36

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

DUAL TOPLAMA METODLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Fevzi BAŞAR

Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi

Matematik Asistanı

ELAZIĞ 1982

Beni bu çalışmaya sevkeden,çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden,hocam;sayın Doç.Dr.Ekrem ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Fevzi BAŞAR

Muhterem amcam Hacı Avni'nin

aziz hatırasına.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma, altı bölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci bölümde; bir Stieltjes integraline bağımlı limitleme metodları hakkında genel bilgiler verilmiş, ikinci bölümde; "Yakınsaklığı koruyan ve regüler olan metodlar" dan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde; Dual Toplama Metodları arasındaki bağlılık incelenmiş ve toplama metodları ile ilgili bazı tanımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde; dizi ve seri metodlarının esaslı olarak birbirlerinden farklı oldukları izah edilmeğe çalışılmıştır.

Bu çalışmanın orijinal sayılabilecek bölümleri, beşinci ve altıncı bölümlerdir. Beşinci bölümde; Dual Toplama Metodları, (E,1)-metodu yardımiyle genelleştirilmiş ve bu yolla tanımlanan yeni metodlar arasındaki bağlılık ile ilgili teoremler verilmiştir. Altıncı bölümde ise; bazı klasik toplama metodlarının dualleri hesab edilmiş ve bu metodlarla, ilgili dual metodlarının denklik şartları araştırılmıştır.

1. BÖLÜM

BİR STİELTJES İNTEGRALİNE BAĞIMLI LİMİTLEME METODLARI HAKKINDA GENEL BİLGİLER

Bu bölümde,

$$\sigma(x)=\int_0^{+\infty} a(x,t)ds(t) \tag{1.1}$$

şeklindeki limitleme metodlarını inceleyeceğiz. Her $x \geq 0$ için anlamlı bulunması gereken $\sigma(x)$ fonksiyonunun, eğer $\lim_{x\to\infty} \sigma(x)=\sigma$ sonlu limiti mevcutsa, s(t) fonksiyonu (1.1) metodu yardımiyle σ değerine limitlenebilir denir. (1.1) metodu, belli bir fonksiyon sınıfından yakınsak her $s(t) \to s$ fonksiyonuna bir $\sigma(x)=\sigma$ limiti karşılık getiriyorsa, bu metoda yakınsaklığı koruyan metod, üstelik $\sigma=s$ ise, regüler metod denir [4].

(1.1) inteğralinin mevcut olması için, önce

$$\int_0^c a(x,t)ds(t) \tag{1.2}$$

Stieltjes integrali her sonlu $c>0$ için mevcut olmalıdır. Bu taktirde (1.1) integrali, (1.2) integralinin $c \to \infty$ için limitidir. (1.2) integrallerinin varlığını sağlamak için ise iki yol vardır. Bunlar da aşağıdaki kabullerden birini yapmaktır.

(i) a(x,t) fonksiyonu her sabit $x \geq 0$ için t'nin sürekli bir fonksiyonudur ve s(t) her (0,c) aralığında sınırlı salınımlıdır.

(ii) Tersine olarak, her (0,c) aralığında s(t) sürekli ve a(x,t) sınırlı salınımlıdır.

Özel olarak, (1.1) ifadesine bir kısmi integrasyon uygulanabilir ve böylece (1.1) dönüşümü, $0 \leq t < +\infty$ aralığında sınırlı salınımlı olacak bir $b(x,t)$ fonksiyonunu uygun seçmek suretiyle,

$$\sigma(x)=\int_{0}^{+\infty} s(t)d_t b(x,t) \qquad (1.3)$$

şekline getirilebilir.

TANIM 1.1:

$(0,+\infty)$ aralığında uygun bir kısmi integrasyonla birbirlerine dönüşebilen metodlara "Dual Toplama Metodları" denir[4].

Bu tanıma göre (1.1) ve (1.3) metodları dual metodlardır. Eğer $s(t)$ fonksiyonu için, $s_n=\sum_{v=0}^{n} u_v$ dizisinin,

$$\sigma_n=\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}u_v \qquad (1.4)$$

dönüşümünü özel hal olarak ihtiva eden bir dönüşüm aranırsa, gayet tabii olarak, hipotezleri (i)'deki hipotezler olan (1.1) limitleme metoduna varılır. Gerçekten, eğer

$$s(t)=\begin{cases} 0 \;, & (t=0) \\ s_v \;, & (v<t \leq v+1) \end{cases} \quad , \; v=0,1,\ldots \qquad (1.5)$$

konursa, bu merdiven fonksiyonunun $t=v$ yerlerindeki sıçramaları u_v olduğundan bu fonksiyon için,

$$\sigma(x)=\int_{0}^{+\infty} a(x,t)ds(t)=\sum_{v=0}^{\infty} a(x,v)u_v$$

dir ki, bu da, n yerine yeni değişken x yazılmış olarak (1.4) dönüşümüne karşılık gelir. Fakat (ii) hipotezleri altında (1.5) fonksiyonunun (1.1) de yerine konması amaca ulaştırmaz. Çünkü (1.1) integralinin varlığı yalnız sürekli $s(t)$ fonksiyonları için garanti altına alınmıştır[4].

2.BÖLÜM

YAKINSAKLIĞI KORUYAN VE REGÜLER METODLAR

Her sonlu $(0,c)$ aralığında sınırlı salınımlı ve $t \geq 0$ için tanımlı olan $s(t)$ fonksiyonlarının cümlesini S_v ile gösterelim.Kabul edelim ki,$s(t)$'nin her $t>0$ noktasındaki değeri,bu noktadaki $s(t \mp 0)$ limitleri arasındadır.Hatta basitliği sağlamak için,bu değeri bu limitlerin aritmetik ortalamasına eşit alabiliriz.Bu özellik daima,$s(t)$ fonksiyonunu değiştirmek suretiyle,en fazla sayılabilir çokluktaki noktalara zorlanabilir.Böylece (1.1) integrallerinin değeri değişmemekle beraber,$s(t)$ fonksiyonunun her sonlu aralıktaki total salınımı enküçük değerini alır.

Sabit bir x için,hangi şartlar altında (1.1) integrali mevcuttur sorusuna aşağıdaki teorem cevap vermektedir.

TEOREM 2.1:

$$\int_0^{+\infty} a(t)ds(t) \tag{2.1}$$

integralinin,$t\to\infty$ için yakınsak her $s(t)\in S_v$ fonksiyonu için mevcut olması hususunda gerek ve yeter şart,

(i) $a(t)$'nin sürekli olması,

(ii) $\underset{(c,\infty)}{\operatorname{var}}\ a(t)<+\infty$ olacak şekilde bir $c>0$ sayısının var olmasıdır.Bu taktirde,$(0,\infty)$ da $a(t)$ sınırlıdır ve $\lim_{t\to\infty} a(t) = a$ dır[4].

Teoremin ispatından önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

YARDIMCI TEOREM 2.1:

$a(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ için sürekli olsun ve $\underset{[\alpha,\beta]}{\operatorname{var}}\ a(t)>b \geq 0$ bulun sun.Bu taktirde her $\ell>0$ sayısı için,

$$s(\alpha) = s(\beta) = 0 \ , |s(t)| \leq \ell \text{ ve } \int_{\alpha}^{\beta} a(t)ds(t) > b\,\ell \tag{2.2}$$

olacak şekilde, $[\alpha,\beta]$ da tanımlı ve sınırlı salınımlı bir $s(t)$ fonksiyonu vardır[4].

İSPAT:

$\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_r < \beta$ noktalarını öyle verebiliriz ki;

$$\sum_{i=1}^{r} |a(\beta_i) - a(\alpha_i)| > b$$

kalır. (α_i,β_i) açık aralığında her i için $s(t)=\ell_i=\ell\cdot \operatorname{sign}[a(\alpha_i)-a(\beta_i)]$ ve $[\alpha,\beta]$ nın diğer noktalarında $s(t)=0$ koyalım, öyle ki $s(t)$, α_i noktasında ℓ_i sıçramasını, β_i noktasında ise $-\ell_i$ sıçramasını yapsın. Bu fonksiyon $[\alpha,\beta]$ da sınırlı salınımlıdır, (2.2)'deki ilk iki şartı sağlar ve bunun için aynı zamanda,

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)ds(t) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i[a(\alpha_i)-a(\beta_i)] = \ell \sum |a(\beta_i)-a(\alpha_i)| > b\ell$$

dir.

TEOREM 2.1'in ispatı:

(i) şartı gerektir. Çünkü $a(t)$, meselâ t_0 noktasında süreksiz ise, $s(t)$ fonksiyonu bu t_0 noktasında $s(t_0+0)-s(t_0-0)\neq 0$ sıçramasını yapan ve S_v'ye ait olan bir fonksiyon olduğuna göre, (2.1) integrali muhakkak ki mevcut değildir.

(ii) şartı da gerektir. Çünkü, eğer bu şart sağlanmıyorsa ortak noktaları olmayan bir $[\alpha_k,\beta_k]$ aralıklar dizisi vardır öyle ki, $k \to \infty$ için $\alpha_k \to \infty$ dur ve $\underset{[\alpha_k,\beta_k]}{\text{var}}\ a(t) > k^2$ dir. Bu takdirde, yardımcı teorem 2.1'den dolayı $[\alpha_k,\beta_k]$ da $|s(t)| < \frac{1}{k}$, $s(\alpha_k)=s(\beta_k)=0$ ve $\int_{\alpha_k}^{\beta_k} a(t)ds(t) > k$ olacak şekilde bir $s(t)$ sınırlı salınımlı fonksiyonu vardır. $[\alpha_k,\beta_k]$ aralığının dışında $s(t)=0$ konursa, S_V'ye ait olan vesıfıra yakınsayan bir fonksiyon elde edilir ki, bu fonksiyon için (2.1) integrali mevcut değildir.

