204

REGLE ALTMANİFOLDLAR

Recep ASLANER

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN VE SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜLERİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav

Yönergesi'nin

Matematik Anabilim Dalı için öngördüğü

BİLİM UZMANLIĞI TEZİ

olarak hazırlanmıştır

MALATYA

Şubat, 1989

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında

BİLİM UZMANLIĞI TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. Sadık Keleş

Üye Doç. Dr. Turgut Öziş

Üye Yrd. Doç. Dr. Mustafa Çalışkan

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../ 1989

Prof.Dr. A.Nihat BOZCUK

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.C. İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Sayın Doç.Dr.Sadık KELEŞ'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Sayfa No

GİRİŞ

I.1 MANİFOLDLARLA İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

I.1.1 **Tanım** (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir cümle ve X in altcümlelerinin bir kolleksiyonu ζ olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise ζ kolleksiyonuna X üzerinde bir **topoloji**, (X,ζ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir ve kısaca X ile gösterilir. (Hacısalihoğlu 1980).

T.1 $X\ ,\ \emptyset \in \zeta$

T.2 $A_1, A_2 \in \zeta$ ise $A_1 \cap A_2 \in \zeta$

T.3 $A_i \in \zeta, i \in I,\ \bigcup_{i\in I} A_i \in \zeta$

I.1.2 **Tanım** (Hausdorff Uzayı): X bir topolojik uzay olsun. Farklı $p,q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları, sırasıyla, U ve V olsun. Eğer U ve V yi $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir **Hausdorff uzayı** denir (Hacısalihoğlu 1980).

I.1.3 **Tanım** (Topolojik Manifold): M bir Hausdorff uzayı olsun. Her p $p \in M$ için p nin en az bir açık koşuluğu E^n n-boyutlu Öklid uzayının bir açık cümlesine homeomorf ise M ye **n-boyutlu topolojik manifold** veya kısaca **n-manifold** denir (Matsushıma 1972).

I.1.4 **Tanım** (Koordinat Komşuluğu=Harita): M bir topolojik n-manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasının M deki bir U açık koşuluğu, ψ homeomorfizmi sayesinde E^n in bir V açık cümlesine homeomorfik ise, (U,ψ) ikilisine M nin p noktasındaki **koordinat komşuluğu** veya Harita denir (Matsushıma 1972).

I.1.5 **Tanım** (Koordinat Komşuluğu Sistemi=Atlas): M bir topolojik n-manifold ve $U_i \subset M$ açık cümlelerinin $\{U_i\}$ ailesi de M nin bir açık örtüsü olsun. Bu durumda herbir U_i açığının E^n deki bir V_i açık cümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. A bir indeks cümlesini göstermek üzere, elde edilen (U_i, Ψ_i) koordinat komşuluklarının

$$S = \{(U_i, \Psi_i) \ / \ i \in A\}$$

ailesine M nin bir **Atlası** denir (Matsshima 1972).

I.1.6 <u>Tanım</u> (C^k sınıfından atlas): M bir topolojik n-manifold ve M nin bir atlası,

$$S = \{ (U_i, \Psi_i) \ / \ i \in A \}$$

olsun. Eğer,

$$\Psi_i(U_i) \cap \Psi_j(U_j) \neq \emptyset$$

olacak şekildeki her $(i,j) \in A \times A$ için

$$\Psi_i^{-1} o \Psi_j \quad \text{ve} \quad \Psi_j^{-1} o \Psi_i$$

fonksiyonları, $k \geq 0$ olmak üzere, k-defa diferensiyellenebilir ise S ye C^k **sınıfından atlas** denir (Matsushima 1972).

I.1.7 <u>Tanım</u> (Diferensiyellenebilir Manifold): M bir topolojik n-manifold olsun. Eğer M C^k sınıfından bir atlasa sahip ise M ye C^k **sınıfından diferensiyellenebilir manifold**denir. Ayrıca her $k \in$ IN için S atlası diferensiyellenebilir ise, o zaman M manifolduna C^∞ **sınıfından diferensiyellenebilir manifold** denir (Matsushima 1972).

I.1.8 <u>Tanım</u> (Diffeomorffizim): E^n nin iki açık cümlesi U ve V olsun Bir

$$\Psi : U \longrightarrow V$$

fonksiyonu için $\Psi \in C^k(U,V)$ ve $\Psi^{-1} \in C^k(V,U)$ ise Ψ ye C^k sınıfından bir **diffeomorfizim** U ile V ye de k-yıncı dereceden diffeomorfiktir denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.1.9 Tanım (Altmanifold): E^n nin bir altcümlesi M olsun. Eğer her $p\in M$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise M ye E^n nin bir k-boyutlu altmanifoldu denir(Hıcks 1974).

i) M de p noktasını kapsayan bir U açık cümlesi mevcut ve bir V $V\subset E^n$ açık cümlesi ile U arasında,

$$h:\ U\subset M \longrightarrow V\subset E^n$$

diffeomorfizimi vardır.

ii) $h(U\cap M)=V\cap\{(E^k\times\{0\})\}$

$$=\{y\in V\ /\ y_{k+1}=\ldots=y_n=0\}$$

yani h diffeomorfizimi altında $U\cap M$ ile $V\cap\{E^k\times\{0\}\}$aynıdır(Hıcks 1974).

I.2 EĞRİ

I.2.1 Tanım (Eğri): $I\subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, diferensiyellenebilen bir,

$$\eta: I \longrightarrow E^n$$

$$t \longrightarrow \eta(t)=(\eta_1(t),\ldots,\eta_n(t))$$

fonksiyonuna E^n de bir **eğri** denir (Hacısalihoğlu 1980).

Buradaki η_i ,$1\leqslant i\leqslant n$, fonksiyonları I dan IR ye diferensiyellenebilen fonksiyonlardır. E^n in koordinat fonksiyonları $\{x_1,\ \ldots\ ,x_n\}$ ise

$$\eta_i=x_i o\ \eta$$

biçimindedir.

I.2.2 Tanım (Hız Vektörü):η , E^n de bir eğri olsun. Her $t\in I$ için η nın $\eta(t)$ noktasındaki,

$$\dot{\eta}(t)=\frac{d\eta}{dt}\Big|_t=\left(\frac{d\eta_1}{dt}(t),\ \ldots\ ,\frac{d\eta_n}{dt}(t)\right)$$

vektörüne eğrinin **hız vektörü** denir ve $(\eta(t),\dot{\eta}(t))$ ikilisi bir tanjant vektördür, bu vektör kısaca $\dot{\eta}(t)$ ile gösterilir(Hacısalihoğlu 1983).

Hız vektörü, eğrinin teğetinin doğrultu ve çizilme yönündedir.

I.2.3 <u>Tanım</u> (Regüler eğri): $\eta : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için η nın $\eta(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, η eğrisine bir **regüler eğri** denir (Hacısalihoğlu 1980).

I.2.4 <u>Tanım</u> (Parametre Değişimi): $\eta : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. $J \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, $h : J \longrightarrow I$ fonksiyonu ile h^{-1} fonksiyonu C^k, $(k \geq 1)$, sınıfından ise h fonksiyonuna η eğrisinin bir **parametre değişimi** denir (Hacısalihoğlu 1980).

I.2.1 <u>Teorem</u>: $\eta : I \longrightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\eta o h : J \longrightarrow E^n$ eğrisinin hız vektörü birim vektör olacak şekilde bir $h : J \longrightarrow I$ parametre değişimi vardır (Hacısalihoğlu 1980).

I.3 TANJANT VEKTÖRLER VE VEKTÖR ALANLARI

I.3.1 <u>Tanım</u> (Tanjant Vektör): M diferensiyellenebilir bir manifold ve M den IR ye C^∞ sınıfından fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(M,IR)$ olmak üzere,

$$V_p : C^\infty(M,IR) \longrightarrow IR$$

$$f \longrightarrow V_p[f], \ \forall p \in M, \ \forall f \in C^\infty(M,IR)$$

operatörü aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise , bu operatöre M nin p noktasında bir **tanjant vektör** denir (Kobayashı ve Nomizu 1963).

i) $V_p[\lambda f + \mu g] = \lambda V_p[f] + \mu V_p[g]$

ii) $V_p[f.g] = g(p)V_p[f] + f(p)V_p[g]$.

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi,

$$T_M(p) = \{V_p / \ v_p : C^\infty(M,IR) \longrightarrow IR\}$$

ile gösterilir. Bu cümle,

$$\oplus : T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow T_M(p)$$

$$(V_p \ , W_p) \longrightarrow V_p \oplus W_p : C^\infty(M,IR) \longrightarrow IR$$

$$(V_p \oplus W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f] \ , \ \forall f \in C^\infty(M,IR)$$

$$\Theta : IR \times T_M(p) \longrightarrow T_M(p)$$

$$(\lambda, V_p) \longrightarrow (\lambda \Theta V_p) : C^{\infty}(M, IR)$$

$$(\lambda \Theta V_p)[f] = \lambda V_p[f] \quad , \quad \forall f \in C^{\infty}(M, IR)$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle IR cismi üzerinde bir reel vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $p \in M$ notasındaki **tanjant uzayı** denir (Kobayashı ve Nomizu 1963).

I.3.2 Tanım (Vetör Alanı): M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M nin herbir $p \in M$ noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde bir **vektör alanı** denir, yani

$$X : M \xrightarrow[\text{örten}]{1\,:\,1} \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna M üzerinde bir **vektör alanı** denir (Hacısalihoğlu 1980).

M üzerinde bir vektör alanı genel olarak,

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

biçimindedir. Burada $f_i \in C^k(M, IR)$ $, 1 \leq i \leq n$, dir. Eğer $f_i \in C^{\infty}(M, IR)$ ise X vektör alanına kısaca **diferensiyellenebilir** dir denir. Bundan sonravektör alanı demekle diferensiyellenebilir bir vektör alanını kastedeceğiz.

M üzerinde vektör alanlarının cümlesi,

$$\chi(M) = \{ X \;/\; X : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_M(p) \}$$

ile gösterilir. Bu cümle toplama ve skalarlaçarpma işlemlerine göre IR cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya **vektör alanları uzayı** denir (Hcısalihoğlu 1980).

I.4 RİEMANN MANİFOLDU VE KOVARYANT TÜREV

I.4.1 Tanım (Riemann Metriği) : Bir C^{∞}-manifold M ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Eğer,

$$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M,IR)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise, bu dönüşüme M üzerinde **Riemann metriği** yada **metrik tensör** adı verilir (Hıcks 1974).

i) <,> dönüşümü 2-lineerdir.

ii) <,> dönüşümü simetriktir.

iii) $<X,X> \geq 0$, $<X,X>=0 \Longleftrightarrow X=0 \quad \forall X \in \chi(M)$.

I.4.2 Tanım (Riemann Manifoldu): Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^{∞}-manifolda **Riemann manifoldu** denir. Eğer $\forall Y \in \chi(M)$ için

$<X,Y>=0$ ise $X=0$

oluyor ise M ye **yarı Riemann manifoldu** denir (Hıcks 1974).

I.4.3 Tanım (Afin Konneksiyon ve Kovaryant Türev): Bir C^{∞}-manifold M ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Eğer,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X , Y) \longrightarrow D(X,Y)=D_X Y$$

operatörü,

i) $D_X(Y+Z)=D_X Y+D_X Z$, $X,Y,Z \in \chi(M)$

ii) $D_{(X+Y)}Z=D_X Z+D_Y Z$

iii) $D_{fX}Y=fD_X Y$, $f \in C^{\infty}(M,IR)$

iV) $D_X fY=fD_X Y+X[f]Y$

özelliklerini sağlıyor ise, D ye M üzerinde bir **Afin konneksiyon** ve D_X e de X vektör alanı yönünde kovaryant türev denir (Hacısalihoğlu 1983).

I.4.4 <u>Tanım</u> (Riemann Konneksiyonu): M bir yarı Riemann manifoldu ve M üzerindeki Afin konneksiyon D olmak üzere, D için

i) $[X,Y]=D_XY-D_YX$, $X,Y \in \chi(M)$

ii) $X[\langle Y,Z\rangle]=\langle D_XY,Z\rangle+\langle Y,D_XZ\rangle$, $Z\in\chi(M)$

özelliklerini sağlıyor ise D ye Riemann konneksiyonu denir (Hıcks 1974).

II.BÖLÜM

II.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLER

Çalışmamızın bundan sonraki bölümlerinde bütün manifoldları, dönüşümleri, vektör alanlarını v.s. C^{∞}-sınıfından diferensiyellenebilir kabul edeceğiz.

