İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOLDITCH TEOREMİ

VE

KUTUPSAL ATALET MOMENTİ

Erol KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

1992

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne"

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan ______________________________

Üye ______________________________

Üye ______________________________

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../1992

Prof.Dr. Bekir ÇETİNKAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılabilmesi için diferensiyel geometri, analiz ve kinematikteki bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde Holditch Teoremi önce orjinal şekliyle ele alındı ve bu günün modern matematik yöntemleri ile bazı örnekler verilerek derinlemesine bir tahlili yapıldıktan sonra teoremin modern bir ifadesi verildi. Ayrıca bu modern ifadeyi kapsayacak şekilde Holditch Teoreminin genelleştirilmiş bir ifadesi verildi. Daha sonra 1- parametreli kapalı düzlemsel hareketlerde yörünge eğrileri için, Steiner formülünün bir genelleştirilmesi ve kutupsal atalet momentleri için bir formül elde edilerek aralarındaki ilişkiler incelendi. Bundan sonra ise Holditch Teoremi ve kutupsal atalet momenti dual anlamda ele alındı.

Bu bölümde ayrıca uzayda helisel eğrilerin hareket yükseklikleri kapalı düzlemsel eğrilerin sınırladığı bölgelerin alanları yardımıyla hesaplandı ve 3-parametreli uzay hareketi esnasında bir noktanın oluşturduğu yüzeyin hacmini veren bir formül verildi.

Üçüncü bölüm çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu kısımda, Holditch Teoreminin genelleştirilmesi için kullanılan metodlardan yararlanarak bu eğrilerin kutupsal atalet momentleri için oldukça ilginç bağıntılar bulundu. Ayrıca kutupsal atalet momentleri ve alanlar arasındaki oranın sabit olduğu görüldü.

ABSTRACT

This thesis covers three chapters such a way that in the first chapter to make it to easly understood we give the basic concepts in differential geometry, analysis and kinematics.

In the second chapter, firstly Holditch Theorem is considered in the original form and making analysis of this theorem with modern mathematic methods and giving some examples it is given a modern expression and the last theorem is generalized. Then, for the orbits drawn under 1-parameter closed planar motion, the Steiner formula is generalized and the polar inertia momentum is obtained and the relations between them are discussed. After then the Holditch Theorem and the polar inertia momentum are considered in the dual case.

Moreover, in this chapter, the motion heights of the helical curves in E^3 are calculated in terms of the areas of orbits in plane. For orbit which formed by a point of space under 3-parameter motion is obtained a formula.

The original part is contained in the third chapter. In this chapter, by using the methods which have been used to generalize the Holditch Theorem, some interesting relations are obtained for the polar inertia momentums of orbits. Moreover it is seen that the ratio of polar inertia momentum to the area is constant.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Sayın Doç.Dr.Sadık KELEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

H. Holditch 1858 yılında [12] de yayınlanan makelesinde kapalı bir eğri üzerindeki bir kirişin hareketi esnasında kiriş üzerindeki bir noktanın geometrik yerinin ve kapalı eğrinin dikkate değer bir özelliğini keşfetti. Daha sonra 19'uncu yüzyılın ikinci yarısında Holditch'in bu teoremi hakkında bir çok yayınlar yapıldı, kinematik ve hareket geometrisinin ilginç bir konusu oldu.

E. B. Elliote 1-parametreli hareketler konusunu genişleterek 1-parametreli kapalı küresel hareketler üzerine çalıştı. 1948 de W. Blascke 1-parametreli küresel hareketlerde önemli yeri olan Steiner noktası ve Steiner vektörü kavramlarını tanımladı ve 1-parametreli kapalı düzlemsel hareketlerdeki Steiner alan formülüne karşılık gelen 1-parametreli kapalı küresel hareketlerde bir alan formülü verdi. Bunu takiben 1962 de H. R. Müller 1-parametreli kapalı küresel hareketler üzerine çalışmalar yaparak daha kullanışlı ve genişletilmiş bilgiler sundu.

1970 yılında H. H. Hacısalihoğlu 1-parametreli düzlemsel hareketler için iki sonuç verdi ve daha sonra bunları 1-parametreli küresel hareketler için genelleştirdi. Yine H. H. Hacısalihoğlu 1-parametreli kapalı küresel hareketler için bilinen Steiner formülü ve Holditch Teoreminin çizgiler uzayındaki karşılıklarını buldu.

Son yıllarda Holditch Teoreminin düzlemsel hareketlerde ve uzay hareketlerinde genelleştirilmesi üzerine özellikle H. R. Müller'in çalışmaları ilgi topladı.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, A. Broman'nın Holditch Teoreminin tahlilini yapan [13] deki çalışması ve H. R. Müller'in [14], [15] ve [16] esas olarak alınarak eğrilerin sınırladıkları bölgelerin alanları ve bu eğrilerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiler incelendi. H. R. Müller'in eğrilerin kutupsal atalet momentleri için [15] de verdiği formüller, A. Broman'ın [13] deki metodları kullanılarak farklı bir yöntemle tekrar elde edildi.

I.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölüm iki kısım halinde düzenlenmiştir. Birinci kısım Öklid uzayları, E^n de hareketler ve bazı teoremlere, ikinci kısım da düzlem kinematiğine ayrılmıştır.

I.1 ÖKLİD UZAYLARI VE E^n DE HAREKETLER

Bu kısımda afin uzaylar, Öklid uzaylar, temel tanım ve teoremler verilecektir.

I.1.1 Tanım: A boş olmayan bir cümle ve V de bir reel vektör uzayı olsun. A nın elemanlarını noktalar ve V nin elemanlarını da vektörler olarak adlandırıyoruz. Eğer bir

$$\psi : A\times A \longrightarrow V$$
$$(P,Q) \longrightarrow \psi(P,Q)=\mathbf{PQ}$$

dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlar ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i) $\forall P,Q,R\in A$ için $\mathbf{PR}=\mathbf{PQ}+\mathbf{QR}$ dir.

ii) $\forall P\in A$ ve $\forall \alpha\in V$ için $\mathbf{PQ}=\alpha$ olacak biçimde bir tek $Q\in A$ noktası vardır.

$\mathbf{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına da uç noktası denir. Ayrıca A afin uzayının boyutu boy$A$ ile gösterilir ve

$$\text{boy}A=\text{boy}V$$

olarak tanımlanır.

A n-boyutlu bir reel afin uzay ve A ile birleştirilmiş vektör uzayı da standart reel vektör uzayı IR^n olsun. Eğer IR^n vektör uzayında Öklid iç çarpımı denen

$$\langle\ ,\ \rangle : IR^n\times IR^n \longrightarrow IR$$
$$(X,Y) \longrightarrow \langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

işlemini tanımlarsak A afin uzayına n-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [1] . Burada $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ dir. Ayrıca

$$x_i:E^n \longrightarrow IR, \quad 1\leq i\leq n$$

fonksiyonlarına da X noktasının i-yinci koordinat fonksiyonları denir.

I.1.2 Tanım: n-boyutlu Öklid uzayı E^n olmak üzere

$$d:E^n x E^n \longrightarrow IR$$

$$(X,Y) \longrightarrow d(X,Y)=\|XY\|=(\langle XY,XY\rangle)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu ve d(X,Y) değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir [2].

I.1.3 Tanım: $I\subset IR$ bir açık aralık olmak üzere bir

$$\alpha:I \longrightarrow E^n$$

diferensiyellenebilir dönüşümü E^n de bir eğri olarak adlandırılır. Burada I aralığı; $a,b\in IR$ ve $t\in I$ olmak üzere $a<t<b$ olarak alınabilir. t değerine eğrinin paremetresi denir [3].

I.1.4 Tanım: n-boyutlu Öklit uzayı E^n de (n-1) boyutlu yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu cümle

$$M=\{X\in U\subset E^n \mid f:U \longrightarrow IR,\ f(X)=c,\ U \text{ bir açık altcümle, } f \text{ dif-bilir.}\}$$

dir. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri, E^3 de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir [2].

I.1.5 Tanım: V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P\in A$ ve $v\in V$ için (P,v) sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. Tanjant vektörlerinin cümlesini $T_A(P)$ ile göstereceğiz.Ohalde

$$T_A(P)=\{(P,v)=v_P \mid v\in V, P\in A\}$$

dır [2].

I.1.6 Tanım: $P \varepsilon E^n$ noktasında tanımlı olan $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının dual uzayına bu $P \varepsilon E^n$ noktasında E^n in kotanjant uzayı denir ve

$$T^*_{E^n}(P) = \{\phi_P \mid \phi_P : T_{E^n}(P) \longrightarrow IR\}$$

şeklinde gösterilir. Her $\phi_P \varepsilon T^*_{E^n}(P)$ vektörüne de E^n in P noktasındaki bir kovektörü denir [2].

I.1.7 Tanım: Bir $\Phi : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \varepsilon E^n} T^*_{E^n}(P)$ dönüşümü için

$$\P : \bigcup_{P \varepsilon E^n} T^*_{E^n}(P) \longrightarrow E^n$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü ile $\P o \Phi = I : E^n \longrightarrow E^n$ bağıntısı sağlanıyor ise Φ ye E^n üzerinde 1-form denir [4].

n-değişkenli bir form $W = \Sigma a_j du_j$, $a_j = a_j(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ şeklindedir.

Bir W formunun dış türevi

$$dW = \Sigma\, da_j \wedge du_j = \Sigma \frac{da_j}{du_i} du_i \wedge du_j$$

ile tanımlıdır. d fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) V ve W iki k-form ise $d(V+W) = dV + dW$

ii) $\lambda \varepsilon IR$ için $d(\lambda W) = \lambda dW$

iii) W bir k-form ve V herhangi bir diferensiyel form ise

$$d(W \wedge V) = dW \wedge V + (-1)^k W \wedge dV$$

iv) $d(dW) = 0$

dır [2].

I.1.8 Tanım: n-boyutlu bir E^n Öklit uzayının izometrilerinden birisi f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi, $A \varepsilon O(n)$, yani $\det A = \pm 1$ ve $C \varepsilon IR^n_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. Bu şekilde tanımlı f ye E^n de bir hareket adı verilir. f hareketine, $\det A = +1$ ise direkt hareket, $\det A = -1$ ise karşıt hareket denir [3].

I.1.1 Teorem: n-boyutlu bir Öklit uzayı E^n ve E^n deki bir dik koordinat sistemi $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ olsun. $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ e göre E^n in bir hareketinin matrisi

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise $A\in O(n)$ matrisi için $\det A$, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ koordinat sisteminin E^n deki seçilişinden bağımsızdır [2].

I.1.2 Teorem: E^n in bütün hareketlerinin cümlesi $R(n)$ ise $R(n)$, dönüşümlerin birleşimi işlemine göre bir gruptur [1].

$R(n)$ katı hareketlerinin cümlesini ikiye ayırabiliriz.

i) $D(n)=\{f \mid f:E^n \longrightarrow E^n,\ f \text{ direkt hareket}\}$

ii) $K(n)=\{f \mid f:E^n \longrightarrow E^n,\ f \text{ karşıt hareket}\}$

I.1.9 Tanım: E^n Öklit uzayının bir f izometrisi için $f(0)=0$ olacak şekilde bir $0\in E^n$ noktası varsa f ye 0 noktası etrafında E^n in bir dönmesi denir [1].

I.1.3 Teorem: E^n de başlangıç noktası 0 olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ olsun. $f:E^n \longrightarrow E^n$ izometrisi için:

i) 0 noktası etrafındaki bir dönme f ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi $X'=AX$ şeklindedir. Burada $A\in O(n)$ ve $X',X\in IR^n_1$ dir.

ii) f bir direkt dönmedir $\Longleftrightarrow X'=AX$ ve $A\in SO(n)$ dir [1].

I.1.10 Tanım: E^n de, $t_1,t_2,\ldots,t_n$ IR olmak üzere

$$T:E^n \longrightarrow E^n,\ T(X)=(x_1+t_1,x_2+t_2,\ldots,x_n+t_n)$$

olarak tanımlanan T dönüşümüne E^n in bir ötelemesi denir [1].

I.1.11 Tanım: $I\subset IR$ sıfırı ihtiva eden açık bir aralık olsun. I daki değişken t ve E^n in direkt hareketler grubu $R(n)$ olmak üzere, elemanları,

$$f_t=\begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ t\in IR$$

ile verilen $\{f_t\}$ cümlesine E^n in bir 1-paremetreli hareketi denir.Burada $A(t)\varepsilon SO(n)$-değerli ve $a(t)\varepsilon IR_1^n$-değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.Ayrıca t zaman anlamında hareketin paremetresi kabul edilir[5].Buna göre f_t yi I dan E^n ye diferensiyellenebilir bir dönüşüm olarak düşünüyoruz. Kısalığın hatırı için hareketin yukarıdaki ifadesinde $A(t)$ ve $a(t)$ yerine çoğu zaman, sırası ile A ve a gösterimini kullanacağız.

$$f_t(X)=A(X)+a$$

ile verilen f_t dönüşümü izometri olduğundan f nin inversini f_t^{-1} ile gösterirsek, f_t^{-1} nin matrisel ifadesi

$$\begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^T & -A^Ta \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Bir $X\varepsilon E^n$ noktasının f_t altındaki resmi E^n de bir eğridir. Bu eğriyi (X_t) ile gösterelim. Buna göre (X_t) eğrisinin herhangi bir $X'(t)$ noktası için

$$X'(t)=f_t(X)$$

yada

$$X'(t)=A(t)X+a(t)$$

dir. (X_t) eğrisinin teğet vektör alanı

$$\dot{X}'=\frac{dX'}{dt}=\frac{df(X)}{dt}$$

olup, burada $X=f_t^{-1}(X'(t))$ dir. $\frac{(df)}{dt}\ f_t^{-1}$ hesaplanacak olursa

$$\frac{df}{dt}\ f_t^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{dA}{dt}\ A^T & \frac{dA}{dt}\ A^Ta+\frac{da}{dt} \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$S_t=\frac{dA}{dt}\ A_t, \quad V_t=-S_ta+\frac{da}{dt}$$

gösterimini kullanırsak

$$\frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} S_t & V_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (I.1.1)$$

elde edilir.

I.1.12 Tanım: (I.1.1) ile verilen herkete t anındaki ani hareket denir[6].

I.1.13 Tanım: $S_t=0$ ve $V_t=0$ ise ani harekete ani duraklama denir.

I.1.14 Tanım: $S_t=0$ ve $V_t \neq 0$ ise ani harekete ani öteleme denir.

I.1.15 Tanım: $\dot{X}'|_{X_0}=0$ olacak şekilde bir $X_0 \in E^n$ noktası varsa ani harekete ani dönme ve X_0 noktasına da ani dönme merkezi denir [6].

I.1.4 Teorem: B, XOY düzleminde bir basit bölge ve α da bu bölgeyi çevreleyen ve saatın dönme yönünün tersine yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_\alpha P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dxdy \qquad (I.1.2)$$

dir [7].

(I.1.2) formülüne Green Formülü denir.

B bir basit iribatlı bölge ve α da bu bölgenin çevre eğrisi olsun. Green Formülü'nden

$$\int_\alpha x dy = \iint_B dxdy = F$$

ve

$$\int_\alpha y dx = \iint_B dxdy = F$$

olacağından

$$F = \frac{1}{2} \int_\alpha xdy - ydx$$

olarak elde edilir. Burada F, B bölgesinin alanıdır.

I.1.5 Teorem: M, normali **n** olan ve sonlu alana sahip bir yönlendirilmiş yüzey olsun. Kabul edelimki bu yüzeyin α çevre eğrisi kapalı, parçalı düzgün ve yönü M den indirgenen yön olsun. **F**, M üzerinde sürekli bir vektör alanı ve **F** nin bileşen fonksiyonları, M nin sınır noktası olmayan noktalarında sürekli ve kısmi türevlere sahip olsun. Bu takdirde

$$\int_{\alpha}\langle F,dr\rangle = \iint_{M}\langle \mathrm{rot}F,n\rangle ds$$

dir [7]. Burada $dr=(dx,dy,dz)$ ve $ds=dxdy$ dir.

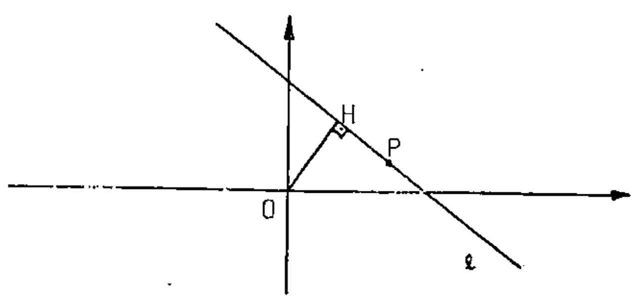
I.1.16 Tanım: IR^k da bir eğri $\alpha=\{f(t)|\ t\in[a,b]\}$ olsun. $D=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ $[a,b]$ nin bir parçalanması olsun. $\alpha(D)=\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$ olsun. $[a,b]$ nin mümkün olan bütün parçalanmaları için $\alpha(D)$ nin en küçük üst sınırına α nın uzunluğu denir ve $|\alpha|$ ile gösterilir. $|\alpha|$ sonlu olduğu zaman α eğrisine rectifiable eğri denir. Eğer $f(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_k(t))$ ise $\alpha(D)$ nin sınırlılığı kolayca görülür. Böylece $|\alpha|$ sonludur gerek ve yeter şart $x_i(t)$ fonksiyonlarının hepsi sınırlı salınımlı ise. Bu ise bir eğrinin rectifiable olma şartıdır [8].

I.1.6 Teorem: Bir V iç çarpım uzayında $\forall x,y\in V$ için

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$$

dir. Bu eşitsizliğe Schwarz eşitsizliği denir. Burada x vektörü için $x=cy$ ise sadece eşitlik vardır [9].

I.1.17 Tanım: Orijini O olan bir dik koordinat sistemi tesbit edilsin. Orijinden geçmeyen bir ℓ doğrusu çizilsin. O noktasından ℓ doğrusuna bir dikme inildiğinde dikme ayağı H olsun (Şekil I.1.1).



Şekil I.1.1

Bir $P=(x_1,x_2)$ noktasının ℓ doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter şart <OH,HP>=0 olmasıdır. Bu şart

$$(x_1-h_1)h_1+(x_2-h_2)h_2=0$$

veya

$$\frac{h_1}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}x_1+\frac{h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}x_2=(h_1^2+h_2^2)^{1/2}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu denkleme ℓ doğrusunun normal yada hesse formu denir [9].

I.1.18 Tanım: IR reel sayılar cümlesi olmak üzere ID=IRxIR üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ise ID cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall(a,a^*)\in$ ID elemanına da dual sayı denir:

Her $A=(a,a^*)$, $B=(b,b^*)$ dual sayıları için;

Toplama: $A\oplus B=(a,a^*)\oplus(b,b^*)=(a+b,a^*+b^*)$

Çarpma: $A\odot B=(a,a^*)\odot(b,b^*)=(ab,ab^*+a^*b)$

Eşitlik: $a=b$ ve $a^*=b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ ile gösterilir [10].

I.1.7 Teorem: $(ID,\oplus,\odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halka fakat cisim değildir [10].

I.1.8 Teorem: $(ID^3,+)$ sistemi ID üzerinde bir modüldür [10].