Şartlar aynı zamanda yeterdir de. Bunlar önce, her $c>0$ için $\int_0^c a(t)ds(t)$ integralinin varlığını sağlarlar. Bundan başka, $s(t)$'nin toplamsal bir sabit kadar değiştirilmesinin (2.1) integralinin varlığına etkisi olmayacağından $\lim s(t)=0$ kabul edilebilir. Bu varlık büyük α ve β için,

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)ds(t) = a(\beta)s(\beta) - a(\alpha)s(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} s(t)da(t)$$

eşitliğinden elde edilir.

TEOREM 2.2:

(1.1) integral dönüşümünün yakınsaklığı koruyan olması için gerek ve yeter şart, her $x \geq 0$ için $a(x,t)$ fonksiyonunun, teorem 2.1'de ifade edilen (i) ve (ii) özelliklerine sahip olması ve aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

(N_1) c, M ve x_0 gibi öyle sonlu pozitif sayılar vardır ki, $x \geq x_0$ için $\underset{(c,\infty)}{\text{var}}\ a(x,t) \leq M$ dir.

(N_2) $x \geq x_0$ için $a(x,t)$ düzgün sınırlıdır, meselâ $x \geq x_0$, $t \geq 0$ için $|a(x,t)| \leq K$.

(L) Her $t \geq 0$ için $\lim_{x\to\infty} a(x,t) = a^*(t)$ dir.

Eğer bu şartlar sağlanıyorsa ve ayrıca $a^*(t)$ sürekli ise, $\lim_{x\to\infty} \sigma(x) = \sigma$ limiti,

$$\sigma = \int_0^\infty a^*(t)ds(t) \qquad (2.3)$$

formülü ile verilir[4].

İSPAT:

I.Şartlar gerektir. (L) şartı için bu derhal,

$$s(t)=\begin{cases} 0 \ , & (t \leq t_0) \\ 1 \ , & (t > t_0) \end{cases} \qquad (2.4)$$

fonksiyonundan anlaşılır.Çünkü bunun için $\sigma(x)=a(x,t_0)$ dır. O halde bundan sonra (L) şartının sağlandığını kabul edebiliriz.

(N_1) şartının gerekli olduğunu ise,bu sağlanmadığı taktirde,bir $s(t)\in S_V$ fonksiyonu vererek,bu fonksiyon için (1.1) integralinin mevcut olmadığını göstermek suretiyle ispat edeceğiz. Gerçekten,eğer (N_1) sağlanmıyorsa,her c>0 ve M>0 sayısına karşılık istenilen büyüklükte x vardır ki,bunun için;

$$\underset{c\leq t<\infty}{\mathrm{var}}\ a(x,t)> M$$

kalır.Demek ki $c_1>0$ keyfi olarak seçilirse,öyle bir $x_1>0$ vardır ki $\underset{(c_1,\infty)}{\mathrm{var}}\ a(x_1,t)>1$ dir,dolayısiyle bir $d_1>c_1$ vardır ki,aynı zamanda $\underset{(c_1,d_1)}{\mathrm{var}}\ a(x_1,t)>1$ dir.Teorem 2.1'in (ii) şartına göre bu d_1'i aynı zamanda öyle büyük seçebiliriz ki;

$$\underset{(d_1,\infty)}{\mathrm{var}}\ a(x_1,t)<1$$

kalır.Şimdi $[0,c_1]$ de ve d_1 de s(t)=0 koyalım ve yardımcı teorem 2.1 gereğince (c_1,d_1) de s(t)'yi öyle tesbit edelim ki,orada

$$|s(t)|\leq 1 \quad \text{ve} \quad \int_{c_1}^{d_1} a(x_1,t)ds(t)>1^2$$

kalsın.Eğer $c_1<d_1<c_2<\ldots<d_{k-1}$ olmak üzere $[c_1,d_1],\ldots,[c_{k-1},d_{k-1}]$ aralıkları ve $x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}$ sayıları tayin edilmiş ve s(t)

fonksiyonu $[0,d_{k-1}]$ de tarif edilmiş ise, aşağıdaki gibi devam edilir.

$\bar{x}_k$ ve g_k sayıları öyle büyük seçilmiş olsun ki, $x \geq \bar{x}_k$ için,

$$\left| \int_0^{d_{k-1}} a(x,t)ds(t) \right| \leq g_k \tag{2.5}$$

kalsın. Böyle $\bar{x}_k$ ve g_k sayıları vardır. Çünkü tahmini yapılan integralin $x\to\infty$ için bir limiti vardır. Bundan sonra $\underset{(c_k,\infty)}{\mathrm{var}}\, a(x_k,t) > kg_k+k^2$ olacak şekilde $c_k > d_{k-1}$ keyfi olarak ve $x_k > \bar{x}_k$ seçilir. Nihayet $d_k > c_k$ öyle büyük alınır ki,

$$\underset{(c_k,d_k)}{\mathrm{var}}\, a(x_k,t) > kg_k+k^2 \quad \text{fakat} \quad \underset{(d_k,\infty)}{\mathrm{var}}\, a(x_k,t) < 1 \tag{2.6}$$

kalsın. Bundan sonra (d_{k-1},c_k) da $s(t)=0$ koyarız ve $[c_k,d_k]$ da yardımcı teorem 2.1'den dolayı;

$$s(c_k)=s(d_k)=0\ , \quad |s(t)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{ve} \quad \int_{c_k}^{d_k} a(x_k,t)ds(t) > \frac{1}{k}(kg_k+k^2) \tag{2.7}$$

olacak şekilde $s(t)$'yi tanımlarız. Böylece $s(t) \in S_v$ ve $s(t) \to 0$ dır. Fakat

$$|\sigma(x_k)| = \left| \int_0^{\infty} a(x_k,t)ds(t) \right| \geq \left| \int_{c_k}^{d_k} \right| - \left| \int_0^{c_k} \right| - \left| \int_{d_k}^{\infty} \right| \geq g_k+k-g_k-1=k-1$$

dir. Bunlar (2.5) ve (2.7) eşitliklerinden, üçüncü integral ise $\int_{d_k}^{d}$ 'nin kısmi integrasyonuyla $d\to\infty$ için elde edilir. Çünkü $a(x_k,t)$, (2.6) dolayısiyle $t \geq d_k$ için sınırlıdır ve $t\to\infty$ için bir limite yaklaşır. O halde (N_1) şartı gerektir.

Nihayet (N_2) şartı da gerektir. Bir $s(t) \in S_v$ fonksiyonunun değerleri $t \geq c$ için sıfır olarak alınırsa, $[0,c]$ de sınırlı salınımlı olan keyfi bir $s(t)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^c a(x,t)ds(t)$$

limitinin mevcut olması gerektiği bulunur. Bu $s(t)$ fonksiyonları bir V Banach uzayı meydana getirirler ki, burada $s=s(t)$ elemanının V'deki normunu; $\|s\| = \underset{(0,c)}{\mathrm{var}}\, s(t)$ olarak tarif ediyoruz. Bu takdirde,

$$F(s) = \int_0^c a(t)ds(t) \tag{2.8}$$

integrali, $a(t)$'nin sürekli olması halinde V uzayında lineer bir fonksiyonel gösterir ve $\|F(s)\| = \mathrm{Max}|a(t)|$ dir ([11], sf.59 ve sf.189-190). Demek ki,

$$\int_0^c a(x,t)ds(t) \tag{2.9}$$

fonksiyonellerinin $x \to \infty$ için yakınsaklığından, gerçekten (N_2) şartı çıkar.

II. Şartlar yeterdir. Önce (2.9) integrali her $c>0$ ve her $s(t) \in S_V$ için $x \to \infty$ olması halinde yakınsaktır. Çünkü, eğer $s(t)$ monoton azalmıyorsa, $t(s)$ de $s(t)$'nin ters fonksiyonu ise (2.9) integrali,

$$\int_{s(0)}^{s(c)} a[x,t(s)]\,ds$$

Lebesgue integraline eşittir. Burada integral içindeki fonksiyon s'nin sabit olması halinde (L) şartı gereğince $x \to \infty$ için yakınsadığından ve bahis konusu bütün x ve s'ler için mutlak değer bakımından K'dan küçük olduğundan, Lebesgue yakınsaklık teoreminden dolayı, $x \to \infty$ için integral,

$$\int_{s(0)}^{s(c)} a^*[t(s)]\,ds \;\left(= \int_0^c a^*(t)ds(t)\,,\ \text{eğer } a^*(t) \text{ sürekli ise}\right) \tag{2.10}$$

ifadesine yakınsar. Aynı şey monoton artmayan $s(t)$ için de ve şu halde sınırlı salınımlı her $s(t)$ fonksiyonu için de geçerlidir.

$\lim\limits_{x\to\infty} \sigma(x)$ limitinin varlığını ispat etmek için,

$$\int_c^d a(x,t)ds(t)$$

integralinin ve şu halde,

$$\int_c^\infty a(x,t)ds(t)$$

integralinin de, yeter derecede büyük c ve d için istenildiği kadar ve yeter derecede büyük bütün x'ler için düzgün olarak, küçük yapılabileceğini göstermek yeter. s(t)'nin bu integralde toplamsal bir sabit kadar değiştirilmesi bu integralin değerini etkilemeyeceğinden, bu ispatta lim s(t)=0 kabul edebiliriz. Böylece,

$$\int_c^d a(x,t)ds(t)=a(x,d)s(d)-a(x,c)s(c)-\int_c^d s(t)da(x,t)$$

bulunur.

