

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Vildan GÜLKÂÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

" Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne "

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim
Dalında BİLİM UZMANLIĞI TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. ÖRGUT ÖZİŞ

Üye Prof. Dr. ORHAN ÖZER

Üye Yrd. Doç. Dr. SERAFETTİN DOĞUSAN

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait
olduğunu onaylarım.

...../...../1989

Prof. Dr. A. Nihat BOZCUK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, zamana bağlı bölgeyi, uygun koordinat dönüşümü kullanarak, sabit bölgeye dönüştüren problemlerde ortaya çıkan başlangıç değerinin seçimi incelenmiş ve bu seçim, ikiboyutlu sonsuz kare prizmanın katılaşması ile ilgili hareketli sınır değer problemi üzerine uygulanmıştır.

ABSTRACT

In this study, the method based on the coordinate transformation which converts the physical domain into a invariant one is examined in such a way that how the choice of initial values effect the numerical process.

Than, a test problem, two-dimensional solidification problem is taken to show the effect of initial values on it.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmamın bütün safhalarında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç.Dr. Turgut ÖZİŞ'e, araştırmalarım sırasında değerli yardımlarını, önerilerini ve eleştirilerini aldığım tüm hocalarıma ve bölüm elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-----|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT | v |
| TEŞEKKÜR | vi |
| İÇİNDEKİLER..... | vii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | ix |
| TABLolar DİZİNİ | x |
| I. BÖLÜM: SERBEST VE HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEM- | |
| LERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER | 1 |
| 1.1 Giriş | 1 |
| 1.2 Problem: Dünyanın Manyetik Küresi | 3 |
| 1.3 Çözümlerin Kararlılığı, Varlığı ve Tekliği | 4 |
| 1.3.1 Karasız serbest sınır problemi | 4 |
| 1.3.2 Birden fazla çözümü olan serbest sınır prob- | |
| lemi | 5 |
| II. BÖLÜM: SERBEST VE HAREKETLİ SINIR PROBLEMLERİNİN | |
| ÇÖZÜMÜ İÇİN KULLANILAN BAZI NÜMERİK YÖN- | |
| TEMLER | 7 |
| 2.1 Nümerik Yöntemler | 12 |
| 2.1.1 Front-fixing(=Hareketli sınırın sabitleştiril- | |
| mesi) yöntemi | 13 |
| 2.1.2 Analitik dönüşümler | 13 |
| 2.1.3 Fixed-domain(=sabit-bölge) dönüşümleri | 13 |
| 2.2 Front Tracking Yöntemleri | 14 |
| 2.2.1 Method of lines | 14 |
| 2.2.2 Bonnerot ve Jamet yöntemi | 14 |
| 2.2.3 Lynch yöntemi | 14 |
| 2.3 Front-Fixing (=Hareketli sınırın sabitleştiril- | |
| mesi) Yöntemi | 15 |

| | |
|--|----|
| 2.3.1 Basit analitik dönüşümler | 15 |
| 2.3.2 Karmaşık analitik yöntemler | 16 |
| 2.3.3 Brute-force dönüşümleri | 16 |
| 2.4 Analitik Dönüşümler | 17 |
| 2.5 Varyasyonel Eşitsizlikler | 17 |
| 2.6 Entalphy Formülasyonu | 18 |
| III. BÖLÜM: İKİ BOYUTLU HAREKETLİ SINIR DEĞER PROB- LEMLERİNİN KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ | 20 |
| 3.1 Giriş | 20 |
| 3.2 Model Problem | 22 |
| 3.3 Koordinat Dönüşümü | 23 |
| IV. BÖLÜM: SONUÇLAR VE TARTIŞMA | 29 |
| KAYNAKLAR | 36 |
| ÖZGEÇMİŞ | 38 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Şekil 1.1 Dünyanın mağnetik küresi | 3 |
| Şekil 1.2 Bir borda ağızlığından akma | 5 |
| Şekil 2.1 iki boyutlu ideal bir akışkanın hava kabarcığı üzerinden akması | 8 |
| Şekil 3.1 Dönüşümden önceki bölge | 23 |
| Şekil 3.2 Dönüşümden sonraki bölge | 25 |

TABLOLAR DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Tablo 1.1 Uygulama sahalarına göre serbest sınır problemlerinin referans dağılımı | 1 |
| Tablo 4.1 Bölünmüş farklar Newton interpolasyonu | 32 |
| Tablo 4.2 Bölünmüş farklar Newton interpolasyonu | 32 |
| Tablo 4.3 Bölünmüş farklarla Aitken interpolasyonu .. | 33 |
| Tablo 4.4 Bölünmüş farklarla Aitken interpolasyonu .. | 33 |
| Tablo 4.5 Polinom tekniği interpolasyonu | 34 |
| Tablo 4.6 Polinom tekniği interpolasyonu | 34 |
| Tablo 4.7 Literatürdeki sonuçlarla bu araştırmada elde edilen sonuçların karşılaştırması | 35 |

I. BÖLÜM

SERBEST VE HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

1.1 Giriş

Genel olarak tanımlamak istersek, serbest sınır problemlerine hareketli sınır problemlerinin $[t(\text{zaman}) \rightarrow \infty]$ için limitidir denir. Örneğin, bir su musluğunu açarsak hava-su ortak yüzeyini bir serbest sınır alarak bir hareketli sınır problemi elde ederiz. Fakat kısa bir zaman sonra hareket sürekli hale geleceğinden bu olayı serbest sınır problemi olarak formüllendiririz. Bize yol göstermesi açısından, öncelikle serbest sınır değer problemlerinin bir bibliografyasını ortaya koymak ve Tablo 1.1'de görüldüğü gibi, bu bibliografyadaki çeşitli uygulama sahaları arasındaki referansların yaklaşık dağılımını göstermek gerekir [1].

Tablo 1.1 Uygulama sahalarına göre serbest sınır problemlerinin referanslarının dağılımı

| Uygulama Sahası | Referans Yüzdesi |
|--------------------------|------------------|
| Akışkanlar mekaniği | 58 |
| Gözenekli akım | 10 |
| Elastik şekil değiştirme | 15 |
| Isı yayılımı ve difüzyon | 1 |
| Elektro magnetizma | 5 |
| Gravitasyon | 2 |

| | |
|---------------------------|-----|
| Kimyasal reaksiyonlar | 1 |
| Birleşmiş alanlar | 5 |
| Kontrol teorisi | 1 |
| Optimizasyon | 1 |
| Matematiksel genellemeler | 1 |
| | --- |
| | 100 |

Verilen tabloda referansların sadece yaklaşık %1'nin ısı yayılımı ve difüzyonla ilgili olması şaşırtıcı gelecektir. Bunu meydana getiren nedenleri şöyle sıralayabiliriz.

i) Isı yayılımı ve difüzyonla ilgili hareketli sınır problemlerine ait literatürlerin çoğu bir boyutlu problemlerle ilgilidir, hatta uzay boyutunda ele almak çok zordur. Yine de, eğer, bir boyutlu hareketli sınır probleminin limiti mevcutsa, o zaman nispeten önemsiz bir problem olan bir boyutlu serbest sınır problemine uyar.

ii) Bir çok ilginç ve zor hareketli sınır problemleri ilginç olmayan limit çözümlere sahiptir. Örneğin, eğer bir termosu sıcak su ile doldurup, içine bir buz küpü atarsak çok karışık bir hareketli sınır problemi gözleriz. Fakat, limitte bir kap dolusu ılık su elde ederiz. Tablo 1.1'de verilen neden, ısı yayılımı ve difüzyon alanlarındaki serbest sınır problemlerinin ne kadar az ortaya çıktığını göstermez, fakat sınırsız serbest problemlerinin değişikliğini vurgular. Bunların hepsi hareketli sınır problemine neden olur.

1.2 Problem:Dünyanın magnetik küresi

Güneş yüzeyinden ayrılarak dünyaya çarpan yüklenmiş partiküllerin akımı güneş rüzgarı olarak adlandırılır. Partiküller dünyanın magnetik alanı tarafından saptırılırlar ve magnetik küre olarak adlandırılan dünyanın etrafındaki bir bölgeye giremezler. Magnetik kürenin sınırı bir serbest sınırdır. bu magnetik ara olarak bilinir ve uydular yardımıyla deneysel olarak gözlemlenmiştir.Kaba yapıda bir kütle üzerine yüksek hızdaki gaz akımı şok kavisli adı verilen yapıyı oluşturur ve serbest sınır tanımına giren kütle üzerinde süpersonik ve subsonik bölgelere ayırır(Şekil 1.1).