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında bir,

$$\eta: J \longrightarrow E^n$$
$$t \longrightarrow \eta(t) \quad , J \subset IR$$

eğrisi ve η eğrisinin her $\eta(t)$ noktasında tanımlı

$$\{e_1(t), \ \ldots \ ,e_k(t)\} \tag{II.1.1}$$

ortonormal vektör alan sistemi verilmiş olsun. Buna göre,

$$\langle e_i(t),e_j(t)\rangle=\delta_{ij} \tag{II.1.2}$$

olur. e_i vektör alanının η eğrisi boyunca türevini $\dot{e}_i$ ile görterirsek (II.1.2) den

$$\langle \dot{e}_i(t),e_j(t)\rangle+\langle e_i(t),\dot{e}_j(t)\rangle=0 \qquad ,1\leq i,j\leq k, \tag{II.1.3}$$

bulunur. E^n Öklid uzayının $\eta(t)=p$ noktasındaki tanjant uzayı $T_E n(p)$ olmaküzere (II.1.1) sistemi $T_E n(p)$ uzayının k-boyutlu bir altvektör uzayını gerer. Bu altuzay $E_k(t)$, $1<k<n-2$, $t\in I$, ile gösterilir ise,

$$E_k(t)=Sp\{e_1(t), \ \ldots \ ,e_k(t)\}\subset T_E n(p) \tag{II.1.4}$$

olur.

II.1.1 Tanım (Genelleştirilmiş Regle Yüzey): (II.1.4) ifadesiyle belirlenen $E_k(t)$ altuzayı η eğrisi boyunca hareket ederken E^n de bir (k+1)-boyutlu yüzey meydana **getirir**. Bu yüzeye **(k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle** yüzey adı verilir ve kısaca ζ ile gösterilir (Frank ve Giering 1976).

Burada η eğrisine Φ nin dayanak eğrisi $E_k(t)$ altuzayına da Φ nin doğrultman uzayı veya kısaca doğuranı denir.

Bundan sonra (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey yerine kısaca (k+1)-regle yüzey ifadesini kullanacağız.

Bir Φ (k+1)-regle yüzey

$$J\times E^k = G \subset E^{k+1}$$

bölgesi üzerinde E^n, Öklid uzayının bir (k+1)-boyutlu altmanifoldudur. Bu altmanifolda **Regle Altmanifold** da denir. Bu altmanifold G bölgesinden E^n ye,

$$\Phi(t,x_1,\ \ldots\ ,x_k) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} x_i e_i(t) \qquad \text{(II.1.5)}$$

dönüşümü ile ifade edilir. (II.1.5) ifadesine Φ (k+1)-regle yüzey için bir parametrizasyon denir.

Φ dönüşümünün t ye ve x_i , $1\leqslant i\leqslant k$, ye göre türevleri alınırsa

$$\Phi_t = \dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} x_i \dot{e}_i(t)$$

$$\Phi_{x_i} = e_i(t) \qquad ,1\leqslant i\leqslant k,$$

elde edilir. Eğer,

$$\operatorname{rank}[\Phi_t, \Phi_{x_1},\ \ldots\ ,\Phi_{x_k}] = \operatorname{rank}\Big[\dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} x_i \dot{e}_i(t), e_1(t), \ldots, e_k(t)\Big]$$

$$= k+1 \qquad \text{(II.1.6)}$$

ise Φ, (k+1)-regle yüzeyine G bölgesi üzerinde **regülerdir** denir.

II.1.2 <u>Tanım</u> (Yön Konisi): $E_k(t)$ altuzaylarının $e_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant k$, vektörleri tarafından oluşturulan

$$X: J\times E^k \longrightarrow E^n$$

$$(t,x_1,\ \ldots\ ,x_k) \longrightarrow X(t,x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i(t) \qquad \text{(II.1,7)}$$

noktalarının cümlesine,

$$\operatorname{rank}[X_t, X_{x_1},\ \ldots\ ,X_{x_k}] = \operatorname{rank}\Big[\sum_{i=1}^{k} x_i \dot{e}_i(t), e_1(t),\ \ldots\ ,e_k(t)\Big]$$

$$= k+1 \qquad \text{(II.1.8)}$$

olmak üzere Φ (k+1)-regle yüzeyinin **(k+1)-yön konisi** veya kısaca **yön konisi** denir (Frank ve Giering 1976).

Bunun koni tepesi cıvarında (n-1)-birim küre $S^{n-1} \subset E^n$ ile , olan kesitine ϕ nin **küresel doğrultman resmi denir.**

II.1.3 Tanım (Asimptotik Demet): S^{n-1}, birim küresi üzerinde ϕ nin küresel doğrultman resminde bulunan $e_i(t)$ küresel eğrilerini ve $e_i(t)$ lerle lineer bağımsız olan $\dot{e}_i(t)$ teğet vektörlerini gözönüne alalım. O zaman,

$$Sp\{e_1(t), \dots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dots, \dot{e}_k(t)\}$$

altuzayına ϕ nin $E_k(t)$ ye göre **asimptotik demeti** denir ve A(t) ile gösterilir (Frank ve Giering 1976).

A(t) asimptotik demetin boyutu $, 0 \leq m \leq k$, olmak üzere,

$$\text{boy}A(t)=k+m$$

olduğu açıktır. O halde $E_k(t)$ doğrultman uzayını kapsayan A(t) asimptotik demetin E.Schmidt ortonormalleştirme yöntemiyle

$$\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\} \qquad \text{(II.1.10)}$$

şeklinde bir ortonormal bazını bulabiliriz. Burada

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} a_{k+s} \quad , 1 \leq i \leq k , \qquad \text{(II.1.11)}$$

olacağı açıktır. (II.1.3) ve (II.1.11) den

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

olduğu görülür.

II.1.1 Teorem: $t_o \in J$ olmak üzere $E_k(t_o)$ doğrultman uzayının bir $\{e_1(t_o), \dots, e_k(t_o)\}$ ortonormal bazı verildiğinde J nin t_o' ı kapsayan öyle bir I açık aralığı bulunabilir ki, bu aralıkta $E_k(t)$

doğrultman uzaylarının $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ ortonormal bazları tek olarak bulunabilir ve bu ortonormal bazlar için

$$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t)\rangle = 0 \quad , 1\leqslant i,j\leqslant k \ , t\in I, \qquad (II.1.12)$$

ifadesi geçerlidir (Juza 1962).

Eğer Φ $(k+1)$-regle yüzey (II.1.12) ifadesi geçerli olacak şekilde parametrilendirilir ise (II.1.11) ifadesinden

$$\alpha_{ij} = 0 \quad , 1\leqslant i,j\leqslant k \qquad (II.1.13)$$

elde edilir.

II.1.2 Teorem: Regüler bir $(k+1)$-regle yüzey Φ olsun. Φ nin herbir $E_k(t)$ doğrultman uzayında öyle bir $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormal bazı vardır ki, bu ortonormal baz için

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad , \kappa_i > 0 \quad , 1\leqslant i\leqslant m$$

$$\dot{e}_{m+s} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{(m+s)j} e_j \qquad 1\leqslant s\leqslant k-m \qquad (II.1.14)$$

dır (Frank ve Giering 1976).

Buradaki $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazı Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin

$$\{e_1(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$$

bazını tek olarak belirler.

Bu teoremdeki $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazına, $E_k(t)$ doğrultman uzayının **doğal taşıyıcı bazı** veya Φ nin asli çatısı denir.

Sabit bir $t_0 \in I$ için II.1.2 teoremindeki $E_k(t_0)$ ın $\{e_1(t_0), \ldots, e_k(t_0)\}$ ortonormal bazı II.1.1 teoreminde verilen ortonormal baz olarak seçilirse (II.1.13) ifadesinden dolayı (II.1.14) ifadesinde

$$\dot{e}_i = \kappa_i(t_0) a_{k+i}(t_0) \qquad , 1\leq i\leq m,$$

$$\dot{e}_{m+s}=0 \qquad ,1\leqslant s\leqslant k-m \,, \qquad (II,1.15)$$

ifadeleri geçerlidir (Frank ve Giering 1976). (II.1.15) ifadesine göre küresel eğriler $\{e_{m+1}(t_o), \ldots ,e_k(t_o)\}, t_o \in I$, içinde stasyoneller dir. $\{e_1(t), \ldots ,e_m(t)\}$ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayına göre ortonormal tümleyeni olan $\{e_{m+1}(t), \ldots ,e_k(t)\}$ ortonormal baz vektörleri her $t\in I$ için keyfi seçilebilirler. Bu şekilde seçilen ortonormal bazlar için (II.1.14) ifadesinde,

$$\alpha_{(m+\rho)(m+s)}=0 \qquad ,1<s,\rho<k-m \,, \qquad (II.1.16)$$

ifadesi geçerlidir.

Regüler bir (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin sabit bir noktası p olsun. $p=\bar{\phi}(t,x_1, \ldots ,x_k)$ noktasındaki tanjant uzay,

$$X(t,x_1,\ldots,x_k,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)=\eta(t)+\sum_{i=1}^{k} x_i e_i(t)+\xi_0(\dot{\eta}(t)+\sum_{i=1}^{k} x_i \dot{e}_i(t))$$

$$+\sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i(t) \qquad (II.1.17)$$

parametrik denklemine sahiptir. O halde p noktasındaki tanjant uzayın bir bazı

$$\{\dot{\eta}+\sum_{i=1}^{k} x_i \dot{e}_i, e_1, \ldots ,e_k\} \qquad (II.1.18)$$

dir. t sabit tutularak x_i sayıları değiştirilir ise p noktası $E_k(t)$ altuzayının noktalarını tarar. Buna göre,

$$Sp\{\dot{\eta},\dot{e}_1, \ldots ,\dot{e}_k, e_1, \ldots ,e_k\} \qquad (II.1.19)$$

uzayı $E_k(t)$ doğrultman uzayının bütün p noktalarındaki tanjant uzayların birleşimini kapsar.

II.1.4 <u>Tanım</u> (Teğetsel demet):

$$Sp\{\dot{\eta},\dot{e}_1, \ldots ,\dot{e}_k, e_1, \ldots ,e_k\} \qquad (II.1.20)$$

uzayına Φ nin $E_k(t)$ ye göre **teğetsel demeti** denir ve T(t) ile gösterilir (Frank ve Giering 1976).

(II.1.20) ve (II.1.14) ifadelerine göre boy$T(t)$ için,

$$k+m\leqslant \text{boy}T(t)\leqslant k+m+1 \tag{II.1.21}$$

eşitsizliği geçerlidir. Başka bir ifadeyle ya boy$T(t)=k+m$ yada boy$T(t)=k+m+1$ dir. Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Önce her $t\in I$ için boy$T(t)=k+m$ olsun. Bu durumda Φ nin $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü $A(t)$ asimptotik demetinde bulunur, yani

$$\dot{\eta}=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{s=1}^{m}\eta_s a_{k+s} \tag{II.1.22}$$

yazılabilir. Φ nin herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi $\eta(t)$ eğrisine bağlı olarak,

$$p(t)=\eta(t)+\sum_{i=1}^{k}x_i(t)e_i(t) \tag{II.1.23}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada t ye göre türev alınırsa,

$$\dot{p}=\dot{\eta}+\sum_{i=1}^{k}(\dot{x}_i e_i+x_i\dot{e}_i)$$

elde edilir. Butürev denkleminde (II.1.22) ifadesi ve II.1.2 teoremi gözönüne alınırsa,

$$\dot{p}=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{s=1}^{m}\eta_s a_{k+s}+\sum_{i=1}^{k}\dot{x}_i e_i+\sum_{i=1}^{m}x_i\Big(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j+K_i a_{k+i}\Big)+$$

$$+\sum_{i=m+1}^{k}x_i\Big(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j\Big)$$

$$\dot{p}=\sum_{j=1}^{k}\Big(\zeta_j+\dot{x}_j+\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_{ij}\Big)e_j+\sum_{i=1}^{m}(K_i x_i+\eta_i)a_{k+i} \tag{II.1.24}$$

elde edilir. Burada $t\in I$ için

$$K_i x_i+\eta_i=0 \qquad ,1\leqslant i\leqslant m, \tag{II.1.25}$$

eşitliğini sağlayan $p(t)$ noktaları için $\dot{p}(t)$ hız vektörleri $E_k(t)$ doğrultman uzayındadır. K_i ,$1\leqslant i\leqslant m$, sayıları sıfırdan farklı olduğundan (II.1.25) sisteminin çözümü tektir, yani x_i ,$1\leqslant i\leqslant m$, sıkalerleri tek olarak hesab edilebilir.

II.1.5 Tanım (Kenar Uzay): (II.1.23) ifadesinde görüldüğü gibi p eğrisinin p(t) noktaları x_i ,$1\leqslant i\leqslant k$, sıkalarleri ile temsil edilmektedir. $m\leqslant k$ olmak üzere bu sıkalarlerin m-tanesinin (II.1.25) ifadesinden hesab edilebileceğini görmüştük. Geriye kalan (k-m)-tane değişken keyfi olarak seçilebilir. Buna göre belirli bir $t\in I$ için (II.1.25) eşitliğini sağlayan p(t) noktalarının cümlesi $E_k(t)$ doğrultman uzayının (k-m)-boyutlu bir altuzayını oluştururlar. Bu altuzaya Φ nin $E_k(t)$ içindeki **kenar uzayı** veya **boğaz uzay** denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir (Frank ve Giering 1976).