$a^*(t)$'nin sürekli olması halinde (2.9) ve (2.10)'daki integrallerin farkı yeter derecede büyük x'ler için istenildiği kadar küçük olduğundan ve yeter derecede büyük c için birincisi $\sigma(x)$'den, ikincisi ise (2.3) integralinden istenildiği kadar az farkettiğinden, böylece nihayet (2.3) formülünün doğruluğu da çıkmış olur. Tabii bu formülde σ değeri, lim s(t)=s değerine bağımlı değildir. Çünkü, evvelce belirtildiği gibi, bir Stieltjes integrali, s(t)'nin toplamsal bir sabit kadar değişmesinden etkilenmez.

Bu sebepten dolayı, başka bir kayıt koymadan (1.1) dönüşümünün regülerliğinden söz etmeğe imkân yoktur. Bununla beraber, s(t)'nin meselâ,

$$s(0)=0 \tag{2.11}$$

ile tanımlandığını kabul edersek durum değişir. Bu taktirde şu teorem geçerlidir.

TEOREM 2.3:

$s(t)$'nin (2.11) tanımlaması altında (1.1) integral dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart, teorem 2.1'deki (i) ve (ii) şartlarından ve teorem 2.2'deki (N_1) ve (N_2) şartlarından başka, bir de

(L_1) Her $t \geq 0$ için $\lim_{x\to\infty} a(x,t)=1$

şartının sağlanmasıdır[4].

İSPAT:

(L_1) şartının gerekli olduğu, yine (2.4) fonksiyonu yardımiyle anlaşılır. Diğer şartlarla birlikte yeter olduğu ise (2.3) formülünden çıkar. Çünkü bu halde,

$$\sigma = \int_0^\infty ds(t) = \lim_{t\to\infty} s(t) - s(0) = s$$

dir.

3.BÖLÜM

DUAL LİMİTLEME METODLARI ARASINDAKİ BAĞLILIK

Yakınsaklığı koruyan bir,

$$\sigma(x) = \int_0^\infty a(x,t)ds(t)$$

metodu için, teorem 2.2'den dolayı (N_1) sağlanmak zorunda olduğundan,

$$\lim_{t\to\infty} a(x,t) = \alpha(x)$$

limiti mevcuttur.

$\alpha(x)$'in değeri hakkında şu söylenebilir: Eğer $\lim_{x\to\infty}\sigma(x)$ hiç olmazsa, sınırlı ve $t\to\infty$ için ıraksak bir $s(t)$ fonksiyonu için mevcut ise, bu taktirde,

$$\lim_{t\to\infty} a(x,t) = 0 \ , \ x \geq 0 \tag{3.1}$$

dır. Çünkü,

$$\int_0^c a(x,t)ds(t) = a(x,c)s(c) - a(x,0)s(0) - \int_0^c s(t)d_t a(x,t)$$

deki heriki integral de bu $s(t)$ için $c\to\infty$ olması halinde sonlu bir limite maliktirler (ikinci integral (N_1) şartından ve $s(t)$ fonksiyonunun sınırlılığından dolayı). Bu sebepten $a(x,c)s(c)$ fonksiyonunun da $c\to\infty$ için sonlu bir limiti vardır ve

$$a(x,c) \to \alpha(x)$$

olduğundan, (3.1) sağlanmak zorundadır.

Şimdi (1.1)'deki $s(t)\in S_v$'yi yine (2.11) ile tanımlayalım. Ayrıca (3.1) de sağlanıyorsa, (1.1)'den kısmi integrasyon yardımiyle,

$$\sigma(x) = -\int_0^\infty s(t)d_t a(x,t) \tag{3.2}$$

çıkar.Bu,(1.3) tipinde bir metoddur ki,biz buna yine (1.1) metodunun duali diyeceğiz[4].

Şimdi,(1.1) ile (3.2) arasındaki bağıntıyı daha etraflı olarak inceleyeceğiz.Önce,bir Stieltjes integralinin ters çevrilmesi hakkında yardımcı bir teorem verelim.

YARDIMCI TEOREM 3.1:

$a(t)$ fonksiyonu $[0,c]$ aralığında sürekli ve pozitif, $a(t),s(t)\in S_v$ olsun.Ayrıca,

$$\varrho(y)=\int_0^y \frac{a(t)}{a(y)}\,d[a(t)s(t)] \tag{3.3}$$

alalım.Bu taktirde $a(y)\varrho(y)\in S_v$ dir ve

$$a(\beta)s(\beta)-a(\alpha)s(\alpha)=\int_\alpha^\beta \frac{1}{a(t)}\,d[a(t)\varrho(t)] \;;\quad (0\le\alpha<\beta\le c) \tag{3.4}$$

dir[7].

İSPAT:

$a(t),s(t)\in S_v$ olduğundan $a(t)s(t)\in S_v$ dir.Buna dayanarak, $a(y)\varrho(y)\in S_v$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.Ayrıca,$a(t)$ fonksiyonu $[0,c]$ aralığında sürekli ve pozitif olduğundan, $\frac{1}{a(t)}$ fonksiyonu da aynı aralıkta süreklidir.$a(t)\varrho(t)\in S_v$ olduğundan dolayı (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki integralin varlığı artık garanti edilmiştir.Bu sebeple yalnız bu eşitliği ispatlamak yeterlidir.

Bu integral,

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a(\tau_i)}\left[a(t_i)\varrho(t_i)-a(t_{i-1})\varrho(t_{i-1})\right]$$

toplamlarının limitidir.Burada, $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$, $[\alpha,\beta]$ aralığının herhangibir parçalanmasını ifade etmektedir. τ_i'ler t_{i-1} ile t_i arasında herhangibir şekilde alınmışlardır ve $[t_{i-1},t_i]$ aralıklarının enbüyüklerinin uzunlukları sıfıra yaklaşmaktadır.Bu

suretle,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a(\tau_i)} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) d\left[a(t)s(t)\right] \right]$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a(\tau_i)} a(\tau_i')\left[a(t_i)s(t_i)-a(t_{i-1})s(t_{i-1})\right] \;;$$

$$\tau_i' \in (t_{i-1}, t_i).$$

S toplamında özel olarak $\tau_i = \tau_i'$ alınırsa,

$$S = a(t_n)s(t_n)-a(t_o)s(t_o) = a(\beta)s(\beta)-a(\alpha)s(\alpha)$$

elde edilir. Yani,

$$a(\beta)s(\beta)-a(\alpha)s(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{a(t)}\, d\left[a(t)\varrho(t)\right] \;;\quad (0\leq\alpha<\beta\leq c)$$

ispatlanmış olur. Burada; $\alpha=0$, $\beta=x$ alırsak sonuç olarak,

$$a(x)s(x)-a(0)s(0) = \int_{0}^{x}\frac{1}{a(t)}\, d\left[a(t)\varrho(t)\right]$$

bağıntısını elde ederiz.

TEOREM 3.1:

$0 \leq t < \infty$ için $a(t)>0$ ve sürekli olsun. Bundan başka,

$\lim\limits_{t\to\infty} a(t)=0$ bulunsun ve her $c>0$ için $M\geq 0$ sabit olmak üzere,

$$\underset{0\leq t\leq c}{\mathrm{var}}\ \frac{1}{a(t)} \leq \frac{M}{a(c)} \tag{3.5}$$

kalsın (Eğer $a(t)$, monoton olarak sıfıra azalıyorsa bu

şart mutlaka sağlanır). Eğer, $s(0)=0$ ve $s(t)\in S_v$ için,

$$\int_{0}^{\infty} a(t)ds(t)$$

integrali mevcut ise o zaman,

$$\int_{0}^{\infty} s(t)da(t)$$

integrali de mevcuttur ve

$$\int_0^\infty a(t)ds(t) = -\int_0^\infty s(t)da(t) \qquad (3.6)$$

geçerlidir[4].

İSPAT:

$$\int_0^x a(t)ds(t) = a(x)s(x) - \int_0^x s(t)da(t)$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to \infty} a(x)s(x) = 0$$

olduğunu göstermek yeter. Şimdi bir $k(x)$ fonksiyonunu,

$$k(x) = \int_0^x \frac{a(x)+a(t)}{a(t)} d\varrho(t)$$

olarak tarif edelim, burada;

$$\varrho(x) = \int_0^x a(t)ds(t).$$

$\varrho(x) \in S_v$ olduğu aşikârdır ve ayrıca $x \to \infty$ için $\varrho(x)$ yakınsaktır. $\lim_{x \to \infty} \varrho(x) = s$ kabul edelim. $\lim_{x \to \infty} k(x) = s$ olduğunu göstereceğiz. Buradan $k(x)$ fonksiyonunu;

$$k(x) = \int_0^\infty b(x,t)d\varrho(t)$$

şeklinde yazabiliriz, burada;

$$b(x,t) = \begin{cases} \dfrac{a(x)+a(t)}{a(t)} & , (0 \le t \le x) \\ 0 & , (t > x) \end{cases}.$$

$b(x,t)$, teorem 2.3'ün şartlarını sağladığından ve $\varrho(0)=0$ bulunduğundan dolayı bu ifade, $\varrho(t)$ fonksiyonunun regüler bir dönüşümünü gösterir. Bu sebeple $\lim_{x \to \infty} k(x) = s$ dir. Diğer taraftan,

$$k(x) = a(x)s(x) + \int_0^x a(t)ds(t)$$

çıkar.Bu eşitliğin her iki tarafının $x \to \infty$ için limitini alırsak,

$$\lim_{x \to \infty} a(x)s(x) = 0$$

bağıntısı geçerli olur.Böylece İspat tamamlanır.

