23

ALTMANİFOLDLARIN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ VE KİNEMATİĞİ ÜZERİNE

Hacı Bayram KARADAĞ

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN VE SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜLERİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav
Yönergesi'nin
Matematik Anabilim Dalı için öngördüğü
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

MALATYA
Şubat, 1989

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında

BİLİM UZMANLIĞI TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Başkan ______________________

Üye ______________________

Üye ______________________

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../ 1989

Prof.Dr. A.Nihat BOZCUK

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Doç.Dr.Sadık KELEŞ'e sonsuz şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

I. BÖLÜM

I.1 n-BOYUTLU ÖKLİD UZAYI E^n

I.1.1 Tanım (Afin Uzay): $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\Psi : A \times A \longrightarrow V$$

dönüşümü $P,Q \in A$ noktaları için $\Psi(P,Q)=\overrightarrow{PQ}$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

A1. $\forall\ P,Q,R \in A$ noktaları için $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$ dir.

A2. $\forall\ P \in A$ ve $\forall\ \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ}=\vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç ve Q noktasına uç noktası denir. Ayrıca A nın boyutu $\text{boy}A=\text{boy}V$ olarak tanımlanır.

A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. Eğer V de bir

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow IR$$

iç-çarpım işlemi tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da açı, diklik ve uzunluk gibi metrik özellikler tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı bir Öklid uzayı adını alır.

I.1.2 Tanım: E^n, n-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X olsun. E^n de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları $(x_1,\ldots,x_n)$ olsun.

$$x_i : E^n \longrightarrow IR$$

bileşenlerine E^n in i-yinci koordinat fonksiyonu denir.

IR^n standard reel afin uzay olmak üzere IR^n de bir

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$$

iç-çarpımı $\forall\ X,Y \in IR^n$, $X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ için

$$\langle,\rangle(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanan iç-çarpıma IR^n de standard iç-çarpım veya Öklid iç-çarpımı denir. Standard iç-çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen IR^n afin uzayına n-boyutlu standard Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir(Hacısalihoğlu 1980).

I.1.3 <u>Tanım</u> (IR^n de uzaklık fonksiyonu):n-boyutlu bir reel iç-çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı E^n olsun. Bir

$$d:E^n x E^n \longrightarrow IR$$

fonksiyonu $\forall$ $X,Y\in E^n$ için, V deki norm $\|\ ,\ \|$ olmak üzere,

$$d:(X,Y) \longrightarrow d(X,Y)=\|\overrightarrow{XY}\|$$

biçiminde tanımlanan d ye E^n in X ile Y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu adı verilir. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan bu uzaklık fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir.

I.1.4 <u>Tanım</u>: Bir n-boyutlu reel iç-çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$ nokta n+1—lisi için eğer $\{\overrightarrow{p_0p_1},\ldots,\overrightarrow{p_0p_n}\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{p_0,\ldots,p_n\}$ çatısına bir dik çatı (veya Öklid çatısı) denir. Böyle bir çatıda tanımlanan $\{x_1,\ldots,x_n\}$ koordinat sistemine dik koordinat sistemi (veya Öklid koordinat sistemi) denir. Bu sistemdeki

$$x_i:E^n \longrightarrow IR,\ 1\le i\le n$$

koordinat fonksiyonlarına Öklid koordinat fonksiyonları denir.

I.1.5 <u>Tanım</u> (izometri): $E_1{}^n$ ve$E_2{}^n$, sırası ile, V_1 ve V_2 n-boyutlu iç-çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayları olsunlar. Bir

$$f:E_1{}^n \longrightarrow E_2{}^n$$

afin dönüşümü $\forall\ \alpha,\beta\in V_1$ için

$$\langle\psi(\alpha),\psi(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$$

olacak şekilde bir

$$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri denir (Hacısalihoğlu 1980)

I.1.1 Teorem: Bir $f:E_1^n \longrightarrow E_2^n$ dönüşümü izometri ise,

i. $d(f(A),f(B))=d(A,B),\ \forall\ A,B\in E_1^n$;

ii. f bire-bir ve üzerinedir;

iii. E_1^n ve E_2^n Öklid uzaylarındaki dik koordinat sistemleri, sırası ile, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ve $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ise f izometrisi , $A=[a_{ij}]\in O(n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & c_1 \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & c_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir (Hacısalihoğlu 1980).

I.2 TOPOLOJİK MANİFOLDLAR

I.2.1 Tanım (Topoloji): X bir cümle olsun. X in altcümlelerinin bir kolleksiyonu τ olsun. τ kolleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji adı verilir (Hacısalihoğlu 1983)

T1. $X, \emptyset \in \tau$,

T2. $\forall A_1, A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

T2. $A_i \in \tau$, $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

I.2.2 Tanım (Topolojik Uzay): Bir X cümlesi üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.

I.2.3 Tanım (Homeomorfizm): E^n, n-boyutlu Öklid uzayında iki açık altcümle U ve V olmak üzere

$$f:U \longrightarrow V$$

fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli, tersi var ve tersi de sürekli ise bir homeomorfizm adını alır. Bu durumda U ile V ye homeomorfik iki altcümle denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.4 Tanım (Hausdorff Uzayı): X bir topolojik uzay olsun. X in farklı P ve Q noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan U_P ve U_Q açık altcümleleri $U_P \cap U_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.5 Tanım (Topolojik manifold): M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n-boyutlu topolojik manifold veya kısaca topolojik n-manifold denir (Hacısalihoğlu 1983)

M1. M bir Hausdorff uzayıdır.

M2. M nin her bir açık altcümlesi E^n e veya E^n in bir açık altcümlesine homeomorftur.

M3. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

I.2.6 Tanım (Altmanifold): E^n in bir altcümlesi M olsun. Eğer $\forall$ $X \in M$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, M ye E^n in bir k-boyutlu altmanifoldu denir;

i. M de X noktasını ihtiva eden bir U açık cümlesi mevcut ve bir $V \subset E^n$ açık cümlesi ile U arasında

$$h: U \subset M \longrightarrow V \subset E^n$$

diffeomorfizmi vardır.

ii. $h(U \cap M) = V \cap (E^k \times \{0\}) = \{y \in V \mid y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\}$ yani h diffeomorfizmi altında $U \cap M$ ile $V \cap (E^k \times 0)$ aynıdır (Hicks 1974).

I.2.7 Tanım: E^n n-boyutlu Öklid uzayının açık bir altcümlesi U olmak üzere bir

$$f: U \longrightarrow IR$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından (k-yıncı sınıftan) diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^k(U, IR)$ ile gösterilir.

I.2.8 Tanım (Diferensiyellenebilir dönüşüm): E^n, n-boyutlu Öklid uzayının iki açık altcümlesi U ve V olsun. Bir

$$\begin{aligned} F: U &\longrightarrow V \\ X &\longrightarrow F(X) = (f_1(X), \ldots, f_n(X)) \end{aligned}$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i: U \longrightarrow IR, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler. F fonksiyonu da U dan V ye C^k sınıfından bir fonksiyon olur ve

$$F \in C^k(U, V)$$

ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.9 <u>Tanım</u> (Tanjant uzayı): n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir (n-1) manifold M olsun. $P \in M$ başlangıçlı bir $\vec{PQ}=\vec{V}$ vektörü verildiğinde $(P,\vec{V})$ ikilisine M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve kısaca $\vec{V}_P$ ile gösterilir. P noktasındaki bütün tanjant vektörlerin cümlesi $T_M(P)$ olmak üzere,

$$\{T_M(P),\oplus,IR,+,.,\odot\}$$

altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M nin P noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_M(P)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.10 <u>Tanım</u> (Vektör alanlarının uzayı): E^n de bir (n-1)-manifold M olmak üzere ,

$$X: M \longrightarrow \bigcup_{P\in M} T_M(P)$$
$$P \longrightarrow X(P)=X_P \in T_M(P)$$

şeklinde tanımlanan X operatörüne M üzerinde bir vektör alanı denir, öyleki,

$$\pi o X: M \longrightarrow M$$

bir özdeşlik dönüşümüdür. Burada

$$\pi: \bigcup_{P\in M} T_M(P) \longrightarrow M$$

dönüşümü $\pi(X_P)=P$, $X_P \in T_M(P)$ şeklinde tanımlanmıştır. M üzerinde bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\{\chi(M),\oplus,IR,+,.,\odot\}$$

altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M üzerinde vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\chi(M)$ ile gösterilir.

I.2.11 <u>Tanım</u> (Diferensiyellenebilir eğri): M bir C^∞manifold ve $I \subseteq IR$ bir açık aralık olsun. $\alpha: I \longrightarrow M$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise α ya M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğridir denir (Matsushima 1972).

I.2.12 <u>Tanım</u> (Adi türev): E^n de bir eğri boyunca bir Y vektör alanının türevi eğrinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\frac{dY}{dt} = \frac{DY}{dt} = \overline{D}_T Y$$

şeklindedir (Bootby 1975)

I.2.13 Tanım (E^n de hiperyüzey): E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1)-boyutlu bir yüzey veya (n-1)—yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$\{M = X \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{dif.bilir} IR \text{ , U bir açık altcümle, f regüler}\}$$
$$X \longrightarrow f(X) = C$$

biçiminde tanımlanır. n>3 olması durumunda M ye bir hiperyüzey denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.14 Tanım (Kovaryant türev): E^n de bir manifold M ve M üzerinde bir tanjant vektör alanı Y olsun. Y nin M üzerinde bir α eğrisi boyunca kovaryant türevi, α nın hız vektörü $\dot{\alpha}=T$ olmak üzere

$$T\left(\frac{dY}{dt}\right) = \frac{DY}{dt} = \overline{D}_{\dot{\alpha}} Y = \overline{D}_T Y$$

şeklinde tanımlanır (Bootby 1975).

I.2.15 Tanım (Birim normal vektör alanı): E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı {N} ise{N}ye M nin birim normal vektör alanı denir (Hicks 1974). Bunlardan biri {N} ise diğeri {-N} dir.

I.2.16 Tanım (Riemann manifoldu): M bir C^{∞} manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^{∞} fonksiyonların halkası $C^{\infty}(M,IR)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M,IR)$$

şelklinde bir C^{∞} iç-çarpım fonksiyonu tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu 1983). Burada $\langle , \rangle$'e M üzerinde iç-çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir.

I.2.17 Tanım (Koneksiyon): M bir C^{∞} menifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\bar{D}: \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \bar{D}(X,Y)=\bar{D}_X Y$$

fonksiyonu için

1. $\forall\, X,Y,Z\in(M)$, $\forall\, f,g\in C^{\infty}(M,IR)$ için

$$\bar{D}_{fX+gY}Z=f\bar{D}_X Z+g\bar{D}_Y Z$$

2. $\forall\, X,Y\in\chi(M)$, $\forall\, f\in C^{\infty}(M,IR)$ için

$$\bar{D}_{fX}Y=X|f|Y+f\bar{D}_X Y$$

3. $\bar{D}$, C^{∞} sınıfındandır.

4. M nin herbir A bölgesi üzerindeki herbir C^{∞} sınıfından X,Y vektör alanları için

$$\bar{D}_X Y-\bar{D}_Y X=|X,Y|$$

5. $\forall\, X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$X|\langle Y,Z\rangle|=\langle\bar{D}_X Y,Z\rangle+\langle Y,\bar{D}_X Z\rangle$$

olmak üzere sadece 1 ve 2 şartları sağlanıyorsa $\bar{D}$'ye M üstünde genel koneksiyon $\bar{D}_X$'e de X'e göre kovaryant türev operatörü denir. Eğer 1, 2, 3, 4, 5 şartlarının tümü birden sağlanıyorsa, $\bar{D}$ fonksiyonuna M üstünde bir Riemann koneksiyonu ve $\bar{D}_X$'e de X'e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.18 Tanım (Şekil operatörü=Weingarten dönüşümü): E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n deki koneksiyon D olmak üzere, $\forall\, X\in\chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$X \longrightarrow S(X)=D_X N$$

I.2.22 Tanım (Asli eğrilik): E^n de bir hiperyüzey M ve

$$S:\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü de M üzerinde şekil operatörü olmak üzere bir $P \in M$ noktasındaki S nin karakteristik değerlerine M nin bu noktadaki asli eğrilikleri, bu karakteristik değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir (Hicks 1974).

I.2.23 Tanım (Umbilik nokta): E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde

$$\begin{aligned} S:\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ X &\longrightarrow S(X) = D_X N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan şekil operatörüne bir $P \in M$ noktasında karşılık gelen matris, $\forall\ X_P \in T_M(P)$ dorultusu için

$$S(X_P) = X_P, \text{ yani } S = I_{n-1}$$

şeklinde bir skalar matris ise $P \in M$ ye bir umbilik nokta denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.2.24 Tanım (Düzlemsel nokta=Flat nokta):

$$\begin{aligned} S:\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ X &\longrightarrow S(X) = D_X N \end{aligned}$$

şekil operatörü bir $P \in M$ noktasında $\forall\ X_P \in T_M(P)$ doğrultusu için $S(X)=0$, yani $S=0$, ise P noktasına M nin bir düzlemsel (=flat) noktasıdır denir (Hacısalihoğlu 1983).

Herbir flat nokta aynı zamanda bir umbilik noktadır. Bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani herbir umbilik nokta flat nokta olmayabilir.

I.3 ŞERİTLER TEORİSİ

I.3.1 Tanım (Yüzey şeridi): E^3 de bir yüzey M ve M nin üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin noktaları ile bu noktalardaki yüzey teğetlerinin teşkil ettiği geometrik şekle M nin verilen eğri boyunca yüzey şeridi denir ve (α, M) şeklinde gösterilir (Keleş 1982).

I.3.2 Tanım (Şerit üç ayaklıs): $M \subset E^3$ de bir α eğrisi verilsin. $\alpha'(s)=T$ ve $\alpha(s)$ noktasında M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ise

$$\eta = N \wedge T$$

dir. Böylece elde edilen $\{T, \eta, N\}$ ortonormal vektör alan sistemine şerit üç ayaklısı denir (Keleş 1982).

Şerit vektör alanlarının türev denklemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\eta} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \eta \\ N \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. a, b ve c değerlerine (α, M) şeridinin diferensiyel invaryantları denir. Burada c ye şeridin geodezik eğriliği, b ye normal eğriliği va a ya da geodezik torsionu denir.

I.3.3 Tanım (Eğrilik şeridi): E^3 de bir (α, M) şeridi verilsin. Bu şeridin geodezik torsionu sıfır, yani $a=0$, ise (α, M) ye bir eğrilik şeridi denir (Keleş 1982).

E^n de bir hiperyüzey M ve M de bir eğri $\alpha : I \longrightarrow M \subset E^n$ olsun. (α, M) eğri-hiperyüzey ikilisine E^n de bir şerit denir. Yay parametresi ile verilmiş olan α eğrisinin Frenet n-ayaklısı

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$$

ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasında birinci vektörü $V_1(\alpha(s))$ olan; ortonormal pozitif yönlü α eğrisinin noktalarına oturtulmuş çatıların cümlesini $F_o^{\perp}$ ile gösterelim. $F_o^{\perp}$ in bir elemanını öyle seçelimki;

$$F=(\alpha(s);Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$$

ve

$$\{Z_1(\alpha(s)),Z_2(\alpha(s)),\ldots,Z_{n-1}(\alpha(s))\}$$

sistemi $T_m(\alpha(s))$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı ve $Z_n(\alpha(s))$ de, α eğrisi boyuncahiperyüzeyin birim normal vektör alanı olsun. Burada $Z_1=V_1$ dir. Z_i, $1\le i\le n$, vektör alanları

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$$

ortonormal bazı cinsinden

$$Z_i=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde yazılır. $[Z_1,\ldots,Z_n]^T=Z$ ve $[\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}]=E$ dersek

$$Z=GE,\ G\in O(n)$$

olur. α eğrisi boyunca bu matrislerin türevleri alınır düzenlenirse

$$\frac{dZ}{ds}=\Omega Z\ ,\ \Omega^T=-\Omega$$

elde edilir. Buda matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{dZ_1}{dt} \\ \frac{dZ_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dZ_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{1n} \\ -t_{12} & 0 \ldots & t_{2n} \\ & & \\ -t_{1n} & -t_{2n} \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \\ Z_n \end{bmatrix}$$

I.3.4 <u>Tanım</u>: $t_{ij}: I \longrightarrow IR$

$s \longrightarrow t_{ij}(s)$, $1\le i,j\le n$,

fonksiyonlarına (α, M) eğri-hiperyüzey ikilisinin(şeridin) yüksek mertebeden eğrilik fonksiyonları ve $t_{ij}(s)$ e de $\alpha(s)$ noktasında (α, M) nin yüksek mertebeden eğriliği denir.

I.4 RİEMANN MANİFOLDLARI İÇİN ALTMANİFOLDLAR

I.4.1 Tanım (Genelleştirilmiş Gauss denklemi): n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir altmanifold M olsun. $\chi(M)$ nin $\chi(E^n)$ deki ortogonal komlemanı $\chi(M)^\perp$ ve E^n in Riemann koneksiyonu D, M nin Riemann koneksiyonu $\overline{D}$ olsun. Bu taktirde

$$\chi(E^n) = \chi(M) \oplus \chi(M)^\perp$$

eşitliği gereğince, C^∞ olan $\forall$ $X,Y\in\chi(M)$ için yazılabilen

$$D_X Y = \overline{D}(X,Y) \oplus V(X,Y),\ \overline{D}(X,Y)\in\chi(M),\ V(X,Y)\in\chi(M)^\perp$$

eşitliğine genelleştirilmiş Gauss denklemi denir (Hicks 1974).

Buradaki $\overline{D}(X,Y)$ ve $V(X,Y)$ bileşenlerine $D_X Y$ nin sırası ile, teğetsel ve normal bileşenleri denir ve

$$\overline{D}(X,Y) = \overline{D}_X Y = \text{teğ}(D_X Y)$$
$$V(X,Y) = \text{nor}(D_X Y)$$

ile gösterilir

I.4.2 Tanım (Weingarten denklemi): Eğer M nin herhangi bir normal vektör alanı η ise, butaktirde

$$D_X \eta = -(A_\xi(X)) + \overline{D}_X^\perp \eta$$

dir. Bu eşitliğe M nin η normal vektör alanına göre Weingarten denklemi denir (Chen 1973).

Burada; A_ξ, M üzerinde $T_M(X) \longrightarrow T_M(X)$ ye self—adjoint lineer bir dönüşüm ve $\overline{D}^\perp$ ise $\chi(M)^\perp$ normal uzayında bir metrik koneksiyondur. Bundan sonra A_ξ notasyonunu, lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerin matrisleri için kullanacağız.

I.4.3 Tanım (Normal paralel vektör alanı): M nin η normal vektör alanı $\forall$ $X\in\chi(M)$ için

$$\overline{D}_X^\perp \eta = 0$$

ise η normal vektör alanına $\chi(M)^{\perp}$ de paraleldir denir (Chen 1973).

