T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA BAZI DİZİ UZAYLARININ KOPYALARI ÜZERİNE

Ramazan KAMA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan 2017

Tezin Başlığı: Banach Uzaylarında Bazı Dizi Uzaylarının Kopyaları Üzerine

Tezi Hazırlayan: Ramazan KAMA

Sınav Tarihi: 24.04.2017

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri:

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Bilal ALTAY**
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Mikail ET
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Ahmet YILDIZ
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Banach Uzaylarında Bazı Dizi Uzaylarının Kopyaları Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ramazan KAMA

ÖZET

Doktora Tezi

BANACH UZAYLARINDA BAZI DİZİ UZAYLARININ KOPYALARI ÜZERİNE

Ramazan KAMA

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

76+v sayfa

2017

Danışman: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümünde, konunun literatürdeki önemi ve tarihsel gelişiminden söz edilmiştir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde yararlanılacak olan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bu çalışmanın alt yapısını oluşturan tamamlayıcı altuzaylar, izdüşümler, bazlar, temel diziler ve serilerin yakınsaklığı konuları detaylı olarak incelenmiştir. c_0 uzayının kopyasını ve tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonu verilmiştir. Son iki kısımda ise bir önceki kısımda yapılan karakterizasyonun bir uygulaması olarak vektör değerli Banach uzaylarındaki çalışmalara yer verilmiştir.

Tezin orijinal olan sonuçları dördüncü ve beşinci bölümlerde verilmiştir.

Dördüncü bölümde, cs yakınsak dizilerin uzayını içeren Banach uzaylarının bir karakterizasyonu çalışılmıştır.

Son bölümde ise bir X normlu uzayındaki bir dizi ve ℓ_∞, c_0 uzaylarının Cesàro etki alanları kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonra bu dizi uzayları ve X uzayındaki zayıf ve zayıf* şartsız Cauchy serileri yardımıyla X uzayının tamlığı ve barrelledliği karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Banach uzayı, Dizi uzayı, Kopya, Tamamlayıcı kopya, Temel dizi, Şartsız yakınsak seriler, Zayıf şartsız Cauchy serileri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON COPY OF SOME SEQUENCE SPACES IN BANACH SPACES

Ramazan KAMA

İnönü University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

76+v pages

2017

Supervisor: Prof. Dr. Bilal ALTAY

This thesis consists of five chapters. In the first chapter of the thesis, it is mentioned about the importance in the literature and historical development of the subject.

In the second chapter, basic concepts and theorems to be used in other chapter have been given.

In the third chapter, complemented subspaces, projections, bases, basic sequences and convergence of the series that constitute the sub-structure of this work have been examined in detail. The characterization of the Banach spaces including the copy and complemented copy of the space c_0 have been given. In the last two parts, the works in vector valued Banach spaces as an application of the characterization obtained in the previous part have been given.

The original results of the thesis have been given in the fourth and fifth chapters.

In the fourth chapter, a characterization of Banach spaces containing the cs space have been studied.

In the last chapter, by using a sequence in a normed space X and matrix domain of Cesàro summability method in ℓ_∞ and c_0 some new sequence spaces have been introduced. Later, the completeness and barrelledness of normed space X through its weakly and weakly* unconditionally Cauchy series have been characterized.

KEYWORDS: Banach space, Sequence space, Copy, Complemented copy, Basic sequence, Unconditionally convergent series, Weakly unconditionally Cauchy series.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya cesaretlendirerek, bilgi ve tecrübesiyle çalışmalarımın her aşamasında maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen, düşünceleri ve kişiliğiyle bana ilham veren değerli hocam Prof. Dr. Bilal ALTAY'a, değerli bilgileriyle bana yardımcı olan hocalarım Prof. Dr. Ahmet YILDIZ ve Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN'a, çalışmalarım sırasında bana sabır gösterip destek veren eşim Şenay KAMA'ya, yeşil şeker karşılığında çalışmama izin veren sevgili kızım Eflin Berra'ya ve en değerli varlığım olan aileme teşekürlerimi bir borç bilirim.

Ramazan KAMA

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER ve KISALTMALAR v
1 GİRİŞ 1
2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER 4
2.1 Temel Kavramlar 4
2.2 Ölçüm Uzayları 13
3 TAMAMLAYICI ALTUZAYLAR ve SERİLER 19
3.1 Tamamlayıcı Altuzaylar 19
3.2 Bazlar ve Temel Diziler 22
3.3 Serilerin Yakınsaklığı 31
3.4 c_0 Uzayını İçeren Banach Uzayları 39
3.5 $L_p(\mu, X)$ Uzayı Üzerinde c_0 Uzayının Tamamlayıcı Kopyası 47
3.6 $C(K, X)$ Uzayı Üzerinde c_0 Uzayının Tamamlayıcı Kopyası 49
4 cs UZAYINI İÇEREN BANACH UZAYLARI 51
4.1 Giriş 51
4.2 cs Uzayının Kopyasının Karakterizasyonu 54
5 c_0 UZAYININ KOPYASINI İÇEREN NORMLU UZAYLARIN TAMLIĞI ve BARELLEDLİĞİ 62
5.1 Giriş 62
5.2 $SC(x)$ Uzayı Yardımıyla Tamlık 63
5.3 $SC_w(x)$ Uzayı Yardımıyla Tamlık 65
5.4 $SC_{w^*}(x^*)$ Uzayı Yardımıyla Barelledlik 67
KAYNAKLAR 69
ÖZGEÇMİŞ 76