Şekil 1.1 Dünyanın magnetik küresi

Bu güneş lekeleri veya güneş alevleri yüzünden güneş rüzgarındaki ani değişmelerin magnetik küre üzerine etkilerini tanımlayan böyle serbest sınır problemi, benzer serbest sınır problemlerinin çalışması için fikir verir. Şimdi de bu tür problemlerin çözümleri üzerine bazı bilgiler verelim.

1.3 Çözümlerin Kararlılığı, Varlığı ve Tekliği

Bunlar hareketli sınır problemlerinin limiti olarak serbest sınır probleminin uygun veya uygun olmayan bir çözümü sırasında meydana gelen özel durumlardır.

1.3.1 Kararsız serbest sınır problemi

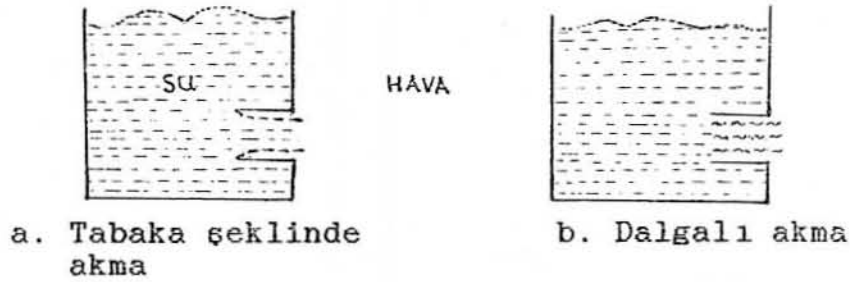
Eğer bir serbest sınır problemi kararsız ise, onu bir hareketli sınır probleminin limiti olarak yaklaştırmak çok zor ve bazende imkansızdır. Ama akışkanlar mekaniğinde serbest sınır problemlerinin kararsız olduğuna dair dikkate alınabilir, kanıtlar da vardır [2]. Önce kararsız bir serbest sınır probleminin matematiksel zorluklar gösterdiği düşünülebilir, fakat periyodik gelişen dalgalar; yani değişmez şekilde gelişen su gibi bir sıvının yüzeyindeki dalgalar örneğinde durum daima böyle değildir. Dalgaların koordinat eksenlerinin hareketi özelliğiyle ilgili bir problem göz önüne alınır, serbest sınır problemi elde edilir. Periyodik gelişen dalgaların varlığı 1920'li yıllarda kanıtlanmıştır. Son yıllarda yapılan araştırmalarda bu ispatın varlığının çok daha fazla örneği vardır[1]. Bununla birlikte periyodik gelişen dalgaların kararsız olduğuna dair hem deneysel, hem de teorik bilgiler vardır[3,4,5]

1.3.2 Birden fazla çözümü olan serbest sınır problemleri

Eğer serbest sınır problemleri birden fazla çözüm veriyorlarsa, mümkün olan yollardan birisi de, bulunan çözümlerden birisinin problemin fiziksel anlamda ifade edilebilmesi aranacak özellikler arasındadır. Yaklaşık 70 yıl kadar önce serbest sınır problemlerinin birden fazla çözümü matematikçilere büyük bir sürpriz gibi geliyordu. Bu konu üzerine çalışmalarını sürdüren bilim adamları yaptıkları çalışmalar sonucunda, iki veya daha fazla çözümün varlığını göstermişlerdir.

Örnek: Borda ağızlığı

Bir borda ağızlığı; varil şeklindeki kaba bir tüpün eklenmesinden meydana gelir (Şekil 1.2). Eğer kap su ile doldurulursa su tüplerden dışarıya akar. Litaratürde genelde dikkate alınan akma Şekil 1.2.a da gösterilen ince tabaka şeklinde akmadır. Bu durumda fişkıran su tüpün içine dokunmadan dışarıya akar. İkinci bir tip akma



Şekil 1.2 Bir borda ağızlığından akma

Şekil 1.2.b'de görülen köpüklü ve dalgalı bir akmadır. Bu ikinci tip akma şekline litaratürde bazen rastlanır [6]. Fakat hangi şartlar altında oluştuğu verilmez. Buradaki

deney aletinin tüpün boyutları deneme yanılma yolu ile bulunmuştur. Kabin boyutları ise, 5 birim genişliğinde 17 birim uzunluğunda ve 24 birim yüksekliğindedir[2]. Tüpün ucundan tapa çıkarıldığında gözlenen akma dalgalıdır. Bununla birlikte küçük bir boru ile tüpün dış gerisinden hava üflenirse su tp cidarlarından uzaklaşır ve akma ince tabaka şekline dönüşür. Dalgalı akmayı elde etmek için üfleme durdurulur.

II. BÖLÜM

SERBEST VE HAREKETLİ SINIR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN KULLANILAN BAZI NUMERİK YÖNTEMLER

Bu bölümde uygulamalı bilim dallarında kullanılan ve kısmen çözümleri mevcut olan problemlerle, çözümleri hakkında özet bilgi verilecektir.

Bir maddede ısının yayılımı veya soğurulması ile maddenin diğer bir hale dönüşmesi önemli bir problem grubu oluşturur. Böyle durumlar bir katının erimesi, donması veya ısıya bağlı kimyasal reaksiyona girmesinde de ortaya çıkabilir. Genelde bu tip problemlerle ilgili ilk yayınlar kutup buzunun kalınlığının bulunması ile ilgili çalışmalar yapan J.Stefan'a aittir [7].

Problemlerin özelliği, iki evresi arasındaki ayrımın bir hareketli yüzey oluşudur. Bu durumda yapılacak iş hareketli sınırın hesaplanmasıdır. Bir çok teknik problem bir faz değişimi ile ilgili hareketli yüzeyin yer değiştirmesini icap ettirir. Kütle yada enerjinin yayılması ile bu gerçekleşir.

Bu problemlere uygulama alanlarına göre örnekler verilirse; buz oluşumu problemleri jeofizikte ve buz üretiminde oldukça önemlidir, geniş kaya kütlelerinin soğuması ile ilgili çalışmalar ise jeolojide geniş yer alır. Yakın zamanlarda ise metallerin katılaştırılmasında, dökümünde, kaynak yapılmasında, aerodinamik ısınma ve diğer kuvvetlerin altında, füzelerin kaplanmasında veya la-

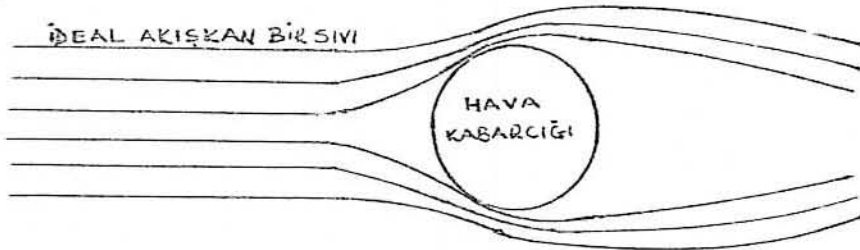
ser ışınının metallerde kullanılmasında ortaya çıkan sür-
tünme ısısının giderilmesi önemli problemleri
oluşturur. Stefan tipi problemlerin diğer ilgi çeken alanı
basınç altında su kullanarak gözenekli kayalardan petrol
çıkarılmasıdır.

Difüzyonu ilgilendiren bir çok problemlerde benzer
forma sahiptir. Böyle problemlere daha çok biyoloji ve
kimya endüstrisinde rastlanır.

Serbest ve hareketli sınır problemlerinin çözüm yön-
temlerine geçmeden önce bunlarla ilgili örnekler verelim.

Örnek 2.1

Sabit bir basınç altında, iki boyutlu ideal bir akışkan,
bir hava kabarcığı üzerinden akıyor. Burada yalnız yüzey
gerilimi olup, yer çekimi ihmal edilmektedir. Kabul ede-
limki u hız potansiyeli olsun, öyle ki, sıvı içindeki hız
 $grad u$ ile verilir.



Şekil 2.1 iki boyutlu ideal bir akışkanın hava kabarcığı
üzerinden akması

$\Omega := \mathbb{R}^2$ de hava kabarcığı dışında tanımlanan bölge,

$\Gamma :=$ Hava kabarcığı yüzeyi ve $C^2(\Omega)$

u ve Γ aşağıdakileri sağlar:

Bilinen sınır problemi:

a) $\nabla^2 u = U_{xx} + U_{yy} = 0$, Ω da (ana denklem)

b) (i) $\text{grad} u \rightarrow (1,0)$, $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ gibi

(ii) $\partial u / \partial n = 0$, $\Gamma = \Omega$ da (akım çizgisi)

Bilinmeyen sınır koşulları:

a) $|\text{grad} u|^2 = -2T_k$, Γ da (kuvvetlerin dengesi)

b) Ω basit irtibatlı olarak birleştirilir. (ilave koşul)
 Analitik çözümleri olan bir çok serbest sınır problemlerinde olduğu gibi, çözümler genelde kompleks fonksiyonlar teorisi ile ifade edilebilir. 1955'de McLeod olası çözümlerden birisini aşağıdaki gibi verdi.

$$\Gamma := \{z = g(t) : t = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

ki $g(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$g(t) = 2T (t - 2/3t - 1/27t^3)$$

Burada U nun açılımı yapılmamıştır.