I.1.19 Tanım: ID-Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir ve a, $a^*\in IR^3$ olmak üzere ID-Modülde her bir A dual vektörü

$$A=a+\varepsilon a^*$$

şeklinde yazılır. Burada $\varepsilon=(0,1)$ ve $\varepsilon^2=0$ dır [10].

I.1.20 Tanım: ID-Modülde bir A dual vektörü için

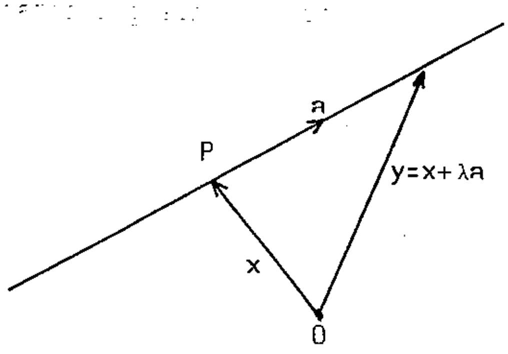
$$k=\frac{\langle a,a^*\rangle}{\|a\|^2}$$

sayısına A vektörünün adımı veya yükselişi denir. Reel kısmı sıfırdan farklı olan dual vektöre has dual vektörü adını vereceğiz [10].

I.1.21 Tanım: Hareketli bir P noktasının OP yer vektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir a birim vektörü ile belirlenen doğrunun paremetrik denklemi

$$y=x+\varepsilon a$$

şeklindedir (Şekil I.1.2). P noktası doğru üzerinde keyfi bir nokta



Şekil I.1.2

ve x vektörel çarpımı göstermek üzere

$$a^*=x\times a=y\times a$$

vektörel momentini kullanarak doğruyu (a,a^*) çifti ile belirleyebiliriz. a ve a^* vektörlerinin bileşenlerine normlanmış Plücker doğru koordinatları denir [2].

I.1.22 Tanım: IR^3 de üç bağımsız paremetreye bağlı (∞^3) sayıdaki X doğrularının cümlesine ışın kompleksi denir [10].

I.1.23 Tanım: A bir has dual vektör olmak üzere

$$\langle a,x^*\rangle+\langle a^*,x\rangle=0$$

denklemini sağlayan $X=x+\varepsilon x^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir [10].

I.1.24 Tanım: A has dual vektörünün

$$U=\frac{A}{\|A\|}=u+\varepsilon u^*$$

eksenine lineer ışın kompleksinin ekseni denir [10].

U etrafında helisel hareket yapan herhangi bir nokta X ise bu noktanın yörüngesi adi bir helistir.

I.1.25 Tanım: A has dual vektörünün

$$k = \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|^2}$$

adımına lineer ışın kompleksinin adımı denir [10].

I.1.26 Tanım: k=0 ise lineer ışın kompleksine dejenere veya singüler lineer ışın kompleksi denir. Dejenere bir lineer ışın kompleksine A ekseninin ışın demeti de denir [10].

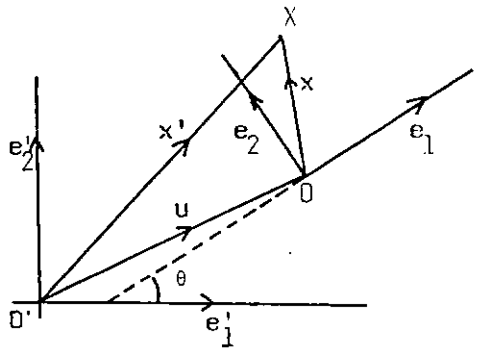
I.2 DÜZLEM KİNEMATİĞİ

Birbiri üzerine hareket eden iki düzlem E ve E' olsun. E hareketli ve E' de sabit düzlem olarak kabul edilsin. E ve E' düzlemleri sırası ile $\{O;e_1,e_2\}$ hareketli ve $\{O';e'_1,e'_2\}$ sabit koordinat sistemleri ile temsil edilsin.

Bu koordinat sistemlerinin çeşitli konumları, şu iki büyüklük yardımı ile tanımlanabilir:

i) Hareketli sistemin başlangıç noktasından sabit sistemin başlangıç noktasına giden $OO'=u$ öteleme vektörü,

ii) Her iki koordinat sisteminin birbirine göre θ dönme açısı.



Şekil I.2.1

$OO'=u$ vektörü hareketli uzayın koordinat vektörleri cinsinden

$$u=u_1e_1+u_2e_2 \qquad (I.2.1)$$

biçiminde yazılabilir.

I.2.1 Tanım: E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B=E/E'$ ile gösterilmek üzere B hareketinin θ dönme açısı ve u öteleme vektörünün u_1, u_2 bileşenleri, $\theta=\theta(t)$, $u_1=u_1(t)$ ve $u_2=u_2(t)$ şeklinde reel bir t paremetresinin fonksiyonları iseler $B=E/E'$ hareketine 1-paremetreli düzlemsel hareket denir [11]. Buradaki t, genellikle zaman paremetresi olarak alınır.

$O=O'$ olduğu zaman e_1 ve e_2 vektörleri e'_1, e'_2 doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$e_1=\cos\theta e_1'+\sin\theta e_2'$$
$$e_2=-\sin\theta e_1'+\cos\theta e_2' \qquad (I.2.2)$$

eşitlikleri elde edilir.

(I.2.1) ve (I.2.2) denklemlerinde, e_1' ve e_2' vektörleri sabit kabul edilerek t paremetresine göre türev alınırsa

$$\dot{e}_1=\dot{\theta}e_2$$
$$\dot{e}_2=-\dot{\theta}e_1 \qquad (I.2.3)$$
$$\dot{u}=(\dot{u}_1-u_2\dot{\theta})e_1+(\dot{u}_2+u_1\dot{\theta})e_2$$

bulunur. (I.1.3) denklemlerine B=E/E' hareketinin türev denklemleri denir.

E düzleminin kendisi E' düzlemine göre 1-paremetreli hareketi yaparken, bir X noktası da E düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirir. X noktasının hareketli E düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası E deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X nokasının rölatif hızı denir ve v_r ile gösterilir. Bu hızı elde etmek için

$$x=x_1e_1+x_2e_2$$

denkleminde, e_1 ve e_2 nin sabit olduğu göz önüne alınıp, türev almak sureti ile

$$v_r=\dot{x}_1e_1+\dot{x}_2e_2 \qquad (I.2.4)$$

elde edilir. Eğer X noktası E de sabit ise $v_r=0$ dır.

Şimdi

$$O'X=O'O+OX=-OO'+OX$$

olduğu gözönüne alınarak

$$x'=-u+x$$

veya

$$x'=(-u_1+x_1)e_1+(-u_2+x_2)e_2 \qquad (I.2.5)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliğin t ye göre türevi alınırsa X noktasının sabit E' düzlemine göre hız vektörü elde edilir. Bu hız vektörüne X noktasının mutlak hızı denir ve $\mathbf{v}_a$ ile gösterilir. (I.2.5) in t ye göre türevi ve (I.2.3) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$\mathbf{v}_a=\{-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}\}\mathbf{e}_1+\{-\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}\}\mathbf{e}_2+\mathbf{v}_r \qquad (I.2.6)$$

olduğu görülür. Burada

$$\mathbf{v}_f=\{-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}\}\mathbf{e}_1+\{-\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}\}\mathbf{e}_2 \qquad (I.2.7)$$

ile gösterilen vektöre X noktasının sürüklenme hız vektörü denir.

Ohalde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir.

I.2.1 Teorem: Eğer X noktası her iki sisteme göre hareketli ise hız vektörleri arasında

$$\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_f+\mathbf{v}_r \qquad (I.2.8)$$

bağıntısı vardır [11].

I.2.2 Tanım: Dönme açısının $\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ türevine B hareketinin açısal hızı denir.

Şimdi B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım.

$\mathbf{v}_f=0$ ise (I.2.7) eşitliğinden

$$\dot{u}_1-(u_2-x_2)\dot{\theta}=0, \qquad -\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}=0$$

olmak zorundadır. $\dot{\theta}\neq 0$ olduğundan bu lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Böylece

$$\begin{aligned} p_1=x_1=u_1+\frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}}=u_1+\frac{du_2}{d\theta} \\ p_2=x_2=u_2-\frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}}=u_2-\frac{du_1}{d\theta} \end{aligned} \qquad (I.2.9)$$

elde edilir.

I.2.3 Tanım: $OP=P=p_1\mathbf{e}_1+p_2\mathbf{e}_2$ yer vektörüne tekabül eden $P=(p_1,p_2)$ noktasına B=E/E' hareketinin t anındaki pol nokası denir.

I.2.2 Teorem: Açısal hızı sıfır olmayan bir harekette; her t anında, sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde sukünette kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. Her t anına bir pol noktası karşılık geleceğinden B hareketi esnasında P noktası her iki E ve E' düzlemlerinde muhtelif konumlar alır. P noktasının hareketli E düzlemindeki geometrik yeri genel olarak bir eğridir, bu eğriye B nin hareketli pol eğrisi denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' düzlemindeki geometrik yerine ise sabit pol eğrisi denir ve (P') ile gösterilir.

I.2.4 Tanım: u_1, u_2 ve θ ; bir $t \in IR$ paremetresinin yeteri dereceden türevlenebilen fonksiyonları olmak üzere aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tarif edilmiş olsun. Ayrıca

$$u_j(t+T)=u_j(t), \quad (j=1,2) \tag{I.2.10}$$

$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi\nu \tag{I.2.11}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T>0$ en küçük sayı ise; E/E' hareketine T periyotlu ve ν dönme sayılı 1-paremetreli kapalı düzlemsel hareket denir. Burada ν bir tamsayıdır ve E' ye göre E düzleminin ilk durumuna gelinceye kadar kaç devir yaptığını gösterir.

E düzlemindeki sabit bir X noktası E/E' kapalı hareketi esnasında E' de kapalı bir yörünge çizer. Bu kapalı yörüngenin F_X alanı Green Formülü gereğince

$$F_X=\frac{1}{2}\int(x_1'dx_2'-x_2'dx_1') \tag{I.2.12}$$

dir. Burada

$$[x',dx']=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ dx_1' & dx_2' \end{bmatrix}=x_1'dx_2'-x_2'dx_1' \tag{I.2.13}$$

eşitliği gözönüne alınırsa (I.1.12) bağıntısı yerine

$$F_X=\frac{1}{2}\int[x',dx']$$

yazılabilir. (I.2.13) ifadesi ve (I.2.5) ve (I.2.7) bağıntıları ile birlikte düşünülürse

$$[x',dx']=\{x_1^2+x_2^2-x_1p_1-x_2p_2-x_1u_1-x_2u_2+u_1p_1+u_2p_2\}\,d\theta \tag{I.2.14}$$

elde edilir. Burada

$$u_1=p_1-\frac{du_2}{d\theta}\ ,\qquad u_2=p_2+\frac{du_1}{d\theta}$$

değerleri yerine yazılırsa

$$[x',dx']=\{x_1^2+x_2^2-2x_1p_1-2x_2p_2+x_1\frac{du_2}{d\theta}-x_2\frac{du_1}{d\theta}+u_1p_1+u_2p_2\}d\theta$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$2F_x=(x_1^2+x_2^2)\int d\theta-2x_1\int p_1d\theta-2x_2\int p_2d\theta+x_1\int du_2-x_2\int du_1+\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta \quad (I.2.15)$$

elde edilir.

Diğer taraftan E hareketli düzleminin O orijin noktasının yörünge alanı hesaplanırsa

$$2F_0=\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta$$

olarak bulunur. Düzlemsel hareket kapalı olduğundan; t=0 için

$$\theta(T)=\theta(0)+2\pi\nu \qquad \theta(T)-\theta(0)=2\pi\nu$$
$$\int d\theta(t)=\theta(t)\Big|_0^T=\theta(T)-\theta(0)=2\pi\nu \quad (I.2.16)$$

dir. Aynı şekilde t=0 için

$$u_j(t+T)=u_j(t)$$

eşitliğinden

$$u_j(T)-u_j(0)=0$$

yazılabilir. Buradan

$$\int du_j(t)=u_j(t)\Big|_0^T=u_j(T)-u_j(0)=0$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (I.2.14) de yerine yazılırsa

$$F_X=\pi\nu(x_1^2+x_2^2)-x_1\int p_1d\theta-x_2\int p_2d\theta+F_0 \quad (I.2.17)$$

bulunur.

$\nu\neq0$ ise S Steiner noktasını elde ederiz.

I.2.5 Tanım: $d\theta$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine Steiner noktası denir ve S ile gösterilir. S nin koordinatları s_1 ve s_2 olmak üzere

$$s_j=\frac{\int P_jd\theta}{\int d\theta}=\frac{1}{2\pi\nu}\int P_jd\theta,\ (j=1,2) \quad (I.2.18)$$

dir. Burada pay koordinat eksenlerine göre statik momenti, payda ise

$d\theta$ kitle örtülmesinde (P) pol eğrisinin bütün kitlesini gösterir. (I.2.17) formülünde (I.2.18) gözönüne alınırsa

$$F_X=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2\}+F_0 \qquad (I.2.19)$$

Steiner formülü elde edilir [11].

Steiner formülünden aşağıdaki geometrik sonuçlar verilebilir.

I.2.1 Sonuç: F_X sabit kabul edilirse, (I.2.19) dan

$$x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2+\frac{F_0-F_X}{\pi\nu}=0 \qquad (I.2.20)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem E/E' hareketinde E hareketli düzleminin aynı F_X yüzey alanını çevreleyen yörünge eğrilerini oluşturan bütün X noktalarının bir çember üzerinde bulunduğunu gösterir.

$F_X=0$ olarak alınırsa (I.2.20) den

$$x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2+\frac{F_0}{\pi\nu}=0$$

denklemi elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir.

I.2.2 Sonuç: E nin bir X noktasının F_X alanı esas itibarıyla (yani $1/\pi\nu$ çarpan farkıyla) hareketli E düzleminin bir (Ç) çemberine göre X in kuvveti olarak gösterilebilir. Bu çemberin merkezi S Steiner noktasıdır ve kuvvetin sıfır olmasıyla karekterize edilir.

B=E/E' düzlemsel hareketi $\{0;e_1,e_2\}$ koordinat sisteminin seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle O orijin noktası S Steiner noktası olarak seçilirse o zaman (I.2.19) formülü

$$F_X=\pi\nu(x_1^2+x_2^2)+F_S \qquad (I.2.21)$$

şekline dönüşür.

I.2.6 Tanım: Kapalı E/E' hareketi esnasında, E hareketli düzleminde tesbit edilen bir X noktasının E' sabit düzleminde oluşturduğu (X) eğrisinin $d\theta$ kitle örtülmesinde sabit düzlemin O' orijin noktasına göre kutupsal atalet momenti

$$T_X=\int a^2 d\theta \qquad (I.2.22)$$

dır. Burada a, X noktasının O' orijin noktasına olan uzaklığıdır [11].

II.BÖLÜM

HOLDİTCH TEOREMİ VE KUTUPSAL ATALET MOMENTİ

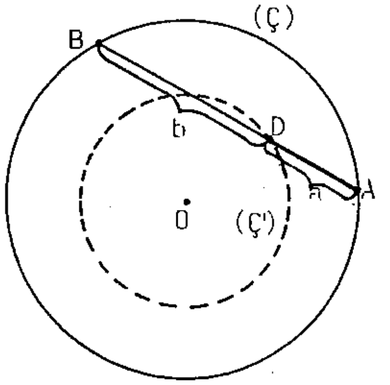
Bu bölümde Holditch Teoremi önce orjinal şekliyle ele alınacak ve bu günün modern matematik yöntemleri ile bazı örnekler verilerek derinlemesine bir tahlili yapıldıktan sonra teoremin modern bir ifadesi verilecektir. Ayrıca bu modern ifadeyi kapsayacak şekilde Holditch Teoremi'nin bir genelleştirilmiş ifadesi verilecektir. Daha sonra 1-paremetreli kapalı düzlemsel hareketlerde yörünge eğrileri için Steiner formülü genelleştirilecek ve yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri için bir formül elde edilerek aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Bundan sonra ise Holditch Teoremi ve kutupsal atalet momenti dual anlamda ele alınacaktır. Bu bölümde ayrıca uzayda helisel eğrilerin hareket yükseklikleri düzlemsel eğrilerin sınırladığı bölgelerin alanları yardımıyla hesaplanacak ve 3-paremetreli hareketler esnasında bir noktanın meydana getirdiği yörünge yüzeyinin hacmini veren bir formül verilecektir.

II.1 HOLDİTCH TEOREMİ

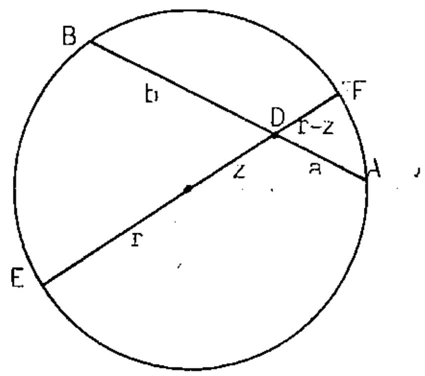
Geçen yüzyılın ortalarında cambridge de Cajus College'nin başkanı olan Hamnet Holditch uç noktaları konveks bir eğri üzerinde hareket eden sabit uzunluklu bir kiriş üzerindeki bir noktanın oluşturmuş olduğu eğrinin dikkate değer bir özelliğini keşfetti. Onun 1858 de yayınlanmış olan ispatında modern okuyucunun alışık olmadığı bazı gösterimlerden yararlanmış ve ifade edilmemiş bazı kabuller yapmıştır [12] . Teoremin elemanter kısmı son derece kolay şekilde anlaşılan türdendir ve daha genel şekli düzlemde integralin elemantar uygulamaları ile ispat edilebilir.

II.1.1 Klasik Holditch Teoremi

Bir orta dereceli okul öğrencisinin anlayacağı ölçüde kolay olan bir problemle işe başlayacağız. r yarıçaplı bir (Ç) çemberi üzerindeki a+b sabit uzunluklu bir kiriş sırasıyla a ve b uzunluklu iki parçaya D noktası tarafından bölünsün. Kiriş çember etrafında tam bir dönme yaptığı zaman D nin geometrik yeri bir iç çember oluşturur (Şekil II.1.1). D nin yörüngesi ve (Ç) çemberi arasında kalan halka



Şekil II.1.1



Şekil II.1.2

şeklindeki alanı bulalım. İç çemberin yarıçapı z olmak üzere (Ç) çemberinde kesişen iki kiriş D de sırasıyla a, b ve r+z, r-z doğru parçalarına bölünür (Şekil II.1.2). (Ç) çemberinin iç bölgesinde bulunan BDE ve FDA üçgenleri benzer üçgenler olduklarından

$$\frac{r-z}{b}=\frac{a}{r+z} \tag{II.1.1}$$

dir. Buradan

$$ab=r^2-z^2$$

dir. (Ç) çemberinin alanı πr^2 ve iç çemberin alanı ise πz^2 olduğundan

$$\pi r^2-\pi z^2=\pi(r^2-z^2)=\pi ab$$

bulunur.