SİMGELER ve KISALTMALAR

B_X	:	X uzayının kapalı birim yuvarı,
c	:	Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı,
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,
c_{00}	:	Sonlu sayıda terimi hariç geriye kalan bütün terimleri sıfır olan dizilerin uzayı,
cs	:	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı,
CM	:	M kümesinin tümleyeni,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi,
$\dim X$	:	X uzayının boyutu
$D(T)$	:	T operatörünün tanım kümesi,
$G(T)$	:	T operatörünün grafiği,
$\lvert\mathbb{J}\rvert$	:	$\mathbb{J}$ kümesinin kardinalitesi
l_p	:	p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı,
l_∞	:	Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı,
$M+N$	:	M ve N kümelerinin toplamı,
$M \oplus N$	:	M ve N kümelerinin direkt toplamı,
$\overline{M}$	:	M kümesinin kapanışı,
$N(T)$	:	T operatörünün çekirdeği,
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi,
$R(T)$	:	T operatörünün değer kümesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi,
$\operatorname{sgn} z$	:	z kompleks sayısının işaret fonksiyonu
S_X	:	X uzayının birim küresi,
$T(X)$	:	X üzerinde tanımlı olan bir T operatörünün görüntüsü,
$T\|_E$	:	T operatörünün E kümesine kısıtlanışı,
T^*	:	T operatörünün adjoint operatörü,
T^{-1}	:	T operatörünün tersi,
$[x_n]$	:	(x_n) dizisinin gerdiği kapalı lineer uzay,
$X \times Y$	:	X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı,
X^*	:	X uzayının sürekli duali,
X^{**}	:	X uzayının 2-inci duali,
w	:	Kompleks terimli bütün dizilerin uzayı,
λ_A	:	A matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı,

1 GİRİŞ

Klasik Banach uzayı teorisi, Banach'ın 1932'de basılan kitabı [1] ve Lvov'da açtığı okulundaki çalışmaları sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu teori, kitaptaki Banach uzaylarının yapısı üzerine olan soruları cevaplamak amacıyla sürdürülen araştırmalar yardımıyla geliştirilmiştir. Bu konu üzerine yapılan araştırmaların altın çağı, 1950 ile sırasıyla 1977 ve 1979 yıllarında Lindenstrauss ve Tzafriri'nin kitaplarının [2, 3] basımına kadar geçen süre olarak kabul edilebilir. Hâlâ bir çok araştırmacının aktif şekilde çalıştığı bu konu hakkındaki temel eserler bahsedilen zaman aralığında bilim camiasına sunulmuştur.

Bu çalışmalar arasında bir Banach uzayının herhangi bir dizi uzayının kopyasını ya da tamamlayıcı kopyasını içerip içermediğinin karakterizasyonu önemli bir yer tutar. Bu amaç doğrultusunda Taylor [4], c uzayının c_0 uzayı üzerine izdüşümü mevcutsa, bu izdüşümün normunun 2'ye denk ya da 2'den daha büyük olması gerektiğini belirtmiştir. Daha sonra Phillips [5], ℓ_∞ uzayının genişleme (injective uzay) özelliğine sahip olduğunu göstererek ℓ_∞ uzayının c uzayı üzerine izdüşümünün olmadığı sonucunu elde etmiştir.

Sobczyk [6], Taylor'ın yukarıda verdiğimiz sonucuna ek olarak c uzayının c_0 uzayı üzerine izdüşümü mevcutsa, bu izdüşümün normunun 2'ye denk ya da 2'den daha küçük olduğunu göstererek, c uzayının c_0 uzayı üzerine normu tam olarak 2 olan izdüşümünün var olduğunu göstermiş ve daha sonra *"Sobczyk Teoremi"* olarak bilinecek olan c_0 uzayının ayrılabilir injective uzay olduğunu kanıtlayarak bu alana çok büyük bir katkıda bulunmuştur. Ayrıca Sobczyk, Phillips'in bulduğu sonuçtan faydalanarak ℓ_∞ uzayının c_0 uzayı üzerine izdüşümünün olmadığını elde etmiş ve bunun sebebinin ℓ_∞ uzayının ayrılabilir olmamasından kaynaklandığı sonucuna varmıştır.

McWilliams [7] ise ℓ_∞ uzayının ayrılabilir altuzaylarının c üzerine izdüşümünün mevcut ve normunun 3'e denk olduğunu göstermiştir.

İlk olarak Bessage ve Pelczynski [8], c_0 uzayını içeren Banach uzaylarının temel karekterizasyonunu, zayıf şartsız Cauchy serileri ve temel dizileri kullanarak vermiştir. Daha sonra Pelczynski [9], c_0 ve ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzaylarının tamamlayıcı sonsuz boyutlu altuzaylarının bu uzaylara izomorfik olduğunu ispatlayarak Banach uzay teorisinin gelişimine büyük bir katkı sağlamıştır.

Vektör değerli fonksiyonların Banach uzayları üzerine olan çalışmalar, Banach'ın kitabından kısa süre sonra Birkhoff [10, 11], Boas [12], Bochner [13, 14], Clarkson [15, 16], Day [17, 18], Dunford [19, 20], Gelfand [21], Pettis [22, 23], Phillips [5, 24]'in de içinde bulunduğu matematikçilerin klasik çalışmaları ile başlamış ve Grothendieck [25, 26], Dinculeanu [27, 28], Diestel ve Uhl [29], Kwapien [30], Maurey [31, 32], Pisier [33], Bourgain [34, 35, 36], Talagrand [37, 38] ve daha bir çok yazarın çabalarıyla günümüze kadar gelişmine devam etmiştir. Buna karşın vektör değerli fonksiyon uzaylarındaki c_0 ve l_1 uzaylarının kopyalarının araştırılmasındaki başlangıç noktası olarak, 70'li yıllardaki Hoffmann-Jorgensen [39], Kwapien [30] ve Pisier'in [33] çalışmaları olduğu söylenebilir.