Φ (k+1)-regle yüzey regüler olduğundan $m\leqslant 1$ dir. O halde $E_k(t)$ doğrultman uzayı hiç bir zaman bir kenar uzay olamaz.

II.1.2 teoremi ve (II.1.19),(II.122) ifadeleri gözönüne alınırsa kenar uzayının bir p noktasındaki tanjant uzay,

$$x(t)=\eta(t)+\sum_{i=1}^{k}(x_i+\xi_o\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}+\xi_i+\xi_o\zeta_i)e_i+\xi_o\sum_{s=1}^{m}(K_s x_s+\eta_s)a_{k+s} \quad (II.1.26)$$

parametrik ifadesine sahip olur. Burada (II.1.25) ifadesi dikkate alınırsa görülürki $K_{k-m}(t)\subset E_k(t)$ kenar uzayının noktalarında Φ nin teğetsel uzayları yoktur.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

II.1.3 **Teorem:** Regüler bir (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin $E_k(t)$, $t\in I$, doğrultman uzayında asimptotik ve teğetsel demetleri çakışıyorlar ise, o zaman Φ bir $K_{k-m}(t)$ kenar uzayına sahiptir ve bu uzayın noktalarında Φ nin teğetsel uzayları yoktur (Frank ve Giering 1976).

Şimdi de her $t\in I$ için $\text{boy}T(t)=k+m+1$ olsun. Bu durumda

$$\dot{\eta}\notin Sp\{e_1, \ldots ,e_k,a_{k+1}, \ldots ,a_{k+m}\}$$

dir. O halde T(t) teğetsel demetin bir ortonormal bazı olarak,

$$\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\} \qquad \text{(II.1.27)}$$

sistemini gözönüne alabiliriz. O halde $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{s=1}^{m} \eta_s a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \qquad \text{(II.1.28)}$$

yazılabilir.

Keyfi bir p(t) dayanak eğrisinin (II.1.23) ifadesinde t ye göre türev alınıp, türev denkleminde (II.1.28) ifadesi yerine yazıldıktan sonra elde edilen ifadeye II.1.2 teoremi uygulanırsa p(t) eğrisinin $\dot{p}(t)$ hız vektörü için,

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^{k} (\zeta_i + x_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j) e_i + \sum_{s=1}^{m} (K_s x_s + \eta_s) a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \qquad \text{(II.1.29)}$$

elde edilir. Burada da

$$K_s x_s + \eta_s = 0 \qquad , 1 \leq s \leq m, \qquad \text{(II.1.30)}$$

eşitliğini sağlayan p(t) noktaları için $\dot{p}(t)$ hız vektörleri $Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{\eta}\}$ uzayında bulunurlar. (II.1.30) sisteminin çözümü (II.1.25) sisteminin çözümü ile aynıdır.

II.1.6 <u>Tanım</u> (Merkez Uzay): (II.1.30) lineer denklem sistemi yardımıyla tanımlanan (k-m)-boyutlu altuzaya Φ nin $E_k(t)$ içindeki **merkez uzayı** denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir (Frank ve Giering 1976).

$Z_{k-m}(t)$ merkez uzayının herbir noktasına **merkez noktası** denir. Φ (k+1)-regle yüzeyi $m>0$ için regülerdir. O halde $E_k(t)$ doğrultman uzayı aynı zamanda bir merkez uzay olabilir, yani m=0 ise $E_k(t)$ doğrultman uzayı Φ nin bir merkez uzayıdır. Bu durumda Φ ye **silindirikdir** denir.

II.1.2 teoremi ve (II.1.19),(II.1.28) ifadeleri gözönüne alınırsa $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayının bir p noktasındaki Φ nin tanjant uzayı için,

$$X(t) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} (x_i + \xi_0 \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j + \xi_i + \xi_0 \zeta_i) e_i + \xi_0 \sum_{s=1}^{m} (K_s x_s + \eta_s) a_{k+s} +$$

$$+\xi_0 \eta_{m+1} a_{k+m+1} \tag{II.1.31}$$

parametrik denklemi elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

II.1.4 <u>Teorem</u>: Regüler bir (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin bir $E_k(t)$, $t\in I$,doğrultman uzayı içindeki asimptotik ve teğetsel demetleri çakışmıyorlar ise, o zaman Φ nin dayanak eğrilerinin hız vektörleri $\{e_1, \ldots ,e_k, a_{k+m+1}\}$ uzayında bulunur ve Φ bir $Z_{k-m}(t)$, $m>0$, merkez uzayına sahiptir. Merkez uzayının noktalarında Φ nin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler. Φ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı her p noktasındaki tanjant uzayında bulunur (Frank ve Giering 1976).

$t_0\in I$ için $Z_{k-m}(t_0)\subset E_k(t_0)$ merkez uzayı (II.1.5) ifadesinde,

$$x_1 = \ldots = x_m = 0 \tag{II.1.32}$$

almakla tanımlanır. O halde (II.1.30) dan $\eta_s=0$,$1\leq s\leq m$, elde edilir. Buna göre Φ nin $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\eta(t_0)$ noktasındaki $\dot\eta(t_0)$ hız vektörü için (II.1.28) ifadesinden

$$\dot\eta(t_0) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \tag{II.1.33}$$

bulunur. O halde aşağıdaki iki önerme doğrudur.

i) $\eta_{m+1}(t_0)=0 \Longleftrightarrow \Phi$ nin bir $K_{k-m}(t_0)$ kenar uzayı vardır.

(II.1.34)

ii) $\eta_{m+1}(t_0)\neq 0 \Longleftrightarrow \Phi$ nin bir $Z_{k-m}(t_0)$ merkez uzayı vardır.

Böylece E^n,n-boyutlu Öklid uzayında (k+1)-regle yüzeyler iki sınıfa ayrılırlar. Birincisi kenar uzaylı (k+1)-regle yüzeylerdir ki , bunlar E^3 den tanıdığımız tanjant yüzeylerin (sitriksiyon çizgisiz) bir genelleştirilmişidir.

İkincisi merkez uzaylı (k+1)-regle yüzeylerdir ki bunlarda E^3 deki aykırı (sitriksiyon çizgili) regle yüzeylerin bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıkar.

II.1.7 Tanım (Dağılma parametresi=Drall):

$$t=f(t^*) \quad , \quad \frac{dt^*}{dt}=h(t)>0 \qquad (II.1,35)$$

şeklinde yeni bir t^* parametresini gözönüne alalım. (II.1.28) den

$$\eta_{m+1}=\langle\dot{\eta}(t),a_{k+m+1}\rangle$$

bulunur. Burada (II.1.35) deki parametre dönüşümü yapılırsa,

$$\eta^*_{m+1}=\langle\dot{\eta}(t^*),a^*_{k+m+1}\rangle$$

$$\eta^*_{m+1}=\frac{dt}{dt^*}\langle\dot{\eta}(t),a_{k+m+1}\rangle$$

$$\eta^*_{m+1}=h^{-1}\eta_{m+1}$$

elde edilir. ayrıca (II.1.14) den

$$\kappa_i=\langle\dot{e}_i(t),a_{k+i}\rangle \qquad ,1\leq i\leq m,$$

bulunur. Burada da (II.1.35) deki parametre dönüşümü yapılırsa

$$\kappa^*_i=h^{-1}\kappa_i$$

elde edilir. δ_i sayılarını

$$\delta_i=\frac{\eta^*_{m+1}}{\kappa^*_i}=\frac{h^{-1}\eta_{m+1}}{h^{-1}\kappa_i}=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \quad , 1\leq i\leq m, \qquad (II.1.36)$$

şeklinde tanımlıyalım. Bu şekilde tanımlanan δ_i değerleri parametre değişiminden bağımsız olup Φ nin $E_k(t)$ içindeki **i-yinci dağılma parametresi (i-yinci asli dırali)** ve

$$\delta=\sqrt[m]{|\delta_1\ldots\delta_m|}$$

ye de Φ nin $E_k(t)$ içindeki **dağılma parametresi (drali)** denir (Frank 1978).

II.1.8 Tanım (Ortogonal Yörünge): Bir Φ (k+1)-regle yüzeyinin $E_k(t)$, $t\in I$, doğrultman uzaylarının herbirini dik olarak kesen eğriye Φ nin **ortogonal yörüngesi** denir (Frank ve Giering 1976).

Ortogonal yörüngede bir dayanak eğrisi olarak alınabilir. Eğer $\alpha(t)$ dayanak eğrisi Φ (k+1)-regle yüzeyinin ortogonal yörügesi olarak seçilir ise, $\{e_1(t), \ldots ,e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı baz vektörleri için

$$\langle \dot{\eta}(t),e_i\rangle=0 \qquad ,1\leq i\leq k, \qquad \text{(II.1.38)}$$

dır (Juza 1962).

III.BÖLÜM

Bu bölümde bir I açık aralığında m sayısının sabit olduğu ve boy$T(t)=k+m+1$ ifadesinin geçerli olduğu, yani merkez uzaylı (k+1)-regle yüzeyleri inceleğeceğiz. Bu nedenle E^3 ün aykırı yüzeyler teorisinin aksine Φ de mevcut olan genelleştirilmiş refekatçi regle yüzeyleride inceleme imkanı doğacaktır. Buna merkez uzayların ortogonal yörüngesine ait olan (m+1)-asli regle yüzeylerde dahildir.

III.1 MERKEZ REGLE YÜZEYLER

III.1.1 Tanım (Merkez Regle Yüzey): Bir (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Φ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı $\eta(t)$ eğrisi boyunca Φ (k+1)-regle yüzeyini oluştururken, Φ nin $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayıda aynı eğri boyunca bir diğer (n-k-m)-boyutlu regle yüzey oluşturur. Bu regle yüzeye **merkez regle yüzey** denir ve Ω ile gösterilir (Frank ve Giering 1978).

Açık olarak m=k olması halinde Ω merkez regle yüzeyi Φ nin $\eta(t)$ dayanak eğrisine dejenere olur ve Φ nin **sitriksiyon çizgisi** adını alır. O halde Ω ,m<k için bir regle yüzey gösterir ve bu regle yüzey,

$$\Omega(t,x_1,\ldots,x_{k-m})=\eta(t)+\sum_{s=1}^{k-m}x_s e_s(t) \qquad \text{(III.1.1)}$$

dönüşümü ile verilir.

Şimdi bir I açık aralığında A(t) asimptotik demetin (II.1.14) ve (II.1.16) ifadelerinin geçerli olduğu

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$$

bazını ele alalım ve her $t\in I$ için bu ortonormal bazı T(t) teğetsel demetin (II.1.27) ortonormal bazına, bunu da $a_{a+m+1},\ldots,a_n$ vektörleri yardımıyla E^n nin,

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1},a_{k+m+2},\ldots,e_n\} \text{(III.1.2)}$$

ortonormal n- ayklısına tamamlayalım. Burada a_n nin uygun seçilmesiyle ortonormal sağ baz olarak seçilebilir (Frank ve Giering 1976).