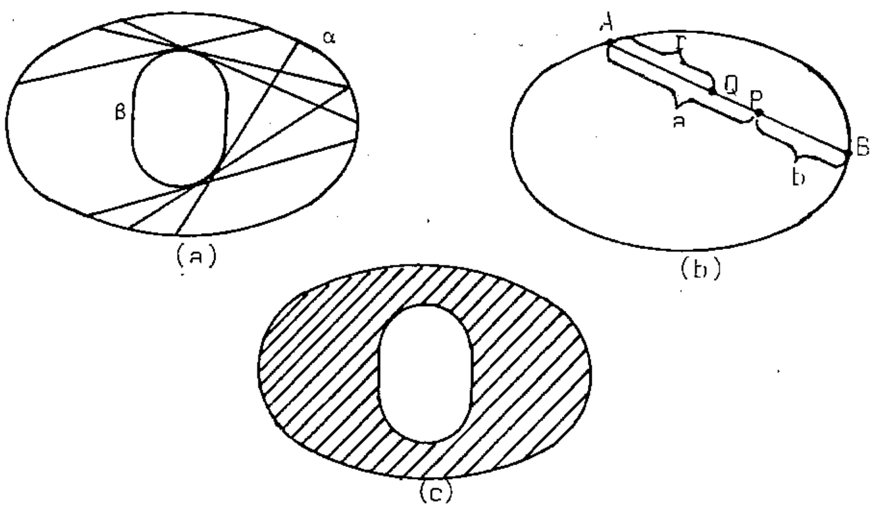
Bu problemin cevabı kirişin çember üzerindeki hareketinden ve verilen çemberin yarıçapından bağımsızdır. Sadece kirişin D ile bölünen a ve b parçalarına bağlıdır[13]. Holditch çember yerine daha

daha genel bir eğri alındığı zaman sonucun doğru kaldığını gördü.

II.1.2 Holditch Teoremi (Kendi İfadesi)

Kapalı bir eğri üzerindeki a+b sabit uzunluklu bir kiriş a ve b uzunluklu iki parçaya bölünebilirse kapalı eğri ve bölen noktanın geometrik yerinin alanları arasındaki fark πab dir.

Holditch yapmış olduğu ispatta verilen α üzerindeki a+b sabit uzunluklu kirişlerin hepsinin, kirişlerin ailesinin zarfı olarak adlandırılan diğer bir β eğrisine teğet olduğu kabulünü yaptı (Şekil II.1.3(a)). Holditch AB kirişinin bu zarfa değdiği noktayı Q ve



Şekil II.1.3

kirişin konumu ile değişen AQ doğru parçasının uzunluğunu da r ile göstermiştir. Kiriş üzerinde bir nokta P ve $|AP|=a$, $|PB|=b$ olmak üzere kirişin tam bir devir yapması sonucunda AQ, BQ ve QP doğru parçalarıyla süpürülmüş olan alanların sırasıyla;

$$F_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta, \qquad F_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a+b-r)^2 d\theta, \qquad F_3=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a-r)^2 d\theta$$

olarak yazılabileceğini iddia eder (Şekil II.1.3(b)). AQ, BQ ve arasındaki aynı halka süpürdüğünden dolayı ilk iki integral eşittirler. Burada F_2 hesaplanırsa

$$F_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a+b-r)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a+b)^2 d\theta-\int_0^{2\pi}(a+b)r\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

olur. Buradan da

$$\int_0^{2\pi} r d\theta = \pi(a+b)$$

olarak elde edilir. Şekil II.1.3(c) de taranılan ve AP ile süpürülen halka şeklindeki bölgenin alanı

$$F_2-F_3=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r^2-(a-r)^2 d\theta = a\int_0^{2\pi} r d\theta - \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} d\theta = a(a+b)\pi - a^2\pi$$

$$F_2-F_3=\pi ab$$

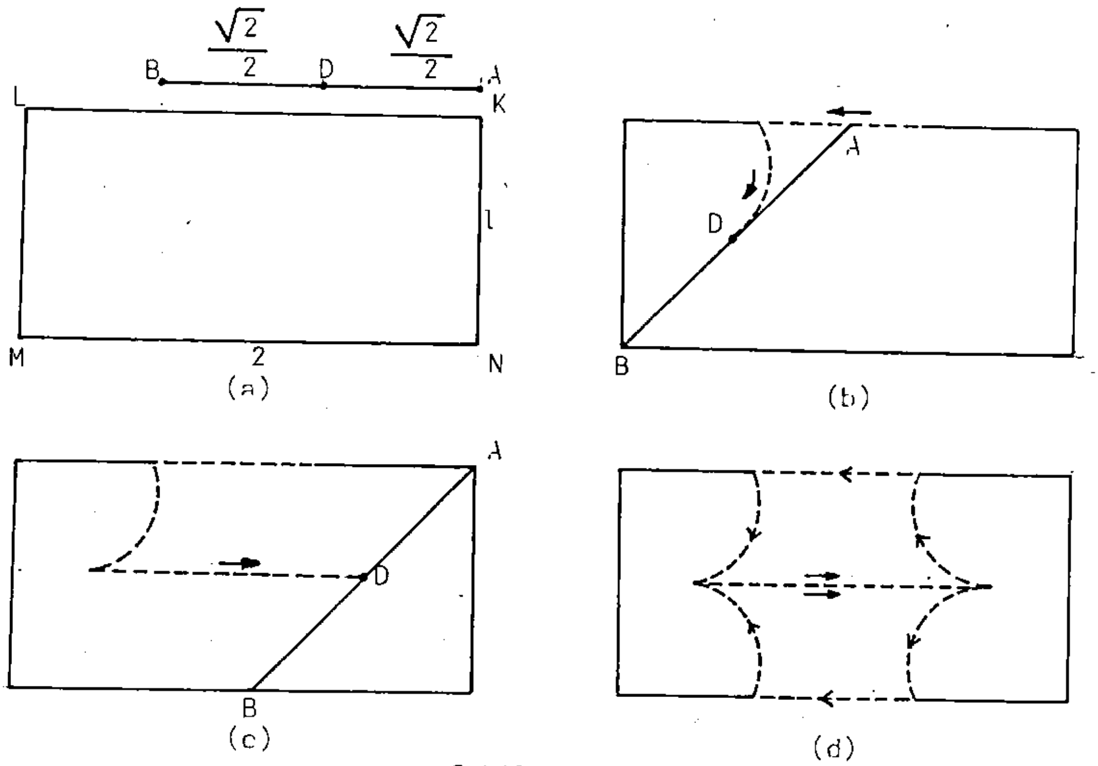
olarak elde edilir. Bu da Holditch'in iddiasını ispatlar.

II.1.3 Holditch Teoremi Üzerine Bazı Yorumlar Ve Modern Bir Düzenleme

Holditch yapmış olduğu ispatında, birkaç ispatsız kabul yapmıştır. Holditch muhtemelen bir çemberin genelleştirilmiş durumunu bir konveks eğri olarak almış fakat o bu kabulden bahsetmemiştir. Onun ispatındaki integral gösterimleri, sabit bir noktaya bağlanmış uzunluğu sürekli olarak değişen ve saat yönünün tersine hareket eden bir vektör tarafından süpürülen alan için geçerlidir.

Holditch'in a+b uzunluklu kirişlerinin hep zarfa teğet olduğunu kabul ettiğini söylemiştik. Holditch zarf kavramını kullanmamıştır. O, bunun yerine "kirişin ardışık konumda kestiği nokta Q olsun" demiştir. Bu terminoloji muhtemelen Newton tarafından sunulmuştur.

Teoremin ifadesinde değinilmeyen önemli bir husus da AB kirişinin uzunluğu için bir üst sınırın gerekli olduğundan sözedilmemesidir. Bu eksikliği gidermek için kenarları 1 ve 2 uzunluklu bir KLMN dikdörtgeni boyunca $\sqrt{2}$ uzunluklu bir AB kirişini hareket ettirelim ve kiriş üzerindeki bir D noktasının geometrik yerini inceleyelim (Şekil II.1.4). Kirişin uzunluğu, A ve B noktalarının dikdörtgenin her bir noktasından bir kez geçecek şekilde dikdörtgen boyunca kaydırılmaya uygun değildir. AB kirişi Şekil II.1.4(a) da gösterilen konumda başlar ve saatın dönme yönünün tersine hareket ederse B, L ye varıncaya kadar A ve B nin her ikiside

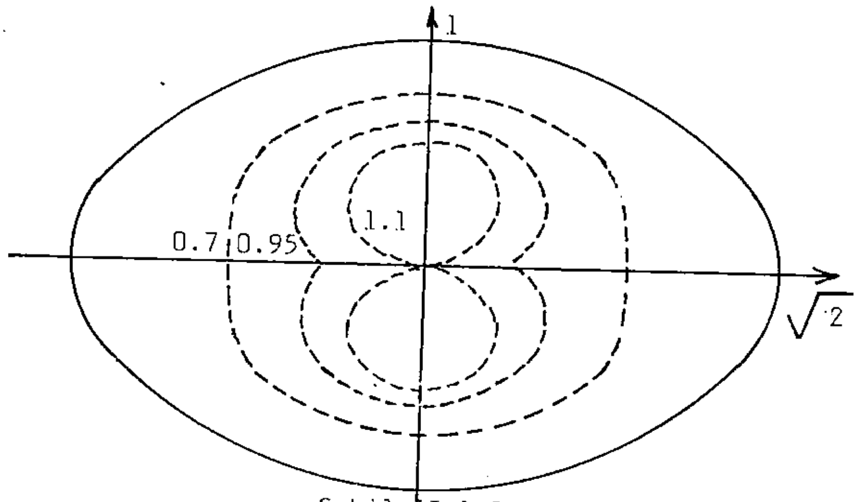


Şekil II.1.4

dikdörtgenin üst kenarı boyunca hareket eder ve sonra B dikdörtgenin sol kenarı üzerinde M ye kadar hareket eder (Şekil II.1.4(b)). B uç noktası N ye doğru giderken A uç noktası dikdörtgenin üst kenarı üzerinde K ya doğru hareket eder (Şekil II.1.4(c)). Daha sonra kirişin A uç noktası K dan N ye doğru giderken B noktası M ye doğru geri hareket eder. Bütün mümkün olan yörüngeler çizilene kadar kirişin hareketine devam edilirse D nin geometrik yeri dört doğru parçasından (onların ikisi çakışıktır) ve dört çember yayından ibaret olur (D nin geometrik yeri Şekil II.1.4(d) de nokta ile belirtilmiş eğri ile gösterilmiştir).

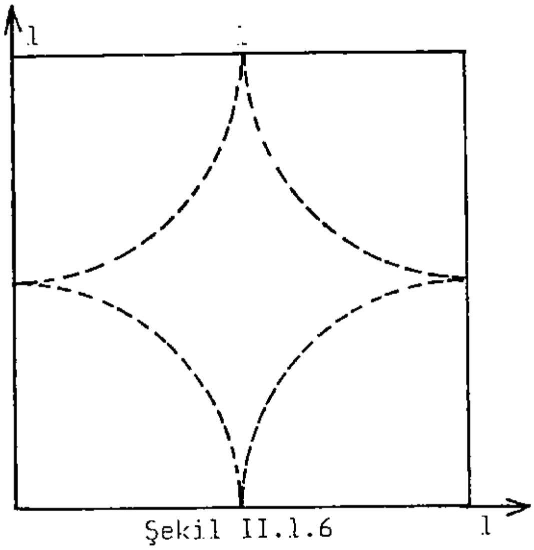
Şimdi geometrik yer ve dikdörtgen arasında kalan bölgenin alanını bulalım. Çember yayları 45^0lik yayları gördüklerinden, çember yaylarının sınırladığı toplam alan $\frac{\pi}{4}$ olur. Dikdörtgen içerisinde meydana gelen $\sqrt{2}/2$ uzunluklu iki tane ikizkenar üçgenin alanı ise $\frac{1}{2}$ dir. Bu durumda dikdörtgen ve D nin geometrik yeri arasında kalan bölgenin alanı $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ dür. Halbuki Holditch'in formülüne göre $\pi ab=\frac{\pi}{2}$ dir. Ohalde Holditch'in, A ve B uç noktalarının α üzerindeki her noktaya bir kez isabet ederek her zaman aynı doğrultuda basit bir şekilde hareket ettiğini kabul ettiğini kabul etmiş olması mümkündür.

Kiriş uzunluğu için bir üst sınır ihtiyacı $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ elipsi ve $a=b=0,7$, $a=b=0,95$ ve $a=b=1,1$ hali için D nin geometrik yerini gösteren şekil II.1.5 den de görülür. Bu durumda D nin geometrik yeri $a=b<1$ için basit kapalı bir eğri, $a=b\geq 1$ için ise geometrik yer sekiz şeklindedir. Holditch Teoremi'ndeki sonuç yalnız $a=b<1$ için sağlanır. Bu örnek Holditch'in, muhtemelen D nin geometrik yerini basit kapalı bir eğri olarak kabul etmiş olduğunu gösterir.

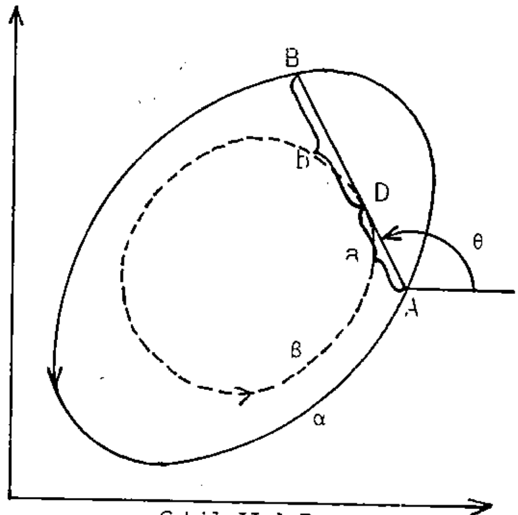


Şekil II.1.5

Sonuç olarak Holditch kiriş zarfının şekil II.1.1 de tasarlanan basit tipten olmayacağını gözden kaçırdı. Örneğin, kare üzerindeki bir uzunluklu kirişi gözönüne alalım (Şekil II.1.6). Kirişin hareketi sonunda zarf eğrisi bir kaç daldan ibaret olur. Bir dalı $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ astroidinin ilk yayıdır. Diğer dallar bu yayın (1/2,1/2) nokası erafında 90° lik dönmesiyle elde edilir. Holdjtch'in ispatı zarfın uygun bir tanımı gözönüne alınmak şartıyla şekil II.1.6 daki durumu kapsamak üzere manalandırılabilir. Şekil II.1.6 kirişin orta noktasının geometrik yerini göstermektedir. Kare ve kirişin orta



Şekil II.1.6



Şekil II.1.7

noktasının geometrik yeri arasında kalan bölgenin alanı $\frac{\pi}{4}$ dür ve bu Holditch Teoremine uygundur.

Holditch'in yaklaşık olarak yaptığı kabulleri tam anlamıyla açıklığa kavuşturmak ve onun teoreminin hangi şartlar altında sağlandığını aydınlatmak için teoremi yeniden dikkatli bir şekilde ifade etmek istiyoruz. İlk olarak bazı tanımların yapılması gerekir.

II.1.1 Tanım: $x=x(t)$ ve $y=y(t)$, $0 \le t \le 1$, sürekli fonksiyonlar olmak üzere $x=x(t)$ ve $y=y(t)$ paremetrik gösterimine sahip olan düzlemsel nokta cümlesine eğri denir [13].

II.1.2 Tanım: $t=0$ ve $t=1$ için aynı noktayı veren fakat bunların dışındaki t değerleri için farklı noktaları veren eğrilere basit kapalı eğri denir [13].

II.1.3 Tanım: Bir basit kapalı α eğrisinin herhangi iki noktası A ve B iken AB doğru parçasının iç noktaları α üzerinde bulunmuyor yada bütün noktaları α üzerinde ise bu α eğrisine kapalı konveks eğri denir [13].

Şimdi Holditch Teoreminin modern bir ifadesini verelim.

II.1.1 Teorem: α, bir kapalı konveks eğri olsun. Bu eğrinin $a+b$ sabit uzunluklu bir AB kirişi uç noktaları α üzerinde kalacak ve $A=A(t)$, $B=B(t)$, $0\leq t\leq 1$, olacak şekilde saatın dönme yönünün tersine hareket etsin. $|AD|=a$ olacak şekilde AB üzerinde bir nokta $D=D(t)$ olsun. AB kirişinin $\theta=\theta(t)$, $0\leq t\leq 1$, doğrultman açısı, $\theta(1)=\theta(0)+2\pi$ olmak üzere t nin sürekli artan bir fonksiyonu olsun. D nin geometrik yeri β olmak üzere, β basit kapalı bir eğri olsun. Bu takdirde α ve β arasında kalan bölgenin alanı πab dir.

Bu teorem bundan sonraki vereceğimiz teoremin özel hali olduğundan ayrıca bir ispatını vermeyeceğiz.

II.1.4 Holditch Teoreminin Genelleştirilmesi

α nın konveks ve β nın basit kapalı eğri olması kabulleri Holditch'in sonucunda gerekli görülmesine rağmen bu şartları hafifletebilir ve daha genel bir formül elde edebiliriz. Bu durumda ise Holditch'in formülü bu genel formülün özel bir hali olur.

II.1.4 Tanım: $[u,v]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon $f(t)$ olsun. Her $\{u=t_0<t_1<\ldots<t_n=v\}$ parçalanması için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})|$$

toplamının üst sınırı olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa f ye $[u,v]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır denir.

II.1.2 Teorem: α, $x=x(t)$ ve $y=y(t)$, $0\leq t\leq 1$, paremetrik gösterimi ile bir kapalı rectifiable eğri olsun. Sürekli sınırlı salınımlı $\theta=\theta(t)$, $0\leq t\leq 1$, fpnksiyonu ν bir tam sayı olmak üzere $\theta(1)=\theta(0)+2\pi\nu$ eşitliğini sağlayacak şekilde verilsin. $A=A(t)$ noktası α üzerinde olsun. a ile b pozitif sayılar olmak üzere $a+b$ uzunluklu ve $\theta=\theta(t)$ doğrultman açılı bir doğru parçası AB olacak şekilde $B=B(t)$ noktası verilsin. A dan a mesafesinde AB nin bir noktası $D=D(t)$, $0\leq t\leq 1$, olsun. A noktası α yı çizerken B ve D nin çizmiş olduğu eğriler sırasıyla β ve δ olsun. α , β ve δ eğrilerinin sınırladıkları alanlar sırasıyla

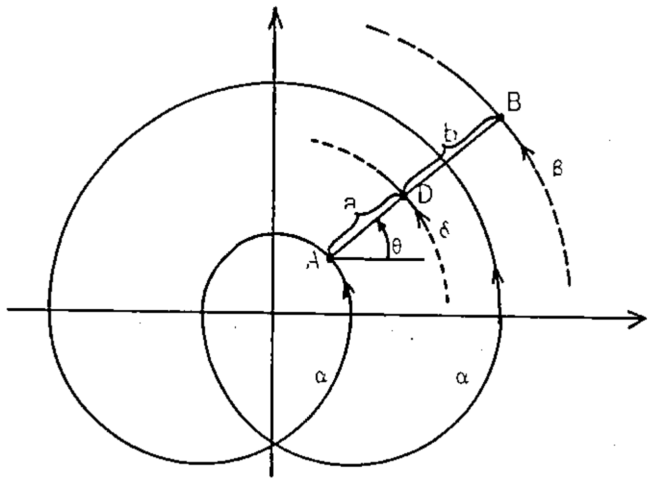
$$F_\alpha=\int_\alpha x dy, \qquad F_\beta=\int_\beta x dy, \qquad F_\delta=\int_\delta x dy$$

olmak üzere

$$F_\delta=\frac{1}{a+b}\{bF_\alpha+aF_\beta\}-\pi\nu ab \tag{II.1.2}$$

dir.

