T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# LOKAL ROUGH KÜMELER VE ROUGH ALTGRUPOİDLER

Hatice TAŞBOZAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Mayıs 2017

Tezin Başlığı : Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler

Tezi Hazırlayan : Hatice TAŞBOZAN

Sınav Tarihi : 15.05.2017

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

**Sınav Jüri Üyeleri**

**Tez Danışmanı:** **Prof. Dr. İlhan İÇEN** ...............................
İnönü Üniversitesi

**Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU** ...............................
Gazi Üniversitesi

**Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ** ...............................
İnönü Üniversitesi

**Doç. Dr. İshak ALTUN** ...............................
Kırıkkale Üniversitesi

**Doç. Dr. M. Habil GÜRSOY** ...............................
İnönü Üniversitesi

**Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL**
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum ”Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hatice TAŞBOZAN

# ÖZET

Doktora Tezi

Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler

Hatice TAŞBOZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

76+vi sayfa

2017

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş bölümü olarak düzenlendi ve literatür özeti de bu bölümde verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara yer verildi. Bu bölümde, temel topolojik kavramlar olan kategori teorisi ve demet teorisi tanım ve teoremler ile birlikte verildi. Demet teoride, demetin global kesiti olan lokal denklik bağıntısı kavramından bahsedildi.

Üçüncü bölümde, rough kümelerin bazı tanımları ve temel özellikleri verildi. Ayrıca, rough cebirsel yapılarından olan rough grup kavramı, grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları yardımıyla verildi.

Dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orjinal bölümlerini oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, grupoid ve rough teori kavramları kullanılarak yeni bir kavram olan rough altgroupoid kavramı tanımlandı ve bazı teoremler verildi.

Son bölümde ise lokal denklik bağıntısı kavramı yardımıyla yeni bir rough küme olan lokal rough küme tanıtıldı. Ayrıca, lokal rough kümelerin alt ve üst yaklaşımları tanımlandı ve bazı özellikler verildi.



ANAHTAR KELİMELER: Grupoid, Lokal denklik bağıntısı, Rough küme, Rough alt grup, Rough (normal) altgrupoid, Lokal Rough küme, Lokal rough yaklaşım uzayı, Coherent lokal yaklaşım uzayı, Lokal bağlantılılık.

**ABSTRACT**

Ph. D. Thesis

Local Rough Sets and Rough Subgroupoids

Hatice TAŞBOZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

76+vi pages
2017
Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

The first chapter of this thesis, which is consisting of five chapters, has been arranged as an introduction chapter and the literature survey has also been given in this chapter.

In the second chapter, basic concepts to be used in the upcoming chapters are introduced. In this chapter, the basic topological concepts; category theory and sheaf theory are presented with relevant definitions and theorems. In sheaf theory, the concept of local equivalence relation,which is the global section of sheaf, are given.

In the third chapter, some definitions and basic features of rough sets are given. In addition, the concept of rough group, which is a rough algebraic structures, is presented with the help of the lower and the upper approximations of a subset of a group.

Fourth and fifth chapters constitute the original parts of this thesis.

In the fourth chapter, the concept of rough subgroupoid, which is a new definition, is introduced by using the concepts of groupoid and rough theory and relevant theorems are given.

In the final chapter, local rough set that is a new rough set is presented with the help of the concept of local equivalence relation. In addition, the lower and the upper approximations of local rough sets are presented and some of their features have been given.

KEY WORDS: Groupoid, Local equivalence relation, Rough set, Rough subgroup, Rough (normal) subgroupoid, Local Rough set, Local rough approximation space, Coherent local approximation space, Local connectedness.

**TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım çok değerli hocam Prof.Dr. İlhan İÇEN'e, araştırmalarım sırasında görüşleriyle yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her zaman bana yardımcı olan değerli hocalarım Doç.Dr. M. Habil GÜRSOY'a, Yrd.Doç.Dr. A. Fatih ÖZCAN'a, Matematik Bölümü Başkanı Prof.Dr. Sadık KELEŞ'e, her zaman desteklerini aldığım anneme, babama ve kardeşlerime, çok kıymetli eşim Orkun'a ve biricik kızım Eylül'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hatice TAŞBOZAN

**İÇİNDEKİLER**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

Rough küme teorisi, 1982' de ilk olarak Pawlak [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori kesin olmayan bilginin belirsizliği ve anlaşılmazlığı ile ilgili bir yöntem olarak tanıtıldı. Bu teoride nesnelerin sınıflandırmasının temeli bir denklik bağıntısıdır. Teorinin temeli olan rough (yaklaşımlı) küme kavramı, evrensel kümenin herhangi bir alt kümesi olup, evrensel küme üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı ile oluşturulan alt ve üst yaklaşımlar ikilisi ile tanımlanır. Rough kümeler; belirsiz veya kesin olmayan bilginin tanımlanması, analizi, eksik bilgiye dayanan akıl yürütme gibi çeşitli problemlerin çözümünde bir araç oldu. Ayrıca kesin olmayan bilgiler için yeni bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntemde; belirsizlik, bir kümenin sınır bölgesi ile açıklanır [1].

Rough cebirsel yapılardan, rough grup kavramı iki şekilde tanımlanmıştır. Bunlardan birincisi, Bismas ve Nanda [2] tarafından sadece üst yaklaşım tanımı kullanılarak verilmiş, ikincisi ise Kuroki ve Wang [3] tarafından hem üst hem de alt yaklaşım tanımı kullanılarak verilmiştir. Yani bir $G$ grubu üzerinde $N$ alt grubuna göre tanımlanan $x \equiv y(modN) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ denklik bağıntısı kullanılarak, grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları tanımlanmıştır [4].

Rough altgrupoid ve lokal rough küme kavramlarının oluşturulması için öncelikle kategori ve grupoid kavramlarından bahsedilerek altgrupoidlerle ilgili örnekler ele alındı. Sonrasında ise demet teorisine geçilerek demet ve öndemet arasındaki ilişkiden yola çıkarak bir topolojik uzayın açıkları üzerindeki tüm denklik bağıntılarından oluşan küme ile elde edilen $E$ öndemetine karşılık gelen $\mathcal{E}$ demetinin $r-$global kesiti olan lokal denklik bağıntısı tanımı verildi [5].

Bu çalışmada, rough altgroupoid kavramının oluşturulabilmesi için grupoid ve rough alt grup kavramları ile yeni bir tanım verildi. Bir grupoid üzerinde, normal altgrupoidine göre verilen bir kümenin alt ve üst yaklaşımları bulunarak bu kümenin rough kümesi elde edildi. Rough kümedeki alt ve üst yaklaşımlar, grupoidin birer altgrupoidi ise bu rough kümeye grupoidin alt ve üst yaklaşımlarına göre rough altgrupoididir denildi. Rough alt gruplarda teoremlerle verilen durumların rough altgroupoidler için de incelenebileceği görüldü.

Son olarak, lokal denklik bağıntısı kavramından hareketle yeni bir kavram olan ”lokal rough küme” tanıtılarak, bu kavram alt ve üst yaklaşım işlemleri ile tanımlandı. Lokal rough kümeler ile ilgili örnekler verilerek, lokal rough kümedeki yaklaşımın kesinliği ile rough kümedeki yaklaşımın kesinliği karşılaştırıldı. Ayrıca lokal yaklaşım uzayında coherentlik ve bağlantılılık gibi kavramlar elde edildi ve bu kavramlar ile ilgili bazı teoremler verildi.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Kategori

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

**Tanım 2.1.1.** Nesnelerin kümesi $Ob(\mathcal{C})$, morfizmlerin kümesi $Mor(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ olmak üzere, morfizmlerin kompozisyon işlemi,

$$m = Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C}) = \{(f,g) \in Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \mid \alpha(g) = \beta(f)\}$$

$$m(f,g) = g.f$$

kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla $\alpha, \beta : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$ ve nesne dönüşümü $\varepsilon : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}), X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(\mathcal{C}, Ob(\mathcal{C}), \alpha, \beta, \varepsilon, \mu)$ altılısına kategori denir [6].

**KAT1)** $\forall (f,g) \in Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C})$ için $\alpha(g.f) = \alpha(f)$ ve $\beta(g.f) = \beta(g)$.

**KAT2)** $\forall f,g,h \in Mor(\mathcal{C})$ ile $\alpha(h) = \beta(g)$ ve $\alpha(g) = \beta(f)$ için $h.(g.f) = (h.g).f$.

**KAT3)** $\forall x \in Ob(\mathcal{C})$ için $\alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$.

**KAT4)** $\forall f \in Mor(\mathcal{C})$ için $f.I_{\alpha(f)} = f$ ve $I_{\beta(f)}.f = f$.

**Örnek 2.1.1.** Bazı kategori örneklerini ve onların nesneleri ile morfizmleri aşağıda verilmiştir [6].

| KATEGORİ | NESNELERİ | MORFİZMLERİ |
|---|---|---|
| *Grp* | Gruplar | Grup morfizmleri |
| *Set* | Kümeler | Kümeler arası dönüşümler |
| *Cat* | Kategoriler | Funktorlar |
| *Top* | Topolojik uzaylar | Sürekli fonksiyonlar |
| *Gpd* | Tüm grupoidler | Grupoid morfizmleri |

**Tanım 2.1.2.** $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Bir $\mathcal{C}^{op}$ kategorisi;

$$Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}^{op})$$

ve $\forall X,Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ için

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

şartlarını sağlayan kategoridir. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ kategorisinin **dual (veya zıt) kategorisi** denir [7].

**Örnek 2.1.2.** $X$ bir topolojik uzay ve $X$' in bütün açıklarını nesne kümesi ve

$$O(X) = \{f : U \to V| \quad U,V \subset X\text{açık}\}$$

kümesinin dualini de morfizm kabul eden $O(X)^{op}$ kategorisi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

1. Nesneler kümesi,

$$Ob(O(X)^{op}) = \{U : U, \text{X uzayının açık altkümesi}\}.$$

2. Morfizmler kümesi,

$$Mor(O(X)^{op}) = \left\{f \mid f : U' \longrightarrow U \text{ sürekli dönüşüm },\ U,U' \subset X \text{ açık}\right\}.$$

3. Kompozisyon işlemi,

$$Mor(U',U) \times Mor(U'',U') \to Mor(U'',U)$$
$$(f,g) \mapsto gof.$$

4. Kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha(f) = U', \qquad \beta(f) = U.$$

5. Nesne dönüşümü ise

$$\varepsilon(U) = I_U$$

şeklinde tanımlıdır [7].

**Tanım 2.1.3.** $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere; $\forall X \in Ob(\mathcal{D})$ için

**i.** $Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{C})$,

**ii.** $Mor_{\mathcal{D}}(X,Y) \subset Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$,

**iii.** $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{C}$ kategorilerinde tanımlı kompozisyon kuralları aynı,

**iv.** $Mor_{\mathcal{D}}(X,X)$ ve $Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$ in birim elemanları aynı

özelliklerini sağlayan $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir **altkategorisi** denir [8].

**Tanım 2.1.4.** $\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin **altkategorisi** olmak üzere;

1. $\mathcal{D}$ kategorisinden seçilen $X,Y$ nesneleri için

$$Mor_{\mathcal{D}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

   ise $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **tam(full)altkategorisi** denir [8].

2. $\mathcal{D}$ kategorisinin nesneleriyle $\mathcal{C}$ kategorisinin nesneleri eşitse, yani

$$Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$$

   ise $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **geniş(wide) altkategorisi** denir [8].

## 2.2 Funktor

**Tanım 2.2.1.** $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ iki kategori ve $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ olmak üzere; $\mathcal{C}$ kategorisinin bir $X$ nesnesi ve bir $f$ morfizmi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri arasındaki bu $\phi$ dönüşümüne bir **kovaryant funktor** denir [9].

**1)** $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $\phi(X) \in Ob(\mathcal{D})$.

**2)** $f : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ morfizmine karşılık $\phi(f) : \phi(X) \longrightarrow \phi(Y) \in Mor(\mathcal{D})$.

**3)** $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $1_{\phi(X)} = \phi(1_X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"] & \phi(X) \arrow[d, "1_{\phi(X)}"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & \phi(X) \end{tikzcd}$$

**4)** $\forall f,g \in Mor(\mathcal{C})$ için $g \circ f$ işlemi $\mathcal{D}$ kategorisinde $\phi(g)\circ\phi(f) = \phi(g\circ f)$ sağlanıyorsa

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"] & \phi(X) \arrow[d, "\phi(f)"] \\ Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"] & \phi(Y) \arrow[d, "\phi(g)"] \\ Z \arrow[r, "\phi"] & \phi(Z) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir.

**Tanım 2.2.2.** $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $\mathcal{D}^{op}$, $\mathcal{D}$ nin dual kategorisi olsun.

$$\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$$

tanımlı kovaryant funktora **kontravaryant funktor** denir. Burada $\phi(g)\circ\phi(f) = \phi(g\circ f)$ işlemi korunmaz yani;

$$\phi(g)\circ\phi(f) = \phi(g\circ f) \text{ ise kovaryant,} \tag{2.1}$$

$$\phi(g)\circ\phi(f) = \phi(f\circ g) \text{ ise kontravaryanttır.} \tag{2.2}$$

şeklindedir [9].

**Tanım 2.2.3.** Bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki her $X$ nesnesi ve her $f$ morfizmi için

$$1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$1_{\mathcal{C}}(X) = X,$$

$$1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

şeklinde tanımlı $1_{\mathcal{C}}$ funktoruna **birim funktor** denir [10].

**Tanım 2.2.4.** $\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin **altkategorisi** olmak üzere;

$$i : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$i(X) = X,$$

$$i(f) = f$$

şeklinde tanımlanan $i$ funktoruna **dahil etme funktoru** denir [10].

**Örnek 2.2.1.** $\phi : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ funktoruna unutkan funktor denir. Bu funktor **Grp** kategorisindeki grup yapısını unutarak **Set** kategorisine dönüştürür. Burada her $G$ grubunu onun grup yapısının ihmal edildiği $\phi G$ kümesine ve her $f : G \longrightarrow H$ dönüşümünü $\phi f : \phi G \longrightarrow \phi H$ dönüşümüne götürür [11].

Bu kısımda H.Brandt [12] tarafından oluşturulan, Brown[13, 14] ve İcen[15, 16] tarafından geliştirilen, kategori teorideki her morfizmin tersinin bulunduğunu bazı şartlar altında sağlatan bir kavram olan grupoid kavramından bahsedeceğiz..

## 2.3 Grupoid

**Tanım 2.3.1.** Nesnelerin kümesi $Ob(G)$, morfizmlerin kümesi $Mor(G) = G$ olmak üzere, morfizmlerin kompozisyon işlemi, $m = Mor(G)_\alpha \times_\beta Mor(G) = \{(f,g) \in Mor(G) \times Mor(G) \mid \alpha(g) = \beta(f)\}$, $m(f,g) = g.f$ kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla $\alpha, \beta : Mor(G) \longrightarrow Ob(G)$ ve nesne dönüşümü $\varepsilon : Ob(G) \longrightarrow Mor(G), X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$ olan $(G, Ob(G), \alpha, \beta, \varepsilon, m)$ kategorisinde her bir $f \in G$ morfizmi için $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$, $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$, $f^{-1} \circ f = 1_{\alpha(f)}$ ve $f \circ f^{-1} = 1_{\beta(f)}$ şartlarını sağlayan $f^{-1} \in G$ tersi varsa yani $i : Mor(G) \rightarrow Mor(G)$ ters dönüşümünde $i(f) = f^{-1}$ ise $G$' ye $Ob(G)$ üzerinde bir **grupoid**dir denir [13].

**Örnek 2.3.1.** $G$ birim elemanı $e$ olan bir grup olsun. Bu durumda $G$, $\{e\}$ nesne kümesi ve grup işlemi ile bir grupoiddir. $G$' nin morfizmleri grubun elemanlarından oluşur.

**Tanım 2.3.2.** $G$ bir grupoid ve $H \subset G$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $H$ grupoidine $G$ grupoidinin **altgrupoidi** denir [13].

**AGRP1)** $\alpha$ ve $\beta$, $G$ grupoidinin kaynak ve hedef dönüşümleri olmak üzere;

$$\alpha(H) \subseteq Ob(H) \text{ ve } \beta(H) \subseteq Ob(H).$$

**AGRP2)** $\forall X \in Ob(G)$ için $1_X \in Mor(H)$.

**AGRP3)** $H$ kısmi çarpım altında kapalıdır.

**AGRP3)** $\forall f \in Mor(H)$ için $f^{-1} \in Mor(H)$ dır.

**Tanım 2.3.3.** $H, G$ grupoidinin altgrupoidi olsun.

1. Eğer $Ob(H) = Ob(G)$ ise $H$ grupoidine $G$ grupoidinin **geniş(wide) altgrupoidi** denir [17].

2. Eğer her bir $X, Y \in Ob(H)$için

$$Mor_H(X,Y) = Mor_G(X,Y)$$

ise $H$ grupoidine $G$ grupoidinin **tam(full) altgrupoidi** denir [17].

3. Bir $G$ grupoidinin $X \in Ob(G)$' deki starı $St_G X = \alpha^{-1}(X) = \{g \in G : \alpha(g) = X\}$ kümesi ve costarı da $CoSt_G X = \beta^{-1}(X) = \{g \in G : \beta(g) = X\}$ kümesidir. $Mor_G(X,X)$ kümesi $G$' deki kompozisyon altında bir gruptur. Bu gruba $X$' deki **verteks grubu** ya da **nesne grubu** denir ve kısaca $G\{X\}$ ile gösterilir. Sadece tek nesneden oluşan grupoidler gruptur [11, 17].

4. $G$ grupoidinin bir $N$ geniş altgrupoidi her bir $X, Y \in Ob(G), N\{X\} \in Mor_N(X,X)$ ve $f \in Mor_G(X,Y)$ için $N\{Y\} = fN\{X\}f^{-1} \in Mor_N(Y,Y)$ ise veya buna denk olarak $fN\{X\} = N\{Y\}f$ ise $N$ grupoidine $G$ grupoidinin **normal altgrupoidi** denir [17, 18].

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "f^{(-1)}"] \\ & X \arrow[ul, "N\{X\}"] \end{tikzcd}$$

**Örnek 2.3.2.** $X$ boştan farklı bir küme olsun. Nesneler kümesi $X$ ve morfizmler kümesi $X \times X$ olacak şekilde bir grupoid elde edilebilir. Burada $(x,y)$ ikilisi $x \to y$ morfizmini göstermek üzere kısmi çarpım işlemi $(x,y).(y,z) = (x,z)$ olarak verilir. Buna göre, $R$, $X \times X$' in altgrupoidi ve $X$ üzerinde tam ise; $R \subset X \times X$ denklik bağıntısı $X$ üzerinde bir grupoiddir. Gerçekten, $R$'de kısmi çarpım işlemi ise $(x,y),(y,z) \in R \subset X \times X$ olup $(x,z) \in R$ dir. Bu grupoidi ele alarak bir $R$ grupoidi:

. Nesneler kümesi $Ob(R) = X$,

- Morfizmlerin kümesi $Mor(R) = R = \{(x,y) \mid x,y \in X\}$,

- Hedef ve kaynak dönüşümleri

$$\begin{aligned} \alpha &: R \to X & \beta &: R \to X \\ (x,y) &\mapsto \alpha(x,y) = x & (x,y) &\mapsto \beta(x,y) = y \end{aligned}$$

- Ters dönüşüm

$$\begin{aligned} i &: R \to R \\ (x,y) &\mapsto (x,y)^{-1} = (y,x), \end{aligned}$$

- Nesne dönüşümü

$$\begin{aligned} \varepsilon &: X \to R \\ x &\mapsto I_x, \end{aligned}$$

- Kısmi çarpım işlemi

$$\begin{aligned} m &: R \times R \to R \\ ((x,y),(y,z)) &\mapsto (x,z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup her denklik bağıntısı bulunduğu küme üzerinde bir grupoiddir [9].