TEOREM 3.2:

$s(0)=0$ ve $s(t) \in S_v$ için gözönüne alacağımız iki dual limitleme metodu,

$$\sigma(x) = \int_0^\infty s(t)da(x,t) \tag{3.7}$$

ve

$$\bar{\sigma}(x) = -\int_0^\infty a(x,t)ds(t) \tag{3.8}$$

olsun.Bütün $x \geq 0$ ve $t \geq 0$ için $a(x,t)$ pozitif olsun,her $x \geq 0$ için $\lim_{t \to \infty} a(x,t)=0$ bulunsun ve c'ye bağlı olmayan bir $M(x)$ ile

$$\operatorname*{var}_{0 \leq t \leq c} \frac{1}{a(x,t)} \leq \frac{M(x)}{a(x,c)}$$

olsun veya her $x \geq 0$ için $a(x,t)$ fonksiyonu monoton olarak sıfıra yaklaşsın (bu halde $a(x,t)>0$ kaydı önemsizdir,=0 alınabilir).Bu şartlar altında (3.7) metodu,(3.8) metodunda mevcuttur.Yani S_v'nin birinci metoda göre limitlenebilen her fonksiyonu ikinci metoda göre de limitlenebilir ve

$$\sigma(x) = \bar{\sigma}(x)$$

dir[4].

İSPAT:

Teorem 3.1'den elde edilir.

Karşı yönde ise şu teorem geçerlidir.

TEOREM 3.3:

$a(x,t)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ da her $x \geq 0$ için sınırlı salınımlı olsun ve $t \geq 1$ için,

$$\left|a(x,t)\right| \leq M(x)\left|a(x,t)-a(x,t-1)\right| \tag{3.9}$$

bulunsun.Eğer $s(t)\in S_v$ fonksiyonları için,(2.11)'den başka,K uygun bir sabit olmak üzere,$|t-t'|<1$ bağıntısını sağlayan bütün t,t''ler için,

$$\left|s(t)-s(t')\right| \leq K \tag{3.10}$$

şartı da sağlanıyorsa,(3.8) metodu,(3.7) metodunda mevcuttur.Bu taktirde yine $\sigma(x) = \bar{\sigma}(x)$ dir[4].

İSPAT:

$$\int_0^c s(t)da(x,t) = a(x,c)s(c) - \int_0^c a(x,t)ds(t)$$

dolayısiyle ve (3.7)'deki integralin varlığı sebebiyle,her $x\geq 0$ için $c\to\infty$ olması halinde $a(x,c)s(c)\to 0$ olduğunu göstermek yeter.Fakat,

$$\begin{aligned}\left|a(x,c)s(c)\right| &\leq M(x)\left|a(x,c)-a(x,c-1)\right|\left|s(c)\right| \\ &= M(x)\left|\int_{c-1}^{c} s(c)d_t a(x,t)\right| \\ &\leq M(x)\left\{\left|\int_{c-1}^{c} s(t)d_t a(x,t)\right| + \left|\int_{c-1}^{c}\left[s(c)-s(t)\right]d_t a(x,t)\right|\right\}\end{aligned}$$

dir.Burada birinci integral sıfıra yaklaşır,çünkü (3.7) integrali mevcuttur.İkinci ise $\leq K \underset{c-1\leq t\leq c}{\text{var}} a(x,t)$ kaldığından,o da sıfıra gider.

Buraya kadar bu bölümde,integral formundaki dual toplama metodları arasındaki bağlılığı inceledik.Birinci bölümde açıkladığımız gibi; s(t) fonksiyonu yerine (1.5) merdiven fonksiyonunu almak,x yerine n tamsayılı değişkenini koymak ve $a(n,k)=a_{nk}$ yazmak suretiyle (1.1)'den,

$$(A) \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k$$

seri dönüşümünü elde ederiz. (3.7) ve (3.8) ifadelerinden dolayı burada dual dönüşüm,

$$(B) \quad \tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} s_k \ , \ b_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}$$

şeklindedir. Buradaki A-metodu; $\sum u_k$ $(u_n = s_n - s_{n-1}\ ,\ s_{-1} = 0)$ serisinin, $A=(a_{nk})$ matrisi yardımiyle $\{\sigma_n\}$ dizisine dönüşümünü, B-metodu da; $\{s_n\}$ dizisinin, $B=(b_{nk})$ matrisi yardımiyle $\{\tau_n\}$ dizisine dönüşümünü belirtmektedirler.

Şayet uygun bir yolla σ_n, τ_n'e (veya τ_n, σ_n'e) dönüşüyorsa; A ve B-metodlarına "Dual Metodlar" diyoruz. Bu ifade,

$$a_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} b_{ni} \quad (\text{veya } b_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}) \qquad (3.11)$$

bağıntısına denktir[7].

Şimdi toplama metodlarıyla ilgili bazı tanımlar verelim.

TANIM 3.1:

Bir A dizi (veya seri) metodunun $\mathcal{A}$ toplanabilirlik alanı, A ile toplanabilen bütün $\{s_n\}$ dizilerinin (veya $\sum u_n$ serilerinin) cümlesidir[5].

TANIM 3.2:

Bir A dizi veya seri metodunun $\mathcal{A}$ toplanabilirlik alanı, başka bir B-metodunun $\mathcal{B}$ toplanabilirlik alanı içinde ihtiva edilirse (yani $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ise); "B, A'dan daha kuvvetlidir" denir[5]. Başka bir ifadeyle; A ve B iki toplama metodu olmak üzere, A-limitlenebilen her dizi aynı değere B-limitlenebilir ise; "B, A'dan daha kuvvetlidir" denir ve $B \supseteq A$ yazılır ([8], sf.11).

TANIM 3.3:

A ve B iki toplama metodu olmak üzere eğer, A ve B metodları ile limitlenebilen her $\{s_n\}$ dizisi için limit değerleri de birbirine eşit ise, "A ve B-metodları tutarlıdır" denir ([8], sf.27).

TANIM 3.4:

A ve B iki toplama metodu olsunlar. Eğer, $A \supseteq B$ ve $B \supseteq A$ ise, "A ve B-metodları denktir" denir ([8], sf.31).

Şimdi, bu bölümde integral formundaki dual metodlar için ispatladığımız teoremlerin, toplam formundaki dual metodlar için karşılık gelen ifadelerini verelim.

Teorem 3.2'ye aşağıdaki teorem karşılık gelir.

TEOREM 3.4:

Eğer $n,k=0,1,2,\ldots$ için $a_{nk}>0$ ve $k\to\infty$ için $a_{nk}\to 0$ ise ve M_n büyüklüğü k'ya bağlı olmamak üzere (şu halde a_{nk}'nın özel olarak monoton bir şekilde sıfıra yaklaşması halinde)

$$\sum_{\varrho=0}^{k}\left|\frac{1}{a_{n\varrho}}-\frac{1}{a_{n,\varrho+1}}\right| \leq \frac{M_n}{a_{nk}} \tag{3.12}$$

ise, A-metodu B-metodunda mevcuttur [4].

Teorem 3.3'e de aşağıdaki teorem karşılık gelir.

TEOREM 3.5:

Eğer her $n=0,1,2,\ldots$ için $\sum_{\varrho=k}^{\infty} b_{n\varrho}=a_{nk}$ serisi mutlak yakınsak ise ve her k için,

$$\left|\sum_{\varrho=k}^{\infty} b_{n\varrho}\right| \leq M_n \left|b_{nk}\right| \tag{3.13}$$

ise, B-metodu A-metodunda mevcuttur [4].

Teorem 3.3'ün hoş olmayan (3.10) şartını, burada bir tarafa bırakmak mümkün olabilmiştir. Şimdi bahsedilen teoremin ispatı için elimizdeki halde c tamsayılı olmak üzere bir [illegible] fonksiyonu ile yetinilebilir. Yani (3.10) şartına sadece, tamsayılı bir (c,c+1) aralığına ait olan [illegible] için ihtiyaç vardır. Bu hipotezler altında (3.10), aşikâr olarak kendiliğinden sağlanır.

Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'ten, aşağıdaki teorem elde edilir.

TEOREM 3.6:

Eğer her n için,

$$0 \leq a_{n,k+1} \leq q_n a_{nk} \; ; \; n,k=0,1,2,\ldots \qquad (3.14)$$

şartını sağlayan, $0<q_n<1$ olacak şekilde bir $\{q_n\}$ dizisi varsa, A ve B-metodları denktirler. Aynı şey, n yerine sürekli bir parametre alınması halinde de geçerlidir[ ].

Bu bölümde, dizi ve seri metodlarının esaslı olarak birbirlerinden farklı olduklarını izah edeceğiz.

B-metodunu, A-metodunun uygulandığı $\sum u_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisini, $B=(b_{nk})$ matrisi yardımıyla $\{\tau_n\}$ dizisine dönüştüren bir dizi metodu olarak ifade etmiştik. Burada; $\sum u_k$ serisi ile $\{s_n\}$ dizisi arasındaki ilişkiden dolayı, A ve B metodlarının farklı olmadıkları sorusu akla gelebilir. Çünkü; A-metodu $\sum u_k$ serisinin terimlerine, B-metodu da aynı serinin kısmi toplamlar dizisine uygulanmaktadır.