İspat: α nın rectifiable ve θ nın sınırlı salınımlı dönüşüm olması β ve δ nın da rectifiable olmasını gerektirir. Böylece F_α , F_β ve F_δ tanımlıdır. $\theta(1)=\theta(0)+2\pi\nu$ şartı, AB doğru parçasının α üzerinde hareket ettiğinde A noktasının tekrar başlama noktasına geri geldiği sonucunu verir. Burada ν tamsayısı ise AB kirişinin dönme sayısıdır (Şekil II.1.8). B noktası tarafından oluşturulan β eğrisinin



Şekil II.1.8

sınırladığı bölgenin alanı

$$F_\beta=\int_\beta x dy=\int_\delta(x+b\cos\theta)d(y+b\sin\theta)$$

dır. Burada

$$I=\int_\delta x d(\sin\theta)+\cos\theta dy \quad \text{ve} \quad I_1=\int_\delta \cos\theta d(\sin\theta)$$

olarak alınırsa

$$F_\beta=F_\delta+bI+b^2 I_1$$

olur. Benzer şekilde

$$F_\alpha=\int xdy=\int_\delta(x-a\cos\theta)d(y-a\sin\theta)$$

veya

$$F_\alpha=F_\delta-aI+a^2I_1$$

olur. Buradan ise

$$bF_\alpha+aF_\beta=(a+b)F_\delta+ab(a+b)I_1$$

eşitliği sağlanır. I_1 in

$$I_1=\int_\delta\cos^2\theta d\theta=\pi\nu$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$F_\delta=\frac{1}{a+b}\{bF_\alpha+aF_\beta\}-\pi\nu ab$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Eğer α ve β aynı eğri ise (Holditch'in orjinal ifadesinde olduğu gibi) bu takdirde (II.1.2) ifadesi

$$F_\alpha=F_\delta-\pi\nu ab \qquad \text{(II.1.3)}$$

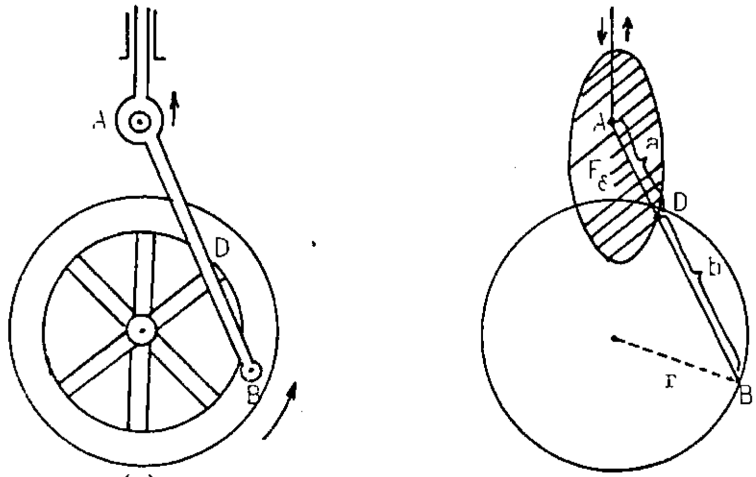
olur. Burada $\nu=1$ olarak alınırsa

$$F_\alpha=F_\delta-\pi ab \qquad \text{(II.1.4)}$$

elde edilir. Ayrıca δ nın basit kapalı bir eğri olduğu kabul edilirse (II.1.4) denkleminden teorem (II.1.1) yeniden elde edilmiş olur.

Şimdi bu teoremle ilgili birkaç örnek verelim.

II.1.1 Örnek: Şekil II.1.9(a) daki piston üzerindeki D noktası tarafından oluşturulan yörüngenin alanını bulunuz.



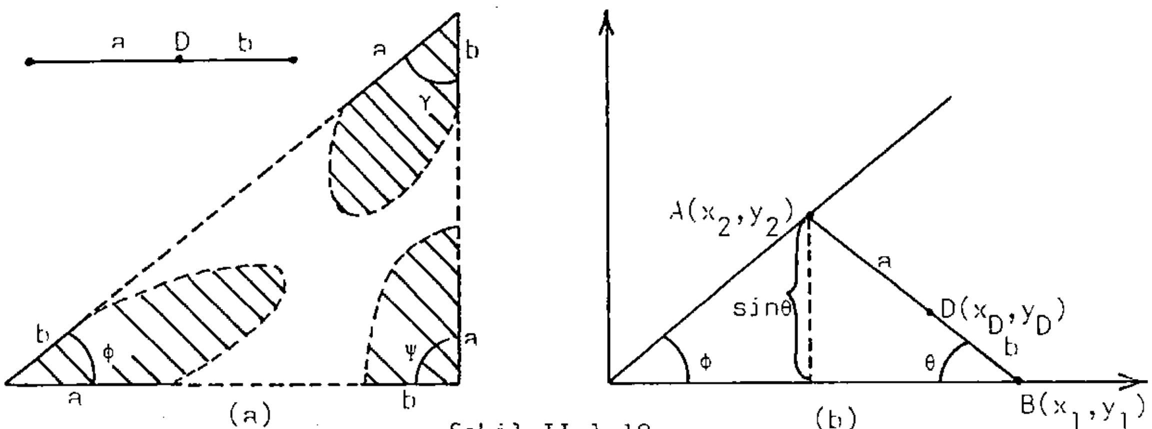
(a) Şekil II.1.9 (b)

Çözüm: Pistonun hareketi ile A noktası aşağı yukarı doğru hareket eder ve böylece A nın çizdiği α eğrisi rectifiable bir eğridir. Teorem (II.1.2) den ve şekil II.1.9(b) den

$$I_\delta=\frac{1}{a+b}\{bI_\alpha+aI_\beta\}-\pi vab=\frac{1}{a+b}\{0+a\pi r^2\}-0=\frac{a}{a+b}\pi r^2$$

olur. Burada r, B nin çizdiği çemberin yarıçapıdır.

II.1.2 Örnek: Bir üçgen ve bu üçgenin herhangi bir yüksekliğinden daha kısa olan bir doğru parçası verilsin. D noktası doğru parçasını a ve b parçalarına bölsün. Dogru parçası üçgen üzerinde kalacak şekilde hareket etsin. D nin geometrik yeri δ olmak üzere δ basit kapalı bir eğri olsun. Şekil II.1.10(a) da gösterilen δ ve üçgen arasındaki alanı bulunuz.



Şekil II.1.10

Çözüm: Önemli bir kısıtlama olmayan a+b=1 olduğunu kabul edelim. F_ϕ şekil II.1.10(a) da sol tarafta taranmış bölgenin alanı ve $\partial\phi$ de onun sınırı olsun. Şekil II.1.10(b) AB doğru parçasının F_ϕ alanını oluşturduktan sonraki konumunu göstersin. Bu gösterim kullanılarak aşağıdakiler bulunur.

$$x_1=\cos\theta+\sin\theta\cot\phi,\quad x_2=\sin\theta\cot\phi,\quad y_1=0,\quad y_2=\sin\theta$$

A, B ve D noktaları doğrudaş ve a+b=1 olduğundan

$$x_D=ax_1+bx_2,\quad y_D=ay_1+by_2$$

yada

$$x_D = a\cos\theta + \sin\theta\cot\phi, \quad y_D = b\sin\theta$$

olrak yazılır. F_ϕ alanı hesaplanırsa

$$F_\phi = \int_{\partial\phi} x\,dy = \int_0^{\pi-\phi}(a\cos\theta + \sin\theta\cot\phi)\,d(\sin\theta) + \int_{b\sin\phi}^{\rho} y\cot\phi\,dy$$

integral alınıp düzenleme yapılırsa

$$F_\phi = \frac{ab}{2}(\pi - \phi)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde F_γ ve F_ψ de

$$F_\gamma = \frac{ab}{2}(\pi - \gamma), \quad F_\psi = \frac{ab}{2}(\pi - \psi)$$

olarak elde edilir. Toplam F alanı ise

$$F = F_\phi + F_\gamma + F_\psi = \frac{ab}{2}(3\pi - (\phi + \gamma + \psi)) = \pi ab$$

şeklinde elde edilir ki bu da Holditch Teoremini sağlar.

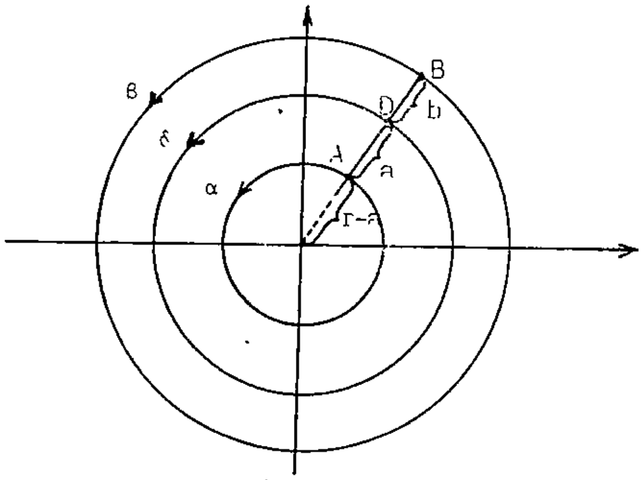
II.1.5 IR^3 De Holditch Teoremi Varmıdır?

Green Teoremi teorem (II.1.2) nin ispatında önemli bir unsurdur. IR^2 deki Green Teoreminin IR^3 e genelleştirilmişi Stokes Teoremidir. Stokes Teoremi ve teorem (II.1.2) deki tekniğin aynısı kullanılarak IR^3 de α, β ve δ yüzeyleri için

$$V_\delta = \frac{1}{a+b}\{bV_\alpha + aV_\beta\} - \nu\frac{4\pi}{3}ab(a+b) \qquad \text{(II.1.5)}$$

şeklinde bir formül elde edileceğini ümit ederiz. Burada δ nın sınırladığı kapalı bir yüzey içindeki hacim $V_\delta = \int_\delta x\,dy\,dz$ (benzer şekilde V_α ve V_β içinde geçerli), ν IR^3 deki AB nin dönme sayısı, $\frac{4\pi}{3}$ birim kürenin hacmi ve $|AB|$ sabittir. Fakat bu düşünce tahmin edilen sonucu vermez. Bunu aksine bir örnek vererek gösterelim.

Şekil II.1.11 deki α, β ve δ çemberlerinin sınırladıkları



Şekil II.1.11

alanlar sırasıyla F_α, F_β ve F_δ olsun. Teorem (II.1.2) den

$$F_\delta - \frac{b}{a+b} F_\alpha - \frac{a}{a+b} F_\beta = \pi r^2 - \frac{b}{a+b}\pi(r-a)^2 - \frac{a}{a+b}\pi(r+b)^2$$

yada

$$F_\delta - \frac{b}{a+b} F_\alpha - \frac{a}{a+b} F_\beta = -\pi ab$$

olur.

Şimdi benzer şekilde IR^3 de α, β ve δ kürelerinin hacimleri sırasıyla V_α, V_β ve V_δ olsun. (II.1.5) denklemi uygulanırsa ve $\nu=1$ olduğu kabul edilirse

$$\frac{3}{4\pi}\left(V_\delta - \frac{b}{a+b} V_\alpha - \frac{a}{a+b} V_\beta\right) = \pi r^3 - \frac{b}{a+b}\pi(r-a)^3 - \frac{a}{a+b}\pi(r+b)^3$$

yada

$$\frac{3}{4\pi}\left(V_\delta - \frac{b}{a+b} V_\alpha - \frac{a}{a+b} V_\beta\right) = -3abr + ab(a-b)$$

elde edilir. Elde edilen bu son ifade r ye bağlı olrak değişir. Yani çıkan sonuç kürenin seçilişinden bağımsız değildir. Bu ise IR^2 deki durum ile çelişir. Ohalde IR^3 de muhtemelen Holditch Teoremi yoktur ve benzer düşünceyle muhtemelen IR^n de de Holditch Teoremi yoktur [13].

II.2 DÜZLEM KİNEMATİĞİNDE STEİNER FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

Jakob Steiner, hareketli düzlemin bir noktasının sabit düzlemde çizmiş olduğu eğri trafından sınırlanan kapalı düzlemsel bölgenin alanının hesabı için (I.2.19) formülünü vermiştir.

Hareketli ve sabit düzlemin noktalarını seçilen eksen sistemlerine göre birer kompleks sayı ile gösterebiliriz. E hareketli düzleminin bir X noktasını $X=x_1+ix_2$ ve buna karşılık E' de ise $X'=x_1'+ix_2'$ ile gösterebiliriz. E nin E' ye göre kapalı hareketini

$$X'=U'+Xe^{i\theta} \tag{II.2.1}$$

ile göstereceğiz. Burada $U'=U'(t)$ ve $\theta=\theta(t)$ olacak şekilde t reel paremetresinin fonksiyonlarıdır. θ dönme açısının t ye göre türevinin her t anında $\frac{d\theta}{dt}\neq 0$ olduğunu kabul edelim.

E hareketli düzleminde $X=x_1+ix_2$, $\bar{X}=x_1-ix_2$, $S=s_1+is_2$ ve $\bar{S}=s_1-is_2$ olmak üzere (I.2.19) Steiner formülünden

$$F_X=\pi\nu\{X\bar{X}-S\bar{X}-\bar{S}X\}+F_0 \tag{II.2.2}$$

yazılabilir. Gerçekten;

$$X\bar{X}=x_1^2+x_2^2$$

$$S\bar{X}+\bar{S}X=2s_1x_1+2s_2x_2$$

olduğundan (II.2.2) elde edilir.

Şimdi

$$U'=-Ue^{i\theta} \tag{II.2.3}$$

eşitliği (II.2.1) ile birlikte gözönüne alınırsa P hareketli ve P' sabit pol noktaları için E ve E' koordinat sistemlerine göre sırasıyla

$$P=U-j\,\frac{dU}{d\theta}\,, \qquad P'=U'+j\,\frac{dU'}{d\theta} \tag{II.2.4}$$

elde edilir. Gerçekten (II.2.1) in diferensiyeli alınırsa

$$dX'=dU'+jXe^{i\theta}d\theta+e^{i\theta}dX$$

olur. Burada sürüklenme hızının sıfır olduğu yer pol noktasıdır. Buna göre

$$dU'+iXd\theta e^{i\theta}=0$$

veya

$$X=\frac{-dU'}{id\theta e^{i\theta}}$$

olur. (II.2.3) deki U' değeri yerine yazılırsa

$$P=X=U-i\frac{dU}{d\theta}$$

elde edilir. (II.2.1) den ve

$$X=\frac{-dU'}{id\theta e^{i\theta}}$$

den

$$P'=X'=U'+i\frac{dU'}{d\theta}$$

elde edilir. (II.2.3) ve (II.2.4) birlikte gözönüne alınırsa

$$P'=(P-U)e^{i\theta} \qquad \text{(II.2.5)}$$

elde edilir. Gerçekten

$$P'=U'+i\frac{dU'}{d\theta}=(-Ue^{i\theta})+\frac{d(-Ue^{i\theta})}{d\theta}$$

veya

$$P'=-i\frac{dU}{d\theta}e^{i\theta}$$

olur. (II.2.4) den

$$-i\frac{dU}{d\theta}=(P-U)$$

değeri yerine yazılırsa (II.2.5) elde edilir. Steiner noktasını kompleks sayılar cinsinden

$$S=s_1+is_2=\frac{\int Pd\theta}{\int d\theta}=\frac{\int P_1d\theta}{\int d\theta}+i\frac{\int P_2d\theta}{\int d\theta} \qquad \text{(II.2.6)}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\int Pd\theta=\int Ud\theta, \qquad \int d\theta=2\pi\nu \qquad \text{(II.2.7)}$$

dir. Gerçekten

$$\int Pd\theta=\int Ud\theta-i\int dU$$

dur ve

$$\int dU=U\Big|_t^{t+T}=U(t+T)-U(t)=0$$

olur. Ayrıca

$$\int d\theta = \theta\Big|_{t}^{t+T} = \theta(t+T) - \theta(t) = 2\pi\nu$$

olarak elde edilir.

Şimdi $\nu=0$ için (I.2.19) ve (II.2.2) formüllerini tekrar ele alalım. $\underline{P}=\underline{p}_1+j\underline{p}_2=\int P d\theta=\int p_1 d\theta+j\int p_2 d\theta$ olmak üzere kolayca

$$F_X=F_0-\{x_1\underline{p}_1+x_2\underline{p}_2\}=F_0-\frac{1}{2}\{X\overline{\underline{P}}+\overline{X}\underline{P}\} \qquad \text{(II.2.8)}$$

olduğu görülür. Gerçekten;

$$F_X=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2\}-x_1\int p_1 d\theta-x_2\int p_2 d\theta+F_0$$

denkleminde $\nu=0$ olduğu gözönüne alınırsa (II.2.8) elde edilir.

E nin iki noktası X ve Y olsun. Bu noktaların E' de çizdiği yörüngelerin alanları sırasıyla F_X ve F_Y olmak üzere XY doğru parçası üzerinde bir Z noktası alalım. Bu noktanın yörünge alanı da F_Z olsun. X, Y ve Z noktaları doğrudaş olduğundan, λ ve μ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$Z=\lambda X+\mu Y, \qquad \lambda+\mu=1 \qquad \text{(II.2.9)}$$

dir. (II.2.1) den

$$Z'=U'+Ze^{j\theta}=(\lambda+\mu)U'+(\lambda X+\mu Y)e^{j\theta}$$

yada

$$Z'=\lambda X'+\mu Y' \qquad \text{(II.2.10)}$$

olarak elde edilir. (I.2.19) formülü (I.2.12) formülünden elde edilmiştir buna göre (I.2.12) ve (II.2.10) dan ,

$$F_Z=\frac{1}{2}\int[\lambda X'+\mu Y',\ \lambda dX'+\mu dY']$$

veya

$$[\lambda X'+\mu Y',\ \lambda dX'+\mu dY']=\begin{vmatrix} \lambda x_1'+\mu y_1' & \lambda x_2'+\mu y_2' \\ \lambda dx_1'+\mu dy_1' & \lambda dx_2'+\mu dy_2' \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2\{x_1'dx_2'-x_2'dx_1'\}+\lambda\mu\{x_1'dy_2'+y_1'dx_2'-x_2'dy_1'-y_2'dx_1'\}+\mu^2\{y_1'dy_2'-y_2'dy_1'\} \qquad \text{(II.2.11)}$$

den dolayı

$$F_Z=\lambda^2F_X+2\lambda\mu F_{XY}+\mu^2F_Y \tag{II.2.12}$$

elde edilir. Burada

$$F_{XY}=\frac{1}{4}\int[X',dY']+[Y',dX'] \tag{II.2.13}$$

veya

$$F_{XY}=\frac{1}{4}\int\{x_1'dy_2'-x_2'dy_1'+y_1'dx_2'-y_2'dx_1'\}\,d\theta \tag{II.2.14}$$

dır ve E deki X ile Y noktalarının karma yörünge alanları olarak adlandırılır [14].