**Örnek 2.3.3.** Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir grupoid oluşturur[9].

**Örnek 2.3.4.** . Nesneler kümesi $Ob(G) = \{0,1\}$,

- Morfizmlerin kümesi $Mor(G) = \{a \mid a : Ob(G) \to Ob(G),\ 0,1 \in Ob(G)\}$,

- Hedef ve kaynak dönüşümleri

$$\begin{aligned} \alpha &: Mor(G) \to Ob(G) & \beta &: Mor(G) \to Ob(G) \\ (a,b) &\mapsto \alpha(a,b) = a & (a,b) &\mapsto \beta(a,b) = b \end{aligned}$$

ve

. Ters dönüşüm

$$i : Mor(G) \to Mor(G)$$
$$a \mapsto a^{-1} : 1 \to 0,$$

. Nesne dönüşümü

$$\begin{aligned} \varepsilon : Ob(G) &\to Mor(G) \\ 0 &\to 1_0 \\ 1 &\to 1_1 \end{aligned}$$

Kısmi çarpım işlemi ise $m = Mor(G)_\alpha \times_\beta Mor(G) = \{(a,b) \in Mor(G) \times Mor(G) \mid \alpha(b) = \beta(a)\}$, $m(a,b) = b.a$ olup $G$, $Ob(G)$kümesi üzerinde bir grupoiddir.

**Örnek 2.3.5.** $G = \{1_0, a, a^{-1}, 1_1\}$, $Ob(G) = \{0,1\}$ kümesi üzerinde bir groupoid olduğu verilmişti. Buna göre, $Ob(N) = Ob(G) = \{0,1\}$ ile $N = \{1_0, 1_1\}$ normal altgrupoididir.

**Örnek 2.3.6.** $X = \{x,y,z\}$ kümesini gözönüne alalım. $X$ kümesi ile $R = X \times X = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x),(x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\}$ groupoidi için $N = \{(x,x),(y,y),(z,z)\}$ normal altgroupoiddir.

**Tanım 2.3.4.** $G$ ve $H$ iki grupoid olmak üzere; $\phi : G \to H$ dönüşümü,

**1)** $G$ grupoidinin her bir $X$ nesnesini $H$ grupoidinin bir $\phi(X)$ nesnesine götürür.

**2)** Her bir $f \in Mor_G(X,Y)$ morfizmini $\phi(f) \in Mor_H(\phi(X), \phi(Y))$ morfizmine götürür.

**3)** $X \in G$'de $I_x \in G(X)$ özdeş morfizm ise $\phi(I_X) = I_{\phi(X)}$, $\phi(X) \in H$'da özdeş morfizmdir.

**4)** $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$, $G$'de morfizm ise $\phi(gf) = \phi(g).\phi(f)$ eşitliği geçerlidir.

Grupoidler arasında yukarıdaki şartları sağlayan morfizme **grupoid morfizmi** denir [9].

**Örnek 2.3.7.** $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olsun. $\phi : G \to N$ grupoid morfizmi $G$ grupoidindeki tüm $f$ morfizmlerini $N$ normal altgrupoidinde $\phi f$ morfizmlerine götürür. $Ker\phi = \{f \in G \mid \phi f = I_N\}$ olan $\phi$ grupoid morfizminin çekirdeği $Ker\phi$, $G$ grupoidinin geniş altgrupoididir ve $G$ grupoidindeki tüm $f$ morfizmlerini $N$ normal altgrupoidinde $\phi f = I_N$ birimine götüren $G$ grupoidinin bir normal altrupoiddir.

**Örnek 2.3.8.** $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi ve $\phi : G \to N$ grupoid morfizmi olsun. $Im\phi = \{\phi f \mid f \in G\}$ olan $\phi$ grupoid morfizminin görüntüsü $(N_{\phi y})(\phi f)N_{\phi x} = \phi(f) \in Im\phi$ sağlayan, $N$ grupoidinin bir normal altgrupoiddir.

**Tanım 2.3.5.** $N$, $G$' nin tüm birim elemanlarını içeren bir normal altgrupoidi olmak üzere; $G$ grupoidi üzerinde $N$ altgrupoidine göre tanımlanan $f \equiv g(modN) \Leftrightarrow f = xgy$, $x,y \in N$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $G/N$ bölüm grupoidi, $\pi : G \to G/N$ örten dönüşümü ile $G$ 'deki grupoid yapısını $G/N$ 'e aktarır. Burada $f \in Mor_G(x,y)$ morfizminin $\pi$ dönüşümü altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/N \\ f &\to \overline{f} \end{aligned}$$

$\overline{f} \in Mor_{G/N}(x,y)$ yani $f$ morfizminin denklik sınıfıdır.

$G/N$ 'de bölüm grupoidi şöyle tanımlanır;

1. Morfizmleri: $\overline{f} \in Mor_{G/N}(x,y)$,

2. Kısmi çarpım işlemi: $f_1 \in \overline{f}$ ve $g_1 \in \overline{g}$ için $f_1 g_1$, $G$ grupoidinde bir morfizm olmak üzere; $\overline{f}.\overline{g} = \overline{f_1}.\overline{g_1}$ dir. İyi tanımlı olduğunu görebilmek için $f_2 \in \overline{f}$ ve $g_2 \in \overline{g}$ için $f_2 g_2$ tanımlı olup

$$\begin{aligned} f_2 &= x f_1 y, \quad x,y \in Ob(N) \\ g_2 &= y g_1 z, \quad y,z \in Ob(N) \end{aligned}$$

dir. Buradan $f_2 g_2 = (x f_1 y)(y g_1 z)$ işlemi $G$ grupoidinde tanımlıdır. $f_1 g_1$, $G$ grupoidinde bir morfizm, $y$ vertex grup olduğu için

$$u = g_1^{-1} y g_1 \in Ob(N)$$

dir. Böylece $f_2g_2 = xf_1g_1uz \equiv f_1g_1(modN)$ , $x,u,z \in Ob(N)$ olur.

Burada $G/N$, $N$ nin birleşenleri birimler olan bir kategoridir ve $\pi : G \rightarrow G/N$ örten bölüm dönüşümü ile $G/N$ bir bölüm grupoiddir. $G/G$ bir elemanlı bir grupoid değildir, $G$' nin her bir bileşeni için bir vertex grup olan bir aşikar grupoiddir. Dolayısıyla $H$, $N$ normal altgrupoidini içeren $G$' nin bir altgrupoidi ise $H/N$' de $G/N$' nin bir altgrupoididir

$G$ bir grupoid ve $N$, $G$' nin tüm birim elemanlarını içeren bir normal altgrupoidi olmak üzere $G/N$ *bölüm grupoidi*; nesnelerin kümesi $Ob(G/N) = Ob(G)$, morfizmlerin kümesi $Mor_{G/N}(x,y) = \{f \circ N\{x\} : f \in Mor_G(x,y)\}$ ve $g \in Mor_G(y,z)$ için $(g \circ N\{y\}) \circ (f \circ N\{x\}) = g \circ f \circ N\{x\}$ kompozisyonu ile şeklinde de gösterilebilir [11, 13, 19].

## 2.4 Öndemetler

**Tanım 2.4.1.** $X$ bir topolojik uzay, $C$ bir kategori olsun. $C$'deki değerleriyle $X$ üzerinde $F$ **öndemeti** aşağıdaki şartları sağlayan bir $\{F(U), F_{UV}, X\}$ sistemidir :

1. Her $U \subseteq X$ açık kümesine bir $F(U)$ kümesi karşılık gelir.
2. Her $U,V \subseteq X$ açık kümeler , $V \subseteq U$ olmak üzere; $F_{UV} : F(U) \rightarrow F(V)$ dönüşümü vardır.

**i)** $F_{UU} = I_{F(U)}$.

**ii)** $F_{VW} \circ F_{UV} = F_{UW}, (W \subseteq V \subseteq U)$.

Bu durumda $\{F(U), F_{UV}, X\}$, $X$ üzerinde bir öndemettir denir[20].

Bu tanım kategori teoride aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$X$ bir topolojik uzay, $O(X)$; $X$ in açık altkümelerinin ailesi ve $i$ dahil etme dönüşümü olsun. $X$ in açık altkümeleriyle bir kategori

$$Ob(O(X)) = \{U \mid U \subset X \text{ açık}\},$$

$$Mor(O(X)) = \{i \mid i : U \rightarrow U \subset V\}$$

ile tanımlanır. Aynı nesnelerle fakat tüm morfizmlerin yönünün değiştirilmesi ve kompozisyon işleminin sırasının değiştirilmesiyle $O(X)^{op}$ kategorisi elde edilir. $X$ topolojik uzayı üzerinde $F$ öndemeti, $X$ in açık altkümelerinin ve onların dahil etme dönüşümlerinin $O(X)$ kategorisinin $O(X)^{op}$ dual kategorisinden kümelerin ve fonksiyonların Set kategorisine bir funktordur. Yani

$$F : O(X)^{op} \to Set$$

şeklindedir. Bu taktirde $F = \{F(U), F_{UV}, X\}$ sistemine $X$ üzerinde kümelerin bir öndemeti denir. $X$ üzerinde Abel grupların öndemetinde $F(U)$ Abel grup özelliklerini sağlamalı ve $F_{UV}$ kısıtlama dönüşümü bir grup homomorfizması olmalıdır.

**Örnek 2.4.1.** $X$ topolojik uzay ve $U$, $V$ kümeleri $X$' te açık, $U$ üzerindeki tüm denklik bağıntılarının kümesi $E(U)$ ve

$$\begin{aligned} E_{UV} : E(U) &\to E(V) \\ R &\mapsto R\mid_V = R \cap (V \times V) \end{aligned}$$

olmak üzere; $E = \{E(U), E_{UV}, X\}$ öndemeti tanımlar;

- $E_{UU}(R) = R\mid_U = R = I_{E(U)}$
- $(E_{VW} \circ E_{UV})(R) = E_{VW}(R\mid_V) = (R\mid_V)\mid_W = R\mid_W$

[20].

**Tanım 2.4.2.** $F$ ve $G$, $X$ üzerinde öndemetler olmak üzere bir $f : F \to G$ öndemet morfizmi $V \subset U \subset X$ için

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{f(U)} & G(U) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{UV}} & & \downarrow{\scriptstyle G_{UV}} \\ F(V) & \xrightarrow{f(V)} & G(V) \end{array}$$

$$G_{UV}(f(U)) = f(V)(F_{UV})$$

şeklindedir. Eğer $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ ise $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ morfizmlerin bileşkesidir. $f : F \to G$ abel grupların ya da kümelerin öndemetlerinin izomorfizmleri ise $g : G \to F$

morfizmi vardır. Dolayısıyla $f \circ g = id_G$ ve $g \circ f = id_F$ yazılır. Burada $id_F : F \to F$, $X$ teki $U$ açığı için $id_F(U) = id_{F(U)}$ ile verilir [20].

**Tanım 2.4.3.** $X$ topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren iki açık küme $U$ ve $V$ olsun. $F$ bir öndemet olmak üzere; $s \in F(U)$ ve $t \in F(V)$ için

$$M = \{(U,s) \mid U \subseteq X \text{ açık küme}, s \in F(U)\}$$

olarak alalım. $M$ üzerinde bir denklik bağıntısı ya da $X$' te aynı hücreye sahip olma bağıntısı

$$s \backsim_x t \iff \exists W \subseteq U \cap V \ni s|_W = t|_W \in F(W)$$

şeklinde tanımlansın. $s$' nin $x$ noktasındaki denklik sınıfına **$s$' nin hücresi** denir ve $\mathrm{germ}_x s$ yerine $[s]_x$ veya$(U,s)_x$ notasyonları da kullanılabilir.

$$\mathcal{F}_x = \{(U,s)_x = germ_x s \mid s \in F(U), x \in U \subseteq X \text{ açık küme}\}$$

kümesi, $X$ uzayı üzerindeki bütün hücrelerin kümesidir. Bu $\mathcal{F}_x$ kümesine $x$ **noktasındaki saplar kümesi** denir. [14].

**Tanım 2.4.4.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar olmak üzere $X$' teki her $x$ noktasını içeren $U$ açık kümesinin $Y$' deki görüntüsü $f(U)$ olsun. Eğer

$$f|_U : U \to f(U)$$

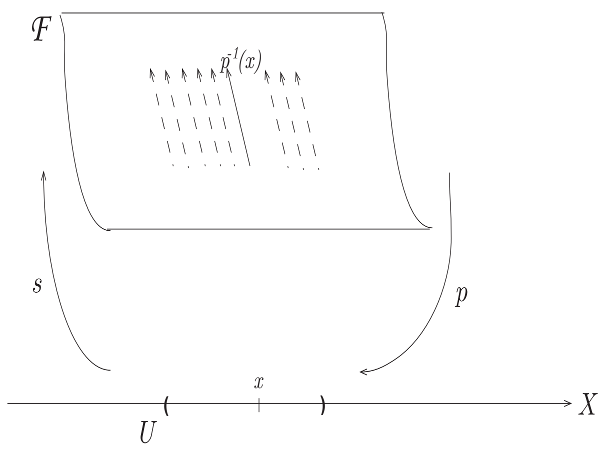
homeomorfizm ise $f : X \to Y$ **lokal homeomorfizm**dir. Her lokal homeomorfizm sürekli ve açık dönüşümdür [20].

## 2.5 Demetler

**Tanım 2.5.1.** $X$ topolojik uzayı üzerinde bir demet (sheaf)

1. $\mathcal{F}$ topolojik uzay,

2. $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm




Şekil 2.1 $(\mathcal{F}, p)$ demeti

şartlarını sağlayan $(\mathcal{F}, p)$ çiftidir [17].

Hatırlatalım ki, $X$ topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren bir açık küme $U$ olsun. $F$ bir öndemet olmak üzere; $s \in F(U)$ve $X$' te aynı hücreye sahip olma bağıntısı ile $s$' nin $x$ noktasındaki denklik sınıfı$(U, s)_x$ için

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s)_x = germ_x s \mid s \in F(U), x \in U \subseteq X \text{ açık küme}\}$$

kümesi, $X$ uzayı üzerindeki bütün hücrelerin kümesidir. Buna göre;

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

ile bir demet tanımlanabilir [14].

**Tanım 2.5.2.** $\mathcal{F}$, $X$ topolojik uzayı üzerinde bir demet ve $p : \mathcal{F} \to X$ olsun. $Y \subseteq X$ ise $p^{-1}(Y) = \mathcal{F}|_Y$ de $Y$ üzerinde bir demet olur. Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin **alt demeti** denir [15].

**Tanım 2.5.3.** $X$ topolojik uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demeti ve $x \in X$ olmak üzere $x$ noktasını içeren $X$ uzayında bir $U$ açık kümesi alınsın. $U$ kümesi üzerinde bir **lokal kesit(section)**, $p \circ s = I_U$ şartını sağlayan $s : U \to \mathcal{F}$ dönüşümdür [15].

$\mathcal{F}$ demetinin global kesitlerinin kümesi

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \{s \mid s : X \to \mathcal{F}, p \circ s = I_X\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $U \subseteq X$ alınırsa, lokal kesitlerin kümesi

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \left\{ s' \mid s' : U \to \mathcal{F}, p \circ s' = I_U \right\}$$

şeklindedir. Böylece $\Gamma(U, \mathcal{F})$ yardımıyla bir öndemet tanımlanır. Daha net bir şekilde $V \subseteq U$ açık kümeler olmak üzere

$$\Gamma_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$$
$$s' \mapsto \Gamma_{UV}\left(s'\right) = s' \mid_V$$

dönüşümü ile birlikte $\Gamma$ bir öndemettir. $\Gamma$ dönüşümünün bir funktor olduğu

**i)** $\Gamma(s') = s' \mid_V = I_{\Gamma(U)}, V \subseteq U,$

**ii)** $(\Gamma_{VW} \circ \Gamma_{UV})(s') = \Gamma_{VW}(s' \mid_V) = (s' \mid_V) \mid_W = s' \mid_W$

özellikleri ile kolayca görülür [15].

Böylece şu sonuç elde edilir:

**Sonuç 2.5.1.** Bir $X$ topolojik uzayı üzerinde tanımlanan her demet bir öndemet belirler [15].

**Tanım 2.5.4.** $X$ topolojik uzay ve $F$, $X$ üzerinde bir öndemet olsun. $U$, $X$' te açık küme ve $U = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$, $U$' nun açık kümelerinin örtüsü olmak üzere; $F$ öndemeti aşağıdaki şartları sağlarsa demettir denir.

1. $s, s' \in F(U), F$' nin iki kesiti olsun. $\forall x \in X$ için

   $$F_{UU_x}(s) = F_{UU_x}(s')$$

   iken $s = s'$ durumunu sağlarsa $F$ monodemet (parçalanmış öndemet) dir .

2. $\forall x \in X$ ve $s_x \in F(U_x)$ ile birlikte $F$' nin kesitlerinin $(s_x)_{x \in X}$ ailesi verilsin. $\forall x, y \in X$ olmak üzere

   $$F_{(Ux)(Ux \cap U_y)}(s_x) = F_{(Uy)(Ux \cap U_y)}(s_y)$$

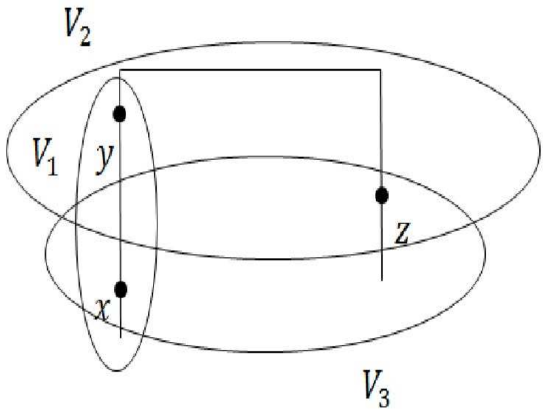
   için $s \in F(U)$ vardır ki $F_{UU_x}(s) = s_x$ olur. Bu durum glueing (yapıştırma) durumudur [17].

**Örnek 2.5.1.** Şimdi demet olmayan bir öndemeti gösterelim. $X$ reel sayılar kümesi, $U$, $X$' te açık küme ve $F(U)$, $U$ üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda, $F$ demet değildir. Çünkü yapıştırılması mümkün değildir. $U_i$' ler, her $x$ için $|x| < i$ kümeleri olarak alındığında $f(x) = x$ birim fonksiyon $U_i$ üzerinde sınırlıdır. Sonuç olarak $U_i$ üzerinde $s_i$ kesiti alınabilir. Fakat bu kesit yapıştırılamaz. Çünkü $f$ fonksiyonu reel sayılarda sınırlı değildir. Sonuç olarak $F$ öndemettir fakat demet değildir. Aslında $F$ parçalanmıştır, çünkü sürekli fonksiyonların demetinin altdemetidir [21].

**Örnek 2.5.2.** $X \subseteq R^2$ ve $U_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ olmak üzere

$$X = \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \bigcup_{n \in N} U_n$$

verilsin. $X$' in her bir $V_i$ örtüsü üzerinde yol bağlantılı denklik bağıntısı olsun. Böylece $X$, $(0,1)$ aralığında aşağıdaki gibi bir lokal şekil oluşturur.




Şekil 2.2 $X$' in $(0,1)$ aralığındaki lokal şekli

$V_i$ örtüsü üzerindeki yol bağlantılık bağıntısına göre $V_1$' de $x \sim y$ ve $V_2$' de $y \sim z$ olur. Fakat, $x$ ile $z$' yi birleştirecek yol olmadığından $V_3$'de $x \nsim z$ dir. Eğer $E : O(X)^{op} \rightarrow Set$ funktoru bir demet ise $X$ üzerinde $R$ denklik bağıntısı ve herbir $V_i$ üzerinde $R \mid V_i$ yol bağlantılık bağıntısı bulunmalıdır. $R$ bağıntısı $\prec x, z \succ \in R$ verir. Fakat $\prec x, z \succ \notin R \mid V_3$ olur. Dolayısıyla $E(-)$ demet değildir. Böylece, $\mathcal{E}_X$ ilgili demeti gösterir [22].

**Tanım 2.5.5.** $p_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow X$ ve $p_2 : \mathcal{F}_2 \longrightarrow X$ iki demet olsun. Eğer $p_2 \circ \mu = p_1$ ise

$\mu:\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2$ dönüşümüne **sapları koruyor** denir. Burada $\mathcal{F}_1=\bigcup_{x\in X}(\mathcal{F}_1)_x$ ve $\mathcal{F}_2=\bigcup_{x\in X}(\mathcal{F}_2)_x$ olmak üzere; $\mu((\mathcal{F}_1)_x)\subseteq(\mathcal{F}_2)_x$ şeklindedir [15].