Şimdi, A ve B-metodları arasındaki farkı açıklamağa çalışalım. $\{\sigma_n\}$ ve $\{\tau_n\}$ dizileri arasında; toplamın sırasını değiştirmek mümkün ise,

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}u_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(s_k-s_{k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk}-a_{n,k+1})s_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}s_k = \tau_n$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Fakat toplamın sırasını değiştirmek her zaman mümkün olmadığından ([10], sf.266), A ve B-metodları denk olmayabilirler. Bununla beraber, B'nin regüler olması için gerek ve yeter şart; A'nın regüler olmasıdır. Bunu ispat edelim.

I. B regüler olsun. Bu taktirde $B=(b_{nk})$ matrisi,

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \leq K$, her n için.

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$, her sabit k için.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = 1$

şartlarını sağlar ([1], sf.64).

$$a_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} b_{ni} \Rightarrow b_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1} \text{ idi.}$$

(i)'den, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leq K$, her n için. (4.1)

(iii)'den, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{n,k+1})$

$$= \lim_{n\to\infty} a_{n1} = 1$$

(ii)'den, her sabit k için $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{nk} - a_{n,k+1}) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} a_{n,k+1}$$

ve

$\lim_{n\to\infty} a_{n1} = 1$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} a_{n1} = \lim_{n\to\infty} a_{n2} = \ldots = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1 \quad (4.2)$$

her sabit k için, bulunur. $A=(a_{nk})$ matrisi için, (4.1) ve (4.2) şartları gerçeklendiğinden A regülerdir.

II. Kabul edelim ki A regüler olsun. Bu taktirde $A=(a_{nk})$ matrisi,

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leq M$, her n için.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1$, her sabit k için.

şartlarını sağlar ([1], sf.68).

(i)'den, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \leq M$, her n için. (4.3) (ii)'den, $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=1$, her sabit k için, idi.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}-a_{n,k+1})=(a_{n1}-a_{n2})+(a_{n2}-a_{n3})+\ldots =a_{n1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=1 \text{ , her } k \text{ için} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n1}=1 .$$

O halde,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}=1 . \tag{4.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk}=\lim_{n\to\infty}(a_{nk}-a_{n,k+1})=\lim_{n\to\infty} a_{nk}-\lim_{n\to\infty} a_{n,k+1}$$
$$=1-1=0 \tag{4.5}$$

bulunur. $B=(b_{nk})$ matrisi için; (4.3), (4.4) ve (4.5) şartları gerçeklendiğinden, B regülerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

B, A'ya denk olmak zorunda değildir. Ayrıca A ve B metodlarının tutarlı olmaları da gerekmez. Yani bir dizi, hem A hem de B limitlenebildiğinde; A ve B limitleri uyuşmak zorunda değildirler. Bu, A ve B'nin regüler olduklarını kabul etsek ve hatta A ve B'nin toplanabilirlik alanlarının çakışık olduğunu farzetsek bile böyledir. Bu, aşağıdaki teoremle ifade ve ispat edilmiştir.

TEOREM 4.1:

Aynı toplanabilirlik alanına sahip olan fakat tutarlı olmayan A,B gibi regüler iki dual metod vardır[5].

Bununla beraber, uygun kısıtlamalarla, A limitlenebilir her dizinin aynı limite B limitlenebilir olduğunu veya A ile B yerdeğiştirdiği zaman benzer sonucun geçerliliğini ispat etmek mümkündür. Bu sonuçlardan herbiri; "A,B-metodları tutarlıdır" önermesini ihtiva eder.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}u_k \tag{4.6}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} s_k \qquad (4.7)$$

serilerinin kısmi toplamlar dizileri arasında;

$$\sum_{i=0}^{k} a_{ni} u_i = \sum_{i=0}^{k-1} b_{ni} s_i + b_{nk} s_k$$

bağıntısı vardır. Şu halde, verilen bir n için (4.6) ve (4.7) serilerinin biri yakınsak ise diğerinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart; $k \to \infty$ için,

$$b_{nk} s_k \longrightarrow v_n \qquad (4.8)$$

olmasıdır. Eğer bu mümkünse, $\{\sigma_n\}$ ve $\{\tau_n\}$ dizileri arasında;

$$\sigma_n = \tau_n + v_n \qquad (4.9)$$

eşitliği gerçeklenmiş olacaktır. Şu halde, $\sum u_k$ serisi A ile toplandığında, $\{s_k\}$ dizisinin B ile limitlenebilmesi için gerek ve yeter şart; (4.8)'in, her n için doğru olması ve

$$v_n \longrightarrow v \ , \ n \to \infty \text{ için.} \qquad (4.10)$$

olmasıdır. Bu durumda A ve B limitleri arasındaki fark v olacaktır. Böylece, herhangi A limitlenebilir dizinin, aynı limite B limitlenebilir olması için gerek ve yeter şart; A toplanabilmenin v=0 olacak şekilde (4.10)'un geçerliliğini gerektirmesidir. Benzer düşünce, A ile B yerdeğiştirdiğinde geçerlidir. Ayrıca, A ve B'nin tutarlı olmaması için gerek ve yeter şart; v=0 olacak şekilde (4.10)'u geçerli kılan enaz bir B limitlenebilir dizinin mevcut olmasıdır[3]. Bunlardan başka, A seri ve B dizi metodları arasında aşağıdaki özelliğin varlığı da bilinmektedir:

Toplanabilirlik alanı, herhangibir regüler seri toplama metodunun toplanabilirlik alanı içinde ihtiva edilmeyen regüler dizi toplama metodları mevcuttur. Diğer taraftan, toplanabilirlik alanı, herhangibir regüler dizi toplama metodunun toplanabilirlik alanı içinde ihtiva edilmeyen regüler seri toplama metodları mevcuttur[5].

5.BÖLÜM

DUAL TOPLAMA METODLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

TANIM 5.1:

$A=(a_{nk})$ matrisi $s=\{s_n\}$ dizisini, $\{\sigma_n\}$ dizisine dönüştürsün. Yani;

$$\sigma_n = \sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}s_k \ ; \ n=0,1,2,\dots \tag{5.1}$$

olsun. Eğer,

$$t_n = \frac{1}{2^n}\sum_{v=o}^{n}\binom{n}{v}\sigma_v \quad , \ t_n \rightarrow \sigma \ (n\rightarrow\infty) \tag{5.2}$$

ise, "$\{s_n\}$ dizisi σ değerine (A,E_1)-limitlenebilirdir" denir. Bu ifade,

$$t_n = \sum_{k=o}^{\infty} b_{nk}s_k \ ; \ b_{nk}=\frac{1}{2^n}\sum_{v=o}^{n}\binom{n}{v}a_{vk} \ , \ n=0,1,2,\dots$$

şeklinde formüle edilebilir.

Yukarıda, $\{s_n\}$ dizisini $\{t_n\}$ dizisine dönüştürecek şekilde tanımlanan B-metodu, bir dizi metodudur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart;

$$(b_{nk}) = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{v=o}^{n}\binom{n}{v}a_{vk}\right) \ ; \ n,k=0,1,2,\dots \tag{5.3}$$

matrisinin bir T-matrisi olmasıdır.

TEOREM 5.1:

$A=(a_{nk})$ bir T-matrisi ise, $B=(b_{nk})$'da bir T-matrisidir. Fakat bunun karşıtı herzaman doğru değildir.

İSPAT:

$A=(a_{nk})$ bir T-matrisi olsun. Bu taktirde,

$$s_n \longrightarrow s \quad (n\longrightarrow\infty) \quad \text{için} \quad \sigma_n \longrightarrow s \quad (n\longrightarrow\infty)$$

dur. E_1 regüler bir metod olduğundan her yakınsak diziyi, yakınsak olduğu değere limitleyecektir. O halde,

$$\sigma_n \longrightarrow s \quad (n\longrightarrow\infty) \text{ ise } t_n \longrightarrow s \quad (n\longrightarrow\infty)$$

dur. Bu; "A bir T-matrisi ise B de bir T-matrisi" olduğunu ispatlar. Bunun karşıtının genel olarak geçerli olmadığını karşıt bir örnek ile gösterelim.

$B=(b_{nk})$ matrisini;

$$b_{nk} = \begin{cases} \dfrac{2^{k-1}}{2^n}, & (0\leq k\leq n) \\ 0, & (k>n) \end{cases}$$

olarak alalım. A ve B matrisleri arasındaki bağıntı dolayısiyle $A=(a_{nk})$ matrisini, E_1-metodunun;

$$t_n = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\sigma_v \quad \text{ise} \quad \sigma_n = \sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v t_v$$

şeklinde tanımlanan ters dönüşümü ([9]) yardımiyle elde edilen,

$$a_{nk} = \sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v b_{vk} \quad ; \quad n,k=0,1,2,\ldots$$

ifadesini kullanarak hesab edelim. $B=(b_{nk})$ üçgensel bir matris olduğundan; $k>v$ için $b_{vk}=0$ dır. Buna göre,

$$a_{nk} = \sum_{v=k}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v \cdot \frac{2^{k-1}}{2^v}$$

$$= 2^{k-1}\left\{\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v} - \sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}\right\}.$$

Sağ taraftaki ilk toplamın değeri;

$$(a+b)^n = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}a^{n-v}b^v$$

Binom eşitliği gereğince (a=-1 , b=1 konulduğunda) 0 dır.İkinci toplam ise,

$$\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^v\binom{n}{v}=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}$$

dır.Bunu tüme varım yolu ile gösterelim.