Kwapien [30], $(1 \leq p < \infty)$ için $L^p(\mu, X)$ uzayının c_0 uzayının kopyasını içermesi için gerek ve yeter şartın X uzayının c_0'ın kopyasını ihtiva etmesi gerektiği önermesini ispatlamıştır. Pisier [33] ise, $(1 < p < \infty)$ için $L^p(\mu, X)$, l_1 uzayının bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şartın X uzayının l_1 uzayının kopyasını içermesi gerektiği ifadesinin doğruluğunu göstermiştir.

Rosenthal [40], l_1 uzayını içeren Banach uzaylarının bir karekterizasyonunu vermiştir. Bu karakterizasyon literatürde *"Rosenthal l_1 teoremi"* olarak geçmektedir. Kalton [41], c_0 ve l_∞ uzaylarının sınırlı-lineer operatörler ve kompakt operatörler uzayına gömülebilirliğini tartışmıştır.

E. ve P. Saab [42], "$C(K, X)$ uzayının l_1 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şart X uzayı l_1 uzayının tamamlayıcı kopyasını içerir" önermesinin geçerli olduğunu göstermiştir. Daha sonra Cembranos [43], K ve X sonsuz boyutlu ise $C(K, X)$ uzayının c_0 uzayına izomorfik olan tamamlayıcı bir altuzayı içerdiğini ispatlamıştır.

Ronglu [44], c_0 uzayının kopyasını içermeyen Banach uzaylarının bir karakterizasyonunu operatörler yardımıyla vermiştir.

Emmanuele [45] de, X uzayı c_0 uzayının bir kopyasını içeren bir Banach uzayı ise Lebesgue-Bochner integrallenebilen fonksiyonların $L^p([0, 1], X)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayının c_0'ın bir tamamlayıcı kopyasını içerdiğini göstermiştir.

Dowling [46] çalışmasında, X'i kompleks bir Banach uzayı, kompleks düzleminin birim çemberini T ve birim açık diskini D alıp, D üzerindeki X-değerli bütün analitik fonksiyonların kümesini $H^p(D, X)$ ve

$$H^p(T, X) = \{f \in L^p(T, X) : \hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^-\}$$

olarak tanımlayıp, "X uzayı c_0 uzayının bir kopyasını içerir ise $H^p(T, X)$ uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir" önermesinin geçerli; fakat bu sonucun $H^p(D, X)$ için geçerli olmadığını, $H^p(D, \ell_\infty)$ örneğini vererek göstermiştir.

Drewnowski [47], $C(K, X)$ uzayının l_∞'un bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şartın $C(K)$ uzayının ya da X uzayının l_∞'un bir kopyasını içermesi gerektiğini göstermiştir. Diğer taraftan, Mendoza [48] ise, "$(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere, $L_p(\mu, X)$ uzayının l_∞'un bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şart X uzayı l_∞ uzayının bir kopyasını içerir" önermesinin doğruluğunu göstermiştir.

Leung-Rabiger [49], "(Ω, Σ, μ) σ-sonlu tamamen atomik bir ölçüm uzayı olmak üzere, $L_\infty(\mu, X)$ uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şart X uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir" ifadesini ispatlamıştır.

Aynı zamanda Mendoza [50], $(1 < p < \infty)$ için $L_p(\mu, X)$ uzayının l_1'in tamamlayıcı bir kopyasını içermesi için X uzayının l_1'in tamamlayıcı bir kopyasını içermesi gerektiğini göstermiştir. Bombal [51] ise, "(Ω, Σ, μ) tamamen atomik bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $L_p(\mu, X)$ uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içermesi için gerek ve yeter şart X uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir" önermesini ispatlamıştır.

Ronglu ve Qingying [52], c_0 uzayının kopyasını içermeyen tam yerel konveks bir X uzayındaki her zayıf şartsız Cauchy serisinin şartsız yakınsak olduğunu ve c_0'dan X uzayına olan her sürekli ve lineer operatörün kompakt olduğunu göstermiştir.

Diaz [53], "(Ω, Σ, μ) σ-sonlu bir ölçüm uzayı olmak üzere, $L_\infty(\mu, X)$ uzayı c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerirse, X uzayı da c_0 uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir" ifadesini ispatlamıştır.

Ronglu ve Cho [54], yerel konveks uzaylarda zayıf şartsız Cauchy serilerinin karakterizasyonunu yapmıştır. Junde ve Ronglu [55] ise yerel konveks uzaylardaki şartsız yakınsak serilerin bir karakterizasyonunu vermiş ve bir X barel uzayının c_0'ın kopyasını içermemesi durumunda denk olduğu şartları elde etmiştir.

Ferrando [56, 57], bazı vektör değerli fonksiyonların Banach uzayında c_0 uzayının kopyası ve tamamlayıcı kopyası üzerine olan yeni sonuçlar ortaya çıkarmıştır.

Aizpuru ve Fernández [58], bazı yeni dizi uzayları tanımlayarak, bir X Banach uzayının c_0'ın kopyasını içermesi durumunda şartlı yakınsak ve zayıf şartsız Cauchy serilerinin yeni bir karakterizasyonunu elde etmiştir. Aynı zamanda bu iki bilim adamı [59, 60], bu yeni dizi uzaylarının yardımıyla bir normlu uzayın tamlığını ve barrelledliğini karakterize etmiştir. Aizpuru ve arkadaşları [61, 62], Cesàro ve hemen-hemen yakınsaklık yardımıyla şartsız yakınsak ve zayıf şartsız Cauchy serilerinin yeni bir karakterizasyonunu yapmıştır.