**Tanım 2.5.6.** Sapları koruyan sürekli dönüşüme bir **demet morfizmi**, sapları koruyan homeomorfizme de bir **demet izomorfizmi** denir [15].

**Tanım 2.5.7.** $X$, $Y$ topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ sürekli dönüşüm olsun. $X$ uzayı üzerindeki $\mathcal{F}$ demeti, $Y$ uzayı üzerinde bir $f_*\mathcal{F}$ demetini tanımlar ve $V\subseteq Y$ açık kümesi için

$$(f_*\mathcal{F})(V)=\mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

olur. Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin **direkt görüntü demeti** denir. Burada $f:X\to Y$ sürekli fonksiyonu,

$$f_*:Sh(X)\to Sh(Y)$$

funktorunu tanımlar [15].

**Tanım 2.5.8.** $\mathcal{F}$ demeti $Y$ uzayı üzerinde tanımlı bir demet olsun. $\mathcal{F}$ demetinin $X$ uzayı üzerindeki $f^*\mathcal{F}$ **ters görüntü demeti**

$$f^*\mathcal{F}=\{(x,\sigma)\in X\times\mathcal{F}:f(x)=p(\sigma)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p:\mathcal{F}\to Y$ lokal homeomorfizmdir. $f^*\mathcal{F}$ üzerinde bir izdüşüm

$$\begin{aligned} p^*:f^*\mathcal{F}&\to X\\ (x,\sigma)&\to x \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde, $f:X\to Y$ sürekli dönüşümü

$$f^*:Sh(Y)\to Sh(X)$$

funktorunu verir. $Y$ uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demeti için bu funktorun $f^*\mathcal{F}\in Sh(X)$ değerine $\mathcal{F}$ demetinin $f$ altındaki **ters görüntüsü** denir [15].

**Tanım 2.5.9.** $F$, $X$ topolojik uzayı üzerinde bir öndemet olsun. $F$ öndemetinde bir **atlas** (veya $F$ öndemetine karşılık gelen $\mathcal{F}$ demetinin **global kesiti)**

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i)\,|s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır öyle ki,

i) $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ , $U_i \subseteq X$ açık,

ii) Her $i, j \in I$ , $U_i \cap U_j$ kümesinin her açık örtüsü için en az bir $W \subseteq (U_i \cap U_j)$ vardır öyle ki $s_i|_W = s_j|_W$

özellikleri sağlanır. $\mathcal{U}$ atlasındaki her bir $(U_i, s_i)$ elemanına **harita** denir [15].

**Lemma 2.5.1.** *$F$ öndemetine karşılık gelen $\mathcal{F}$ demetinin her $s-$global kesiti bir atlas ile verilebilir. Tersine, $F$ öndemetinde her atlas $\mathcal{F}$ demetinde bir global kesit tanımlar [16].*

**İspat.** $F : O(X)^{op} \to$ **Set** öndemetinin bir atlası

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) : i \in I, s_i \in F(U_i)\}$$

olsun. $\mathcal{U}$ atlasının yukarıdaki öndemetten elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesiti olduğunu göstereceğiz.

$\mathcal{U}$ atlası üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayabiliriz. Bunun için bir $x \in X$ alalım. $x \in U_i \cap U_j$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ atlasının iki $(U_i, s_i)$ ve $(U_j, s_j)$ elemanı olsun. $(U_i, s_i)$ ve $(U_j, s_j)$ ' nin denk olması için gerek ve yeter şart $x \in W \subseteq U_i \cap U_j$ ve $s_i\,|_W = s_j\,|_W$ olacak şekilde bir $W$ komşuluğunun olmasıdır. $(U_i, s_i)_x$ ile $(U_i, s_i)$ ' nin denklik sınıflarını gösterelim. Böylece bildiğimiz sapları ve demetleri elde ederiz:

$$\mathcal{F}_x = \{(U_i, s_i)_x : x \in U_i\ ,\ s_i \in F(U_i)\}\ ,\ \mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}$$

Böylece her $(U_i, s_i)_x$, sürekli bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar.

$$\begin{aligned} \dot{s}_i \quad &: \quad U_i \to \mathcal{F} \\ x \quad &\to \quad (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

Burada $\mathcal{U}$ atlas olduğundan $x \in U_i$ için

$$\dot{s}(x) = \dot{s}_i(x)$$

formülü $X$ topolojik uzayından $\mathcal{F}$ demetine bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar. $\mathcal{F}$ demeti içinde açık olan keyfi bir $U$ için

$$\dot{s}^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \dot{s}_i^{-1}(U)$$

vardır. $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesi, $U_i$' de açıktır. Buradan $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesinin $X$ uzayı üzerinde de açık olduğunu elde ederiz. Böylece

$$\dot{s} : X \to \mathcal{F}$$

sürekli olur.

Şimdi; $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm olduğundan $p \circ \dot{s} = I_x$ olduğunu göstermek zorundayız. Herhangi $x \in X$ için $x \in U_i$ açık kümesi vardır. Böylece

$$p \circ \dot{s}(x) = p \circ \dot{s}_i(x) = p((U_i, s_i)_x) = x$$

olur. Buradan $\dot{s}$, $\mathcal{F}$ demetinin global kesiti olur.

Tersine; bir demetin global kesiti bir atlas belirtir:

$\dot{s}$, $F$ öndemetinden elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesiti olsun.Bu $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm ve $p \circ \dot{s} = I_x$ olacak şekilde bir $\dot{s} : X \to \mathcal{F}$ sürekli dönüşümünün olduğu anlamına gelir. $\dot{s}$ sürekli olduğundan $x \in X$ , $\dot{s}\,|_{U_i}$ olacak şekilde bir $x \in U_i$ açık komşuluğuna sahiptir. $\dot{s}\,|_{U_i} = \dot{s}_i$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{s}_i \quad &: \quad U_i \to \mathcal{F} \\ x \quad &\to \quad (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

sürekli dönüşümü elde edilir. Her bir $x \in X$ için, bu şekildeki kümeler üzerinde bir denklik bağıntısı mevcuttur. Bunun anlamı her $x \in X$ noktasında $x \in U_i$ ile birlikte bir $U_i$ açığı var ve $U_i$ üzerindeki her $\dot{s}_i$ dönüşümü bir $(U_i, s_i)$ verir demektir. Gerçekten bu $(U_i, s_i)$' ler

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i)\,|s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde bir atlas oluşturur [16]. □

**Tanım 2.5.10.** $X$ topolojik uzayı üzerindeki demetlerin kategorisi **Sh(X)** olsun. **Sh(X)** kategorisinin $\mathbf{Sec_X}$ şeklinde gösterilen global kesitlerinin kategorisi aşağıdaki gibi elde edilir [20]:

Nesneler kümesi $Ob(\mathbf{Sec_X})$, **Sh(X)** kategorisinin global kesitleridir. $\mathbf{Sec_X}$ kategorisindeki bir morfizm aşağıdaki diyagramı değişimli yapan $\phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ şeklindeki bir demet morfizmidir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1 \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{F}_2 \\
& X \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_2"'] &
\end{tikzcd}$$

## 2.6 Lokal Denklik Bağıntısı

Bu kısımda Grothendieck ve Verdier[5] tarafından verilen, Brown[13, 14] ve İçen[15, 16] tarafından genişletilen lokal denklik bağıntısı kavramını vereceğiz.

**Tanım 2.6.1.** $X$ bir topolojik uzay, $X$' in $U$ açık altkümesi için $E(U) = \{R \mid R, U \text{ üzerinde tüm denklik bağıntıları}\}$ olsun. $E(U)$ nun öndemet olduğunu göstermiştik. Buna göre; $V \subseteq U$ ve aynı zamanda $X$' te açık ise

$$\begin{aligned} E_{UV} : E(U) &\to E(V) \\ R &\mapsto (R\mid_V) = \{R \cap (V \times V)\} \end{aligned}$$

şeklinde bir kısıtlama morfizmi bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} E : O(X)^{op} &\to Set \\ U_i &\mapsto E(U_i) = \{R \mid R, U_i \text{ üzerinde denklik bağıntısı}\} \end{aligned}$$

funktoru $X$ üzerinde bir $E = \{E(U_i), E_{UV}, X\}$ öndemetini tanımlar. Her demete bir öndemet karşılık gelir [16]. $E$ öndemetine karşı gelen bu demeti $\mathcal{E}$ ile gösterelim. $\mathcal{E}$ demetinin $r-$global kesitine $X$ topolojik uzayı üzerinde bir **lokal denklik bağıntısı** denir [5].

Lokal denklik bağıntısının bir dönüşüm olmasının yanında yapısında $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ olmak üzere

$$R_i \in E\left(U_i\right),$$
$$R_j \in E\left(U_j\right)$$

iken bir $z \in \left(U_i \cap U_j\right)$ vardır ve $z \in W \subseteq \left(U_i \cap U_j\right)$ dir öyle ki

$$R_i \mid_W = R_j \mid_W$$

olan **lokal bağdaşabilirlik şartı** vardır. Yani

$$r \rightarrow \mathcal{U} = \left\{\left(U_i, R_i\right) \mid U_i \subseteq X \text{açık kümeler}, R_i \in E\left(U_i\right)\right\}$$

şeklinde olup $\mathcal{U}$ bir atlastır [22].

$X$ bir topolojik uzay olsun. $X$' deki $U$ açığı için $E(U) = \{U$ üzerindeki tüm denklik bağıntıları$\}$, $V \subseteq U$ açığı için $E(U) \rightarrow E(V)$ kısıtlama morfizmi vardır ve böylece $X$ üzerinde bir öndemet vardır, fakat demet değildir. Bunu örnek 2.5.2' de gördük.

$\mathcal{E}$ denklik bağıntılarının hücrelerinin demeti doğal sıralamaya sahiptir. $E = \{E\left(U_l\right), E_{UV}, X\}$ öndemetinde $E(U_i) = \{R_i \mid R_i \subseteq U_i \times U_i\}$ olmak üzere $x$' yi içeren $U_i$ ve $U_j$ açıkları için $x \in X$ in hücreleri $r_x = (U_i, R_i)_x$ , $s_x = (U_j, R_j)_x$ dir. $R_i \in E(U_i)$, $R_j \in E(U_j)$ olup $r_x$, $R_i$' yi, $s_x$, $R_j$'i belirtir. Yani

$$\left(U_i, R_i\right) \sim_x \left(U_j, R_j\right) \Leftrightarrow \exists x \in W \subseteq U_l \cap U_j \text{ için } R_i \mid_W = \ R_J \mid_W$$

olup $x$'in $W$ açığı için $W \subseteq U_i \cap U_j$, $R_i \mid W \subseteq R_j \mid W$ ise $r_x \leq s_x$ [22].

**Tanım 2.6.2.** $r$ ve $s$, $X$ üzerinde lokal denklik bağıntısı olsun. $r = (r_x)_{x \in X}$ ve $s = (s_x)_{x \in X}$ olmak üzere

$$r \leq s \ \Leftrightarrow \ r_x \leq s_x, \forall x \in X$$

lokal denklik bağıntıları doğal sıralamaya sahiptir [22].

**Örnek 2.6.1.** Bir $X$ uzayı, $U_i$ örtüsü ve gereken lokal bağdaşabilirlik şartı ile herhangi bir $Y$ uzayı alınsın.

$$f_i : X \to Y$$

sürekli dönüşüm olmak üzere $U_i$ üzerinde bir $R_i$ denklik bağıntısı tanımlanabilir. Burada

$$f_i(x) = f_i(y) \iff xR_iy$$

şeklinde tanımlanır. $R_i$ ve $R_j$ sırasıyla $U_i$ ve $U_j$ üzerinde denklik bağıntısı olsunlar. $x \in \left(U_i \cap U_j\right)$ için $x \in U_k \subseteq \left(U_i \cap U_j\right)$ alınırsa lokal bağdaşabilirlik şartı

$$R_i \mid_{U_k} = R_j \mid_{U_k}$$

söylenir [22].

**Tanım 2.6.3.** $X$ bir topolojik uzay olsun. $X$' deki $U$ açığı için $E(U) = \{R \mid R, U$ üzerinde tüm denklik bağıntıları$\}$ ile $R \in E(X)$ olur. $loc(R) = \{(U_i, R\mid_{U_i}) \mid R \subseteq X \times X\}$, $X$ üzerindeki tüm lokal denklik bağıntılarını göstersin. $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ olmak üzere;

$$R_i \in E(U_i),$$
$$R_j \in E\left(U_j\right)$$

iken bir $z \in \left(U_i \cap U_j\right)$ vardır ve $z \in W \subseteq \left(U_i \cap U_j\right)$ dir öyle ki

$$R_i \mid_W = R_j \mid_W$$

sağlar. Buna göre; her atlas bir global kesit tanımladığından [16] $r \in \mathcal{E}_x$ için $glob(r) = \cap\{R \mid r \leq loc(R)\}$ şeklindedir [22].

**Uyarı 2.6.1.** *r, X üzerinde bir lokal denklik bağıntısı olsun. r' ye r' nin karakterinin bölgesel yansıması olan global denklik bağıntısı yardımıyla yaklaşılabilir. Yani* $glob(-)$ *şu şekilde tanımlanabilir: r lokal denklik bağıntısını içeren tüm lokal denklik bağıntılarının kesişimlerinde olan bir denklik bağıntısıdır [22].*

**Teorem 2.6.1.** *$\forall x \in X$ için $R_x \in E(U_x)$, $V = \{V_x\}_{x\in X}$ açık örtü, $\forall x \in X$ için $x \subset V_x \subseteq U_x$ ise $V \leq U$ ve $R_V$, $\{R_x \mid V_x\}_{x \in X}$ tarafindan elde edilen denklik bağıntısı olsun. $r \in E_x$ ise $glob(r) = \cap\{R_v \mid V \leq U\}$ dir [22].*

**İspat.** $r \leq loc(S)$ ile $S \in E(X)$ olsun. $x \in W_x \subseteq U_x$ olacak şekilde $W_x$ açığıve $R_x \mid W_x \subseteq S_x \mid W_x$ seçilsin. $W = \{W_x\}_{x \in X}$ olsun. $R_W \subseteq S$ ve böylece, $\cap\{R_v \mid V \leq U\} \subseteq glob(r)$ elde edilir. Tersine eğer $V \leq U$ ise $R_V$ lokal olarak $\{R_x \mid V_x\}$ tarafından oluşturulduğundan $R_x \mid W_x \subseteq R_V \mid W_x$ olup, $r \leq loc(R_V)$ ve $glob(r) = \cap\{R_v \mid V \leq U\}$ bulunur. □

### 2.7 Coherent Lokal Denklik Bağıntısı

Bir $R$ denklik bağıntısı için $glob(loc(R)) \subseteq R$ geçerlidir. $r$ lokal denklik bağıntısı $r \leq loc(glob(r))$ şartını sağlar. Denklik bağıntılarının kesişimi alındığında, lokal denklik bağıntılarının trivial(aşikar) olması beklenmez. Buna rağmen, $glob$ ve $loc$ arasında funktoryal ilişki elde edebilmek için coherent bir $r$ lokal denklik bağıntısı vardır. Yani, $r \leq loc(glob(r))$ olan $r$ lokal denklik bağıntısı kullanılacaktır [23].

**Tanım 2.7.1.** $r, X$ üzerinde lokal denklik bağıntısı ve $U \subset X$ açık olsun.

1. $r$ coherenttir $\Leftrightarrow r \leq loc(glob(r))$.
2. $r$ global coherenttir $\Leftrightarrow r = loc(glob(r))$.
3. $r$ total coherenttir $\Leftrightarrow$ her $U$ açığı için $r \mid U$ coherenttir [23].

**Tanım 2.7.2.** $R, X$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu taktirde,

1. $R$ lokal olarak coherenttir $\Leftrightarrow loc(R)$ coherenttir.
2. $R$ coherenttir $\Leftrightarrow R = glob(loc(R))$ [22].

$R$ denklik bağıntısının coherent olması için $\{V_x\}_{x \in X}$ *a*çık örtü olmak üzere $\{R \mid V_x\}_{x \in X}$' den elde edilen denklik bağıntısı $R_v$ için $R = R_V$ olmalıdır. Böylece coherentlik için gerekli durum inşa edilebilir [23].

**Örnek 2.7.1.** $R$' nin denklik sınıfları koni üzerindeki dairesel kesitler olarak alınsın ve koninin tabanı $P$ ile gösterilsin. $P$' nin denklik sınıfları bağlantısızdır ve $loc(R)$' ye bakıldığında $P$ tabanında bağlantılılık bilgisi kaybolur. $R$ lokal olarak coherent olsa bile coherent değildir. Çünkü $glob(loc(R))$' de $P$' nin denklik sınıfları $\{P\}$ olur ve bu yüzden $glob(loc(R)) \subsetneq R$ dir [23].

**Örnek 2.7.2.** $R$ üzerinde $a \sim b \Leftrightarrow b = \pm a$ denklik bağıntısı tanımlansın. $r$ bu şekilde tanımlanan lokal denklik bağıntısı olsun. Buradan $glob(r)$ tek denklik sınıfı ile aşikar denklik bağıntısıdır. Bunu görmek için reel eksende orjinin $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ açık komşuluğu olan $V_n$ örtüsü alınsın. $glob(r) = \bigcap_{n \in N} R_{v_n}$olur. 0 noktasındaki $glob(r) = \{0\}$ olup, $r \leq loc(glob(r))$ orjinin herhangi komşuluğunda olmadığından $r$ aşikar denklik bağıntısı olmayıp, $r$ coherent değildir [23].

**Teorem 2.7.1.** *A coherent lokal denklik bağıntılarının kategorisi ve B lokal coherent global denklik bağıntılarının kategorisi olsun. Bu taktirde,* $A \underset{glob}{\rightarrow} B$ , $B \underset{loc}{\rightarrow} A$ $glob \vdash loc$ *adjoint funktor çiftleri oluşur [23].*

**İspat.** $r \in A$ ve $R \in B$ için unit ve counitlerin birleşimleri $r \leq loc(glob(r))$ ve $glob(loc(R)) \subseteq R$ dir. Bu birleşimler altında global olarak coherent $r$ ve coherent $R$ arasında bir denklik vardır. □

**Teorem 2.7.2.** *R, X üzerinde bir denklik bağıntısı, X' in* $\{V_x\}_{x \in X}$ *örtüsü için* $R_V \subseteq R$ *ve* $R_V$ , $\{R \mid V_x\}_{x \in X}$ *tarafindan oluşturulmuş denklik bağıntısı olsun.* $R_V$*' nin denklik sınıfları R nin denklik sınıflarında açık ve kapalıdır [23].*

**Teorem 2.7.3.** *r coherent lokal denklik bağıntısı olsun.* $glob(r)$*' nin denklik sınıfları X' in bağlantılı bileşenleridir [23].*

**Teorem 2.7.4.** $r = loc(R)$ *lokal denklik bağıntısı,* $R \in E(X)$ *olsun.* $\forall x \in X$ *için bir* $N_x$ *açık komşuluğu için* $R \mid N_x$ *bağlantılı denklik sınıfları olduğu kabul edilsin. Böylece r lokal denklik bağıntısı coherenttir.*

**İspat.** $r$ lokal denklik bağıntısı coherent olmazsa sadece bazı $a \in X$ elemanları için $r_a \leq loc(glob(r))_a$ olur. Yani $a$' nın herhangi bir $N$ açığı için $\{V_x\}_{x \in U}$ örtüsü var ve $y_1, y_2 \in N$ için $(y_1, y_2) \in R$ iken $(y_1, y_2) \notin R_V$ dir. Bu $N_a$ için de doğrudur. $R \mid W_a$' da $y_1$' in denklik sınıfında, $R_V \mid N_a$ daki $y_1$' in denklik sınıfları kapalı olduğundan bağlantılıdır. Bu ise $(y_1, y_2) \in R$ olmasına ters düşer. □

**Teorem 2.7.5.** *r, X üzerinde lokal denklik bağıntısı olsun. $x \in X$' in $U_x$ komşuluğu için $R_x \in E(U_x)$ lokal denklik bağıntısı tanımlansın.*

1. *r global ve total coherent lokal denklik bağıntısı olsun. X' te U açıksa $R \mid U$ global coherenttir.*

2. *$x \in V_x \subseteq U_x$, $\forall x \in X$ için $r \mid V_x$ total ve global coherent lokal denklik bağıntısı olacak şekilde $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsü varsa r total coherent lokal denklik bağıntısıdır[22].*

**Teorem 2.7.6.** *$R \in E(X)$ ve R' nin bağlantılı denklik sınıfları olsun. Bu taktirde $R = glob(loc(R))$ dir. Tersine R kapalı denklik sınıflarına sahip ve $R = glob(loc(R))$ ise, R bağlantılı denklik sınıflarına sahiptir[22].*

**Teorem 2.7.7.** *Eğer r total coherent lokal denklik bağıntısı ise bağlantılı denklik sınıfları ile denklik bağıntıları tarafından lokal olarak tanımlanabilir [22].*

**İspat.** $r \mid U_x = loc(glob(r \mid U_x))$ idi. $r$ total coherent lokal denklik bağıntısı olması $r \mid U$ coherent lokal denklik bağıntısı olmasını sağlar. Böylece bağlantılı denklik sınıfları vardır. $\square$

# 3. ROUGH KÜME VE ROUGH ALTGRUP

Rough küme teorisi, 1982' de ilk olarak Pawlak [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori kesin olmayan bilginin belirsizliği ve anlaşılmazlığı ile ilgili bir yöntem olarak tanıtıldı. Bu teoride nesnelerin sınıflandırmasının temeli bir denklik bağıntısıdır. Teorinin temeli olan rough (yaklaşımlı) küme kavramı, evrensel kümenin herhangi bir alt kümesi olup, evrensel küme üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı ile oluşturulan alt ve üst yaklaşımlar ikilisi ile tanımlanır. Rough kümeler; belirsiz veya kesin olmayan bilginin tanımlanması, analizi, eksik bilgiye dayanan akıl yürütme gibi çeşitli problemlerin çözümünde bir araç oldu. Ayrıca kesin olmayan bilgiler için yeni bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntemde; belirsizlik, bir kümenin sınır bölgesi ile açıklanır [1].