X ve Y, M manifoldu üzerindeki vektör alanları, ξ da normal vektör alanı olsun. E^n in standard metrik tensörü de $\langle \, , \, \rangle$ olmak üzere Gauss ve Weingarten denklemlerinden;

$$\langle D_X Y, \xi \rangle = \langle V(X,Y), \xi \rangle$$

ve

$$\langle D_X Y, \xi \rangle = \langle A(X), Y \rangle$$

elde edilir.

I.4.1 Teorem: E^n n-boyutlu Öklid uzayında m-boyutlu bir altmanifold M olsun. Ozaman

$$\overline{D}: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \overline{D}_X Y = \text{teğ}(D_X Y)$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu M nin Riemann koneksiyonudur (Hacısalihoğlu 1983)

I.4.4 Tanım (İkinci temel tensör= Genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü): n-boyutlu bir Riemann manifoldu E^n ve E^n in m-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Ozaman

$$V: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow V(X,Y) = D_X Y - \overline{D}_Y X$$

şeklinde tanımlı $\chi(M)^{\perp}$ değerli simetrik, 2-kovaryant tensöre M nin ikinci temel tensörü veya genelleştirilmiş Weingarten denklemi denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.4.5 Tanım (İkinci temel formlar): E^n, n-boyutlu Öklid uzayında m-boyutlu bir altmanifold M olsun. Ozaman $\chi(M)^{\perp}$ in

$$\Psi = \{N_1, \ldots, N_{n-m}\}$$

ortonormal bazı yardımıyla, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$B_i(X,Y) = \langle V(X,Y), N_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq n-m$$

I.4.6 <u>Tanım</u> (i-yinci Weingarten dönüşümü): E^n, n-boyutlu Öklid uzayında m-boyutlu bir altmanifold M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı

$$\Psi = \{ N_1, \ldots, N_{n-m} \}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_i : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ X &\longrightarrow S_i(X) = \tan D_X N_i, \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı S_i fonksiyonuna M nin Ψ ye göre i-yinci Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.4.2 <u>Teorem</u>: n-boyutlu bir Riemann manifoldu E^n ve E^n in bir m-boyutlu altmanifoldu M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazına göre M nin i-yinci Weingarten dönüşümü S_i ve ikinci temel formları $B_1, \ldots, B_{n-m}$ ise,

i. $B_i(X,Y) = -\langle S_i(X), Y \rangle, \ \forall X, Y \in \chi(M)$

ii. $V(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n-m} \langle S_i(X), Y \rangle N_i, \ \forall X, Y \in \chi(M)$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

I.5 E^n DE HAREKETLER

I.5.1 Tanım: n-boyutlu E^n Öklid uzayının izometrilerinden birisi f olsun. E^n deki bir $\{x_1,\ldots,x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi, $A\in O(n)$, yani det $A = \mp 1$ ve $a\in IR^n_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & a \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir hareket adı verilir. f hareketine , det A =+1 ise direkt hareket, det A = -1 ise karşıt hareket denir (Hacısalihoğlu 1980).

I.5.1 Teorem: n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve E^n deki bir dik koordinat sistemi $\{x_1,\ldots,x_n\}$ olsun. $\{x_1,\ldots,x_n\}$ e göre

$$\begin{bmatrix} A & a \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise $A\in SO(n)$ matrisi için det A, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ dik koordinat sisteminin E^n deki seçilişinden bağımsızdır (Hacısalihoğlu 1980).

I.5.2 Teorem: E^n in bütün hareketleri gurubu R(n) ise R(n) cümlesi, dönüşümlerin bileşimi işlemine göre bir guruptur (Hacısalihoğlu 1980).

I.5.2 Tanım: E^n Öklid uzayının hareketlerinin gurubu olan R(n)'e E^n in hareketleri gurubu ve $\forall$ $R\in R(n)$ hareketine de E^n in bir katı hareketi denir(Hacısalihoğlu 1983).

R(n) katı hareketler cümlesini ikiye ayırabiliriz:

i. $D(n) = \{ f \mid f: E^n \longrightarrow E^n$, f direkt hareket $\}$ ve

ii. $K(n) = \{ f \mid f: E^n \longrightarrow E^n$, f karşıt hareket $\}$. Burada

$$R(n) = D(n) \cup K(n)$$

dir.

I.5.3 **Tanım:** E^n, n-boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(0) = 0$ olacak şekilde bir $0 \in E^n$ noktası varsa f ye 0 noktası etrafında E^n in bir dönmesi denir. Eğer f bir direkt hareket ise f ye direkt dönme, karşıt hareket ise f ye karşıt dönme denir.

I.5.3 **Teorem:** E^n de başlangıç noktası 0 olan bir dik koordinat sistemi $x_1,\ldots,x_n$ olsun. $f:E^n \longrightarrow E^n$ izometrisi için:

i. 0 noktası etrafındaki bir dönme f ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$Y = AX$$

şeklindedir, burada $A \in O(n)$ ve $X,Y \in IR^n_1$ dir.

ii. f bir direkt dönmedir $\Longleftrightarrow$ $Y = AX$ ve $A \in SO(n)$ dir (Hacısalihoğlu 1980).

I.5.4 **Tanım** (Ortogonal dönüşüm): V, bir n-boyutlu iç-çarpım uzayı olmak üzere bir

$$A:V \longrightarrow V$$

reel lineer dönüşümü $\forall\, X \in V$ için

$$< A(X),A(Y) > = < X,Y >$$

bağıntısını sağlıyor ise A ya bir ortogonal dönüşüm denir ve $O(n)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1980).

$O(n)$ cümlesi dönüşümlerin bileşimi işlemine göre bir guruptur.

I.5.4 **Teorem:** E^n deki

$$< X,Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç-çarpımını koruyan ortogonal gurup $O(n)$ ile $0 = (0,\ldots,0)$ noktasını sabit bırakanhareketlerin grubu(dönme grubu) $R(n)$ eşlenebilir (Hacısalihoğlu 1980).

I.5.5 **Tanım** (Öteleme): E^n de bir f izometrisi için $X = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ ve $a_1,\ldots,a_n \in IR$ olmak üzere

$$T : E^n \longrightarrow E^n$$
$$X \longrightarrow T(X) = (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$$

olarak tanımlanan T dönüşümüne E^n in bir ötelemesi denir. Böylece şu tanımı verebiliriz.

I.5.6 <u>Tanım</u>: E^n, n-boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall$ $X \in E^n$ için $f(X) = X + a$ olacak şekilde bir tek $a = (a_1, \ldots a_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in a ile belirtilen bir ötelemesi denir.

I.5.5 <u>Teorem</u>: E^n de başlangıç noktası 0 olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, \ldots x_n\}$ olsun. $f : E^n \longrightarrow E^n$ izometrisi $a = (a_1, \ldots, a_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olsun. f nin dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} Y \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & a \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$Y = X + a$$

dir, yani f bir harekettir(Hacısalihoğlu 1980).

II. BÖLÜM

II.1 E^n DE 1-PARAMETRELİ HAREKET

II.1.1 Tanım (1-parametreli hareket): $I \subseteq IR$ sıfırı ihtiva eden açık veya kapalı bir aralık olsun. $I \subseteq IR$ deki değişken t ve E^n in direkt hareketler grubu $D(n)$ olmak üzere elemanları

$$\begin{bmatrix} Y \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_t = \begin{bmatrix} A(t) & a(t) \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{II.1.1}$$

ile verilen $\{f_t\}$ cümlesine E^n in bir 1-parametreli hareketi denir. Burada $A(t) \in SO(n)$ değerli ve $a(t) \in IR^n{}_1$ değerli C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca $X, Y \in IR^n{}_1$ tipinde reel matrisler ve t zaman parametresidir (Hacısalihoğlu 1974).

Ohalde f_t yi I dan E^n ye diferensiyellenebilir dönüşüm olarak düşünebiliriz. (II.1.1) matrisinde t=0 alınırsa

$$f_o = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{II.1.2})$$

özdeşlik dönüşümü elde edilir.

Keyfi bir $X \in E^n$ noktası için (II.1.1) denklemini

$$f_t(X) = A(t) + a(t) \qquad (\text{II.1.3})$$

yazabiliriz. Kısalığın hatırı için $A(t)$ ve $a(t)$ yerine çoğu zaman A ve a kullanılacaktır. Ohalde (II.1.3) ifadesi

$$Y = AX + a, \quad A \in SO(n), \quad a \in IR^n{}_1 \qquad (\text{II.1.4})$$

şeklinde yazılır.

Şimdi n-boyutlu bir $H^1 = \{0; E^n\}$ uzayını göz önüne alalım. Bu uzayın noktalarını hareket altında sabit olarak düşünelim. Diğer taraftan $H = \{O;E^n\}$ ile hareket altında sabit olmayan bir diğer hareketli uzayı ele alalım.

$Y = AX + a$ ile verilen bir genel harekette sabit bir $X \in H$ noktasının resmi Y olsun. Bu genel harekette AX kısmına hareketin dönme kısmı ve a ya da hareketin öteleme kısmı denir.

f_t dönüşümü bir izometri olduğundan f_t nin inversi daima mevcuttur. $\forall t \in I$ için f_t inversini f_t^{-1} ile gösterelim. Buna göre; $X = A^{-1}Y - A^{-1}a$ olup f_t^{-1} matris formunda

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_t^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.1.5)}$$

şeklinde yazılır.

Bir $X \in E^n$ noktasının f_t altındaki yörüngesi E^n de bir eğridir. Bu eğriyi (y_t) şeklinde gösterelim. Buna göre (y_t) eğrisinin herhangi bir $Y(t)$ noktası için,

$$Y(t) = f_t(X) = A(t)X(t) + a(t)$$

dir. (y_t) yörünge eğrisinin teğet vektör alanı

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} = \frac{df_t(X)}{dt} \qquad \text{(II.1.6)}$$

olup, burada $Y(t)=f_t(X)$ dir. f_t bir izometri olduğundan $X=f_t^{-1}(Y(t))$ olarak bulunur. Bulunan bu değerler (II.1.6) da yerine yazılırsa

$$\dot{Y} = \frac{df}{dt} f_t^{-1}(Y(t)) \qquad \text{(II.1.7)}$$

elde edilir. $\frac{df}{dt}$ ve f_t^{-1} değerleri (II.1.7) de yerine yazılırsa

$$\frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega_t & V_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.1.8)}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\Omega = \frac{d\lambda}{dt}\lambda^{-1}, \quad V_t = -\frac{d\lambda}{dt}\lambda^{-1}a + \frac{da}{dt} \qquad \text{(II.1.9)}$$

dir. Ohalde şu sonucu verebiliriz.

II.1.1 **Sonuç:** Y nin teğet vektör alanı $\dot{Y}$ olmak üzere

$$\dot{Y} = \Omega_t Y + V_t$$

dir.

II.1.2 **Tanım** (Ani hareket): (II.1.8) eşitliğiyle verilen harekete t anındaki ani hareket denir (Nomizu 1977).

(II.1.8) ifadesinde $\Omega_t = 0$ ve $V_t = 0$ ise λ=sabit ve a=sabit olarak elde edilir. Bu ise hareketin olmaması demektir. Ohalde şu tanımı verebiliriz.

II.1.3 **Tanım** (Ani duraklama=Standstill): (II.1.8) eşitliği ile verilen ani harekette $\Omega_t = 0$ ve $V_t = 0$ ise ani harekete ani duraklama denir (Nomizu 1977).

II.1.4 **Tanım** (Ani öteleme(kayma)=Translation): (II.1.8) eşitliği ile verilen ani hareketinde eğer $\Omega_t = 0$ ve $V_t \neq 0$ ise ani harekete ani öteleme(kayma) denir.

Bu durumda bütün Y ler için $(X_t)_y = \dot{Y} = V_t$ dir. Yani bütün noktalar t anında aynı hıza sahiptir.

II.1.5 **Tanım** (Ani dönme ve ani dönme merkezi): $\dot{Y}|_{y_o} = 0$ olacak şekilde bir $y_o \in E^n$ noktası varsa ani harekete ani dönme ve y_o noktasına da ani dönme merkezi denir (Nomizu 1977).

Sadece öteleme ve sadece dönmeden kaçınmak için $\Omega_t \neq 0$ ve $V_t \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. n=3 durumunda ani dönme bir eksene sahiptir, yani $(X_t)_{y_o} = \dot{Y}|_{y_o} = 0$ olacak şekilde bütün y_o noktalarını ihtiva eden bir doğrudur. Buradan şu sonucu verebiliriz.

II.1.2 **Sonuç:** $(X_t)_y = (X_t)_{y_o}$ ise $\Omega_t(y - y_o) = 0$ dır.

İspat: Sonuç (II.1.1) den açıktır.

II.1.3 Sonuç: Ω_t bir anti-simetrik matristir.

İspat: $A \in SO(n)$ olmak üzere,

$$AA^T = I_n$$

dir. Her iki tarafın t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{dA}{dt} A^T + A \frac{dA^T}{dt} = 0$$

olur. Buradan (II.1.9) göz önüne alınırsa

$$\Omega_t = - \Omega^T_t$$

olarak bulunur. Dolayısıyla Ω_t anti-simetriktir.

Şimdi $Y = AX + a$ ile tanımlanan bir 1-parametreli hareketin $Y = AX$ dönme kısmını ele alalım. $X \in H$ sabit olmak üzere $Y = AX$ dönme kısmının t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{Y} = \dot{A}X$$

elde edilir. Böylece

$$\dot{Y} = \Omega_t Y$$

olarak bulunur. Ω_t anti-simetrik matrisine A ya karşılık gelen hareketin Darboux matrisi denir. H hareketli uzayında haraketin Darboux matrisi de

$$\Delta_t = A^{-1}\Omega_t$$

dir.

II.2 1-PARAMETRELİ HAREKETLER DE HIZ VE İVME

H hareketli uzayındaki değişken bir X noktasının H hareli ve H^1 sabit uzaylarına göre hızlarını araştıralım. (II.1.4) hareketinde t ye göre diferensiyel alınırsa

$$\dot{Y} = \dot{A}X + \dot{a} + A\dot{X} \qquad \text{(II.2.1)}$$

elde edilir. Yer vektörü $\vec{X}$ olan H hareketli uzayındaki bir X noktası için aşağıdaki tanımları verebiliriz.

II.2.1 **Tanım:** (II.2.1) eşitliğindeki $\dot{Y}$ ya Mutlak(Absolute) hız, $\dot{A}X + \dot{a}$ ya Sürüklenme(Sliding) hızı ve $A\dot{X}$ ya da relatif(Relative) hız denir (Müller 1963).

Mutlak hızı V_a,sürüklenme hızını V_f ve relatif hızı da V_r ile gösterirsek

$$V_a = V_f + V_r$$

olarak yazabiliriz.

(II.2.1) ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\ddot{Y} = \ddot{A}X + \ddot{a} + 2\dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} \qquad \text{(II.2.2)}$$

olur. Buradan şu tanımları verebiliriz.

II.2.2 **Tanım:** (II.2.2) eşitliğindeki $\ddot{Y}$ ya Mutlak ivme, $\ddot{A}X + \ddot{a}$ Sürüklenme ivmesi, $2\dot{A}\dot{X}$ ya Coriolis ivmesi, $A\ddot{X}$ ya da relatif ivme denir (Müller 1963).

II.3 H/H^1 HAREKETİNİN POL NOKTALARI (POL EĞRİLERİ)

H hareketli uzayının H^1 sabit uzayına göre hareketini H/H^1 ile gösterelim. (II.1.4) ifadesinin t ye göre diferensiyeli

$$\dot{Y} = \dot{A}X + \dot{a} + A\dot{X}$$

idi. Bu ifadede yer vektörü $\vec{X}$ olan X noktasının mutlak hızı $\dot{Y}$, sürüklenme hız $\dot{A}X + \dot{a}$ ve relatif hızı da $A\dot{X}$ olarak tanımlanmıştı.

$X \in H$ ve $Y \in H^1$ olmak üzere

$$\dot{A}X + \dot{a} = 0 \qquad (II.3.1)$$

sisteminin çözümü aynı t anında H ve H^1 nün sabit noktaları olarak düşünülebilen noktaların yer vektörleridirler. Bu noktalar t anındaki ani pol noktaları olarak adlandırılırlar.

(II.3.1) siteminin her t anında bir tek çözümünün olabilmesi için det $\dot{A} \neq 0$ olmalıdır. Bu denklemin çözümü

$$X = -\dot{A}^{-1}\dot{a} \qquad (II.3.2)$$

dir. (II.3.2) ifadesi (II.1.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$Y = -\Omega_t^{-1}\dot{a} + a \qquad (I.3.3)$$

elde edilir. Buradan şu tanımı verebiliriz.

II.3.1 <u>Tanım</u> (Pol noktaları ve pol eğrileri): H/H^1 hareketinde $X \in H$ ve $Y \in H^1$ ortak sabit noktalar olmak üzere her t anında $\dot{A}X + \dot{a} = 0$ ifadesinin çözümü ile elde edilen

$$X = -\dot{A}^{-1}\dot{a} \text{ ve } Y = -\Omega_t^{-1}\dot{a} + a$$

eşitliklerine, sırasıyla hareketli uzayın hareketli pol noktası ve sabit uzayın sabit pol noktası adı verilir. Bu noktaların geometrik yerine ise, sırasıyla, hareketin hareketli pol eğrisi (moving centrode) ve sabit pol eğrisi (fixed centrode) adları verilir (Hacısalihoğlu 1971).

(II.3.1) ifadesini (II.2.1) ifadesinde yerine yazarsak

$$\dot{Y} = A\dot{X} \qquad (II.3.4)$$

olur. Bu ise pol noktalarında pol eğrilerinin hızları arasındaki bağıntıdır. Bu iki eğrinin yay uzunlukları hesaplanırsa

$$\int \| \dot{Y} \| dt = \int \| A\dot{X} \| dt = \int \| \dot{X} \| dt \ , \ A \in O(n) \ .$$

olur. İki eğrinin yay uzunlukları sırasıyla s ve $\bar{s}$ olmak üzere $s=\bar{s}$ bulunur. Dolayısıyla her iki eğrinin yay uzunlukları birbirine eşittir. Böylece şu sonucu verebiliriz.

II.3.1 <u>Sonuç</u>: Hareketli ve sabit pol eğrileri hareket boyunca birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar.

$\Omega_t \neq 0$ bir anti-simetrik matris olduğundan 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux vektörü adı verilen bir vektörün tanımlanmasına yol açar. Yani her $u \in IR^3$ vektörü için

$$\Omega_t(\vec{u}) = \vec{w}_t \wedge \vec{u} \qquad \text{(II.3.5)}$$

olacak şekilde bir tek $\vec{w}_t$ vektörü vardır.

II.3.2 <u>Tanım</u> (Darboux vektörü): $n=3$ halinde

$$\Omega_t = \begin{vmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{vmatrix}$$

ve $w_t = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere, $\forall\, \vec{u} \in IR^3$ için

$$\Omega_t(\vec{u}) = \vec{w}_t \wedge \vec{u}$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{w}_t$ vektörüne hareketin Darboux vektörü veya açısal hız vektörü denir (Hacısalihoğlu 1970).