(II.2.1) de (II.2.3) yerine yazılırsa

$$X'=(X-U)e^{i\theta} \tag{II.2.15}$$

olur. E hareketli düzleminde sabit bir X noktasının E' sabit düzleminde çizilme hızı (II.2.1) den

$$dX'=dU'+iXe^{i\theta}d\theta$$

dır. (II.2.3) den

$$dX'=i(U'+Xe^{i\theta})d\theta-dUe^{i\theta}$$

olur ve (II.2.4) den

$$dUe^{i\theta}=iP'd\theta$$

dır. Burdan da

$$dX'=i(X'-P')d\theta$$

olarak elde edilir. Tekrar (II.2.1) ve (II.2.4) ile birlikte

$$dX'=i(X'-P')d\theta=i(X-P)e^{i\theta}d\theta \tag{II.2.16}$$

bulunur. Bu ifadeleri elde ettikten sonra (II.2.13) ve (II:2.14) formüllerine tekrar dönelim. (II.2.13) formülü (II.2.15) ve (II.2.16) dan dolayı

$$F_{XY}=\frac{1}{4}\int\{[(X-U)e^{i\theta},\ i(Y-P)e^{i\theta}]+[(Y-U)e^{i\theta},\ i(X-P)e^{i\theta}]\}d\theta \tag{II.2.17}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer

$$\begin{aligned}&[ae^{i\theta},\ be^{i\theta}]=[a,\ b]\\&[a,\ ib]=a_1b_1+a_2b_2=\frac{1}{2}(a\bar{b}+\bar{a}b)\end{aligned} \tag{II.2.18}$$

oldukları göz önüne alanırsa (II.2.17) formulü

$$F_{XY}=\frac{1}{8}\int\{(X-U)(\bar{Y}-\bar{P})+(\bar{X}-\bar{U})(Y-P)+(Y-U)(\bar{X}-\bar{P})+(\bar{Y}-\bar{U})(X-P)\}\,d\theta$$

yada

$$F_{XY}=\frac{1}{4}\int(X\bar{Y}+\bar{X}Y)d\theta-\frac{1}{8}\int\{(X+Y)(\bar{U}+\bar{P})+(\bar{X}+\bar{Y})(U+P)\}d\theta+\frac{1}{4}\int(U\bar{P}+\bar{U}P)d\theta$$

halini alır. E nin O orijin noktasının yörünge alanı

$$F_0=\frac{1}{2}\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta=\frac{1}{4}\int(U\bar{P}+\bar{U}P)d\theta \tag{II.2.19}$$

olduğundan ve (II.2.6) ile (II.2.7) den

$$F_{XY}=\frac{\pi\nu}{2}\{X\bar{Y}+\bar{X}Y-(X+Y)\bar{S}-(\bar{X}+\bar{Y})S\}+F_0 \tag{II.2.20}$$

yada

$$F_{XY}=\pi\nu\{x_1y_1+x_2y_2-(x_1+y_1)s_1-(x_2+y_2)s_2\}+F_0 \tag{II.2.21}$$

olur. Buradan da tekrar X=Y halinde, $F_{XX}=F_X$ olmak üzere Steiner formulü elde edilir.

(II.2.12) formülüne göre, eğer iki farklı X, Y noktası için F_X, F_Y ve F_{XY} yörünge alanları biliniyorsa XY doğrusunun herhangi bir Z noktasının F_Z yörünge alanı hesaplanabilir.

Şimdi E hareketli düzleminin O orijin noktasının S Steiner noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda S=O ve $F_0=F_S$ olacağından

$$\begin{aligned}F_X&=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2\}+F_S\\ F_{XY}&=\pi\nu\{x_1y_1+x_2y_2\}+F_S\end{aligned} \tag{II.2.22}$$

olur. $\nu>0$, $X\neq S$ ve $X\neq Y$ için

$$F_X>F_S,\qquad F_X-2F_{XY}+F_Y>0 \tag{II.2.23}$$

olduğu kolayca görülür. Gerçekten;

$$F_X-F_S=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2\}>0$$

ve

$$F_X-2F_{XY}+F_Y=\pi\nu\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\}>0$$

olduğundan (II.2.23) elde edilir. Daha sonra Schwarz eşitsizliğinden

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1y_2-y_1x_2)^2\geq 0$$

dır. Schwarz eşitsizliği ile birlikte

$$F_X-F_S=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2\}$$

$$F_Y-F_S=\pi\nu\{y_1^2+y_2^2\}$$

$$F_{XY}-F_S=\pi\nu\{x_1y_1+x_2y_2\}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$(F_X-F_S)(F_Y-F_S)-(F_{XY}-F_S)^2\geq 0 \qquad (II.2.24)$$

yada

$$F_XF_Y-F_{XY}^2\geq F_S(F_X+F_Y-2F_{XY}) \qquad (II.2.25)$$

olarak yazılır. $F_S>0$ olarak kabul edilirse (II.2.23) den

$$F_XF_Y-F_{XY}^2>0 \qquad (II.2.26)$$

olur.

$\nu<0$ için benzer denklemler elde edilir. Burada genellikle eşitsizlik işareti tersine döner.

Buraya kadar imkansız olan $\nu=0$ durumunda T periyoduna sahip B kapalı hareketinde S Steiner noktası oluşmaz. Buna göre karma yörünge alanı olarak adlandırılan (II.2.13) formülü

$$F_{XY}=\frac{1}{4}\int(U\bar{P}+\bar{U}P)d\theta-\frac{1}{8}\int\{(X+Y)(\bar{U}+\bar{P})+(\bar{X}+\bar{Y})(U+P)\}d\theta$$

yada

$$F_{XY}=F_0-\frac{1}{4}\{(X+Y)\underline{\bar{P}}+(\bar{X}+\bar{Y})\underline{P}\} \qquad (II.2.27)$$

olarak yazılır. Burada

$$(X+Y)\underline{\bar{P}}+(\bar{X}+\bar{Y})\underline{P}=2\{(x_1+y_1)\underline{p}_1+(x_2+y_2)\underline{p}_2\}$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$F_{XY}=F_0-\frac{1}{2}\{(x_1+y_1)\underline{p}_1+(x_2+y_2)\underline{p}_2\} \qquad (II.2.28)$$

elde edilir ki X=Y halinde tekrar (II.2.8) elde edilir. Şimdi

$$F_X-2F_{XY}+F_Y=0 \qquad (II.2.29)$$

ve

$$4(F_{XY}^2-F_XF_Y)=(F_X-F_Y)^2=\{(x_1-y_1)\underline{p}_1+(x_2-y_2)\underline{p}_2\}^2\geq 0$$

olduğundan dolayı

$$F_{XY}^2-F_XF_Y\geq 0 \qquad (II.2.30)$$

elde edilir.

Şimdi varsayımlarımıza bazı ilaveler daha katalım. $X \neq Y$ olmak üzere $F_X = F_Y$ olsun. Bu takdirde yörünge alanları eşit olan noktalar S Steiner nokta merkezli çember üzerinde bulunurlar ve (II.2.23) ifadesi

$$F_X - F_{XY} > 0 \qquad (II.2.31)$$

olur. Buradan da (II.2.25) den

$$F_X + F_{XY} \geq 2F_S \qquad (II.2.32)$$

elde edilir.

$\nu = 0$ halinde kapalı B hareketinde $X \neq Y$ ve $F_{XY} = F_X$ olması halinde (II.2.30) da eşitlik hali geçerlidir.

E hareketli düzleminde bir XY doğrusu üzerindeki bir Z noktasının ifadesinde $\lambda + \mu = 1$ parametrelerinden faydalanmıştık. $\lambda = 1 - \mu$ olmak üzere

$$Z = (1-\mu)X + \mu Y$$

dir. (II.2.12) den dolayı

$$F_Z = (1-\mu)^2 F_X + 2\mu(1-\mu)F_{XY} + \mu^2 F_Y$$

olur. Buradan sonra XY doğrusu üzerinde $Z = Z_0$ noktaları için F_Z alanının en küçük olduğu değer hangisidir sorusu akla gelir. $\frac{dF_Z}{d\mu} = 0$ dan, $\nu > 0$ durumunda μ için

$$\frac{dF_Z}{d\mu} = -2(1-\mu)F_X + 2(1-2\mu)F_{XY} + 2\mu F_Y = 0$$

veya

$$-F_X + \mu F_X + F_{XY} - 2\mu F_{XY} + \mu F_Y = 0$$

olur ve buradan

$$\mu_0 = \frac{F_X - F_{XY}}{F_X - 2F_{XY} + F_Y}$$

elde edilir. (II.2.23) e göre

$$\frac{d^2 F_Z}{d\mu^2} = 2(F_X - 2F_{XY} + F_Y) > 0$$

olur. Bu durumda XY doğrusu üzerinde $Z_0 = (1-\mu_0)X + \mu_0 Y$ ile minumum yörünge alanı

$$F_{Z_0} = \frac{F_X F_Y - F_{XY}}{F_X - 2F_{XY} + F_Y} > 0$$

olarak elde edilir.

II.3 STEİNER KİTLE ÖRTÜLMESİNDE KUTUPSAL ATALET MOMENTİ

Düzlemde kapalı hareketlerin yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentlerinin hesaplanması, yörünge eğrileri tarafından sınırlanmış olan bölgelerin alanlarının hesaplanmasına benzer olarak yapılır.

1-parametreli kapalı B=E/E' hareketi (II.2.1) ile tanımlansın. E' sabit düzleminin O' orijinine göre E de belirlenen sabit bir X noktasının Steiner anlamında $d\theta$ kitle elementi ile örtülen (X) eğrisinin kutupsal atalet momentini hesaplayalım. E de belirlenen bir X noktasının O' orijin noktasına olan uzaklığının karesi

$$X'\overline{X}'=x_1'^2+x_2'^2$$

dir. (II.2.1) ve (II.2.3) den

$$X'\overline{X}'=X\overline{X}-X\overline{U}-\overline{X}U+U\overline{U} \qquad (II.3.1)$$

elde edilir. E hareketli düzleminde X sabit bir nokta olmak üzere X in yörüngesinin $d\theta$ kitle örtülmesinde E' sabit düzleminin O' orijin noktasına göre kutupsal atalet momenti

$$T_X=\int X'\overline{X}'d\theta$$

dır. Bu (II.3.1) ile birlikte gözönüne alınırsa

$$T_X=2\pi\nu\{X\overline{X}-X\overline{S}-\overline{X}S\}+T_0 \qquad (II.3.2)$$

elde edilir. Burada T_0 E hareketli düzleminin O orijin noktasının çizmiş olduğu eğrinin E' nün O' orijin noktasına göre kutupsal atalet momentidir ve

$$T_0=\int U\overline{U}d\theta$$

dir.

X noktasının J.Steiner tarafından elde edilen yörünge eğrisinin sınırladığı F_X alanını veren (I.2.19) ifadesi ile burada elde ettiğimiz (II.3.2) ifadesi hemen hemen aynı şekildedir [15] . (I.2.19) ile (II.3.2) karşılaştırılırsa

$$T_X=2(F_X-F_0)+T_0 \qquad (II.3.3)$$

elde edilir.

Şimdi E de sabit X, Y noktalarını ve bunların oluşturduğu XY doğru parçası üzerindeki bir Z noktasını ele alalım. Z noktasının yörüngesinin kutupsal atalet momenti

$$T_Z=\int Z'\bar{Z}'d\theta$$

dır. (II.2.10) dan

$$T_Z=\lambda^2T_X+2\lambda\mu T_{XY}+\mu^2T_Y \qquad (II.3.4)$$

olur. Burada $T_{XY}=T_{YX}$ olmak üzere

$$T_{XY}=\int(X'\bar{Y}'+\bar{X}'Y')d\theta \qquad (II.3.5)$$

dır ve X ile Y noktalarının yörüngelerinin karma kutupsal atalet momenti olarak adlandırılır [15].

T_{XY} ifadesini E nin koordinatlarına göre ifade edelim. Bu durumda (II.2.1) den

$$T_{XY}=\int\{(U'+Xe^{i\theta})(\bar{U}'+\bar{Y}e^{-i\theta})+(\bar{U}'+\bar{X}e^{-i\theta})(U'+Ye^{i\theta})\}d\theta$$

olur. (II.2.3) ve (II.2.6) ile birlikte

$$T_{XY}=\pi\nu\{X\bar{Y}+\bar{X}Y-(X+Y)\bar{S}-(\bar{X}+\bar{Y})S\}+T_0 \qquad (II.3.6)$$

olarak elde edilir. (II.2.20) ile (II.3.6) karşılaştırılırsa

$$T_{XY}=2(F_{XY}-F_0)+T_0 \qquad (II.3.7)$$

olduğu kolayca görülür.

Eğer E hareketli düzleminin O orijin noktası S Steiner noktası olacak şekilde seçilirse

$$T_X=2\pi\nu X\bar{X}+T_S$$

ve $\qquad (II.3.8)$

$$T_{XY}=\pi\nu(X\bar{Y}+\bar{X}Y)+T_S$$

eşitlikleri bulunur.

Şimdi yörünge alanları için yapılan irdelemeleri yörüngelerin kutupsal atalet momentleri için de yapalım. Buna göre $\nu>0$, $X\neq S$ ve $X\neq Y$ için

$$T_X>T_S, \quad T_X-2T_{XY}+T_Y>0 \qquad (II.3.9)$$

yada

$$T_X-2T_{XY}+T_Y=2\pi\nu d^2>0$$

dır. Burada

$$d^2=(Y-X)(\overline{Y}-\overline{X})$$

dir. Yani d, X ile Y arasındaki uzaklıktır. Böylece karma kutupsal atalet momentinin değişik bir ifadesi olan

$$T_{XY}=\frac{1}{2}\{T_X+T_Y\}-\pi\nu d^2 \qquad \text{(II.3.10)}$$

verilebilir. (II.3.3) ve (II.3.7) den

$$T_{XY}=T_0+F_X+F_Y-2F_0-\pi\nu d^2 \qquad \text{(II.3.11)}$$

elde edilir.

$T_S>0$ için Schwarz eşitsizliğinden dolayı

$$T_XT_Y-T_{XY}^2>0$$

dır. Gerçekten değerler yerine yazılıp hesaplanırsa

$$T_XT_Y-T_{XY}^2=\pi^2\nu^2(2x_1y_2-2x_2y_1)^2+2\pi\nu T_S d^2>0$$

olarak bulunur. (II.3.8) den

$$T_X-T_S=2\pi\nu X\overline{X}$$

$$T_Y-T_S=2\pi\nu Y\overline{Y}$$

$$T_{XY}-T_S=\pi\nu(X\overline{Y}+\overline{X}Y)$$

eşitlikleri yazılabileceğinden

$$(T_X-T_S)(T_Y-T_S)-(T_{XY}-T_S)^2\geq 0$$

eşitliği bulunur. Buradan kolayca

$$T_XT_Y-T_{XY}^2\geq T_S(T_X-2T_{XY}+T_Y)>0$$

olduğu görülür.

Şimdi tekrar (II.3.4) ifadesine dönelim ve $\lambda+\mu=1$ olmak üzere gerekli hesaplamaları yapalım. (II.3.4) de $\lambda=1-\mu$ değeri kullanılırsa

$$T_Z=(1-\mu)^2T_X+2(1-\mu)\mu T_{XY}+\mu^2T_Y$$

olur ve (II.3.10) dan

$$T_Z=(1-2\mu+\mu^2)T_X+2(\mu-\mu^2)\{\frac{1}{2}(T_X+T_Y)-\pi\nu d^2\}+\mu^2T_Y$$

veya

$$T_Z=\lambda T_X+\mu T_Y-2\lambda\mu\pi\nu d^2 \qquad (II.3.12)$$

olarak elde edilir. (II.2.23) den alanlar için

$$F_X-2F_{XY}+F_Y=\pi\nu\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\}=\pi\nu d^2$$

veya

$$F_{XY}=\frac{1}{2}\{F_X+F_Y-\pi\nu d^2\} \qquad (II.3.13)$$

dir. (II.3.12) de olduğu gibi (II.2.12) de $\lambda=1-\mu$ konumu yapılarak (II.3.13) değeri yerine yazılırsa

$$F_Z=\lambda F_X+\mu F_Y-\lambda\mu\pi\nu d^2 \qquad (II.3.14)$$

olarak yazılır.

Şimdi bir an için X, Y ve Z nin E hareketli düzleminin birinci koordinat ekseni üzerinde olduğunu kabul edelim ve

$$d=|XY|, \qquad a=|ZY|= d, \qquad b=|XZ|= d, \qquad a+b=d$$

olsun. Böylece (II.3.12) ve (II.3.14) den

$$T_Z=\frac{1}{d}\{aT_X+bT_Y\}-2\pi\nu ab \qquad (II.3.15)$$

ve benzer olarak

$$F_Z=\frac{1}{d}\{aF_X+bF_Y\}-\pi\nu ab \qquad (II.3.16)$$

olarak elde edilir.

Şimdi Holditch Teoreminde olduğu gibi bir B kapalı hareketi esnasında $d=a+b$ sabit uzunluklu bir kirişin X, Y uç noktaları bir konveks kapalı eğri meydana getirdiğini düşünelim. XY doğrusu üzerinde $|XZ|=a$ olacak şekilde bir nokta Z olsun. B kapalı hareketinde dönme sayısı $\nu=1$ olsun. Bu durumda

$$T_X=T_Y, \qquad F_X=F_Y$$

olacağından (II.3.15) ve (II.3.16) formülleri

$$T_X-T_Z=2\pi ab, \qquad F_X-F_Z=\pi ab \qquad (II.3.17)$$

olur. Burada (II.3.17) formülleri gereğince Z noktasının yörüngesi ile kapalı konveks eğrinin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark ve halka şeklindeki bölgenin alanı hareketten bağımsızdır.

Şimdi kutupsal atalet momentleri için $\nu=0$ durumunu ele alalım. Bu takdirde

$$T_X=T_0-X\int U d\theta-X\int U d\theta$$

dır. (II.2.7) ve $\underline{P}=\int P d\theta$ konumu ile

$$T_X=T_0-\{X\bar{\underline{P}}+\bar{X}\underline{P}\}$$

dir ve benzeri olarak

$$T_{XY}=T_0-\frac{1}{2}\{(X+Y)\bar{\underline{P}}+(\bar{X}+\bar{Y})\underline{P}\}$$

ifadesi elde edilir. $\nu=0$ durumunda (II.3.10) dan

$$T_{XY}=\frac{1}{2}\{T_X+T_Y\}$$

olur. $T_X\neq T_Y$ için

$$4(T_{XY}^2-T_XT_Y)=(T_X-T_Y)^2>0$$

olur.

Formüllerimiz ve sonuçlarımız açık hareketlerde de sağlanır.

II.4 DUAL ANLAMDA HOLDİTCH TEOREMİ VE KUTUPSAL ATALET MOMENTİ

ν dönme sayılı kapalı düzlemsel bir B hareketi esnasında E hareketli düzleminde tesbit edilen doğrudaş X, Y ve Z noktalarının yörünge alanları için (II.3) de

$$F_Z=\frac{1}{d}\{aF_X+bF_Y\}-\pi\nu ab$$

ifadesi verilmiştir. Ayrıca (II.3) de, bu eğrilerin E' sabit düzleminin O' orijin noktasına göre kutupsal atalet momentleri için alanlara benzer olarak

$$T_Z=\frac{1}{d}\{aT_X+bT_Y\}-2\pi\nu ab$$

formülü verilmiştir. X ile Y noktalarının çizmiş olduğu eğrilerin aynı olduğunda ise

$$T_X-T_Z=2\pi\nu ab$$

olduğu görülmüştür.