Örnek 2.2

Bir boyutlu tek-fazlı aşağıdaki Stefan problemini göz önüne alalım. Bu problem ilk defa 1860 yıllarında Neumann tarafından incelenmiştir. Yalıtılmış yarı sonsuz uzunlukta ve x eksenine üzerine yatırılan içi su dolu bir tüp, ki donma noktasındadır, $t=0$ zamanında ve $x=0$ da aniden -1 °C düşürülmektedir ve bu derecede sürekli tutulmaktadır. Dolayısıyla, tüpün içindeki su donmaya başlayacağından, buz-su sınırı aşağıdaki şekilde gösterilebilecektir.

$$x = x(t) \quad t \geq 0 \quad X(0) = 0$$

Suyun sıcaklığının, 0°C de sabit kaldığı farz ediliyor böylece sadece buzdaki sıcaklığın tanımlanmasına ihtiyaç duyuluyor (böylece tek faz olur). Matematiksel formülasyonu:

$$\Omega := \{(x, t) : 0 < x < X(t), 0 < t < \infty\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ (buz bölgesi)}$$

$$\Gamma := \{(X(t), t) : 0 \leq t < \infty\} \text{ (su-buz ara yüzeyi), } U \in C^2(\Omega)$$

ki U , buzdaki sıcaklıktır. U ve Γ aşağıdakileri sağlar.

Bilinen sınır problemi:

a) Ω da, $\partial u / \partial t = U_{xx}$ (ana denklem ısı denklemi)

b) (i) $u(0, t) = -1$ (tüpün sol sonundaki sıcaklık)

(ii) $u(X(t), t) = 0$, Γ da (donma sıcaklığında su-buz arayüzeyi)

Bilinmeyen sınır koşulları:

a) $\partial u / \partial x = L \, dX(t) / dt$

L suyun latent ısısı (bir sabit). L , birimi 0°C de suyun bir gramının donması için tanımlanır. Bu bilinmeyen sınır probleminin çözümü, yukarıdaki örnekte verilen problemin çözüm yöntemine benzer şekilde bulunabilir. ilgili diferensiyel denklemin çözümü, sınır şartlarından birini sağlar ve ilgili parametreyi içerir ve daha sonra seçilen parametreye göre geri kalan sınır şartları sağlatılır.

Çözüm:

$$X(t) := 2\beta\sqrt{t} \quad U(x, t) := -1 + \text{erf}(x/2\sqrt{t}) / \text{erf}(\beta)$$

β denklemin birim pozitif köküdür. $e = \sqrt{\pi} L \beta \text{erf}(\beta)$, ve $\text{erf}(x)$ hata fonksiyonunu tanımlar. Bu seçilen örnekler bilinmeyen sınır probleminin farklı yazılışlarla tanımlanan gösterimleridir ancak analitik çözümlerinin

bilinmesi şartı ile. Bilinmeyen sınır problemlerine literatürde sıkça rastlanır. Bu literatürün nümetik analize direk ilgisi çok fazladır çünkü genellikle özel bilinmeyen sınır problemleri göz önüne alınır. Sadeleştirme riski gözönüne alındığında, diyebiliriz ki, yüzyılın seçkin matematikçilerinin çalışmaları sonucunda, fiziksel problemlerle ilişki kurularak bunların matematiksel tanımları "iyi tanımlı" olarak elde edilmiştir. Bunun sonucunda çıkan genel kural, çözüm (u, Γ) 'nin mümkün olabildiğince, (verilerin elverdiği oranda) "smooth" olmalıdır.

Bilinmeyen sınır problemleri bir çok ortamda açığa çıkmasına rağmen, genelde en çok sürekli ortamlar mekaniğindeki problemlerden oluşurlar. Bu problemlerdeki sınır değeri, bu ortamda bir ara yüzey olduğunda, bu yüzeyde süreksizlik olabilir, veya tekilliğin ve tekil yüzeylerin olduğu yerlerde meydana gelir.

Bu tekillik bir çok nedene dayanabilir, örneğin;

-iki farklı materyal yanyana bulunabilir, su ve hava gibi.

-Materyal farklı fazlarda olabilir, su ve buz gibi.

-Materyalin özellikleri süreksiz olarak bazı değişkenlere bağlı olabilir. Örneğin, materyal, bir kritik değer strese ulaştığı zaman, plastikten elastığe değişim olabilir.

-Hızda yada basınçta bir sıçrama olabilir, şok geçişi gibi.

Akışkan mekaniklerinde, sürekli ortam mekaniği bilinmeyen

sınır problemi ile çok sık ortaya çıkar. (Jetler, hava kabarcıkları, geminin izi, dalgalanmalarda) gözenekli akış (gözenekli kum içinden akış) ve faz değiştirme mekhanığı (eritme ve dondurma) gibi literatürde bir çok yaygın örnek vardır.

2.1 Nümerik Yöntemler

Hareketli sınır değer problemlerinin çözümü, öncelikle sınırları bilinen problemlerin çözümünü içerdiği için, bu tip problemlere uygulanan nümerik yöntemler esas olarak hareketli sınır değer problemleri ile ilgili yöntemlere de adapte edilebilir. Bu da görülebileceği gibi bir tek yolla olmayıp, bu sınırın yapısına ve problemin diğer koşullarına göre çeşitlilik arzeder. Dolayısıyla, hareketli sınır değer problemlerini çözerken, dikkat edilecek temel hususlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

-Problem orjinal yapıda çözülmeye çalışılır, bu durumda hareketli sınır açık şekilde, hesaplama boyunca aproksime edilir. Bu yaklaşımın adı genelde "Deneme Yanılma" yöntemi olarak bilinen yöntem bizi götürür. Özel olarak hareketli sınır değer problemlerinde bu yöntem "Front-Tracking" yöntemi olarak adlandırılır.

-Diğer bir temel yaklaşım ise problem üzerinde matematiksel değişiklikler yapılarak hareketli sınır gizli bir hale getirilir, fakat bunun sonucu olarak daha karmaşık yapıların çözülmesi gerekebilir. Bu yaklaşım için aşağıda

sınıflanan yöntemlere literatürde sıkça rastlanmaktadır.
lar.

2.1.1 Front-fixing=(Hareketli sınırın sabitleştirilmesi) yöntemi

Bu yaklaşımda bilinmeyen bölge bilinen bir bölgeye dönüştürülür, bu dönüşüm probleme ek bir karmaşa getirirse bile, bilgisayar kullanımında büyük bir sakınca doğurmaz. Bu sınıfın en önemli yöntemi IMM'dur.

2.1.2 Analitik dönüşümler:

Bu dönüşümler, conformal dönüşümler gibi dönüşümleri içerir ve genelde sonuçta problemin eşdeğeri olan integral denklemleri elde edilir.

2.1.3 Fixed-domain=(Sabit-bölge) dönüşümleri

Bazı durumlarda, problemin genel çözümü veya "weak"=(zayıf) çözümü elde edilebilir öyleki hareketli sınırla ilgili bölgeler çözüm bölgesi içerisinde açık olarak ifade edilebilir. Bu sınıf problemler ise enthalpy yöntemleri ve varyasyonel eşitsizlikler isimleri altında bilinirler.

Şimdi, yukarıda tanımladığımız yöntemleri biraz daha geniş olarak vermeye çalışalım.

2.2 Front Tracking Yöntemleri

Bu yöntemler, serbest sınır problemlerinde sıkça kullanılan "deneme-yanılma" yönteminin bu problemlerdeki analogudur. Esas olarak problemin orjinal koordinatları korunarak, hareketli sınır açık olarak hesaplama boyunca yaklaşık olarak bulunmaya çalışılır.

Bu yöntemin en çok kullanılanlarından birkaçı:

2.2.1 Method of lines

Bu yöntem geniş olarak Meyer tarafından [8] kullanıldı. Temel düşünce zaman değişkenini ayrıklaştırmadan ibarettir. Sonuçta kısmi diferansiyel denklem her zaman adımı için bir dizi bir boyutlu serbest sınır değer problemine dönüşür.