(i) k=1 için 1=1 dir.

(ii) k-1 için $\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^v\binom{n}{v}=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}$ olduğunu kabul edelim.

(iii) k için (ii)'nin doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{n}{v}=\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^v\binom{n}{v}+(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}+(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$=(-1)^k\left[\binom{n}{k}-\binom{n-1}{n-k}\right]=(-1)^k\binom{n-1}{n-k-1}$$

elde edilir.Son ifadede (ii)'deki k-1 yerine k gelmiş bulunduğundan eşitliğin doğruluğu ispatlanmıştır.

Buna göre,

$$a_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n+1}(-2)^{k-1}\binom{n-1}{n-k} & , (0\leq k\leq n)\\ 0 & , (k>n)\end{cases}$$

olarak elde edilmiş olur.

$B=(b_{nk})$ matrisi;

(i) $\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|=\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{2^k}{2^{n+1}}\right|$

$$=\sup_n\left[\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\sup_n\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]=1$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}b_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{2^{n+1}}=0$ (her sabit k için)

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^{n+1}}) = 1$

şartlarını sağladığından bir T-matrisidir. Fakat $A=(a_{nk})$ matrisi için;

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} \left\{(-1)^{n+1}(-2)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}\right\}$$

limiti, her k için, mevcut bulunmadığından (gerçekten, herbir sabit k için mevcut ve sıfıra eşit bulunması gereken $\lim_{n\to\infty} a_{nk}$; meselâ k=1 için $a_{n1}=(-1)^{n+1}$ olup $\lim_{n\to\infty} a_{n1}$ mevcut değildir) bir T-matrisi değildir.

TANIM 5.2:

$A'=(a'_{nk})$ matrisi, Σu_n ($u_n=s_n-s_{n-1}$, $s_{-1}=0$) serisini, $\{\tau_n\}$ dizisine dönüştürsün. Yani,

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{nk} u_k \quad ; \quad n=0,1,2,... \qquad (5.4)$$

olsun. Eğer,

$$w_n = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\tau_v \quad , \quad w_n \to \tau \ (n\to\infty) \qquad (5.5)$$

ise, "Σu_n serisi τ değerine (A',E_1)-toplanabilirdir" denir. Bu ifade formal olarak,

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} b'_{nk} u_k \quad ; \quad b'_{nk} = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v} a'_{vk} \quad , \ n=0,1,2,...$$

şeklinde yazılabilir.

Burada, Σu_n serisini $\{w_n\}$ dizisine dönüştüren B'-metodu bir seri metodudur. Bu metodun regülerlik şartları bilinmektedir ([1], sf.66).

TEOREM 5.2:

B ve B'-metodlarının dual olmaları için gerek ve yeter şart A ve A'-metodlarının dual olmalarıdır.

İSPAT:

I.A ve A' dual olsunlar.Bu taktirde; A ve A' matrisleri arasında,

$$a_{nk}=a'_{nk}-a'_{n,k+1}$$

bağıntısı mevcuttur.

$$b_{nk} = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}a_{vk} = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}(a'_{vk}-a'_{v,k+1})$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}a'_{vk} - \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}a'_{v,k+1}$$

$$= b'_{nk}-b'_{n,k+1}$$

bulunur.O halde B ve B'-metodları dualdir.

II.B ve B' dual olsunlar.Bu halde B ve B' matrisleri arasında;

$$b_{nk}=b'_{nk}-b'_{n,k+1}$$

bağıntısı mevcuttur.

$$a_{nk} = \sum_{v=o}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v b_{vk} = \sum_{v=o}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v(b'_{vk}-b'_{v,k+1})$$

$$= \sum_{v=o}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v b'_{vk} - \sum_{v=o}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}2^v b'_{v,k+1}$$

$$=a'_{nk}-a'_{n,k+1}$$

elde edilir.Bu ise A ve A'-metodlarının dual olması demektir.

TEOREM 5.3:

A'-metodu regüler ise B'-metodu da regülerdir. Fakat bunun tersi herzaman doğru değildir.

İSPAT:

A ve A' iki dual metod olmak üzere, 4. bölümde gösterdik ki; "A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart; A''nün regüler olması"dır. Ayrıca B ve B'-metodlarının dual olduklarını kabul edelim.

I. Yukarıdaki ifade ile teorem 5.2'de, teorem 5.1'in I. kısmını gözönüne alırsak; A'nın A' duali ve B'nin B' duali regüler olurlar. Bu ise, "A' regüler ise B''nün de regüler" olması demektir.

II. Yine teorem 5.1 de gösterdik ki, öyle bir regüler B-metodu vardır ki, buna karşılık gelen A-metodu regüler değildir. Bu durumda, "A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart; A''nün regüler olması" gereğince; B'nin, B' duali regüler fakat A'nın, A' duali regüler olmayacaktır. Bu ise, regüler bir B'-metoduna karşılık, regülerlik şartlarını gerçeklemeyen bir A'-metodunun mevcut bulunduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

TEOREM 5.4:

$A=(a_{nk})$ matrisi, $n,k=0,1,2,\ldots$ için pozitif, ayrıca A ve A'-metodları dual olsunlar. $s=\{s_n\}$ dizisi pozitif ve azalmayan bir dizi ise; tanım 5.2 de verilen B'-metodu, A-metodundan daha kuvvetlidir.

İSPAT:

A-metodunun toplanabilirlik alanı U olsun. Teoremi ispat etmek için; öncelikle her sabit n ve her $s \in U$ için,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} b'_{nk} u_k = \lim_{p\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} (b'_{nk} - b'_{n,k+1}) s_k + b'_{np} s_p \right\} \qquad (5.3)$$

limitinin valığını göstermek gerekir.(3.11) bağıntısını ve b'_{nk}'nın tanımını gözönüne alarak,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} b'_{nk}u_k = \lim_{p\to\infty} \left\{ \sum_{k=o}^{p-1} (b'_{nk}-b'_{n,k+1})s_k + b'_{np}s_p \right\}$$

$$=\lim_{p\to\infty} \left\{ \sum_{k=o}^{p-1} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v}(a'_{vk}-a'_{v,k+1}) \right) s_k + \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} a'_{vp}s_p \right\}$$

$$=\lim_{p\to\infty} \left[\sum_{k=o}^{p-1} \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} a_{vk}s_k + \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} \left(\sum_{i=p}^{\infty} a_{vi} \right) s_p \right] \tag{5.9}$$

elde ederiz. $s\in U$ olduğundan, her n için $\sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}s_k$ serileri belirli bir σ_n değerine yakınsar. Bundan dolayı $n=0,1,2,\ldots$ için,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{i=p}^{\infty} a_{vi}s_i = 0 \quad . \tag{5.10}$$

(5.9)'da parantezdeki ifadenin ilk terimi $p\to\infty$ için σ'_n'e ve σ'_n de $n\to\infty$ için σ''ya yakınsar. Şu halde ikinci terimin $p\to\infty$ için sıfıra gittiğini göstermek yeter.

(5.10)'a göre,

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \left(\sum_{i=p}^{\infty} a_{vi} \right) s_p = \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \lim_{p\to\infty} \left[\left(\sum_{i=p}^{\infty} a_{vi} \right) s_p \right]$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \lim_{p\to\infty} \sum_{i=p}^{\infty} a_{vi}s_i = 0$$

bulunur. Madem ki B'-metodu her $s\in U'$,u topluyor, demek ki; $B'\supseteq A$ dır.

TEOREM 5.5:

Kabul edelim ki, A ve A'-metodları dual ve $n=0,1,2,\ldots$ için $\lim_{k\to\infty} a'_{nk}=0$ olsun. Bu taktirde, kısmi toplamlar dizisi sınırlı her $\sum u_k$ serisi için tanım 5.1 de verilen B-metodu,

$\acute{A}$-metodundan daha kuvvetlidir.

İSPAT:

$\acute{A}$-metodunun toplanabilirlik alanı F olsun. Teoremi ispat etmek için; öncelikle her sabit n ve her $u=(u_k)\in F$ için,

$$t_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} b_{nk} s_k \qquad (5.11)$$

limitinin mevcut olduğunu göstermeliyiz. A ve $\acute{A}$-metodları dual olduklarından, teorem 5.2 gereğince; tanım 5.1 ve tanım 5.2'deki B ve $\acute{B}$-metodları da dualdir. Ayrıca (3.11) bağıntısını ve b'_{nk}'nın tanımını kullanarak;

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} b_{nk} s_k = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} (b'_{nk} - b'_{n,k+1}) s_k \qquad (5.12)$$

$$= \frac{1}{2^n} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} \Big[\sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} (a'_{vk} - a'_{v,k+1}) \Big] s_k$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} (a'_{vk} - a'_{v,k+1}) s_k$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} \lim_{p\to\infty} \Big(\sum_{k=o}^{p} a'_{vk} u_k - a'_{v,p+1} s_p \Big)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=o}^{p} a'_{vk} u_k - \frac{1}{2^n} \sum_{v=o}^{n} \binom{n}{v} \lim_{p\to\infty} a'_{v,p+1} s_p$$

bulunur. $u=(u_k)\in F$ olduğundan dolayı, $\sum u_k$ serisi $\acute{A}$-metodu ile toplanabilir. Şayet $\sum u_k = s(\acute{A})$ ise, (5.12) ifadesinin sağ tarafında; ilk terim $p\to\infty$ için τ_n'e, τ_n de $n\to\infty$ için s'e yakınsar. O halde, teoremi ispat etmek için (5.12) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terimin sıfıra gittiğini göstermek yeter.