Bu doktora tezinde, cs yakınsak dizilerin uzayının kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonu ve tanımlanan bazı yeni dizi uzayları yardımıyla c_0 uzayının kopyasını içeren bir X normlu uzayındaki zayıf ve zayıf* şartsız Cauchy serileri kullanılarak, X uzayının tamlığının ve barelledliğinin bir karakterizasyonunun yapılması amaçlanmaktadır.

2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde yararlanılacak olan temel kavramlar ve teoremler verilecektir. Vektör uzayı, topolojik uzay, normlu uzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [63] (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_0$ olan bütün $n, m \in \mathbb{N}$'ler için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.2. [63] (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.3. [63] Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayının bir elemanına yakınsıyorsa, bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. X bir normlu uzay olmak üzere,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı,

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

kümesine ise X uzayının birim küresi denir.

Tanım 2.1.4. [63] X ve Y, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı normlu uzaylar olsun. Bu durumda $T : X \to Y$ fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa, bir lineer dönüşüm ya da bir lineer operatör adını alır. X uzayından Y uzayına olan bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [63] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olmak üzere, $T : X \to \mathbb{K}$ lineer bir operatör ise T operatörüne X uzayında lineer fonksiyonel denir. Yani lineer bir fonkiyonel reel veya kompleks değerli lineer operatördür.

Tanım 2.1.6. [63] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. X uzayında tanımlı bütün lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X, \mathbb{K})$ uzayına X uzayının cebirsel duali denir ve $X^\dagger$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. [64] $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

kümesine T operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir.

Tanım 2.1.8. [63] X ve Y, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir M sayısı mevcut ise T operatörüne sınırlı-lineer operatör denir. X uzayından Y uzayına olan bütün sınırlı-lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ gösterilir. Özel olarak, $X = Y$ ise $B(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. [65] $T : X \to Y$ sınırlı-lineer bir operatör olsun.

$$\|T\| = inf\{M > 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük M sayısına T operatörünün normu denir. Bu tanıma denk olarak, sınırlı-lineer bir T operatörünün normu,

$$\|T\| = \sup_{x \neq \emptyset} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad x \in X$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.10. *[66] X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer, $\|T\| \leq 1$ ise $(I - T)$ opeartörünün $(I - T)^{-1} \in B(X)$ tersi mevcut ve*

$$\begin{aligned} \|(I - T)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|T\|} \\ \|I - (I - T)^{-1}\| &\leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.11. [63] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. X uzayında tanımlı bütün sınırlı-lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, \mathbb{K})$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. [65] X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Her $f \in X^*$ ve her $x \in X$ için

$$(T^* f)(x) = f(Tx)$$

şeklinde tanımlı T^* operatörüne T operatörünün adjoint operatörü denir ve adjoint operatör X^* uzayında sınırlı-lineer bir operatördür.

Tanım 2.1.13. [66] (X,d) bir metrik uzay ve $M,N \subset X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in M$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in N$ varsa, N'ye M kümesinin X uzayı içindeki $\varepsilon-$neti denir. Eğer, N kümesi sonlu ise N'ye M kümesinin sonlu bir $\varepsilon-$neti denir.

Tanım 2.1.14. [63] (X,d) metrik uzayının bir M alt kümesinin, her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir $\varepsilon-$neti varsa, M kümesine total sınırlıdır denir.

Tanım 2.1.15. [67] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M üzerindeki her dizinin limiti M'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa M kümesine X'de kompakt bir küme denir.

Tanım 2.1.16. [68] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer, M kümesinin kapanışı olan $\overline{M}$ kompakt ise M'ye X uzayında ön kompakt küme denir.

Tanım 2.1.17. [68] X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, T opeartörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine götürüyorsa, T'ye kompakt (veya tamamen sürekli) lineer operatör denir. X uzayından Y uzayına olan bütün kompakt lineer operatörlerin kümesi $K(X,Y)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.18. *[68] X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) T operatörü kompakttır.

(ii) $T(B_X)$, Y uzayının ön kompakt bir alt kümesidir.

(iii) B, X uzayının sınırlı bir alt kümesi ise $T(B)$ kümesi Y uzayının total sınırlı bir alt kümesidir.

(iv) X uzayındaki her sınırlı (x_n) dizisinin (Tx_{n_j}) yakınsak olacak şekilde bir (x_{n_j}) alt dizisi mevcuttur.

Teorem 2.1.19. *[66] X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. X veya Y uzayı sonlu ise $K(X,Y) = B(X,Y)$ olur.*

Teorem 2.1.20. *[64] Bir normlu uzayın kapalı birim yuvarının kompakt olması için gerek ve yeter şart uzayın sonlu boyutlu olmasıdır.*

Tanım 2.1.21. [67] X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. $\dim T(X) < \infty$ ise T operatörüne sonlu boyutlu operatör ya da sonlu ranklı operatör denir.

Teorem 2.1.22. *[67] X normlu uzayından Y Banach uzayına tanımlı (T_n) kompakt lineer operatörlerin dizisi bir T operatörüne düzgün yakınsak ise T operatörü kompakttır.*

Tanım 2.1.23. [68] X, Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir zayıf ön kompakt kümesine götürüyorsa, T'ye zayıf kompakt lineer operatör denir.