(II.1.3),(II.1.14) ve (II.1.16) ifadeleri dikkate alınarak (III.1.2) ifadesi için aşağıdaki türev denklemleri verilmiştir (Frank ve Giering 1978).

$$\dot{e}_\sigma = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{\sigma\nu} e_\nu + K_\sigma a_{k+\sigma} \qquad , 1 \leq \sigma \leq m$$

$$\dot{e}_{m+\rho} = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{(m+\rho)\nu} e_\nu \qquad , 1 \leq \rho \leq k-m$$

$$\dot{a}_{k+\sigma} = -K_\sigma e_\sigma + \sum_{\ell=1}^{m} \tau_{\sigma\ell} a_{k+\ell} + W_\sigma a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{\sigma\lambda} a_{k+m+\lambda} \qquad \text{(III.1.3)}$$

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{\ell=1}^{m} W_\ell a_{k+\ell} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

$$\dot{a}_{k+m+\xi} = \sum_{\ell=1}^{m} W_{\xi\ell} a_{k+\ell} + \beta_\xi a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\xi\lambda} a_{k+m+\lambda} \qquad , 2 \leq \xi \leq n-k-m$$

$$(\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}, \ \alpha_{(m+\ell)(m+\rho)} = 0 \ , \ \tau_{\sigma\ell} = -\tau_{\ell\sigma} \ , \ \beta_{\xi\lambda} = -\beta_{\lambda\xi} \ , \ \omega_{\xi\ell} = -\gamma_{\sigma\lambda})$$

veya matris formunda yazarsak, aşağıdaki şekilde olur.

$$
\begin{bmatrix}
\dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_m \\ \dot{e}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{e}_k \\ \dot{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{a}_{k+m} \\ \dot{a}_{k+m+1} \\ \dot{a}_{k+m+2} \\ \vdots \\ \dot{a}_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & \alpha_{1(m+1)} & \cdots & \alpha_{1k} & K_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} & \alpha_{m(m+1)} & \cdots & \alpha_{mk} & 0 & \cdots & K_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{(m+1)1} & \cdots & \alpha_{(m+1)m} & \alpha_{(m+1)(m+1)} & & \alpha_{(m+1)k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{km} & \alpha_{k(m+1)} & \cdots & \alpha_{kk} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-K_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{11} & \cdots & \tau_{1m} & \omega_1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1(n-k-m)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -K_m & 0 & \cdots & 0 & \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mm} & \omega_m & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{m(n-k-m)} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\omega_1 & \cdots & -\omega_m & 0 & -\beta_2 & \cdots & -\beta_{n-k-m} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{21} & \cdots & \omega_{2m} & \beta_2 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2(n-k-m)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{(n-k-m)1} & \cdots & \omega_{(n-k-m)} & \beta_{n-k-m} & \beta_{(n-k-m)2} & \cdots & \beta_{(n-k-m)(n-k-m)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
e_1 \\ \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \\ e_k \\ a_{k+1} \\ \\ a_{k+m} \\ a_{k+m+1} \\ a_{k+m+2} \\ \\ a_n
\end{bmatrix}
$$

(II.1.33) ifadesine göre $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü

$$\dot{\eta}=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_{\nu}e_{\nu}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \quad , \eta_{m+1}\neq 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

dır. $m<k$, olmak üzere Ω merkez regle yüzeyinin keyfi bir $p(t)$ dayanak eğrisi,

$$p(t)=\eta(t)+\sum_{s=1}^{k-m}x_{m+s}(t)e_{m+s}(t) \quad ,t\in I, \qquad \text{(III.1.5)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitliğin t ye göre türevi alınırsa,

$$\dot{p}=\dot{\eta}+\sum_{s=1}^{k-m}(\dot{x}_{m+s}e_{m+s}+x_{m+s}\dot{e}_{m+s})$$

elde edilir. (III.1.3) ve (III.1.4) ifadeleri gözönüne alınırsa,

$$\dot{p}=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_{\nu}e_{\nu}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}+\sum_{s=1}^{k-m}\dot{x}_{m+s}e_{m+s}+\sum_{s=1}^{k-m}x_{m+s}\Big(\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{(m+s)\nu}e_{\nu}\Big)$$

ve

$$\dot{p}=\sum_{\ell=1}^{m}(\zeta_{\ell}+x_{m+s}\alpha_{(m+s)\ell})e_{\ell}+\sum_{s=1}^{k-m}(\zeta_{m+s}+\dot{x}_{m+s})e_{m+s}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \quad , \qquad \text{(III.1.5)}$$

bulunur. Bu ifade de

$$\dot{x}_{m+s}(t)+\zeta_{m+s}(t)=0 \quad ,1\leq s\leq k-m \qquad \text{(III.1.6)}$$

eşitliğini sağlayan $p(t)$ noktaları Ω nın ortogonal yörüngesini oluştururlar.

$$\zeta_{m+s}=0 \quad ,1\leq s\leq k-m, \qquad \text{(III.1.7)}$$

olması $x_{m+s}=C_s$ (C_s=sbt) olmakla beraber $p(t)$ eğrisinin Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi olmasını karakterize eder.

Ω merkez regle yüzeyine de II.bölümdeki teoriyi uygulayabiliriz. $p(t)$ dayanak eğrisi için $\eta_{m+1}\neq 0$ olduğundan

$$\dot{p}(t)\notin\{e_{m+1},\ldots,e_k,\dot{e}_{m+1},\ldots,\dot{e}_k\} \qquad \text{(III.1.8)}$$

ifadesi geçerlidir. O halde II.1.2 teoremine göre Ω merkez regle yüzeyi her $t \in I$ için $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı ile aynı olabilen (merkez uzayı, doğrultman uzayı ile çakışan) bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

III.1.1 Teorem: Regüler bir Φ $(k+1)$-regle yüzeyin, $(k-m+1)$-merkez regle yüzeyi Ω, bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir (Frank ve Giering 1978).

Eğer $s=0$ ise Ω merkez regle yüzeyine **silindiriktir** denir.

III.2 ASLİ REGLE YÜZEYLER

Ω merkezregle yüzeyinin her $\eta(t)$ dayanak eğrisini dayanak eğrisi kabul eden ve

$$\Delta(t,x_1,\ldots,x_m)=\eta(t)+\sum_{\ell=1}^{m} x_\ell e_\ell(t) \qquad ,t\in I, \qquad (III.2.1)$$

eşitliği ile tanımlanan bir $(m+1)$-regle yüzey mevcuttur. Bu regle yüzeyi $\Delta_\eta \subset \Phi$ ile gösterelim. Her $t_0 \in I$ da Δ_η nın $E_m(t_0)$ doğrultman uzayı $\{e_1(t_0),\ldots,e_m(t_0)\}$ vektör uzayı ile gerilir. Δ_η nın asimptotik demetini $\bar{A}(t)$ ile gösterirsek;

$$\bar{A}(t)=Sp\{e_1,\ldots,e_m,\dot{e}_1,\ldots,\dot{e}_m\}$$

olup boy$\bar{A}(t_0)=2m$ dir. (III.1.3) ve (III.1.4) ifadelerinden Φ nin $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü $\bar{A}(t_0)$ asimptotik demetinde bulunmaz. O halde $\eta(t)$, Δ_η için bir sitriksiyon çizgisidir, yani her Δ_η $(m+1)$- regle yüzeyi bir sitriksiyon çizgisine sahiptir.

$m=k$ için Δ_η, Φ ile çakıştığından $m<k$ kabul etmeliğiz.

III.2.1 Tanım (Asli Regle Yüzey): Eğer Φ nin $\eta(t)$ dayanak eğrisi, $m<k$, Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi olarak seçilirse Δ_η $(m+1)$-regle yüzeyine Φ nin **asli regle yüzeyi** denir ve Δ ile gösterilir.

III.2.1 Teorem : Ω merkez regle yüzeyli $(k+1)$-regle yüzey Φ olsun.

Φ nin Δ (m+1)-asli regle yüzeyi, m<k, Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ ortogonal yörüngesine sahiptir ve üstelik bu ortogonal yörünge Δ için bir sitriksiyon çizgisidir (Frank ve Giering 1978).

Şimdi bir Φ (k+1)-regle yüzeyin $\eta(t)$ dayanak eğrisi nin $\eta(t_0)\in Z_{k-m}(t_0)$, $t_0\in I$, m>o, noktasındaki $h_i(t_0)\in E_m(t_0)$, $1\leq i\leq m$, m-asli ışınlarını inceleyelim. Bu asli ışınlar,

$$\eta(t_0)+xe_i(t_0) \qquad x\in IR \qquad \text{(III.2.2)}$$

parametrik denklemiyle verilmiş olsunlar.

$h_i(t_0)$ asli ışınının bir noktasındaki Φ nin tanjant uzayı için (II.1.31) ifadesi ve $\eta_s=0$, $1\leq s\leq m$, değerleri gözönüne alınırsa,

$$X = \eta + xe_i + \sum_{\nu=1}^{k} (\xi_\nu + \xi_0 \alpha_{\nu i} X + \xi_0 \zeta_\nu) e_\nu + \xi_0 K_i (x a_{k+i} + \delta_i a_{k+m+1}) \quad 1\leq i\leq m \qquad \text{(III.2.3)}$$

parametrik ifadesi elde edilir. Burada $\delta_i = \dfrac{\eta_{m+1}}{K_i}$, yani Φ nin $E_k(t)$ içindeki i-yinci dağılma parametresi anlamındadır.

Φ nin $\eta(t_0)+xe_i(t_0)\in h_i(t_0)$ noktasındaki tanjant uzayı $\eta(t_0)\in Z_{k-m}(t_0)$ merkez noktasındaki tanjant uzayı ile $\tan\theta = x/\delta_i$ olacak şekilde bir θ açısı yapar. Burada δ_i, $\eta(t_0)\in Z_{k-m}(t_0)$ merkez noktasından geçen $h_i(t_0)$ asli ışını boyunca Φ nin tanjant uzaylarının dağılma parametresi anlamındadır.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

III.2.2 <u>Teorem</u>: Bir (k+1)-regle yüzey Φ nin $E_k(t_0)$, $t_0\in I$, içindeki δ_i i-yinci dağılma parametresi, $h_i(t_0)\in E_k(t_0)$, $1\leq i\leq m$, asli ışını boyunca Φ nin tanjant uzaylarının dağılma parametresi ile çakışır (Frank ve Giering 1978).

III.2.2 <u>Tanım</u> (Asli Işın Yüzeyleri): $t\in I$ parametresine bağlı olarak $h_i(t_0)$, $1\leq i\leq m$, asli ışınları Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ daynak eğrisi boyunca Φ nin 2-boyutlu regle yüzeylerini oluştururlar. Bu regle yüzeylere Φ **nin asli ışın yüzeyleri** denir ve $\Phi_i, 1\leq i\leq m$, ile gösterilirler (Frank ve Giering 1978).

Φ_i asli ışın yüzeyleri ,$1\leq i\leq m$, olmak üzere

$$\Phi_i(t,x)=\eta(t)+xe_i(t) \quad ,(t,x)\in I\times IR, \qquad \text{(III.2.4)}$$

eşitliği ile verilir.

Eğer Φ (k+1)-regle yüzeye silindirik, yani m=0 ise, o zaman Φ hiç bir asli ışın yüzeyine sahip değildir. Eğer Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi olarak seçilirse (III.1.4) ifadesine göre I üzerinde

$$\zeta_\nu=0 \quad ,1\leq \nu\leq k, \qquad \text{(III.2.4')}$$

bağıntısı geçerlidir ve $\eta(t)$, Φ_i nin bir sitriksiyon çizgisi olur. O halde her asli ışın yüzeyi bir sitriksiyon çizgisine sahiptir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

III.2.3 <u>Teorem :</u> Silindirik olmayan (m>0), Ω merkez regle yüzeyli, (k+1)-regle yüzey Φ olsun. O zaman Φ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ dayanak eğrisinde tanımlanan her bir Φ_i ,$1\leq i\leq m$, asli ışın yüzeyi bir sitriksiyon çizgisine sahiptir. Eğer Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi ise, Φ_i asli ışın yüzeyinin sitriksiyon çizgisi ile çakışır (Frank ve Giering 1978).

Eğer Φ (k+1)-regle yüzey Ω merkez regle yüzeyli ise, o zaman her $t\in I$ için $a_{k+m+1}(t)$ merkez tanjant vektörü vardır.

Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz.

III.2.3 <u>Tanım</u> (Merkez Tanjant Yüzeyi): Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ dayanak eğrisi boyunca a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü tarafından meydana getirilen ve

$$\Lambda(t,x)=\eta(t)+xa_{k+m+1}(t) \qquad ,(t,x)\in I\times IR \qquad \text{(III.2.5)}$$

eşitliği ile verilen ışın yüzeyine Φ nin **merkez tanjant yüzeyi** denir ve Λ_η ile gösterilir (Frank ve Giering 1978).

III.2.4 <u>Tanım</u> (Kapalı Regle Yüzey): E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin (II.1.5) parametrizasyonu için p pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$\Phi(t+p,x_1,\ldots,x_k)=\Phi(t,x_1,\ldots,x_k)$$

$$(t,x_1,\ldots,x_k)\in I\times IR \qquad \text{(III.2.6)}$$

ise Φ ye **kapalıdır** denir(Frank ve Giering 1984).

Böylece $\Phi(t,x_1,\ldots,x_k)$, $\eta(t)$, $e_i(t)$, $1\leq i\leq k$, t nin p-periyotlu fonksiyonlarıdır. Burada p en küçük ortak periyodu gösterir. Kolayca görülebilir ki $\eta(t)$ dayanak eğrisi kapalı ise, bir

$$\eta(t)+\sum_{i=1}^{k} x_i(t)e_i(t) \qquad \text{(III.2.7)}$$

eğrisinin de kapalı olması için $x_i(t)$ fonksiyonlarının p-periyotlu olması yeterlidir.

III.2.5 <u>Tanım</u> (Basit Kapalı Regle Yüzey): Eğer kapalı bir (k+1)-regle yüzey Φ için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise Φ ye **basit kapalıdır** denir (Frank ve Giering 1984).

i) Φ nin A(t) asimptotik demetinin boyutu olan k+m sayısı her $t\in I$ için sabittir. Bu özellik $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayları için de doğrudur.

ii) $0\leq t\leq p$ kapalı periyot aralığı, açık bir I aralığı içerisine öyle yerleştirilebilir ki, I üzerinde $E_k(t)$ nin p-periyodik $\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$ doğaltaşıgıcı bazı mevcut olur.