Hipotezden,

$$\lim_{p\to\infty} a'_{vp} = 0$$

idi.Bundan dolayı,

$$\lim_{p\to\infty} a'_{v,p+1} s_p = 0$$

olduğu açıktır.

6.BÖLÜM

Bu bölümde; bazı klasik toplama metodlarını tanıtarak,dual matrislerini hesab edeceğiz.Ayrıca bu metodların,ilgili dual metodlarına denk olma şartlarını araştıracağız.

TANIM 6.1 (Nörlund ortalaması):

$\{p_n\}$; pozitif sayıların, $P_n=p_1+\dots+p_n$ $(n=1,2,\dots)$; $p_1>0$ olmak üzere, $\dfrac{p_n}{P_n}\to 0$ $(n\to\infty)$ şartını sağlayan bir dizisi olsun.(N,p_n) Nörlund ortalaması;

$$t_m=\frac{p_m s_1+\dots+p_1 s_m}{P_m} \tag{6.1}$$

dönüşümü ile tanımlanır.Burada,

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-k+1}}{P_n}, & (k\le n)\\ 0, & (k>n)\end{cases}$$

dir ([8],sf.9).

Şimdi,(3.11) bağıntısını kullanarak $A=(a_{nk})$ matrisinin $B=(b_{nk})$ dual matrisini hesab edelim.

$$b_{nk}=\sum_{i=k}^{\infty}a_{ni} \quad \text{idi.}$$

$$b_{nk}=\sum_{i=k}^{n}\frac{p_{n-i+1}}{P_n}=\frac{1}{P_n}\left(p_{n-k+1}+p_{n-(k+1)+1}+\dots+p_1\right)$$

$$=\frac{1}{P_n}\left(p_{n-k+1}+p_{n-k}+\dots+p_1\right)=\frac{P_{n-k+1}}{P_n}$$

bulunur.Demek ki, $B=(b_{nk})$ dual matrisi;

$$b_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_{n-k+1}}{P_n}, & (k\le n)\\ 0, & (k>n)\end{cases}$$

dir. (N,p_n) ortalamasının, ilgili dual metoduna denk olması için; $B=(b_{nk})$ dual matrisinin, teorem 3.6'daki şartları gerçelemesi gerekir. Bunun için;

$$0 \leq b_{n,k+1} \leq q_n b_{nk} \quad , \quad n,k=0,1,2,\ldots$$

şartını sağlayan, $0<q_n<1$ olacak şekilde bir $\{q_n\}$ dizisinin varlığını göstermek yeter.

$$b_{n,k+1}=\begin{cases} \dfrac{P_{n-k}}{P_n} & , \ (k+1 \leq n) \\ 0 & , \ (k+1>n) \end{cases}$$

dir. Aşikâr olarak; $b_{nk}>0$ ve $b_{n,k+1}>0$ olup,

$$0 \leq b_{n,k+1} \leq q_n b_{nk}$$

eşitsizliğini sağlayan q_n sayıları vardır. Bunun için q_n'leri;

$$0<1-\frac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}} \leq q_n<1$$

olacak şekilde seçmek yeter. Şu halde (N,p_n) ve ilgili dual metodu denktirler.

TANIM 6.2 (Riesz ortalaması):

$P_n=p_1+\ldots+p_n$ $(n=1,2,\ldots)$; $p_1>0$ olmak üzere, $n\to\infty$ için $\dfrac{p_n}{P_n}\to 0$ şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi $\{p_n\}$ olsun. (R,p_n) Riesz ortalaması;

$$t_n=\frac{p_1 s_1+\ldots+p_n s_n}{P_n} \tag{6.2}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada,

$$a_{nk}=\begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} & , \ (k \leq n) \\ 0 & , \ (k>n) \end{cases}$$

dir ([8],sf.10).

Şimdi,$A=(a_{nk})$ Riesz matrisinin $B=(b_{nk})$ dual matrisini hesab edelim.

$$b_{nk}=\sum_{i=k}^{n} a_{ni}=\sum_{i=k}^{n}\frac{p_i}{P_n}$$

$$=\frac{1}{P_n}(p_k+p_{k+1}+\dots+p_n)=\frac{1}{P_n}(P_n-P_{k-1})$$

bulunur.Buna göre,$B=(b_{nk})$ dual matrisi;

$$b_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n-P_{k-1}}{P_n} & ,\ (k\le n)\\ 0 & ,\ (k>n)\end{cases}$$

dir.

Şimdi (R,p_n) ortalamasının,ilgili dual metoduna denk olması için,teorem 3.6'nın;

$$0\le b_{n,k+1}\le q_n b_{nk}$$

şartını sağlayan, $0<q_n<1$ kalacak şekildeki q_n sayılarının varlığını araştıralım.

$$b_{n,k+1}=\begin{cases}\dfrac{P_n-P_k}{P_n} & ,\ (k+1\le n)\\ 0 & ,\ (k+1>n)\end{cases}$$

dir.b_{nk} ve $b_{n,k+1}$ aşikâr olarak; $0<b_{n,k+1}<b_{nk}<1$ eşitsizliğini sağladıklarından,

$$0<b_{n,k+1}\le q_n b_{nk}<1$$

gerçekleyen q_n'ler vardır. q_n'leri;

$$0<\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}}\le q_n<1 \Rightarrow 0<\frac{P_n-P_k}{P_n-P_{k-1}}\le q_n<1$$

$$\Rightarrow 0<1-\frac{p_k}{P_n-P_{k-1}}\le q_n<1$$

kalacak şekilde seçmek, metodların denk olması için yeter.

TANIM 6.3 (Cesa'ro ortalamaları).

(i) (C,1) ortalaması (aritmetik ortalama):

$s_k = \sum_{v=o}^{k} a_v$ olmak üzere,

$$t_n = \alpha_n^{(1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{v=o}^{n} \binom{n-v}{0} s_v \qquad (6.3)$$

dönüşümü ile verilir ([8], sf.33).

Şayet, $t_n \to s$ $(n \to \infty)$ ise "$\{s_n\}$ dizisi s'e (C,1)-limitlenebilirdir" denir, $s_n \to s(C_1)$ yazılır. Burada, birinci mertebeden limitlemeye tekabül eden matris;

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

dir ([6], sf.175). Şimdi $B=(b_{nk})$ dual matrisini hesab edelim.

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{n} a_{ni} = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n-k}{n+1}$$

bulunur. Buna göre, $B=(b_{nk})$ dual matrisi;

$$b_{nk} = \begin{cases} \frac{n-k}{n+1} & , (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

olur. Şimdi bu matrisin, teorem 3.6'daki (3.14) şartını sağladığını gösterip, metodların denk olmasını temin eden $\{q_n\}$ dizisini tayin edelim.

Burada, $0 \leq b_{n,k+1} \leq b_{nk}$ olduğundan,

$$0 \leq b_{n,k+1} \leq q_n b_{nk} < 1$$

olacak şekilde q_n'ler vardır.

$$\Rightarrow 0< \frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} \leq q_n<1 \Rightarrow 0<1-\frac{1}{n-k} \leq q_n<1 \ , \quad (k\leq n-1)$$

seçersek, (C,1) ortalaması, dual metoduna denk olur,

(ii) (C,k) ortalaması:

$s_k=\sum_{v=0}^{k} a_v$ olmak üzere,

$$t_n=\alpha_n^{(k)}=\frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{v=0}^{n}\binom{n-v+k-1}{k-1}s_v \tag{6.4}$$

dönüşümü ile tanımlanır ([6], sf.32).

Burada k.mertebeden limitlemeye tekabül eden matris;

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{k(n-v+k-1)!\,n!}{(n-v)!\,(n+k)!} & , (k\leq n)\\ 0 & , (k>n)\end{cases}$$

dir. $B=(b_{nk})$ dual matrisi;

$$b_{nk}=\sum_{i=k}^{n}a_{ni}=\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!\,n!}{(n-v)!\,(n+i)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-v)!}\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!}$$

dir. O halde,

$$b_{nk}=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-v)!}\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!} & , (k\leq n)\\ 0 & , (k>n)\end{cases}$$

dir.

Şimdi, (C,k) ortalaması ile B dual metodunun denk olmasını sağlayan (3.14) şartına uygun q_n'leri tayin edelim,

$$0<b_{n,k+1}\leq q_n b_{nk}<1 \Rightarrow 0<\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}}\leq q_n<1$$

$$\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} = \frac{\frac{n!}{(n-v)!}\left\{\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!} - \frac{k(n-v+k-1)!}{(n+k)!}\right\}}{\frac{n!}{(n-v)!}\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!}}$$

$$= 1 - \frac{k(n-v+k-1)!}{(n+k)!\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!}} < 1$$

dır. Buna göre, q_n'leri;

$$0 \quad 1 - \frac{k(n-v+k-1)!}{(n+k)!\sum_{i=k}^{n}\frac{i(n-v+i-1)!}{(n+i)!}} \leq q_n < 1$$

kalacak şekilde seçersek metodların denk olmaları sağlanır.

TANIM 6.4 (Euler ortalamaları):

(i) (E,1) ortalaması:

$$s_k = \sum_{v=0}^{k} a_v \quad \text{olmak üzere,}$$

$$t_n = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}s_v \tag{6.5}$$

dönüşümü ile tanımlanır ([ ], sf.70-71).