Önerme 2.1.24. *[68] Herhangi bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına olan her kompakt lineer operatör zayıf kompakttır.*

Tanım 2.1.25. [69] X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü bire bir ve hem T hem de T^{-1} sürekli ise $T : X \to Y$ bir izomorfizm (izomorfizma) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.26. [70] T, X Banach uzayından Y Banach uzayı içine sınırlı bir operatör olsun. Her $E \subset X$ sonsuz boyutlu altuzayı için $T : E \to T(E)$ izomorfizm olmuyorsa, T operatörüne kesin singüler operatör denir.

Tanım 2.1.27. [67] X ve Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün grafiği

$$G(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$$

$X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T'ye kapalı lineer bir operatör denir.

Teorem 2.1.28. *[67] X, Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(T)$ olmak üzere, $x_n \to x$ ve $Tx_n \to y$ iken, $x \in D(T)$ ve $Tx = y$ olmasıdır.*

Tanım 2.1.29. [67] X, Y metrik uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ bir dönüşüm olsun. $D(T)$ üzerindeki her açık kümenin T altındaki görüntüsü Y'de açık ise T'ye açık bir dönüşüm denir.

Teorem 2.1.30. *[64, Hahn-Banach Teoremi] X bir reel vektör uzayı ve $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

(i) Her $x, y \in X$ vektörü için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

(ii) Her $x \in X$ vektörü ve $t \geq 0$ sayısı için $p(tx) = tp(x)$

koşullarını sağlasın. Bir $M \subset X$ altuzayı üzerinde tanımlanmış reel değerli bir f lineer fonksiyoneli her $x \in M$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın. f fonksiyonelinin her $x \in X$ için $F(x) \leq p(x)$ eşitsizliği ile her $x \in M$ için $F(x) = f(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir F lineer genişlemesi vardır.

Teorem 2.1.31. *[67, Düzgün Sınırlılık Prensibi] X bir Banach uzayı, Y bir normlu uzay ve $T_n : X \to Y$ sınırlı-lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (T_n) dizisi ve her $x \in X$ için, c_x bir reel sayı olmak üzere,*

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, $(\|T_n\|)$ normlarından oluşan dizi sınırlıdır, yani

$$\|T_n\| \leq c \quad n = 1, 2, \ldots$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır.

Teorem 2.1.32. *[67, Açık Dönüşüm Teoremi, Ters Sınırlılık Teoremi] X ve Y Banach uzayları olmak üzere, $T : X \to Y$ sınırlı-lineer bir operatör ise T bir açık dönüşümdür. Buradan T bire-bir ve örten bir operatör ise T^{-1} sürekli olur.*

Teorem 2.1.33. *[67, Kapalı Grafik Teoremi] X ve Y Banach uzayları ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ kapalı-lineer bir operatör olsun. Eğer, $D(T)$ kümesi X uzayında kapalı ise T operatörü sınırlıdır.*

Tanım 2.1.34. [69] X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|x - y\|_X$$

oluyorsa $T : X \to Y$ bir izometridir denir. T dönüşümünün lineer olması durumunda her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

eşitliğinin sağlanması T'nin izometri olması için yeterlidir.

Önerme 2.1.35. *[68] T, X normlu uzayından Y normlu uzayına bir lineer operatör olsun.*

(i) T'nin bir izomorfizma olması için gerek ve yeter şart

$$s\|x\| \leq \|Tx\| \leq t\|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan s ve t pozitif sabitlerinin mevcut olmasıdır.

(ii) T bir izometrik izomorfizma ise T bir izomorfizmadır.

(iii) X bir Banach uzayı ve T bir izomorfizma ise $T(X)$ Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.36. [66] (x_n), X normlu uzayında herhangi bir dizi olsun. Her $x^* \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına zayıf yakınsar denir.

Tanım 2.1.37. [66] X normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$\{x^*(x) : x \in M\}$$

sayı kümesi sınırlı ise M kümesine zayıf sınırlı küme denir.

Teorem 2.1.38. *[66] X bir normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. M kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart zayıf sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.1.39. [70, 66] X bir normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$(x^*(x_n))$$

bir Cauchy dizisi ise (x_n) dizisine X uzayında zayıf Cauchy denir.

Tanım 2.1.40. [66] Normlu bir X uzayındaki her zayıf Cauchy dizisi, X uzayında zayıf yakınsak ise X'e zayıf tamdır denir.

Tanım 2.1.41. [71] (x_n^*), X^* normlu uzayındaki sınırlı-lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

olacak şekilde bir $x^* \in X^*$ fonksiyoneli varsa, (x_n^*) dizisi x^* fonksiyoneline zayıf* yakınsar denir.

Tanım 2.1.42. [68] X bir normlu uzay ve $M \subset X^*$ olsun. Her $x \in X$ için

$$\{x^*(x) : x^* \in M\}$$

kümesi $\mathbb{K}$ üzerinde sınırlı ise M'ye zayıf* sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.43. [68] X bir normlu uzay, $M \subset X$ ve $N \subset X^*$ olsun.

$$\begin{aligned} M^{\perp} &= \{x^* : x^* \in X^*, \text{ her bir } x \in M \text{ için } x^*(x) = 0\}, \\ {}^{\perp}N &= \{x : x \in X, \text{ her bir } x^* \in N \text{ için } x^*(x) = 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $M^{\perp}$ kümesine X^* uzayında M'nin sıfırlayıcısı (annihilator) ve ${}^{\perp}N$ kümesine X uzayında N'nin sıfırlayıcısı (annihilator) denir.