## 3.1 Rough Küme

**Tanım 3.1.1.** $U$ nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $R \subseteq U \times U$ ikili işlemi verilsin. $U$' ya evrensel küme, $R$' ye ayırtedilemezlik bağıntısı denir. Bu bağıntı $U$' nun elemanları hakkındaki bilgi eksikliğini ortaya çıkaracak bir bağıntıdır. $R$, $U$ üzerinde bir denklik bağıntısı olarak alındığında $S = (U,R)$ ikilisine rough(yaklaşım) uzayı denir [24].

**Tanım 3.1.2.** $U$ nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $R$, $U$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. $U$ üzerinde $R$ bağıntısı yardımıyla $x$'in denklik sınıfı

$$R(x) = [x]_R = \{x \text{ elemanı ile belirlenen } R \text{ bağıntısına göre } x\text{'in denklik sınıfı}\}$$

olarak tanımlanır. Bu denklik sınıfları, verilen bilgilerin tam olarak anlaşılması için bilgi parçalarını oluşturur [24].

**Tanım 3.1.3.** $S = (U,R)$ yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X \subseteq U$ olsun.

$$\underline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \subseteq X\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_R \mid [x]_R \subseteq X\}$$

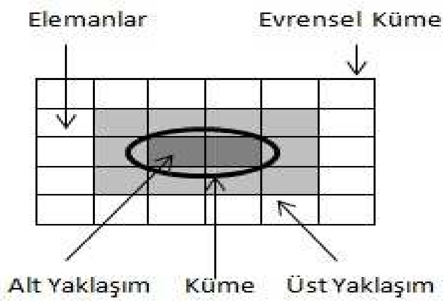
kümesine $S$ yaklaşım uzayında $X$ kümesinin alt yaklaşımı denir. Burada $[x]_R$, $x$' i içeren $R$ denklik bağıntısının denklik sınıfıdır. Buna göre $X$' in alt yaklaşımı $X$ tarafından tamamen kapsanan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur. Ya da denklik sınıfı $X$' in içinde olan elemanların oluşturduğu kümedir [25].

**Tanım 3.1.4.** $S=(U,R)$ yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X \subseteq U$ olsun.

$$\overline{R}(X)=\{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}=\bigcup_{x\in U}\{[x]_R \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

kümesine $S$ yaklaşım uzayında $X$ kümesinin üst yaklaşımı denir. $X$' in üst yaklaşımı, denklik sınıfı ile $X$' in arakesiti boştan farklı elemanlarının oluşturduğu kümedir [25].

Bir küme üzerindeki denklik bağıntısına göre belirlenen denklik sınıfları yardımıyla verilen kümenin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki şekilden daha kolay anlaşılır [26].




Şekil 3.1 Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları

**Tanım 3.1.5.** $U$ evrensel küme ve $R$, $U$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $R(X)=(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$ ikilisine de $S=(U,R)$ rough uzayının rough(yaklaşımlı) kümesi denir. $R(X)=(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$ rough kümesi $S$' de $X$' in rough kümesidir. Herhangi bir $S=(U,R)$ yaklaşım uzayı ve $U$' nun bir $X$ kümesi için $R(X)$ rough kümesi tektir [1].

**Tanım 3.1.6.** Her satır bir nesne ve her bir sütun da bir özelliği gösterecek şekilde bir bilgi tablosu oluşturulabilir. Nesnelerin sonlu kümesi $U$ ile özelliklerin sonlu kümesi de $A$ ile gösterilmek üzere bu şekilde oluşturulan tabloya $S=(U,A)$ bilgi sistemi denir. $\forall a \in A$ özelliği için

$$a: U \rightarrow V_a$$
$$x \rightarrow V_a(x)$$

olacak şekilde $a$' nın bir $V_a$ değer kümesi vardır [26].

**Tanım 3.1.7.** Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları; sırasıyla, ayırtedilemezlik bağıntısı ile üretilen topoloji içinde bu kümenin içi ve kapanışıdır [1].

**Tanım 3.1.8.** $X$' in sınır bölgesi $BndR$, üst ve alt yaklaşımlar arasındaki farktır. Yani $BndR(X) = \bar{R}(X) - \underline{R}(X)$ dir. Buna göre $X$' in sınır bölgesi, $X$ ve $-X = U - X$' in elemanı olarak $R$ bağıntısıyla sınıflandırılamayan elemanların oluşturduğu kümedir [1].

**Tanım 3.1.9.** $X$' in sınır bölgesi boş ise $X$ kümesine $R$ bağıntısı ile crisp (tam,kesin) küme denir. Tam küme klasik küme kavramımızı verir [1].

**Tanım 3.1.10.** $X$' in sınır bölgesi boştan farklı ise $X$ kümesi $R$ bağıntısı ile rough kümedir denir [1].

**Örnek 3.1.1.** $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ nesnelerinin kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ özelliklerin kümesi, $V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{1,2\}$, $V_3 = \{1,2,3,4\}$ değer kümeleri ve $U$ üzerindeki denklik bağıntısı

$$R(x_i) = \{x_j : x_j,\ x_i \text{ ' ler ile aynı ölçülere sahip},\ 1 \leq i, j \leq 10\}$$

olmak üzere

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_2$ | 3 | 2 | 1 |
| $x_3$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_4$ | 2 | 2 | 3 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_6$ | 1 | 1 | 2 |
| $x_7$ | 3 | 2 | 1 |
| $x_8$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_9$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_{10}$ | 3 | 2 | 1 |

bilgi tablosu veriliyor.

$$
\begin{aligned}
&R(x_1) = R(x_3) = R(x_9) = \{x_1, x_3, x_9\},\\
&R(x_2) = R(x_7) = R(x_{10}) = \{x_2, x_7, x_{10}\},\\
&R(x_4) = \{x_4\},\\
&R(x_5) = R(x_8) = \{x_5, x_8\},\\
&R(x_6) = \{x_6\}
\end{aligned}
$$

denklik sınıfları yardımıyla $U$' nun bir $X = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ kümesi için

$$
\begin{aligned}
\underline{R}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\},\\
\overline{R}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\},\\
BndR(X) &= \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{x_5, x_8\}
\end{aligned}
$$

elde edilir [26].

**Teorem 3.1.1.** *R, U üzerinde bir denklik bağıntısı, $(U,R)$ yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X, Y \subseteq U$ alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar [1].*

1. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$.
2. $\underline{R}(\emptyset) = \underline{R}(\emptyset) = \emptyset$.
3. $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$.
4. $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$.
5. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$.
6. $X \subseteq Y$ ise $\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$.
7. $X \subseteq Y$ ise $\overline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$.
8. $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$.

9. $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$.

10. $\underline{R}(-X) = -\,\overline{R}(X)$.

11. $\overline{R}(-X) = -\underline{R}(X)$.

12. $\underline{R}\underline{R}(X) = \overline{R}\underline{R}(X) = \underline{R}(X)$.

13. $\overline{R}\overline{R}(X) = \underline{R}\overline{R}(X) = \overline{R}(X)$.

**Tanım 3.1.11.** $|X|$, $X \neq \emptyset$ kümesinin kardinalitesi olmak üzere $(U,R)$ yaklaşım uzayındaki bir $X$ rough kümesinde yaklaşımın kesinliği,

$$\alpha_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|}$$

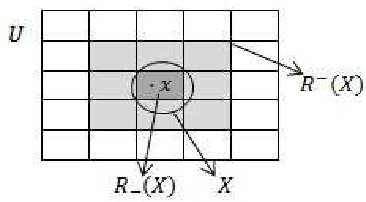
şeklindedir [1].

**Tanım 3.1.12.** Eğer $\alpha_R(X) = 1$ ise $X$ kümesine $R$ yardımıyla bir tam kümedir denir. Eğer $\alpha_R(X) < 1$ ise $X$ kümesine $R$ aracılığıyla bir rough kümedir denir [1].

**Örnek 3.1.2.** Örnek 3.1.1.' in verileri kullanılarak $X$ kümesinde yaklaşımın kesinliği $\alpha_R(X) = \frac{4}{6} < 1$ olup $X$ kümesi $R$ aracılığıyla bir rough kümedir.

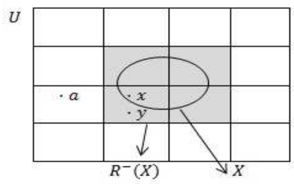
**Tanım 3.1.13.** Rough kümeler dört kategoride sınıflandırılabilir [1].

1. $X$ kümesi rough $R-$tanımlanabilirdir$\Leftrightarrow$ $\underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$. $R$ aracılığıyla $U$' nun bazı elemanlarının $X$' e veya $-X$' e ait olduklarını söylenebilir.



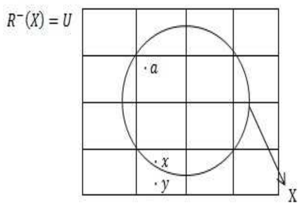

Şekil 3.2 Rough $R-$tanımlanabilir küme

2. $X$ kümesi internal $R-$tanımlanamazdır$\Leftrightarrow$ $\underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$. $R$ aracılığıyla $U$' nun bazı elemanlarının $a \in -X$ olduğu söylenebilir. Fakat $x, y \in R(X)$ iken $x \in X$ veya $y \in X$ olduğu kesin olarak söylenemez.



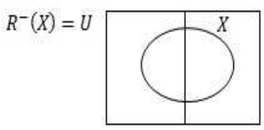

Şekil 3.3 Rough internal $R-$tanımlanamaz küme

3. $X$ kümesi external $R-$tanımlanamazdır$\Leftrightarrow$ $\underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$. $R$ aracılığıyla $U$' nun bazı elemanlarının $a \in X$ olduğu söylenebilir. Fakat $x, y \in R(X)$ iken $x \in -X$ veya $y \in -X$ olduğu kesin olarak söylenemez.




Şekil 3.4 Rough external $R-$tanımlanamaz küme

4. $X$ kümesi total $R-$tanımlanamazdır$\Leftrightarrow$ $\underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$. $R$ aracılığıyla $U$' nun bir elemanının $X$ veya $-X$' e ait olduğu kesin olarak söylenemez.




Şekil 3.5 Rough total $R-$tanımlanamaz küme

Klasik (tam) küme teorisinde bir elemanın kümeye üyeliği 1 ve 0 değerini alırken rough kümelerde üyelik fonksiyonu notasyonu farklıdır. Rough kümeler, yaklaşımlar yerine yaklaşım üyelik fonksiyonu $\mu_X^R : U \longrightarrow [0,1]$ alınarak da tanımlanabilir. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonunda x in ait oldugu R(x) denklik sınıfı ile X kümesinin birbiriyle örtüşme derecesi ölçülür.

**Tanım 3.1.14.** $|X|$, $X$ kümesinin kardinalitesini göstermek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^R(x) = \frac{|X \cap R(x)|}{|R(x)|}$$

şeklinde tanımlanır [26].

Bu fonksiyon $x$' in $X$' e ait olmasının şartlı ihtimalini ve $R$ tarafından $x$ hakkında verilen bilgi göz önüne alınarak $x$' in $X$' e ait olma derecesini açıklar. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu için

$$X \cap R(x) = \emptyset \quad \text{ise} \quad \mu_X^R(x) = 0,$$

$$X \cap R(x) \neq \emptyset \quad \text{ise} \quad 0 < \mu_X^R(x) < 1,$$

$$R(x) \subseteq X \quad \text{ise} \quad \mu_X^R(x) = 1$$

olur. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, yaklaşımları ve bir kümenin sınır bölgelerini tanımlamak için

$$\underline{R}(x) = \{x \in U | \mu_X^R(x) = 1\},$$

$$\overline{R}(x) = \{x \in U | \mu_X^R(x) > 0\},$$

$$BndR(x) = \overline{R}(X)(x) - \underline{R}(X)(x) = \{x \in U | 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$

şeklinde hesaplanır.

Üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar [26]:

1. $\mu_X^R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \underline{R}(x)$.

2. $\mu_X^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U - \overline{R}(x)$.

3. $0 < \mu_X^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in BndR(x)$.

4. $\mu_{U-X}^R(x) = 1 - \mu_X^R(x), x \in U$.

5. $\mu^R_{X\cup Y}(x) \geq max\{\mu^R_X(x), \mu^R_Y(x)\}, x \in U$.

6. $\mu^R_{X\cap Y}(x) \leq min\{\mu^R_X(x), \mu^R_Y(x)\}, x \in U$.

Rough kümelerde birleşim ve kesişim kümelerinin üyelikleri hesaplanamaz. Bu özelliği ile yaklaşımlı üyelik fuzzy üyeliğinin daha genel bir halidir. Çünkü yaklaşımlı üyelik fonksiyonunda bir ihtimal vardır [26].

**Örnek 3.1.3.** Örnek 3.1.1.' in verileri kullanılarak $X$ kümesinin her bir elemanının üyelik değerleri

$$\mu^R_X(x_1) = \mu^R_X(x_3) = \mu^R_X(x_9) = 1,$$

$$\mu^R_X(x_2) = \mu^R_X(x_7) = \mu^R_X(x_{10}) = 0,$$

$$\mu^R_X(x_4) = 1,$$

$$\mu^R_X(x_5) = \mu^R_X(x_8) = \frac{1}{2},$$

$$\mu^R_X(x_6) = 0$$

şeklindedir. Buna göre üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\},$$

$$BndR(X) = \{x_5, x_8\}$$

olduğu görülür [26].

## 3.2 Rough Topoloji

**Tanım 3.2.1.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi, $R \subseteq U \times U$, $U$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $X \subseteq U$ için $\tau_R = \{U, \emptyset, \underline{R}(X), \overline{R}(X), Bnd(X)\}$ uzayı,

1. $U, \emptyset \in \tau_R$,

2. $\tau_R$ uzayındaki elemanların sonlu kesişimleri $\tau_R$ uzayındadır,

3. $\tau_R$ uzayındaki elemanların keyfi birleşimleri yine $\tau_R$ uzayındadır,

şartlarını sağlar böylece $\tau_R$, $U$ üzerinde $X$' e bağlı rough topoloji olarak adlandırılır. Buna göre, $\{U, \tau_R, X\}$' e rough topolojik uzay denir [27].

**Örnek 3.2.1.** $U = \{a,b,c,d,e\}$ nesnelerin sonlu kümesi, $U/R = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$ $U$' nun denklik sınıflarının kümesi ve $X = \{a,c,d\}$ olsun. Buna göre, $\underline{R}(X) = \{c,d\}$, $\overline{R}(X) = \{a,b,c,d\}$ ve $Bnd(X) = \{a,b\}$ olup

$$\tau_R = \{U, \emptyset, \{a,b,c,d\}, \{c,d\}, \{a,b\}\}$$

$U$ üzerinde $X$' e bağlı rough topolojidir [27].

### 3.3 Rough Alt Gruplar

Rough kümeler, evrensel küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntıları ile belirlenmektedir. Buna göre bir $G$ grubu üzerinde $N$ alt grubuna göre tanımlanan $x \equiv y(modN) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olup bu bağıntı kullanılarak grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları tanımlanmıştır [4].

Rough grup kavramı Biswas ve Nanda [2] tarafından sadece üst yaklaşım tanımı kullanılarak, Kuroki ve Wang [3] tarafından üst ve alt yaklaşım tanımı kullanılarak iki farklı şekilde tanımlanmıştır. Biz bu tez boyunca Kuroki ve Wang [3] tarafından verilen tanımı kullanacağız. Ama öncelikle bazı cebirsel kavramlardan bahsedeceğiz.

**Tanım 3.3.1.** Boştan farklı bir $G$ kümesi üzerinde tanımlı "$\circ$"ikili işlemi kapalılık, birleşim, birim ve ters eleman özelliklerini sağlıyorsa $(G, \circ)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

**Tanım 3.3.2.** $G$ bir grup, $H$, $G$' nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $H$, $G$' deki işleme göre bir grup ise veya$\forall\ a,b \in H$ için $a.b^{-1} \in H$ ise $H$' ya $G$' nin bir alt grubu denir.

**Tanım 3.3.3.** $G$ bir grup ve $N$, $G$ grubunun bir alt grubu olsun. Her $a \in G$ için $aNa^{-1} \subseteq N$ ise $N'$ ye $G$ grubunun normal altgrubu denir.

**Örnek 3.3.1.** Aşikar alt gruplar $\{e\}$ ve $G$ kümeleri $G$ grubunun normal alt gruplarıdır. Eğer $G$ grubu değişmeli ise $G'$ nin her alt grubu normal alt gruptur.

**Teorem 3.3.1.** *$N$, $G$ grubunun altgrubu olsun. Aşagıdakiler denktir.*

1. *$N$, $G$ grubunun normal altgrubudur.*
2. *$\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$ dir.*
3. *$\forall a \in G$ için $aN = Na$ dir.*
4. *$\forall a, b \in G$ için $(aN)(bN) = abN$ dir.*

**Tanım 3.3.4.** $G$ ve $H$ iki grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ oluyorsa $\phi : G \to H$ dönüşümüne bir homomorfizm denir.

**Tanım 3.3.5.** $G$ ve $H$ iki grup ve $\phi : G \to H$ bir homomorfizm olsun. $e'$ elemanı $H'$ nın birimi olmak üzere $\phi'$ nin çekirdeği $Ker\phi = \{a \in G \mid \phi(a) = e'\}$ dir. $\phi(e) = e'$ olduğundan $Ker\phi$ kümesi boştan farklıdır.

**Teorem 3.3.2.** *$\phi : G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun. $Ker\phi$ $G$ grubunun, $Im\phi$ ise $H$ grubunun alt grubudur.*

**İspat.** $a, b \in Ker\phi$ için $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e'e' = e'$ dir. Dolayısıyla $ab^{-1} \in Ker\phi$ olur. Böylece $Ker\phi$ $G'$ nin alt grubudur. $\varkappa, \rho \in Im\phi$ alalım. $\phi(a) = \varkappa$, $\phi(b) = \rho$ olacak şekilde $a, b \in G$ vardır. Dolayısıyla $\varkappa\rho^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(ab^{-1}) \in Im\phi$ dir. Bu ise $Im\phi'$ nin $H$ grubunun alt grubu olduğunu verir. □

### 3.3.1 N normal alt grubuna göre X kümesinin N(X) Rough Kümesi

Şimdi bu tez boyunca kullanacağımız Kuroki ve Wang [3] tarafından tanımlanan; bir $G$ grubundaki $N$ normal alt grubuna göre bir $X$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları ile elde edilen $N(X)$ rough kümesinin tanımını vereceğiz.