Eğer $t_n \to s$ $(n \to \infty)$ ise, "$\{s_n\}$ dizisi s'e (E,1)-limitlenebilirdir" denir ve $s_n \to s(E_1)$ yazılır. Burada, birinci mertebeden limitlemeye tekabül eden matris;

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}, & (k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

olup, her n için $a_{nk} \geq 0$ dır. Şimdi $B=(b_{nk})$ dual matrisini hesap edelim.

$$b_{nk}=\sum_{i=k}^{n} a_{ni}=\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}-\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{2^n-\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}\right\}=1-\frac{\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}{2^n}$$

bulunur.O halde,

$$b_{nk}=\begin{cases}1-\dfrac{\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}{2^n} & ,\ (k\leq n)\\ 0 & ,\ (k>n)\end{cases}$$

dir.Şimdi, (E,1) ortalamasının B dual metoduna denk olup olmadığına bakalım.

$$\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}}=\frac{1-\dfrac{\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}{2^n}}{1-\dfrac{\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}{2^n}}=\frac{2^n-\sum_{i=o}^{k}\binom{n}{i}}{2^n-\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}<1$$

dir.Şu halde,

$$0<\frac{2^n-\sum_{i=o}^{k}\binom{n}{i}}{2^n-\sum_{i=o}^{k-1}\binom{n}{i}}\leq q_n<1$$

eşitsizliğini sağlayan q_n'ler mevcut olup, q_n'lerin bu şekilde seçilmesiyle; (E,1) ortalaması B dualine denk olur.

(ii) (E,p) ortalaması:

$s_k=\sum_{v=o}^{k} a_v$ olmak üzere,

$$t_n=\frac{1}{(p+1)^n}\sum_{v=o}^{n}\binom{n}{v}p^{n-v}s_v \quad ,\ (p>0) \qquad (6.6)$$

dönüşümü ile verilir ([2], sf.180).

Şayet $t_n \rightarrow s \ (n \rightarrow \infty)$ ise, "$\{s_n\}$ dizisi s'e (E,p)-limitlenebilirdir" denir, $s_n \longrightarrow s(E_p)$ yazılır. Burada p. mertebeden limitlemeye tekabül eden matris;

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{(p+1)^n} \binom{n}{k} p^{n-k} & , (k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

dir. $B=(b_{nk})$ dual matrisi;

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{n} a_{ni} = \frac{1}{(p+1)^n} \left\{ \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i} - \sum_{i=o}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i} \right\}$$

$$= \frac{1}{(p+1)^n} \left\{ (p+1)^n - \sum_{i=o}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i} \right\} = 1 - \frac{\sum_{i=o}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i}}{(p+1)^n}$$

bulunur. Buna göre,

$$b_{nk} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sum_{i=o}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i}}{(p+1)^n} & , (k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

dir. Aşikâr olarak,

$$0 < b_{n,k+1} \leq b_{nk} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} \leq q_n < 1$$

eşitsizliğini sağlayan q_n'ler vardır.

$$\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} = \frac{(p+1)^n - \sum_{i=o}^{k} \binom{n}{i} p^{n-i}}{(p+1)^n - \sum_{i=o}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i}} < 1$$

dır. O halde q_n'leri,

$$0 < 1 - \frac{\binom{n}{k} p^{n-k}}{(p+1)^n - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^{n-i}} \leq q_n < 1$$

kalacak şekilde seçersek; (E,p) ortalaması,b dual metoduna denk olur.

TANIM 6.5 (Euler-Knopp ortalaması):

$s_k = \sum_{v=0}^{k} a_v$ olmak üzere, r.mertebeden Euler-Knopp ortalaması;

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \tag{6.7}$$

dönüşümü ile tanımlanır, (E,r) ile gösterilir ([6], sf 17.).
Burada r.mertebeden limitlemeye tekabül eden matris;

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} & , (k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

dir. B=(b_{nk}) dual matrisi;

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{n} a_{ni} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i}$$

$$b_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} & , (k \leq n) \\ 0 & , (k > n) \end{cases}$$

dir.Şimdi,(3.14) şartını gerçekleyen q_n'lerin varlığını araştıralım.

$$\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} - \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k}}{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i}}$$

$$= 1- \frac{\binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k}}{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i}} < 1$$

dir. Şu halde;

$$0 < 1- \frac{\binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k}}{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i}} \leq q_n < 1$$

kalan q_n'ler mevcuttur. q_n'ler bu şekilde seçilirse; (E,r) ortalaması, ilgili dual metoduna denk olur.

TANIM 6.6 (Borel metodu):

$s=\{s_k\}$ dizisinin, $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla,

$$A_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!} s_k \tag{6.6}$$

şeklindeki dönüşümüne "Borel dönüşümü" denir [4].

Eğer, $A_n(s) \to a$ $(n\to\infty)$ ise, "$\{s_n\}$ dizisi a'ya B-limitlenebilirdir" denir. Şimdi $B=(b_{nk})$ dual matrisini hesap edelim.

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{ni} = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-n} \frac{n^i}{i!} = e^{-n}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^i}{i!}\right\}$$

$$= e^{-n}\left\{e^n - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^i}{i!}\right\} = \frac{e^n - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^i}{i!}}{e^n} \geq 0$$

bulunur. Buna göre,

$$b_{nk} = \frac{e^n - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^i}{i!}}{e^n}$$

dir. Borel metodunun, B dual metoduna denk olduğunu gösterelim.

$$0 < b_{n,k+1} \leq q_n b_{nk} \implies 0 < \frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} \leq q_n$$

$$\frac{b_{n,k+1}}{b_{nk}} = \frac{e^n - \sum_{i=o}^{k} \frac{n^i}{i!}}{e^n - \sum_{i=o}^{k-1} \frac{n^i}{i!}} < 1$$

olduğundan,

$$0 < \frac{e^n - \sum_{i=o}^{k} \frac{n^i}{i!}}{e^n - \sum_{i=o}^{k-1} \frac{n^i}{i!}} \leq q_n < 1$$

eşitsizliğini sağlayan q_n'ler vardır. q_n'ler bu şekilde seçilirse; Borel metodu, dual metoduna denk olur.

TANIM 6.7 (Abel metodu):

$s=\{s_k\}$ verilen bir dizi olsun. $|r|<1$ için $\sum r^v s_v$ mevcut (yani yakınsak) bulunsun. Bu takdirde,

$$\sigma(r) = \sum_{v=o}^{\infty} r^v (1-r) s_v \;, \; (0<r<1) \tag{6.9}$$

olarak tanımlanan dönüşüme "Abel dönüşümü" denir [4].

Eğer, $\lim_{r \to 1-o} \sigma(r) = a$ ise, "$\{s_k\}$ dizisi a'ya A-limitlenebilir-dir" denir. Burada,

$$a_{rv} = r^v (1-r)$$

dir. Şimdi bunun $B=(b_{rv})$ dual matrisini hesab edelim.

$$b_{rv} = \sum_{i=v}^{\infty} a_{ri} = \sum_{i=v}^{\infty} r^i (1-r)$$

$$= (1-r) \sum_{i=v}^{\infty} r^i = (1-r)\{r^v + r^{v+1} + r^{v+2} + \dots\}$$

$$= (1-r) r^v \{1 + r + r^2 + \dots\}$$

$$= (1-r) r^v \lim_{n \to \infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$=(1-r)r^{v}\frac{1}{1-r}=r^{v}$$

bulunur. O halde $b_{rv}=r^{v}$ dir. Şimdi bu matrisin, teorem 3,6'nın (3.14) şartını gerçeklediğini gösterelim.

$$0\leq b_{r,v+1}\leq q_{n}b_{rv}\quad,\quad n,v=0,1,2,\ldots$$

şartını sağlayan $0<q_n<1$ kalan q_n sayılarının varlığını göstereceğiz.

$$0\leq r^{v+1}\leq q_{r}r^{v}$$

olacak şekilde, $0<q_r<1$ eşitsizliğini sağlayan q_r sayıları vardır. Çünkü, $0<r<1$ idi. Buna göre,

$$r\leq q_{n}<1$$

almak, (3.14)'ü gerçeklemek için yeter. Bu suretle Abel metodu, E dual metoduna denk olur.

KAYNAKLAR

[1] COOKE,R.C.

Infinite matrices and sequence spaces.(London-1950)

[2] HARDY,G.H.

Divergent series.(Oxford-1949)

[3] KUTTNER,B.

On dual summability methods.Proc.Camb.Phil.Soc.(1972)

[4] LORENTZ,G.G.

Über limitierungsverfahren die von einem Stieltjes-Integral abhangen.Acta.Math.79.(1947)

[5] LORENTZ,G.G-ZELLER,K.

Summation of sequences and summation of series.Tubingen University.(1964)

[6] MADDOX,I.J.

Elements of functional analysis.Cambridge University Press.(1970)

[7] ÖZTÜRK,E.

On dual summability methods.Communications de la Faculté des Sciences de I'Université d'Ankara.(1978)

[8] PETERSEN,G.E.

Regular matrix transformations.McGraw-Hill Publishing Company Limited.(1966)

[9] PEYERİMHOFF,A.

Lectures on summabilitl.(New York-1969).

[10] YURTSEVER,B.

Yüksek matematiğe giriş.Cilt.2.Şirketi Mürettibiye Basımevi.(İstanbul-1965)

[11] BANACH,S.

Théorie des operations.