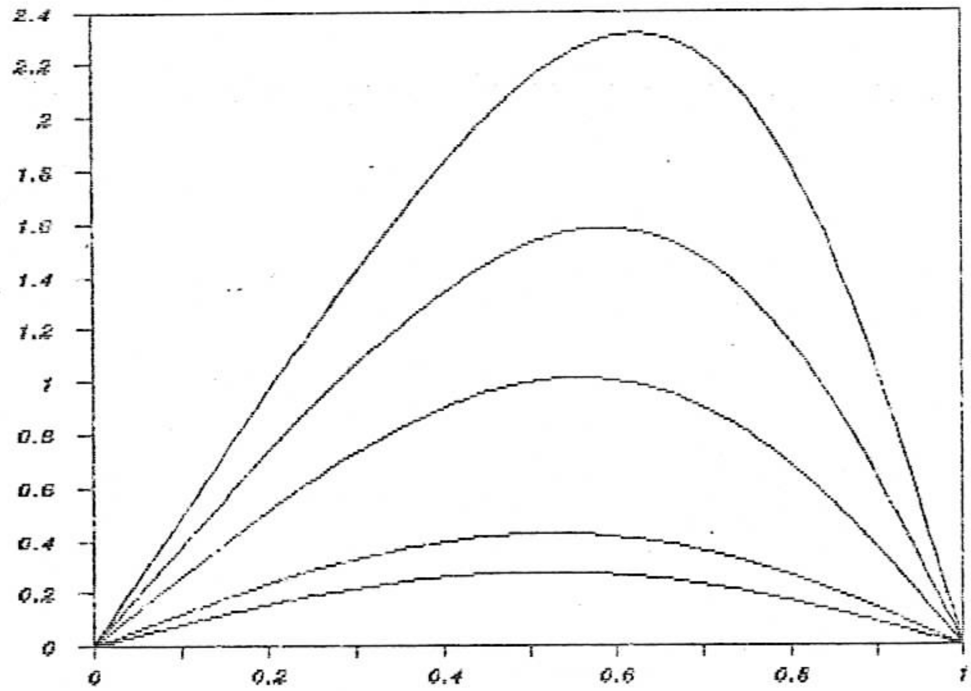
Şekil 6



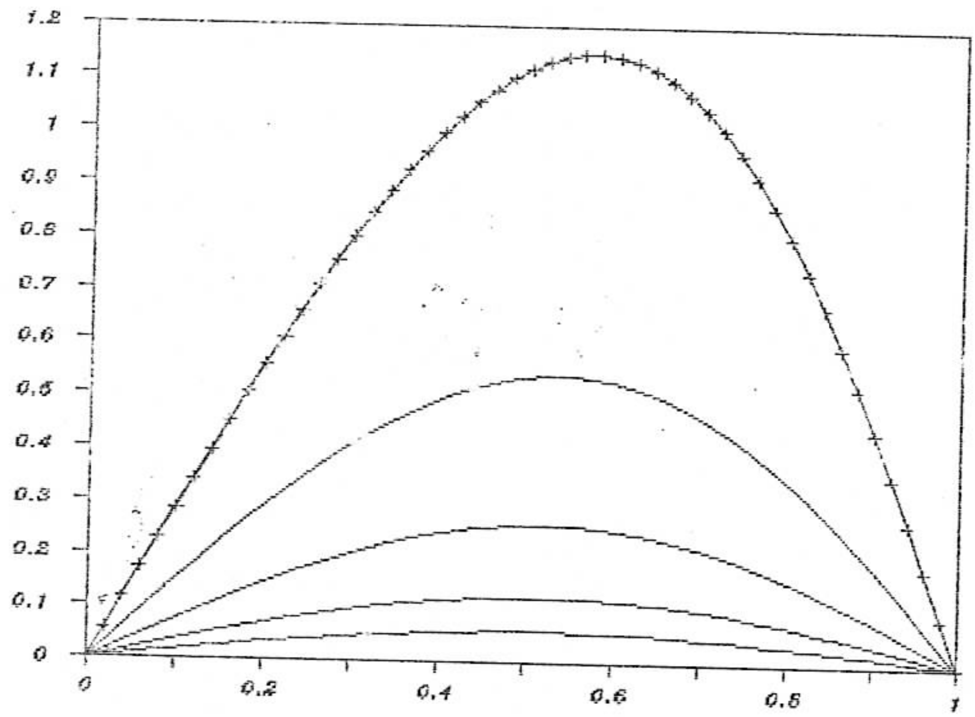
Şekil 7



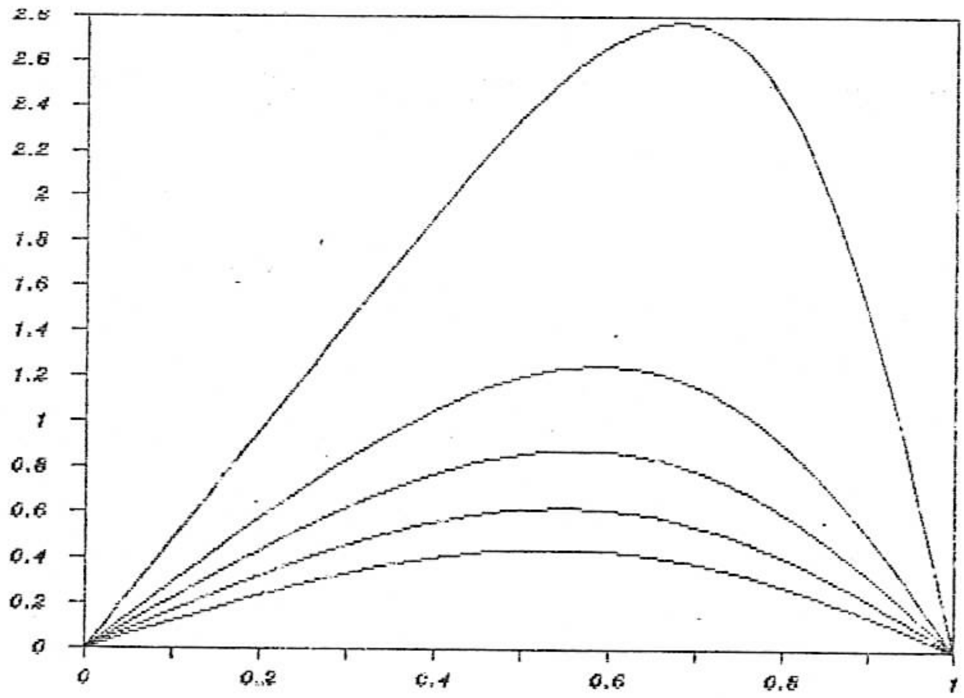
Şekil 8



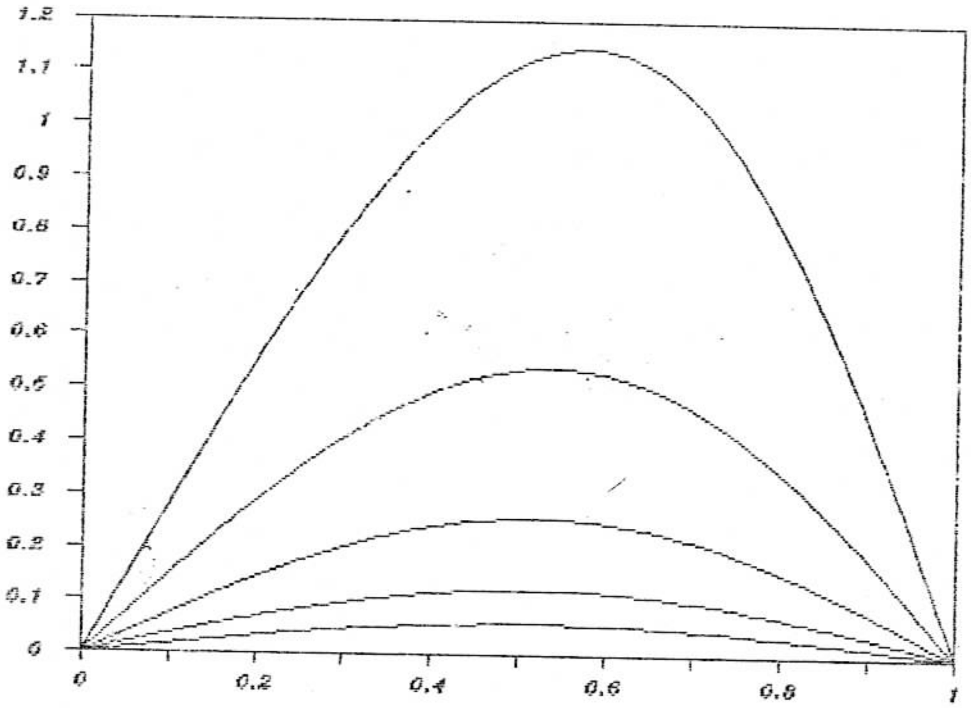
Şekil 9



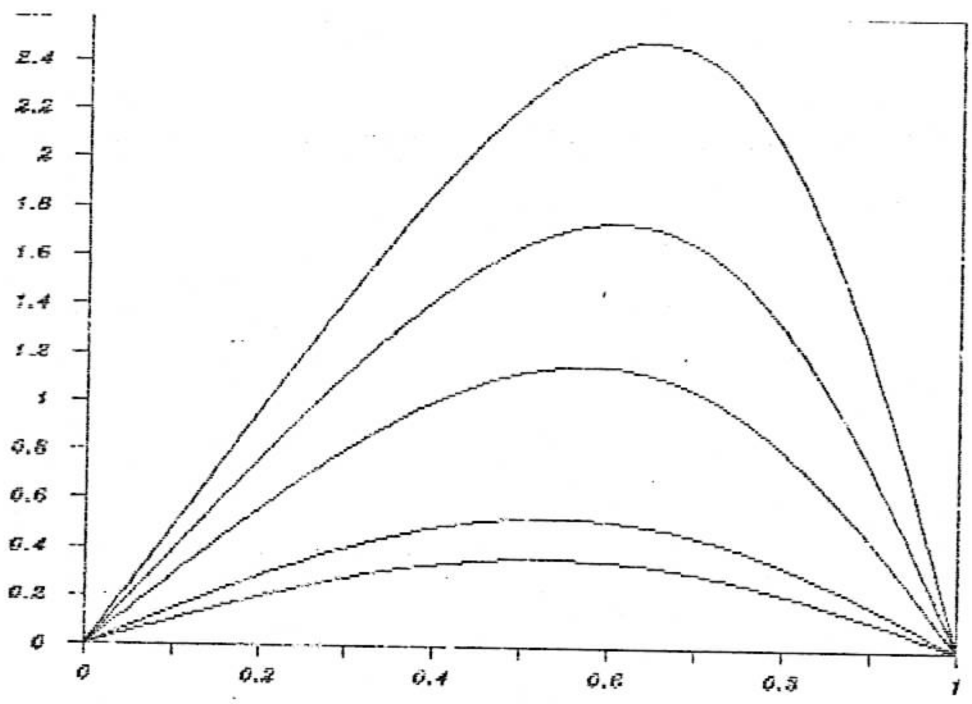
Şekil 10 ν=0.8 δx=0.02 δt=0.02



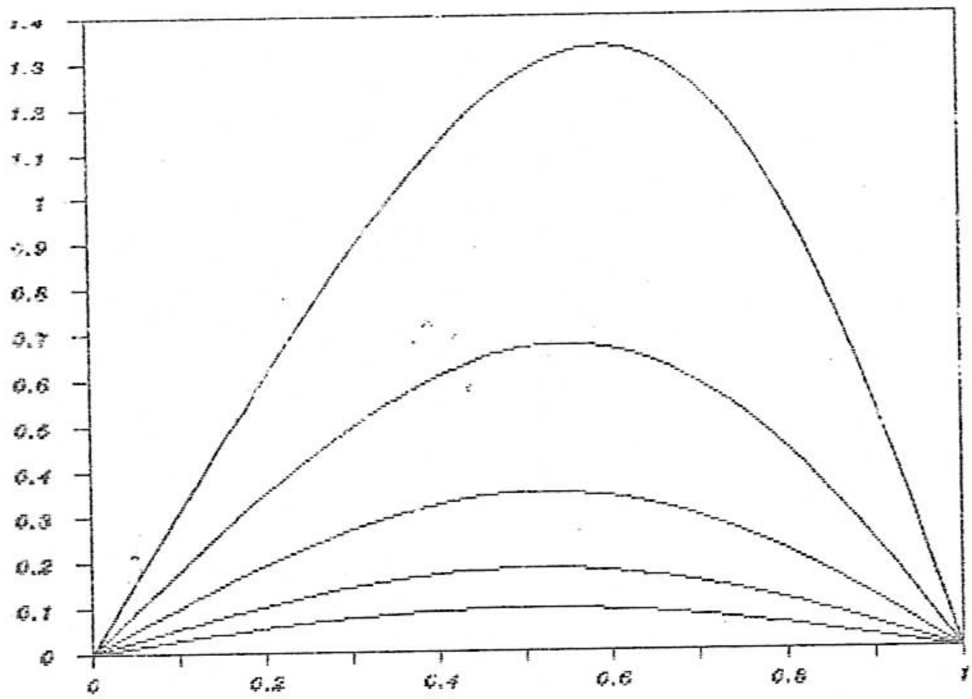
Şekil 11 ν=0.8 δx=0.02 δt=0.01