II.3.3 <u>Tanım</u> (Darboux ekseni): $n=3$ özel halinde, ani dönme merkezleri bir eksen oluştururlar. Bu eksen $\dot{Y}|_{y_0} = 0$ eşitliğini sağlayan y_0 noktalarının geometrik yeri olan bir doğrudur. Bu doğruya anî dönme ekseni veya Darboux ekseni denir (Hacısalihoğlu 1970).

Şimdi bir M yüzeyinin diğer bir N yüzeyi üzerinde yuvarlanmasını tanımlayalım. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey M ve N olsun. E^3 de bir $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketini, her t anında $f_t(M)$ yüzeyi N yüzeyine bir $Y(t)$ noktasında teğet kalacak şekilde alalım.

II.3.4 Tanım (Kayma=Skidding): (II.1.8) ani hareketi bir ani öteleme ise t anında bir kaymaya (skidding) sahip oluruz.

II.3.5 Tanım (Döndürme=Spinning): (II.1.8) ani hareketinin, $\Omega_t \neq 0$ ve $Y(t)$ merkezli bir ani dönme olduğunu farzedelim. w_t açısal hızı $Y(t)$ noktasında N ye dik ise t anında bir döndürmeye(spinning) sahip oluruz.

II.3.6 Tanım (Yuvarlanma=Rolling): w_t, $Y(t)$ noktasında N yüzeyine teğet ise, (II.1.8) ile verilen ani hareketine bir yuvarlanma(rolling) denir. Eğer $\forall$ $t \in I$ için ani hareket bir yuvarlanma ise, $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketine M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde bir yuvarlanmasıdır denir (Nomizu 1977).

Diğer taraftan $\{f_t\}$ bir izometri olduğundan $\{f_t^{-1}\}$ mevcuttur. Dolayısıyla şu sonucu verebiliriz.

II.3.2 Sonuç: Eğer $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde bir yuvarlanması ise bu taktirde $\{f_t^{-1}\}$ 1-parametreli hareketi de N yüzeyinin M yüzeyi üzerinde bir yuvarlanmasıdır.

Şimdi $Y = f_t(X) = AX + a$ ifadesini göz önüne alalım. $A \in SO(n)$ olduğundan $A^{-1} \in SO(n)$ olup, $X = A^{-1}Y - A^{-1}a$ olarak elde edilir. f_t bir izometri olduğundan $f_t(X)=Y$ ifadesi $X=f_t^{-1}(Y)$ olarak elde edilir.

$X=f_t^{-1}(Y)$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse Y sabit olmak üzere $\dot{X} = \frac{df^{-1}}{dt} f_t(X)$ olur. Buradan $\frac{df^{-1}}{dt}$ ve $f_t(X)$ değerleri yerine yazılır ve matris çarpımı yapılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dA^{-1}}{dt} A & -A^{-1}\frac{da}{dt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

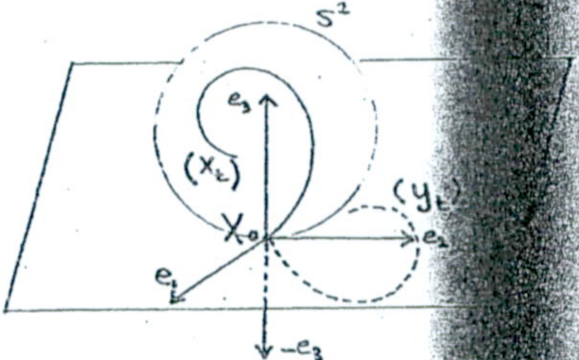
olarak bulunur. $\Phi_t = \frac{dA^{-1}}{dt} A$, $\phi_t = -A^{-1}\frac{da}{dt}$ diyelim. $\Phi_t = (A_t A)^{-1}$ antisimetrik matrisine A^{-1} ya karşılık gelen ters hareketin Darboux matrisi denir.

III. BÖLÜM

III.1 BİR KÜRENİN BİR DÜZLEM ÜZERİNDE YUVARL[illegible]

3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de bi[illegible] küre S^2 ve S^2 nin $X_0 \in S^2$ noktasında teğet düzlemi de Σ olsun. [illegible] bir dik koordinat sistemi $\{x_1,x_2,x_3\}$ öyle seçilsinki; S^2 kü[illegible] bu sisteme göre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ ile, Σ düzlemi de $x_3=-1$ ile [illegible]in. $X_0=(0,0,-1)$ olmaküzere X_0 noktasında başlayan S^2 üzerind[illegible]erensiyellenebilir bir eğri (x_t) olsun.

E^3 de bir $\{f_t\}$ 1-parametreli h[illegible] her t anında X_t noktası Σ düzlemi ile $(y_t)=(f_t(X_t))$değme n[illegible]rının ve ani pol noktalarının yeri olacak şekilde verilsin. [illegible]hareket süresince X_t ve Y_t noktaları, sırasıyla, hareketli [illegible]t pol noktaları olsunlar.



E^3 deki dik çatı $\{e_1,e_2,e_3\}$; [illegible]0,), $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ olsun. Σ için bir çatı da $\{e_1$[illegible]sun. Bu çatıyı hareket süresince sabit uzay için bir sab[illegible] sistemi olarak alacağız. $f_t(S^2)$ her t anında Y_t noktasında [illegible]et olduğundan

$$\lambda_t(X_t) = - e_3 \qquad \text{(III.1.1)}$$

dir. S^2 yi hareketli ve Σ yı sabit uzay ol[illegible]e alırsak, S^2 ve Σ nın herbir t anında ortak sabit noktaların[illegible]

$$\frac{dY}{dt} = \lambda(\frac{dX}{dt}), \ \lambda \in SO[illegible] \qquad \text{(III.1.2)}$$

dir. Buradan da görüldüğü gibi, iki eğrinin [illegible]ızları aynıdır.

(II.1.4) ile verilen $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi ile (III.1.1) göz önüne alınırsa

$$a = Y_t + e_3 \qquad \text{(III.1.3)}$$

elde edilir. $Y_t=f_t(X_t)$ ani dönme merkezi olduğundan

$$\frac{dY}{dt} = \frac{df}{dt}(X_t)\Big|_o=0$$

dir. X keyfi sabit bir nokta olmak üzere (II.1.4) ile verilen ifadenin t ye göre türevi alınır (II.1.9) ve (III.1.1) kullanılırsa

$$\frac{dY}{dt} = \Omega_t(-\vec{e}_3) + \frac{da}{dt}$$

olur. $Y_t=f_t(X_t)$ ani dönme merkezi olduğundan

$$\Omega_t(\vec{e}_3) = \frac{da}{dt}$$

elde edilir. Buradan ise (III.1.3) göz önüne alınırsa

$$\Omega_t(\vec{e}_3) = \frac{dY}{dt} \qquad \text{(III,1,4)}$$

olur. Σ üzerinde yatan $\vec{w}_t$ açısal hız vektörü ile $\vec{e}_3$ vektörünü (II.4.5) den

$$\Omega_t(\vec{e}_3) = \vec{w}_t \wedge \vec{e}_3 \qquad \text{(III.1.5)}$$

şeklinde yazabiliriz. (III.1.4) ifadasini göz önüne aldığımızda (III.1.5) ifadesi

$$\frac{dY}{dt} = \vec{w}_t \wedge \vec{e}_3$$

şekline dönüşür. Buradan şu sonucu verebiliriz.

III.1.1 <u>Sonuç:</u> $\vec{w}_t$ açısal hız vektörü ile (y_t) eğrisinin teğet vektörü olan $\frac{dY}{dt}$ tanjant vektörü birbirine diktir.

İspat: (III.1.4) ve (III.1.5) den açıktır.

Bu sonuçtan dolayı $\{dY/dt, w_t\}$ dik çatısı $\{e_1,e_2\}$ gibi aynı yönlendirmeye sahiptir. Şimdi Σ teğet düzlemindeki (y_t) eğrisinin (x_t) eğrisinin açılımından ibaret olduğunu gösterelim. Kabul edelimki $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi (II.1.4) ile verilmiş olsun.

(II.1.4) ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}X_t + \lambda_t\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt} \qquad \text{(III.1.6)}$$

olur. $Y_t=f_t(X_t)$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının yeri olduğundan

$$\frac{d\lambda}{dt}X_t + \frac{da}{dt} = 0 \qquad \text{(III.1.7)}$$

eşitliği elde edilir. (III.1.7) nin (III.1.6) da yerine yazılması ile

$$\lambda_t\left(\frac{dX}{dt}\right) = \frac{dY}{dt} \qquad \text{(III.1.8)}$$

ifadesi elde edilir. Bu ise (x_t) nin (y_t) nin bir açılımı demektir.

S^2 küresi üzerinde $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanlarını (x_t) eğrisi boyunca aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\lambda_t(b_1(t))=e_1,\ \lambda_t(b_2(t))=e_2 \qquad \text{(III.1.9)}$$

t=0 anında $f_o=I$ olduğunu (II.1.2) den biliyoruz. Buna göre başlangıç anında

$$b_1(o)=e_1,\ b_2(o)=e_2 \qquad \text{(III.1.10)}$$

dir. Diğer taraftan $\lambda_t(X_t)=-e_3, \lambda\epsilon SO(3)$ olduğundan,

$$-X_t = \lambda^{-1}(e_3) \qquad \text{(III.1.11)}$$

dir. λ bir ortogonal dönüşüm olduğundan $\forall X \epsilon IR^3$ için

$$< \lambda X,\lambda X > = < X,Y > \qquad \text{(III.1.12)}$$

dir. Buna göre

$$\begin{cases} < b_1,-X_t > = 0 \\ < b_2,-X_t > = 0 \\ < b_1,b_2 > = 0 \\ < b_1,b_1 > = 1 \\ < b_2,b_2 > = 1 \\ < -X_t,-X_t> =1 \end{cases} \qquad \text{(III.1.13)}$$

dir. Ohalde her t için $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca S^2 nin teğet düzlemleri için bir ortonormal bazdır. Dolayısıyla $\{b_1,b_2,-x_t\}$ hareket boyunca ele alacağımız hareketli baz sistemidir. Şimdi (III.1.9) ile tanımlanan $\lambda(b_1(t))=e_1$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9) ve (III.1.5) kullanılırsa

$$\frac{db_1}{dt} = -\lambda^{-1}(w_t \wedge e_1)$$

olur. Benzer şekilde $\lambda_t(b_2(t))=e_2$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9) ve (III.1.5) kullanılırsa

$$\frac{db_2}{dt} = -\lambda^{-1}(w_t \wedge e_2)$$

bulunur. $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi bir yuvarlanma ise $\Omega_t \neq 0$ anti-simetrik matrisi ile belirli $\vec{w}_t$ Darboux vektörü, Σ düzlemi içinde olacağından $\vec{w}_t \wedge \vec{e}_1$ ve $\vec{w}_t \wedge \vec{e}_2$ vektörel çarpımı $\vec{e}_3$ yönünde olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{db_1}{dt} = \lambda_1 x_t \text{ ve } \frac{db_2}{dt} = \lambda_2 x_t \qquad \text{(III.1.14)}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

III.1.1 <u>Teorem:</u> $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları S^2 nin koneksiyonuna göre (x_t) eğrisi boyunca paraleldirler.

Diğer taraftan

$$\langle x_t, x_t \rangle = 1$$

ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\langle \frac{dx}{dt}, x_t \rangle = 0$$

olur. Ohalde dx/dt nin x_t doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla dx/dt türevini b_1 ve b_2 cinsinden $k_1,k_2 \in IR$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = k_1(t)b_1 + k_2(t)b_2 \qquad \text{(III,1,16)}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

III.1.1 Sonuç: S^2 üzerinde (x_t) eğrisi boyunca paralel vektör alanları $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ olsun. Bu taktirde

$$dx/dt=k_1(t)b_1+k_2(t)b_2 \text{ ise } dy/dt=k_1(t)e_1+k_2(t)e_2$$

dir.

İspat: (III.1.2) ve (III.1.9) dan açıktır.

$b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca paralel ve $f_t(S^2)$ her t anında Σ ya teğet olduğundan $(f_t(X_t))=(y_t)$ dir. Yani (y_t), (x_t) nin bir açılımıdır. Şimdi S^2 küresinin Σ üzerinde (x_t) eğrisi boyunca yuvarlanmasının var ve tek olduğunu ispat edelim.

III.1.2 Teorem: S^2 birim küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) ve X_o noktasında S^2 nin teğet düzlemi Σ olsun. S^2 nin Σ üzerinde (x_t) eğrisi boyunca bir $\{f_t\}$ yuvarlanması $f_t(X_t)=Y_t$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının geometrik yeri olacak şekilde var ve tektir (Nomizu 1977).

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de bir 1-parametreli $\{f_t\}$ hareketi (II.1.4) ile verilsin. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$, $b_1(o)=e_1$ ve $b_2(o)=e_2$ olacak şekilde (x_t) eğrisi boyunca S^2 nin koneksiyonuna göre paralel vektör alanları ve $\{b_1,b_2,-x_t\}$ bir ortonormal sistem olmak üzere

$$A(b_1(t))=e_1,\ A(b_2(t))=e_2 \text{ ve } A(-x_t)=e_3$$

şeklinde tanımlansın. Bu ifadelerin t ye göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$\Omega_t(e_1)=-A\left(\frac{db_1}{dt}\right) \text{ ve } \Omega_t(e_2)=-A\left(\frac{db_2}{dt}\right) \qquad \text{(III.1.17)}$$

elde edilir. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca S^2 nin koneksiyonuna göre paralel olduklarından

$$\frac{db_1}{dt}=\lambda_1 x_t \text{ ve } \frac{db_2}{dt}=\lambda_2 x_t$$

dir. Bu ifadeler (III.1.17) de yerine yazılırsa

$$\Omega_t(e_1)=\lambda_1 e_3 \quad \text{ve} \quad \Omega_t(e_2)=\lambda_2 e_3$$

olarak bulunur. Ayrıca $A(-x_t)=e_3$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır ve (II.1.9) ile (III.1.15) kullanılırsa

$$\Omega_t(e_3) = k_1 e + k_2 e_2 \tag{III.1.18}$$

elde edilir. (II.4.5) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{cases} \Omega_t(e_1)=w_t \wedge e_1=\lambda_1 e_3 \\ \Omega_t(e_2)=w_t \wedge e_2=\lambda_2 e_3 \\ \Omega_t(e_3)=w_t \wedge e_3=k_1 e_1+k_2 e_2 \end{cases} \tag{III.1.19}$$

olarak elde edilir. Burada $w_t \wedge e_3=k_1 e_1+k_2 e_2$ ifadesinin her iki tarafı e_3 ile vektörel çarpılırsa

$$w_t = -k_2 e_1 + k_1 e_2 \tag{III.1.20}$$

olarak bulunur. Ohalde $\{ f_t \}$ 1-parametreli hareketin yuvarlanma kısmına ait açısal hız vektörü her t anında Σ düzlemi içindedir. Dolayısıyla $\{ f_t \}$ bir yuvarlanmadır. Şimdi tek olduğunu gösterelim.

a_t kolon matrisini $a_t=Y_t+e_3$ şeklinde tanımlayalım. Diğer taraftan $Y_t=f_t(X_t)$ ani pol noktaları olduğundan $dY/dt|_o=0$ dır. Bu eşitlik ile sonuç II.1.1 göz önüne alınırsa

$$\Omega_t Y + V_t = 0$$

olur. Bu ifadede (II.1.9), (III.1.1) eşitlikleri yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{dA}{dt} X_t + \frac{da}{dt} = 0$$

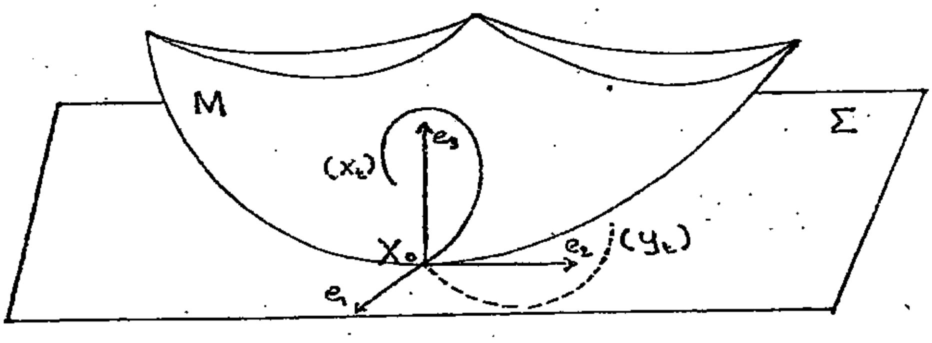
elde edilir. Ohalde ani dönme merkezleri ani pol noktalarıdırlar. Ayrıca A ve a nın seçilişinden tek türlü tanımlı oldukları aşikardır. Böylece f_t yuvarlanmasının var ve tek olduğu ispatlanmış olur.

III.2 BİR YÜZEYİN BİR DÜZLEM ÜZERİNDE YUVARLANMASI

3-boyutlu Öklid uzayı e_3 de keyfi bir yüzey M ve bir X_0 noktasında M nin teğet düzlemi Σ olsun. (x_t) eğrisi M yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Değme noktalarının ve ani dönme merkezlerinin yeri $(f_t(X_t))=(y_t)$ olmak üzere Σ üzerinde M nin bir $\{f_t\}$ yuvarlanmasını elde edelim.

E^3 de bir dik koordinat sistemi $\{x_1,x_2,x_3\}$ olsun. Σ düzlemi de X_0 orijinli ve $X_3=0$ olacak şekilde verilsin. (x_t) eğrisi boyunca M yüzeyinin birim normal vektör alanı ξ_t ve t=0 anında $\xi_0=e_3$ olsun. IR^3 de standard baz sistemi $\{e_1,e_2,e_3\}$ olmak üzere Σ için bir baz sistemini de $\{e_1,e_2\}$ olarak alabiliriz.

$\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi M yüzeyinin Σ düzlemi üzerinde (x_t) eğrisi boyunca bir yuvarlanması olacak şekilde verilsin, öyleki; $f_t(X_t)=Y_t$ noktaları değme noktaları ve ani pol noktaları olsun.