2.2.2 Bonnerot ve Jamet yöntemi

Bonnerot ve Jamet [9] Stefan problemlerini sürekli sonlu elamanlar kullanarak çözüme kavuşturmuştur, dolayısıyla yöntemin yeterli esnekliği çeşitli problemler için gösterilebilir.

2.2.3 Lynch yöntemi

Lynch [10] deforme olmuş elamanları bularak bir yöntem geliştirdi. Öyleki, bu yönteme sonlu-elamanların

zamana göre deforme olması yöntemi de denilebilir. Bu yöntende bir çok araştırmacı tarafından tercih edilen bir yöntemdir.

2.3 Front-Fixing=(Hareketli sınırın sabitleştirilmesi) Yöntemi

Buradaki düşünce, orjinal bölgesinde çözümü zor olan problemleri, daha basit bir bölgede fakat daha karmaşık denklemler kullanarak çözüme kavuşturmayı amaçlar. Dolayısıyla düşünülen dönüşüm özellikle bilinmeyen bölgeyi bilinen bölgeye dönüştürür. Tabiatıyla bu tip dönüşümlerin sayısı da azımsanmayacak kadar çoktur. Fakat bunların içinde en belirginleri:

2.3.1 Basit analitik dönüşümler

Φ - θ dönüşümleri

Bu dönüşüm genelde iki boyutlu akışkanlarda oluşan problemlerde açığa çıkarılmıştır. Akım fonksiyonu θ , hız potansiyeli Φ harmonik eşlenik fonksiyonlardır. Eğer $z=x+iy$, kompleks düzlemde bir noktayı gösterirse ve $f(z)=\Phi(z)+i\theta(z)$ ise f , z 'nin analitik bir fonksiyonudur, dolayısıyla x ve y büyüklükleri

$$x_{\Phi\Phi} + x_{\theta\theta} = 0$$

$$y_{\Phi\Phi} + y_{\theta\theta} = 0$$

denklemlerini sağlar. Bunlardan herhangi birinin verilme-

si halinde;

$$(x,y) \rightarrow (\Phi,\theta)$$

dönüşümü Ω bölgesini $\Phi-\theta$ düzlemi üzerindeki bölgeye dönüştürür.

2.3.2 Karmaşık analitik yöntemler

Bu yöntemlerin en belirgin örneği, Isoterm Migration metodu olarak bilinen yöntemdir ve Stefan problemleri üzerine uygulamalarını Crank ve çalıştırdıkları uygulamışlardır. Bu yöntem son derece makul bir yöntemdir, öyleki mesela, bağımlı değişken u bağımsız değişken olarak dönüşümde yerini alır, fakat sonuçta elde edilen kısmi diferansiyel denklemler ne yazık ki non-lineerdir. Bu dezavantajına rağmen sıkça kullanılan bir yöntemdir ve çok başarılı uygulamaları vardır.

2.3.3 Brute-force dönüşümleri

Birçok durumlarda hareketli ve serbest sınır değer problemlerindeki bilinmeyen sınır değerleri bilinen sınırlar üzerine dönüştürülerek çözülmeye çalışılır ve sonuçta elde edilen diferansiyel denklemin katsayıları bu bilinmeyen sınırları değişken olarak içerir. İlk bakışta oldukça tehlikeli bir yöntem gibi görünen bu yöntemin birçok başarılı uygulamaları vardır. Bu yöntemin özel örneği olarak Landau dönüşümü verilebilir ki Stefan problemleri

rinde sıkça kullanılmıştır.

2.4 Analitik Dönüşümler

Bu tip problemler için bir çok analitik yöntem geliştirilmesine rağmen bunların arasında en başarılı olanı konformal dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerin teorisi 1868'de Helmholtz'un formülleri ile ortaya çıkmıştır ve aşağıdaki avantajları içerir.

- Analitik çözümü kapalı formda elde etmeye yarar.
- Çözümde kalitatif sonuçlar çıkarmaya yarar.
- Bu çözümlerden yeni formüller üretmek mümkün olabilir öyleki; bu yeni yapılar nümerik çözümlerde kolayca kullanılabilirler.
- Bazı özel problemlerde büyük kolaylıklar sağlarlar.

2.5 Varyasyonel Eşitsizlikler

Varyasyonel eşitsizlikler teorisi hareketli sınır değer problemlerine büyük bir başarı ile uygulanmıştır ve bir çok avantajları mevcuttur.

- Sıkça rastlanan, bir çok fiziksel düşünce içerisinde varyasyonel eşitsizlikleri içerdiğinden uygulamak kolaylaşır.
- Hemen hemen matematiksel literatürde en geniş yer alan matematik dalıdır ve bir çok durumda hareketli sınır değer problemlerini bu yolla varlık ve tekliğini de is-

patlamak mümkün olabilmektedir.

-Varyosyonel eşitsizlikleri çözmek için etkili nümerik yöntemler mevcuttur ve bir çok durumlarda yöntemin tam çözüme yakınsadığı bilinmektedir. Bu yöntem hakkında geniş bilgi; Kinderlehrer ve Stampachia [11]; Elliot ve Ockendon [12]; Friedman [13]'dan elde edilebilir. Bu yöntemin nümerik analizi için ise bakınız; Glowinski, Lions, Tremolieres [14].

2.6 Enthalpy Formülasyonu

Enthalpy yöntemi aşağıda verilen iki esas üzerine kurulmuştur.

1. Yeni bağımsız değişken, enthalpy H ,

$$=u, \text{ eğer } u < 0$$

$$H(u) = \epsilon[0, L], \text{ eğer } u = 0$$

$$=u+L, \text{ eğer } u > 0$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla H , u 'nun çok değişkenli fonksiyonudur.

2. Enthalpy için diferansiyel denklem geliştirilmiştir. Fizik olarak enthalpy toplam u içeriğini temsil eder, dolayısıyla, u denklemini sağlaması gerektiği düşünülürse;

$$\partial H / \partial t = \partial^2 U / \partial t^2$$

eşitliği yazılabilir. Fakat bu denklem kullanılırken $U=0$ da H 'nin bir atlama yaptığı düşünülmelidir. Bu yönteminde, varyosyonel eşitsizliklerde olduğu gibi yeterli teorisi bulunmamaktadır. Diğer yandan, bazı

araştırmacılar bu yöntemin hareketli sınırı tam olarak aproksime edemediğini ileri sürmektedirler.

III.BÖLÜM

İKİ BOYUTLU HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

3.1. Giriş

Diferansiyel denklemlerin çözümü verilen bir bölgede belirli sınır şartlarını sağlamak koşuluyla elde edildiğinde, ortaya çıkan problemlere sınır değer problemi adı verilir. Fakat bir çok uygulamalı problemde, çözüm bölgesinin bir kısmı veya tamamı yer ve pozisyon olarakta bilinmeyebilir. Bu durumda açığa çıkan problemlere genel adıyla serbest veya hareketli sınır değer problemi adı verilir. Problemin "steady state" olma durumunda, problem serbest sınır değer problemi, eğer çözüm zamana bağlı bir yapı içerirse özel olarak hareketli sınır değer problemi adını alır. Bu iki durumda da problemlerin çözümü için serbest veya hareketli sınır üzerinde, ek koşullara ihtiyaç doğar, bu koşullardan birisi sınırın belirlenmesinde, diğeri ise çözümü tamamlamada gereklidir.

Hareketli sınır değer problemleri J. Stefan'dan (1890) sonra genellikle Stefan problemi olarakta anılmakta olup, uygulamada hidroloji, makina ve kimya mühendisliği, moleküler biyoloji, fizik, metalurji, vs. alanlarında açığa çıkmaktadırlar. Konuyla ilgili genel referanslar için Crank[15]; Furzeland [16]; Ockendon ve Hodgkins [17]; Albrecht, Collotz ve Hoffman [18]; Fasano ve Premicerio

[19] müracaat edilebilecek eserlerdir.

Bu çalışmada özel olarak, sonsuz uzunluktaki kare prizmanın başlangıçta bir sıvı ile doldurulup daha sonra dış yüzeyindeki ısının birden donma noktasına düşürülüp sürekli ve sabit bir sıcaklıkta tutulmasıyla ortaya çıkan hareketli sınır değer probleminin çözümü üzerine nümerik yaklaşımlar incelenmiştir.

Bu tip problemlere genel fakat ilginç olan yaklaşım, uygun dönüşüm altında hareketli sınırı sabitleştirmek olarak literatürde geniş bir yer ayrılmıştır. Landau [20] bu dönüşümlerin öncülüğünü yapmış, daha sonra Beaubouff [21] ve Ferris ve Hill [22] bir boyutlu hareketli sınır değer problemini bu yaklaşımla çözmüşlerdir. İki boyutlu problemler için uygun dönüşüm kullananlar ise Furseland [16], Saitoh [23], Duda ve diğ. [24] gibi araştırmacılar ve onların kullandığı referanslardır. Fakat bu yaklaşımların hemen hepsinde ya probleme bağlı olarak veya dönüşümlerden açığa çıkan bazı aksaklıklar olmuştur. Fakat en belirgin olan ve bütün koordinat dönüşümlerinde ortak olan dönüşümden sonra ortaya çıkan problemlerin genellikle başlangıç değerlerine bağımlı çözüm içermeleridir.