Tanım 2.1.44. [72] X bir vektör uzayı olmak üzere, $0 \leq t \leq 1$ için $tC+(1-t)C \subset C$ oluyorsa, $C \subset X$'e konveks küme denir.

Tanım 2.1.45. [73] Her $x \in X$ ve $|t| < \varepsilon_x$ için $tx \in A$ olacak şekilde $\varepsilon_x > 0$ varsa, $A \subset X$'e emici küme denir.

Tanım 2.1.46. [72] $|\alpha| \leq 1$ için $\alpha B \subset B$ oluyorsa, $B \subset X$'e dengeli küme denir.

Tanım 2.1.47. [72] $x \in X$ noktasını içeren her açık kümeye, x noktasının bir komşuluğu denir.

Tanım 2.1.48. [72] (X, τ) topolojik uzay ve $\tau' \subset \tau$ olsun. τ'nun her elemanı τ' elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, τ' sınıfına τ için bir baz denir.

Tanım 2.1.49. [72] $x \in X$ noktasının komşuluklarının bir sınıfı γ olsun. x'in her komşuluğu γ'nın bir elemanını içerirse, γ'ya x noktasının bir yerel bazıdır denir.

Tanım 2.1.50. [20] X topolojik uzayına, aşağıdaki özelliklerden (i) ve (ii)'yi sağlarsa Hausdorff uzayı veya (T_2) uzayı, (i) ve (iii)'yi sağlarsa regüler uzay veya (T_3) uzayı, (i) ve (iv)'yi sağlarsa normal uzay veya (T_4) uzayı denir:

(i) Bir tek noktayı içeren kümeler kapalıdır.

(ii) x ve y farklı noktalarının her çifti ayrık komşuluklara sahiptir.

(iii) Her A kapalı kümesi ve her $x \notin A$ noktası ayrık komşuluklara sahiptir.

(iv) Her A ve B ayrık kapalı kümeleri ayrık komşuluklara sahiptir.

Tanım 2.1.51. [72] X vektör uzayı üzerindeki bir τ topolojisi

(i) X vektör uzayının her bir noktası kapalı bir küme,

(ii) Vektör uzayı işlemleri τ topolojisine göre sürekli

şartlarını sağlıyorsa, τ'ya X uzayında bir vektör topolojisi ve X uzayına da bir topolojik vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.52. [72] Elemanları konveks olan bir yerel baza sahip topolojik vektör uzayına yerel konveks uzay denir.

Teorem 2.1.53. *[73] Her topolojik vektör uzayı bir regüler topolojik uzaydır. X topolojik vektör uzayında aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) X bir T_3 uzayıdır.

(ii) $\{0\}$ *kapalı bir kümedir.*

(iii) Her bir $x \neq 0$ *için* $x \notin U$ *olacak şekilde 0'ın bir* U *komşuluğu vardır.*

Tanım 2.1.54. [73] Bir topolojik vektör uzayı için Teorem 2.1.53'deki denk olan şartlar sağlanırsa, bu uzaya ayrılmış (separated) uzay denir. Ayrılmış bir topolojik vektör uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Tanım 2.1.55. [72] X ve Y topolojik vektör uzayları ve $S \subset L(X, Y)$ olsun. Y uzayında 0'ın her V komşuluğu için $f(U) \subset V$ (her $f \in S$ için) olacak şekilde X uzayında 0'ın bir U komşuluğu varsa S dönüşümüne eş süreklidir denir.

Tanım 2.1.56. [73] Mutlak konveks, emici ve kapalı bir kümeye barrel denir.

Tanım 2.1.57. [73] Her barreli 0'ın bir komşuluğu olduğu yerel konveks ayrılmış uzaya barrelled uzay denir.

Teorem 2.1.58. *[73]* X *bir yerel konveks ayrılmış uzay olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) Herhangi bir yerel konveks Y *uzayı için* X*'den* Y*'ye sürekli lineer dönüşümlerin her noktasal sınırlı olan* S *ailesi eş süreklidir.*

(ii) X *barrelled uzaydır.*

(iii) X^* *uzayının her zayıf* sınırlı alt kümesi eş süreklidir.*

Tanım 2.1.59. [74] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathbb{K}$ değerli bütün dizilerin kümesi

$$w = \{x = (x(k)) : x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, k \to x(k)\}$$

ile gösterilir. w kümesi,

$$\begin{array}{lccc} +: & w \times w & \to & w \\ & ((x(k)), (y(k))) & \to & (x(k) + y(k)) \end{array} \qquad \begin{array}{lccc} \cdot: & \mathbb{K} \times w & \to & w \\ & (\lambda, (x(k))) & \to & (\lambda.x(k)) \end{array}$$

ikili işlemleri ile $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. w'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

Örneğin [75, 76],

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \{x=(x(k))\in w : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < \infty\},\\
c &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{k\to\infty} x(k) = l, l\in\mathbb{R}\},\\
c_0 &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{k\to\infty} x(k) = 0\},\\
c_{00} &= \{x=(x(k))\in w : \exists n_x\in\mathbb{N}, \forall k\geq n_x \text{ için}, x(k)=0\},\\
bs &= \{x=(x(k))\in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} x(k)\right| < \infty\},\\
cs &= \{x=(x(k))\in w : \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x(k) - l\right) = 0, l\in\mathbb{R}\},\\
bv_p &= \{x=(x(k))\in w : \sum_{k} |x(k)-x(k-1)|^p < \infty, 0<p<\infty\},\\
\ell_p &= \{x=(x(k))\in w : \sum_{k} |x(k)|^p < \infty, 0<p<\infty\}
\end{aligned}$$

kümeleri birer dizi uzayıdır.