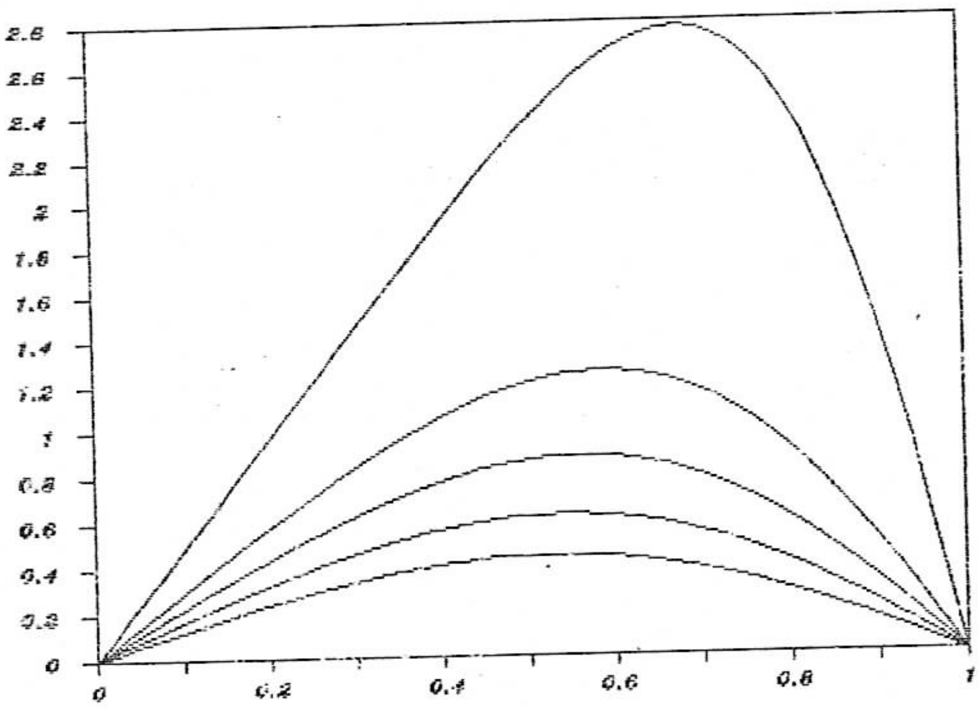
Şekil 12 ν =0.8 δx=0.01 δt=0.02



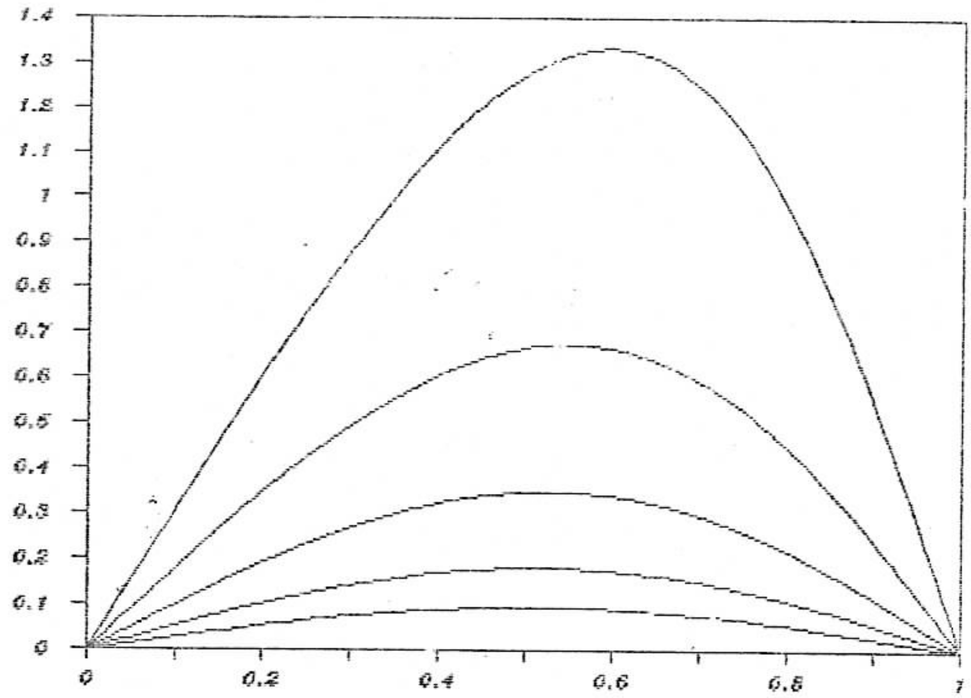
Şekil 13 ν=0.8 δx=0.01 δt=0.01



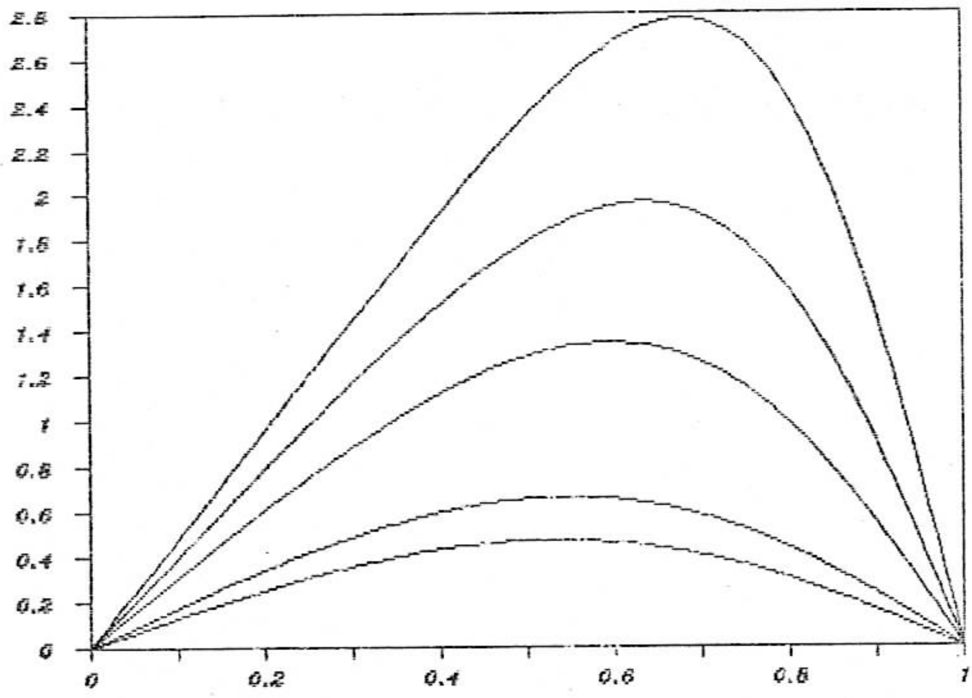
Şekil 14 ν=0.7 δx=0.02 δt=0.02



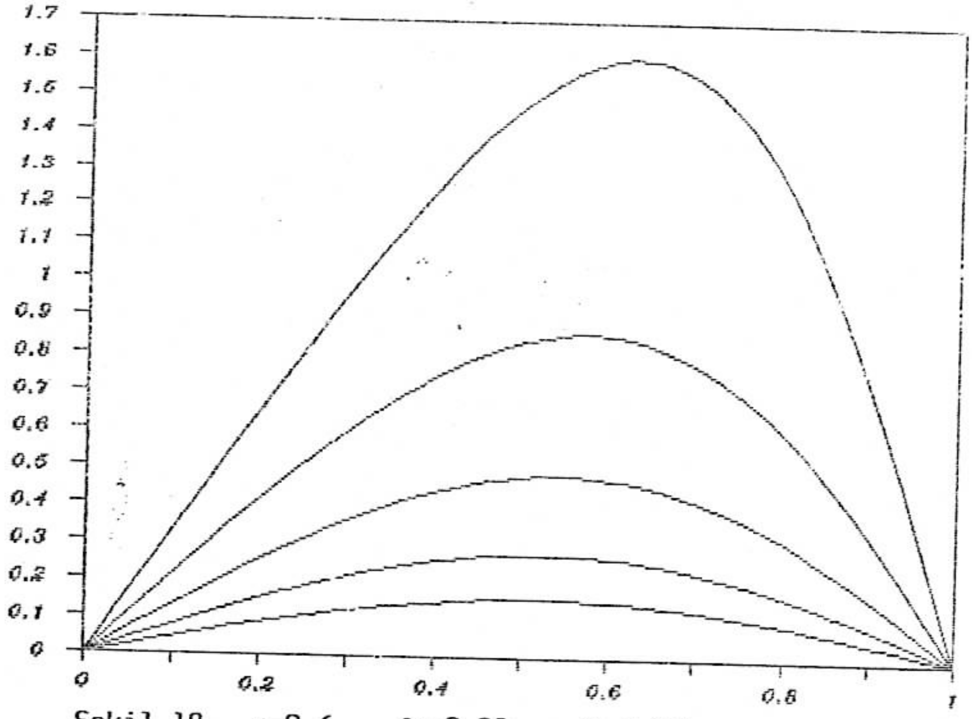
Şekil 15 ν=0.7 δx=0.02 δt=0.01



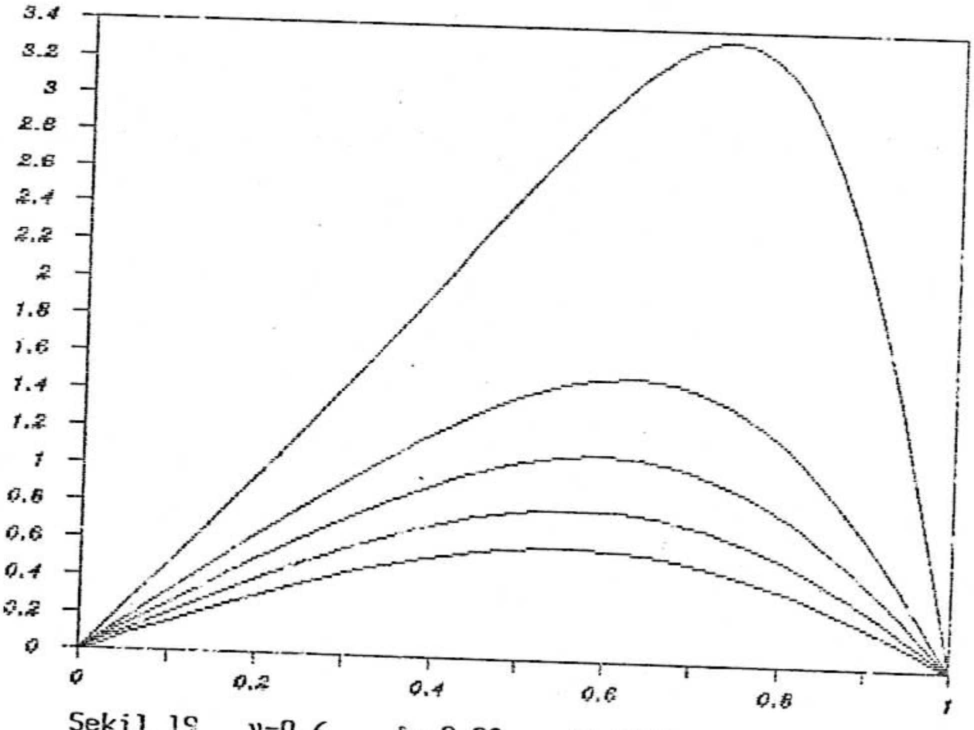