Bu çalışmamızda, özel olarak yukarıda tanımladığımızladığımız problemi alıp, uygun koordinat dönüşümü altında başlangıç değerlerinin seçiminin nasıl olacağı üzerine yapılan araştırmayı sonuçlandırmaya çalıştık.

3.2 Model Problem

Sonsuz uzunlukta bir kare prizma, başlangıçta erime ısısına sahip bir akıcı sıvıyla dolduruluyor. Isı dış yüzey üzerinde aniden düşürülüp sıfırın altında bir sıcaklıkta sabit olarak muhafaza ediliyor. Matematiksel, formülasyon için farzedelim ki, prizmanın kare kesiti $-1 \leq x \leq 1$ arasında tanımlansın. $U(x,y,t)$ bir (x,y) noktasında herhangi bir t zamanında ısıyı göstermek üzere ısı taşıma denklemi D bölgesi üzerinde

$$U_t = U_{xx} + U_{yy} \quad (3.1)$$

şeklinde verilebilir. D bölgesi ise

$$U=0 \text{ da } f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1) \quad (3.2)$$

sabit sınır ile kapalı olarak tanımlanmıştır. İki cisim arasındaki ortak yüzey

$$t > 0 \text{ için } U=1 \text{ de } \Phi(x,y,t)=0 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. $\Phi(x,y,t)=0$ eğrisinin varlığı ile katı-sıvı yüzeyleri arasındaki ortak yüzey gösterilir. Her hangi bir t zamanında $\Phi(x,y,t)$ bilinmez,

$$t=0 \text{ da } \Phi(x,y,t)=f(x,y)=0 \quad (3.4)$$

dır. Bunlara ilaveten (3) için diğer bir koşulda

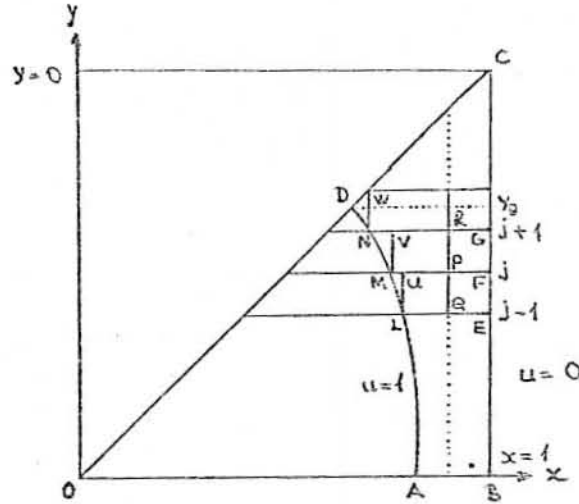
$$\Phi(x,y,t)=0 \text{ da } \partial u / \partial n = -\beta v_n \quad (3.5)$$

n , normal, v_n yüzeyler arasındaki ortak yüzeyin n yönündeki hız derecesi, β ise faz değişiminde olan materyalin ısısına bağlı bir sabittir. Eksenlerdeki en uygun simetri için diagonallikle ilgili R ile tanımlanan bölge göz önüne alındığında $R = [x,y \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1]$ şeklinde olur.

$$y=0 \text{ da } U_y=0$$

$$y=x \text{ de } U_y=U_x.$$

(3.7)



Şekil 3.1 Dönüşümden önceki bölge

3.3 Koordinat Dönüşümü

Şimdi dönüşümün daha iyi anlaşılabilmesi için, donma işleminin başlamasından belirli bir zaman sonra hareketli sınır AD'nin Şekil 3.1'de görüldüğü gibi olmasını göz önüne alalım. Burada A ve D noktaları sırasıyla sınırın x-eksenini ve diagonali kestiği noktalardır. Dolayısıyla istenen gerekli bölge, ABCD (Ω) olarak verilen bölgedir ve bu bölge doğal olarak, hareketli sınırdan dolayı zamanla değişim gösterecektir. İlk amacımız, bu bölgeye uygun dönüşüm uygulayıp bölgeyi zamandan bağımsız kılmak, diğer bir deyişle, hareketli sınırı sabitleştirmek olacaktır. Problemin simetrisi göz önüne alınır, çözüm bölgesi olarak OBC (R) bölgesini almak yeterli olacaktır. Sonuç olarak bu bölgede, hareketli sınırı sabitleştirme düşüncesi de göz önüne alınır dönüşümün

$$t=t, \quad Y=y \quad \text{ve}$$

$$X=1-[(1-x)(1-y)/1-s(y,t)]$$

olacağı açıktır.

OBC üçgensel bölge R ile tanımlanan bölgedir. DA yüzeyi DO diagonali üzerine dönüştürülerek istenilen bölge elde edilir. Bu dönüşüm yapıldıktan sonra denklemler aşağıdaki şekli alırlar.

$$s(y,t) \leq x \leq 1, \quad Y \leq X \leq 1, \quad t > 0 \quad (3.8)$$

$s(y,t)$ aşağıdaki koşulları sağlar.

$$s(y,t) = \begin{cases} \epsilon(y,t) & \text{eğer } \epsilon(y,t) > y \text{ ise} \\ y, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $x = \epsilon(y,t)$, $\bar{\omega} = 0$ ara yüzeyinin alternatif formudur. Şimdi (1) denklemine dönüşüm uygulanırsa,

R' de,

$$U_t = [(1-X)/(1-s)] s_t (U_x)_{y,t} + [(1-Y)^2/(1-s)^2] (U_{xx})_{y,t} + (U_{yy})_{x,t} \quad (3.9)$$

şekline gelir. Hareketli ara yüzeye dönüşüm uygulanırsa ;

$$s_t = 1/\beta [(U_x)^2 + (U_y)^2] / U_x \quad \text{denklemleri}$$

$$s_t = 1/\beta \{ [(1-Y)^2/(1-s)^2] (U_x)_{y,t}^2 + (U_y)_{x,t}^2 \} / [(1-Y)/(1-s)] (U_x)_{y,t}, \quad (3.10)$$

şeklini alır. $Y \leq Y_b$ için $X=Y$ de $s_t = \epsilon_t$ ve diğer durumlarda sıfırdır.

Bu dönüşümler sonucunda ise sınır koşulları,

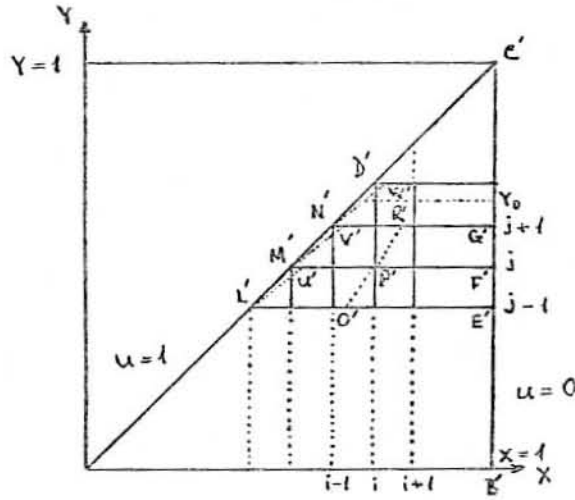
$$X=1 \quad \text{yüzeyinde} \quad U=0 \quad (3.11)$$

ve

$$X=Y \text{ de ve } Y \leq Y_b \text{ de} \quad U=1 \quad (3.12)$$

haline gelir. Dönüşüm sonucunda R bölgemiz

$R=[X,Y: 0 \leq Y \leq 1, Y \leq X \leq 1]$ şekline gelir ve uygun ΔX ve ΔY 'lerin seçimi ile $X_i = X_0 + i\Delta X$, $i=0(1)N$, $X_0=0$, $X_N=1$ ve $Y_j = Y_0 + j\Delta Y$, $j=0(1)N$, $Y_0=0$, $Y_N=1$ grid noktaları tanımlanarak, ardıl zaman aralıkları ile $t_m = t_0 + m\Delta t$ 'ler için hesaplamalar başlatılır ki, t_0 nümerik hesaplamada başlangıç zamanı ve Δt de zaman aralığıdır. Farz edelimki, m 'yinci zaman diliminde ısı değerleri biliniyor. O zaman genel (X,Y,t) grid noktası için açık sonlu fark denklemi kullanılarak $m+1$ 'inci zamandaki ısı değerlerini de hesap



Şekil 3.2 Dönüşümden sonraki bölge

edebiliriz m 'yinci zamandaki ısıya U dersek $m+1$ 'inci ısı değerini;

$$\begin{aligned} (U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m) / \Delta t &= (1 - X_i) / (1 - \epsilon_j^*) [(U_{i+1,j}^m - U_{i-1,j}^m) / 2\Delta X] \\ (\epsilon_j^{*+1} - \epsilon_j^*) / \Delta t &+ [(1 - Y_j)^2 / (1 - \epsilon_j^*)^2] [(U_{i,j+1}^m + U_{i,j-1}^m) / \Delta X^2] \\ &+ (U_{YY})_{i,j}^m \end{aligned} \quad (3.13)$$

$j=0(1)N$ ve

$$i = \begin{cases} j(1)N-1, & \text{eğer } Y_j > Y_b \text{ ise} \\ j+1(1)N-1, & \text{eğer } Y_j \leq Y_b \end{cases}$$

$U_{xj}=0$, $j=0(1)N$ ve $U_{j,j}=1$, $Y_j \leq Y_b$ için bulabiliriz.