Şimdi dual durumu inceleyelim. Burada E hareketli düzleminin sabit doğrularından hareket edeceğiz ve bunların kapalı bir B hareketi esnasındaki zarf eğrilerini inceleyeceğiz. CAUCHY'nin doğru demetlerinin zarfları hakkındaki formüllerin yardımıyla bazı formüller buluruz.

Önce Cauchy'nin doğru demetleri hakkındaki formülleri elde edelim [11]. E hareketli düzleminde bir g doğrusu

$$x_1\cos\Psi+x_2\sin\Psi=h(\Psi) \qquad \text{(II.4.1)}$$

hesse (normal) formunda verilsin. g doğrusunun E' sabit düzlemindeki normal formu ise

$$x_1'\cos\Psi'+x_2'\sin\Psi'=h'$$

şeklindedir. (II.4.1) de O' noktasının (u_1,u_2) koordinatları yerine yazılırsa

$$h'=h-u_1\cos\Psi-u_2\sin\Psi$$

olur. Burada

$$\psi'=\psi+\theta, \qquad d\psi'=d\theta$$

dır. Yani h ve ψ değerleri sabittir. E' sabit düzleminde g nin zarf eğrisinin çevre uzunluğu

$$L=\int h d\theta$$

dir [11]. Buna göre

$$L_g=\int h' d\theta=h\int d\theta-\cos\psi\int u_1 d\theta-\sin\psi\int u_2 d\theta$$

olur. P pol noktası olmak üzere (II.2.7) den

$$L_g=h\int d\theta-\cos\psi\int p_1 d\theta-\sin\psi\int p_2 d\theta$$

elde edilir. P pol noktasının g doğrusuna olan uzaklığı a olmak üzere

$$a=h-\cos\psi p_1-\sin\psi p_2$$

olarak bulunur. Buradan

$$L_g=\int a d\theta$$

elde edilir. g doğrusunun S Steiner noktasına olan uzaklığı b olmak üzere

$$b=\frac{\int a d\theta}{\int d\theta}$$

dır ve buna göre g nin zarf eğrisinin çevre uzunluğu

$$L_g=2\pi\nu b \qquad \text{(II.4.2)}$$

gösterimine sahip olur. Burada bu $\nu\neq 0$ için geçerlidir.

Şimdi ise Cauchy'nin ikinci formülünü elde edelim. E hareketli düzleminde g doğrusunun ve (g) zarfının değme noktası X olsun. $\mathbf{OX}=\mathbf{x}$, $\mathbf{O'X}=\mathbf{x}'$, $\mathbf{OP}=\mathbf{p}$ ve $\mathbf{O'P}=\mathbf{p}'$ olmak üzere sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları aynı olduğundan

$$dp=dp'$$

dür. X noktasının mutlak hızı dx'/dt, sürüklenme hızı $d_f x/dt$ ve rölatif hızı da dx/dt ise

$$dx'=d_f x+dx$$

bağınısı vardır. (g) nin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_g=\frac{1}{2}\int[X',dX']$$

dir. Burada

$$[X',dX']=[X'-P',dX']+[X'-P',dP']+[P',dP']+d[P',dX']$$

yazılabilir. Ayrıca

$$d[P',X']=[P',dX']-[X',dP']$$

ve

$$\int d[P',X']=0$$

dır. Şimdi F_g de $X'-P'=X-P$, $dP'=dP$ ve $dX'=d_fX+dX$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$F_g=\frac{1}{2}\int[X-P,d_fX]+\frac{1}{2}\int[X-P,dX]+\frac{1}{2}\int[X-P,dP]+\frac{1}{2}\int[P',dP']$$

elde edilir. Ayrıca

$$X-P=(x_1-p_1)e_1+(x_2-p_2)e_2$$

$$d_fX=\{-(x_2-p_2)e_1+(x_1-p_1)e_2\}\,d\theta$$

olduğundan

$$[X-P,d_fX]=\{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2\}\,d\theta=a^2d\theta$$

olur. Bu eşitlikte a, P polünün g doğrusuna olan uzaklığı olduğundan integrasyon alınarak

$$\int[x-P,dX]=\int a^2d\theta=T_{P/g}$$

elde edilir ki buda $d\theta$ kitle örtülmesinde (P) hareketli pol eğrisinin g doğrusuna göre atalet momentidir. E hareketli düzleminde

$$\int[P-X,dX]=\int[P-X,dP]=F_P$$

(P) pol eğrisinin sınırladığı alandır. Benzer şekilde

$$\frac{1}{2}\int[P',dP']=F_{P'}$$

de (P') sabit pol eğrisinin sınırladığı alandır. Ohalde (g) zarf eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_g=F_{P'}-F_P+\frac{1}{2}T_{P/g} \qquad \text{(II.4.3)}$$

olarak elde edilir.

Cauchy'nin bu formüllerini elde ettikden sonra şimdi dual duruma bakalım. Projektif geometride verilen teoremlerin dualleri de teorem olduğu gibi yukarıda doğrular için elde edilen formüller noktalar için de elde edilebilir, yani

$$F_X = F_{P'} - F_P + \frac{1}{2} T_{P/X} \tag{II.4.4}$$

olur. Burada $T_{P/X} = \int a^2 d\theta$ (P) nin E de sabit bir X noktasına göre kutupsal atalet momenti ve $a = |PX|$ de X in P ye olan uzaklığıdır.

E hareketli düzleminin iki sabit parelel g_1, g_2 doğrusu B hareketi esnasında E' sabit düzleminde iki parelel eğri oluştururlar. İki doğru arasındaki uzaklık δ, g_1 ve g_2 nin P pol noktasına olan uzaklıkları sırasıyla a_1 ve a_2, S Steiner noktasına uzaklıkları b_1 ve b_2 olmak üzere $a_2 = a_1 + \delta$ ve $b_2 = b_1 + \delta$ dır. (II.4.2) den

$$L_{g_2} = \int a_2 d\theta = \int (a_1 + \delta) d\theta = \int a_1 d\theta + \delta \int d\theta$$

yada

$$L_{g_2} = L_{g_1} + 2\pi\nu\delta \tag{II.4.5}$$

olur. (P) hareketli pol eğrisinin g_2 doğrusuna göre atalet momenti

$$T_{P/g_2} = \int a_2^2 d\theta = \int (a_1 + \delta)^2 d\theta$$

yada

$$T_{P/g_2} = T_{P/g_1} + 2\delta L_{g_1} + 2\pi\nu\delta^2 \tag{II.4.6}$$

olarak elde edilir. (II.4.3) formülünden (g_2) nin sınırladığı alan

$$F_{g_2} = F_{P'} - F_P + \frac{1}{2} T_{P/g_2}$$

veya

$$F_{g_2} = F_{g_1} + \delta L_{g_1} + \pi\nu\delta^2 \tag{II.4.7}$$

olarak elde edilir [16].

E hareketli düzleminde sabit g_1 ve g_2 doğrusu bir X noktasında kesişsin ve aralarındaki açı α olsun. g_1 ve g_2 doğrusunun P pol noktasına olan uzaklıkları sırasıyla a_1 ve a_2 ile gösterilsin. Burada $|PX| = a$ olmak üzere

$$a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\alpha=a^2\sin^2\alpha \qquad (II.4.8)$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$T_{P/g_1}+T_{P/g_2}-2D_{P/g_1g_2}\cos\alpha=T_{P/X}\sin^2\alpha \qquad (II.4.9)$$

bulunur. Burada

$$D_{P/g_1\bar{g}_2}=\int a_1a_2d\theta$$

integrali, (P) hareketli pol eğrisinin g_1 ve g_2 doğrularına göre bölüm momenti olarak adlandırılır [16]. (II.4.3), (II.4.4) ve (II.4.9) denklemlerinden

$$F_{g_1}+F_{g_2}-D_{P/g_1g_2}\cos\alpha=F_X\sin^2\alpha+(F_{P'}-F_P)(1+\cos^2\alpha) \qquad (II.4.10)$$

yada

$$F_{g_1}+F_{g_2}-D_{P/g_1g_2}\cos\alpha=2F_X-\frac{1}{2}T_{P/X}(1+\cos^2\alpha) \qquad (II.4.11)$$

bağıntısı elde edilir.

E hareketli düzleminde verilen g_1 ve g_2 doğrusunun X kesişme noktasından geçen bir başka doğru g_3 ve bu doğrular arasındaki açılar $\gamma_i=\sphericalangle g_jg_k$ (i,j,k=1,2,3 dairesel permütasyon) olmak üzere $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$ olsun. E hareketli düzleminde bir Q noktasının g_i doğrularına olan uzaklığı $q_i=|Qg_i|$ olmak üzere

$$q_1\sin\gamma_1+q_2\sin\gamma_2+q_3\sin\gamma_3=0 \qquad (II.4.12)$$

bağıntısı vardır. Burada Q=P veya Q=S, yani $q_i=a_i$ veya $q_i=b_i$ olarak seçilir ve integral alınırsa

$$L_{g_1}\sin\gamma_1+L_{g_2}\sin\gamma_2+L_{g_3}\sin\gamma_3=0 \qquad (II.4.13)$$

elde edilir.

Buna göre iki doğrunun zarf eğrilerinin çevre uzunluklarının bilinmesiyle, bu ortak nokta sayesinde üçüncü bir doğrunun zarf eğrisinin çevre uzunluğu bulunabilir.

(II.4.5) uzunluk formülü yardımıyla E hareketli düzleminde parelel herhangi bir h doğrusunun zarf eğrisinin çevre uzunluğu da hesaplanabilir. h, X noktasına göre g_3 doğrusuna parelel olarak δ kadar ötelenmiş bir doğru olsun. Böylece (II.4.5) den

$$L_h=\frac{1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}\{L_{g_1}\sin\gamma_1+L_{g_2}\sin\gamma_2\}+2\pi\nu\delta \qquad \text{(II.4.14)}$$

elde edilir.

Holditch Teoreminin kabulüne dual karşılık şu şekilde düşünülebilir. Eğer g_1 ve g_2 doğrularının zarf eğrileri aynı eğri ise o zaman,

$$L_{g_1}=L_{g_2}$$

olur ve dolayısıyla (II.4.14) ifadesi de

$$L_h=\frac{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}L_{g_1}+2\pi\nu\delta \qquad \text{(II.4.15)}$$

olur. Bu ifadeyi sade bir şekilde yazmak için

$$A=\frac{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}=\frac{\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}}{\cos\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}$$

olduğu kabul edilirse

$$L_h=AL_{g_1}+2\pi\nu\delta \qquad \text{(II.4.16)}$$

olur. Eğer $L_h=L_{g_3}+2\pi\nu\delta$ değeri yerine yazılırsa

$$\frac{L_{g_3}}{L_{g_1}}=A$$

olacağından, L_{g_3}/L_{g_1} zarf eğrilerinin çevre uzunlukları oranı sadece γ_i açılarına bağlıdır. g_1 ve g_2 nin ortak zarf yörüngesi kendi dönme sayısı sayesinde B kapalı hareketinin ν dönme sayısını belirtir ve zarf eğrilerinin eğimi $2\pi\nu$ dür [16].

Elde edilen bu formüllere benzer olarak zarf eğrilerinin atalet momentleri ve alanları için de elde etmeye çalışalım. (II.4.3) ve (II.4.4) den dolayı ve $q_i=a_i$ için (II.4.12) elemanter bağıntısına dayanarak iki tane formül elde edeceğiz.

$$1-\frac{\sin^2\gamma_1}{\sin^2\gamma_3}-\frac{\sin^2\gamma_2}{\sin^2\gamma_3}=2\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_3}\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_3}\cos\gamma_3$$

bağıntısında

$$A_i=\frac{\sin\gamma_i}{\sin\gamma_3}\ , \qquad i=1,2$$

gösterimi yapılarak

$$1-A_1^2-A_2^2=2A_1A_2\cos\gamma_3$$

eşitliği elde edilir. (II.4.12) de $q_i=a_i$ olduğu kabul edilirse

$$-a_3\sin\gamma_3=a_1\sin\gamma_1+a_2\sin\gamma_2$$

olur. Her iki tarafın karesi alınıp θ ya göre integral alınırsa

$$T_{P/g_3}=A_1^2T_{P/g_1}+A_2^2T_{P/g_2}+2A_1A_2D_{P/g_1g_2} \qquad (II.4.17)$$

elde edilir. (II.4.3) ve (II.4.4) ifadeleri (II.4.17) de gözönüne alınırsa

$$F_{g_3}=A_1^2F_{g_1}+A_2^2F_{g_2}+(F_{P'}-F_P)2A_1A_2\cos\gamma_3+A_1A_2D_{P/g_1g_2} \qquad (II.4.18)$$

bulunur. Buradan (II.4.9) yardımıyla

$$\sin2\gamma_1T_{P/g_1}+\sin2\gamma_2T_{P/g_2}+\sin2\gamma_3\ T_{P/g_3}+2\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin\gamma_3T_{P/X}=0 \quad (II.4.19)$$

elde edilir. Böylece (II.4.3) ve (II.4.4) den

$$\sin2\gamma_1F_{g_1}+\sin2\gamma_2F_{g_2}+\sin2\gamma_3F_{g_3}+2\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin\gamma_3(F_X+F_{P'}-F_P)=0 \quad (II.4.20)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi tekrar Holditch Teoreminin kabullerine uygun olarak g_1 ve g_2 zarf eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanlarının eşit olmasını istiyoruz. Bu durumda $F_{g_1}=F_{g_2}$ olacağından (II.4.3) den $T_{P/g_1}=T_{P/g_2}$ olur. Böylece (II.4.19) ve (II.4.20) ifadelerinde sırasıyla $F_{g_1}=F_{g_2}$ ve $T_{P/g_1}=T_{P/g_2}$ olduğu gözönüne alınırsa zarf eğrilerinin alanları ve atalet momentleri için Holditch Formülünün karşılıkları olan formüller elde edilmiş olur. Bu ifadeler elde edilen yörüngelerle birlikte pol eğrilerine de bağlıdır.

II.4.1 Kinematik Fonksiyonellerin Sınıflandırılması

Şimdiye kadar B=E/E' kapalı hareketi esnasında elde ettiğimiz kinematik fonksiyonellerin cümlesini K_F ile gösterelim. Bunların sınıflandırılmasını aşağıdaki şekilde yapabiliriz.

K_F üzerinde sadece B hareketine bağlı olan kinematik fonksiyoneller E ve E' düzleminde sadece B sayesinde belirlenmiş olan ve geometrik olarak teşkil edilen kavramlardan elde edilen fonksiyonellerdir. Bunlar birbiri üzerinde yuvarlanan (P) ve (P') pol eğrileri ile ilgili olan L_P, $L_{P'}$, F_P ve $F_{P'}$ v.b. dir. S ve S' Steiner noktaları (P) ve (P') pol eğrilerinin ağırlık merkezleri olduğundan burada ayrıca belirtilmemiştir.

B hareketinde nokta doğru v.b. gibi elemanların yörüngeleri ile ilgili kinematik fonksiyoneller ise L_g, F_g, F_X ve $T_{X/P}$ gibi fonksiyonellerdir.

K_F üzerindeki karma kinematik fonksiyoneller ise B kapalı hareketini belirleyen (P) ve (P') pol eğrileri ile E ve E' nün elemanları tarafından belirlenen $T_{P/g}$, D_{P/g_1g_2} gibi kinematik fonksiyonellerdir.

II.5 HELİSEL EĞRİLER VE DÜZLEM KİNEMATİĞİ

Uzayda bir k' çatısına göre bir k helisel eğrisinin, helisel eksen doğrultusunda bir dik izdüşümle düzlemde incelenmesi aslında bir X noktasının belirlediği OX vektörünün taradığı bölgenin yüzey alanının incelenmesine benzer olarak yapılır. Eğer k' çatısını oluşturan baz vektörlerinin oluşturmuş olduğu yörünge eğrileri düzleme izdüşürüldüğünde bir düzlemsel hareketin yörünge eğrileri olarak düşünülürse o zaman J.Steiner'in formülleriyle ilgili teoremler ve uyarılar helisel eğriler üzerine uyarlanabilir.

Bir ışın demeti veya üç boyutlu projektif uzayın lineer ışın kompleksi PLÜCKER doğru koordinatları yardımıyla belrlenebilir. Projektif uzayın ∞^3 doğrularından meydana gelen bu oluşum bir Öklid vida hareketinin yörünge normallerinin tamamı olarak düşünülebilir. Şimdi S.LİE'nin [17] de yaptığı gibi bütün teğetleri ışın demetine ait olan düzgün uzay eğrilerini gözönüne alalım. Bu helisel eğriler ilginç özelliklere sahiptir. Örneğin her noktasındaki oskülatör düzlem, bir P noktasının normal düzlem eğrileriyle örtülür. Helisel eğrilerin bilinen örnekleri vida eğrileri olarak da değerlendirilen üçüncü dereceden uzay eğrileridir. Kartezyen koordinat sisteminde z-ekseni bir vida ekseni olarak seçilirse o zaman P(x,y,z) noktasında (dx,dy,dz) vektörü doğrultusunda

$$xdy-ydx=cdz \qquad (II.5.1)$$

PFAFF diferensiyel denklemi helisel eğrileri sağlar [18]. Burada c , c>0 olduğunda helisel parametre, c<0 olduğunda da vida parametresidir.

(II.5.1) de diferensiyel denklemi verilen bu eğri, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, olmak üzere C^r-sınıfından diferensiyellenebilir bir eğri olsun. (II.5.1) de integral alınmasıyla

$$z=\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t}(xdy-ydx)+z_0 \qquad (II.5.2)$$

elde edilir. Geometrik olarak bu $z=0$ düzlemidir ve k' çatısının belirlenmesiyle k helisel eğrilerinin çatısı olarak değerlendirilebilir. z_0 integral sabitinin değiştirilmesiyle k' çatısının baz vektörlerine ilişkin helisel eğrilerin bir sınıfı elde edilir.

(II.5.2) de integrasyondaki $xdy-ydx$ ifadesi

$$xdy-ydx=\begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & x+dx \\ 1 & y & y+dy \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu elemanter analitik geometri formüllerine göre köşeleri 0, X ve $X+dX$ olan üçgenin yüzey alanına eşittir. Burada $\mathbf{x=0X}$ yer vektörü ve $\mathbf{x+dx}$ de komşu noktaya ait bir yer vektörü olarak düşünülecektir. Böylece

$$\frac{c}{2}(z-z_0)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(xdy-ydx)=F_{0X} \qquad (II.5.3)$$

ifadesi $\mathbf{0X}$ vektörü tarafından taranan bölgenin alanı olarak değerlendirilebilir. Eğer (II.5.3) de $z-z_0=z_X$ denilirse o zaman

$$\frac{c}{2}z_X=F_{0X} \qquad (II.5.4)$$

elde edilir. Bunu bir teoremle ifade edelim.

II.5.1 Teorem: Düzlemde bir $\mathbf{0X}$ vektörünün taradığı bölgenin alanı, k' çatısına göre bir k helisel eğrisine ait z_X farkının $\frac{c}{2}$ ile çarpılmasıyla elde edilir.