**Tanım 3.3.6.** $N$, $G$ grubunun normal alt grubu ve $X$, $G$' nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $N$ normal alt grubuna göre $X$ alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned}\underline{N}(X) &= \{x \in G \mid xN \subseteq X\} = \underset{x\in G}{\cup}\{xN \mid xN \subseteq X\}, \\ \overline{N}(X) &= \{x \in G \mid xN \cap X \neq \emptyset\} = \underset{x\in G}{\cup}\{xN \mid xN \cap X \neq \emptyset \subseteq X\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $G$' de $X$' in $N(X) = (\underline{N}(X), \overline{N}(X))$ rough kümesi vardır [3].

## 3.4 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar

Bu kısım, ileride grupoidler için vereceğimiz rough alt grupoid kavramının temelini oluşturacaktır.

**Tanım 3.4.1.** $X$, $G$' nin boştan farklı bir alt kümesi ve $N$, $G$' nin bir normal alt grubu olsun. $G$' de $X$' in $N(X) = (\underline{N}(X), \overline{N}(X))$ rough kümesi için,

1. $\overline{N}(X)$, $G$' nin (normal) alt grubu ise $X$' e $G$' nin $\overline{N}$ rough (normal) alt grubu
2. $\underline{N}(X)$, $G$' nin (normal) alt grubu ise $X$' e $G$' nin $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu

denir [3].

**Örnek 3.4.1.** İşlem tablosu

| . | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |

olarak verilsin ve $G$ değişmeli grup, $H = \{1,2\}$ ve $N = \{1,3\}$ olsun. O halde $H$ ve $N$, $G$ değişmeli grubunun normal alt gruplarıdır. $A = \{1,4\}$ olmak üzere,

$$\overline{H}(A) = \{x \in G : xH \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in G : x\{1,2\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset\} = \{1,2,3,4\},$$

$$\overline{N}(A) = \{x \in G : xN \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in G : x\{1,3\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset\} = \{1,2,3,4\}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\underline{H}(A) = \{x \in G : xH \subseteq A\} = \{x \in G : x\{1,2\} \subseteq \{1,4\}\} = \emptyset,$$

$$\underline{N}(A) = \{x \in G : xN \subseteq A\} = \{x \in G : x\{1,3\} \subseteq \{1,4\}\} = \emptyset$$

dir. Buna göre $G$' de $A$' nın $N(A) = (\underline{N}(A), \overline{N}(A))$ ve $G$' de $A$' nın $H(A) = (\underline{H}(A), \overline{H}(A))$ rough kümeleri vardır.
$\overline{N}(A)$, $G$' nin (normal) alt grubu olduğundan $A$' ya $G$' nin $\overline{N}$ rough normal alt grubu denir. Aynı şekilde $\overline{H}(A)$, $G$' nin (normal) alt grubu olup $A$' ya $G$' nin $\overline{H}$ rough normal alt grubu denir [28].

### 3.5 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar İçin Özellikler

**Teorem 3.5.1.** *N, G' nin normal alt grubu ve $(G,N)$ yaklaşım uzayı olmak üzere G' nin X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:*

1. $\underline{N}(X) \subseteq X \subseteq \overline{N}(X)$.
2. $\underline{N}(\emptyset) = \overline{N}(\emptyset) = \emptyset$.
3. $\underline{N}(X) = \overline{N}(X) = X$.
4. $\overline{N}(X \cup Y) = \overline{N}(X) \cup \overline{N}(Y)$.
5. $\underline{N}(X \cap Y) = \underline{N}(X) \cap \underline{N}(Y)$.
6. $X \subseteq Y$ *ise* $\underline{N}(X) \subseteq \underline{N}(Y)$.
7. $X \subseteq Y$ *ise* $\overline{N}(X) \subseteq \overline{N}(Y)$.
8. $\underline{N}(X \cup Y) \supseteq \underline{N}(X) \cup \underline{N}(Y)$.
9. $\overline{N}(X)(X \cap Y) \subseteq \overline{N}(X) \cap \overline{N}(Y)$.

*10.* $\underline{N}(-X) = -\overline{N}(X)$.

*11.* $\overline{N}(-X) = -\underline{N}(X)$.

*12.* $\underline{N}\underline{N}(X) = \overline{N}\underline{N}(X) = \underline{N}(X)$.

*13.* $\overline{N}(X)\overline{N}(X) = \underline{N}\overline{N}(X) = \overline{N}(X)$.

**Lemma 3.5.1.** *G bir grup, N, G 'nin normal alt grubu ve X, G 'nin bir alt grubu olsun.*

$$N \subseteq X \Rightarrow \underline{N}(X) = X$$

*dir[3].*

**Lemma 3.5.2.** *G bir grup, N, G 'nin normal alt grubu ve X, G 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.*

$$\overline{N}(X) = XN$$

*dir[3].*

**Teorem 3.5.2.** *N, G' nin normal alt grubu, X ve Y, G' nin boştan farklı alt kümeleri ise*

$$\overline{N}(X)\overline{N}(Y) = \overline{N}(XY)$$

*olur [3].*

**İspat.**

$$\begin{aligned}
z \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y) &\Rightarrow z = xy \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y) \\
&\Rightarrow x \in \overline{N}(X) \text{ ve } y \in \overline{N}(Y) \\
&\Rightarrow xN \cap X \neq \emptyset \text{ ve } yN \cap Y \neq \emptyset \\
&\Rightarrow x \in xN \cap X \ \text{ ve } y \in yN \cap Y \\
&\Rightarrow xy = z \in XY \text{ ve } xy \in (xy)N = zN \\
&\Rightarrow z \in zN \cap XY \neq \emptyset \\
&\Rightarrow z \in \overline{N}(XY)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\overline{N}(X)\overline{N}(Y) \subseteq \overline{N}(XY)$ olduğu görülür. Tersine

$$\begin{aligned} z \in \overline{N}(XY) &\Rightarrow z \in zN \cap XY \neq \emptyset \\ &\Rightarrow z = xy \in zN \text{ ve } z = xy \in XY \\ &\Rightarrow z \in (xy)N = (xN)(yN), \text{ve } x \in X, y \in Y \\ &\Rightarrow x \in xN \cap X \text{ ve } y \in yN \cap Y \\ &\Rightarrow x \in \overline{N}(X) \text{ ve } y \in \overline{N}(Y) \\ &\Rightarrow z = xy \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overline{N}(XY) \subseteq \overline{N}(X)\overline{N}(Y)$ olduğu görülür. Bu iki durumdan

$$\overline{N}(X)\overline{N}(Y) = \overline{N}(XY)$$

eşitliği bulunur. □

**Teorem 3.5.3.** *N, G' nin normal alt grubu, X ve Y, G' nin boştan farklı alt kümeleri ise*

$$\underline{N}(X)\underline{N}(Y) \subseteq \underline{N}(XY)$$

*olur [3].*

**İspat.** Teorem 3.5.2 ispatına benzer olarak elde edilir. □

**Teorem 3.5.4.** *H ve N, G grubunun normal alt grubu ve X, G' nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,*

$$\overline{(H \cap N)}(X) = \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)$$

*olur [3].*

**İspat.**

$$\begin{aligned}
\forall z \in (H\overline{\cap}N)(X) &\Leftrightarrow z(H\cap N)\cap(X)\neq\emptyset \\
&\Leftrightarrow \exists x\in z(H\cap N)\cap(X) \\
&\Leftrightarrow x\in z(H\cap N) \text{ ve } x\in X \\
&\Leftrightarrow x\in zH,\ x\in zN \text{ ve } x\in X \\
&\Leftrightarrow \exists x\in zH\cap X\neq\emptyset \text{ ve } \exists x\in zN\cap X\neq\emptyset \\
&\Leftrightarrow z\in\overline{H}(X)\text{ve } z\in\overline{N}(X) \\
&\Leftrightarrow z\in\overline{H}(X)\cap\overline{N}(X)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(H\overline{\cap}N)(X)=\overline{H}(X)\cap\overline{N}(X)$ elde edilir. □

**Örnek 3.5.1.** örnek 3.4.1'da $G$ değişmeli grup, $H=\{1,2\}$ ve $N=\{1,3\}$, $G$ değişmeli grubunun normal alt grupları ve $A=\{1,4\}$ olmak üzere,

$$\overline{H}(A)\cap\overline{N}(A)=\{1,2,3,4\}$$

ve

$$(H\overline{\cap}N)(A)=\{x\in G: x(H\cap N)\cap A\neq\emptyset\}=\{x\in G: x\{1\}\cap\{1,4\}\neq\emptyset\}=\{1,4\}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\underline{H}(A)\cap\underline{N}(A)=\emptyset$$

ve

$$(H\underline{\cap}N)(A)=\{x\in G: x(H\cap N)\subseteq A\}=\{x\in G: x\{1\}\subseteq\{1,4\}\}=\{1,4\}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\underline{H}(A)\cap\underline{N}(A)\subseteq(H\underline{\cap}N)(A)$ dir [28].

**Teorem 3.5.5.** *H ve N, G grubunun normal alt grubu ve X, G'nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,*

$$(H\underline{\cap}N)(X)\subseteq\underline{H}(X)\cap\underline{N}(X)$$

*dir [3, 28].*

**İspat.**

$$
\begin{aligned}
\forall z \in (\underline{H \cap N})(X) &\Rightarrow z(H \cap N) \subseteq (X) \\
&\Rightarrow zH \subseteq X \text{ ve } zN \subseteq X \\
&\Rightarrow z \in \underline{H}(X) \text{ ve } z \in \underline{N}(X) \\
&\Rightarrow z \in \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. Böylece $(\underline{H \cap N})(X) \subseteq \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$ elde edilir. Yukarıdaki örnekte elde edilen sonuçla birlikte $(\underline{H \cap N})(X) = \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$ olduğu bulunur. □

**Teorem 3.5.6.** *N, G grubunun normal alt grubu olsun. X, G' nin alt grubu ise X, G' nin* $\overline{N}$ *rough alt grubudur [3].*

**İspat.** $e$, $G$' nin birim elemanı olsun. $N$ ve $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan $e \in X$ ve $e = ee \in eN$ olur. Buradan $e \in eN \cap X$ ve $eN \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $e \in \overline{N}(X)$ bulunur. $a, b \in \overline{N}(X)$ olsun. Bu taktirde $x \in aN \cap X$ ve $y \in bN \cap X$ olacak şekilde $x$ ve $y$ elemanları vardır. Buna göre $x \in aN$, $y \in bN$ ve $x \in X$, $y \in X$ olur. $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan $xy \in X$ ve $N$, $G$' nin normal alt grubu olduğundan

$$xy \in (aN)(bN) = abN$$

yazılır. Böylece $xy \in abN \cap X$ ve bundan dolayı $ab \in \overline{N}(X)$ denilebilir. $a \in \overline{N}(X)$ olsun. Buradan $x \in aN \cap X$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Buna göre $x \in aN$ ve $x \in X$ olur. $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ dir. Diğer taraftan $h \in N$ için $x = ah$ olarak yazılabilir. Ayrıca $N$, $G$ nin normal alt grubu olduğundan $h^{-1} \in N$ dir. Böylece

$$x^{-1} = (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Na^{-1} = a^{-1}N$$

olarak bulunur. Buradan $x^{-1} = a^{-1}N \cap X$ olduğundan $a^{-1} \in \overline{N}(X)$ olur. Böylece $N(X)$, $G$' nin alt grubu olup $X$, $G$' nin $\overline{N}$ rough alt grubudur. □

**Teorem 3.5.7.** *N, G grubunun normal alt grubu olsun. X, G' nin normal alt grubu ise X, G' nin* $\overline{N}$ *rough normal alt grubudur [3].*

**İspat.** $\overline{N}(X)$ rough alt grup olduğundan $\overline{N}(X)$' in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \overline{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun. Bu taktirde $y \in aN \cap X$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Buradan $y \in aN$ ve $y \in X$ yazılabilir. $N$ normal olduğundan

$$xyx^{-1} = x(aN)x^{-1} = (xa)(Nx^{-1}) = (xa)(x^{-1}N) = (xax^{-1})N$$

ve $X$ normal olduğundan

$$xyx^{-1} = xXx^{-1} \subseteq X$$

elde edilir. Böylece

$$xyx^{-1} \in (xax^{-1})N \cap X$$

olup $xax^{-1} \in \overline{N}(X)$ bulunur. O halde $\overline{N}(X)$ normaldir. □

**Teorem 3.5.8.** *N, G grubunun normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X, G' nin alt grubu ise X, G' nin $\underline{N}$ rough alt grubudur [3].*

**İspat.** $eN = N \subseteq X$ olduğundan $e \in \underline{N}(X)$ olur. $x, y \in \underline{N}(X)$ olsun. O halde $xN \subseteq X$ ve $yN \subseteq X$ dir. $N$ normal alt grup ve $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan

$$xyN = (xN)(yN) \subseteq XX \subseteq X$$

elde edilir. Böylece $xy \in \underline{N}(X)$ dir. $x \in \underline{N}(X)$ olsun. Dolayısıyla $x = xe \in xN \subseteq X$ yazılabilir. $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ olup,

$$x^{-1}N \subseteq XX \subseteq X$$

ifadesi elde edilir. Bu ise $x^{-1} \in \underline{N}(X)$ olmasını gerektirir. Böylece $\underline{N}(X)$, $G$' nin alt grubudur. □

**Teorem 3.5.9.** *N, G grubunun normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X, G' nin normal alt grubu ise X, G' nin $\underline{N}$ rough normal alt grubudur [3].*

**İspat.** $\underline{N}(X)$ rough alt grup olduğundan $\underline{N}(X)$' in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \underline{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun. Buradan $aN \subseteq X$ olur. $N$ ve $X$ normal olduğundan

$$(xax^{-1})N = x(aN)x^{-1} \subseteq xXx^{-1} \subseteq X$$

yazılabilir. Buradan

$$xax^{-1} \in \underline{N}(X)$$

olup, $\underline{N}(X)$ normaldir. $\square$

**Teorem 3.5.10.** *H ve N, G grubunun normal alt grupları olsun. X, G' nin alt grubu ise*

$$\overline{H}(X)\overline{N}(X) \subseteq (\overline{HN})(X)$$

*dir [3].*

**İspat.**

$$\begin{aligned} xy = z \in \overline{H}(X)\overline{N}(X) \quad &\Rightarrow \quad x \in \overline{H}(X) \text{ ve } y \in \overline{N}(X) \\ &\Rightarrow \quad a \in xH \cap X \text{ ve } b \in yN \cap X \\ &\Rightarrow \quad a \in xH,\ b \in yN,\ a \in X,\ b \in X \end{aligned}$$

yazılır. $H$ normal olduğundan,

$$ab \in (xH)(yN) = x(Hy)N) = (x(yH)N) = ((xy)H)N = (xy)HN = zHN$$

elde edilir. Buradan $X$, $G$' nin alt grubu olduğundan $ab \in X$ olup, $zHN \cap X$ ve $z \in (\overline{HN})(X)$ dir. Böylece $\overline{H}(X)\overline{N}(X) \subseteq (\overline{HN})(X)$ bulunur. $\square$

**Teorem 3.5.11.** *H ve N, G grubunun normal alt grupları olsun. X, G' nin alt grubu ise*

$$(\overline{HN})(X) \subseteq \overline{H}(X)N \cap \overline{N}(X)H$$

*dir [3].*

**İspat.** $z \in (\overline{HN})(X)$ olsun. Bu taktirde, $\exists x \in G$ vardır öyleki $x \in z(HN) \cap X$ olur. Buradan $x \in z(HN)$ ve $x \in X$ bulunur. $x = zab$ için $a \in H$ ve $b \in N$ olacağından $a^{-1} \in H$ ve $b^{-1} \in N$ yazılır. $H$ normal olduğundan

$$x = zab \in zHb\, x \in zbH \cap X$$

dir. Bundan dolayı $zb \in \overline{H}(X)$ olup,

$$z \in \overline{H}(X)b^{-1} \subseteq \overline{H}(X)N$$

bulunur. Benzer olarak $z \in \overline{N}(X)H$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$z \in \overline{H}(X)N \cap \overline{N}(X)H$$

olduğundan $(\overline{HN})(X) \subseteq \overline{H}(X)N \cap \overline{N}(X)H$ elde edilir. □

**Teorem 3.5.12.** *H ve N, G grubunun normal alt grupları olsun. X, G' nin alt grubu ise*

$$\underline{H}(X)\underline{N}(X) \subseteq (\underline{HN})(X)$$

*dir [3].*

**İspat.** $z \in \underline{H}(X)\underline{N}(X)$ olsun. Buradan $x = ab$ için $a \in \underline{H}(A)$ ve $b \in \underline{N}(A)$ olup $aH \subseteq X$ ve $bN \subseteq X$ elde edilir. $X$, $G$' nin alt grubu ve $H$ normal alt grup olduğundan

$$(ab)HN = \{a(bH)\}N = \{a(Hb)\}N = \{(aH)b\}N = (aH)(bN) \subseteq XX \subseteq X$$

dir. Buradan $z = ab \in (\underline{HN})(X)$ olacağından $\underline{H}(X)\underline{N}(X) \subseteq (\underline{HN})(X)$ olur. □

# 4. ROUGH ALTGRUPOİD

Bu bölümde, matematikte son yıllarda yaygın olarak kullanılan grupoid ve rough küme kavramlarını birlikte düşüneceğiz. Önce grupoidin normal alt grupoidi kavramını kullanarak rough normal alt grupoid kavramını daha sonra da rough alt groupoid kavramını vereceğiz. Ayrıca bu bölümde rough alt gruplarda verilen teoremleri rough altgroupoidler için de inceleyebileceğiz.

## 4.1 N normal alt grupoidine göre A kümesinin N(A) Rough Kümesi

**Tanım 4.1.1.** $G$, $Ob(G)$ üzerinde bir grupoid, $N$ de $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olsun. $G$' nin boştan farklı bir $A$ alt kümesi için,

$$\begin{aligned}
\underline{N_x}(A) &= \{a \in G \mid a \circ N_x \subseteq A, x \in Ob(G)\}, \\
\underline{N}(A) &= \bigcup_{x \in Ob(G)} \underline{N_x}(A), \\
\overline{N_x}(A) &= \{a \in G \mid a \circ N_x \cap A \neq \emptyset, x \in Ob(G)\}, \\
\overline{N}(A) &= \bigcup_{x \in Ob(G)} \overline{N_x}(A)
\end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla $G$ grupoidi üzerinde $N$ normal altgrupoidine göre $A$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları denir. $N(A) = (\underline{N}(A), \overline{N}(A))$, $G$ grupoidi üzerinde $A$ kümesinin rough kümesidir.

Şimdi grupoidler için önemli olan bir teoremi hatırlatalım.

**Teorem 4.1.1.** *$Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$ ve $\alpha(b) = \beta(a)$ için $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $N$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olsun. Bu durumda aşagıdakiler denktir.*

1. *$N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoididir.*

2. *$\forall a \in G$ için $a \circ N_z \circ a^{-1} = N_y$ dir.*

3. *$\forall a \in G$ için $a \circ N_z = N_y \circ a$ dir.*

*4.* $\forall a,b \in G$ *için* $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x$ *dir.[17, 18]*

## 4.2 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler

**Tanım 4.2.1.** $A$, $G$ grupoidinin boştan farklı bir alt kümesi ve $N$, $G$' nin bir normal alt grupoidi olsun. $G$' de $A$' nın $N(A) = (\underline{N}(A), \overline{N}(A))$ rough kümesi için,

1. $\overline{N}(A)$, $G$' nin (normal) alt grupoidi ise $A$'ya $G$' nin $\overline{N}$ rough (normal) alt grupoidi
2. $\underline{N}(A)$, $G$' nin (normal) alt grupoidi ise $A$'ya $G$' nin $\underline{N}$ rough (normal) alt grupoidi

denir.