Ani pol noktasında sürüklenme hızı sıfır olacağından

$$\frac{d\lambda}{dt} X_t + \frac{da}{dt} = 0$$

bulunur. Bu ifade (II.1.4) ifadesinin türevi alınarak yerine yazılırsa $dY/dt=\lambda(dX/dt)$ elde edilir. $f_t(M)$ her t anında, Y_t noktasında Σ ya teğet olduğundan

$$\lambda_t(\xi_t)=e_3 \qquad \text{(III.2.1)}$$

dir. (x_t) eğrisi boyunca M üzerinde $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanlarını

$$A(b_1(t)) = e_1,\ A(b_2(t)) = e_2 \qquad \text{(III.2.2)}$$

şeklinde tanımlayalım. $\{b_1(t), b_2(t)\}$ sistemi (x_t) eğrisi boyunca M nin teğet düzlemi için bir bazdır.

$$< e_3, e_3 > = < A_t(\xi_t), A_t(\xi_t) > = < \xi_t, \xi_t > = 1,\ A \in SO(3)$$

olduğundan $< d\xi/dt, \xi_t > = 0$ dır. Bu ise $d\xi/dt$ nin ξ_t doğrultusunda bileşeninin olmaması demektir. (x_t) eğrisi boyunca $\{b_1, b_2\}$ bazı cinsinden $d\xi/dt$ türevi

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1(t)b_1 + \lambda_2(t)b_2 \qquad \text{(III.2.3)}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir. (III.2.1) ifadesinin t ye göre türevi alınır (III.2.2) ve (III.2.3) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\Omega_t(e_3) = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 \qquad \text{(III.2.4)}$$

bulunur. $\Omega_t \neq 0$ bir anti-simetrik matris olduğundan $\lambda_1(t)$ ve $\lambda_2(t)$ nin her ikisi de aynı anda sıfır değildir. Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ise sadece öteleme söz konusudur. $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketini M nin Σ üzerinde bir yuvarlanması olarak alalım. Bu durumda Ω_t ile belirli w_t vektörü Σ düzleminde olup sıfırdan farklıdır. w_t, Σ düzleminde yattiğından

$$\Omega_t(e_1) = w_t \wedge e_1 \text{ ve } \Omega_t(e_2) = w_t \wedge e_2$$

nin her ikisi de e_3 ün yönündedir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} \Omega_t(e_1) = \lambda_1 e_3 \\ \Omega_t(e_2) = \lambda_2 e_3 \\ \Omega_t(e_3) = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 \end{cases} \qquad \text{(III.2.5)}$$

olur. Buradan da Ω_t anti-simetrik matrisini

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Şimdi hareketin dönme kısmına ait $\vec{w}_t$ Darboux matrisini elde edelim. Bunun için $\Omega_t(e_3)=w_t\wedge e_3=-\lambda_1 e_1-\lambda_2 e_2$ ifadesinin her iki tarafını e_3 ile vektörel çarpıma tabi tutarsak

$$w_t = \lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2 \qquad \text{(III.2.6)}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan (III.2.2) ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır, düzenlenirse

$$\frac{db_1}{dt} = -\lambda^{-1}(\Omega_t(e_1)) \text{ ve } \frac{db_2}{dt} = -\lambda^{-1}(\Omega_t(e_2))$$

elde edilir. $\Omega_t(e_1)$ ve $\Omega_t(e_2)$ nin her ikisi de e_3 doğrultusunda olduğundan

$$\frac{db_1}{dt} = -\lambda_1\xi_t \quad \text{ve} \quad \frac{db_2}{dt} = -\lambda_2\xi_t$$

elde edilir. Dolayısıyla şu sonucu verebiliriz.

III.2.1 <u>Sonuç</u>: $\lambda(b_1(t))=e_1$, $\lambda(b_2(t))=e_2$ ve $\lambda(\xi_t)=e_3$ vektör alanları olmak üzere db_1/dt ve db_2/dt türevleri ξ_t doğrultusundadır.

III.2.1 <u>Teorem</u>: $\lambda(b_1(t))=e_1$, $\lambda(b_2(t))=e_2$ ve $\lambda(\xi_t)=e_3$ olmak üzere $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ (x_t) eğrisi boyunca M üzerinde vektör alanları olsunlar. Bu taktirde $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları M nin koneksiyonuna göre paraleldirler.

İspat: E^n in koneksiyonu D ve M nin koneksiyonu da $\bar{D}$ olsun. Bu taktirde Gauss denkleminden

$$\bar{D}_{\frac{dx}{dt}}b_1 = D_{\frac{dx}{dt}}b_1 + \langle S(\tfrac{dx}{dt}),b_1\rangle \xi_t$$

olur. $\langle S(dx/dt),b_1\rangle = \lambda_1$ dersek

$$\frac{db_1}{dt} = \bar{D}_{\frac{dx}{dt}}b_1 - \lambda_1\xi_t$$

olur. Buradan da sonuç III.2.1 göz önüne alınırsa

$$\bar{D}_{\frac{dx}{dt}} b_1 = 0$$

elde edilir. Benzer olarak $\bar{D}_{\frac{dx}{dt}} b_2 = 0$ elde edilir. Bu ise $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanlarının M nin koneksiyonuna göre paralel olması demektir.

M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) ve (x_t) nin teğet vektör alanı dx/dt olsun. $\Omega_t \neq 0$ olduğundan $\lambda_1(t)$ ve $\lambda_2(t)$ nin her ikisi de aynı anda sıfır değildir. Dolayısıyla $d\xi/dt = \lambda_1(t)b_1 + \lambda_2(t)b_2$ denklemi dx/dt vektörüne göre şekil operatörünü belirtir. Ohalde birim normal vektör alanı

$$\xi_t = A^{-1}(e_3) \qquad (III.2.7)$$

olmak üzere (x_t) eğrisi boyunca yüzeyin şekil operatörü

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\xi}{dt} \qquad (III.2.8)$$

dir. Buradan şu sonucu verebiliriz.

III.2.2 <u>Sonuç</u>: M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t), (x_t) nin teğet vektör alanı (dx/dt) ve yüzeyin birim normal vektör alanı ξ_t olmak üzere

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right) = \lambda_1(t)b_1 + \lambda_2(t)b_2$$

dir.

İspat: $A(\xi) = e_3$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınarak düzenlenir ve (III.2.8) kullanılırsa sonuç görülür.

III.2.3 <u>Sonuç</u>: M üzerinde diferensiyellenibilir bir eğri (x_t) ve (x_t) nin teğet vektör alanı dx/dt olsun. Bu taktirde $A(b_1) = e_1$ ve $A(b_2) = e_2$ olmak üzere

$$I^2\left(\frac{dx}{dt}, b_1\right) = \lambda_1 \quad \text{ve} \quad I^2\left(\frac{dx}{dt}, b_2\right) = \lambda_2$$

dir.

İspat: ikinci temel formun tanımından ve sonuç III.2.2 den açıktır.

$\Omega_t \neq 0$ olduğundan $S(dx/dt) \neq 0$ dır. Tersine kabul edelimki her t için $S(dx/dt) \neq 0$ şartı sağlansın. Butaktirde $b_1(o)=e_1$, $b_2(o)=e_2$ ve $A(\xi_t)=e_3$ olacak şekilde $SO(3)$ de A_t matrisini tanımlayabiliriz. Ayrıca (y_t) eğrisi (x_t) eğrisinin bir açılımı olduğundan (II.1.4) ile tanımlı $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi $(f_t(x_t))=(y_t)$ değme noktalarının yeri olan pol eğrileri boyunca bir yuvarlanmadır. Diğer taraftan eğer şekil operatörünün karekteristik değerleri; yani asli eğrilikleri sıfır değil ise $S(dx/dt) \neq 0$ dır. Bu da (x_t) eğrisinin M nin hiç bir flat noktasından geçmediğini ifade eder. Böylece şu teoremi verebiliriz.

III.2.2 **Teorem:** M üzerinde diferensiyellenbilir bir eğri (x_t) ve (x_t) nin teğet vektör alanı dx/dt olsun. Eğer (x_t) eğrisi M yüzeyinin bazı flat noktalarından geçiyorsa bu noktalarda sadece öteleme vardır.

İspat: $\langle \xi_t, \xi_t \rangle = 1$ olduğundan $\langle d\xi/dt, \xi_t \rangle = 0$ dir. Böylece $d\xi/dt$ yi $\{b_1, b_2\}$ bazı cinsinden

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

şeklinde tek türlü olarak yazabiliriz. Hareketin yuvarlanma kısmına ait Darboux vektörü (III.2.6) ile verilir. Yüzeye ait şekil operatörü (x_t) eğrisi boyunca

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\xi}{dt}$$

dir. (x_t) eğrisinin herhangi bir X_t noktası yüzeyin bir flat noktası ise bu noktada şekil operatörü

$$S\left(\frac{dx}{dt}\Big|_{X_t}\right) = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{d\xi}{dt}\Big|_{X_t} = 0$$

dir. Buradan da $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$ olur. Ohalde λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de sıfır olmalıdır. Böylece (III.2.6) dan

$$w_t|_{X_t} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Omega_t=0$ dır. $\Omega_t=0$ ise (II.1.8) vetanım (II.1.4) den ani hareket sadece bir öteleme den ibaret olur. Bu teoremden sonra şu sonucu verebiliriz.

III.2.4 Sonuç: Bir $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketinin M yüzeyinin (x_t) eğrisi boyunca Σ düzlemi üzerinde yuvarlanma olması için (x_t) eğrisinin M nin hiçbir flat noktasından geçmemesi gerekir.

İspat: (III.2.2) teoremden aşikardır.

III.2.3 Teorem: $M \subset E^3$ bir yüzey, M de diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) olsun. X_o noktasında M nin teğet düzlemi Σ olsun. M yüzeyinin Σ düzlemi üzerinde (x_t) eğrisi boyunca bir $\{f_t\}$ yuvarlanması, $(f_t(X_t)=(y_t)$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının yeri olacak şekilde var ve tektir (Nomizu 1977).

İspat: E^3 de bir $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi (II.1.4) ile verilsin. (x_t) eğrisi boyunca M yüzeyinin birim normal vektör alanı ξ_t olsun. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca M nin koneksiyonuna göre (III.2.1) teoremden dolayı paraleldirler. Ayrıca $\{b_1,b_2\}$ bir ortonormal sistem olmak üzere

$$A(b_1)=e_1,\ A(b_2)=e_2 \text{ ve } A(\xi_t)=e_3$$

vektör alanlarını gözönüne alalım. Bu eşitliklerin t ye göre diferensiyeli alınarak (II.1.9) kullanılırsa

$$\Omega_t(e_1) = -A\left(\frac{db_1}{dt}\right) \text{ ve } \Omega_t(e_2) = -A\left(\frac{db_2}{dt}\right)$$

elde edilir. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları M nin koneksiyonuna göre paralel olduğundan (III.2.1) sonuçtan

$$\frac{db_1}{dt} = -\lambda_1\xi_t \text{ ve } \frac{db_2}{dt} = -\lambda_2\xi_t$$

dir. Bu değerler yukarıdaki eşitlikten yerine yazılırsa

$$\Omega_t(e_1) = \lambda_1 e_3 \text{ ve } \Omega_t(e_2) = \lambda_2 e_3$$

bulunur. Ayrıca $A(\xi_t)=e_3$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\Omega_t(e_3) = -A\frac{d\xi}{dt}$$

olur.(III.2.3) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\Omega_t(e_3) = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2$$

elde edilir. Böylece Ω_t nin matrisel ifadesi

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan hareketin yuvarlanma kısmına ait w_t Darboux vektörü

$$w_t = \lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2$$

dir. Ohalde $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketinin yuvarlanma kısmına ait Darboux vektörü her t anında Σ düzlemi içindedir. Dolayısıyla $\{f_t\}$ bir yuvarlanmadır. Şimdi tek olduğunu gösterelim. Bunun için a_t kolon matrisini

$$A(X_t)=\xi_t, \; a_t=Y_t-\xi_t$$

olarak tanımlayalım. Y_t ani dönme merkezi olduğundan

$$\dot{Y}|_o=0$$

dır. (II.1.1) sonucu ve (II.1.9) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{dA}{dt}X_t + \frac{da}{dt} = 0$$

elde edilir. Ohalde ani dönme merkezleri ani pol noktalarıdırlar.

Ayrıca A ve a nın seçilişinden tek türlü tanımlı oldukları aşikardır. Böylece $\{f_t\}$ yuvarlanmasının var ve tek olduğu ispatlanmış olur.

III.2.4 <u>Teorem:</u> M nin hiç bir flat noktasından geçmeyen diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) olsun. $(y_t)=(f_t(X_t))$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının yeri olmak üzere X_o noktasında Σ teğet düzlemi üzerinde M nin bir tek $\{f_t\}$ yuvarlanması vardır.

İspat: $(y_t)=(f_t(X_t))$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının yeri olduğundan (y_t) eğrisi açık olarak (x_t) eğrisinin açılımından ibarettir. (x_t) eğrisi M nin hiçbir flat noktasından geçmediğinden (III.2.4) sonuçtan $\{f_t\}$ bir yuvarlanmadır. (y_t) eğrisi (x_t) nin bir açılımı olduğundan Y_t ani dönme merkezidir. Dolayısıyla (III.2.3) teoreminden $\{f_t\}$ yuvarlanması var ve tektir.

III.2.5 **Sonuç:** M nin hiçbir flat noktasından geçmeyen diferensiyellenebilir bir (x_t) eğrisi boyunca bir $U(t)$ vektör alanının M nin koneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart her t için $A_t(U(t))$ nin bir sabit vektör olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) ve (x_t) nin teğet vektör alanı dx/dt ve M nin birim normal vektör alanı ξ_t olsun. M nin koneksiyonuna göre $U(t)$ vektör alanları paralel olduğundan

$$\bar{D}_{\frac{dx}{dt}}U = 0$$

dır. Dolayısıyla U=sabittir. U sabit olduğundan $A_t(U_t)$=sabittir.

$$A_t(U_t)=e,\ e=sp\{e_i\}$$

diyelim.

($\Longleftarrow$): $A_t(U_t)$=sabit olsun. Bu eşitliğin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9) ve $\Omega_t(e_i)=e_3$ özelliği gözönüne alınırsa $\frac{dU}{dt}=-\lambda\xi_t$ bulunur. Bu ise teoremi ispatlar.

III.3 BİR YÜZEYİN DİĞER BİR YÜZEY ÜZERİNDE YUVARLANMASI

M ve N X_o noktasında birbirlerine teğet yönlendirilmiş iki yüzey olsun. M yüzeyi üzerinde verilen diferensiyellenebilir bir (x_t) eğrisi için $(y_t)=(f_t(x_t))$ değme noktalarının geometrik yeri olacak şekilde M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde bi $\{f_t\}$ yuvarlanmasını elde edelim. M nin birim normal vektör alanı ξ_t, N yüzeyinin birim normal vektör alanı η_t olsun. ξ_t ve η_t vektör alanlarını X_o noktasında $\xi_o=\eta_o$ olcak şekilde seçelim.

M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde (x_t) eğrisi boyunca bir $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi (II.1.4) ile verilsin. M ve N yüzeyleri her t anında teğet olduklarından

$$A(\xi_t) = \eta_t \qquad \text{(III.3.1)}$$

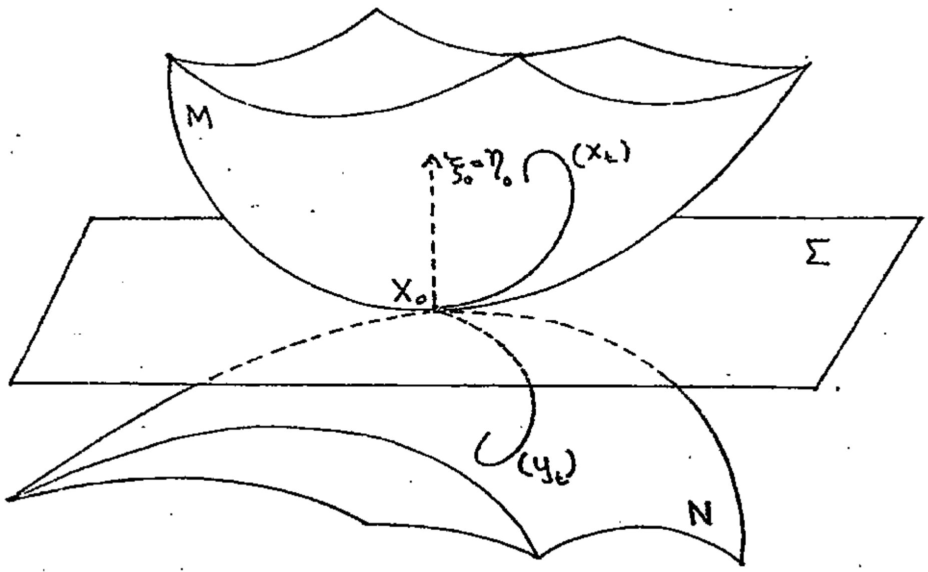
dir. M yüzeyi üzerinde (x_t) eğrisi boyunca paralel iki ortonormal vektör alanı $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ olsun. N yüzeyi üzerinde iki vektör alanını

$$b_1(t) = A_t(a_1(t)) \text{ ve } b_2(t) = A_t(a_2(t)) \qquad \text{(III.3.2)}$$

şeklinde tanımlayalım. $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ vektör alanları M yüzeyi üzerinde (x_t) eğrisi boyunca paralel ortonormal vektör alanları olduklarından türevlerinin teğet düzlemde bileşeni yoktur. Bu nedenle (x_t) eğrisi boyunca M nin birim normal vektör alanı ξ_t cinsinden

$$\frac{da_1}{dt} = \lambda_1(t)\xi_t \text{ ve } \frac{da_2}{dt} = \lambda_2(t)\xi_t \qquad \text{(III.3.3)}$$

yazılabilir.