Şekil 16 ν=0.7 δx=0.01 δt=0.02



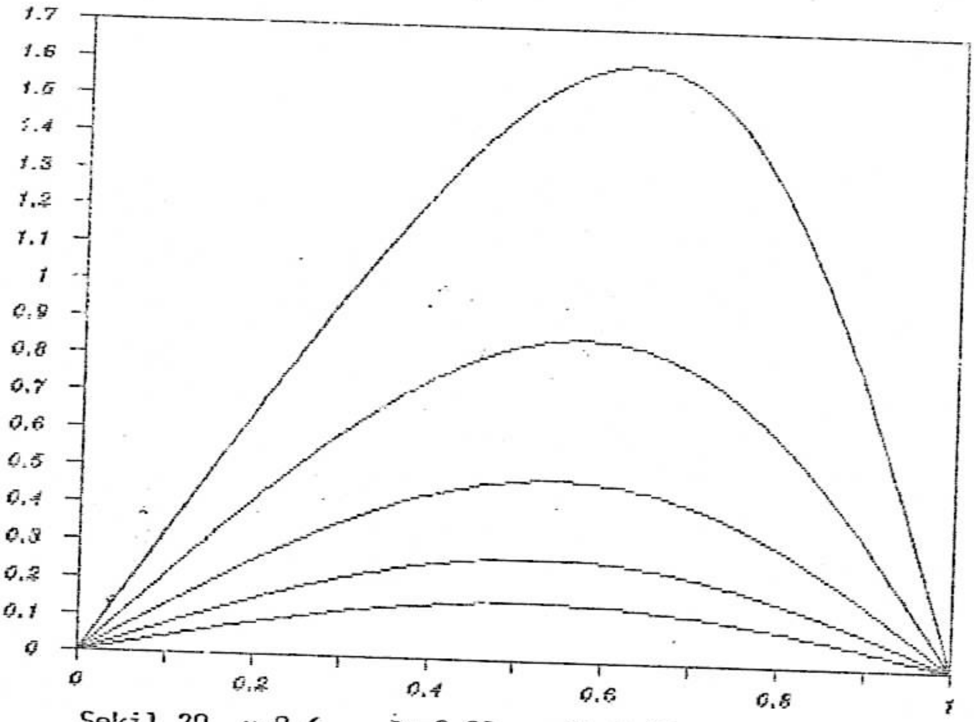
Şekil 17 ν=0.7 δx=0.01 δt=0.01



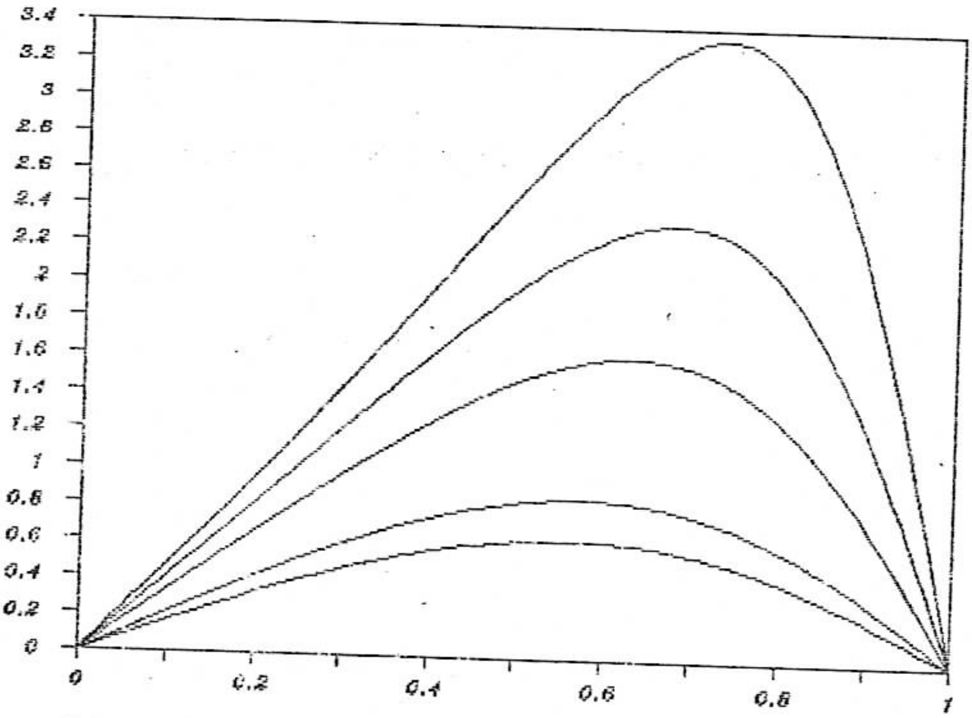
Şekil 18 ν=0.6 δx=0.02 δt=0.02



Şekil 19 ν=0.6 δx=0.02 δt=0.01



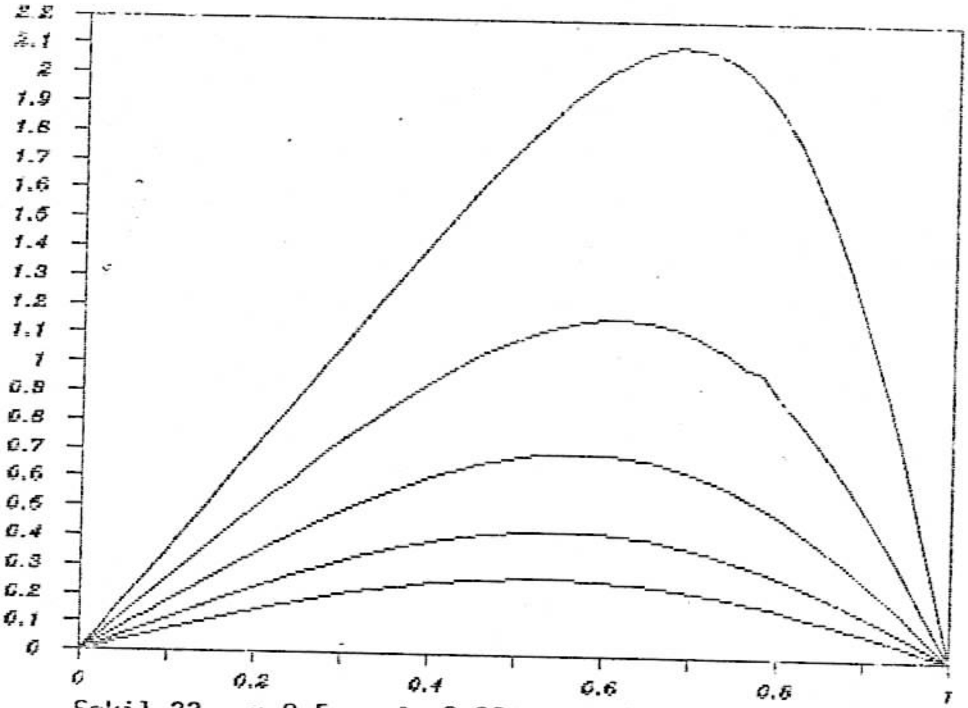
Şekil 20 ν=0.6 δx=0.01 δt=0.02



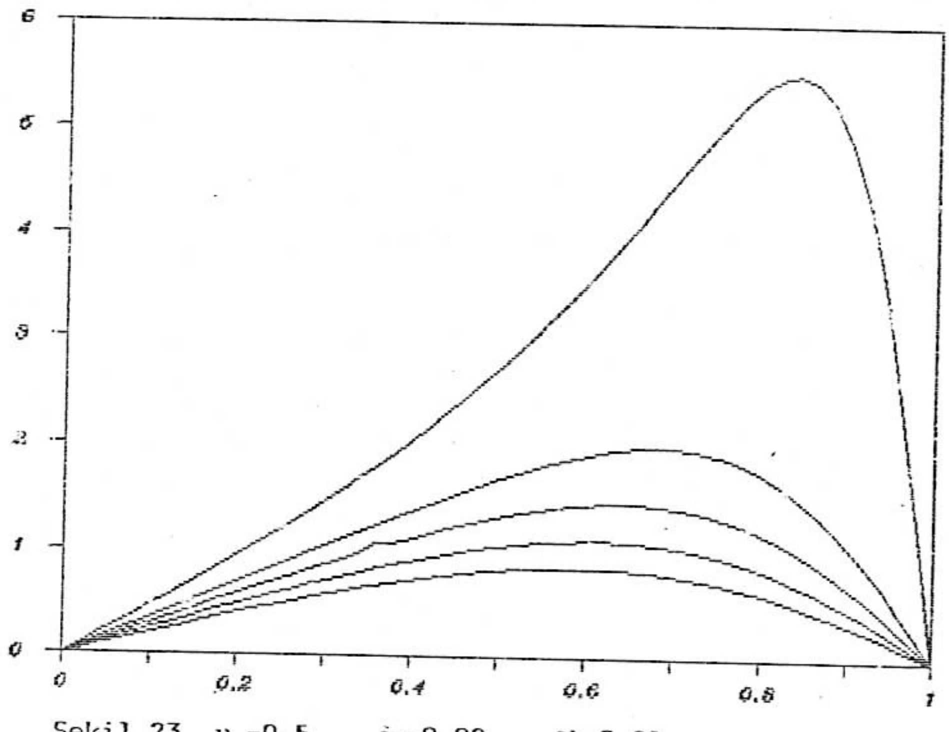
Şekil 21 ν=0.6 δx=0.01 δt=0.01