Tanım 2.1.60. [74] λ ve μ iki dizi uzayı ve $A=(a(n,k))$ $(n,\ k\in\mathbb{N})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olmak üzere, bir $x=(x(k))\in\lambda$ dizisi ve her $n\geq 1$ için

$$y(n) = (Ax)(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)x(k)$$

serisi yakınsak ise $Ax = ((Ax)(n))$ dönüşüm dizisi (x'in $A-$dönüşüm dizisi) mevcuttur denir. Eğer, her $x\in\lambda$ için $((Ax)(n))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $((Ax)(n))\in\mu$ ise A matrisi λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir dönüşüm tanımlar denir ve $A\in(\lambda,\mu)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.61. [76] λ bir dizi uzayı olmak üzere sonsuz bir A matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x=(x(k))\in w : Ax\in\lambda\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.62. [76] Her $n,k\in\mathbb{N}$ için

$$c(n,k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1\leq k\leq n,\\ 0, & k>n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1=(c_{nk})$ matrisine 1-inci mertebeden Cesàro ortalaması denir.

Tanım 2.1.63. [76] λ vektör topolojisine sahip bir dizi uzayı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için λ üzerinde $p_i(x) = x(i)$ şeklinde tanımlanan $p_i : \lambda \to \mathbb{C}$ koordinat dönüşümü sürekli ise λ dizi uzayına bir K-uzayı denir.

Tanım 2.1.64. [74] λ bir K-uzayı ve $c_{00} \subset \lambda$ olsun. c_{00} uzayı λ üzerinde yoğun ise λ bir AD-uzayı olarak adlandırılır.

2.2 Ölçüm Uzayları

Tanım 2.2.1. [77] G açık bir küme olsun. Eğer, (a, b) açık aralığı G içinde olup uç noktaları G kümesine ait değilse, yani $(a, b) \subset G$ ve $a, b \notin G$ ise bu aralığa G'nin bir bileşen aralığı denir.

Teorem 2.2.2. *[77] G açık kümesinin herhangi iki bileşen aralığı ya ayrıktır ya da birbirine eşittir.*

Tanım 2.2.3. [77] (a, b) açık aralığının uzunluğu $(b - a)$, (a, b) aralığının ölçümüdür. Bu sayı, $\lambda(a, b) = b - a$ şeklinde yazılır ve $\lambda(a, b) > 0$'dır.

Tanım 2.2.4. [77] Boş olmayan sınırlı açık bir G kümesinin ölçümü λG, tüm bileşen aralıklarının uzunlukları toplamına eşittir.

Tanım 2.2.5. [77] H boş olmayan sınırlı kapalı bir küme ve $S = [A, B]$, H kümesini içeren en dar aralık olsun. $C_S H$, S kümesinin H kümesine göre tümleyeni olmak üzere, $C_S H = S - H$ açık kümedir ve $\lambda C_S H$ ölçümü tanımlıdır. Bu durumda $\lambda H = B - A - \lambda C_S H$ olur.

Tanım 2.2.6. [78] E sınırlı bir küme olmak üzere, E kümesini içeren bütün sınırlı açık kümelerin ölçümlerinin en büyük alt sınırına E kümesinin dış ölçümü denir ve $\lambda^* E$ ile gösterilir. Yani G açık bir küme olmak üzere,

$$\lambda^* E = \inf_{G \supset E} \lambda G$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.7. *[78] Bir kümenin λ^* dış ölçümü alt toplamsallık özelliğini gösterir. Yani E kümesinin alt kümelerinin bir (A_n) dizisi için*

$$\lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$$

olur.

Tanım 2.2.8. [78] E sınırlı bir küme olmak üzere, E kümesinin kapsadığı bütün kapalı kümelerin ölçümlerinin en küçük üst sınırına E kümesinin iç ölçümü denir ve $\lambda_* E$ ile gösterilir. Yani H kapalı bir küme olmak üzere,

$$\lambda_* E = \sup_{H \subset E} \lambda H$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.9. *[78] E sınırlı bir küme ve $A \subset E$ olsun. Bu durumda $\lambda_* A \leq \lambda^* A$'dır.*

Tanım 2.2.10. [77] E sınırlı bir küme ve $A \subset E$ olsun. A kümesinin dış ölçümü ve iç ölçümü eşitse A kümesine Lebesgue ölçülebilir veya ölçülebilir denir. Buradan $\lambda A = \lambda_* A = \lambda^* A$ ortak değerine, A kümesinin ölçümü denir.

Tanım 2.2.11. [77] A, reel sayıların sınırlı ölçülebilir bir alt kümesi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $r \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in A : f(x) > r\}$$

kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna A kümesinde ölçülebilir bir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.12. [79] X herhangi bir küme ve $E \subset X$ olsun. Her $x \in X$ için

$$\chi_{_E}(x) = \begin{cases} 1 \quad , & x \in E \\ 0 \quad , & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.13. [80] S, kümelerin boştan farklı bir ailesi olsun. S aşağıdaki şartları sağlarsa bir σ-halkası olarak adlandırılır:

(i) $E \in S$ ve $F \in S$ ise $C_E F \in S$,

(ii) $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \in S$ ise $\bigcup_k E_k \in S$.

Tanım 2.2.14. [79] Ω herhangi bir küme ve Σ, Ω'nın alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Σ aşağıdaki şartları sağlarsa Ω'nın alt kümelerinin bir σ-cebiri olarak adlandırılır:

(i) $A \in \Sigma$ ise $CA \in \Sigma$,

(ii) $k = 1, 2, \ldots$ için $A_k \in \Sigma$ ise $\bigcup_k A_k \in \Sigma$.