$<\xi_t, \xi_t> = 1$ olduğundan $d\xi/dt$ nin ξ_t doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla $d\xi/dt$ türevi $\{a_1, a_2\}$ ortonormal vektörleri cinsinden

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_1(t)a_1 + \alpha_2(t)a_2 \qquad \text{(III.3.4)}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir. Diğer taraftan $<\xi_t, a_1> = 0$ ve $<\xi_t, a_2(t)> = 0$ olduğunda t ye göre diferensiyel alınır değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha_1 = -\lambda_1 \text{ ve } \alpha_2 = -\lambda_2 \qquad \text{(III.3.5)}$$

elde edilir. (III.3.5) değerleri (III.3.4) de yerine yazılırsa

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \qquad \text{(III.3.6)}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{cases} <b_1, b_1> = 1 \\ <b_1, b_2> = 0 \\ <b_2, b_2> = 1 \end{cases} \qquad \text{(III.3.7)}$$

olarak bulunur. Bu ifadelerin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$<\frac{db_1}{dt}, b_1> = 0 \text{ ve } <\frac{db_2}{dt}, b_2> = 0$$

olur. Bu da db_1/dt nin b_1 ve db_2/dt nin b_2 doğrultusunda bileşeninin olmaması demektir. Dolayısıyla db_1/dt ve db_2/dt türevleri N yüzeyinin $\{b_1, b_2\}$ bazları cinsinden

$$\frac{db_1}{dt} = \mu_1 n + Kb_2 \text{ ve } \frac{db_2}{dt} = \mu_2 n + Rb_1 \qquad (III.3.8)$$

olarak yazılabilir. $\{b_1, b_2\}$ ortonormal baz sistemi olduğundan

$$< b_1, b_2 > = 0$$

dir. Bu ifadenin t ye göre diferensiyeli alınır ve (III.3.8) eşitlikleri kullanılırsa $R=-K$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{db_1}{dt} = \mu_1 n + Kb_2 \\ \dfrac{db_2}{dt} = \mu_2 n - Kb_1 \end{cases} \qquad (III.3.9)$$

Burada $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_2 = \mu_2(t)$ ve $K=K(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca (III.3.1) den

$$< n_t, n_t > = < A(\xi_t), A(\xi_t) > = < \xi_t, \xi_t > = 1, \; A \in SO(3)$$

olduğundan $< dn/dt, n_t > = 0$ dır. Dolayısıyla dn/dt nin n_t doğrultusunda bileşeni yoktur. Böylece dn/dt türevi $\{b_1, b_2\}$ bazı cinsinden

$$\frac{dn}{dt} = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \qquad (III.3.10)$$

olacak şekilde tek türlü olarak yazılabilir. Diğer taraftan $\{b_1, b_2, n_t\}$ ortonormal baz sistemleri olduğundan $< n_t, b_1 > = 0$, $< n_t, b_2 > = 0$ dır. Bu ifadelerin t ye göre diferensiyeli alınır ve (III.3.9) ile (III.3.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\beta_1 = -\mu_1 \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -\mu_2 \tag{III.3.11}$$

bulunur. (III.3.11) eşitlikleri (III.3.10) da yerine yazılırsa

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 \tag{III.3.12}$$

elde edilir. Böylece $\{a_1, a_2, \xi_t\}$ ve $\{b_1, b_2, \eta_t\}$ baz sistemlerinin türev vektörleri, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = \lambda_1 \xi_t \\ \dfrac{da_2}{dt} = \lambda_2 \xi_t \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \end{cases} \tag{III.3.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{db_1}{dt} = Kb_2 + \mu_1 \eta_t \\ \dfrac{db_2}{dt} = -Kb_1 + \mu_2 \eta_t \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 \end{cases} \tag{III.3.14}$$

Şimdi hareketin yuvarlanma kısmına ait Darboux matrisini hesaplayalım. Bunun için $A_t(a_1(t)) = b_1(t)$ ve $A_t(a_2(t)) = b_2(t)$ ifadelerinin t ye göre diferensiyeli alınır (II,1,9), (III.3.13) ve (III.3.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Omega_t(b_1) &= Kb_2 + (\mu_1 - \lambda_1)\eta_t \\ \Omega_t(b_2) &= -Kb_1 + (\mu_2 - \lambda_2)\eta_t \end{aligned} \tag{III.3.15}$$

elde edilir. Ayrıca $A_t(\xi_t) = \eta_t$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (III.3.13) ve (III.3.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_t(\eta_t) = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + (\lambda_2 - \mu_2) b_2 \tag{III.3.16}$$

bulunur. Böylece Ω_t ye karşılık gelen matris aşağıdaki gibi olur:

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & K & (\mu_1-\lambda_1) \\ -K & 0 & (\mu_2-\lambda_2) \\ (\lambda_1-\mu_1) & (\lambda_2-\mu_2) & 0 \end{bmatrix}$$

Eğer $\Omega_t \neq 0$ ise bu taktirde hareketin yuvarlanma kısmına ait Darboux vektörü w_t olmak üzere (II.4.5) göz önüne alınırsa

$$w_t = -(\lambda_2 - \mu_2)b_1 + (\lambda_1 - \mu_1)b_2 + K\eta \qquad \text{(III.3.17)}$$

olarak bulunur. $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketinin bir yuvarlanma olması durumunda (III.3.17) ile tanımlanan w_t Darboux vektörü (açısal hız vektörü) N yüzeyine teğet olacağından normal doğrultusunda bileşeni olmayacaktır. Bu nedenle $K=\langle w_t, \eta_t\rangle$ değeri sıfırdır. Dolayısıyla (III.3.17) ifadesi

$$w_t = -(\lambda_2 - \mu_2)b_1 + (\lambda_1 - \mu_1)b_2 \qquad \text{(III.3.18)}$$

şekline indirgenir. K=0 değeri (III.3.14) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \dfrac{db_1}{dt} = \mu_1 \eta_t \\ \dfrac{db_2}{dt} = \mu_2 \eta_t \end{cases} \qquad \text{(III.3.19)}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

III.3.1 **Teorem:** N yüzeyi üzerinde bir eğri (y_t) ve (y_t) eğrisi boyunca ortonormal vektör alanları

$$b_1(t)=\lambda_t(a_1(t)) \text{ ve } b_2(t)=\lambda_t(a_2(t))$$

olsun. Eğer (II.1.A) ile tanımlı 1-parametreli $\{f_t\}$ hareketi M yüzeyinin N yüzeyi üzerinde bir yuvarlanması ise bu taktirde $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ vektör alanları (y_t) eğrisi boyunca N nin koneksiyonuna göre paraleldir.

M ve N birbirlerine her t anında teğet iki yüzey ve tanjant uzayları da, sırasıyla, $T_M(X)$ ve $T_N(Y)$ olsun. M ve N nin birim normal vektör alanları da ξ_t ve η_t olsun. Bu taktirde M ve N yüzeylerinin (x_t), (y_t) eğrileri boyunca şekil operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} S:\ & T_M(X) \longrightarrow T_M(X) \\ & X \longrightarrow S(X) = D_X\xi = \frac{d\xi}{dt} \\ \overline{S}:\ & T_N(Y) \longrightarrow T_N(Y) \\ & Y \longrightarrow \overline{S}(Y) = D_Y\eta = \frac{d\eta}{dt} \end{aligned} \qquad \text{(III.3.20)}$$

Burada X ve Y, M ve N üzerinde, sırasıyla, (x_t) ve (y_t) eğrilerinin teğet vektör alanlarıdır. (III.3.13) ve (III.3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa M ve N nin şekil operatörleri

$$\begin{aligned} S\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{d\xi}{dt} = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \\ \overline{S}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{d\eta}{dt} = -\mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 \end{aligned} \qquad \text{(III.3.21)}$$

olarak bulunur. Buradan şu teoremi verebiliriz.

III.3.2 <u>Teorem</u>: M ve N yüzeylerinin $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi esnasında (x_t) ve (y_t) eğrileri boyunca şekil operatörleri arasında

$$A\left(S\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) = \overline{S}\left(\frac{dy}{dt}\right), \ A\in SO(3)$$

eşitliği varsa hareket yalnızca bir ötelemeden ibarettir.

İspat: (x_t) ve (y_t) eğrileri boyunca yönlendirilmiş iki yüzey M ve N olsun. M nin birim normal vektör alanı ξ_t ve N nin birim normal vektöralanı da η_t olsun. (x_t) ve (y_t) eğrileri boyunca teğet vektör alanları $dx/dt \in T_M(X)$ ve $dy/dt \in T_N(Y)$ olmak üzere (III.3.13) ve (III.3.14) den (III.21) eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu eşitlik

$\lambda(S(\frac{dx}{dt})) = \overline{S}(\frac{dy}{dt})$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda_1=\mu_1 \text{ ve } \lambda_2=\mu_2$$

elde edilir. Bu değerler (III.3.18) açısal hız denkleminde yerine yazılırsa

$$w_t=0$$

bulunur. $w_t=0$ olduğundan $\Omega_t=0$ olur. Bu ise (II.1.4) tanımından $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketinin sadece bir ötelemeden (kaymadan) ibaret olduğunu gösterir.

III.3.1 <u>Sonuç</u>: M ve N yüzeylerinin $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi esnasında

$$A(S(\frac{dx}{dt})) = \overline{S}(\frac{dy}{dt}),\ A\in SO(3)$$

şeklinde bir eşitliğin olmaması hareketin bir yuvarlanma olması için yeterlidir.

İspat: III.3.2 teoremden sonuç açıktır.

III.3.2 <u>Sonuç</u>: (x_t) ve (y_t) eğrileri, sırasıyla, M ve N nin bazı flat noktalarından geçiyorsa bu noktalarda sadece öteleme vardır.

İspat: (x_t) eğrisi M nin flat noktasından geçiyorsa bu noktalarda tanım gereği

$$S(\frac{dx}{dt}|_{X_t}) = 0$$

dır. ξ_t, M nin birim normal vektör alanı olmak üzere $S(dx/dt)=d\xi/dt$ olduğundan (III.3.21) den $d\xi/dt= -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2=0$ dır. Bu ifadenin sıfır olması $\lambda_1=0$ ve $\lambda_2=0$ olmasını gerektirir. Benzer olarak (y_t) eğrisi N nin flat noktalarından geçiyorsa $\mu_1=0$ ve $\mu_2=0$ elde edilir. Bu eşitlikler (III.3.18) açısal hız denkleminde yerine yazılırsa $w_t=0$ bulunur. Dolayısıyla $\Omega_t=0$ olur. III.3.2 teoreminden dolayı $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi sadece bir ötelemeden ibaret olur.

III.3.3 Sonuç: (x_t) eğrisi boyunca M yüzeyinin birim normal vektör alanı ξ_t ve (y_t) eğrisisinin noktaları da N yüzeyinin flat noktaları olsun. Bu taktirde M nin N üzerinde bir $\{f_t\}$ 1-parametreli yuvarlanması mevcuttur.

İspat: (x_t) eğrisi boyunca M yüzeyinin şekil operatörü S olmak üzere

$$S(\frac{dx}{dt}) = \frac{d\xi}{dt} = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$$

dir. (y_t) eğrisinin noktaları N yüzeyinin flat noktaları olduğundan III.3.2 sonucundan

$$\overline{S}(\frac{dy}{dt}) = \frac{d\eta}{dt} = -\mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 = 0$$

dir. Bu ifadenin sıfır olması $\mu_1=0$ ve $\mu_2=0$ olmakla mümkündür. Bu değerler (III.3.18) açısal hız denkleminde yerine yazılırsa

$$w_t=\lambda_1 b_2 - \lambda_2 b_1$$

bulunur. Ohalde $w_t \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\Omega_t \neq 0$ anti-simetrik matrisi tanımlanabilir. Bu ise III.3.1 sonucundan $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketinin bir yuvarlanma olması demektir.

III.3.4 Sonuç: Birbirine teğet iki yüzey M ve N olsun. Bu yüzeylerden biri düzlem ve diğer yüzeyin noktaları da eğri boyunca flat nokta olmasın. Bu durumda yüzeyin düzlem üzerinde bir $\{f_t\}$ yuvarlanması mevcuttur.

İspat: Kabul edelim ki N yüzeyi düzlem olsun. N nin şekil operatörü $\overline{S}$ olmak üzere

$$\overline{S}(\frac{dy}{dt}) = 0$$

dır. (x_t) eğrisi M nin hiçbir flat noktasından geçmediğinden, şekil operatörü S olmak üzere

$S(\frac{dx}{dt}|_{x_t}) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $A(S(\frac{dx}{dt})) \neq 0$ olacağından $A(S(dx/dt)) \neq \overline{S}(dy/dt)$ dir. Ohalde III.3.1 sonuçtan f_t bir yuvarlanmadır.

IV. BÖLÜM

IV.1 BİR HİPERYÜZEYİN DİĞER BİR HİPERYÜZEY ÜZERİNDE YUVARLANMASI

E^n de yönlendirilmiş iki hiperyüzey M ve N olsun. E^n de bir dik koordinat sistemi $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ve (E^n) in standard bir bazı $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$ olsun.

M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) ve M nin (x_t) boyunca birim normal vektör alanı ξ_t, N nin (y_t) eğrisi boyunca birim normal vektör alanı η_t ve X_o noktasında

$$\xi_o=\eta_o$$

olsun.

E^n de bir $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketi her t için (II.1.4) ile verilsin. $f_t(X_t)=Y_t$ noktasında $f_t(M)$ ve N nin tanjant uzayları çakışık olacak şekilde verilsin. (x_t) eğrisi boyunca M nin tanjant uzayları için bir baz $\{u_1,\ldots,u_{n-1}\}$ ve her i için u_i, $1\leq i\leq n-1$, M nin koneksiyonuna göre (x_t) eğrisi boyunca paralel olsun.

N hiperyüzeyi üzerinde $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ vektör alanlarını (y_t) eğrisi boyunca

$$v_i=\lambda(u_i),\ 1\leq i\leq n-1,\ \lambda\in SO(n) \qquad \text{(IV.1.1)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\langle v_i,v_j\rangle=\langle\lambda(u_i),\lambda(u_j)\rangle=\langle u_i,u_j\rangle=0$$

elde edilir. Ohalde $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ de bir ortonormal sistemdir. M ve N nin her t anında tanjant uzayları çakışık olduğundan

$$\lambda(\xi_t)=\eta_t \qquad \text{(IV.1.2)}$$

dir. Böylece hareket boyunca iki ortonormal hareketli baz sistemi elde edilmiş olur. Bu sistemler, sırasıyla,

$$\{u_1,\ldots,u_{n-1}\} \text{ ve } \{v_1,\ldots,v_{n-1}\} \qquad \text{(IV.1.3)}$$

dir. Bu kabul ve notasyonlar altında (II.1.8) ile birlikte aşağıdaki tanımı verebiliriz.

IV.1.1 <u>Tanım</u> (Yuvarlanma): Eğer Ω_t dönüşümü, her t için $T_N(Y_t)$ tanjant uzayını $S_p\{n_t\}$ uzayı içine ve $S_p\{n_t\}$ uzayını da $T_N(Y_t)$ tanjant uzayı içine resmeden bir dönüşüm ise, $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketine M nin N üzerinde (x_t) eğrisi boyunca, ani pol noktaları $Y_t=f_t(X_t)$ olan bir yuvarlanmadır denir.

Bu tanım n=3 durumunda daha önce verdiğimiz tanımları verir.

Şimdi $\{u_1,\ldots,u_{n-1}\}$ ve $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ sistemlerinin t ye göre diferensiyellerini hesaplayalım. (x_t) eğrisi boyunca u_i, $1\le i\le n-1$, paralel vektör alanları olduğundan M nin koneksiyonuna göre

$$\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}u_i = 0,\quad 1\le i\le n$$

dir. Gauss denkleminden dolayı du_i/dt türevi ξ_t doğrultusundadır. Yani

$$\frac{du_i}{dt}= c_i\xi_t\ ,\quad c_i\in C^\infty(M,IR),\ 1\le i\le n-1 \qquad \text{(IV.1.4)}$$

dir. Diğer taraftan $<\xi_t,\xi_t>=1$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli $< d\xi/dt, \xi_t >=0$ olduğundan $d\xi/dt$ nin türevinin ξ_t doğrultusunda bileşeni yoktur. Yani $d\xi/dt$ türevi $T_M(X_t)$ tanjant uzayındadır. Tanjant uzayının bazları cinsinden $d\xi/dt$ türevi

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \qquad \text{(IV.1.5)}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir. $<\xi_t,u_i>=0$, $1\le i\le n-1$, ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (IV.1.4) ve (IV.1.5) kullanılırsa $-x_i=c_i$ elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = c_i \xi_t \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i u_i \end{cases} \qquad \text{(IV.1.6)}$$

Diğer taraftan $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, $1 \le i \le n-1$, ifadesinin t ye göre diferensiyeli $\langle dv_i/dt, v_i \rangle = 0$ olduğundan dv_i/dt türevinin v_i doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla

$$\frac{dv_i}{dt} \in S_p\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, n_t\}$$

dir. Böylece dv_i/dt türevi

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} v_j + b_i n_t \qquad \text{(IV.1.7)}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\langle n_t, n_t \rangle = 1$ ve t ye göre diferensiyeli $\langle dn/dt, n_t \rangle = 0$ olduğundan dn/dt türevinin n_t doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla

$\frac{dn}{dt} \in S_p\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dir. Böylece dn/dt, $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ bazı cinsinden

$$\frac{dn}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i v_i \qquad \text{(IV.1.8)}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir. $\langle n_t, v_i \rangle = 0$, $1 \le i \le n-1$, ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (IV.1.7) ve (IV.1.8) kullanılırsa $m_i = -b_i$, $1 \le i \le n-1$, elde edilir. Ayrıca

$$v_i = \lambda(u_i), \quad 1 \le i \le n-1$$

ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9)₃ (IV.1.2) ve (IV.1.7) kullanılırsa

$$\Omega_t(v_i) = \sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} v_j + (b_i - c_i) n_t, \quad 1 \le i \le n-1 \qquad \text{(IV.1.9)}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\lambda_t(\xi_t) = \eta_t$$

ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (IV.1.6) ve (IV.1.8) kullanılırsa

$$\Omega_t(\eta_t) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - b_i) v_i \qquad \text{(IV.1.10)}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \Omega_t(v_i) = \sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} v_j + (b_i - c_i)\eta_t, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \Omega_t(\eta_t) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - b_i) v_i, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \qquad \text{(IV.1.11)}$$

Ayrıca $\langle v_i . v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i=j \end{cases}$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır ve (IV.1.7) kullanılırsa

$$k_{ij} = - k_{ji}$$

elde edilir. i=j için $k_{ij}=0$ dır. Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{cases} \Omega_t(v_1) = 0.v_1 + k_{12}v_2 + k_{13}v_3 + \ldots + k_{1(n-1)}v_{n-1} + (b_1 - c_1)\eta_t \\ \Omega_t(v_2) = -k_{12}v_1 + 0.v_2 + k_{23}v_3 + \ldots + k_{2(n-1)}v_{n-1} + (b_2 - c_2)\eta_t \\ \Omega_t(v_3) = -k_{13}v_1 - k_{23}v_2 + 0.v_3 + \ldots + k_{3(n-1)}v_{n-1} + (b_3 - c_3)\eta_t \\ \vdots \\ \Omega_t(v_{n-1}) = -k_{1(n-1)}v_1 - k_{2(n-1)}v_2 - k_{3(n-1)}v_{n-1} - \ldots 0.v_{n-1} + (b_{n-1} - c_{n-1})\eta_t \\ \Omega_t(\eta_t) = (c_1 - b_1)v_1 + (c_2 - b_2)v_2 + \ldots + (c_{n-1} - b_{n-1})v_{n-1} + 0.\eta_t \end{cases}$$

olarak bulunur. Ohalde Ω_t yekarşılık gelen anti-simetrik matris aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1(n-1)} & (b_1-c_1) \\ -k_{12} & 0 & k_{23} & \dots & k_{2(n-1)} & (b_2-c_2) \\ -k_{13} & -k_{23} & 0 & \dots & k_{3(n-1)} & (b_3-c_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -k_{1(n-1)} & -k_{2(n-1)} & -k_{3(n-1)} & \dots & 0 & (b_{n-1}-c_{n-1}) \\ (c_1-b_1) & (c_2-b_3) & (c_3-b_3) & \dots & (c_{n-1}-b_{n-1}) & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece Ω_t nin matrisel ifadesi $\{v_1,\dots,v_{n-1}, n_t\}$ ortonormal baz sisteminin türev vektörlerinin bileşenleri cinsinden hesaplanmış oldu. v_i, $1 \le i \le n-1$, lerden birinin eğrinin teğeti olması halinde k_{ij} şerit eğrilikleridirler. Şimdi $(df/dt)f_t^{-1}$ in matrisel ifadesini bulalım. (II.1.8)de biliyoruzki ötelemeyi veren kolon matrisi $-\Omega_t a + da/dt$ dir. Bu matrisin bileşenlerini λ_i, $1 \le i \le n$, ile gösterelim. Ozaman harekete karşılık gelen matris (II.1.8) de aşağıdaki gibidir.