**Örnek 4.2.1.** Her rough alt grup tek nesneli bir rough alt grupoiddir. Gerçekten $A$, $G$ grubunun boştan farklı bir alt kümesi ve $N$, $G$ grubunun bir normal alt grubu olsun. $G$ grubunda $A$' in $N(A) = (\underline{N}(A), \overline{N}(A))$ rough kümesi için, $\overline{N}(A)$ ve $\underline{N}(A)$, $G$ grubunun (normal) alt grubu olsun. Bu durumda $A$ $G$ grubunun $\overline{N}$ rough (normal) alt grubu ve $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu olur. Her grup tek nesneli bir grupoid olduğundan $\overline{N}$ rough (normal) alt grubu ve $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu tek nesneli bir rough (normal) alt grupoiddir denilebilir.

**Örnek 4.2.2.** Daha önce grupoid olduğunu verdiğimiz morfizmleri $a : 0 \to 1$, $a^{-1} : 1 \to 0$ olan $G = \{1_0, a, a^{-1}, 1_1\}$ groupoidinin nesneleri $Ob(N) = Ob(G)$ olan $N = \{1_0, 1_1\}$ normal altgrupoidi ve bir $A = \{a\} \subset G$ verilsin. $a \circ N_0 = \{a\} \subseteq A$ ve $a^{-1} \circ N_1 = \{a^{-1}\}$ olduğundan

$$\underline{N_0}(A) = \{a \in G \mid a \circ N_0 \subseteq A\} = A, \quad \underline{N_1}(A) = \emptyset,$$

$$\overline{N_1}(A) = \{a \in G \mid a^{-1} \circ N_1 \cap A \neq \emptyset\} = \emptyset, \quad \overline{N_0}(A) = \{a \in G \mid a \circ N_0 \cap A \neq \emptyset\} = A$$

elde edilir. O halde $G$ grupoidi üzerinde $N$ normal altgrupoidine göre $A$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla,

$$\underline{N}(A) = \bigcup_{X \in Ob(G)} \underline{N_X}(A) = A,$$

$$\overline{N}(A) = \bigcup_{X \in Ob(G)} \overline{N_X}(A) = A$$

olarak bulunur. $\underline{N}(A) = \overline{N}(A) = A$ olup $A$ kümesi her elemanı birim dönüşüm olan bir grupoid olmasına rağmen sınır bölgesi boş kümeye eşit olduğundan $A$, $G$' nin rough alt grupoidi değildir.

**Örnek 4.2.3.** $X = \{x, y, z\}$ kümesini gözönüne alalım. $X$ kümesi üzerinde $R = X \times X = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x),(x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Her denklik bağıntısı bulunduğu küme üzerinde bir grupoid olduğundan $R$, $X$ kümesi üzerinde bir grupoiddir. $N = \{(x,x),(y,y),(z,z)\}$, $R$ grupoidinin bir normal altgroupoidi ve $A = \{(x,x),(y,y),(y,x),(z,x),(y,z)\} \subset R$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} a \circ N_x &= \{(x,x),(x,y),(x,z)\}, \\ a \circ N_y &= \{(y,y),(y,x),(y,z)\}, \\ a \circ N_z &= \{(z,z),(z,x),(z,y)\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \underline{N_x}(A) &= \emptyset, \\ \underline{N_y}(A) &= \{a \in R \mid a \circ N_y \subseteq A\} = \{(y,y),(y,x),(y,z)\}, \\ \underline{N_z}(A) &= \emptyset \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece $R$ grupoidi üzerinde $N$ normal altgrupoidine göre $A$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları

$$\begin{aligned} \underline{N}(A) &= \underline{N_x}(A) \cup \underline{N_y}(A) \cup \underline{N_z}(A) = \{(y,y),(y,x),(y,z)\}, \\ \overline{N}(A) &= \overline{N_x}(A) \cup \overline{N_y}(A) \cup \overline{N_z}(A) = A \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\overline{N}(A)$, $G$' nin alt grupoidi olduğundan $A$'ya $G$' nin $\overline{N}$ rough alt grupoidi denir. Fakat $\underline{N}(A)$, $G$' nin alt grupoidi olmadığı için $A$, $G$' nin $\underline{N}$ rough alt grupoidi değildir.

## 4.3 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler İçin Özellikler

**Teorem 4.3.1.** *G, $Ob(G)$ üzerinde bir grupoid, N ve H, G' nin normal altgrupoidi ve G' nin A ve B alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. $\underline{N}(A) \subseteq A \subseteq \overline{N}(A)$.
2. $\overline{N}(A \cup B) = \overline{N}(A) \cup \overline{N}(B)$.
3. $\underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(B)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{N}(A) \subseteq \overline{N}(B)$.
6. $\underline{N}(A \cup B) \supseteq \underline{N}(A) \cup \underline{N}(B)$.
7. $\overline{N}(A \cap B) \subseteq \overline{N}(A) \cap \overline{N}(B)$.
8. $N \subseteq H \Rightarrow \overline{N}(A) \subseteq \overline{H}(A)$.

**İspat.** 1. $\forall a \in \underline{N}(A)$ ise $\forall x \in Ob(G)$ için $a = a \circ 1_x \in a \circ N_x \subseteq A$ dir. Buradan $\underline{N}(A) \subseteq A$ bulunur. Eğer $\forall a \in A$ ise $a = a \circ 1_x \in a \circ N_x$ olacağından $a \in a \circ N_x \cap A$ ise $\forall x \in Ob(G)$ için $a \circ N_x \cap A \neq \emptyset$ yazılabilir. Buradan $a \in \overline{N}(A)$ olup $A \subseteq \overline{N}(A)$ elde edilir.

2. $a \in \overline{N}(A \cup B) \Leftrightarrow a \circ N_x \cap \ (A \cup B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$

$$\Leftrightarrow (a \circ N_x \cap A) \cup (a \circ N_x \cap B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$$

$$\Leftrightarrow (a \circ N_x \cap A) \neq \emptyset \text{ veya } (a \circ N_x \cap B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$$

$$\Leftrightarrow a \in \overline{N}(A) \text{ veya } a \in \overline{N}(B)$$

$$\Leftrightarrow a \in \overline{N}(A) \cup \overline{N}(B)$$

yazılabilir. Buradan $\overline{N}(A \cup B) = \overline{N}(A) \cup \overline{N}(B)$ olur.

3. $a \in \underline{N}(A \cap B) \Leftrightarrow a \circ N_x \subseteq A \cap B$

$$\Leftrightarrow a \circ N_x \subseteq A \text{ ve } a \circ N_x \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow a \in \underline{N}(A) \text{ ve } a \in \underline{N}(B)$$

$$\Leftrightarrow a \in \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$$

elde edilir. Buradan $\underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$ olur.

4. $A \subseteq B$ olduğundan $A \cap B = A$ olur. (3)'den,

$$\underline{N}(A) = \underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$$

olacağından $\underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(B)$ bulunur.

5. $A \subseteq B$ olduğundan $AUB = B$ olur. (2)'den,

$$\overline{N}(B) = \overline{N}(A \cup B) = \overline{N}(A) \cup \overline{N}(B)$$

olacağından $\overline{N}(A) \subseteq \overline{N}(B)$ elde edilir.

6. $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan (4)'den,

$$\underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(A \cup B) \text{ ve } \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \cup B)$$

bulunur. Buradan $\underline{N}(A) \cup \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \cup B)$ olur.

7. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ ve (5)'den,

$$\overline{N}(A \cap B) \subseteq \overline{N}(A) \text{ ve } \overline{N}(A \cap B) \subseteq \overline{N}(B)$$

bulunur. Buradan $\overline{N}(A \cap B) \subseteq \overline{N}(A) \cap \overline{N}(B)$ olur.

8. Eğer $\forall c \in \overline{N}(A)$ ise $\exists x \in c \circ N_x \cap A$ olur ve böylece

$$x \in c \circ N_x \subseteq c \circ H_x$$

bulunur. Bu yüzden $x \in c \circ H_x \cap A$ olup $c \in \overline{H}(A)$ sağlanır ve $\overline{N}(A) \subseteq \overline{H}(A)$ elde edilir.

□

**Teorem 4.3.2.** *N, G grupoidinin normal altgrupoidi, A ve B, G'nin boştan farklı alt kümeleri olsun. Bu taktirde,*

$$\overline{N}(A) \circ \overline{N}(B) = \overline{N}(A \circ B)$$

*dir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$, $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olsun. $G$ grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır.
$c$, $\overline{N}(A \circ B)$' nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $\forall x \in Ob(G)$ için $c \circ N_x \cap A \circ B \neq \emptyset$ dir. Böylece $G$' de bir $m$ elemanı vardır öyleki $m \in c \circ N_x \cap A \circ B$ olup

$$m \in c \circ N_x \text{ ve } m \in A \circ B$$

bulunur. $m = a \circ b$, $a \in A$ ve $b \in B$ ile verilsin.

$$c \in m \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$$

olduğundan $N = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x)$ elde edilir. $c = k \circ l$ ile $k \in a \circ N_z$ ve $l \in b \circ N_x$ bulunur. Buradan

$$a \in k \circ N_z \text{ ve } a \in k \circ N_z \cap A$$

şeklindedir. Yani $k \in \overline{N}(A)$ olur. Benzer olarak $l \in \overline{N}(B)$ bulunur. Buradan $c = k \circ l \in \overline{N}(A) \circ \overline{N}(B)$ olacağından

$$\overline{N}(A \circ B) \subseteq \overline{N}(A) \circ \overline{N}(B)$$

olur.

Tersine, $c$, $\overline{N}(A) \circ \overline{N}(B)$'nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $c = a \circ b$ olduğundan $a \in \overline{N}(A)$ ve $b \in \overline{N}(B)$ dir. Böylece $G$'de $r$ ve $s$ elemanları vardır öyleki $\forall z \in Ob(G)$ için $r \in a \circ N_z \cap A$ ve $\forall x \in Ob(G)$ için $s \in b \circ N_x \cap B$ dir. Böylece $r \in a \circ N_z$, $r \in A$, $s \in b \circ N_x$ ve $s \in B$ dir. $N$ normal olduğundan,

$$\begin{aligned} r \circ s &\in (a \circ N_z)(b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x, \\ r \circ s &\in A \circ B \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} r \circ s &\in a \circ b \circ N_x \cap A \circ B, \\ c &= a \circ b \in \overline{N}(A)(A \circ B) \end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\overline{N}(A) \circ \overline{N}(B) \subseteq \overline{N}(A \circ B)$$

olur. Böylece $\overline{N}(A) \circ \overline{N}(B) = \overline{N}(A \circ B)$ olarak elde edilir. $\square$

**Teorem 4.3.3.** *N, G grupoidinin normal altgrupoidi, A ve B, G' nin boştan farklı alt kümeleri olsun. Bu taktirde,*

$$\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \circ B)$$

*dir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olsun. $G$ grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır. $c$, $\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B)$' nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $c = a \circ b$ olduğundan $a \in \underline{N}(A)$ ve $b \in \underline{N}(B)$ dir. Yani

$$\forall z \in Ob(G), a \circ N_z \subseteq A \text{ ve } \forall x \in Ob(G), b \circ N_x \subseteq B$$

şeklindedir. $N$ normal altgrupoid olduğundan,

$$c \circ N_x = a \circ b \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ B$$

bulunur ve $c \in \underline{N}(A \circ B)$ olur. Böylece $\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \circ B)$ elde edilir. $\square$

**Uyarı 4.3.1.** *$H_1$ ve $H_2$, G grupoidinin iki alt grupoid olsun. $H_1 \cap H_2$ de G grupoidinin bir alt grupoididir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned} f &\in Mor_{H_1 \cap H_2}(x, y) \text{ için } f \in Mor_{H_1}(x, y) \text{ ve } f \in Mor_{H_2}(x, y) \\ g &\in Mor_{H_1 \cap H_2}(y, z) \text{ için } g \in Mor_{H_1}(y, z) \text{ ve } g \in Mor_{H_2}(y, z) \end{aligned}$$

*olsun.* $g \circ f \in Mor_{H_1}(x,z)$ *ve* $g \circ f \in Mor_{H_2}(x,z)$ *olduğu için* $g \circ f \in Mor_{(H_1 \cap H_2)}(x,z)$ *dır. Ayrıca*

$$f \in Mor_{(H_1 \cap H_2)}(x,y) \text{ için } f \in Mor_{H_1}(x,y) \text{ ve } f \in Mor_{H_2}(x,y)$$

*olur. Bu ise* $f^{-1} \in Mor_{H_1}(y,x)$ *ve* $f^{-1} \in Mor_{H_2}(y,x)$ *verir. Yani* $f^{-1} \in Mor_{H_1 \cap H_2}(y,x)$ *dir.*

**Teorem 4.3.4.** *H ve N, G grupoidinin normal altgrupoidleri ve A, G' nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,*

$$H \overline{\cap} N(A) = \overline{H}(A) \cap \overline{N}(A)$$

*dir.*

**İspat.** $\forall c \in H \overline{\cap} N(A) \Leftrightarrow c \circ (H \cap N)_x \cap A \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow \exists a \in c \circ (H \cap N)_x \cap A, \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow a \in c \circ (H \cap N)_x, \forall x \in Ob(G)$ ve $a \in A$

$\Leftrightarrow a \in c \circ H_x,\ a \in A$ ve $a \in c \circ N_x,\ a \in A,\ \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow \exists a \in c \circ H_x \cap A$ ve $\exists a \in c \circ N_x \cap A,\ \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow c \in \overline{H}(A)$ ve $c \in \overline{N}(A)$

bulunur. Böylece $H \overline{\cap} N(A) = \overline{H}(A) \cap \overline{N}(A)$ olur. □

**Teorem 4.3.5.** *H ve N, G grupoidinin normal altgrupoidleri ve A, G' nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,*

$$H \underline{\cap} N(A) = \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A)$$

*dir.*

**İspat.** $\forall c \in H \underline{\cap} N(A) \Leftrightarrow c \circ (H \cap N)_x \subseteq A,\ \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow c \circ H_x \subseteq A$ ve $c \circ N_x \subseteq A,\ \forall x \in Ob(G)$

$\Leftrightarrow c \in \underline{H}(A)$ ve $c \in \underline{N}(A)$

$\Leftrightarrow c \in \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A)$ olacağından

$H \underline{\cap} N(A) = \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A)$ elde edilir. □

**Teorem 4.3.6.** *$N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi ve $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olsun. Bu durumda $A$, $G$ grupoidinin $\overline{N}$ rough altgrupoididir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$, $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan $G$ grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır. $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in G$ dir. $N$ ve $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidleri olduğundan $1_x \in A$ ve $1_x \in N_x$ olur. Böylece

$$1_x = 1_x \circ 1_x \in 1_x \circ N_x$$

elde edilir. Buradan $1_x \in 1_x \circ N_x \cap A$ olur. O halde $1_x \circ N_x \cap A \neq \emptyset$ olup $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in \overline{N}(A)$ sağlanır. $a$ ve $b$, $\overline{N}(A)$' nın herhangi elemanları olsunlar. $G$' de $k$ ve $l$ için $k \in a \circ N_z \cap A$ ve $l \in b \circ N_x \cap A$ olur. Böylece $\forall z \in Ob(G)$ için $k \in a \circ N_z$, $\forall x \in Ob(G)$ için $l \in b \circ N_x$ ve $k \in A$, $l \in A$ dır. $A$, $G$' nin altgrupoidi olduğundan, $k \circ l \in A$ olur. $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan,

$$k \circ l \in (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x$$

yazılabilir. Böylece

$$k \circ l \in a \circ b \circ N_x \cap A \text{ ve } a \circ b \in \overline{N}(A)$$

olur. $a$, $\overline{N}(A)$'nın herhangi bir elemanı olsun. Buradan bazı $k \in G$ ler için

$$k \in a \circ N_z \cap A$$

olup $\forall z \in Ob(G)$ için $k \in a \circ N_z$ ve $k \in A$ bulunur. $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğundan, $k^{-1} \in A$ elde edilir.

Diğer taraftan $h \in N$ elemanı için $k = a \circ h$ olcak şekilde $h \in N_z$ ve $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan $\forall z \in Ob(G)$ için $h^{-1} \in N_z$ yazılabilir. Böylece

$$k^{-1} = (a \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ a^{-1} \in N_z \circ a^{-1} = a^{-1} \circ N_y$$

elde edilir. Buradan

$$k^{-1} \in a^{-1} \circ N_y \cap A$$

olur. Sonuç olarak, $a^{-1} \in \overline{N}(A)$ olur. Bu ise $\overline{N}(A)$' nın $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğunu verir. Yani $A$, $G$ grupoidinin $\overline{N}$ rough altgrupoididir. □

**Teorem 4.3.7.** *N, G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A, G grupoidinin normal altgrupoidi ise A, G grupoidinin $\overline{N}$ rough normal altgrupoididir.*

**İspat.** Bir önceki teoremde $\overline{N}(A)$' nın altgrupoid olduğunu göstermiştik. Şimdi $\overline{N}(A)$' nın normal olduğunu göstereceğiz. $\forall x,y \in Ob(G)$ için $a \in Mor(x,y)$, $k \in Mor(x,y)$ sırasıyla $\overline{N}(A)$ altgrupoidinin ve $G$ grupoidinin herhangi elemanları olsunlar. Bu taktirde $l \in a \circ N_x \cap A$ olacak şekilde $G$' de $l \in Mor(x,y)$ vardır. Burada $l \in a \circ N_x$ ve $l \in A$ olur. $N$ normal olduğundan

$$\begin{aligned} k \circ l \circ k^{-1} \in k \circ (a \circ N_x) \circ k^{-1} &= (k \circ a) \circ (N_x \circ k^{-1}) \\ &= (k \circ a) \circ (k^{-1} \circ N_y) \\ &= (k \circ a \circ k^{-1}) \circ N_y \end{aligned}$$

ve $A$ normal olduğundan

$$k \circ l \circ k^{-1} \in kAk^{-1} \subseteq A$$

bulunur. Buradan

$$k \circ l \circ k^{-1} \in (k \circ a \circ k^{-1}) \circ N_y \cap A$$

olur ve böylece $k \circ a \circ k^{-1} \in \overline{N}(A)$ elde edilir. Bu ise $\overline{N}(A)$' nın normal olduğunu verir. □

**Teorem 4.3.8.** *N, G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A, G grupoidinin $N \subseteq A$ sağlayan altgrupoidi ise A, G grupoidinin $\underline{N}$ rough altgrupoididir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$, $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in G$ dir. $N$ ve $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidleri olduğundan $1_x \in A$ ve $1_x \in N_x$ olur. $\forall z \in Ob(G)$ için $1_z \circ N_z = N_z \subseteq A$ olduğundan $1_z \in \underline{N}(A)$ ve $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \circ N_x = N_x \subseteq A$ olduğundan $1_x \in \underline{N}(A)$ elde edilir. $a$ ve $b$ $\underline{N}(A)$' nın herhangi elemanları olsunlar. Buradan

$$a \circ N_z \subseteq A \text{ ve } b \circ N_x \subseteq A$$

olur. $N$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi ve $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğundan

$$a \circ b \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ A \subseteq A$$

olup bu, $a \circ b \in \underline{N}(A)$ olduğunu gösterir. $a$, $\underline{N}(A)$' nın herhangi bir elemanı olsun. Buradan

$$a = a \circ 1_z \in a \circ N_z \subseteq A, \forall z \in Ob(G)$$

olur. $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğundan $a^{-1} \in A$ bulunur. Böylece

$$a^{-1} \circ N_y \subseteq A \circ A \subseteq A, \forall y \in Ob(G)$$

elde edilir. Bu ise $a^{-1} \in \underline{N}(A)$ olması demektir. Böylece $\underline{N}(A)$, $G$' nin altgrupoididir. Yani $A$, $G$ grupoidinin $\underline{N}$ rough altgrupoididir. □

**Teorem 4.3.9.** *N, G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A, G grupoidinin $N \subseteq A$ bağıntısını sağlayan normal altgrupoidi ise A, G grupoidinin $\underline{N}$ rough normal altgrupoididir.*