Φ nin basit kapalı olması halinde h_i, $1\leq i\leq m$, asli ışınları

$\eta(t)$ kapalı eğrisi boyunca Φ nin Φ_i, $1 \leq i \leq m$, kapalı asli ışın yüzeylerini oluştururlar.

III.2. 6 Tanım (Açılabilir Regle Yüzey): E^n de $(k+1)$-regle yüzey Φ ve Φ nin dayanak eğrisi $\eta(t)$, asli çatısı da $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ olsun. Eğer,

$$\operatorname{rank}[\dot{\eta}, \dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_k, e_1, \ldots, e_k] = 2k+1 \qquad \text{(III.2.8)}$$

ise Φ ye açılabilir olmayan regle yüzey, aksi halde açılabilir regle yüzey denir (Juza 1962).

Buna göre, $\operatorname{boy} T(t) = 2k+1$ ise, Φ açılabilir olmayan regle yüzey ve $\operatorname{boy} T(t) < 2k+1$ ise, Φ açılabilir regle yüzey olur.

III.2.4 Teorem: Bir Φ $(k+1)$-regle yüzey $\eta(t)$ dayanak eğrisi ve $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ asli çatısı ile verilmiş olsun. O zaman

$$A = [\dot{\eta}, \dot{e}, \ldots, \dot{e}_k, e_1, \ldots, e_k]$$

matrisinin rankı $\eta(t)$ eğrisinin ve $\{e_1(t), \ldots, e(t)\}$ asli çatısının seçilişinden bağımsızdır (Juza 1962).

İspat: Φ $(k+1)$-regle yüzeyinin bir diğer dayanak eğrisi,

$$p(t) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} x_i(t) e_i(t)$$

ve asli çatısı da

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(t) e_i(t) \qquad , 1 \leq i \leq k,$$

olmak üzere $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ile verilmiş olsun. Bu bağıntıların t ye göre diferensiyeli alınırsa görülürki $\dot{p}, \dot{u}_i, u_i$ vektörleri $\dot{\eta}, \dot{e}_i, e_i$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılır. O halde

$$B = [\dot{p}, \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k, u_1, \ldots, u_k]$$

matrisinin rankı A matrisinin rankından daha büyük olamaz. Bu ise iddiamızı isatlar.

III.2.7 Tanım (i-yinci açılım uzunluğu): m=k için Ω merkez regle yüzeyi Φ nin sitriksiyon çizgisinden ibarettir. Bu çigi η olmak üzere baasit kapalı (k+1)-regle yüzey Φ ye ait kapalı ışın yüzeyleri Φ_i ,$1\leq i\leq k$, olsun. Bu taktirde,

$$L_i=-\int_0^p \xi_i(t)dt \quad (\text{veya } L_i=-\int_0^p \langle d\eta, e_i(t)\rangle dt \;) \qquad \text{(III.2.9)}$$

ifadesine Φ nin iyinci açılım uzunluğu denir (Frank ve giering 1982).

Burada L_i , Φ_i asli ışın yüzeylerinin ortogonal yörüngesinin bir periyot sonraki başlangıç ve bitim noktaları arasındaki mesafedir.

$\Psi\subset\Phi$ her $t\in I$ için doğrultmanı h_i ,$1\leq i\leq k$, asli ışınları ile sabit θ_i açılarını yapan bir kapalı ışın yüzeyi olmak üzere Ψ nin L açılım uzunluğu,

$$L=\sum_{i=1}^{k} L_i\cos\theta_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{k}(\cos\theta_i)^2=1 \qquad \text{(III.2.10)}$$

olur (Frank ve Giering 1982).

Eğer Φ , silindirik olmayan (m>0) ve $\eta(t)$ sitriksiyon çizgisine dejenere olmayan (m<k) Ω merkez regle yüzeyli basit kapalı bir (k+1)-regle yüzey ise, (III.2.9) ifadesindeki inteğral Ω nın dayanak eğrisine bağlıdır. Bu durumda (III.2.5) ile tanımlanan Λ_η merkez tanjant yüzeyi için ,

$$-\int_0^p \eta_{m+1}(t)dt=-\int_0^p \langle \dot{\eta}, a_{k+m+1}(t)\rangle dt \qquad \text{(III.2.11)}$$

inteğrali Λ_η nın açılım uzunluğunu verir. Bu açılım uzunluğu Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır. Çünkü (II.1.29) ifadesine göre $\eta_{m+1}(t)$ nin inteğrali $\eta(t)$ eğrisinden bağımsızdır (Frank ve Gierink 1982).

Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan (m>0), basit kapalı (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Φ nin her $E_k(t)$ içindeki $T(t)$ teğetsel demeti E^n yi gersin, yani boy$T(t)=n$ olsun. Bu durumda Φ nin

(III.1.2) n-ayaklısı

$$\{ e_1, \dots ,e_k, a_{k+1}, \dots ,a_{k+m},a_{k+m+1}=a_n \}$$

olur ve bunlara ait küresel eğriler Φ nin bir turunda kapalıdır (Frank ve Giering 1982).

Bu durumda m>0 ve $1\leq i\leq m$ olmak üzere Φ nin m-tane açılım açısını tanımlayabiliriz.

III.2.8 Tanım (i-yinci açılım açısı): Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan (m>0), basit kapalı (k+1)-regle yüzey Φ ve her $t\in I$ için boy$T(t)=n$ olsun. Bu taktirde Φ nin Φ_i ,$1\leq i\leq m$, asli ışın yüzeyleri Φ nin m-tane θ_i açılım açısını tanımlarlar, öyleki ,

$$\theta_i = \int_0^p w_i(t)dt \qquad ,1\leq i\leq m , \tag{III.2.12}$$

dir (Frank ve Giering 1982).

$n=k+m+1$ için (III.1.3) türev denklemlerinden

$$w_i=-\langle \dot{a}_{k+m+1},a_{k+i}\rangle$$

bulunur. O halde

$$\theta_i=-\int_0^p\langle \dot{a}_{k+m+1}(t),a_{k+i}(t)\rangle dt$$

elde edilir.

III.3 TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLER

III.3.1 Tanım (tamamlayıcı Baz): Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Her $t\in I$ için Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin (II.1.27) ortonormal bazını (III.1.2) n-ayklısına tamamlayan

$$\{ a_{k+m+2}, \dots a_n \} \tag{III.3.1}$$

ortonormal bazına **tamamlayıcı baz** denir.

Tamamlayıcı ortonormal baz vektörleri ile gerilen altvektör uzayı ile birleşen Öklid uzayı $F(t)$ olsun.

$$\operatorname{boy} F(t) = n-k-m-1$$

dir.

III.3.2 <u>Tanım</u> (Tamamlayıcı Regle Yüzey): $F(t)$ altuzayı doğrultman uzayı olarak Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi boyunca Φ tarafından ihtiva edilmeyen $(n-k-m)$-boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu regle yüzeye Φ nin **tamamlayıcı regle yüzeyi** (Komplement Regelfläche) denir ve Ψ_η ile gösterilir (Frank ve Giering).

Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyi,

$$\Psi(t,x_2,\ldots,x_{n-k-m}) = \eta(t) + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda a_{k+m+\lambda}(t) \qquad \text{(III.3.2)}$$

şeklinde ifade edilir.

Açık olarak Φ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ dayanak eğrisi aynı zamanda Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin de bir dayanak eğrisidir. (II.1.7) ve (II.1.8) ifadelerine göre,

$$\operatorname{rank}[\Psi_t, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_{n-k-m}}] = \operatorname{rank}[\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} a_{k+m+\lambda}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n]$$

$$= n-k-m \qquad \text{(III.3.3)}$$

için bütün Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyler aynı

$$\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda a_{k+m+\lambda}(t) \qquad \text{(III.3.4)}$$

$(n-k-m)$-yön konisine sahiptirler.

$n=k+m+1$ olması halinde bütün Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyler $\eta(t)$ dayanak eğrisine dejenere olurlar. O halde Ψ_η, $n>k+m+1$ için bir regle yüzey gösterir. II.1.2 teoremine göre Ψ_η nın $\{a_{k+m+2}(t), \ldots, a_n(t)\}$ ortonormal bazına sahip olan Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeynin öyle bir $I_0 \subset I$ açık aralığı bulunabilir ki bu aralıkta (III.1.3) türev denklemlerinde

$$\beta_{\xi\lambda}=0 \qquad ,2\leq\lambda,\xi\leq n-k-m, \qquad \text{(III.3.5)}$$

ifadesi geçerli olur.

İkinci bölümde Φ (k+1)-regle yüzey için verilen kavramlar Ψ_n (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi için de geçerlidir. Buna göre eğer, Ψ_n nın bir doğrultman uzayında asimptotik ve teğetsel demetleri çakışıyor, yani

$$\dot{n}\in\{a_{k+m+2},\ \ldots\ ,a_n,\dot{a}_{k+m+2},\ \ldots\ ,\dot{a}_n\}$$

ise, o zaman Ψ_n tamamlayıcı regle yüzeyi bir $t_1\in I_o$ da bir kenar uzayına sahiptir.

Kabul edelimki $\dot{n}$ vektörü $a_{k+m+2},\ \ldots\ ,a_n,\dot{a}_{k+m+2},\ \ldots\ ,\dot{a}_n$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılsın. Bu taktirde (III.3.5) ifadesine eşdeğer olan

$$\operatorname{rank}\begin{vmatrix} W_{\sigma\xi} \\ \beta_\xi \end{vmatrix} = |W_{\sigma\xi}|+1 \qquad \text{(III.3.6)}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} W_{\sigma\xi} \\ \beta_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{12} & \cdots & W_{1(n-k-m)} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{m2} & \cdots & W_{m(n-k-m)} \\ \beta_2 & \cdots & \beta_{n-k-m} \end{bmatrix}$$

olup (III.2.4) ifadesi geçerlidir.

Ψ_n tamamlayıcı regle yüzeyinin keyfi bir dayanak eğrisi

$$z(t)=n(t)+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}\bar{a}_\lambda(t)a_{k+m+\lambda}(t) \qquad \text{(III.3.8)}$$

olsun. Burada t ye göre türev alınırsa

$$\dot{z}=\dot{\eta}+\sum_{\lambda=1}^{n-k-m}(\dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda}+z_\lambda \dot{a}_{k+m+\lambda})$$

bulunur. Burada (III.1.3), (III.1.4) ve (III.3.5) gözönüne alınırsa,

$$\dot{z}=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu+\eta_{m+1}a_{k+m+1}+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}\dot{z}\, a_{k+m+\lambda}+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}z_\lambda\Big(\sum_{\ell=1}^{m}w_{\lambda\ell}\,a_{k+\ell}+\beta_\xi\, a_{k+m+1}$$

$$,2\leq\xi\leq n-k-m,$$

$$\dot{z}=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}z_\lambda\Big(\sum_{\ell=1}^{m}w_{\lambda\ell}a_{k+\ell}\Big)+\Big(\sum_{\xi=2}^{n-k-m}z_\xi\beta_\xi+\eta_{m+1}\Big)a_{k+m+1}+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}z_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

(III.3.8')

elde edilir. Burada

$$\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}z_\lambda w_{\lambda\ell}=0 \qquad 1\leq\ell\leq m, \qquad \text{(III.3.7a)}$$

ve

$$\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}z_\lambda\beta_\lambda+\eta_{m+1}=0 \qquad \text{(III.3.7b)}$$

eşitliklerini sağlayan $z(t)$ noktaları Ψ_η nın kenar uzayını oluştururlar.

Her $t_1\in I$ için $\eta_{m+1}\neq 0$ olduğundan Ψ_η nın kenar uzayı hiç bir zaman $\eta(t_1)$ dayanak eğrisi noktasını ihtiva etmez.

$n>k+m+1$ olmak üzere $I_0\subset I$ aralığında $\eta(t)$ dayanak eğrisinin, Φ nin ortogonal yörüngesi olmadığını , yani (III.2.4) veya (III.3.6) ifadelerinden birinin geçerli olmadığını varsayalım. Bu durumda Ψ_η, ~~nin~~ tamamlayıcı regle yüzeyi I_0 aralığında bir Ω_η merkez regle yüzeyine sahiptir.

Eğer,

$$\langle\dot{z},\dot{a}_{k+m+\lambda}\rangle=0 \qquad ,2\leq\lambda\leq n-k-m, \qquad \text{(III.3.9)}$$

eşitliği geçerli ise , $z(t)$ eğrisi tam olarak Ω_η merkez regle yüzeyinin bir dayanak eğrisi olur. (III.3.9) ifadesinden z_λ ,$2\leq\lambda\leq n-k-m$, değişkenleri için

$$\sum_{\sigma=1}^{m}(\dot{z}_\lambda \omega_{\lambda\sigma})\omega_{\xi\sigma}+\beta_\xi\Big(\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}\dot{z}_\lambda\beta_\lambda+\eta_{m+1}\Big)=0,\ 2\leq\xi\leq n-k-m \qquad \text{(III.3.10)}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan (III.3.7b) den dolayı Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin, Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisinden bağımsız olduğu görülür. O halde Ω nın bütün tamamlayıcı regle yüzeylerinin merkez uzayları her $t_1 \in I_0$ için paraleldir. Ayrıca (III.3.10) ifadesinde $t_1 \in I_0$ için $\beta_\xi=0$, $2\leq\xi\leq n-k-m$, ise $\eta(t_1)$ dayanak eğrisi noktası Ψ_η nın merkez uzayında bulunur.