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1(n-1)} & b_1-c_1 & \lambda_1 \\ -k_{12} & 0 & k_{23} & \dots & k_{2(n-1)} & b_2-c_2 & \lambda_2 \\ -k_{13} & 1\ -k_{23} & 0 & \dots & k_{3(n-1)} & b_3-c_3 & \lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{1(n-1)} & -k_{2(n-1)} & -k_{3(n-1)} & \dots & 0 & b_{n-1}-c_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 & \dots & c_{n-1}-b_{n-1} & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer v_i vektör alanları (y_t)eğrisi boyunca N nin koneksiyonuna göre paralele iseler, her $1 \le i, j \le n-1$ için (IV.1.12) den $k_{ij}=0$ elde edilir. Bu durumda Ω_t nin matrislerle ifadesinde $b_i - c_i \neq 0$ olması hareketin bir yuvarlanmadan ibaret olmasını gerektirir.

IV.2 ALTMANİFOLDLARIN DURUMU

n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir X_o noktasında biri diğerine teğet m-boyutlu iki altmanifold M ve N olsun. M üzerinde diferensiyellenebilir bir (x_t) eğrisi için $(y_t)=(f_t(X_t))$ değme noktalaının yeri olacak şekilde M manifoldunun N manifoldu üzerinde $\{f_t\}$ yuvarlanmasını tanımlayacağız. E^n in (x_t) eğris boyunca bir 1-parametreli $\{f_t\}$ hareketi (II.1.4) ile verilsin. $f_t(M)$ nin her bir t anında Y_t noktasında N ye teğet olduğunu göz önüne alalım. (x_t) eğrisi boyunca M nin tanjant uzayı $T_M(X_o)$ ve $\{a_1(o),\ldots,a_m(o)\}$ sistemi de $T_M(X_o)$ da bir ortonormal baz olsun. M nin normal tanjant uzayı $T_M(X_o)^{\perp}$ ve $\{a_{m+1}(o),\ldots,a_n(o)\}$ sistemi de $T_M(X_o)^{\perp}$ de bir ortonormal baz olsun.

N manifoldu üzerinde $\{b_1(o),\ldots,b_m(o)\}$ vektör alanlarını diferensiyellenebilir (y_t) eğrisi boyunca

$$b_k(t) = A_t(a_k(t)),\ 1\leq k\leq n,\ A\epsilon SO(n) \qquad (IV.2.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$< b_r,b_s >=< A(a_r).A(a_s) >=< a_r,a_s >=\delta_{rs},\ 1\leq r,s\leq n$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{b_1,\ldots,b_n\}$ sitemi de bir ortonormal sistemdir. (y_t) eğrisi boyunca N nin tanjant uzayı $T_N(Y_t)$ ve $\{b_1,\ldots b_m\}$ sitemi $T_N(Y_t)$ de bir ortonormal baz, N nin normal uzayı $T_N(Y_t)^{\perp}$ ve $\{b_{m+1},\ldots,b_n\}$ sistemi de $T_N(Y_t)^{\perp}$ de bir ortonormal baz sistemidir. $\Omega_t\neq 0$ olmak üzere (II.1.8) ve yukarıdaki kabul ve notasyonlar altında aşağıdaki tanımı verebiliriz.

IV.2.1 <u>Tanım</u> (Yuvarlanma): Eğer $\Omega_t\neq 0$ anti-simetrik dönüşümü her bir t anında $T_N(Y_t)$ tanjant uzayını $T_N(Y_t)^{\perp}$ normal uzayına ve $T_N(Y_t)^{\perp}$ normal uzayını da $T_N(Y_t)$ tanjant uzayına dönüştürüyorsa $\{f_t\}$

1—parametreli hareketine M manifoldunun N manifoldu üzerinde (x_t) eğrisi boyunca değme noktaları ve ani pol noktaları $(y_t)=(F_t(X_t))$ olan bir yuvarlanmasıdır denir.

Böylece şu sonucu verebiliriz.

IV.2.1.<u>Sonuç</u>: $\Omega_t \neq 0$ bir anti-simetrik dönüşüm olmak üzere $\forall X,Y \in T_N(Y_t)$ ve $\forall U,V \in T_N(Y_t)^{\perp}$ için $<\Omega_t(X),Y>=0$ ve $<\Omega_t(U),V>=0$ dır.

İspat: IV.2.1 tanımdan açıktır.

$a_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, M manifoldu üzerinde $a_i(o)$ başlangıç şartı ile (x_t) eğrisi boyunca paralel teğet vektör alanı olsun. E^n in Riemann koneksiyonu D ve M nin Riemann koneksiyonu $\overline{D}$ olmak üzere

$$\chi(E^n) = \chi(M) \oplus \chi(M)^{\perp}$$

eşitliği gereğince

$$D_{\frac{dx}{dt}}a_i = \overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_i + V(\frac{dx}{dt},a_i), \quad 1 \leq i \leq m$$

dir. Burada dx/dt, (x_t) eğrisinin teğet vektör alanıdır. $a_i(t)$ ler (x_t) eğrisi boyunca paralel olduğundan M nin koneksiyonuna göre

$$\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_i=0$$

dir. İkinci temel formun tanımından

$$V:T_M(X_o)\times T_M(X_o) \longrightarrow T_M(X_o)^{\perp}$$
$$(\frac{dx}{dt}, a_i) \longrightarrow V(\frac{dx}{dt},a_i)$$

dır. $\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_i=0$ olduğundan Gauss denkleminden

$$D_{\frac{dx}{dt}}a_i = V(\frac{dx}{dt},a_i)$$

veya

$$\frac{da_i}{dt} = V(\frac{dx}{dt},a_i)$$

olur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} D_{\frac{dx}{dt}} a_i = 0 \\ \frac{da_i}{dt} = V(\frac{dx}{dt}, a_i) \end{cases} \qquad (IV.2.2)$$

Diğer taraftan

$$V(\frac{dx}{dt}, a_i) = -\sum_{j=m+1}^{n} < S_{a_j}(\frac{dx}{dt}), a_i > a_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

olduğundan $-< S_{a_j}(\frac{dx}{dt}), a_i > = \lambda_{ij}$ olmak üzere

$$V(\frac{dx}{dt}, a_i) = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_{ij} \, a_j \, , \quad 1 \leq i \leq m$$

dir. Dolayısıyla (IV.2.) den

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_{ij} \, a_j \, , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur. Ohalde da_i/dt türev vektör alanı normal uzaydadır.

$a_j(t)$, $m+1 \leq j \leq n$, M manifoldu üzerinde $a_j(o)$ başlangıç vektörü ile (x_t) eğrisi boyunca paralel normal vektör alanı olsun. Bu durumda $D_{\frac{dx}{dt}} a_j$, $m+1 \leq j \leq n$, ile Weingarten denklemini

$$D_{\frac{dx}{dt}} a_j = -(S_{a_j}(\frac{dx}{dt})) + \overset{\perp}{D}_{\frac{dx}{dt}} a_j \, , \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad (IV.2.3)$$

şeklinde tanjant ve normal bileşenler cinsinden yazabiliriz. $a_j(t)$, $m+1 \leq j \leq n$, (x_t) eğrisi boyunca $T_M(X_o)^{\perp}$ normal tanjant uzayında paralel normal vektör alanları olduğundan M nin normal koneksiyonuna göre

$$\overset{\perp}{D}_{\frac{dx}{dt}} a_j = 0 \qquad (IV.2.4)$$

dır. Dolayısıyla

$$S_{a_j}(\frac{dx}{dt}) = -D_{\frac{dx}{dt}} a_j$$

olur. Ayrıca E^n in koneksiyonuna göre

$$D_{\frac{dx}{dt}} a_j = \frac{da_j}{dt} \quad , \; m+1\leq j\leq n, \text{ olduğundan}$$

$$S_{a_j}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{da_j}{dt} \; , \quad m+1\leq j\leq n, \qquad \text{(IV.2.5)}$$

elde edilir. Şimdi (II.1.4) ile verilen $\{f_t\}$ 1-parametreli hareketini ele alalım. $f_t(M)$, Y_t noktasında N ye teget olduğundan

$$b_k(t) = \lambda_t(a_k(t)) \;, \quad 1\leq k\leq n$$

ile tanımlanan (IV.2.1) ifadesinde $\{b_1(t),\ldots,b_m(t)\}$ ler (y_t) eğrisi boyunca N ye teğet ve $\{b_{m+1},\ldots,b_n\}$ ler de (y_t) eğrisi boyunca N ye normaldir. İlk olarak

$$b_i(t) = \lambda_t(a_i(t)) \;, \quad 1\leq i\leq m, \qquad \text{(IV.2.6)}$$

ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (IV.2.1) ve (IV.2.2) kullanılırsa

$$\frac{db_i}{dt} = \Omega_t(b_i) + \lambda(V(\frac{dx}{dt},a_i)) \;, \quad 1\leq i\leq m, \qquad \text{(IV.2.7)}$$

elde edilir.

N manifoldu üzerinde diferensiyellinibilir bir eğri (y_t) ve teğet vektör alanı dy/dt olsun. E^n in koneksuyonu D ve N nin koneksiyonu $\overline{\overline{D}}$ olmak üzere

$$\chi(E^n) = \chi(N) \oplus \chi(N)^{\perp}$$

eşitliği gereğince genelleştirilmiş Gauss denklemini

$$D_{\frac{dy}{dt}} b_i = \overline{\overline{D}}_{\frac{dy}{dt}} b_i + \overline{V}\left(\frac{dy}{dt},b_i\right) \;, \quad 1\leq i\leq m, \qquad \text{(IV.2.8)}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\overline{V}$

$$\overline{V}: T_N(Y_t)\times T_N(Y_t) \longrightarrow T_N(Y_t)^{\perp}$$
$$\left(\frac{dy}{dt},b_i\right) \longrightarrow V\left(\frac{dy}{dt},b_i\right)$$

dir. E^n in koneksiyonuna göre

$$D_{\frac{dy}{dt}} b_i = \frac{db_i}{dt} \;, \quad 1\leq i\leq m$$

olduğundan

$$\frac{db_i}{dt} = D_{\frac{dy}{dt}} b_i + \overline{V}(\frac{dy}{dt}, b_i), \; 1 \leq i \leq m, \qquad \text{(IV.2.9)}$$

olarak bulunur. (IV.2.7) ve (IV.2.9) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$\Omega_t(b_i) = \overline{\overline{D}}_{\frac{dy}{dt}} b_i + \overline{V}(\frac{dy}{dt}, b_i) - A(V(\frac{dx}{dt}, a_i)) \qquad \text{(IV.2.10)}$$

elde edilir. Halbuki b_i, $1 \leq i \leq m$, (y_t) eğrisi boyunca N ye teğet olduğundan yuvarlanmanın tanımından dolayı $\Omega_t(b_i)$, N ye normaldir. Ohalde $\Omega_t(b_i)$ nin tanjant uzayda bileşeni yoktur. Ayrıca $\overline{V}(\frac{dy}{dt}, b_i)$ ve $V(\frac{dx}{dt}, a_i)$ ikinci temel formları da (y_t) eğrisi boyunca N ye normaldir.

Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{\frac{dy}{dt}} b_i = 0 \qquad \text{(IV.2.11)}$$

olmak zorundadır. Böylece N nin koneksiyonuna göre b_i, $1 \leq i \leq m$, vektör alanları (y_t) eğrisi boyunca paraleldirler. Dolayısıyla (IV.2.10) ifadesi

$$\Omega_t(b_i) = \overline{V}(\frac{dy}{dt}, b_i) - A(V(\frac{dx}{dt}, a_i)), \; 1 \leq i \leq m, \qquad \text{(IV.2.12)}$$

biçimine indirgenir.

İkinci olarak

$$b_j(t) = A_t(a_j(t)), \; m+1 \leq j \leq n$$

ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9) ve (IV.2.5) kullanılırsa

$$\frac{db_j}{dt} = \Omega_t(b_j) + A_t(-S_{a_j}(\frac{dx}{dt})), \; m+1 \leq j \leq n, \qquad \text{(IV.2.13)}$$

elde edilir. b_j, $m+1 \leq j \leq n$, N manifoldu üzerinde (y_t) eğrisi boyunca normal vektör alanı olsun. E^n in koneksiyonu D ve N nin koneksiyonu $\overline{\overline{D}}$ ve şekil operatörü $\overline{S}$ olmak üzere $D_{\frac{dy}{dt}} b_j$ Weingarten denklemini

$$D_{\frac{dy}{dt}} b_j = -(S_{b_j}(\frac{dy}{dt})) + \overline{\overline{D}}^{\perp}_{\frac{dy}{dt}} b_j, \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad (IV.2.14)$$

şeklinde tanjant ve norma bileşenler cinsinden yazabiliriz. E^n in koneksiyonuna göre $D_{\frac{dy}{dt}} b_j = \frac{db_j}{dt}$, $m+1 \leq j \leq n$, olduğundan

$$\frac{db_j}{dt} = -(\overline{S}_{b_j}(\frac{dy}{dt})) + \overline{\overline{D}}^{\perp}_{\frac{dy}{dt}} b_j, \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad (IV.2.15)$$

olur. Burada (IV.2.13) ve (IV.2.16) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$\Omega_t(b_j) = \overline{\overline{D}}^{\perp}_{\frac{dy}{dt}} b_j - S_{b_j}(\frac{dy}{dt}) + A_t(S_{a_j}(\frac{dx}{dt})) \qquad (IV.2.16)$$

elde edilir. Halbuki, b_j, $m+1 \leq j \leq n$, vektör alanları (y_t) eğrisi boyunca N ye normal olduğundan yuvarlanmanın tanımından dolayı $\Omega_t(b_j)$ N ye teğettir. Ohalde $\Omega_t(b_j)$ nin normal uzayda bileşeni yoktur. Ayrıca $S_{b_j}(\frac{dy}{dt})$ ve $A_t(S_{a_j}(\frac{dx}{dt}))$ şekil operatörleri de (y_t) eğrisi boyunca N ye teğettir. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}^{\perp}_{\frac{dy}{dt}} = 0$$

olmak zorundadır. Bu nedenle N nin normal koneksiyonuna göre b_j, $m+1 \leq j \leq n$, vektör alanları (y_t) eğrisi boyunca paralel vektör alanlarıdır. Böylece (IV.2.16) ifadesi

$$\Omega_t(b_j) = A_t(S_{a_j}(\frac{dx}{dt})) - (S_{b_j}(\frac{dy}{dt})), \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad (IV.2.17)$$

biçimine indirgenir.

Böylece şu sonuç ispatlanmış olur.

IV.2.1 <u>Sonuç:</u> $\Omega_t : T_N(Y_t) \longrightarrow T_N(Y_t)^{\perp}$ ve $\Omega_t : T_N(Y_t)^{\perp} \longrightarrow T_N(Y_t)$ anti-simetrik dönüşümü olsun. Bu taktirde

$$b_i(t) = A_t(a_i(t)) \text{ ve } b_j(t) = A_t(a_j(t))$$

şeklinde tanımlanan b_i ve b_j vektör alanları N nin tanjant ve normal koneksiyonuna göre paraleldirler.

Şimdi M manifoldu için ρ ve N manifoldu için τ operatörlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $\forall X\in T_M(X)$ için

$$V:T_M(X)\times T_M(X) \longrightarrow T_M(X)^{\perp}$$
$$(X,Y) \longrightarrow V(X,Y)$$

olmak üzere

$$\rho_X:T_M(X) \longrightarrow T_M(X)^{\perp}$$
$$Y \longrightarrow \rho_X(Y) = V(X,Y),\ \forall Y\in T_M(X) \qquad \text{(IV.2.18)}$$

ve

$$\rho_X:T_M(X)^{\perp} \longrightarrow T_M(X) \qquad \text{(IV.2.19)}$$
$$U \longrightarrow \rho_X(U) = -\ S_U(X),\ \forall U\in T_M(X)^{\perp}$$

Benzer olarak N nin herbir Y noktası ve $X\in T_N(Y)$ için

$$\tau_X:T_N(Y) \longrightarrow T_N(Y)^{\perp}$$
$$Y \longrightarrow \tau_X(Y) = \overline{V}(X,Y),\ \forall Y\in T_N(Y) \qquad \text{(IV.2.20)}$$

ve

$$\tau_X:T_N(Y)^{\perp} \longrightarrow T_N(Y) \qquad \text{(IV.2.21)}$$
$$U \longrightarrow \tau_X(U) = -\ S_U(X),\ \forall U\in T_N(Y)^{\perp}$$

şeklinde τ_X operatörünü tanımlayalım. Bu operatörleri kullanırsak (IV.2.12) ve (IV.1.17) eşitlikleri, sırasıyla,

$$\Omega_t(b_i) = \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_i) - \lambda_t(\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_i)),\ 1\leq i\leq m,$$

ve $\qquad \text{(IV.2.22)}$

$$\Omega_t(b_j) = \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_j) - \lambda_t(\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_j)),\ m+1\leq j\leq n$$

eşitliklerine dönüşür. Kısalığın hatırı için

$$\rho_{\frac{dx}{dt}} = \rho_t \ \text{ve}\ \tau_{\frac{dy}{dt}} = \tau_t$$

ifadeleri kullanılır ve (IV.2.1) gözönüne alınırsa

$$\Omega_t(b_i) = \tau_t(b_i) - \lambda_t(\rho_t(\lambda^{-1}(b_i))),\ 1\leq i\leq m$$

ve $\qquad \text{(IV.2.23)}$

$$\Omega_t(b_j) = \tau_t(b_j) - \lambda_t(\rho_t(\lambda^{-1}(b_j))),\ m+1\leq j\leq n$$

olur. Bu ifade her b_i ve her b_j için sağlandığından

$$\Omega_t = \tau_t - \lambda_t \rho_t \lambda_t^{-1} \qquad \text{(IV.2.24)}$$

elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz.

IV.2.2 **Sonuç:** $\Omega_t \neq 0$ bir anti-simetrik matris olduğundan ρ_t ve τ_t dönüşümleri de anti-simetrik olmak zorundadır.

İspat: II.1.3 sonuçtan açıktır.

Şimdi şu özel durumu göz önüne alalım. E^n de bir m-boyutlu altmanifold M ve M nin üzerinde bir nokta X_o olsun. İkinci altmanifold olarak N yi ve m-düzlem olarak da $T_M(X_o)$'ı alalım.

$X \in T_M(X_o)$ ve başlangıç noktasından geçen her hangi bir eğri (x_t) olsun. Eğer M nin N üzerinde (x_t) eğrisi ile tanımlanmış bir $\{f_t\}$ yuvarlanması varsa, bu taktirde $\lambda_o = I$ olacağından (IV.2.22) ifadesi

$$\Omega_t = -\rho_X \qquad \text{(IV.2.25)}$$

olur. Bu X_o da V ikinci temel formun bir kinematik yorumunu verir. Çünkü , V yi tam olarak tanımlamaktadır.