**İspat.** Bir önceki teoremde $\underline{N}(A)$' nın altgrupoid olduğunu göstermiştik. Şimdi $\underline{N}(A)$' nın normal olduğunu göstereceğiz. $\forall x, y \in Ob(G)$ için $a \in Mor(x,x)$, $k \in Mor(x,y)$ sırasıyla $\underline{N}(A)$ altgrupoidinin ve $G$ grupoidinin herhangi elemanları olsunlar. Buradan

$$a \circ N_x \subseteq A$$

olur. $N$ ve $A$ normal olduğundan,

$$(k \circ a \circ k^{-l}) \circ N_x = k \circ (a \circ N_x) \circ k^{-1} \subseteq k \circ A \circ k^{-1} \subseteq A$$

bulunur. Böylece $k \circ A \circ k^{-1} \in \underline{N}(A)$ olur. Bu $\underline{N}(A)$' nın normal olduğunu verir. Yani $A$, $G$ grupoidinin $\underline{N}$ rough normal altgrupoididir. □

**Uyarı 4.3.2.** *$H_1$ ve $H_2$, G grupoidinin iki alt grupoidi olsun. $H_1 \circ H_2$ de G grupoidinin bir alt grupoiddir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 &\in Mor_{H_1 \circ H_2}(x,z) \textit{ için } f_1 \in Mor_{H_1}(y,z) \textit{ ve } f_2 \in Mor_{H_2}(x,y) \\ g_1 \circ g_2 &\in Mor_{H_1 \circ H_2}(z,k) \textit{ için } g_1 \in Mor_{H_1}(t,k) \textit{ ve } g_2 \in Mor_{H_2}(t,z) \end{aligned}$$

*olsun.* $(g_1 \circ g_2) \circ (f_1 \circ f_2) \in Mor_{H_1 \circ H_2}(x,k)$ *dır. Ayrıca*

$$(f_1 \circ f_2) \in Mor_{H_1 \circ H_2}(x,k) \textit{ için } f_1^{-1} \in Mor_{H_1}(z,y) \textit{ ve } f_2^{-1} \in Mor_{H_2}(y,x)$$

*olur. Buradan* $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \in (H_1 \circ H_2)(z,x)$ *verir. Yani G grupoidinin* $H_1$ *ve* $H_2$ *altgroupoidlerinin bileşkesi* $H_1 \circ H_2$*, G grupoidinin altgroupoididir. Bu yüzden G' nin boştan farklı A alt kümesi için* $H \underline{\circ} N(A)$ *ve* $H \overline{\circ} N(A)$ *bulunabilir.*

**Teorem 4.3.10.** *H ve N, G groupoidinin normal altgroupoidleri olsunlar. A, G grupoidinin altgrupoidi ise*

$$\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A) \subseteq H \overline{\circ} N(A)$$

*dir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$, $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $c$, $\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A)$' nın herhangi elemanı olsun. Buradan $a \in \overline{H}(A)$ ve $b \in \overline{N}(A)$ olduğundan $c = a \circ b$ bulunur. $G$' de $k$ ve $l$ elemanları için $k \in a \circ H_z \cap A$ ve $l \in b \circ N_x \cap A$ vardır. Böylece $k \in a \circ H_z$, $l \in b \circ N_x$ olacak şekilde $k \in A$ ve $l \in A$ bulunur. Buradan $H$ normal olduğundan

$$\begin{aligned} k \circ l \in (a \circ H_z) \circ (b \circ N_x) &= \{a \circ (H_z \circ b) \circ N_x\} \\ &= \{a \circ (b \circ H_x) \circ N_x\} \\ &= \{(a \circ b) \circ H_x\} \circ N_x \\ &= (a \circ b) \circ H_x \circ N_x \\ &= c \circ H_x \circ N_x \end{aligned}$$

olur. $A$, $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğundan $k \circ l \in A$ dir. Bu yüzden $\forall x \in Ob(G)$ için

$$k \circ l \in c \circ H_x \circ N_x \cap A$$

olup $c \in H \overline{\circ} N(A)$ elde edilir. Böylece $\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A) \subseteq H \overline{\circ} N(A)$ olduğu görülür. □

**Teorem 4.3.11.** *H ve N, G groupoidinin normal altgroupoidleri olsunlar. A, G grupoidinin altgrupoidi ise*

$$\underline{H}(A) \circ \underline{N}(A) \subseteq H \underline{\circ} N(A)$$

*dir.*

**İspat.** $Ob(G)$ üzerindeki bir $G$ grupoidi $\forall x,y,z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z,y)$, $b \in Mor(x,z)$, $a \circ b \in Mor(x,y)$ ile verilsin. $c$, $\underline{H}(A) \circ \underline{N}(A)$' nın herhangi bir elemanı olsun. $a \in \underline{H}(A)$ ve $b \in \underline{N}(A)$ olduğundan $c = a \circ b$ olur. Buradan $a \circ H_z \subseteq A$ ve $b \circ N_x \subseteq A$ bulunur. $H$, $G$ grupoidinin normal altgrupoidi ve $A$ da $G$ grupoidinin altgrupoidi olduğundan

$$\begin{aligned}
(a \circ b) \circ H_x \circ N_x &= \{a \circ (b \circ H_x)\} \circ N_x = \{a \circ (H_z \circ b)\} \circ N_x \\
&= \{(a \circ H_z) \circ b\} \circ N_x = (a \circ H_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ A \subseteq A
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $c = a \circ b \in H \underline{\circ} N(A)$ dir ve böylece $\underline{H}(A) \circ \underline{N}(A) \subseteq H \underline{\circ} N(A)$ bulunur. $\square$

## 5. LOKAL ROUGH KÜMELER

Bu bölümde, Grothendieck ve Verdier[5] tarafından verilen, Brown[13, 14] ve İçen[15, 16] tarafından genişletilen lokal denklik bağıntısı kavramını rough teoriye aktaracağız. Bu kavramı kullanarak rough küme kavramının lokali olan ”lokal rough küme” kavramını tanımlayacağız ve bu kavramla ilgili bazı teoremler vereceğiz.

### 5.1 Lokal Yaklaşım Uzayı

**Tanım 5.1.1.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi olmak üzere $U = \cup U_i$ ile verilsin. $R_i \subseteq U_i \times U_i$ bağıntısı ile $R_i$, $U_i$ üzerinde bir denklik bağıntısı olarak alındığında,

$$\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U \text{nesnelerin sonlu kümesi}, R_i \subseteq (U_i \times U_i) \text{denklik bağıntısı}\}$$

ailesine, eğer lokal yaklaşım uzayındaki $(U_i, R_i)$ ve $(U_j, R_j)$ ikililerinden seçilen bir $x \in W \subseteq (U_i \cap U_j)$ için

$$R_i|_W = R_j|_W$$

sağlanırsa **lokal yaklaşım uzayı** denir.

### 5.2 Lokal Rough Kümeler

**Tanım 5.2.1.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi ve $U = \cup U_i$ verilsin. $R_i \subseteq U_i \times U_i$ denklik bağıntısı ile $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U \text{nesnelerin sonlu kümesi}, R_i \subseteq U_i \times U_i \text{denklik bağıntısı}\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun. $[x]_i = \{R_i \ \textit{bağıntısına göre } x'\textit{in denklik sınıfı}\}$ ve $x \in U$ olmak üzere; herhangi bir $X \subseteq U$ kümesinden elde edilen

$$\begin{aligned} \underline{R_i}(X) &= \{x \in U \mid [x]_i \subseteq X, \forall i \in I\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \subseteq X\}, \\ \overline{R_i}(X) &= \{x \in U \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla $X$ kümesinin **lokal alt yaklaşımı** ve **lokal üst yaklaşımı** denir. Eğer

$$\overline{R_i}(X) - \underline{R_i}(X) \neq \emptyset$$

şartı sağlanıyorsa $X$ kümesine **lokal rough küme** denir.

**Teorem 5.2.1.** *Lokal rough küme $X, Y \subseteq U$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. $\underline{R}_i(X) \subseteq (X) \subseteq U.$
2. $\underline{R}_i(X) \subseteq (X) \subseteq \overline{R}_i(X).$
3. $\underline{R}_i(\emptyset) = \underline{R}_i(\emptyset) = \emptyset.$
4. $\underline{R}_i(U) = \overline{R}_i(U) = U.$
5. $\overline{R}_i(X \cup Y) = \overline{R}_i(X) \cup \underline{R}_i(Y).$
6. $\underline{R}_i(X \cap Y) = \underline{R}_i(X) \cap \underline{R}_i(Y).$
7. $X \subseteq Y$ *ise* $\underline{R}_i(X) \subseteq \underline{R}_i(Y).$
8. $X \subseteq Y$ *ise* $\underline{R}_i(X) \subseteq \underline{R}_i(Y).$
9. $\underline{R}_i(X \cup Y) \supseteq \underline{R}_i(X) \cup \underline{R}_i(Y).$
10. $\overline{R}_i(X \cap Y) \subseteq \overline{R}_i(X) \cap \overline{R}_i(Y).$
11. $\underline{R}_i(-X) = -\overline{R}_i(X).$
12. $\overline{R}_i(X)(-X) = -\underline{R}_i(X).$
13. $\underline{R}_i\underline{R}_i(X) = \overline{R}_i\underline{R}_i(X)(X) = \underline{R}_i(X).$
14. $\overline{R}_i\overline{R}_i(X) = \underline{R}_i\overline{R}_i(X)(X) = \overline{R}_i(X).$

**İspat.** 1. $\forall x \in R_{i-}(X)$ için $\underline{R}_i(X) = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \subseteq X\}$ olup $[x]_i \subseteq X \subseteq U, \forall i \in I$ olur. Bu ise $\underline{R}_i(X) \subseteq (X) \subseteq U$ verir.

2. $U_i \subseteq U$ ve $U = \underset{i\in I}{\cup} U_i$ olduğundan $[x]_i \subseteq X \subseteq [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I$ olur. Yani $\overline{R_i}(X) = \underset{x\in U}{\cup}\{[x]_i | \ [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\}$ dir. Bu ise $\underline{R_i}(X) \subseteq (X) \subseteq \overline{R_i}(X)$ verir.

Diğerleride benzer şekilde yapılabilir. □

**Örnek 5.2.1.** Örnek 3.1.1'den $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ nesnelerinin kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ özelliklerin kümesi $D_1 = \{1,2,3\}$, $D_2 = \{1,2\}$, $D_3 = \{1,2,3,4\}$ değer kümeleri

$$R(x_i) = \{x_j : x_j,\ x_i' \text{ ler ile aynı değerlere sahip},\ 1 \leq i, j \leq 10\}$$

olmak üzere

| $U$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_2$ | 3 | 2 | 1 |
| $x_3$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_4$ | 2 | 2 | 3 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_6$ | 1 | 1 | 2 |
| $x_7$ | 3 | 2 | 1 |
| $x_8$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_9$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_{10}$ | 3 | 2 | 1 |

bilgi tablosu verilsin. $U$ nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi için, $R_i \subseteq U_i \times U_i$ denklik bağıntısı ve $U = \cup U_i$ verilsin. $\{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olmak üzere, $U_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ ve $U_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_7, x_9, x_{10}\}$ alt kümeleri ile $(U_1, R_1)$ ve $(U_2, R_2)$ lokal yaklaşım uzayları verilsin.

$$\begin{aligned}
[x_1]_1 &= \{x_1\}, \\
[x_5]_1 &= \{x_5, x_8\}, \\
[x_4]_1 &= \{x_4\}, \\
[x_6]_1 &= \{x_6\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}[x_2]_2 &= \{x_2, x_7, x_{10}\},\\ [x_3]_2 &= \{x_3, x_9\},\\ [x_4]_2 &= \{x_4\}\end{aligned}$$

denklik sınıflarına sahiptir. $x_4 \in U_1 \cap U_2$ için $x_4 \in \{x_4\} = W \subseteq U_1 \cap U_2$ olup

$$R_1 \mid_W = R_2 \mid_W = (x_4, x_4)$$

lokal bağdaşabilirlik şartı sağlanır.
Buna göre, $X = \{x_1, x_5, x_6\}$ kümesinin $U_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_{6,} x_8\}$ kümesi ile elde edilen $(U_1, R_1)$ lokal yaklaşım uzayı için

$$\begin{aligned}\underline{R_1}(X) &= \{x \in U \mid [x]_i \subseteq X, \forall i \in I\} = \{x_1, x_6\},\\ \overline{R_1}(X) &= \{x \in U \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\} = \{x_1, x_5, x_{6,} x_8\}\end{aligned}$$

olur. $X$ bir lokal rough kümedir.

**Teorem 5.2.2.** *$U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde $(U, R_1)$, $(U, R_2)$ lokal yaklaşım uzayları verilsin. $(U, R_1 \cap R_2)$'de lokal yaklaşım uzayıdır [30].*

**İspat.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde $R_1$ ve $R_2$ denklik bağıntıları verildiğinde $R_1 \cap R_2$'de $U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. □

**Tanım 5.2.2.** $(U_i, R_i)$ lokal yaklaşım uzayındaki bir $X$ lokal rough kümesinde yaklaşımın kesinliği; $|X|$, $X \neq \emptyset$ kümesinin eleman sayısı olmak üzere;

$$\mu_{R_i}(X) = \frac{|\underline{R_i}(X)|}{|\overline{R_i}(X)|}$$

şeklindedir.

**Örnek 5.2.2.** Örnek 3.1.1'de ki $U$ kümesi üzerinde $R$ denklik bağıntısı ile denklik sınıfları

$$\begin{aligned} R(x_1) &= [x_1] = \{x_1, x_3, x_9\}, \\ R(x_2) &= [x_2] = \{x_2, x_7, x_{10}\}, \\ R(x_4) &= [x_4] = \{x_4\}, \\ R(x_5) &= [x_5] = \{x_5, x_8\}, \\ R(x_6) &= [x_6] = \{x_6\} \end{aligned}$$

şeklindedır. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ kümesi için

$$\begin{aligned} \underline{R}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\}, \\ \bar{R}(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \\ \bar{R}(X) - \underline{R}(X) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan $X$ bir rough kümedir. $X$ rough kümesinin yaklaşımının kesinliği ise

$$\mu_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\bar{R}(X)|} = \frac{4}{9}$$

olarak elde edilir.

$U_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\} \subseteq U$ kümesi üzerinde $R_i$ lokal denklik bağıntısı ile

| $U_i$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_2$ | 3 | 2 | 1 |
| $x_3$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_4$ | 2 | 2 | 3 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_9$ | 2 | 1 | 3 |
| $x_{10}$ | 3 | 2 | 1 |

tablosu verilsin. Bu tabloya göre elde edilecek denklik sınıfları

$$\begin{aligned} R_i(x_1) &= [x_1]_i = \{x_1, x_3, x_9\}, \\ R_i(x_2) &= [x_2]_i = \{x_2, x_{10}\}, \\ R_i(x_4) &= [x_4]_i = \{x_4\}, \\ R_i(x_5) &= [x_5]_i = \{x_5\} \end{aligned}$$

şeklindedır. Aynı $X$ kümesi için

$$\begin{aligned} \underline{R_i}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}, \\ \overline{R_i}(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\}, \\ \overline{R_i}(X) - \underline{R_i}(X) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan $X$ bir lokal rough kümedir. $X$ lokal rough kümesinin yaklaşımının kesinliği

$$\mu_{R_i}(X) = \frac{|\underline{R_i}(X)|}{|\overline{R_i}(X)|} = \frac{5}{7}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\mu_{R_i}(X) > \mu_R(X)$$

olduğu görülür. $U_j = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\} \subseteq U$ kümesi üzerinde $R_j$ lokal denklik bağıntısı ile verilsin. $X$ kümesi için

$$\begin{aligned} \underline{R_j}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\}, \\ \overline{R_j}(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \\ \overline{R_j}(X) - \underline{R_j}(X) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan $X$ bir lokal rough kümedir. $X$ lokal rough kümesinin yaklaşımının kesinliği

$$\mu_{R_j}(X) = \frac{|\underline{R_j}(X)|}{|\overline{R_j}(X)|} = \frac{4}{9}$$

olarak bulunur. Burada

$$\mu_{R_j}(X) = \mu_R(X)$$

olduğu görülür.

**Sonuç 5.2.1.** Lokal rough kümede yaklaşımın kesinliği, rough kümedeki yaklaşımın kesinliğinden büyük veya eşit olabilir.

## 5.3 Lokal Rough Kümeler İçin Özellikler

$U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin ve $(U,R)$ yaklaşım uzayı olsun. $U = \cup U_i$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i = R \mid U_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U, R_i \subseteq U_i \times U_i$ denklik bağıntısı$\}$ lokal yaklaşım uzayını gösterir.

**Tanım 5.3.1.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin. $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ ve $\mathcal{V} = \{(V_i, S_i) \mid i \in I\}$, $U$ üzerinde iki lokal yaklaşım uzayı ve $U_i, V_i \subseteq U$, $W \subseteq U_i \cap V_i$ için $R_i \mid W \subseteq S_i \mid W$ olduğunda

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow (U_i \mid R_i) \subseteq (V_i \mid S_i),\ U_i \subseteq V_i, \forall i \in I$$

dir. Buradan lokal yaklaşım uzayının doğal sıralamaya sahip olduğu görülür..

**Tanım 5.3.2.** $U$ nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin. $(U,R)$ yaklaşım uzayı ve $U = \cup U_i$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun.

1. $locR = \{(U_i, R\mid_{U_i}) \mid R \subseteq U \times U\}$, $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ yaklaşım uzayı üzerindeki lokal denklik bağıntısıdır.

2. $glob(\mathcal{U}) = \cap\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R)\}$ dir.

**Tanım 5.3.3.** $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun. Eğer $\forall i \in I$ olmak üzere bir $W_i \subseteq U_i$ açık komşuluğu için $R\mid_{W_i} = W_i \times W_i$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına coarsest lokal yaklaşım uzayı denir.

**Tanım 5.3.4.** $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$, $U_i \subseteq U$ üzerinde lokal yaklaşım uzayı olmak üzere

1. $\mathcal{U} \leq loc(glob(\mathcal{U}))$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına coherent lokal yaklaşım uzayı denir.

2. $\mathcal{U} = loc(glob(\mathcal{U}))$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına global olarak coherent lokal yaklaşım uzayı denir.

3. $U$' daki her $W$ açığı için $R \mid W$ coherent ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına total olarak coherent lokal yaklaşım uzayı denir.

**Tanım 5.3.5.** $(U,R)$, $U$ üzerinde bir yaklaşım uzayı olsun.

1. $loc(R)$, coherent lokal yaklaşım uzayı ise $(U,R)$ yaklaşım uzayına lokal olarak coherent yaklaşım uzayı denir.

2. $R = glob(loc(R))$ ise $(U,R)$ yaklaşım uzayına coherent denir.

**Örnek 5.3.1.** Şimdi coherent olan ve coherent olmayan lokal yaklaşım uzaylarına örnek verelim. Örnek 3.1.1'den $U$ nesnelerin kümesinde

$$\begin{aligned}
[x_1]_U &= \{x_1,x_3,x_9\}, \\
[x_2]_U &= \{x_2,x_7,x_{10}\}, \\
[x_4]_U &= \{x_4\}, \\
[x_5]_U &= \{x_5,x_8\}, \\
[x_6]_U &= \{x_6\}
\end{aligned}$$

denklik sınıfları vardır.

$U_1 = \{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$ kümesinin $\mathcal{U} = (U_1, R_1 = R \mid U_1)$ lokal yaklaşım uzayı için

$$glob(\mathcal{U}) = \cap\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R)\} = \cap\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq (U_1, R_1 = R \mid U_1)\}$$

dir. $U$ kümesinin tüm denklik sınıflarının birer elemanını içeren $U_1$ kümesi için ele alındığında

$$glob(\mathcal{U}) = \mathcal{U} = (U_1, R_1 = R \mid U_1)$$

dir. Buradan $\mathcal{U} \leq loc(glob(\mathcal{U}))$ olup, $loc(glob(\mathcal{U}))$, $\mathcal{U}(U_1,R_1)$ kümesinin herhangi bir komşuluğundadır. Sonuç olarak, $\mathcal{U}$ coherenttir.