Şimdi $z=0$ düzleminde k' çatısının baz vektörlerinin oluşturmuş olduğu eğriyi bir düzlemsel hareketin yörüngesi olarak ifade edeceğiz. Burada $z=0$ düzleminin E hareketli ve E' sabit düzlemleri tarafından katlı olarak örtüldüğünü düşünmemiz yeterlidir. E hareketli düzlemi $\{0;x_1,x_2\}$, E' sabit düzlemi de $\{0';x_1',x_2'\}$ koordinat sistemiyle belirlensin ve E hereketli E' sabit düzlemi üzerine yerleştirilsin. E nin E' ye göre dönmesi θ dönme açısı ile belirlensin. Şimdi aşağıdaki kolon vektörlerini gözönüne alalım;

E' sabit düzlemine göre

$$O'X=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \qquad O'O=\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$$

E hareketli düzleminde ise

$$OX=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad OO'=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

olsun. E deki bir X noktası için

$$\Omega=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

bir ortogonal matris olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\Omega\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}=\Omega\begin{bmatrix} x_1-u_1 \\ x_2-u_2 \end{bmatrix}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}=-\Omega\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

dir. Eğer θ ve u_i, $i=1,2$, tanım bölgelerinin tamamında t reel zaman parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise E/E' hareketi ani dönme olarak gözönüne alınır. $\dot{\theta}$ açısal hızı için $\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}\neq 0$ olsun. E hareketli düzleminde P pol noktasının koordinatları

$$p_1=u_1+\frac{du_2}{d\theta}, \qquad p_2=u_2-\frac{du_1}{d\theta}$$

dır. E de tesbit edilmiş sabit bir X noktasının yörünge teğeti

$$dx_1'=-(x_2-p_2)d\theta, \quad dx_2'=(x_1-p_1)d\theta$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (II.5.3) yardımıyla O'X vektörü tarafından taranan bölgenin alanı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$F_{O'X}=\frac{1}{2}\oint\{x_1^2+x_2^2-2a_1x_1-2a_2x_2\}+F_{O'O} \qquad \text{(II.5.5)}$$

dır. Burada $0'0$ vektörü tarafından taranan bölgenin alanı $F_{0'0}$ olmak üzere

$$2F_{0'0}=\int_{t_0}^{t}(p_1u_1+p_2u_2)d\theta,\quad \phi=\int_{t_0}^{t}d\theta=\theta(t)-\theta(t_0),\quad 2a_i\phi=\int_{t_0}^{t}(p_i+u_i)d\theta$$

dır.

II.5.2 Teorem: $A(a_1,a_2)$ merkezli çember üzerindeki $X\varepsilon E$ noktaları, aynı z_X farkına sahip k helisel eğrilerini belirlerler.

E/E' hareketi $T>0$ periyoduna sahip bir kapalı hareket olarak düşünülürsü (II.5.5) formülü (I.2.19) formülüne, yani

$$F_X=\pi\nu\{x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2\}+F_0$$

eşitliğine dönüşür. (II.5.3) e göre

$$\frac{c}{2}[z(t+T)-z(t)]=F_X$$

olarak yazılabilir. k' çatısının hareketi başlangıç noktasının seçilişinden bağımsız olduğundan

$$H=H_X=z(t+T)-z(t)=\frac{2}{c}F_X \qquad \text{(II.5.6)}$$

ifadesi k helisel eğrisinin hareket yüksekliği olarak adlandırılabilir [18]. Bu integral invaryantına göre $F_X>0$ ise H_X minumum hareket yüksekliğidir. Teorem (II.5.2) yardımıyla E/E' hareketinde S Steiner noktası için aşağıdaki teorem verilebilir.

II.5.3 Teorem: $S(s_1,s_2)$ merkezli çember üzerindeki $X\varepsilon E$ noktaları, aynı H hareket yüksekliğine sahip helisel eğrileri belirlerler.

Şimdi kapalı helisel eğrileri gözönüne alalım. Helisel eğri kapalı olduğunda $H_X=0$ olacağından $F_X=0$ olmak zorundadır. (I.2.19) dan

$$(x_1s_1)^2+(x_2-s_2)^2=s_1^2+s_2^2-\frac{1}{\pi\nu}F_0=r_0^2\geq 0 \qquad \text{(II.5.7)}$$

yada daha açık olarak

$$[\int u_1d\theta]^2+[\int u_2d\theta]^2\geq 2\pi\nu\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta$$

dır. (II.5.7) denklemi E hareketli düzleminde S Steiner nokta merkezli bir k_0 çemberinin denklemidir ve bu çemberin noktaları kapalı helisel eğrileri belirlerler. Eğer $r_0=0$ ise k_0 merkezine büzülür ve S Steiner noktası bir kapalı kelisel eğriyi belirler. Böylece E hareketli düzleminin bir doğrusu üzerinde bir kapalı helisel eğriyi belirleyen en fazla iki reel nokta vardır. Buna göre şu teoremi ifade edebiliriz.

II.5.4 Teorem: Kapalı bir helisel eğri, helisel eksen doğrultusunda bir düzleme dik projeksiyonla bir bölgeyi sınırlar [18].

Bu özellikleri sağlayan helisel eğri örneklerini W.Wunderlich ortaya koymuştur [19].

(I.2.19) Steiner formülüne dayanan düzlemsel kinematiğin sonuçları bizi (II.5.6) nın kullanılmasıyla helisel eğrilerle ilgili teorem ve formüllere götürür.

E hareketli düzleminde AB doğru parçası üzerinde bir nokta X olmak üzere (II.3.16) da

$$F_X = \frac{1}{d}\{bF_A + aF_B\} - \pi\nu ab$$

formülü verildi. A, B ve X noktaları tarafından belirlenen helisel eğrilerin hareket yükseklikleri sırasıyla H_A, H_B ve H_X olmak üzere (II.5.6) nın kullanılmasıyla

$$H_X = \frac{1}{d}\{bH_A + aH_B\} - 2\pi\nu \frac{ab}{c} \qquad (II.5.8)$$

bağıntısı elde edilir. Eğer A ve B noktaları kapalı helisel eğrileri belirlerlerse X in belirlediği eğrinin hareket yüksekliği

$$H_X = -2\pi\nu \frac{ab}{c}$$

olur. X ve Y noktaları için karma alan formülü (II.3.13) de

$$F_{XY} = \frac{1}{2}\{F_X + F_Y - \pi\nu d^2\}$$

şeklinde ifade edilmişti. Buna göre k_o çemberi üzerinde X ve Y noktası için karma alan $F_{XY}=0$ ise, X ve Y noktasının belirlediği helisel eğrilerin H_X ve H_Y hareket yükseklikleri için (II.5.6) dan dolayı

$$H_X + H_Y = 2\pi\nu \frac{d^2}{c}$$

eşitliği bulunur.

E de doğrudaş üç nokta için elde (II.3.16) formülü kapalı olmayan bir E/E' hareketi için de elde edilir ve

$$F_{0'X}=\frac{1}{d}\{bF_{0'A}+^{\alpha}F_{0'B}\}-\frac{1}{2}ab\phi \qquad (II.5.9)$$

olarak bulunur. Buna göre, A ve B noktalarının belirledikleri helisel eğriler sırasıyla k_A ve k_B olmak üzere (II5.4) ve (II.5.9) birlikte gözönüne alınırsa

$$z_X=\frac{1}{d}\{bz_A+az_B\}-\frac{ab}{c}\phi$$

eşitliği bulunur.

Şimdi ise E/E' kapalı hareketinde $\nu=0$ durumunu inceleyilim. $\nu=0$ durumunda E de belirlenmiş bir X noktasının yörünge alanı için (II.2.8) de

$$F_X=F_0-\{x_1p_1+x_2p_2\}$$

formülü verilmiştir. Buradan (II.5.6) ile birlikte

$$H_X=H_0-\frac{2}{c}\{x_1p_1+x_2p_2\}$$

elde edilir. Doğrudaş A, B ve X noktaları için (II.3.16) ve (II.5.8) den dolayı

$$F_X=\frac{1}{d}\{bF_A+aF_B\}, \qquad H_X=\frac{1}{d}\{bH_A+aH_B\}$$

olarak yazılabilir. Buna göre hareketli E düzleminin herhangi bir doğrusu üzerinde kapalı bir helisel eğriyi belirleyen bir nokta daima vardır.

II.6 KİNEMATİK OLARAK MEYDANA GELEN KAPALI YÜZEYLERİN HACMİ

Üç boyutlu Öklid uzayının kapalı hareketinde sabit uzay R' ve hareketli uzay da R olsun. R' ve R uzaylarını temsil eden koordinat sistemleride sırasıyla $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$ ve $\{O;e_1,e_2,e_3\}$,

$$\langle e_i',e_j'\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}\ ,\quad 1\leq i,j\leq 3,$$

olsunlar. R' ve R aynı şekilde yönlendirilmiş, yani bir has ortogonal dönüşümle birbirlerine dönüştürülebilsinler. Buna göre

$$E'=\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad E=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$E=AE'\ ,\quad AA^T=A^TA=I_3 \tag{II.6.1}$$

olacak şekilde bir A ortogonal matrisi vardır. R/R' hareketi t_1, t_2 ve t_3 paremetrelerine bağlı olsun. Ohalde d dış türevi göstermek üzere

$$dE=dAE'+AdE'$$

olur. Burada

$$E'=A^TE \quad \text{ve} \quad dE'=0$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$dE=dAA^TE$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$dAA^T=\Omega$$

denilirse

$$dE=\Omega E \tag{II.6.2}$$

olur. Ayrıca $AA^T=I$ da diferensiyel alınırsa

$$dAA^T+AdA^T=0$$

veya

$$\Omega+\Omega^T=0$$

olur ki buda Ω nin antisimetrik matris olduğunu gösterir. Ohalde

Ω matrisi

$$\Omega=\begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır ve

$$\begin{bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

matris eşitliğinden

$$de_i=w_k\mathbf{e}_j-w_j\mathbf{e}_k \qquad (i,j,k=1,2,3, \text{ dairesel permütasyon}) \quad (II.6.3)$$

elde edilir. Burada w_i ler PFAFF formlarıdır ve integrallenebilme şartlarını sağlarlar. Λ, 1-formlar arasındaki alterne çarpım olmak üzere (II.6.3) den diferensiyel alınır ve d nin özelliği kullanılırsa

$$d(de_i)=dw_k\mathbf{e}_j+w_k\Lambda de_j-dw_j\mathbf{e}_k-w_j\Lambda de_k=0 \qquad (II.6.4)$$

olur. Burada (II.6.3) gözönüne alınırsa

$$(w_j\Lambda w_i+dw_k)\mathbf{e}_j+(w_k\Lambda w_i-dw_j)\mathbf{e}_k=0$$

elde edilir. $\mathbf{e}_j$ ve $\mathbf{e}_k$ baz vektörleri olduğundan

$$\begin{aligned} dw_k&=w_i\Lambda w_j \\ dw_j&=w_k\Lambda w_i \\ dw_i&=w_j\Lambda w_k \end{aligned} \qquad (II.6.5)$$

olur. B_3 hareketinin öteleme kısmı

$$\mathbf{O'O}=\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$$

olmak üzere

$$d\mathbf{O'O}=d\mathbf{u}=\sigma=\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2+\sigma_3\mathbf{e}_3 \qquad (II.6.6)$$

dür. Burada tekrar diferensiyel alınırsa $d\sigma=0$, yani

$$d\sigma=d\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_1\Lambda de_1+d\sigma_2\mathbf{e}_2+\sigma_2\Lambda de_2+d\sigma_3\mathbf{e}_3+\sigma_3\Lambda de_3=0$$

olur. (II.6.3) deki değerler yerine yazılır ve $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ ün baz vektörleri olduğu gözönüne alınırsa

$$d\sigma_i=\sigma_j\wedge w_k-\sigma_k\wedge w_j \quad (i,j,k=1,2,3,\ \text{dairesel}) \qquad (II.6.7)$$

bulunur.

B_3 hareketine paremetre uzayında bir küre ile bağlantılı G bölgesi karşılık getirilsin ve kapalı yönlendirilmiş $R=R(G)=\partial G$ yüzeyi tarafından sınırlandırılmış olsun. Bu takdirde hareketli uzayın noktaları sabit uzayda, B_3 yardımıyla elde edilen B_2 kapalı uzay hareketi esnasında yörünge yüzeyleri oluştururlar. Hareketli uzayda tesbit edilmiş bir nokta X ise

$$\begin{aligned} &\mathbf{OX}=\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3 \\ &\mathbf{O'X}=\mathbf{x'}=\mathbf{O'O}+\mathbf{OX} \end{aligned} \qquad (II.6.8)$$

olur. Sabit uzaya göre hareketli uzayın dönmesi $\mathbf{w}$ vektörü ile belirlenir ve

$$\mathbf{w}=w_1\mathbf{e}_1+w_2\mathbf{e}_2+w_3\mathbf{e}_3 \qquad (II.6.9)$$

dür. (II.6.8) den diferensiyel alınırsa

$$d\mathbf{x'}=d\mathbf{u}+d\mathbf{x}=\sigma+d\mathbf{x}$$

olur. Burada

$$d\mathbf{x}=x_1d\mathbf{e}_1+x_2d\mathbf{e}_2+x_3d\mathbf{e}_3$$

dür ve $\times$ vektörel çarpımı göstermek üzere (II.6.3) den $d\mathbf{e}_i$ değerleri yerine yazılırsa

$$d\mathbf{x}=\mathbf{w}\times\mathbf{x} \qquad (II.6.10)$$

elde edilir ve buradan

$$d\mathbf{x'}=\sigma+\mathbf{w}\times\mathbf{x} \qquad (II.6.11)$$

bulunur. Bu vektör hareketli uzayın baz vektörleri cinsinden

$$d\mathbf{x'}=\tau_1\mathbf{e}_1+\tau_2\mathbf{e}_2+\tau_3\mathbf{e}_3 \qquad (II.6.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\tau_i=\sigma_i+x_jw_k-x_kw_j \quad (i,j,k=1,2,3,\ \text{dairesel}) \qquad (II.6.13)$$

dir.

B_3 hareketi esnasında hareketli uzayda sabit bir X noktasının meydana getirdiği yüzeyin hacim elementi

$$dJ_X=\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau_3 \qquad \text{(II.6.14)}$$

dür. W bir PFAFF formu olmak üzere Stoks'un

$$\int_G dW=\int_{R(G)} W$$

genel formülüne göre bu integrale bir sınır integrali gözüyle bakılabilir. Böylece

$$J_X=\int_G dJ_X$$

eşitliği gözönüne alınırsa bu integral, hareketli uzayda bir X noktasının kinematik olarak meydana getirdiği yörünge yüzeyinin hacmini verir. Eğer (II.6.13) ifadesi (II.6.14) de yerine yazılır ve integralde yerine konursa x_i lere göre bir kuadratik polinom elde edilir. Ohalde

$$J_X=\int_G \tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau_3$$

ve burada

$$\begin{aligned}\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau_2=\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3&+(\sigma_1\wedge w_2\wedge w_3)x_1^2+(\sigma_2\wedge w_3\wedge w_1)x_2^2+(\sigma_3\wedge w_1\wedge w_2)x_3^2\\&+(\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge w_2+\sigma_1\wedge\sigma_3\wedge w_3)x_1+(\sigma_2\wedge\sigma_3\wedge w_3+\sigma_2\wedge\sigma_1\wedge w_1)x_2\\&+(\sigma_3\wedge\sigma_1\wedge w_1+\sigma_3\wedge\sigma_2\wedge w_2)x_3+(\sigma_2\wedge w_2\wedge w_3-\sigma_1\wedge w_1\wedge w_3)x_1x_2\\&+(\sigma_1\wedge w_1\wedge w_2-\sigma_3\wedge w_3\wedge w_2)x_1x_3+(\sigma_3\wedge w_3\wedge w_1-\sigma_2\wedge w_2\wedge w_1)x_2x_3\end{aligned}$$

dir. Uygun bir öteleme ile x_i lere göre birinci dereceden lineer terimlerin katsayıları sıfır, yani

$$\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge w_2+\sigma_1\wedge\sigma_3\wedge w_3=0$$

$$\sigma_2\wedge\sigma_3\wedge w_3+\sigma_2\wedge\sigma_1\wedge w_1=0$$

$$\sigma_3\wedge\sigma_1\wedge w_1+\sigma_3\wedge\sigma_2\wedge w_2=0$$

veya

$$\int_G \sigma_k\wedge\sigma_i\wedge w_i+\sigma_k\wedge\sigma_j\wedge w_j=0 \qquad \text{(II.6.15)}$$

olur. Benzer şekilde uygun bir dönme ile de karışık terimlerin katsayıları sıfır, yani

$$\sigma_2\wedge w_2\wedge w_3-\sigma_1\wedge w_1\wedge w_3=0$$

$$\sigma_1\Lambda w_1\Lambda w_2-\sigma_3\Lambda w_3\Lambda w_2=0$$

$$\sigma_3\Lambda w_3\Lambda w_1-\sigma_2\Lambda w_2\Lambda w_1=0$$

veya

$$\int_G \sigma_i\Lambda w_i\Lambda w_k-\sigma_j\Lambda w_j\Lambda w_k=0 \tag{II.6.16}$$

olur ve geriye

$$\int_G \sigma_1\Lambda\sigma_2\Lambda\sigma_3=\int_G\sigma_1\Lambda\sigma_2\Lambda\sigma_3+\int_G(\sigma_1\Lambda w_2\Lambda w_3)x_1^2+\int_G(\sigma_2\Lambda w_3\Lambda w_1)x_2^2+\int_G(\sigma_3\Lambda w_1\Lambda w_2)x_3^2$$

kalır ki

$$A_i=\int_G \sigma_i\Lambda w_j\Lambda w_k \qquad (i,j,k=1,2,3,\ \text{dairesel}) \tag{II.6.17}$$

gösterimi kullanılırsa

$$J_X=J_0+A_1x_1^2+A_2x_2^2+A_3x_3^2 \tag{II.6.18}$$

elde edilir. Burada

$$J_0=\int_G dJ_0=\int_G\sigma_1\Lambda\sigma_2\Lambda\sigma_3$$

olup dJ_0 hareketli uzayın O orijin noktasının yörünge yüzeyinin hacim elementi ve J_0 da O nun yörünge yüzeyinin hacmidir [20]. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

II.6.1 Teorem: Aynı J_X hacmine sahip yörünge yüzeylerini oluşturan X noktaları hareketli uzayda bir Φ_X kuadratiği üzerinde bulunurlar. Farklı J_X değerleri için de bu noktalar hareketli uzayda farklı kuadratikler üzerinde bulunurlar[20].

Hareketli uzayda iki tane farklı X ve Y noktasını birleştiren doğru üzerinde bir Q noktası alalım. Bu durumda λ , μ pozitif sayılar olmak üzere

$$q_i=\lambda x_i+\mu y_i, \qquad \lambda+\mu=1 \tag{II.6.19}$$

bağıntısı yazılabilir. Q noktasının yörünge yüzeyinin hacmi

$$J_Q=J_0+A_1q_1^2+A_2q_2^2+A_3q_3^2$$

dir. Bu ifadede (II.6.19) gözönüne alınırsa

$$J_Q=\lambda^2J_X+2\lambda\mu J_{XY}+\mu^2J_Y \tag{II.6.20}$$

olarak elde edilir. Burada

$$J_{XY}=J_{YX}=J_0+A_1x_1y_1+A_2x_2y_2+A_3x_3y_3 \qquad (II.6.21)$$

olup X ile Y noktalarının karma yörünge yüzey hacmi olarak adlandırılır [19].

$$J_X-2J_{XY}+J_Y=A_1(x_1-y_1)^2+A_2(x_2-y_2)^2+A_3(x_3-y_3)^2$$

veya

$$J_X-2J_{XY}+J_Y=\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-y_i)^2 \qquad (II.6.22)$$

dir. Bu değer (II.6.20) de gözönüne alınırsa

$$J_Q=\lambda J_X+\mu J_Y-\lambda\mu\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-y_i)^2 \qquad (II.6.23)$$

elde edilir.