Ancak (13) denkleminin ikinci tarafında bilinmeyen s değerleri görünür, bunu hesaplamak için (3.10) denkleminin sonlu fark gösterimi ile

$$\begin{aligned} (s_j^{m+1} - s_j^m) / \Delta t = & -2/\beta \{ [(1-Y_j)^2 / (1-s_j^m)^2] [(U_{j+1/2}^m - U_{j-1/2}^m) / \Delta X]^2 \\ & + (U_Y)_{j,j}^2 \} / \{ [(1-Y_j) / (1-s_j^m)] [(U_{j+1/2}^m - U_{j-1/2}^m) / \Delta X] \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$Y_j \leq Y_b$ ile tanımlanır.

$Y > Y_b$ bölgesi için dönüşüm yapılmaz ve bu bölge için s_j^{m+1} değeri,

$$s_j^{m+1} = s_j^m = (1-Y_j)^2 \quad (3.15)$$

ile hesap edilir. (3.13) ve (3.14) denklemlerinin ikinci yanlarında U_Y ve U_{YY} türevleri gelir. Bunları bulabilmek içinde aşağıdaki algoritma izlenir.

Tekrar Şekil 3.1'e döndüğünde; her hangi bir t zamanı için x - y düzleminde hareketli ara yüzey ys -de üç farklı nokta L, M, N yi göz önüne alalım. $d(L, E)$, $d(M, F)$ ve $d(N, G)$ uzaklıkları dönüşümden sonra $d(L', E')$, $d(M', F')$ ve $d(N', G')$ uzaklıklarına dönüşür. X - Y düzleminde $Y=Y_j$ de bir P' ara noktasını göz önüne alalım ve bu nokta Şekil 3.1'de dönüşüm uygulanmayan x - y düzleminde $y=Y_j$ de P noktasına karşılık gelsin. Şekil 3.1'de $y=Y_{j-1}$ ve $y=Y_{j+1}$ için sabit tutulan x' e karşılık sırasıyla Q ve R' ye karşılık gelsin. Şekil 3.2'de X - Y düzleminde dönüşüm uygulanan Q' ve R' noktaları daha sonra Q' ve R' ile tanımlanır. Q' ve R' noktalarındaki U değeri lineer interpolasyon kullanılarak hesap edilir. Bunun için P' 'nin dönüşüm geçirmediği farzedilerek bu noktaya göre;

$$U_q = U_{i+j-1}^m + [(U_{i,j-1}^m - U_{i,j-1}^m) / \Delta X] \\ \times \{1 - X_{i-1} [(1 - \epsilon_j^m)(1 - Y_{j-1})] / [(1 - \epsilon_{j-1}^m)(1 - Y_j)](1 - X_i)\} \quad (3.16)$$

$j=1(1)N-1$ ve

$$i = \begin{cases} j(1)N-1, & Y_j > Y_D \\ j+1(1)N-1, & Y_j \leq Y_D \end{cases}$$

ile tanımlanır. Benzer olarak,

$j=0(1)N-1$, $i=j+1(1)N-1$ için,

$$U_q' = U_{i,j+1}^m + [(U_{i,j+1}^m - U_{i,j+1}^m) \Delta X] \\ \times \{1 - X_{i+1} [(1 - \epsilon_j^m)(1 - Y_{j+1})] / [(1 - \epsilon_{j+1}^m)(1 - Y_j)](1 - X_i)\} \quad (3.17)$$

Burada hesaplanan U_q' ve U_q değerlerinden faydalananarak üç nokta formülünden,

$$(U_{YY})_p' = (U_q' - 2U_p' + U_q) / (\Delta Y)^2 \quad (3.18)$$

türev değerleri hesap edilir. Benzer şekilde U birinci türevi, M noktası sabit alınarak bir geri fark formülü ile hesap edilir.

$Y_j \leq Y_D$ için

$$U_q' = U_{j+1,j+1}^m + [(U_{j+2,j+1}^m - U_{j+1,j+1}^m) / \Delta X] \\ \times \{1 - X_{j+2} [(1 - \epsilon_j^m)(1 - Y_{j+1})] / [(1 - \epsilon_{j+1}^m)(1 - Y_j)](1 - X_{j+1})\} \quad (3.19)$$

denklemini

$$(U_Y)_{M'} = (U_q' - U_M) / \Delta Y \quad (3.20)$$

denkleminde yerine konularak sonuca gidilir.

Yukarıdaki denklemlerin verilen bölge içinde noktasal çözümünü bilgisayarla bulmak için, aşağıda verilen algoritmanın uygulanması gerekmektedir. Bu durumda istenen algoritma;

- i) t_0 Zamanında başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. (Bunun için uygun seçim yapılabilir.)
- ii) U_Y ve U_{YY} türevleri başlangıç değerleri yardımı ile hesap edilir.
- iii) Hareketli yüzey hesap edilirken, çözüm bölgesinin dönüşüm yapılan bölgenin dışına taşıp taşmadığı kontrol edilir. Eğer $Y_j \leq Y_b$ ise (14) denklemi kullanılır; $Y_j \geq Y_b$ ise, (15) denkleminden faydalanılarak hareketli sınırın yeri hesaplanır.
- iv) Hesap edilen türev değerleri ve hareketli sınır değerlerinin kullanılmasıyla genel ısı denklemi çözülür.

IV. BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Model problemimizde başlangıç değerlerinin etkilerini görmek için çözüm bölgesini sırasıyla $\Delta x = \Delta y = 0.1$ ve $\Delta x = \Delta y = 0.5$ olarak kafeslere bölündü, zaman adımı için $\Delta t = 0.0001$ ve $\Delta t = 0.00004$ alarak çözüm elde etmeye çalışıldı.

Bölge içerisindeki her kafes noktasında $t=0$ zamanı için kullanacağımız U ısı değerlerini elde etmek için, problemin orjinal yapısı da göz önüne alınarak ikinci derece polinomlarla temsil edilebilecek cebirsel yapıların alınması kararlaştırıldı. Bu yapıların üretilmesi interpolasyon işlemi gerektireceği için yapıları kurarken,

- a) Polinom interpolasyonu
- b) Bölünmüş farklar Newton interpolasyonu
- c) Bölünmüş farklarla Aitken interpolasyonu

aldık.

Teorik olarak, koordinat dönüşümü kullanılmış hareketli sınır değer problemlerinin kısa zaman çözümlerini elde etmenin kolay olmadığı bilinmesine rağmen, amacımız polinomların yakınsaması (veya ıraksaması) veya sınımlı yapıları durumlarına göre ampirik sonuçlardan teorik sonuçlar elde etmeyi amaçladığından öncelikle denenen interpolasyonlardan elde edilen çeşitli t değerleri için ısı (U) sonuçlarını vermesi gerektiği düşünüldü:

Sırasıyla sonuçlar Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 değişik Δx ve Δt değerleri için ayırıklaştırmadan dolayı oluşan

farklılıkları Newton interpolasyonu için vermektedir.

Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de yine değişik Δx ve Δt değerleri için Aitken interpolasyonundan elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da aynı şeyler basit polinom tekniği ile elde edilen interpolasyonlar için verilmiştir.

Tablo 4.7'de ise literatürdeki sonuçlar ile bu araştırmada elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Gözlemlerimiz sonucunda, ayırıklaştırmadan gelen değişimin sonucu etkileyecek kadar fazla olmadığı fakat, ayırıklaştırma sayısı arttıkça tabii olarak yakınsamanın biraz daha geç olduğu saptanmıştır (Bu yakınsama istenen sonuca olan yakınsama olmayıp verilen değerler için sayıların ulaştığı yanıltıcı yakınsama değerleridir).