ş26, ϑ = 0.6 t = 0.01 x = 0.01

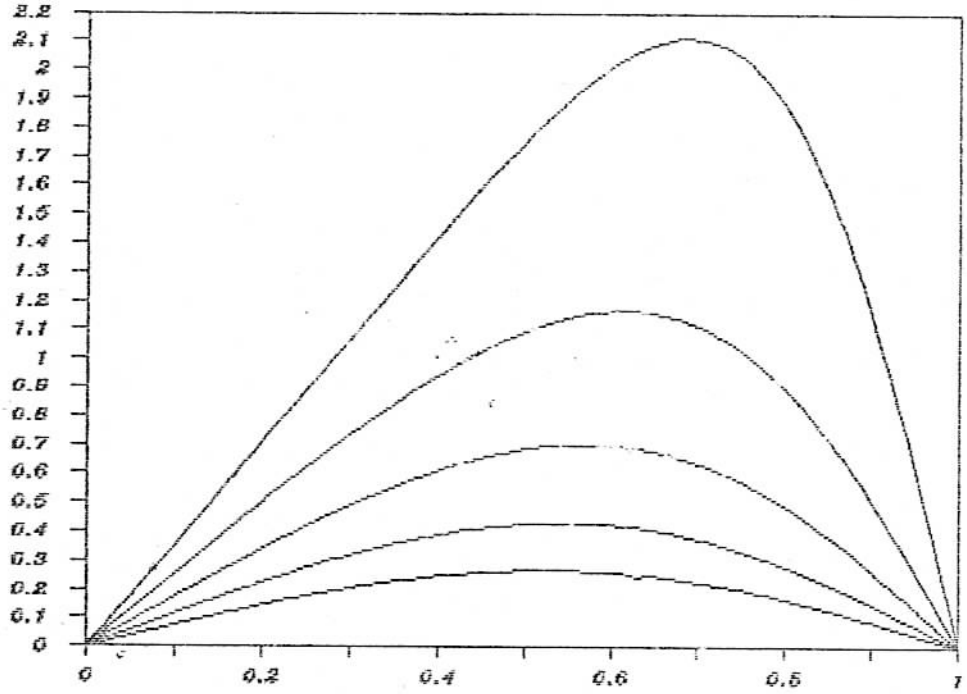
Viskozitenin yeterli küçülmesi durumlarında çözüm profilinin, x=1 e yaklaşmaları keskin piklerle olacağı beklenmesinden dolayı, ν =0.9, 0.8, 0.7, 0.6 görünmeyen bu değişimlerin, bu sayısal değerler altında ilk defa ν=0.5 te açığa çıktığı gözlenmektedir.(bakınız,Şekil 22, 23, 24, 25)