Eğer ξ_t, (x_t) eğrisi boyunca normal vektörlerin bir alanı ise, bu taktirde

$$\xi_t = \sum_{j=m+1}^{n} q_j(t) a_j, \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad \text{(IV.2.26)}$$

yazabiliriz. Burada $\{a_{m+1}(t), \ldots, a_n(t)\}$ (x_t) eğrisi boyunca M nin normal uzayındaki koneksiyonuna göre paralel normal vektör alanlarıdırlar. (IV.2.1) den

$$\lambda(\xi_t) = \sum_{j=m+1}^{n} q_j(t) b_j, \quad m+1 \leq j \leq n, \qquad \text{(IV.2.27)}$$

dir. Burada $b_j(t) = \lambda_t(a_j(t))$ vektör alanları $(y_t) = (f_t(X_t))$ eğrisi boyunca N nin normal koneksiyonuna göre IV.2.1 sonuçtan paraleldirler.

$f_t(M)$ herbir t anında (y_t) eğrisi boyunca N ye teğet olduğundan $b_k(t) = \lambda_t(a_k(t))$, $1\leq k\leq n$, vektör alenlarını tanımlayabiliriz. $a_i(t)$, $1\leq i\leq m$, (x_t) eğrisi boyunca $a_i(o)$ başlangıç şartı ile paralel ortonormal vektör alanları olduğundan $< a_i,a_i >=1$ ve t ye göre diferensiyeli $< da_i/dt,a_i >=0$ dir. Diğer taraftan E^n in koneksiyonu D ve M nin koneksiyonu $\overline{D}$ olmak üzere gnelleştirilmiş Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_i = D_{\frac{dx}{dt}}a_i + V(\frac{dx}{dt},a_i),\ 1\leq i\leq m$$

dir. Burada

$$V(\frac{dx}{dt},a_i) = -\sum_{j=m+1}^{n} <S_{a_j}(\frac{dx}{dt}),a_i>a_j,1\leq i\leq m,\text{(IV.2.28)}$$

dir. $a_i(t)$ ler paralel vektör alanı olduğundan M nin koneksiyonuna göre

$$\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_i = 0$$

dır. Ayrıca E^n in koneksiyonuna göre $D_{\frac{dx}{dt}}a_i = \frac{da_i}{dt}$ olduğundan

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=m+1}^{n} c_{ij}a_j,\ c_{ij} = -<S_{a_j}(\frac{dx}{dt}),a_i>,\ 1\leq i\leq m, \qquad \text{(IV.2.29)}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $a_j(t)$, $m+1\leq j\leq n$, (x_t) eğrisi boyunca normal uzayda paralel ortonormal vektör alanı olduğundan $< a_j,a_j >=1$ ve t ye göre diferensiyeli $< \frac{da_j}{dt},a_j >=0$ olup, M nin normal koneksiyonuna göre $\overline{D}_{\frac{dx}{dt}}a_j = 0$, $m+1\leq j\leq n$, dir. E^n in koneksiyonuna göre $D_{\frac{dx}{dt}}a_j = \frac{da_j}{dt}$ türevinin a_j, $m+1\leq j\leq n$, doğrultusunda bileşeni yoktur.

Dolayısıyla

$$\frac{da_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji}a_i\ ,\ m+1\leq j\leq n, \qquad \text{(IV.2.30)}$$

yazbiliriz. Diğer taraftan $< a_i,a_j > = 0$,$1\leq i\leq m,m+1\leq j\leq n$, olduğundan t ye göre diferensiyeli alınır (IV.2.29) ve (IV.2.30) değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse $\lambda_{ji} = -c_{ij}$ elde edilir. Böylece şu eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_{ij} a_j \ , \ 1 \le i = m \\ \dfrac{da_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} a_i \ , \ m+1 \le j \le n \end{cases} \qquad (IV.2.31)$$

$b_i(t)$, $1 \le i \le m$, (y_t) eğrisi boyunca ortonormal vektör alanları olduğundan $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ ve t ye göre diferensiyeli $\langle db_i/dt, b_i \rangle = 0$ dir. Dolayısıyla db_i/dt nin b_i doğrultusunda bileşeni yoktur. Böylece

$$\frac{db_i}{dt} = \sum_{r+1}^{m} k_{ir} b_r + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} b_j \ , \ 1 \le i \le m, \qquad (IV.2.32)$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer olarak, $b_j(t)$, $m+1 \le j \le n$, (y_t) eğrisi boyunca N nin normal uzayında ortonormal vektör alanları olduğundan $\langle b_j, b_j \rangle = 1$ ve t ye göre diferensiyeli $\langle db_j/dt, b_j \rangle = 0$ dır. Ohalde db_j/dt türevinin, b_j, $m+1 = j = n$, doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla

$$\frac{db_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} y_{ji} b_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{js} b_s \ , \ m+1 \le j \le n, \qquad (IV.2.33)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (IV.2.32) ve (IV.2.33) eşitlikleri kullanılırsa $y_{ji} = -x_{ij}$ olarak elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{db_i}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} k_{ir} b_r + \sum\limits_{j=m+1}^{n} x_{ij} b_j \ , \ 1 \le i \le m, \\ \dfrac{db_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} b_i + \sum\limits_{s=m+1}^{n} k_{js} b_s \ , \ m+1 \le j \le n \end{cases} \qquad (IV.2.34)$$

Ayrıca (IV.2.1) ile tanımlanan $b_i(t) = A_t(a_i(t))$, $1 \le i \le m$, eşitliğinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (IV,2,31) ve (IV.2.34) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_t(b_i) = \sum_{r=1}^{m} k_{ir} b_r + \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}-c_{ij}) b_j, \quad 1 \le i \le m \qquad \text{(IV.2.35)}$$

ifadesi elde edilir. Benzer olarak (IV.2.1) ile tanımlanan $b_j(t)=\lambda_t(a_j(t))$, $m+1 \le j \le n$, ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (IV.2.31) ve (IV.2.34) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_t(b_j) = \sum_{i=1}^{m} (c_{ij}-x_{ij}) b_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{js} b_s, \quad m+1 \le j \le n \qquad \text{(IV.2.36)}$$

ifadesi elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \Omega_t(b_i) = \sum_{r=1}^{m} k_{ir} b_r + \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}-c_{ij}) b_j, & 1 \le i \le m \\ \Omega_t(b_j) = \sum_{i=1}^{m} (c_{ij}-x_{ij}) b_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{is} b_s, & m+1 \le j \le n \end{cases} \qquad \text{(IV.2.37)}$$

b_i, $1 \le i \le m$, teğet vektör alanı olduğundan yuvarlanmanın tanımından dolayı $\Omega_t(b_i)$ normal vektör alanıdır. Dolayısıyla $\Omega_t(b_i)$ nin teğet bileşeni sıfırdır. Benzer olarak b_j, $m+1 \le j \le n$, normal vektör alanı olduğundan yuvarlanmanın tanımından dolayı $\Omega_t(b_j)$ teğet vektör alanıdır. Dolayısıyla $\Omega_t(b_j)$ nin normal bileşeni sıfırdır. Böylece (IV.2.37) eşitlikleri

$$\begin{cases} \Omega_t(b_i) = \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}-c_{ij}) b_j, & 1 \le i \le m \\ \Omega_t(b_j) = \sum_{i=1}^{n} (c_{ij}-x_{ij}) b_i, & m+1 \le j \le n \end{cases} \qquad \text{(IV.2.38)}$$

biçimine indirgenir. (IV.2.38) ifadesini matris formunda aşagıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \Omega_t(b_1) \\ \vdots \\ \Omega_t(b_m) \\ \Omega_t(b_{m+1}) \\ \vdots \\ \Omega_t(b_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1(m+1)}-c_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n}-c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(m+1)}-c_{m(m+1)} & \cdots & c_{mn}-x_{mn} \\ c_{1(m+1)}-x_{1(m+1)} & \cdots & c_{m(m+1)}-x_{m(m+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}-x_{1n} & \cdots & c_{mn}-x_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Şimdi daha önce tanımladığımız ρ ve τ operatörlerini tekrar göz önüne alalım. Bu operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\rho_{\frac{dx}{dt}} : T_m(X) \longrightarrow T_M(X)^{\perp}$$

$$a_i \longrightarrow \rho_{\frac{dx}{dt}}(a_i) = V(\tfrac{dx}{dt}, a_i), \quad 1 \leq i \leq m$$

Burada $V(\frac{dx}{dt}) = -\sum_{j=m+1}^{n} \langle S_{a_j}(\frac{dx}{dt}), a_i \rangle a_j$ olduğundan

$$\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_i) = \sum_{j+m+1}^{n} c_{ij} a_j, \quad c_{ij} = \langle S_{a_j}(\tfrac{dx}{dt}), a_i \rangle \quad \text{(IV.2.39)}$$

dir. Ayrıca

$$\rho_{\frac{dx}{dt}} : T_M(X)^{\perp} \longrightarrow T_M(X)$$

$$a_j \longrightarrow \rho_{\frac{dx}{dt}}(a_j) = -S_{a_j}(\tfrac{dx}{dt}), \quad m+1 \leq j \leq n$$

dir. Bu da Weingarten denklemi olup daha önceki gibi bileşenleri cinsinden

$$\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} a_i, \quad m+1 \leq j \leq n$$

şeklinde yazabiliriz. $\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_i) \in T_M(X)^{\perp}$ ve $\rho_{\frac{dx}{dt}}(a_j) \in T_M(X)$ olduğundan

$$\langle \rho_{dx/dt}(a_i), \rho_{dx/dt}(a_j) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq j \leq n$$

dir. Bulduğumuz değerleri yerine yazar ve t ye göre diferensiyel alır (IV.2.29) ve (IV.2.30) eşitlikleri kullanılırsa

$\lambda_{ji}=-c_{ij}$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \rho_{\frac{dx}{dt}}(a_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_{ij}a_j \ , \ 1\leq i\leq m \\ \rho_{\frac{dx}{dt}}(a_j) = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}a_i \ , \ m+1\leq j\leq n \end{cases} \qquad (IV.2.40)$$

Buradan (IV.2.1) ve (IV.2.4 dan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{cases} \lambda_t\rho_{\frac{dx}{dt}}\lambda_t^{-1}(b_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_{ij}b_j \ , \ 1\leq i\leq m \\ \lambda_t\rho_{\frac{dx}{dt}}\lambda_t^{-1}(b_j) = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}b_i \ , m+1\leq j\leq n \end{cases} \qquad (IV.2.41)$$

(IV.2.41) den $\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}$ matrisi aşağıdaki gibi olur

$$\begin{bmatrix} \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(b_1) \\ \vdots \\ \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(b_m) \\ \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(b_{m+1}) \\ \vdots \\ \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(b_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1(m+1)} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{m(m+1)} & \cdots & c_{mn} \\ -c_{1(m+1)} & \cdots & -c_{m(m+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{1n} & \cdots & -c_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan $b_i(t)$, $1\leq i\leq m$, vektör alanları N üzerinde (y_t) eğrisi boyunca (IV.2.1) sonuçtan paralel olduğundan N nin koneksiyonuna göre

$$\overline{\overline{D}}_{\frac{dy}{dt}} b_i = 0, \ 1\leq i\leq m$$

dir. Ohalde Gauss denkleminden db_i/dt türevinin b_i ler doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla db_i/dt türevini

$$\frac{db_i}{dt} = \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}b_j \ , \ 1\leq i\leq m, \qquad (IV.2.42)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca $b_j(t)$, $m+1\le j\le n$, vektör alanları N üzerinde (y_t) eğrisi boyunca (IV.2.1) sonuçtan paralel olduğundan N nin normal koneksiyonuna göre,

$$\overline{D}_{\frac{dy}{dt}} b_j = 0 \ , \ m+1\le j\le n$$

dir. Bu da db_j/dt türevinin b_j ler doğrultusunda bileşeninin olmadığını gösterir. Böylece Weingarten denkleminden db_j/dt türevini bileşenleri cinsinden

$$\frac{db_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} y_{ji} b_i \ , \ m+1\le j\le n, \qquad \text{(IV.2.43)}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\tau_{\frac{dy}{dt}} : T_N(Y_t) \longrightarrow T_N(Y_t)^{\perp}$$
$$b_i \longrightarrow \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_i) = \overline{V}(\tfrac{dy}{dt}, b_i), \ 1\le i\le m$$

dir. Burada $\overline{V}$ ikinci temel formu

$$\overline{V}(\tfrac{dy}{dt}, b_i) = -\sum_{j=m+1}^{n} < S_{b_j}(\tfrac{dy}{dt}), b_i > b_j$$

olduğundan

$$\tau_{\frac{dy}{dt}}(b_i) = \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} b_j \ , \ c_{ij} = -<S_{b_j}(\tfrac{dy}{dt}), b_i>, \ 1\le i\le m, \qquad \text{(IV.2.44)}$$

yazbiliriz. Ayrıca

$$\tau_{\frac{dy}{dt}} : T_N(Y_t)^{\perp} \longrightarrow T_N(Y_t)$$
$$b_j \longrightarrow \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_j) = -S_{b_j}(\tfrac{dy}{dt}), \ m+1\le j\le n$$

dir. Bu da Weingarten denklemi olup bileşenleri cinsinden

$$\tau_{\frac{dy}{dt}}(b_j) = \sum_{i=1}^{m} y_{ji} b_i \ , \ m+1\le j\le n \qquad \text{(IV.2.45)}$$

şeklinde yazılır. $\tau_{\frac{dy}{dt}}(b_i) \in T_N(Y_t)^{\perp}$ ve $\tau_{\frac{dy}{dt}}(b_j) \in T_N(Y_t)$

olduğundan $< \tau_{dy/dt}(b_i), \tau_{dy/dt}(b_j) > = 0$, $1 \le i \le m$ ve $m+1 \le j \le n$

dir. Yukarıda elde edilen ifadeler yerine yazılır t ye göre diferensiyel alınır (IV.2.42) ve (IV.2.43) eşitlikleri kullanılırsa $y_{ji} = -x_{ij}$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} x_{ij} b_j \;, & 1 \le i \le m \\ \tau_{\frac{dy}{dt}}(b_j) = -\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} b_i \;, & m+1 \le j \le n \end{cases} \qquad \text{(IV.2.46)}$$

(IV.2.45) eşitliklerinden τ_t matrisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \tau_t(b_1) \\ \vdots \\ \tau_t(b_m) \\ \tau_t(b_{m+1}) \\ \vdots \\ \tau_t(b_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & x_{1(m+1)} & & x_{1n} \\ & & & & & \\ 0 & & 0 & x_{m(m+1)} & \cdots & x_{mn} \\ -x_{1(m+1)} & \cdots & -x_{m(m+1)} & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -x_{1n} & & -x_{mn} & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_m \\ b_{m+1} \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

τ_t ve $\lambda_t \rho_t \lambda_t^{-1}$ matrisleri anti-simetrik olup IV.2.2 sonuç ispatlanmış olur. Ayrıca τ_t ile $\lambda_t \rho_t \lambda_t^{-1}$ farkı Ω_t anti-simetrik matrisini verir. Yani

$$\Omega_t = \tau_t - \lambda_t \rho_t \lambda_t^{-1}$$

olduğunu matrisel olarak göstermiş olduk.

IV.3 BİR n-BOYUTLU KÜRENİN YUVARLANMASI

Bundan önceki bölümde yaptığımız işlemleri yüksek boyutlara genelleştireceğiz. (n+1)- boyutlu E^{n+1} Öklid uzayında S^n birim küresi

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$$

denklemiyle verilsin. S^n üzerinde $X_o=(o,o,\ldots,-1)$ noktasında başlayandiferensiyellenbilir bir eğri (x_t) olsun. Σ teğet hiperdüzlemi $x_{n+1}=-1$ ile verilsin. E^{n+1} Öklid uzayının standard bazı $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ olsun. Her t anında Γ düzlemi ile değme noktası $Y_t=f_t(X_t)$ olacak şekilde 1-parametreli f_t hareketi $A_t\in SO(n+1)$ olmak üzere (II.1.4) ile verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_t(X_t)&=-e_{n+1} \\ a_t&=Y_t+e_{n+1} \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.1)}$$

denklemlerini yazabiliriz. (II.1.4) ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{dY}{dt}=\frac{dA}{dt}X_t+A_t\frac{dX}{dt}+\frac{da}{dt}$$

olur. S^n birim küresi Γ düzlemine teğet olduğundan $Y_t=f_t(X_t)$ olup her t anında bu noktaların geometrik yeri pol eğrisini oluşturur. Dolayısıyla Y_t ani dönme merkezidir. Böylece $\dot{Y}|_o=0$ dır. Y_t ani dönme merkezi ve $(y_t)=(f_t(X_t))$ değme noktalarının ve ani pol noktalarının yeri olduğundan

$$\frac{dA}{dt}X_t+\frac{da}{dt}=0$$

dır. Böylece

$$\Omega_t Y_t+\frac{da}{dt}=0$$

olarak bulunur. Buradan da (IV.3.1) gözönüne alındığında

$$\Omega_t(e_{n+1})=\frac{da}{dt}=\frac{dY}{dt}\ ,\ A_t(X_t)=-e_{n+1}\ \text{ve}\ a=Y_t+e_{n+1} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

elde edilir. $n>3$ için açısal hızdan bahsedemeyebiliriz. Σ üzerinde f_t yuvarlanmasını tanımlamak için her bir vektörü e_{n+1} e dönüştüren Ω_t dönüşümüne ihtiyacımız vardır. Bu şart altında $\Omega_t(e_{n+1}) = \frac{dY}{dt}$ denklemi Ω_t yi tek olarak tanımlar. S^n üzerinde (x_t) eğrisi boyunca $b_i(t)$ vektör alanların

$$A_t(b_i(t))=e_i,\ 1\leqslant i\leqslant n \qquad \text{(IV.3.3)}$$

şeklinde tanımlayalım. $b_i(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca S^n küresinin teğet vektör alanlarıdırlar. Daha önceki gibi $b_i(t)$ lerin S^n üzerinde S^n in koneksiyonuna göre paralel olduğunu gösterebiliriz.

Bunun için (IV.3.3) ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınıp düzenlenirse

$$\frac{db_i}{dt}=-A^{-1}\Omega_t(e_i) \qquad \text{(IV.3.4)}$$

elde edilir. $\Omega_t(e_i)$, e_{n+1} in bir skalar çarpımı olduğundan db_i/dt nin S^n ye dik olduğu görülür. Yani

$$\frac{db_i}{dt} = \lambda x_t .$$

dir. Dolayısıyla S^n in koneksiyonuna göre $b_i(t)$ vektör alanları (x_t) eğrisi boyunca paralel vektör alanlarıdırlar. Ayrıca S^n küresi Σ ya teğet ve $Y_t=f_t(X_t)$ ani pol noktaları olduğundan

$$A\left(\frac{dX}{dt}\right)=\frac{dY}{dt}$$

dir. Bu ise (y_t) eğrisinin (x_t) eğrisini bir açılımı olması demektir.

V. BÖLÜM

V.1 HOMOTETİK HAREKETLER VE ALTMANİFOLDLAR

V.1.1 Tanım (Homotetik hareket): n-boyutlu Öklid uzayı E^n de

$$F = \begin{bmatrix} h\lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile belirli dönüşüme E^n de bir homotetik hareket denir, burada; $h=hI_n$ bir skalar matris, $\lambda\in SO(n)$ ve $a\in IR^n{}_1$ dir.