Daha sonra yöntemlerin yapısından gelen farklılıkları görmek için Tablo 4.2, Tablo 4.4 ve Tablo 4.6'daki U değerlerinin değişimi incelenmiş, basit polinom interpolasyonundan elde edilen sonuçların salınımlarının diğer ikisine göre daha fazla olduğu, dolayısıyla elde edilen yakınsamanın çok daha yanıltıcı olabileceği sonucuna varılmıştır. Newton ve Aitken interpolasyonunun yakınsamalarının ikinci derece olduğu teorik olarak bilinmelerine rağmen bu değerlerin bile yeterli olmadığını, problemin yapısından gelen dezavantajın bu şekilde seçimlerle ortadan kaldırılamayacağı sonucuna varılmıştır. Bu düşünceden hareketle üçüncü dereceden yakınsaması olan veya değişik

özelliğe sahip olan interpolasyon formülleri denenmemiş, sonucun değişmeyeceği düşünülmüştür.

Şimdi bu tip problemlere başlangıç değerlerinin nasıl üretilebileceğini araştıralım:

- i) Deneysel sonuçlar, eğer varsa, alınarak probleme başlangıç değeri olarak seçilebilir.
- ii) Deneysel sonuçları elde etmek mümkün değilse, problemin orjinal boyutlarda bir-iki kısa zaman adımı için çözümlenerek uygun dönüşüm altında, koordinat dönüşümü yapılmış probleme başlangıç değeri olarak seçilebilir.
- iii) Analitik yöntemler kullanılarak problemin kısa zaman çözümü yapılabilir.

Sonuç olarak, bu teklif edilen başlangıç değerlerinin de birinin diğerlerine göre iyi veya daha az iyi oldukları durumlarda olabilir. Örneğin, analitik başlangıç değeri formülü o şekilde olabilir ki nümerik yaklaşım için kullanılamayabilir. Bunun dışında problemde yapılan küçük bir modifikasyon bu formülü kullanılmaz kılabilir veya analitik formüller çıkarılırken bazı kabuller yapıldığı için bu kabuller problemin bütün çözüm aşamalarında aynı esnekliği gösteremeyebilir.

Alternatif olarak sunduğumuz problemin orjinal boyuttaki kısa zaman çözümü, verilen problemin çok boyutlu olması durumunda problemi o haliyle çözüme kavuşturmada belki de mümkün olmayabilir. Dolayısıyla, bir genelleme yapılmak istenirse, probleme bağımlı olarak bulunabilen uygun başlangıç değeri kullanımı denemekten başka daha

sağlıklı bir çözüm olmadığı bu çalışmadan elde ettiğimiz sonuçtur.

Tablo 4.1 Bölünmüş farklar Newton interpolasyonu

| t | x=0.1 | | t=0.0001 | | | |
|------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | x | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.7784 | 0.6823 | | 0.5852 | 0.4882 | 0.3911 |
| | 0.8556 | 0.7599 | | 0.6525 | 0.5443 | 0.4359 |
| 0.04 | 0.7397 | 0.6364 | | 0.5312 | 0.4258 | 0.3206 |
| | 0.8533 | 0.7186 | | 0.6012 | 0.4818 | 0.3625 |
| 0.05 | 0.7788 | 0.6827 | | 0.5856 | 0.4884 | 0.3913 |
| | 0.7604 | 0.6530 | | 0.5446 | 0.4361 | 0.3278 |
| 0.1 | 0.7406 | 0.6373 | | 0.5318 | 0.4263 | 0.3209 |
| | 0.7195 | 0.6020 | | 0.4825 | 0.3629 | 0.2434 |
| 0.15 | 0.7011 | 0.5878 | | 0.4713 | 0.3549 | 0.2386 |
| | 0.6750 | 0.5431 | | 0.4086 | 0.2741 | 0.1252 |
| 0.2 | 0.6583 | 0.5305 | | 0.3994 | 0.2683 | 0.1225 |
| | 0.6152 | 0.4699 | | 0.3146 | 0.1420 | 0.1328 |

Tablo 4.2 Bölünmüş farklar Newton interpolasyonu

| t | x=0.05 | | t=0.00004 | | | |
|------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | x | 0.20 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.8529 | 0.7614 | | 0.6666 | 0.5717 | 0.4769 |
| | 0.8530 | 0.8047 | | 0.7044 | 0.6042 | 0.5039 |
| 0.04 | 0.8081 | 0.7204 | | 0.6249 | 0.5296 | 0.4340 |
| | 0.8530 | 0.7662 | | 0.6645 | 0.6138 | 0.5630 |
| 0.05 | 0.8531 | 0.7615 | | 0.6667 | 0.5718 | 0.4769 |
| | 0.8516 | 0.7547 | | 0.6544 | 0.5541 | 0.4538 |
| 0.1 | 0.8084 | 0.7206 | | 0.6251 | 0.5295 | 0.4341 |
| | 0.8095 | 0.7156 | | 0.6140 | 0.5123 | 0.4615 |
| 0.15 | 0.7691 | 0.6842 | | 0.5873 | 0.4904 | 0.3933 |
| | 0.7722 | 0.6803 | | 0.5765 | 0.4726 | 0.3688 |
| 0.2 | 0.7339 | 0.6510 | | 0.5519 | 0.4527 | 0.3536 |
| | 0.7384 | 0.6477 | | 0.5408 | 0.4338 | 0.3269 |

Tablo 4.3 Bölünmüş farklarla Aitken interpolasyonu

| t | x=0.1 | | t=0.0001 | | |
|------|--------|--------|----------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.7784 | 0.6823 | 0.5852 | 0.4882 | 0.3911 |
| | 0.8756 | 0.7599 | 0.6525 | 0.5443 | 0.4359 |
| 0.04 | 0.7397 | 0.6364 | 0.5312 | 0.4258 | 0.3206 |
| | 0.8533 | 0.7186 | 0.6012 | 0.4818 | 0.3625 |
| 0.05 | 0.7788 | 0.6827 | 0.5856 | 0.4884 | 0.3913 |
| | 0.7604 | 0.6530 | 0.5446 | 0.4361 | 0.3278 |
| 0.1 | 0.7406 | 0.6373 | 0.5318 | 0.4263 | 0.3209 |
| | 0.7195 | 0.6020 | 0.4825 | 0.3629 | 0.2434 |
| 0.15 | 0.7011 | 0.5878 | 0.4713 | 0.3549 | 0.2386 |
| | 0.6750 | 0.5431 | 0.4086 | 0.2741 | 0.1152 |
| 0.2 | 0.6583 | 0.5305 | 0.3994 | 0.2683 | 0.1225 |
| | 0.6152 | 0.4699 | 0.3146 | 0.1420 | 0.1228 |

Tablo 4.4 Bölünmüş farklarla Aitken interpolasyonu

| t | x=0.05 | | t=0.00004 | | |
|------|--------|--------|-----------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.8529 | 0.7614 | 0.6666 | 0.5717 | 0.4769 |
| | 0.8530 | 0.8047 | 0.7044 | 0.6042 | 0.5039 |
| 0.04 | 0.8081 | 0.7204 | 0.6249 | 0.5296 | 0.4340 |
| | 0.8530 | 0.7662 | 0.6645 | 0.6138 | 0.5630 |
| 0.05 | 0.8531 | 0.7615 | 0.6667 | 0.5718 | 0.4769 |
| | 0.8516 | 0.7547 | 0.6544 | 0.5541 | 0.4538 |
| 0.1 | 0.8084 | 0.7206 | 0.6251 | 0.5295 | 0.4341 |
| | 0.8095 | 0.7156 | 0.6140 | 0.5123 | 0.4615 |
| 0.15 | 0.7691 | 0.6842 | 0.5873 | 0.4904 | 0.3933 |
| | 0.7722 | 0.6803 | 0.5765 | 0.4726 | 0.3688 |
| 0.2 | 0.7339 | 0.6510 | 0.5519 | 0.4527 | 0.3536 |
| | 0.7384 | 0.6477 | 0.5408 | 0.4338 | 0.3269 |