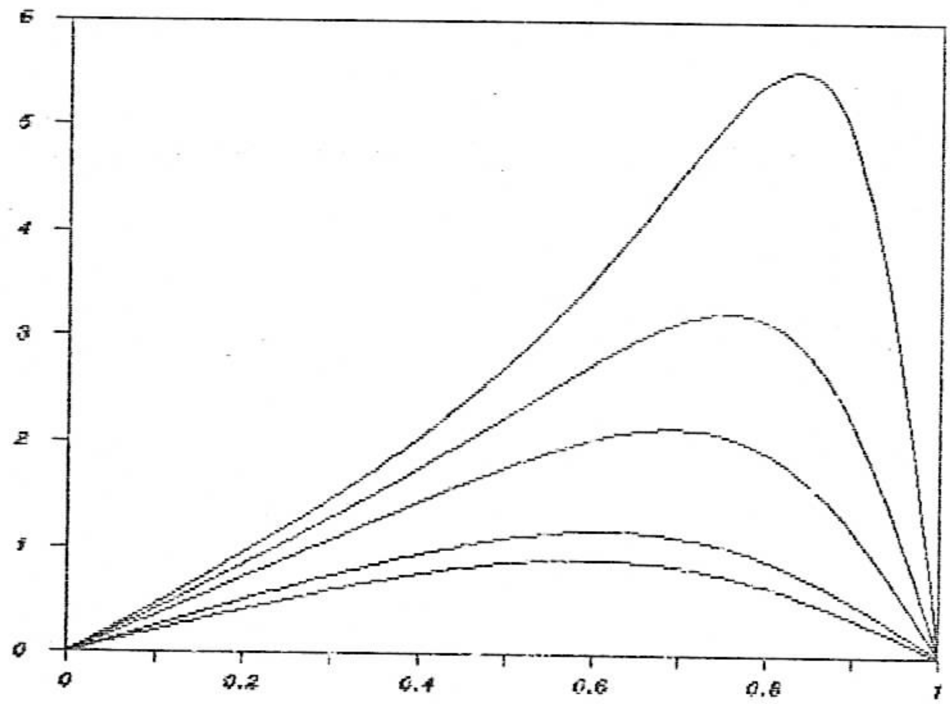
Şekil 22 ν=0.5 δx=0.02 δt=0.02



Şekil 23 ν =0.5 δx=0.02 δt=0.01



Şekil 24 $\nu=0.5$ $\delta x=0.01$ $\delta t=0.02$



Şekil 25 $\nu=0.5$ $\delta x=0.01$ $\delta t=0.01$

Bu aşamada piklerin çok erken oluştukları düşünülebilir. Hatta $\nu = 0.4$ viskozite değerlerine bakılarak (bakınız, Şekil 26, 27, 28, 29) yöntemin yetersizliği hakkında önyargıya da varmak mümkün olabileceği düşünülebilir. Bunun en önemli nedeninin de, denklemin içerdiği $\nu \partial^2 U / \partial x^2$ teriminin, denklemin tümü üzerindeki etkisinin azalmasından dolayı olduğu açıktır. Çünkü ν nin çok küçük değerleri için denklemin hiperbolik özellik göstermesi beklentilerimiz arasındadır. Her ne kadar sayısal değerler alınmamışsada, değişimin bu doğrultuda olduğunu destekleyen araştırmalar vardır. (bakınız, [39])

Fakat, bu teorik saptama da gözönüne alınmasına rağmen, dikkat edilirse, bizim yaklaşımımızda grafiklerle verilen çözümlerin hemen hepsinin elde edilen genel çözüm serisinin ilk adımı kullanılarak elde edildiği görülecektir. Yukardaki düşüncelerin yersiz olduğunu göstermek için, $\nu = 0.4$ alınarak ikinci ve üçüncü adım çözümleri yapılmış ve grafikleri (Şekil 30, 31) verilmiştir. Görülebileceği gibi ilk adım için $\nu = 0.4$ de bozulma gösteren çözümler aynı viskozite değeri için ikinci ve üçüncü adım çözümlerinde daha iyi sonuçlar vermektedir.

Bu da elde ettiğimiz ardışık yaklaştırma çözümünün adım sayısı arttırıldıkça gerçek çözüme yakınsamasının olacağının gözlemsel bir ifadesidir. Bu görüşümüzü kuvvetlendirmek için $\nu = 0.3$ alındığında iki .inci adım için bozulma gösteren çözüm, üçüncü adım alındığında bozulmanın kalktığını göstermektedir. (bakınız, Şekil 32, 33)

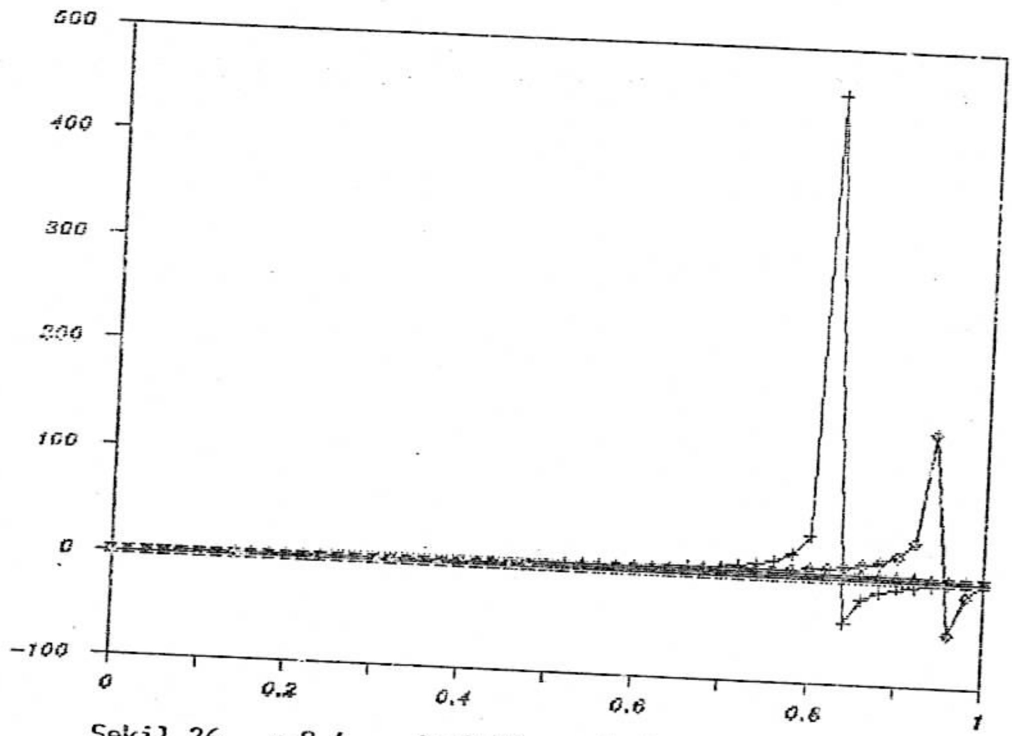
Yine $\nu = 0.2$ alındığında üçüncü adım için de bozulma gösteren çözümün daha fazla adımlar alınması durumunda bozulmayı kaldıracağını düşünmek doğru olacaktır. (bakınız, Şekil 34) Elimizdeki bilgisayarın kapasitesinin sınırlı olması dolayısıyla daha küçük ve çok adımlar için elde edilebilecek çözümlerin sayısal değerleri elde edilememiştir.

Fakat, teorik olarak önceki bölümlerde belirtildiği gibi $n \to \infty$ a gittiğinde çözümün tam analitik çözüm olması beklentimizdir.