Buna göre hareketli uzayda X ve Y nokaları arasındaki D(X,Y) uzaklığını veren bir metriği aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$D^2(X,Y)=\varepsilon\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-y_i)^2 \qquad (II.6.24)$$

Seçilen X ve Y noktaları için

$$\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-y_i)^2\gtrless 0$$

olup olmama durumuna göre $\varepsilon=\mp 1$ değerini alacaktır. Tanımlanan bu metrik yardımıyla (II.6.23) eşitliği

$$J_Q=\lambda J_X+\mu J_Y-\varepsilon\lambda\mu D^2(X,Y) \qquad (II.6.25)$$

şeklinde yazılabilir. Hareketli uzayda XY doğru parçası üzerindeki bir Q noktası için (II.6.19) dan

$$D(X,Q)+D(Q,Y)=D(X,Y)$$

bağıntısı vardır. Eğer

$$\lambda=\frac{D(Q,Y)}{D(X,Y)}, \qquad \mu=\frac{D(X,Q)}{D(X,Y)}$$

denilirse

$$J_Q=\frac{1}{D(X,Y)}\{D(Q,Y)J_X+D(X,Q)J_Y\}-\varepsilon D(X,Q)D(Q,Y) \qquad (II.6.26)$$

olarak elde edilir ve bu düzlem kinematiğinde çok iyi bilinen Holditch formülünün genelleştirilmesi olan formüle karşılık gelir [20].

Karma yörünge yüzeyinin hacminin geometrik yorumu için aynı Φ_X kuadriğinin farklı X ve Y noktalarından hareket edelim. Bu durumda teorem (II.6.1) den dolayı $J_X=J_Y$ olur. Eğer P, Q nokta çifti X, Y ye harmonik ise bu durumda

$$A_i p_i q_i = J_X - J_0$$

olur. Diğer taraftan (II.6.21) den dolayı

$$A_i p_i q_i = J_{PQ} - J_0$$

olur. Buradan ise

$$J_{PQ} = J_X \tag{II.6.27}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

II.6.2 Teorem: Φ_X kuadratiğinin eşlenik bütün P, Q nokta çiftleri için karma yörünge yüzey hacmi J_{PQ}, Φ_X üzerindeki bir noktanın J_X yörünge yüzey hacmine eşittir [20].

Şimdi Φ_X üzerinde iki nokta X ve Y olsun. Buna göre (II.6.19) dan dolayı Q noktası da Φ_X üzerinde bulunur ve teorem (II.6.1) den dolayı $J_X=J_Y=J_Q$ olur. Bu (II.6.25) de gözönüne alınırsa

$$D(X,Y)=0 \tag{II.6.28}$$

şartı ortaya çıkar. Bunu aşağıda bir teoremle ifade edelim.

II.6.3 Teorem: (II.6.24) de tanımlanan metriğe göre, bir Φ_X kuadratiğinin iki X, Y noktası arasındaki uzaklık sıfırdır [20].

Şimdi hareketli uzayda doğrudaş olmayan X, Y, Z noktalarını gözönüne alalım. Bu X, Y ve Z noktalarının oluşturmuş olduğu düzlemin bir Q noktasını

$$q_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i, \qquad \lambda+\mu+\nu=1 \tag{II.6.29}$$

olarak ele alalım. (II.6.18) e göre Q nün yörünge yüzeyinin hacmi

$$J_Q = J_0 + A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + A_3 q_3^2$$

dir. (II.6.29) un kullanılmasıyla

$$J_Q = \lambda^2 J_X + \mu^2 J_Y + \nu^2 J_Z + 2\lambda\mu J_{XY} + 2\lambda\nu J_{XZ} + 2\mu\nu J_{YZ} \tag{II.6.30}$$

elde edilir. (II.6.22) ve (II.6.29) ile birlikte

$$J_Q = \lambda J_X + \mu J_Y + \nu J_Z - \lambda\mu \sum_{i=1}^{3} A_i (x_i - y_i)^2 - \lambda\nu \sum_{i=1}^{3} A_i (x_i - z_i)^2 - \mu\nu \sum_{i=1}^{3} A_i (y_i - z_i)^2$$

elde edilir. $X=X_1$, $Y=X_2$, $Z=X_3$, $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\lambda_2$ ve $\nu=\lambda_3$ konumu yapılırsa (II.6.24) ve (II.6.25) den dolayı

$$J_Q=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i J_{X_i}-\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\lambda_i\lambda_j D^2(X_i,X_j) \qquad \text{(II.6.31)}$$

olarak yazılır. Q noktasının X_j ve X_k noktalarından geçen doğruya göre dik izdüşümü Q_i olmak üzere

$$\lambda_i=\frac{D(Q,Q_i)}{D(X_i,Q_i)} \qquad \text{(II.6.32)}$$

olarak ifade edilir. (II.6.26) formülünün bir genelleştirilmesini yapmak için (II.6.32) deki λ_i değerlerini (II.6.31) de yerine yazmak yeterlidir [20].

X, Y ve Z noktalarının hareketli uzayda aynı Φ_X kuadratiği üzerinde olduğu kabul edilirse $J_X=J_Y=J_Z$ olacağından teorem (II.6.3) veya (II.6.28) denklemine göre

$$D(X,Y)=D(X,Z)=0$$

olur. Buradan ise (II.6.31) ve (II.6.32) yardımıyla

$$J_X-J_Q=\varepsilon_{23}\frac{D(Q_1,Q_2)D(Q_1,Q_3)}{D(Y,Q_2)D(Z,Q_3)}D^2(Y,Z) \qquad \text{(II.6.33)}$$

elde edilir ve bu formül Holditch Teoriminin bir genelleştirilmesi olarak görülebilir [20]. Ohalde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

II.6.4 Teorem: Kapalı B_2 hareketi esnasında hareketli uzayın farklı iki noktasının yörünge yüzeylerinin hacimleri arasındaki fark veya iç içe bulunan yörünge yüzeylerinin arasındaki tabla şekilli yüzeyin hacmi sadece (B_2 de tanımlanan metriğe göre) hareketli uzayda seçilen noktalar arasındaki uzaklığa bağlıdır [20].

Hareketli uzayın iki X ve Y noktalarının yörünge yüzey hacimleri (II.6.18) ve (II.6.24) formüllerine göre

$$J_X=J_0+\varepsilon_1 D^2(0,X), \qquad J_Y=J_0+\varepsilon_2 D^2(0,Y)$$

dir. Burada $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$ veya $\varepsilon=\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ olarak alınmasıyla

$$J_X-J_Y=\varepsilon_1 D^2(0,X)-\varepsilon_2 D^2(0,Y)=\begin{cases}\varepsilon\{D^2(0,X)-D^2(0,Y)\}\\ \varepsilon\{D^2(0,X)+D^2(0,Y)\}\end{cases} \qquad \text{(II.6.34)}$$

olarak elde edilir. Burada 0 noktası XY doğrusu üzerinde kabul ediliyor. Böylece teorem (II.6.4) sadece (II.6.33) denklemi için geçerli değil, (II.6.34) denklemi için de geçerlidir.

Hareketli uzayın sıfırdan farklı X, Y, Z ve P noktalarının yörünge yüzeylerinin hacmini bulmak için kullanılan (II.6.18) formülüne göre

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & J_X-J_0 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & J_Y-J_0 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & J_Z-J_0 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & J_P-J_0 \end{vmatrix}=0$$

dır. Burada

$$X=x_1^2e_1+x_2^2e_2+x_3^2e_3, \qquad Y=y_1^2e_1+y_2^2e_2+y_3^2e_3$$
$$Z=z_1^2e_1+z_2^2e_2+z_3^2e_3, \qquad P=p_1^2e_1+p_2^2e_2+p_3^2e_3$$

gösterimi kullanılarak determinant son sutuna göre açılırsa

$$C_0=[X,Y,Z], \qquad C_1=[Y,Z,P], \qquad C_2=[X,Z,P], \qquad C_3=[X,Y,P]$$

olmak üzere

$$C_0J_P+C_1J_X+C_2J_Y+C_3J_Z=(C_0+C_1+C_2+C_3)J_0$$

lineer ilişkisi ortaya çıkar. Hareketli uzayın X, Y, Z ve P noktaları sabit uzayda aynı yörünge yüzeyini oluştururlarsa

$$C_0+C_1+C_2+C_3=0$$

şartı ortaya çıkar.

III.BÖLÜM

KUTUPSAL ATALET MOMENTİ

Bu bölümde tekrar eğrilerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Eğrilerin kutupsal atalet momentleri için (II.3) de kinematik olarak elde edilen bazı formülleri farklı bir yöntemle tekrar elde edeceğiz.

Bu kısma elemanter bir problem ile başlayalım. O orijin merkezli, r yarıçaplı bir (Ç) çemberi üzerinde bir kiriş D noktası tarafından a ve b parçalarına bölünsün. Kiriş çember üzerinde saatın dönme yönünün tersine tam bir dönme yaptığı zaman, D nin geometrik yeri bir iç çember ortaya çıkarır (Şekil II.1.1). D nin geometrik yeri (Ç') olmak üzere, (Ç) çemberi ve (Ç') çemberinin O orijin noktasına göre kutupsal atalet momentleri arasındaki farkı hesaplayalım. (Ç) ve (Ç') nün O orijin noktasına göre kutupsal atalet momentleri sırasıyla

$$T_Ç=\int_0^{2\pi} r^2 d\theta=2\pi r^2$$

ve

$$T_{Ç'}=\int_0^{2\pi} z^2 d\theta=2\pi z^2$$

dir. Burada (II.1.1) eşitliği gözönüne alınırsa

$$T_Ç-T_{Ç'}=2\pi(r^2-z^2)=2\pi ab \qquad (III.1.1)$$

elde edilir.

Şimdi çembere göre daha genel bir eğri olan konveks kapalı bir eğri alarak sonucun doğru kaldığını gösteren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

III.1.1 Teorem: α bir kapalı konveks eğri olsun. Bu eğrinin a+b sabit uzunluklu bir AB kirişi uç noktaları α üzerinde kalacak şekilde iki nokta $A=A(t)$, $B=B(t)$, $0\leq t\leq 1$, olsun ve kiriş saatın dönme yönünün tersine hareket etsin. AB üzerinde $|AD|=a$, $|DB|=b$ olacak şekilde bir nokta $D=D(t)$, $0\leq t\leq 1$, olsun. a+b sabit uzunluklu AB kirişinin $\theta=\theta(t)$,

$0 \leq t \leq 1$, doğrultman açısı $\theta(1)=\theta(0)+2\pi$ olmak üzere t nin artan sürekli bir fonksiyonu olsun. D nin geometrik yeri β olmak üzere, β basit kapalı bir eğri olsun. Bu durumda α ve β nın O orijin noktasına göre kutupsal atalet momentleri arasındaki fark $2\pi ab$ dir.

İspat: α nın O orijin noktasına göre kutupsal atalet momenti

$$T_\alpha=\int_\alpha (x_A^2+y_A^2)d\theta$$

yada

$$T_\alpha=\int_\alpha (x_B^2+y_B^2)d\theta$$

dır. $s=a+b$ olmak üzere şekil II.1.7 den

$$T_\alpha=\int_\alpha (x_B^2+y_B^2)d\theta=\int_\alpha((x_A+s\cos\theta)^2+(y_A+s\sin\theta)^2)d\theta$$

veya

$$T_\alpha=\int_\alpha (x_A^2+y_A^2)d\theta+2s\int_\alpha(x_A\cos\theta+y_A\sin\theta)d\theta+s^2\int_\alpha d\theta$$

olur ve

$$\int_\alpha(x_A\cos\theta+y_A\sin\theta)d\theta=-s\pi \qquad (III.1.2)$$

olarak elde edilir. β nın O orijin noktasına göre kutupsal atalet momenti

$$T_\beta=\int_\beta (x_D^2+y_D^2)d\theta=\int_\alpha((x_A+a\cos\theta)^2+(y_A+a\sin\theta)^2)d\theta$$

veya

$$T_\beta=T_\alpha+2a\int_\alpha(x_A\cos\theta+y_A\sin\theta)d\theta+a^2\int_\alpha d\theta$$

olur. Burada (III.1.2) ve

$$\int_\alpha d\theta=2\pi$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$T_\beta=T_\alpha-2\pi ab \qquad (III.1.3)$$

olarak bulunur.

Bu teoremde α konveks ve β da basit kapalı bir eğri olmasına rağmen bu şartları hafifleterek daha genel olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

III.1.2 Teorem: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $0\le t\le 1$, parametrik gösterimi ile bir rectifiable eğri α olsun. Sürekli sınırlı salınımlı $\theta=\theta(t)$, $0\le t\le 1$, fonksiyonu ν bir tam sayı olmak üzere $\theta(1)=\theta(0)+2\pi\nu$ eşitliğini sağlayacak şekilde verilsin. $A=A(t)$, $0\le t\le 1$, noktası α üzerinde olsun. a ile b pozitif sayılar olmak üzere a+b uzunluklu ve $\theta=\theta(t)$ doğrultman açılı bir doğru parçası AB olacak şekilde her t için $B=B(t)$ noktası verilsin. A dan sabit bir a mesafesinde AB nin bir noktası $D=D(t)$, $0\le t\le 1$, olsun. A noktası α üzerinde bulunurken AB nin saatın dönme yönünün tersine hareketi esnasında B ve D tarafından çizilen eğriler sırasıyla β ve δ ile gösterilsin. Bu takdirde

$$T_\delta=\frac{1}{a+b}\{bT_\alpha+aT_\beta\}-2\pi\nu ab \qquad (III.1.4)$$

dir.

İspat: α nın rectifiable ve θ nın sınırlı salınımlı dönüşüm olması β ve δ nın da rectifiable eğri olmasını gerektirir. $\theta(1)=\theta(0)+2\pi\nu$ şartı, AB doğru parçasının α üzerinde hareket ettiğinde A noktasının tekrar başlama noktasına geri geldiği sonucunu verir (Şekil II.1.8). Burada ν pozitif tam sayısı ise AB kirişinin dönme sayısıdır. B uç noktası tarafından oluşturulan β eğrisinin O orijin noktasına göre kutupsal atalet momenti

$$T_\beta=\int_\beta (x^2+y^2)d\theta=\int_\delta ((x+b\cos\theta)^2+(y+b\sin\theta)^2d\theta$$

yada

$$T_\beta=\int_\delta (x^2+y^2)d\theta+2b\int_\delta (x\cos\theta+y\sin\theta)d\theta+b^2\int_\delta d\theta$$

olur. Burada

$$T=\int_\delta (x\cos\theta+y\sin\theta)d\theta \ , \ T_\theta=\int_\delta d\theta$$

olrak kabul edilirse

$$T_\beta=T_\delta+2bT+b^2T_\theta$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$T_\alpha=T_\delta-2aT+a^2T_\theta$$

olarak elde edilir. Burada

$$bT_{\alpha}+aT_{\beta}=(a+b)T_{\delta}+ab(a+b)T_{\theta}$$

ve

$$T_{\theta}=\int_{\delta} d\theta=2\pi\nu$$

olduğu gözönüne alınırsa (III.1.4) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Buna göre α ve β eğrilerinin O orijin noktasına göre kutupsal atalet momentleri biliniyorsa AB doğru parçası üzerindeki herhangi bir noktanın oluşturmuş olduğu eğrinin kutupsal atalet momenti kolayca bulunabilir ve bu eğrilerin kutupsal atalet momentleri

$$T_{\delta}-\frac{1}{a+b}\{bT_{\alpha}+aT_{\beta}\}=2\pi\nu ab$$

farkı α eğrisinin seçilişinden ve kirişin hareketinden bağımsız olmakla birlikte sadece AB doğru parçası üzerindeki seçilen noktanın uç noktalarına olan uzaklığına bağlıdır.

$\alpha=\beta$ olması özel halinde

$$T_{\alpha}=T_{\delta}-2\pi\nu ab$$

olur. $\nu=1$ olması halinde ise

$$T_{\alpha}=T_{\delta}-2\pi ab$$

olur ki buda teorem (III.1.1) i gerektirir.

III.1.1 Sonuç: Alanlar ve kutupsal atalet momentleri arasında

$$\frac{bF_{\alpha}+aF_{\beta}-(a+b)F_{\delta}}{bT_{\alpha}+aT_{\beta}-(a+b)T_{\delta}}=\frac{1}{2}$$

oranı mevcuttur.

İspat: Teorem (II.1.2) ve teorem (III.1.2) den kolayca görülür.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler Ve Geometriler, İ.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Mat. No:1, Malatya, (1980).

[2] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, İ.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:2, Malatya, (1983).

[3] Karger, A-Novak, J., Space Kinematics And Lie Groups, Gordon And Breach Science Publishers, New York, (1985).

[4] Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, F.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ, (1980).

[5] Hacısalihoğlu, H.H., 2 Ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, G.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:6, Ankara, (1984).

[6] Nomizu, K., Kinematics And Differential Geometry Of Submanifolds, Thouku Mat. Journ., 30, (1978).

[7] Hacısalihoğlu, H.H.-Balcı, M-Gökdal, F., Temel Ve Genel Matematik Cilt 3, Ankara, (1985).

[8] Wikolsky, S.M., A Course Of Mathematical Analysis, USSR, 129820, Moscow, (1977).

[9] Hacısalihoğlu, H.H., Lineer Cebir, D.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Mat.1, Diyarbakır, (1978).

[10] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi Ve Kuaterniyonlar Teorisi, G.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:2, Ankara, (1983).

[11] Müller, H.R., Kinematik Dersleri, Ankara Fen Fakültesi Yayınları, Um.96. Mat.27, Ankara, (1963).

[12] Holditch, H., Geometrical Theorem, The Quaterly Journal Of Pure And Applied Math.2, (1858).

[13] Broman, A., Holditch Theorem, Mathematics Magazine, Vol.54, No:3, (1981).

[14] Müller, H.R., Verallgemeinerung Einer Formel Von Steiner, Abh. d. Brschw. Wiss. Ges. Bd. XXIX, (1978).

[15] Müller, H.R., Über Tragheits Momente Bei Steinerscher Masenbele-gung, Angenommen In Der Klassensitsung Vom, (1978).

[16] Müller, H.R., Zum Satz Von Holditch, Contributions To Geometry, Proceedings Of The Geometry Symposim In Siegen, Birkhauser Verlag Basel, (1979).

[17] Lie, S. und Scheffers, G., Geometrie Der Berührungstransformationen, Teubner, Leibzig, (896).

[18] Müller, H.R., Gewindekurven Und Ebene Kinematik, Braunschweig, (1982).

[19] Wunderlich, W., Monatsh. Mat. 92 p.329-337. Anz. Math. Naturw. Kl. Östeer. Akad. Wiss. Nr.3, (1981).

[20] Müller, H.R., Über Den Rauminhalt Kinematich Erzeugter, Geschlossener Flachen, Sondrabdruck Aus Archiv Der Mathematik, Vol.38, Birkhasur Verlag, Basel Und Stuttgart, (1982).

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1960 yılında Kahramanmaraş'ın Elbistan ilçesinin Kandil köyünde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elbistan'da bitirdi ve 1984 de İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1988 de yüksek tahsilini tamamladıktan sonra 1989 da İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. Halen bu görevi yürütmekte olup evlidir.