Tablo 4.5 Polinom tekniği interpolasyonu

| t | x=0.1 | | t=0.0001 | | | |
|------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | x | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.7847 | 0.6184 | | 0.4726 | 0.3459 | 0.2384 |
| | 0.8501 | 0.7841 | | 0.6133 | 0.4632 | 0.2236 |
| 0.04 | 0.7611 | 0.5955 | | 0.4503 | 0.3236 | 0.2154 |
| | 0.8431 | 0.7593 | | 0.5850 | 0.4314 | 0.2964 |
| 0.05 | 0.7851 | 0.6187 | | 0.4728 | 0.3460 | 0.2384 |
| | 0.7844 | 0.6137 | | 0.4634 | 0.3324 | 0.2207 |
| 0.1 | 0.7619 | 0.5961 | | 0.4507 | 0.3239 | 0.2156 |
| | 0.7602 | 0.5857 | | 0.4318 | 0.2966 | 0.1800 |
| 0.15 | 0.7389 | 0.5694 | | 0.4203 | 0.2892 | 0.1759 |
| | 0.7343 | 0.5498 | | 0.3662 | 0.2406 | 0.0964 |
| 0.2 | 0.7145 | 0.5351 | | 0.3762 | 0.2346 | 0.0940 |
| | 0.6967 | 0.4982 | | 0.3154 | 0.1263 | 0.1058 |

Tablo 4.6 Polinom tekniği interpolasyonu

| t | x=0.05 | | t=0.00004 | | | |
|------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| | 0.0 | 0.1 | x | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 0.02 | 0.8510 | 0.6809 | | 0.5303 | 0.3984 | 0.2853 |
| | 0.8560 | 0.7655 | | 0.6042 | 0.4617 | 0.3379 |
| 0.04 | 0.8082 | 0.6482 | | 0.5043 | 0.3782 | 0.2698 |
| | 0.8510 | 0.7308 | | 0.5757 | 0.4384 | 0.3188 |
| 0.05 | 0.8510 | 0.6809 | | 0.5303 | 0.3984 | 0.2853 |
| | 0.8541 | 0.6825 | | 0.5306 | 0.3974 | 0.2830 |
| 0.1 | 0.8083 | 0.6482 | | 0.5044 | 0.3782 | 0.2698 |
| | 0.8139 | 0.6512 | | 0.5049 | 0.3765 | 0.2658 |
| 0.15 | 0.7715 | 0.6204 | | 0.4814 | 0.3594 | 0.2541 |
| | 0.7790 | 0.6240 | | 0.4816 | 0.3561 | 0.2477 |
| 0.2 | 0.7392 | 0.5956 | | 0.4600 | 0.3405 | 0.2372 |
| | 0.7480 | 0.5995 | | 0.4594 | 0.3354 | 0.2278 |

Not:Her bir t zaman diliminde değerler j=1 ve j=2 için verilmiđtir.

Tablo 4.7 Literatürdeki sonuçlarla bu araştırmada elde edilen sonuçların karşılaştırması

| t | Crank ve Gupta [26] | Crank ve Crowley [27] | Gupta ve Kumar [28] | Araştırmada elde edilen sonuçlar | |
|------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| | | | | x= y=0.1 t=0.0001 | x= y=0.05 t=0.00004 |
| 0.05 | 0.8125 | 0.775 | 0.8125 | 0.7788 | 0.8531 |
| 0.10 | 0.6979 | 0.676 | 0.6982 | 0.7406 | 0.8084 |
| 0.15 | 0.6157 | 0.601 | 0.6156 | 0.7011 | 0.7691 |
| 0.20 | 0.5473 | 0.536 | 0.5463 | 0.6583 | 0.7339 |
| 0.25 | 0.4565 | 0.477 | 0.4837 | 0.6002 | 0.7020 |
| 0.30 | 0.4302 | 0.420 | 0.4244 | 0.5426 | 0.6728 |
| 0.35 | 0.3766 | 0.354 | 0.3663 | 0.4455 | 0.6457 |
| 0.40 | 0.3337 | 0.308 | 0.3078 | 0.2809 | 0.6199 |
| 0.45 | 0.2816 | 0.249 | 0.2495 | - | 0.5949 |
| 0.50 | - | 0.188 | 0.1894 | - | 0.5703 |
| 0.55 | - | 0.119 | 0.1271 | - | 0.5452 |
| 0.60 | - | - | 0.0562 | - | 0.5190 |
| 0.65 | - | - | - | - | 0.4897 |
| 0.70 | - | - | - | - | 0.4604 |
| 0.75 | - | - | - | - | 0.4123 |
| 0.80 | - | - | - | - | 0.3619 |
| 0.85 | - | - | - | - | 0.2785 |
| 0.90 | - | - | - | - | 0.1357 |

KAYNAKLAR:

- [1] Acosta, A.J., Hydrofoils and hydrofoil craft. Annual Review of Fluid Mechanics, 5, 161-184, (1973).
- [2] Doğusan, Ş., Doktora Tezi, Fırat Univ., (1989).
- [3] Baiocchi, C., Ann.Maths. Pura Applics, 92,107-127, (1972).
- [4] Benjamin, T.B., Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, Proc.Roy.Soc.,London, 229A, 59-75, (1967).
- [5] Benjamin,T.B., and Feir, J.E., The disintegration of wave trains on deep water. Part I. Teory, J.Fluid Mech., 27, 417-430, (1967).
- [6] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of heat in solids. Second ad., Oxford, Clarendon Press, (1959).
- [7] Stefan, J., Über die theorie der Eishbildung in polameere, Annolen der Physik und Chemie, V.L.42, 269, (1881).
- [8] Meyer, G.H., The method of lines and invariant embedding for elliptic and parabolic free boundary problems. SIAM J. Numer. Anal. 150-164, (1981).
- [9] Bonnerot, R. and Jamet, P., A third order accurate discontinuous finite element method for the one-dimensional Stefan problem. J. Comput. Phys. 145-167, (1979).
- [10] Lynch, D.R., Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems. Physics, 387-411, (1982).
- [11] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G., An introduction to variational inequalities their applications. Academic Press, New York, (1980).
- [12] Elliot, C.M and Ockendon, J.R., Weak and variational methods for moving boundary problems. Pitman, Boston, (1982).
- [13] Friedman, A., Variational principles and free-boundary problems, John Wiley and Sons, New York, (1982).
- [14] Glowinski, R. Lions, J-L and Tremoliers, R., Numerical analysis of variational inequalities. Nort-Holland, Amsterdam (1981).

- [15] Crank, J., The mathematics of diffusion., Oxford, Clarendon Press, (1975).
- [17] Furzeland, R.M., The numerical solution of two dimensional moving boundary problems using curvilinear co-ordinate transformations., TR/77, Brunel University, U.K., (1977).
- [18] Ockendon, J.R., and Hodkins, R., Moving boundary problems in heat flow and diffusion., Oxford, Clarendon Press, (1975).
- [19] Albrecht, J., Collotz, L., Hoffman, K.H., (Eds) Proceedings of the oberwolfach conference on free boundary problems (Birkhauser Verlag) (1980).
- [20] Fasano, A. and Premicerio, M., (Eds.) Free boundary problems theory and applications vols 1 and 2 research notes in mathematics 78 and 79 Pitman, London (1983).
- [21] Landau, H.G., Heat conduction in a melting solid Q. App. Maths. VIII, 81-94 (1950).
- [22] Beaubouff, R.T., and Chapman, A.J., Freezing of fluids in forced flow, Int. J. Heat Mass Transfer 10, 1581-1587 (1967).
- [23] Ferriss, D.H., and Hill, S., On the numerical solution of a one-dimensional diffusion problem with a moving boundary, NPL report NAC 45, (1974).
- [24] Saitoh, T., Numerical methods for multidimensional freezing problems in arbitrary domain, J. Heat Transfer 100, 294-299 (1978).
- [25] Duda, J.L., Malone, M.F., and Notter, R.H., Analysis of two-dimensional diffusion controlled moving boundary problems, Ins. J. Heat Mass Transfer 18, 901-910 (1975).
- [26] Crank, J. and Gupta, R.S., Isotherm migration method in two dimensions. Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1101-1107, (1975).
- [27] Crank, J. and Crowley, A.B., Isotherm migration along orthogonal flow lines in two dimensions. Int. J. Heat Mass Transfer, 21, 393-398, (1978).
- [28] Gupta, R.S. and Kumar, A., Treatment of multi-dimensional moving boundary problems by coordinate transformation. Int. J. Heat Mass Transfer, 28, 1355-1366, (1985).

ÖZGEÇMİŞ

2.1.1964 Tarihinde Edirne'nin Keşan ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini İstanbul'da, orta öğrenimini ise Malatya'da tamamladı. 1982 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1986 yılında yüksek öğrenimini tamamlayarak, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

YAYINLARI

1- Öziş, T. ve Gülkaç, V., iki Boyutlu Hareketli Sınır Değer Problemlerinin Koordinat Dönüşümleri ile Çözümleri, Ulusal Matematik Sempozyumu II, 25-28 Eylül 1989, Bornova İZMİR.