Böylece aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

III.3.1 Lemma: Ω merkez regle yüzeyli (k+1)--regle yüzey Φ ve Φ nin (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_η olsun. Eğer (III.2.4') geçerli olmayıp (III.3.6) ifadesi geçerli ise, o zaman Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin Ω_η merkez regle yüzeyi (III.3.7) ifadesi ile tanımlanır (Frank ve Giering 1978).

Eğer Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyi, Ω_η merkez regle yüzeyli ise, (III.3.7) ve (III.3.8') ifadelerinden

$$\dot{z}=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}\dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda} \qquad \text{(III.3.11)}$$

elde edilir. Buna göre $t_1 \in I_0$, Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin merkez uzayının bir $z(t_1)$ merkez noktasındaki tanjant uzayının

$\{\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$ uzayı tarafından gerildiği görülür. O halde Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin doğrultman uzayına sahip olan $z(t_1)$ merkez noktasındaki tanjant uzay Φ (k+1)-regle yüzeyinin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayı ile $\eta(t)+x(\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu(t)e_\nu(t))$ doğrusu boyunca kesişir.

Tersine eğer, Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin her merkez noktasındaki tanjant uzayı Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayını bir doğru boyunca keser ise (III.3.8') ifadesine göre Ψ_η nın Ω_η merkez uzayı (III.3.7) ifadesi ile tanımlanır.

Buradan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

III.3.1 Sonuç: Merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi değil, yani $\zeta_\nu \neq 0$, $1 \leq \nu \leq k$, ve (III.3.6) ifadesi geçerli ise, o zaman Φ nin Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin her bir merkez noktasındaki tanjant uzayı, Φ nin $E_k(t_1), t_1 \in I$, doğrultman uzayı ile bir doğru boyunca kesişir(Frank ve Giering 1978).

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

III.3.1 Teorem: Merkez regle yüzeyli (k+1)--regle yüzey Φ olsun. Eğer aşağıdaki önermelerden birisi sağlanıyor ise, Φ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\eta(t)$ dayanak eğrisinde tanımlanan (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_η, $n > k+m+1$ için $\eta(t)$ dayanak eğrisine dejenere olmaz ve $I_0 \subset I$, $t \in I_0$, aralığında tam olarak kenar regle yüzeyli bir regle yüzey gösterir (Frank ve Giering 1978).

i) Ψ_η tamamlayıcıregle yüzeyinin asimptotik ve teğetsel demetleri bütün $t \in I$ lar için aynıdır.

ii) (III.2.4') ve (III.3.6) ifadeleri aynı anda geçerlidir.

iii) $\eta(t)$ eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi olmak üzere Φ nin ortogonal yörüngesi olmayan her z(t) dayanak eğrisi için Ψ_z tamamlayıcı regle yüzeyi III.3.1 sonucunu sağlar.

Eğer $z(t_1) \in \Psi_\eta$ noktasında (III.3.7a) ifadesi geçerli ise bu noktadaki Ψ_η nın tanjant uzayı ile Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayının merkez noktasındaki tanjant uzaylar bir doğru boyunca kesişir. (III.3.8') ve (III.3.7a) ya göre bu ortak doğru

$$\eta + x\,[\sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + (\sum_{\xi=2}^{n-k-m} e_\xi z_\xi + \eta_{m+1}) a_{k+m+1} \quad, x \in IR, \qquad (III.3.12)$$

ile verilir.

$z(t)\in\Psi_\eta$ merkez noktası (III.3.7a) ve (III.3.10) şartlarını sağladığından dolayı ya (III.3.7b) ifadesi yada

$$\beta_\xi=0 \qquad ,2\leq\xi\leq n-k-m, \qquad (III.3.13)$$

ifadesi geçerlidir. Ohalde (III.3.12) doğrusu ya Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayında bulunur yada $E_k(t_1)$ ile bir noktada kesişir.

III.4 Φ nin Ψ_η TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLERİNİN TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLERİ

Φ nin Ω merkez regle yüzeyinin bir $\eta(t)$ dayanak eğrisi boyunca oluşturulan Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeylerini inceledik. Şimdi Ψ_η ,Ω_η merkez regle yüzeyli bir (n-k-m)-regle yüzey olsun. Ω_η merkez regle yüzeyinin keyfi bir dayanak eğrisi z(t) olmak üzere, Ψ_η tamamlayıcı regle yüzeyinin de bir tamamlayıcı regle yüzeyinden bahsetmek mümkümdür. Bunuda Π_z ile gösterelim ve z(t) dayanak eğrisinde Φ ile çakışıp çakışmadığını araştıralım.

Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin Ω_η merkezregle yüzeyli (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_η olsun. Ψ_η nın teğetsel demetini $\bar{T}(t_1)$,$t_1\in I_0$, ile gösterirsek,

$$\bar{T}(t_1)=Sp\,\{\dot{\eta},\dot{a}_{k+m+2},\ \dots\ ,\dot{a}_n,a_{k+m+2},\ \dots\ ,a_n\} \qquad (III.4.1)$$

olur. Burada (III.1.3),(III.1.4) ve (III.3.4) ifadeleri gözönüne alınırsa,

$$\bar{T}(t_1)=Sp\,\{\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu+\eta_{m+1}a_{k+m+1},\ \sum_{\ell=1}^{m}w_{2\ell}a_{k+\ell}+\beta_2a_{k+m+1},\ \dots\ , \qquad (III.4.2)$$
$$,\sum_{\ell=1}^{m}w_{(n-k-m)\ell}a_{k+\ell}+\beta_{n-k-m}a_{k+m+1},a_{k+m+2},\ \dots\ ,a_n\}$$

olduğu görülür. $t_1\in I_0$ olmak üzere Π_z nın doğrultman uzayları $\bar{T}(t_1)$ teğetsel demeti ile total ortogonaldır. Eğer Ψ_η nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi ise (III.2.4') ifadesi geçerli olduğundan Π_z nın $t_1 \in I_o$ daki doğrultman uzayı Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayına paralel bir uzaydır ve

$$\text{boy}\,\overline{T}(t)=n-k \qquad \text{(III.4.3)}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik (III.4.2) ve (III.2.4') ile birlikte gözönüne alınırsa,

$$\text{rank}[w_{\sigma\xi}]=m \qquad ,1\leq\sigma\leq m,\ 2\leq\xi\leq n-k-m, \qquad \text{(III.4.4)}$$

eşitliğine eşdeğer olduğu görülür.

(III.3.4') ve (III.4.4) ifadelerine göre Π_z nın her $t_1 \in I_o$ için Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayına paralel doğrultman uzaylar ile bir (k+1)-regle yüzey olduğu görülür.

Bunu bir teorem olarak şöyle ifade edebiliriz.

III.4.1 <u>Teorem</u> : E^n de Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin Ω_η merkez regle yüzeyli (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_η olsun. Eğer Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin ortogonal yörüngesi ve Ψ_η, (n-k)-boyutlu $\overline{T}(t_1)$ teğetsel demetine sahip ise, o zaman Ω_η nın z(t) dayanak eğrisinde tanımlanan Π_z regle yüzeyi , Φ nin $E_k(t_1)$, $t_1 \in I_o$, doğrultman uzaylarına paralel olan doğrultman uzaylarla bir (k+1)-regle yüzey gösterir (Frank ve Giering 1978).

Eğer $t \in I_o$ için $\eta(t_1)$ dayanak eğrisi noktası Ψ_η nın bir merkez noktası ise, o zaman Ψ_η nın Π_z tamamlayıcı regle yüzeyi (III.3.12) ifadesine göre Φ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayı ile ortak bir noktaya sahiptir. O halde (III.3,13) ifadesi geçerlidir ve bu ortak nokta $\eta(t_1)$ dir.

Eğer (III.3.13), I_o üzerinde, yani her $t_1 \in I_o$ için geçerli ise (III.1.3) ve (III.1.6) ifadelerine göre Ω nın $\eta(t)$ dayanak eğrisi, Ω nın ortogonal yörüngesi ve Ω_η nın da dayanak eğrisi olarak, yani $z(t_1)=\eta(t_1)$ $,t_1 \in I_0$, alınabilir. Bu durumda (III.2.4'), (III.3.12), (III.4.4) ifadeleri ve III.4.1 teoremine göre Ψ_η nın tamamlayıcı regle yüzeyi Π_z nın doğrultman uzayları Φ nin $E_k(t_1)$ $,t_1 \in I_0$, doğrultman uzayları ile çakışır, ayrıca (III.3.13) ve (III.4.4) ifadelerinden,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} w_{\sigma\xi} \\ \beta_\xi \end{bmatrix}=\operatorname{rank}[w_{\sigma\xi}]=m \tag{III.4.5}$$

olduğundan Π_z regle yüzeyi III.1.2 teoremine göre hiç bir kenar uzayına sahip değildir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

III.4.2 Teorem: E^n de Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin, Ω_η merkez regle yüzeyli (n-k-m)-tamamlayıcı regle yüzeyi de Ψ_η olsun. Eğer aşağıdaki önermeler sağlanıyor ise, o zaman Ψ_η nın tamamlayıcı regle yüzeyi Π_z, Φ ile aynıdır (Frank ve Giering 1978).

i) $z(t)=\eta(t)$ $,t \in I_0$,

ii) $\eta(t)$ eğrisi Φ ve Ψ_η nın ortogonal yörüngesidir.

IV. BÖLÜM

IV.1 KONOİDAL REGLE YÜZEYLER

IV.1.1 **Tanım** (Konoidal Regle Yüzey): E^n de (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Φ nin her $E_k(t)$ doğrultman uzayının paralel olduğu sabit bir $E^q \subset E^n$, $q \geqslant k$, altuzayı mevcut ise Φye **q-konoidal regle yüzey**, E^q altuzayına da Φ nin **doğrultu uzayı (Richtraum'u)** denir (Frank ve Giering 1984).

Eğer bir Φ (k+1)-regle yüzeyi (n-1)-konoidal ise , Φ ye kısaca **konoidal'dır** denir ve onun doğrultu uzayı sabit bir doğrultu hiperdüzlem (Richthyperebone) dir.

IV.1.1 **Örnek**: E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında dik silindir yüzeyi bir konoidal regle yüzeydir.

IV.1.2 **Tanım** (Ortokonoidal Regle Yüzey): Ω merkez regle yüzeyli ve doğrultu uzayı E^q olan q-konoidal bir (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına ortogonal iseler Φ ye **q-ortokonoidal** dır denir (Frank ve Gierng 1984).

Eğer q=n-1 ise Φ ye kısaca **ortokonoidal** diğeceğiz.

IV.1.1 **Teorem**: E^n de q-konoidal (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin A(t) asimptotik demetinin boyutu (boyA(t)=k+m) sabit olsun. Bu durumda E^q doğrultu uzayının boyutu olan q sayısı için,

$$k+m \leq q \leq n-1 \qquad (IV.1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir ve Φ nin asimptotik demetleri E^q doğrultu uzayına paraleldir.

İspat: Teoremin ispatı için $k+m \leq q$ olduğunu göstermek yeterlidir. E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni olan altvektör uzayı $(E^q)^{\perp}$ olmak üzere $boy(E^q)^{\perp}=n-q$ dur. $(E^q)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı

$\{b_{q+1}, \ldots, b_n\}$ olsun. E^q sabit olduğundan $(E^q)^{\perp}$ de sabittir. Bu durumda Φ nin $E_k(t)$, $t \in I$, doğrultman uzayının $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı bazı için,

$$\langle b_{q+s}, e_i(t)\rangle = 0 \qquad , 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq s \leq n-q, \qquad (IV.1.2)$$

dır. Burada t ye göre türev alınırsa,

$$\langle b_{q+s}, \dot{e}_i(t)\rangle = 0$$

elde edilir. $\dot{e}_i$ nün (III.1.3) deki değeri burada yerine yazılırsa,

$$K_i \langle b_{q+s}, a_{k+i}\rangle = 0 \qquad , K_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m \qquad (IV.1.3)$$

bulunur. $K_i \neq 0$ olduğundan

$$\langle b_{q+s}, a_{k+i}\rangle = 0 \qquad , i \leq i \leq m,\ 1 \leq s \leq n-q \qquad (IV.1.3')$$

elde edilir. (IV.1.2) ve (IV.1.3') ifadelerinden ğörülürki Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti $(E^q)^{\perp}$ e ortogonal, dolaysıyla, E^q ya paraleldir. Böylece ispat tamam olur.