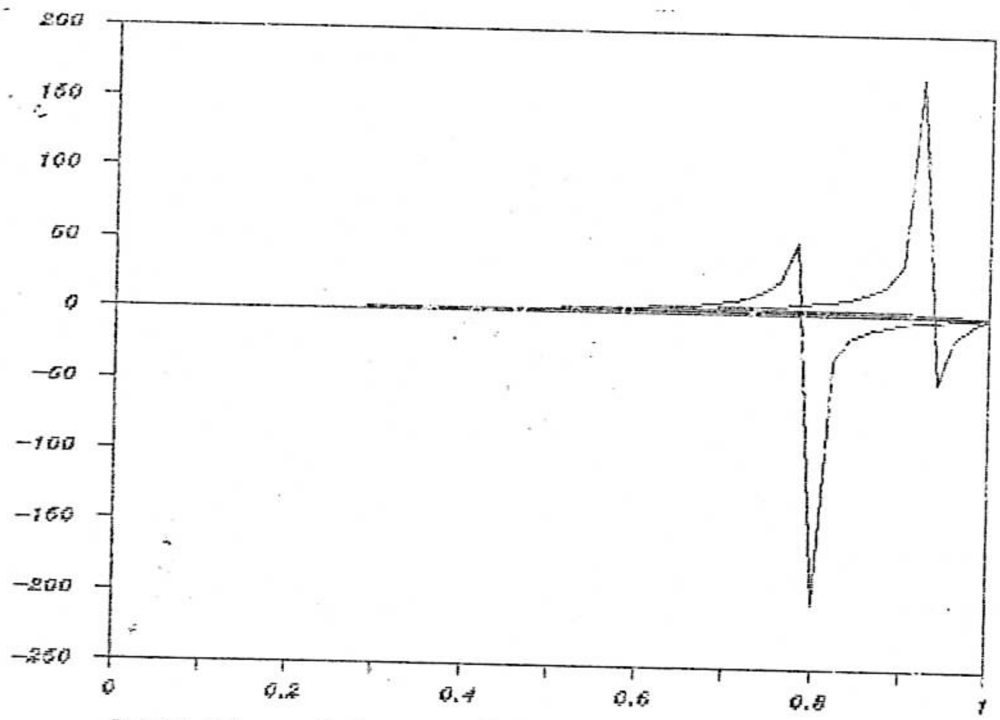
Giriş prağrafında değinildiği gibi çözümde sonlu-ortogonal bir seri kullanıldığından analitik olarak hata terimleri gelmeyecektir. Ancak hata biygisayar hesaplamaları sırasında gelebilen yuvarlama ve kesme hatalarındaki bunlarında çözüm üzerinde etkilerinin sınırlı olacağı açıktır.

Sonuç olarak, Burgers denkleminin çözümünde, küçük ilk zaman adımlarında bile osilasyon yapmadan çözüme yakınsayan, etkili, uygulanabilirlik açısından kolay ve basit bir yöntem verilmiş olduğu düşüncesindeyîz.

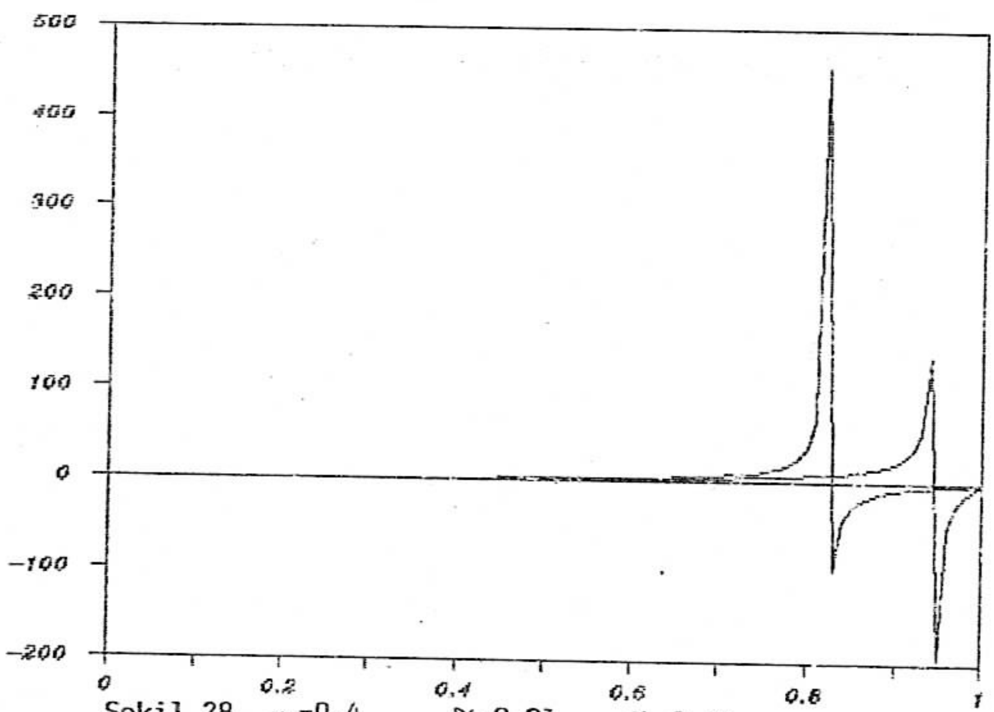
Bu çalışmada, probleme uygun, Cosinüs lü terimler baz alınarak çözüm yapılmasına rağmen, kolayca görülebileceği gibi denklemin başlangıç ve sınır şartlarının değişmesi halinde bunlara uygun baz seçilerek çözümün daha karmaşık problemlere de, örneğin yine bir non-lineer Korteweg-de Vries denklemine ve diğer Navier-Stokes denklemlerine uygulanabileceği açıktır.



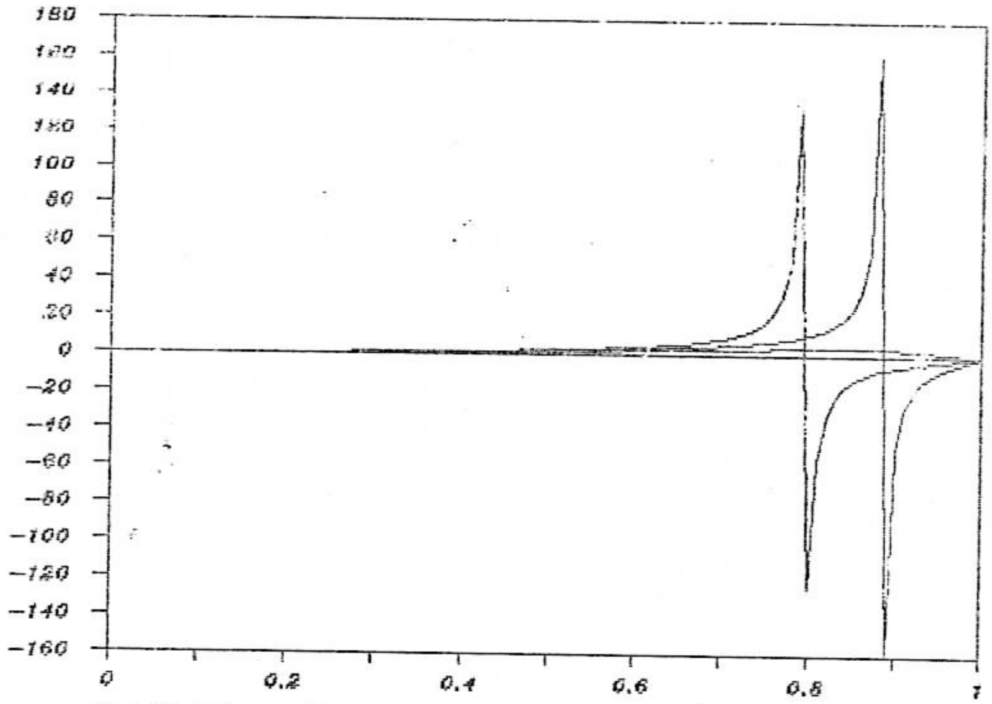
Şekil 26 $\nu=0.4$ $\delta x=0.02$ $\delta t=0.02$