Diğer taraftan, $U_2 = \{x_1,x_2,x_3\}$ kümesinin $\mathcal{U} = (U_2, R_2 = R \mid U_2)$ lokal yaklaşım uzayı için

$$glob(\mathcal{U}) = \cap\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R)\} = \cap\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq (U_2, R_2 = R \mid U_2)\}$$

dir. Böylece

$$glob(\mathcal{U}) = \mathcal{U} = ((x_1,x_2),(R \mid (x_1,x_2)))$$

dir. Burada $\mathcal{U} \nleq loc(glob(\mathcal{U}))$ olur. Yani $loc(glob(\mathcal{U}))$, $\mathcal{U}(U_2, R_2)$ kümesinin herhangi bir komşuluğunda değildir. Sonuç olarak $\mathcal{U}$ coherent değildir.

**Tanım 5.3.6.** $(U,R)$ yaklaşım uzayı verilsin. Eğer $R$' nin denklik sınıfları $U$'nun bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x] \subseteq U \text{ bağlantılı}$$

ise $(U,R)$ yaklaşım uzayına **bağlantılıdır** denir.

Benzer şekilde $U$' nun $U_i$ açık alt kümeleri için $R \mid U_i = R_i$' nin denklik sınıfları $U$' nun bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x]_i \subseteq U \text{ bağlantılı}$$

ise $(U,R)$ yaklaşım uzayı **lokal bağlantılıdır** veya $(U_i, R_i)$ **lokal yaklaşım uzayı bağlantılıdır** denir.

**Örnek 5.3.2.** $U = \{a,b,c,d,e,f\}$ nesnelerin kümesi $U/R = \{\{b,d,e\},\{a,c,f\}\}$ $U$ üzerindeki $R$ denklik bağıntısına göre $U$'nun bölüm kümesi olsun. $U$ üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, U, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$ ise $(U,R)$ yaklaşım uzayının bağlantılılığını inceleyelim.

$(U,R)$ yaklaşım uzayının bağlantılı olması için $R$ 'nin denklik sınıfları $U$'nun bağlantılı alt kümeleri olmalıdır. $(U,\tau)$ topolojisinde kapalıların kümesi $K = \{X, \emptyset, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,c,e,f\}, \{b,e,f\}, \{a,f\}, \{f\}\}$ olur. $U$ nun denklik sınıflarından $A = \{b,d,e\}$ için

$$\begin{aligned} \tau_A &= \{A \cap U \mid U \in \tau\} = \{\emptyset, A, \{d\}\} \\ \tau_A &= \{A \cap V \mid V \in K\} = \{\emptyset, A, \{b,e\}\} \end{aligned}$$

olup $(A, \tau_A)$ uzayı bağlantılıdır. $U$ nun diğer denklik sınıfı $B = \{a,c,f\}$ için

$$\begin{aligned} \tau_B &= \{B \cap U \mid U \in \tau\} = \{\emptyset, B, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\} \\ \tau_B &= \{B \cap V \mid V \in K\} = \{\emptyset, B, \{c,f\}, \{a,f\}, \{f\}\} \end{aligned}$$

olup $(B, \tau_B)$ uzayı bağlantılıdır. $R$ 'nin denklik sınıfları olan $A$ ve $B$ kümeleri $U$'nun bağlantılı alt kümeleri olduğu için $(U,R)$ yaklaşım uzayı bağlantılıdır.

**Örnek 5.3.3.** $U = \{a,b,c,d,e\}$ nesnelerin sonlu kümesi, $U/R = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$ $U$' nun denklik sınıflarının kümesi ve $X = \{a,c,d\}$ olsun. $R_-(X) = \{c,d\}$ alt yaklaşımı, $R^-(X) = \{a,b,c,d\}$ üst yaklaşımı ve $Bnd(X) = \{a,b\}$ sınır kümesi için $X$' e bağlı $\tau_R = \{U,\emptyset,\{a,b,c,d\},\{c,d\},\{a,b\}\}$ rough topolojisinde $R$'nin denklik sınıfları, $U$' nun bağlantılı altkümeleri olduğu için $(U,R)$ yaklaşım uzayı bağlantılıdır.

Benzer şekilde bu yaklaşım uzayında $U_i = \{a,b,c,d\} \subseteq U$ açığı alınsın. $R \mid U_i = R_i = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$ olur. Buna göre, $R_{i-}(X) = \{c,d\}$, $R_i^-(X) = \{a,b,c,d\}$, $Bnd(X) = \{a,b\}$ olup $X$' e bağlı $\tau_{R_i} = \{U_i,\emptyset,\{c,d\},\{a,b\}\}$ rough topolojisi elde edilir. Burada $R_i$' nin denklik sınıfları, $U_i$' nin bağlantılı alt kümeleri olmadığı için $(U_i,R_i)$ lokal yaklaşım uzayı bağlantılı değildir. Yani yaklaşım uzayı bağlantılı iken lokal yaklaşım uzayı bağlantılı olmayabilir.

**Tanım 5.3.7.** $(U,R)$ yaklaşım uzayı verilsin. Eğer $R$' nin denklik sınıfları $U$'nun yol bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x] \subseteq U \text{yol bağlantılı}$$

ise $(U,R)$ yaklaşım uzayına **yol bağlantılıdır** denir.

Benzer şekilde $U$' nun $U_i$ açık alt kümeleri için $R \mid U_i = R_i$' nin denklik sınıfları $U$' nun yol bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x]_i \subseteq U \text{ yol bağlantılı}$$

ise $(U,R)$ yaklaşım uzayı **lokal yol bağlantılıdır** veya $(U_i,R_i)$ **lokal yaklaşım uzayı yol bağlantılıdır** denir.

**Örnek 5.3.4.** $R$ kümesi üzerinde bağlantılılık veya yol bağlantılılık bağıntılarına göre oluşacak yaklaşım uzayı coherenttir.

**Tanım 5.3.8.** $(U,R)$ yaklaşım uzayı ve $loc(R)$, $(U,R)$ yaklaşım uzayı üzerindeki lokal denklik bağıntısı olsun. $U$' nun $\{V_x\}_{x \in U}$ örtüsü için $\{R \mid V_x\}_{x \in U}$ tarafından oluşturulmuş denklik bağıntısı $R_V \subseteq R$ dir.

**Teorem 5.3.1.** *$R_V$' nin lokal olan denklik sınıfları $R$ nin global denklik sınıflarında alt uzay topolojisine göre hem açık hem kapalıdır.*

**İspat.** $[x]_V$ ve $[x]$ sırasıyla $R_V$' nin lokal olan denklik sınıfları ve $R$' nin global olan denklik sınıfları olsun. $[x]_V \subseteq [x]$ olduğu açıktır. Burada $U$' nun $w_1, w_{2,}..., w_n, a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ elemanları ile $V_{a_1}$ örtüsü için $(V_{a_1}, R \mid V_{a_1})$ lokal yaklaşım uzayında $(y, w_1) \in R \mid V_{a_1}$ denklik bağıntısı, $V_{a_2}$ örtüsü için $(V_{a_2}, R \mid V_{a_2})$ lokal yaklaşım uzayında $(w_1, w_2) \in R \mid V_{a_2}$ denklik bağıntısı,..., $V_{a_{n+1}}$ örtüsü için $(V_{a_{n+1}}, R \mid V_{a_{n+1}})$ lokal yaklaşım uzayında $(w_n, x) \in R \mid V_{a_{n+1}}$ denklik bağıntıları vardır. $V_{a_1} \cap [x]$ için $z \in V_{a_1} \cap [x]$ alınsın. Buradan $(y,x) \in R$ ve $(y,z) \in R \mid V_{a_1}$ olduğundan $(z,x) \in R$ dir. Böylece $(y,z) \in R \mid V$ olup $z \in [x]_V$ dir. Buradan $y \in [x] \cap V_{a_1} \subseteq [x]_V$ olarak bulunur. Böylece $[x]_V$, $[x]$' de açıktır.

Kapalılık için $z \in \overline{[x]}_V$ olsun. $x$' in her $U$ açığı için $(U \cap [x]) \cap [x]_V \neq \emptyset$ dır. $y \in V_x \cap [x]_V$ olarak alınırsa $(x,y) \in R_V$ ve $(z,x) \in R$ olduğundan $(y,z) \in R$ dir. $y,z \in V_z$ olduğundan $(y,z) \in R_V$ dir. Böylece $(x,z) \in R_V$ yani $z \in [x]_V$ dir. Buradan $[x]_V = \overline{[x]}_V$ olur. Bu ise $[x]_V$' nin $[x]$' de kapalılığını verir. □

**Teorem 5.3.2.** *$(U,R)$ yaklaşım uzayı ile $loc(R)$, $(U,R)$ yaklaşım uzayı üzerindeki denklik bağıntısı olsun. $\forall x \in U$ için bir $N_x$ açık komşuluğu için $R \mid N_x$ bağlantılı denklik sınıfları olduğu kabul edilsin. Böylece $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı coherenttir.*

**İspat.** $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı coherent olmazsa sadece bazı $a \in U$ elemanları için $\mathcal{U}_a \leq loc(glob(\mathcal{U}))_a$ olur. Yani $a$' nın herhangi bir $N$ açığı için $\{V_a\}_{a \in U}$ örtüsü var ve $y_1, y_2 \in N$ için $(y_1, y_2) \in R$ iken $(y_1, y_2) \notin R_V$ dir. Bu $N_a$ için de doğrudur. $R \mid N_a$' da $y_1$' in denklik sınıfında, $R_V \mid N_a$ daki $y_1$' in denklik sınıfları kapalı olduğundan bağlantılıdır. Bu ise $(y_1, y_2) \in R$ olmasına ters düşer. □

**Teorem 5.3.3.**

1. *$\mathcal{U}$ global ve total coherent lokal yaklaşım uzayı olduğunu kabul edelim. $V$, $\mathcal{U}$'da açıksa $R \mid V$ global coherenttir.*
2. *$x \in V_x \subseteq U_x$, $\forall x \in X$ için $\mathcal{U} \mid V_x$ total ve global coherent lokal yaklaşım uzayı olacak şekilde $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsü varsa $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayıdır.*

**İspat.** 1. $\mathcal{U} = loc(glob(\mathcal{U}))$ eşitliği mevcuttur. Tanımdan $glob(\mathcal{U} \mid V) \subseteq glob(\mathcal{U}) \mid V$ olur. Buradan

$$loc(glob(\mathcal{U} \mid V)) \leq loc(glob(\mathcal{U}) \mid V) = loc(glob(\mathcal{U})) \mid V = \mathcal{U} \mid V$$

bulunur. $\mathcal{U} \mid V$ coherent lokal yaklaşım uzayı olduğu için $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı total coherent lokal yaklaşım uzayı tanımından $\mathcal{U} \mid V \leq loc(glob(\mathcal{U} \mid V))$ olur.

2. 1' den $X$' de $U$ açık ve $\mathcal{U} \mid V_x$ , $\forall x \in X$ için global coherent lokal yaklaşım uzayı ise $\mathcal{U} \mid U \cap V_x$ global coherent lokal yaklaşım uzayıdır. Böylece

$$\mathcal{U} \mid U \cap V_x = loc(glob(\mathcal{U} \mid U \cap V_x)) \leq loc(glob(\mathcal{U} \mid U)) \mid V_x$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{U} \mid U \leq loc(glob(\mathcal{U} \mid U))$ olur. $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayıdır. □

**Teorem 5.3.4.** *$(U,R)$ yaklaşım uzayı bağlantılı olsun. Bu taktirde $R = glob(loc(R))$ dir. Tersine $R$ kapalı denklik sınıflarına sahip ve $R = glob(loc(R))$ ise, $(U,R)$ bağlantılı yaklaşım uzayıdır.*

**İspat.** $\{V_a\}_{a \in U}$, $U$' nun herhangi bir açık örtüsü olsun. $R$' de $\{R \mid V_a\}_{a \in U}$ tarafından oluşturulan $R_V$ lokal denklik bağıntısı kapalı ve bağlantılıdır. Buradan $R_V = R$ dir. Böylece

$$R = glob(loc(R))$$

olarak bulunur.

Tersine eğer $R = glob(loc(R))$ ise her $V$ örtüsü için $R_V = R$ dir. $[a]$ denklik sınıfı nda bağlantılı olmayan $a \in U$ elemanı ele alınsın. $U$ ve $V$ açıkları $[a]$ denklik sınıfını böler. $[a]$ kapalı olduğundan $U - [a]$ açıktır. $U,V$ ve $U - [a]$ açıkları için $a_1 \in U \cap [a]$ ve $a_2 \in V \cap [a]$ olmak üzere $a_1, a_2 \in [a]$ elemanlarını seçelim. $(a_1, a_2) \in R$ olur. Fakat

$$(U \cap [a]) \cup (V \cap [a]) = [a]$$

olduğundan $(a_1, a_2) \notin R_V$ dir. Buradan $R_V \subsetneq R$ olup $glob(loc(R)) \subsetneq R$ elde edilir. Bu ise kabule ters düşer. □

**Teorem 5.3.5.** *Eğer $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayı ise bağlantılı denklik sınıfları ile denklik bağıntıları tarafından lokal olarak tanımlanabilir.*

**İspat.** Eğer $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayı ise $U_x$ örtüsü için $(U_x, \mathcal{U} \mid U_x)$ lokal yaklaşım uzayında $\mathcal{U} \mid U_x$ denklik bağıntısı vardır ve $\mathcal{U} \mid U\ _x = loc(glob(\mathcal{U} \mid U_x))$ dir. $\mathcal{U}$ total coherent lokal denklik bağıntısı olması $\mathcal{U} \mid U$ coherent lokal denklik bağıntısı olmasını sağlar. Böylece bağlantılı denklik sınıfları vardır. □

## 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Kuroki ve Wang tarafından verilen rough altgrup kavramı ele alınarak, bir grupoid üzerindeki normal altgrupoide göre rough (normal) altgrupoid tanımlandı. Ayrıca Pawlak tarafından verilen rough (yaklaşım) uzayı, Grothendieck ve Verdier tarafından verilen ve Rosenthal tarafından geliştirilen lokal denklik bağıntısı kavramları yardımıyla lokal yaklaşım uzayı, lokal rough küme ve lokal bağlantılılık kavramları elde edildi.

Bölüm 4' te, her rough alt grubun tek nesneli bir rough altgrupoid olduğu gösterildi. Bir grupoid üzerinde N normal altgrupoidine göre verilen bir kümenin alt ve üst yaklaşımları bulunarak grupoid üzerinde verilen kümenin rough kümesi elde edildi ve örneklerle gösterildi. Bu alt ve üst yaklaşımların sağladığı özellikler teoremlerle verildi. Oluşan rough küme için alt ve üst yaklaşımlar grupoidin (normal) altgrupoidi ise verilen kümeye grupoidin rough (normal) altgrupoidi denildi.

Bölüm 5' te, nesnelerin sonlu kümesi üzerinde denklik bağıntısı ile lokal yaklaşım uzayı tanımlandı. Herhangi bir kümeden, lokal yaklaşım uzayında lokal alt yaklaşım ve lokal üst yaklaşım elde edilerek, lokal rough küme kavramı oluşturuldu ve lokal rough kümenin sağladığı özellikler verildi. Lokal rough küme örnekle gösterilerek lokal rough kümede yaklaşımın kesinliğinin, rough kümedeki yaklaşımın kesinliğinden daha büyük olduğu görüldü. Bunlara ek olarak, coherent yaklaşım uzayı ve lokal bağlantılılık kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili teoremler verildi.

## KAYNAKLAR


[1] Pawlak, Z. (1982). Rough sets, *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, **11**, 341-356.

[2] Biswas, R., Nanda,S. (1994). Rough groups and rough subgroups, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, **42**, 251-254.

[3] Kuroki, N., Wang, P.P. (1996). The lower and upper approximations in a fuzzy group, *Inform. Sci.*, **90**, 203-220.

[4] Erdoğan, F. (2006). *The Relationship between fuzzy rough sets and rings*, M.Sc.Thesis, Gaziosmanpaşa University, Tokat, Turkey.

[5] Grothendieck, A., Verdier,T.L. (1972). Theorie des topos, Lectures Notes Maths, *Springer*.

[6] Blyth, T.S. (1986). *Categories*, University of st. Andrews, Scotland.

[7] Maclane, S. (1971). Categories for the working mathematicians, graduate texts in mathematics, **5**, *Springer*, Verlag, Berlin.

[8] Pontrjagin, L. (1946). *Topological Groups*, Princeton University Press.

[9] Gürsoy, M.H. (2002). *Topolojik 2-Grupoidler*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.

[10] Ertan, H.T. (2008). *Grupoidler ve Demetler*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.

[11] Higgins, P.J. (1971). Categories and Groupoids, *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No. **7**, pp. 1-195.

[12] Brandt, H. (1927). Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Mathematische Annalen*, **96**, 360-366

[13] Brown, R. (2006). *Topology and Groupoids*, Book surge LLC, U.K.

[14] Brown, R. (1988). *Topology: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Ellis, Horwood Chichester.

[15] İçen, İ. (1989). *Demetler Üzerine*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.

[16] İçen, İ. (1996). *Sheaves, local subgroupoids and holonomy groupoids*, University of Wales report.

[17] Bredon, G.E. (1976). *Sheaf Theory*, Mc Graw-Hill Book Company.

[18] Mucuk, O. (1993). *Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid*, PhD Thesis, University of Wales, England.

[19] Baker, A. (2001). *Profinite groupoids and their cohomology*, Glasgow University Mathematics Department Preprint **99**, 33.

[20] Tennison, B.R. (1975). *Sheaf Theory*, Cambridge University Press.

[21] Maclane, S., Moerdijk, I. (1991). Sheaves in Geometry and Logic, *Springer Verlag*.

[22] Rosenthal, K. (1984). Sheaves and Local Equivalence Relations, *Cah. Geom. Diff. Cat.*.

[23] Rosenthal, K. (1982). Local Equivalence Relations, *Top. and ıts App.*, **13**, 167-176.

[24] Suraj, Z. (2004). An Introduction to Rough Set Theory and Its Application, Cairo, Egypt, *ICENCO'2004*, December, 27-30.

[25] Liang, X., Li, D. (2009). On Rough Subgroup of a Group, *Formalized Mathematics*, **17** , 213-217.

[26] Aktaş, H., Çağman, N. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler, Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, *Journal of Arts and Sciences*, Mayıs, 13-25.

[27] Thivagar, M.L., Richard, C., Paul, N.R. (2012). Mathematical Innovations of a modern topology in medical events, *International Journal of Information Science*, **2**, 33-36.

[28] Cheng, W., Mo, Z.W., Wang, J. (2007). Notes on ”the lower and upper approximations in a fuzzy group” and ”rough ideals in semigroups”, *Information Sciences*, **177**, 5134-5140.

[29] Miao, D., Han, S., Li, D. and Sun, L. (2005). Rough group, rough subgroup and their properties, D. Slezak et al., *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, 104-113.

[30] Yıldız, C. (2005). *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Hatice TAŞBOZAN

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Bursa/ 22.07.1985

**Adres:** Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü HATAY

**E-Posta:** htasbozan@mku.edu.tr

**Lisans:** 2004-2008 İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

**Yüksek Lisans:** 2008-2011 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı

**Doktora:** 2011-2017 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı

**Mesleki Deneyim:**

2009-2014 İnönü Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

2014-Halen Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi

**Yayın Listesi**

**1. H. Taşbozan**, İ. İçen, A.F. Özcan, N. Bağırmaz, Near Soft Set and Near Soft Topology, Filomat(Kabul Edildi).

**Ulusal Bildiriler:**

**1. H. Başbuğ**, İ. İçen, Local Equivalence Relation, XIII. Geometri Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 29 Nisan-2 Mayıs, 2010.

**Uluslararası Bildiriler:**

**1.** A.F. Özcan, **H. Taşbozan**, N. Bağırmaz, İ. İçen, Near Soft Set and Near Soft Topology, Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, August 26-29, 2013.

**2.** A.F. Özcan, **H. Taşbozan**, N. Bağırmaz, İ. İçen, Topologies and Approximation Operators Induced by Binary Relation, Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, August 26-29, 2013.