(IV.1.1) ifadesine göre k+m sayısı q-konoidal (k+1)-regle yüzey Φ nin E^qdoğrultu uzayının en küçük ihtimalli boyutunu verir.

IV.1.3 <u>Tanım</u> (Kuvvetli Konoidal Regle Yüzey): Silindirik olmayan (m>0), q-konoidal (K+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin boyutu ,(boy$A(t)$=k+m) sabit olsun. Eğer q=k+m ise Φ ye **kuvvetli konoidal** (strengkonoidal) adı verilir (Frank ve Giering 1984).

Φ nin kuvvetli konoidal olması halinde aşağıdaki teorem geçerlidir.

IV.1.2 <u>Teorem:</u> silindirik olmayan (m>0), q--konoidal (k+1)-regle yüzey Φ , k+m sabit boyutlu $A(t)$ asimptotik demetine ve $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olsun. Bu taktirde

Φ kuvvetli konoidaldır ancak ve ancak (III.1.3) ifadesinde

$$w_\sigma=0 \quad , \quad \gamma_{\sigma\lambda}=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m,\ 2\leq\lambda\leq n-k-m \qquad \text{(IV.1.4)}$$

dır.

İspat: IV.1.1 teoremine göre Φ nin A(t) asimptotik demeti E^q doğrultu uzayına paralel olduğundan her $t\in I$ için (IV.1.3') den

$$\langle b_{q+s},a_{k+\sigma}(t)\rangle=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m,\ 1\leq s\leq n-q \qquad \text{(IV.1.5)}$$

yazılabilir. Burada t ye göre türev alınırsa

$$\langle b_{q+s},\dot{a}_{k+\sigma}(t)\rangle=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m,\ 1\leq s\leq n-q \qquad \text{(IV.1.6)}$$

elde edilir. $\dot{a}_{k+\sigma}$nın (III.1.3) türev denklemlerindeki değeri burada yerine yazılır ve (IV.1.2), (IV.1.3) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$w_\sigma(t)\langle b_{q+s},a_{k+m+1}(t)\rangle+\sum_{\lambda=2}^{n-k-m}\gamma_{\sigma\lambda}\langle b_{q+s},a_{k+m+\lambda}(t)\rangle=0 \quad \text{(IV.1.7)}$$

elde edilir. Bunu açık olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}
&w_\sigma\langle b_{q+1},a_{k+m+1}\rangle+\gamma_{2\sigma}\langle b_{q+1},a_{k+m+2}\rangle+\dots+\gamma_{(n-k-m)\sigma}\langle b_{q+1},a_n\rangle=0\\
&w_\sigma\langle b_{q+2},a_{k+m+1}\rangle+\gamma_{2\sigma}\langle b_{q+2},a_{k+m+2}\rangle+\dots+\gamma_{(n-k-m)\sigma}\langle b_{q+2},a_n\rangle=0\\
&\quad\dots\qquad\qquad\qquad\dots\qquad\qquad\qquad\dots \qquad\qquad \text{(IV.1.7')}\\
&w_\sigma\langle b_n,a_{k+m+1}\rangle+\gamma_{2\sigma}\langle b_n,a_{k+m+2}\rangle+\dots+\gamma_{(n-k-m)\sigma}\langle b_n,a_n\rangle=0
\end{aligned}$$

veya matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix}
\langle b_{q+1},a_{k+m+1}\rangle & \langle b_{q+1},a_{k+m+2}\rangle & \cdots & \langle b_{q+1},a_n\rangle\\
\langle b_{q+2},a_{k+m+1}\rangle & \langle b_{q+2},a_{k+m+2}\rangle & \cdots & \langle b_{q+2},a_n\rangle\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\langle b_n,a_{k+m+1}\rangle & \langle b_n,a_{k+m+2}\rangle & \cdots & \langle b_n,a_n\rangle
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_\sigma\\ \gamma_{2\sigma}\\ \vdots\\ \gamma_{(n-k-m)\sigma}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. (IV.1.7'')

$\Longrightarrow$ Şimdi Φ kuvvetli konoidal olsun, yani q=k+m olsun. Bu taktirde Φ nin E^q doğrultu uzayı A(t) asimptotik demetin $e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, .$

$\dots, a_{k+m}$ baz vektörleri tarafında gerilir. O halde E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni $(E^q)^{\perp}$ olmak üzere $(E^q)^{\perp}=Sp\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$ ile $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ aynı uzayı gösterirler. Böylece (IV.1.7'') regüler kuadratik katsayı matrisli lineer denklem sisteminden

$$w_{\sigma}=0 \ , \quad \gamma_{\sigma\lambda}=0 \qquad , 1\leq\sigma\leq m, \ 2\leq\lambda\leq n-k-m,$$

elde dilir.

$(\Longleftarrow)$: Eğer(III.1.3) türev denklemlerinde (IV.1.4) şartları geçerli ise bir I aralığı üzerinde (IV.1.7) sağlanır. Böylece (III.1.3) denklemlerinden I aralığında Φ nin asimptotik demetinin k+m boyutunun sabit olduğu ve q=k+m olduğu görülür. O halde Φ kuvvetli konoidal dır.

Eğer Φ, bir kenar regle yüzeyli (k+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal ise, Φ için (III.1.3) deki ilk k+m türev denklemleri ve $\eta_{m+1}=0$ eşitliği sağlandığından E^n nin (k+m)--boyutlu bir altuzayında bulunur.

Eğer Φ. bir merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey kuvvetli konoidal ise aşağıdaki teorem geçerlidir.

IV.1.3 <u>Teorem</u> : E^n de bir Φ (K+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal olsun. Eğer Φ , Ω merkez regle yüzeyli ise, o zaman Φ (k+m)-ortokonoidaldır.

İspat: IV.1.1 teoremine göre Φ nin her A(t) asimptotik demeti Φ nin E^{k+m} doğrultu uzayının eşlendiği vektör uzayını gerer. II.1.4 teoremine göre Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları A(t) asimptotik demetine diktirler. O halde IV.1.2 tanımı gereğince Φ (k+m)-ortokonoidal dır.

Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi p-konoidal ve q-konoidal gibi değişik mertebelerden konoidal olabilir. Eğer $E^q \subset E^p$ olacak şekilde E^q ve E^p doğrultu uzayları mevcut ise Φ aynı anda q-konoidal ve p-ortokonoidal olabilir.

Kuvvetli konoidal olan bir Φ (k+1)-regle yüzeyin ortokonoidal olması halinde aşağıdaki teorem geçerlidir.

IV.1.4 <u>Teorem</u>: $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ asli çatıya sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan (m>o) kuvvetli konoidal (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ ortokonoidal ise (III.1.3) türev denklemleride

$$\beta_\lambda = 0 \quad , 2 \leq \lambda \leq n-k-m \qquad \text{(IV.1.8)}$$

dır. Bu durumda Φ bir (n=k+m+1)-boyutlu Öklid uzayında bulunur.

İspat: Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal ise q=k+m dir. Ayrıca Φ , Ω merkez regle yüzeyli olduğundan $a_{k+m+1}(t)$, $t \in I$, merkez tanjant vektörü mevcuttur.

Şimdi Φ (k+1)-regle yüzeyi ortokonoidal olsun. Bu taktirde q=n-1 olup Φ nin doğrultu uzayı bir hiperdüzlemdir. O halde $(E^q)^\perp = Sp\{b\}$, yani E^q nun ortogonal tümleyeni 1-boyutlu bir altuzaydır. IV.1.3 teoremine göre $a_{k+m+1}(t), t \in I$, merkez tanjant vektörü E^q doğrultu uzayına diktir, yani a_{k+m+1} vektörü $Sp\{b\}$ uzayında bulunur. O halde

$$\langle b, a_{k+m+1}(t) \rangle = \lambda \qquad (\lambda = s\ t) \qquad \text{(IV.1.9)}$$

yazılabilir. Burada t ye göre türev alınırsa,

$$\langle b, \dot{a}_{k+m+1}(t) \rangle = 0 \qquad \text{(IV.1.10)}$$

elde edilir. $\dot{a}_{k+m+1}$ vektörünün (III.1.3) türev denklemlerindeki değeri (IV.1.10)'da yerine yazılır ve (IV.1.4) ifadesi gözönüne alınırsa

$$-\beta_\lambda \langle b, a_{k+m+\lambda} \rangle = 0 \qquad , 2 \leq \lambda \leq n-k-m,$$

veya

$$\beta_\lambda=0$$

elde edilir. Ayrıca q=k+m ve q=n-1 olduğundan

$$k+m=n-1 \quad \text{yada} \quad n=k+m+1$$

elde edilirki bu da Φ nin (k+m+1)-boyutlu Öklid uzayında bulunması demektir.

Teorem 2.3 ve 4 den aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

IV.1.5 **Teorem:** $\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$ asli çatıya sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan (m>0), (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ için (III.1.3) türev denklemlerinde

$$w_\sigma=0, \quad \beta_\lambda=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m, \quad 2\leq\lambda\leq n-k-m, \qquad \text{(IV.1.11)}$$

ise, o zaman Φ ortokonoidaldır (Frank ve Giering 1984).

IV.1.6 **Teorem:** $\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$ asli çatıya sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan (m>0), (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ q-ortokonoidal ise (III.1.3) ifadesinde

$$w_\sigma=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m, \qquad \text{(IV.1.12)}$$

dır.

İspat: Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi Ω merkez regle yüzeyli ise a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü vardır. Φ q-ortokonoidal olduğundan a_{k+m+1} vektörü Φ nin E^q doğrultu uzayına diktir, yani a_{k+m+1} vektörü E^q ya ortonormal vektör uzayında bulunur. E^q sabit olduğundan $(E^q)^\perp$ de sabittir. O halde a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü Φ nin (II.1.5) parametrizasyonundaki I parametre aralığının $t_0\in I$ değeri için sabit olarak bulunur. Buna göre IV.1.2 teoremi ve (IV.1.6) ifadesinden,

$$\langle a_{k+m+1}(t_0),a_{k+\sigma}(t)\rangle=0 \qquad ,t\in I, \quad 1\leq\sigma\leq m, \qquad \text{(IV.1.13)}$$

yazabiliriz. Burada t ye göre türev alınırsa ,

$$\langle a_{k+m+1}(t_0),\dot{a}_{k+\sigma}(t)\rangle=0$$

elde edilir. $\dot{a}_{k+\sigma}$ nın (III.1.3) ifadesindeki değeri burada yerine yazılırsa,

$$w_\sigma=0 \qquad ,1\leq\sigma\leq m,$$

olduğu görülür.

IV.1.4 Tanım (Orthoid doğuran): E^n de bir (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin bir $E_k(t_0)$ doğrultman uzayı t_0 ın bir ε cıvarında (her $t\in I$ için $|t-t_0|<\varepsilon$) bir Ω merkez regle yüzeyine sahip olsun. Eğer $E_k(t_0)$ ın merkez noktalarındaki tanjant uzayları Φ nin E^q doğrultu uzayına ortogonal iseler, $E_k(t_0)$ doğuranına **q-orthoid** dir denir(Frank ve Giering 1984).

Φ nin (n-1)-orthoid doğuranına kısaca **orthoide** denir. Bu tanım E^3 ün konoidal ışın yüzeylerinin orthoidal doğuran kavramının direkt bir genelleştirilmesidir. E^3 ün sadece dönel (helozoni) yüzeyleri orthoide doğurana sahiptir.