Keyfi bir $X\in E^n$ noktası için

$$F(X) = h\lambda(X) + a$$

dir.

V.1.2 Tanım (1-parametreli homotetik hareket): $J\subset IR$ sıfırı ihtiva eden bir aralık olsun. $h:J \longrightarrow IR$ fonksiyonu, $\lambda\in SO(n)$ matrisi ve a kolon matrisi t ye göre diferensiyellenebilir olmak üzere, elemanları;

$$F(t) = \begin{bmatrix} h(t)\lambda(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (V.1.1)$$

biçiminde tanımlı $F(t)$ cümlesine E^n in 1-parametreli homotetik hareketi denir. Her t için $h(t)=sbt$ ve $h(t)>0$ alınacaktır. Ayrıca yalnızca öteleme ve yalnızca dönmeyi incelemelerimizin dışında bırakmak için, sırasıyla,

$$\frac{dh}{dt}\lambda + h\frac{d\lambda}{dt} \neq 0 \text{ ve } \frac{da}{dt} \neq 0$$

kabul edilecektir. h bir skalar matris olduğundan

$$h^{-1} = \frac{1}{h}, \; h^T = h$$

dır. $B=h\lambda$ olduğundan

$$B^{-1}=h^{-1}A^{-1}=\frac{1}{h}A^{T}$$

dir. Böylece II. bölümde tanımladığımız ani hareket

$$\frac{dF}{dt}F_t^{-1}=\begin{bmatrix} H_t & V_t \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (V.1.2)$$

elde edilir, burada;

$$H_t = \frac{dB}{dt}B^{-1} \;,\; V_t = -H_t a + \frac{da}{dt} \qquad (V.1.3)$$

dir. Ayrıca

$$H_t = \frac{dB}{dt}B^{-1} = \left(\frac{dh}{dt}A + h\frac{dA}{dt}\right)B^{-1} \;,\; A\in SO(n)$$

$$H_t = \theta_t + \Omega_t \qquad (V.1.4)$$

olarak elde edilir. Burada $\theta_t = \frac{dh}{dt}h^{-1}$ ve $\Omega_t = \frac{dA}{dt}A^T$ olup, θ_t bir skalar matris ve Ω_t bir anti-simetrik matristir.

E^n de m-boyutlu iki altmanifold M ve N olsun. M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (x_t) ve $a_i(t)$, $1\leq i\leq m$, (x_t) eğrisi boyunca paralel teğet vektör alanı olsun. X_o noktasında M ve N nin birbirlerine teğet olduğunu gözönüne alalım. E^n de bir F_t 1-parametreli homotetik hareketi her t için (V.1.1) ile ve $F_t(X_t)=Y_t$ noktasında $F_t(M)$ ve N nin tanjant uzayları çakışık olacak şekilde verilsin.

N manifoldu üzerinde (y_t) eğrisi boyunca vektör alanlarını

$$b_k(t) = B_t(a_k(t)),\; 1\leq k\leq n \qquad (V.1.5)$$

şeklinde tanımlayalım. $B=hA$, $A\in SO(n)$ olduğundan

$$\langle b_i, b_r\rangle = h^2\delta_{ir} \qquad 1\leq i,r\leq m$$

dir. Diğer taraftan

$$< b_i, b_i > = < B(a_i), B(a_i) >$$
$$= h^2 < a_i, a_i >$$
$$= h^2$$

olduğundan $|b_i|^2 = h^2$ dir. Dolayısıyla $|b_i| = h$ olur. Buradan görüldüğü gibi $b_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, vektör alanları (y_t) eğrisi boyunca ortogonaldirler.

$$V_i = \frac{b_i}{|b_i|} \ , \quad 1 \leq i \leq m$$

dersek $| V_i | = 1$ olur. Dolayısıyla $\{V_1, \ldots, V_m\}$ bir ortonormal sistemdir. Şimdi (V,1,5) sistemini gözönüne alalım. Böylece

$$b_i = B(a_i) \ , \quad V_i = \frac{b_i}{|b_i|} = \frac{b_i}{h}$$

$$V_i = A(a_i) \ , \quad A = h^{-1}B \ , \quad 1 \leq i \leq m \qquad (V.1.6)$$

elde edilir.

Ayrıca $a_j(t)$, $m+1 \leq j \leq n$, (x_t) eğrisi boyunca M nin normal uzayında paralel normal vektör alanı olsun.

N manifoldu üzerinde (y_t) eğrisi boyunca normal vektör alanını

$$b_j = B(a_j) \ , \quad m+1 \leq j \leq n$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$< b_j, b_s > = < B(a_j), B(a_s) > \ , \quad m+1 \leq j, s \leq n$$
$$= h^2 < a_j, a_s >$$
$$= h^2 \delta_{ij}$$

ve

$$< b_j, b_j > = < B(a_j), B(a_j) > \ , \quad m+1 \leq j \leq n$$
$$= h^2 < a_j, a_j >$$
$$= h^2$$

bulunur. Dolayısıyla $\{b_{m+1},\ldots,b_n\}$ bir ortogonal sistemdir. Eğer

$$V_j = \frac{b_j}{|b_j|} = \frac{b_j}{h}\ , \quad m+1\leqslant j\leqslant n$$

dersek $\{V_{m+1},\ldots,V_n\}$ bir ortonormal sistem olur. Şimdi (V.1.5) sistemini gözönüne alalım. Böylece

$$b_j = B(a_j)\ , b_j = hV_j\ , \quad m+1\leqslant j\leqslant n$$

işlemler yapılırsa

$$V_j = \lambda(a_j)\ , \ \lambda = h^{-1}B\ , \ m+1\leqslant j\leqslant n \qquad (V.1.7)$$

olarak elde edilir.

$a_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant m$, (x_t) eğrisi boyunca paralel olduğundun (IV.2.29) dan dolayı

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=m+1}^{n} c_{ij}\, a_j\ , \ 1\leqslant i\leqslant m \qquad (V.1.8)$$

yazabiliriz. Benzer olarak $a_j(t)$, $m+1\leqslant j\leqslant n$, (x_t) eğrisi boyunca normal uzayda paralel normal vektör alanı olduğundan (IV.2.30) dan

$$\frac{da_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} a_i\ , \quad m+1\leqslant j\leqslant n \qquad (V.1.9)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $< a_i, a_j > = 0$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (V.1.8) ve (V.1.9) ifadeleri kullanılırsa $\lambda_{ji} = - c_{ij}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = \displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} c_{ij} a_j\ , \ 1\leqslant i\leqslant m \\[2ex] \dfrac{da_j}{dt} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_{ij} a_i\ , \ m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases} \qquad (V.1.10)$$

Diğer taraftan $< V_i, V_i > = 1$ olduğundan

$< dV_i/dt, V_i > = 0$ dir. Dolayısıyla dV_i/dt nin V_i doğrultusunda bileşeni yoktur. Böylece dV_i/dt türevini

$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{r=1}^{m} k_{ir}V_r + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}V_j \ , \ 1<i<m \qquad (V.1.11)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca $< V_j, V_j > = 1$ olduğundan $< dV_j/dt, V_j > = 0$ dir. Dolayısıyla dV_j/dt türevinin V_j doğrultusunda bileşeni yoktur. Böylece dV_j/dt türevini

$$\frac{dV_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} y_{ji}V_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{js}V_s \ , \ m+1 \leqslant j \leqslant n \qquad (V.1.12)$$

biçiminde yazabiliriz. Diğer taraftan $< V_i, V_j > = 0$ olduğundan bu ifadenin t ye göre diferensiyeli alınır (V.1.11) ve (V.1.12) eşitlikleri kullanılırsa $y_{ji} = - x_{ij}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \dfrac{dV_i}{dt} = \sum_{r=1}^{m} k_{ir}V_r + \sum_{j=m+1}^{n} k_{ij}V_j \ , \ 1 \leqslant i \leqslant m \\ \\ \dfrac{dV_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{js}V_s \ , m+1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \qquad (V,1,13)$$

$V_i = \lambda(a_i)$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (V.1.10) ve (V.1.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_t(V_i) = \sum_{r=1}^{m} k_{ir}V_r + \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}-c_{ij})V_j \ , \ 1 \leqslant i \leqslant m \qquad (V.1.14)$$

elde edilir. Benzer olarak $V_j = \lambda(a_j)$ ifadesinin t ye göre diferensiyeli alınır (II.1.9), (V,1,10) ve (V.1.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_t(V_j) = \sum_{i=1}^{m} (c_{ij}-x_{ij})V_i + \sum_{s=m+1}^{n} k_{is}V_s, \ m+1 \leqslant j \leqslant n \qquad (V.1.15)$$

elde edilir.

Ω_t anti-simetrik dönüşümü

$$\Omega_t : T_N(Y_t) \longrightarrow T_N(Y_t)^{\perp} \text{ ve } \Omega_t : T_N(Y_t)^{\perp} \longrightarrow T_N(Y_t)$$

olduğundan $\Omega_t(V_i)$ nin teğet bileşeni ve $\Omega_t(V_j)$ nin normal bileşeni sıfırdır. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \Omega_t(V_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n}(x_{ij}-c_{ij})V_j \ , \quad 1\leqslant i\leqslant m \\ \\ \Omega_t(V_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}(c_{ij}-x_{ij})V_i \ , \quad m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases} \tag{V.1.16}$$

Buradan da Ω_t ye karşılık gelen matris

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1(m+1)}-c_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n}-c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & x_{m(m+1)}-c_{m(m+1)} & \cdots & x_{mn}-c_{mn} \\ c_{1(m+1)}-x_{1(m+1)} & \cdots & c_{m(m+1)}-x_{1(m+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}-x_{1n} & & c_{mn}-x_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Diğer taraftan

$$\rho_t : T_M(X) \longrightarrow T_M(X)^{\perp}$$
$$a_i \longrightarrow \rho_t(a_i) = V(\tfrac{dx}{dt}, a_i)$$

ve

$$\rho_t : T_M(X)^{\perp} \longrightarrow T_M(X)$$
$$a_j \longrightarrow \rho_t(a_j) = -S_{a_j}(\tfrac{dx}{dt})$$

olarak tanımlanan ρ_t operatörünü gözönüne alalım. Bu ifadeleri bileşenleri cinsinden (IV.2.39) ve (IV.2.40) eşitliklerinde olduğu gibi

$$\begin{cases} \rho_t(a_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_{ij}a_j \ , & 1\leqslant i\leqslant m \\ \rho_t(a_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{ji}a_i \ , & m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases} \qquad (V.1.17)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca

$$< \rho_t(a_i),\rho_t(a_j) > = 0$$

dir. (V.1.17) eşitliği yerine yazılır t ye göre diferensiyel alınıp düzenlenirse $\lambda_{ji}=-c_{ij}$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \rho_t(a_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_{ij}a_j \ , & 1\leqslant i\leqslant m \\ \rho_t(a_j) = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}a_i \ , & m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases} \qquad (V.1.18)$$

Diğer taraftan $V_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant m$, vektör alanları N üzerinde (y_t) eğrisi boyunca IV.2.1 sonuçtan paralel olduğundan N nin koneksiyonuna göre

$$\bar{D}_{\frac{dy}{dt}}V_i = 0, \ 1\leqslant i\leqslant m$$

dir. Ohalde Gauss denkleminden dV_i/dt türevinin V_i doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla dV_i/dt türevini

$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}V_j \ , \ 1\leqslant i\leqslant m \qquad (V.1.19)$$

biçiminde yazabiliriz. Benzer olarak $V_j(t)$, $m+1\leqslant j\leqslant n$, vektör alanları N üzerinde (y_t) eğrisi boyunca IV.2.1 sonuçtan paralel olduğundan N nin normal koneksiyonuna göre

$$\bar{D}_{\frac{dy}{dt}}V_j = 0, \ m+1\leqslant j\leqslant n$$

dir. Bu da dV_j/dt türevinin V_j doğrultusunda bileşeninin olmadığını gösterir. Böylece Weingarten denkleminden dV_j/dt türevini bileşenleri cinsinden

$$\frac{dV_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} y_{ji} V_i \;, \quad m+1 \leqslant j \leqslant n \tag{V.1.20}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \tau_t : T_N(Y_t) &\longrightarrow T_N(Y_t)^{\perp} \\ V_i &\longrightarrow \tau_t(V_i) = \overline{V}(\tfrac{dy}{dt}, V_i) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_t : T_N(Y_t)^{\perp} &\longrightarrow T_N(Y_t) \\ V_j &\longrightarrow \tau_t(V_j) = -S_{V_j}(\tfrac{dy}{dt}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan τ_t operatörünü gözönüne alalım. Bu ifadeleri bileşenleri cinsinden (IV.2.44) ve (IV.2.45) eşitliklerinde olduğu gibi

$$\begin{cases} \tau_t(V_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} x_{ij} V_j, & 1 \leqslant i \leqslant m \\ \tau_t(V_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_{ji} V_i \;, & m+1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{V.1.21}$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca τ_t nin tanımından dolayı

$$< \tau_t(V_i), \tau_t(V_j) > = 0$$

dir. (V.1.21) eşitliği yerine yazılır t ye göre diferensiyel alınıp düzenlenirse $y_{ji} = -x_{ij}$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{cases} \tau_t(V_i) = \sum\limits_{j=m+1}^{n} x_{ij} V_j \;, & 1 \leqslant i \leqslant m \\ \tau_t(V_j) = -\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} V_i \;, & m+1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{V.1.22}$$

(V.1.22) eşitliklerinde τ_t ye karşılık gelen matris

$$\tau_t=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(m+1)} & \cdots & x_{mn} \\ -x_{1(m+1)} & \cdots & -x_{m(m+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ -x_{1n} & \cdots & -x_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Diğer taraftan (V.1.5) ve (V.1.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(V_i) &= \sum_{j=m+1}^{n} c_{ij}V_j,\quad 1\leqslant i\leqslant m \\ \lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}(V_j) &= -\sum_{i=1}^{m} c_{ij}V_i,\quad m+1\leqslant j\leqslant n \end{aligned} \qquad (V.1.23)$$

elde edilir. Böylece $\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}$ in matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1(m+1)} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{m(m+1)} & \cdots & c_{mn} \\ -c_{1(m+1)} & \cdots & -c_{m(m+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{1n} & \cdots & -c_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan $\tau_t-\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}$ farkı alındığından Ω_t ye eşit olduğu görülür. Yani $\Omega_t=\tau_t-\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}$ dir. Diğer taraftan $H_t=\theta_t+\Omega_t$ olduğundan $H_t=\theta_t+\tau_t-\lambda_t\rho_t\lambda_t^{-1}$ olur. Eğer $\theta_t=(\frac{dh}{dt})h^{-1}=\kappa$ dersek H_t ye karşılık gelen matris aşağıdaki gibi olur.

$$H_t=\begin{bmatrix} \kappa & \cdots & 0 & x_{1(m+1)}-c_{1(m+1)} \cdots x_{1n}-c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa & x_{m(m+1)}-c_{m(m+1)} \cdots x_{mn}-c_{mn} \\ c_{1(m+1)}-x_{1(m+1)} & \cdots & c_{m(m+1)}-x_{m(m+1)} & \kappa \qquad \cdots \qquad 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_{1n}-x_{1n} & \cdots & c_{mn}-x_{mn} & 0 \qquad \cdots \qquad \kappa \end{bmatrix}$$

Özel olarak h=1 olması halihde $\theta_t=0$ olup $H_t=\Omega_t$ olur. Bu ise bize daha önceki bölümlerde verdiğimiz yuvarlanma hareketlerinin tamamının uygun boyutlar ve manifoldlar seçilmek şartıyla bu hareketin özel halleri olduğunu gösterir.

Ayrıca bu bölümde tanımlanan hareket daima regülerdir. n-nin tek veya çift olması yuvarlanma hareketini değiştirmez. Burada hareket bir altmanifoldun diğer bir altmanifold üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri boyunca kayarak yuvarlanmadır.

ÖZET

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir: Birinci ve ikinci bölümler diferensiyel geometri ve kinematiğin temel kavramlarına ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde, E^3 de bir küre veya yüzeyin yuvarlanmasının modelleri incelendi.

Dördüncü bölümde, onlar yüksek boyutlara genelleştirildi ve bir hiperyüzeyin diğer bir hiperyüzey üzerinde yuvarlanması incelendi. Ayrıca, E^n de bir m-boyutlu M altmanifoldunun diğer bir m-boyutlu N altmanifoldu üzerinde yuvarlanması tartışıldı.

Beşinci bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır. Burada m-boyutlu bir M altmanifoldunun diğer bir m-boyutlu N altmanifoldu üzerinde yuvarlanmasını E^n de homotetik hareketlere genelleştirdik. Özel olarak h=1 olduğu zaman dördüncü bölümde verilen sonuçları elde ederiz.

ABSTRACT

This study is organized as follows: Section I and II are devoted to the basic and necessary concepts in differential geometry and kinematics.

In section III, the model of rolling a ball and a surface in E^3, has been given.

In section IV, the model given in section III, extended to higher dimensions and studied the rolling of a hypersurfaces on another hypersurfaces. We also discused the rolling an m-dimensional submanifold M on another m-dimensional N in E^n.

In section V which is the original part of the study where extended the rolling an m-dimensional submanifold M on another m-dimensional submanifold N in E^n to homothetic motions.

Inspecial case, when h=1 we obtain the results given in section IV.

KAYNAKLAR

Bootby, W.M. "An Introduction to Differentiable Manifolds an Riemanien Geometry" Academic Press, London.1975

Chen, B.Y. Geometry of Submanifold, Marcel Dekkar, Newyork, 1973.

Hacısalihoğlu, H.H. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Mat. No=1, Malatya, 1980

Hacısalihoğlu, H.H. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Mat-No:2 Elazığ, 1980

Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, 1983

Hacısalihoğlu- H.H. "On The Geometry Of In The Euclidean n-Space" Faculté des Science de I'Université d'Ankara Ankara, Turquié, 1974.

Hacısalihoğlu, H.H. "On The Rolling Of One Curve Or Surface Upon Another" Proceedings Of The Royal Irish Academy, Vol.71, Sec.A,Num.2, Dublin, 1971.

Hacısalihoğlu, H.H. "On Closed Spherical Motions" Quarterly Of Applied Mathematics, pp. 269-275, Brown University, 1971.

Hicks, N.J. Notes On Diferential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, pp.1-60, London, 1974.

Keleş, S. "On The Joachimsthal Theorem In E^3" Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi Sayı 2, Elazığ,1982

Keleş, S "Manifoldlar için Joachimsthal Teoremleri", Doktora tezi, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi, Elazığ,1982

Matsushima, Y. Diferentiable Manifold. Marcel,Inc.Newyork, 1972 (Translated by E.T. Kobayashi) pp.25-80

Müller, H.R. Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitese Fen Fakülsi yayınları, Um.96. Mat.27, Ankara, 1963.

Nomizu, K. "Kinematics And Diferentiable Geometry Of Submanifolds" *Thoku Math. Journ.* 30(1978), 623-637, 1977.