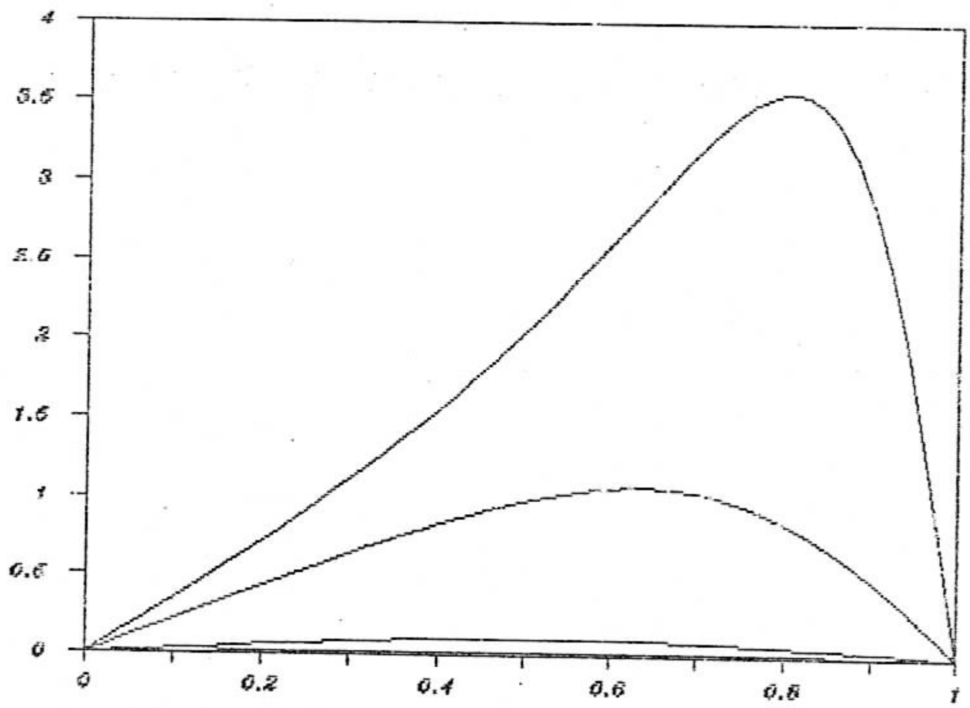
Şekil 27 ν=0.4 δx=0.02 δt=0.01



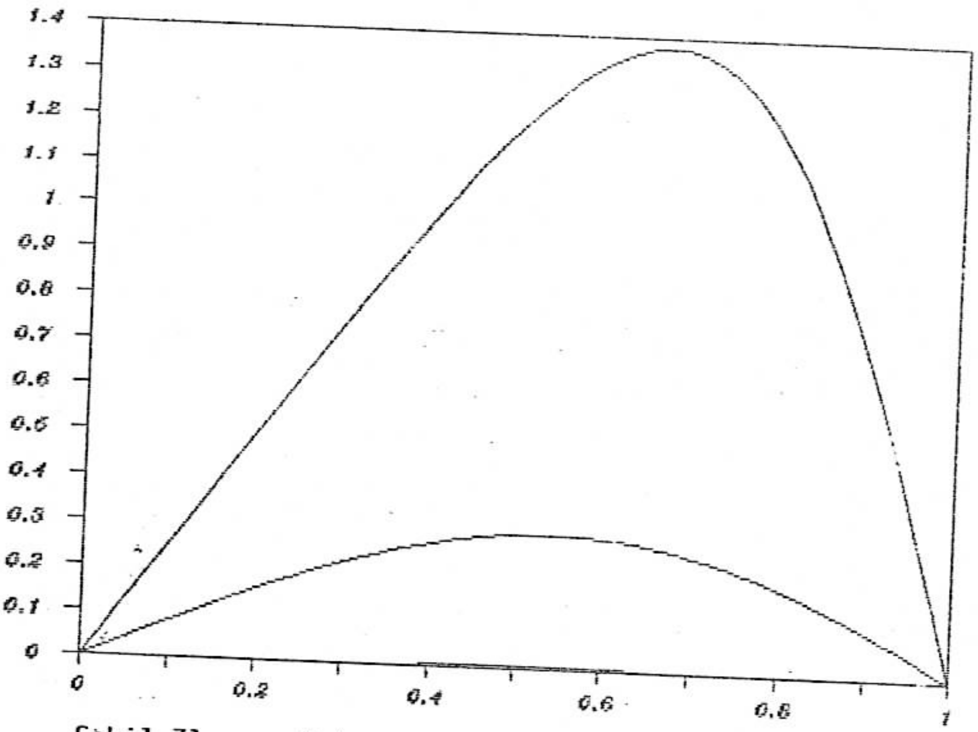
Şekil 28 ν =0.4 δx=0.01 δt=0.02



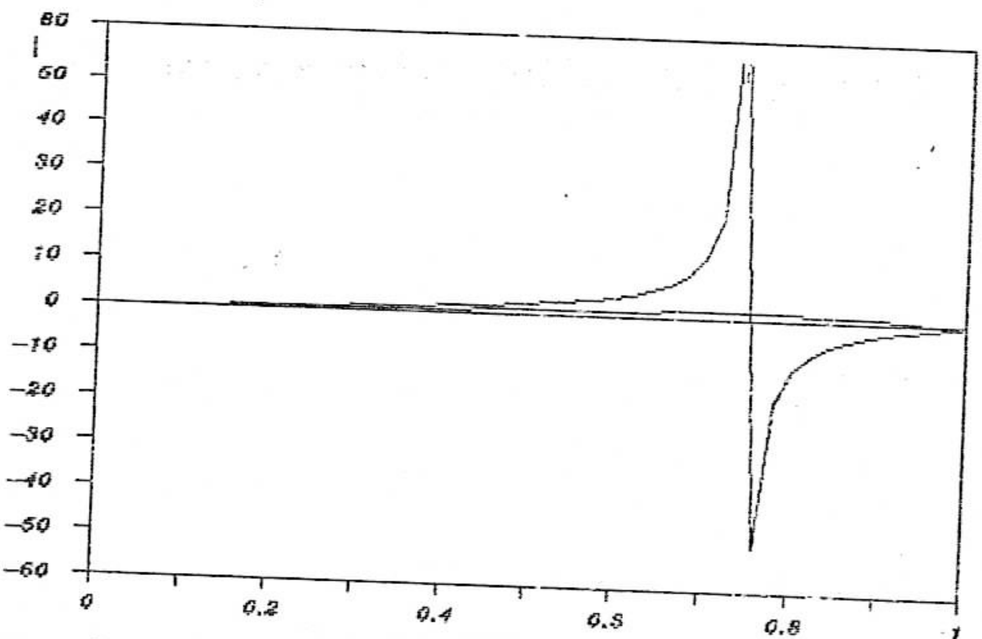
Şekil 29 ν =0.4 δx=0.01 δt=0.01



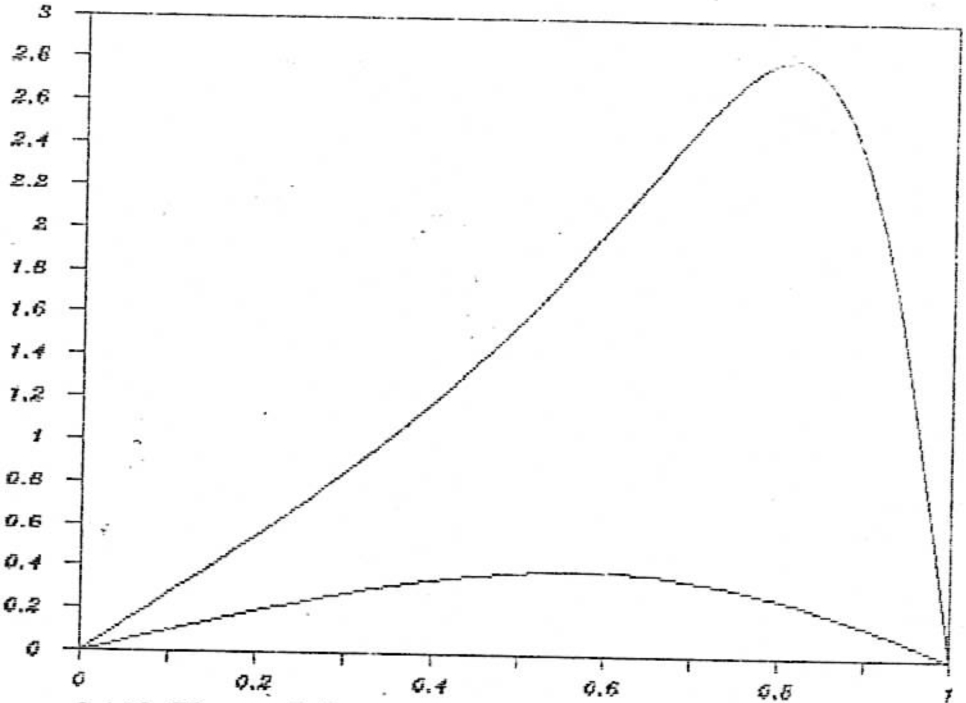
Şekil 30 ν =0.4 δ x=0.02 δt=0.02



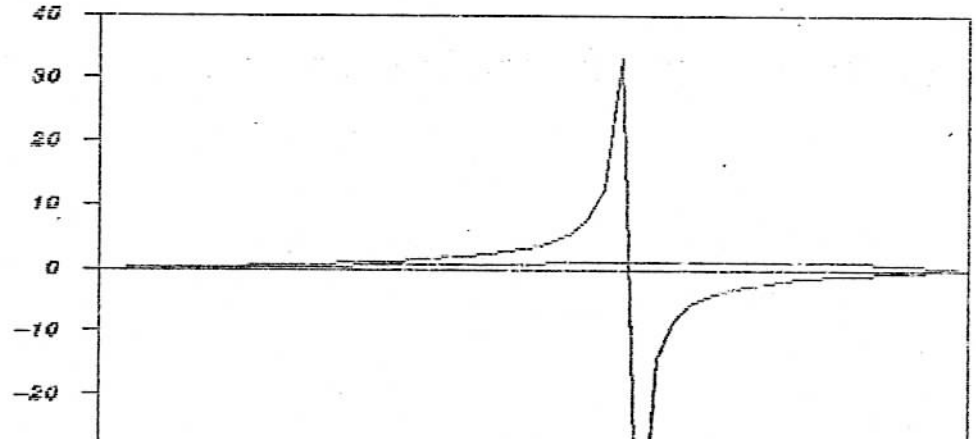
Şekil.31 $\nu=0.4$ $\delta x=0.02$ $\delta t=0.02$