IV.1.2 Örnek: E^3 de

$$E_1(t)=Sp\{\ x=(0,0,x_3)\quad ,\ x_3\in IR\ \}$$

altuzayı doğrultman uzayı olarak

$$\begin{aligned} n: I=(0,2\ ) &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow n(t)=(\cos t,\sin t,0) \end{aligned}$$

eğrisi boyunca oluşturduğu yüzeyin denklemi

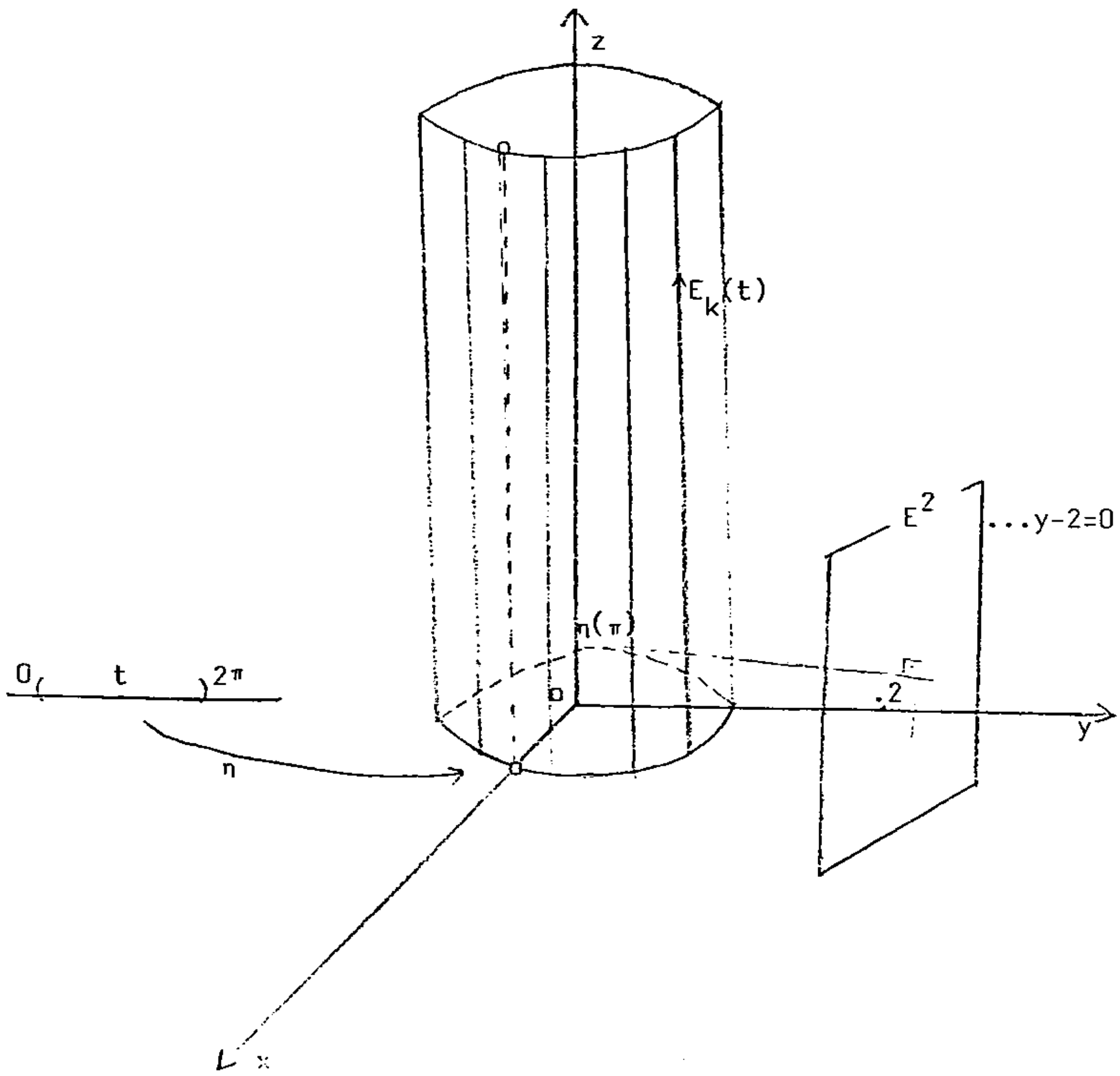
$$\begin{aligned} \Phi(t,\lambda) &= n(t)+\lambda e_3 \\ &= (\cos t,\sin t,0)+(0,0,\lambda) \\ &= (\cos t,\sin t,\lambda) \end{aligned}$$

olup Φ dönüşümü E^3 de bir 2-regle yüzey (ışın yüzeyi) gösterir.

Her $t \in I$ için $E_1(t)$ doğrultman uzayları E^2 ... $y-2=0$, düzlemine paralel olduğundan Φ ışın yüzeyi E^3 de konoidaldır. Ayrıca $\eta(t)$ dayanak eğrisi Φ nin merkez regle yüzeyi olup $\eta(t)$ noktasındaki

$$\dot{\eta}(t)=(\sin t.-\cos t,0)$$

merkez tanjant uzayı (vektörü) $t=\pi$ için E^2 doğrultu uzayına ortogonaldır. O halde $E_1(\pi)$ doğrultman uzayı Φ nin bir orthoid doğuranıdır.



Şekil IV.1.1

IV.1.5 Tanım (Tangoid Doğuran): E^n de q-konoidal bir (k+1)-regle yüzey Φ ve Φ nin bir doğrultman uzayı E_k olsun. Eğer E_k nın noktalarında Φ nin tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına paralel iseler E_k doğrultman uzayına **q-tangoid** dir denir(Frank ve Giering 1984).

Φ nin (n-1)-tangoid doğuranına kısaca **tangoid doğuran** da denir.

IV.1.3 Örnek: Bir önceki örnekte $t=\pi/2$ ve $t=3\pi/2$ değerlerine karşılık gelen E_1 doğrultman uzaylarının noktalarında ϕ nin tanjant uzayları E^2 doğrultu uzayına paraleldir. O halde $E_1(\pi/2)$ ve $E_1(3\pi/2)$ doğuranları ϕ nin tangoid doğuranlarıdır.

IV.1.7 Teorem: E^n de $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı baza sahip olan, konoidal basit kapalı (k+1)-regle yüzey ϕ olsun. Eğer ϕ, E^n nin bir hiperdüzleminde bulunuyor ise, bu taktirde ϕ en az iki tangoid doğurana sahiptir.

İspat: Kapalı bir I aralığında $t_i \in I, 1\leq i\leq 2$, için $a_{k+m+1}(t_i)$ merkez tanjant vektörünün E^q doğrultu uzayına paralel olduğunu göstermeliyiz. Hipoteze göre ϕ konoidal ve E^n nin bir hiperdüzleminde bulunduğundan q=n-1 dir. O halde E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni sabit bir b vektörünün germiş olduğu altuzaydır. a_{k+m+1} vektörünün E^qya paralel olduğunu göstermek için b vektörüne dik olduğunu göstermek yeterlidir. (III.1.4) ifadesinden dolayı (II.1.5) ifadesinde ϕ nin bir kapalı $\eta(t)$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\eta}(t)=\sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu+\eta_{m+1}a_{k+m+1}$$

dir. IV.1.2 teoremi ve (IV.1.6) ifadesinden

$$\langle\dot{\eta}(t),b\rangle=\eta_{m+1}(t)\langle a_{k+m+1}(t),b\rangle$$

elde edilir. ϕ nin kapalı bir yörüngesi üzerinden integral alınarak,

$$\int_{\Phi} \eta_{m+1}(t)\langle a_{k+m+1}(t),b\rangle dt=\int_{\Phi}\langle\dot{\eta}(t),b\rangle dt=0 \qquad \text{(IV.1.13)}$$

bulunur. Bu nedenle en az iki t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, değeri için

$$\eta_{m+1}(t_i)\langle a_{k+m+1}(t_i),b\rangle=0 \qquad \text{(IV.1.14)}$$

dır. Gerçekten

$$\eta_{m+1}(t_i)\langle a_{k+m+1}(t_i),b\rangle=\eta_{m+1}(t_i)\|a_{k+m+1}(t_i)\|.\|b\|\cos t_i$$

$0\leq t\leq 2\pi$ aralığında $t=\pi/2$ ve $t=3\pi/2$ değerleri için $\cos t=0$ olduğundan (IV.1.14) ifadesi doğrudur. O halde Φ nin en az iki $t\in I$ için bir tangoid doğuranı vardır. Eğer Φ özellikle ortokonoidal ise, o zaman $a_{k+m+1}=b$, $\|b\|=1$ dir. Bu taktirde

$$\int_{\Phi} \eta_{m+1}(t)dt=\int_{\Phi}\langle\dot{\eta}(t),b\rangle dt \qquad \text{(IV.1.15)}$$

ifadesi geçerlidir. η_{m+1} in sıfır olmasi (II.1.34) ifadesine göre Φ nin kenar uzaylı olmasını gerektirir. Bu ise ikinci önermenin sağlanması demektir.

IV.1.6 Tanım (Blaschke İnvaryantı): (II.1.5) parametrizasyonuna ve (III.1.3) türev denklemlerine sahip olan ve hiç silindirik olmayan doğuranları ihtiva eden bir Φ 2-regle yüzeyinde ζ_1/K_1 invaryantına **Blaschke invaryantı** denir (Frank ve Giering 1984).

Blaschke invaryantı (III.1.3) ve (III.1.4) ifadeleri yardımıyla $\dot{\eta}$ ve $\dot{e}_1$ den elde edilir.

IV.1.8 Teorem: E^n de bir (k+1)-regle yüzey Φ nin kapalı ortogonal yörüngeli doğuranı ve $\eta(t)$ sitriksiyon çizgili basit kapalı yönlendirilebilen asli ışın yüzeylerinin Blaschke invayantı $0\leq t\leq p$ periyot aralığında, en az iki yerde sıfır değerine sahiptir (yani en az $t_1\neq t_2$ olmak üzere t_1, t_2 için Blaschke invaryantının değeri sıfırdır).

Eğer Φ ortokonoidal ise, Blaschke invayantının sıfır olduğu t_i ,i=1,2 , değerlerine karşılık gelen doğuranlar Φ nin orthoid doğuranlarıdır.

İspat: Φ nin hehhangi bir doğuranın kapalı yörüngesinde ilk açılım uzunluğu III.2.6 tanımı gereyince

$$L_1=-\int_{\Phi}\zeta_1(t)dt=-\int_0^p\zeta_1(t)dt \qquad \text{(IV.1.16)}$$

dır. Buradan en az $t_1\neq t_2$ değeri için $\zeta_1(t_i)=0, i=1,2$, dır. O halde Blaschke invaryantı $\zeta_1(t)/K_1(t)$ ve $K_1(t)\neq 0$ olduğundan t_i,i=1.2 , için Blaschke invaryantı sıfırdır.

Eğer Φ ortokonoidal ise , bu taktirde Φ nin $\eta(t)$ sitriksiyon çizgisi için

$$\dot{\eta}=\zeta_1 e_1+\eta_{m+1}b \ , \ \dot{b}=0 \ , m=1 \ ,$$

elde edilir. Buradan teoremin ikinci ifadesi ortaya çıkar.

ÖZET

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. I.Bölüm diferensiyel geometride manifoldlarla ilgili gerekli ve temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde, E^n ed bir (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyin temel özellikleri verildi. Ayrıca Φ nin kenar ve merkez regle yüzeyleri incelendi.

Üçüncü bölümde Φ nin bir asli çatısının varoduğu gösterildi. Onu E^n nin bir ortonormal çatısına tamamladık ve böylce bir ortonormal çatı elde ettik. Ondan sonra da tamamlayıcı regle yüzeyini inceledik.

Son olarak, dördüncü bölümde, konoidal regle yüzeyler incelendi. Daha sonra kuvvetli konoidal regle yüzeyler için bir karakterizasyon verildi. Ayrıca tangoid ve orthoid doğuranlar tanımlandı ve onlar için örnekler verildi.

ABSTRACT

This study is organized as follows: Section I are devoted to the basic and necassary concepts related with manifolds in differential geometry.

In section II, we give the basic propertier of a (k+1)-dimensional generalized ruled surface E^n. Also we discuse the edge-ruled surfaces and the central-ruled surfaces of .

In section III, it is shown that there exists a orthonormal frame of Φ which is called a pricipal frame. Then we completed it to the orthonormal frame of E^n and there for we obtain a complemantary orthonormal frame. In addition above we also discuse the complemantary ruled surfaces.

Finally, in section IV we dicuse conoidal ruled surfaces and in addition to this we give a caractrization for streng conoidal ruled surfaces. To conclude we also define orthoid and tangoid genaratör and the examples are given for these.

KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H.H. "Lineer Cebir" Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Mat. No:3, 1982

Frank, H. ve Giering, O. "Verallgemeinerte Regelflachen" Math. Zeit. 150, 261--271, 1976.

Hacısalihoğlu, H.H. "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş" Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Mat. No:2, 1980.

Frank, H. "On kinematics of the n-dimensional Euclidean space Contributions to Geometry. Proceedings of the GeometrySymposium inSiegen, 335--342, 1978.

Hacısalihoğlu, H.H. "Diferensiyel Geometri" İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Mat. No:2, 1983.

Frank, H. ve Giering, O. "Regelflachen mit Zentralrachen" Math. Österr. Akad. Wiss. Wien,Math. -Naturwiss. Kl. Abt.II 187 (1978). 139-163.

Frank, H. ve Giering, O. "Verallgemeinerte Regelflachen im Grassen I" Arch. Math. 38 (1982), 106--115.

Frank, H. ve Giering, O. "verallgemeinerte Regelflachen im Grassen II." Journal of Geometry. Voll.23 (1984).

Juza, M. "Ligne de striction sur une generalisetion a plusreurs dimensiona d'une surface reglee Czechosl. Math. J. 12(87), 243-250, 1962.

Hıck N.J. "Notes on differetial Deometry" Van Nostrant Reinhold Company, London, 1974.

Kobayashi, S. ve Nomizu, M. "Foundations of Differetial Geometry" Interscience Publishers, a division of John Wiley

Sons, New York, Voll. I-II, 1963

Matsushima, Y. "Diffentiable Manifolds" Marcel Dekkar,Inc. New York, 1972. (Tranlated by E.T. Kobayashi) pp 25--80.