Şekil 32 $\nu=0.3$ $\delta x=0.02$ $\delta t=0.02$



Şekil 33 $\nu=0.3$ $\delta x=0.02$ $\delta t=0.02$



üçüncü adım Şekil 34 $\nu=0.2$ $\delta x=0.02$ $\delta t=0.02$

KAYNAKLAR

[1] Ames,W.F., Non linear partial equations in engineering,Acedemic Press, New York,(1965)

[2] Ames,W.F. and Nucci,M.C., Analysis of Fluid equations by group methods,Journal of Engineering Maths.20 (1986) 181-187

[3] Ali,A.H.A.,Gardner,L.R.T. and Gardner,G.A., A Galerkin approach to the solution of Burgers equation,U.C.N.W. Preprint (1990)

[4] Aref,H. and Darıpa,P.K., Note on finite difference approximations to Burgers equation. Soc.for Inds.and Appl.Math. Vol.5.no:4 (1984)

[5] Bateman,H., Some recent researches on the motion of fluids. Mon.Weather.Rev.43,163-170 (1915)

[6] Benton,E.R. and Platzman,G.W., A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation.Qartorly of Apply.Math. (1972)

[7] Burgers,J.M.,Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. Trans.Roy. Neth.Acad.sci.Amsterdam,17,(1939) 1-53

[8] BurgersJ.M.,A mathematical model illustrating the theory of turbulence,in advances in applied mechanics 1,Academic Press. New York,(1948) 171-199

[9] Burgers,J.M.,The formation of vortex sheets in a simplified type of turbulence motion.Proc.Roy.Neth.Acad.Sci. Amsterdam 53 (1950) 122-133

[10] Burgers,J.M.,Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence.Proc.Roy.Neth.Acad.Sci.Amsterdam 53 (1950) 247-260

[11] Burgers,J.M.,Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation.Proc.Roy. Neth.Acad.Sci.Amsterdam B57 (1954) 45-72,159-169,403-433

[12] Burgers,J.M.,An approximate equation for the correlation function connected with a non-linear problem, in proceedings of the eighth international congress for applied mechanics. (Univ.of İstanbul,Turkey) 2 (1955) 89-103

[13] Burgers,J.M.,A model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics.Proc.Roy.Neth.Acad. Sci.Amsterdam B58, (1955) 1-18

[14] Burgers,J.M.,Statistical problems connected with the solution of a non-linear partial differantial equation,in non-linear problems of engineering. Acad.Press.New York (1964) 123-137

[15] Burgers,J.M.,Functions and integrals connected with solution of the diffuzion or heat flow equation.Tech.Note BN-398,The Inst. for Fluid Dynamics and Appl.Math. Univ.of Maryland (1965)

[16] Burrows,B.L. and Perks,A.J.,Variational calculations for scattering lengs.J.Phys.B:Atom.Molec.Phys.12 (1979) no:16

[17] Burrows,B.L. and Perks,A.J.,Complemantary variational principles and variational-iterative principles. J.Phys.A: Math Gen.14 (1981) 797-808

[18] Caldwell,J.,Wanless,P.and Cook,A.E.,A finite element approach to Burgers equation.Appl.Math.Modelling.5 (1981) 189-193

[19] Chu,C.W., A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations.Quart.Appl.Math.23 (1965) 257-278

[20] Cole,J.D.,On a quasi-linear parabolic equation occuring in ae aerodynamics.QUart.Appl.Math.9 (1951) 225-236

[21] Goldberg,A.,Finite amplitüde waves in magnetohydrodynamics Soviet Phys.Jetp 15 (1962) 179-181

[22] Hayes,W.D.,The basic theory of gasdynamic discontinuites Chap.D in fundementals of gasdynamics.Princeton Univ.Press.(1958) 416-481

[23] Hlavacek,I.,On a semi-variational methods for parabolic equation 1. Aplica matematiky,Svazek 17 (1972) 327-351

[24] Hlavacek,I.,On a semi-variational methods for parabolic equation 2. Aplica matematiky,Svazek,18 (1973) 43-64

[25] Hopf,E.,The partial differential equation $U_t+UU_x=vU_{xx}$, Comm. Pure Appl.Math.3 (1950) 201-230

[26] Lagerstrom,P.A.,Cole,J.D.and Trilling,L., Problems in the theory of viscous compressible fluids.Calif.Inst.Tech. (1949)

[27] Lighthill,M.J.,Viscosity effects in sound waves of finite amplitüde,in survey in mechanics.Cambridge Univ.Press.Cambridge (1956) 250-351

[28] Mendousse,J.S.,Non-linear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitüde.J.Acoust.Soc.Amer.25 (1953)

[29] Mikhlin,S.G., Variational methods in mathematical physics. Oxford,London,New York. Pergamon press (1963)

[30] Miller,E.L.,Predictor-Corrector studies of Burgers model of turbulent flow. M.s.thesis,Univ.of Delaware,Newark (1966)

[31] Pospelov,L.A.,Propagation of finite-amplitüde elastic waves. Soviet Physies Acoust.11 (1966) 302-304

[32] Rektorys,K.,On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in the space variables.Czechoslovak Mathematical Journal 21(96) Praha (1971)

[33] Rektorys,K.,Variational methods in mathematics,Science and Engineering. D.Reidel Publişhing Company,London (1980)

[34] Rodin,E.Y.,Propagation of waves of finite amplitüde in thermo viscous media. NASA CR-643,82 pages (1966)

[35] Shvets,M.E.and Meleshko,V.P.,Numerical algorithm of a solution of the system of equations of hydrodynamics of the atmosphere. USSR Atmosphere Ocean.Phys.1 (1965) 519-520

[36] Soluyan,S.I.and Khokhlow,R.V., Decay of finite amplitüde acoustic waves in a dissipative medium (in Russian).Vestric Moskov.3.Fiz.Astronom.3 (1961) 52-61

[37] Sounders,R.,Caldwell,J.and Wanless,P.,A variational iterative scheme applied to Burgers equation.IMA J.of Num.Analy.4 (1984) 349-362

[38] Su,C.H.and Gardner,C.S.,Korteveg-de Vries equation and generalizations III: Derivation of the Korteveg-de Vries equation and Burgers equation.J.Math.Phys.10 (1969) 536-539

[39] Varoğlu,E.and Finn,W.D.L., Space-time finite elements incorporating characeristics for the Burgers equation.International Journal for numerical methods in engineering.16(1980)171-184

[40] Van der Pol,B.,On a non-linear partial differential equation satisfied by the logaritm of Jacobean theta-functions, with the arithmetical applications. Proc.Acad.Sci.A13 (1951) 261-284

ÖZGEÇMİŞ

21.05.1961 yılında Adana'nın Kozan İlçeside doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Kozan da, Lise öğrenimini ise İçel Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1978 de Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne girmeye hak kazandı.1982 Haziran döneminde aynı bölümden mezun oldu. 1982 Aralık döneminde yedek subay olarak vatani görevine başladı.1984 Mart'ında terhis oldu.1985 de İ.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümün de Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. 1985 de İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalına kayıt yaptırdı.1987 de "Burgers Denkleminin Yaklaşık Çözümü Ve Yakınsaklık Analizi" isimli tezi ile yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl doktora proğramına kayıt yaptırarak doktora çalışmalarına başladı. Evli ve bir çocuk babası dır.

Halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde görev yapmaktadır.

ÖZGEÇMİŞ

21.05.1961 yılında Adana'nın Kozan İlçeside doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Kozan da, Lise öğrenimini ise İçel Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1978 de Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne girmeye hak kazandı.1982 Haziran döneminde aynı bölümden mezun oldu. 1982 Aralık döneminde yedek subay olarak vatani görevine başladı.1984 Mart'ında terhis oldu.1985 de İ.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümün de Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. 1985 de İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalına kayıt yaptırdı.1987 de "Burgers Denkleminin Yaklaşık Çözümü Ve Yakınsaklık Analizi" isimli tezi ile yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl doktora proğramına kayıt yaptırarak doktora çalışmalarına başladı. Evli ve bir çocuk babası dır.

Halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde görev yapmaktadır.