Tanım 2.2.15. [78] Ω bir küme ve Σ, sayılabilir birleşim altında kapalı olan Ω'nın alt kümelerinin bir ailesi (σ-cebiri) olsun. Her bir $A \in \Sigma$ kümesini reel bir sayıya götüren fonksiyona küme fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.16. [78] Σ üzerinde tanımlı bir μ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, bir ölçüm olarak adlandırılır:

(i) $A \in \Sigma$ için $0 \leq \mu(A) < \infty$ (yarı pozitif tanımlı),

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$ (basit durum),

(iii) $A \subset B \in \Sigma$ olmak üzere, $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonluk),

(iv) Σ'nın ikişer-ikişer ayrık elemanlarının dizisi (A_n) için $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ise $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (sayılabilir toplamsallık).

Tanım 2.2.17. [81] Ω bir küme ve Σ, Ω'nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ise (Ω, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.

Tanım 2.2.18. [81] Σ, Ω'nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ve μ, Σ üzerinde tanımlı bir ölçüm (sayılabilir toplamsal) ise (Ω, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçüm uzayı denir. $\mu(\Omega) < \infty$ ise (Ω, Σ, μ) uzayına sonlu ölçüm uzayı ve μ'ye sonlu bir ölçüm denir.

Tanım 2.2.19. [82] μ, bir S σ-halkası üzerinde (negatif olmayan sayılabilir toplamsal) bir ölçüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $E \in S$ kümesine μ için bir atom denir:

(i) $\mu(E) > 0$,

(ii) $F \in \Sigma$ olmak üzere, $\mu(F) \cap \mu(E) = 0$ ya da $\mu(E - F) = 0$.

Tanım 2.2.20. [82] Pozitif ölçümlerin her ölçülebilir kümesi bir atom içerirse μ ölçümüne tamamen atomik denir.

Tanım 2.2.21. [81] Ölçülebilir bir A kümesinin parçalanışı, birleşimleri A kümesinde olan ayrık ölçülebilir kümelerin sonlu olan $(A_i)_{i=1}^{n}$ ailesidir.

Tanım 2.2.22. [29] X bir Banach uzayı, Ω bir küme ve Σ, Ω'nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ve $F : \Sigma \to X$ bir fonksiyon olsun. Σ'nın ayrık iki elemanı E_1 ve E_2 için

$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2)$$

oluyorsa F fonksiyonuna sonlu toplamsal vektör ölçümü denir.

Tanım 2.2.23. [29] F sonlu toplamsal bir ölçüm ve (E_n), Σ'nın ikişer-ikişer ayrık elemanlarının bir dizisi olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$ olsun. X Banach uzayının norm topolojisi üzerinde,

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$$

oluyorsa F fonksiyonuna sayılabilir toplamsal bir vektör ölçümü denir.

Tanım 2.2.24. [29] $F : \Sigma \to X$ bir vektör ölçümü olsun. F'nin varyasyonu,

$$|F|(E) = \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} \|F(A)\|$$

şeklinde tanımlanan $E \in \Sigma$ kümesi üzerinde değer alan negatif olmayan genişletilmiş $|F|$ fonksiyonudur, burada; supremum, Σ'nın ikişer-ikişer ayrık elemanlarının sonlu bir sayısı için E kümesinin bütün Π bölünmeleri üzerinden alınır. $|F|(\Omega) < \infty$ ise F ölçümüne sınırlı varyasyonlu bir ölçüm denir.

Tanım 2.2.25. [29] $F : \Sigma \to X$ bir vektör ölçümü olsun. F'nin yarı varyasyonu,

$$\|F\|(E) = \sup\{|x^* F|(E) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanan $E \in \Sigma$ kümesi üzerinde değer alan negatif olmayan genişletilmiş $\|F\|$ fonksiyonudur, burada; $|x^* F|$, $x^* F$ reel değerli ölçümlerin varyasyonudur. $\|F\|(\Omega) < \infty$ ise F ölçümüne sınırlı yarı varyasyonlu bir ölçüm denir. F ölçümünün varyasyonu, Σ üzerinde monoton sonlu toplamsal bir fonksiyon ve F ölçümünün yarı varyasyonu, Σ üzerinde monoton alt toplamsal bir fonksiyondur. $E \in \Sigma$ için $\|F\|(E) \leq |F|(E)$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2.26. *[29] Sınırlı varyasyonlu bir vektör ölçümünün sayılabilir toplamsal olması için gerek ve yeter şart bu ölçümün varyasyonun sayılabilir toplamsal olmasıdır.*

Tanım 2.2.27. [29] Σ, Ω'nın alt kümelerinin bir bölgesi ve $F : \Sigma \to X$ bir vektör ölçümü olsun. Σ'nın verilen ikişer-ikişer ayrık elemanlarının bir (E_n) dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$$

serisi norm üzerinde yakınsak ise F ölçümüne kuvvetli toplamsal bir ölçüm denir.

Tanım 2.2.28. [29] $\{F_\tau : \Sigma \to X / \tau \in T\}$ kuvvetli toplamsal vektör ölçümlerinin bir ailesi olsun. Σ'nın verilen ikişer-ikişer ayrık elemanlarının bir (E_n) dizisi için $\tau \in T$ üzerinde,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} F_\tau(E_m) \right\| = 0$$

oluyorsa $\{F_\tau : \Sigma \to X / \tau \in T\}$ ailesine düzgün kuvvetli toplamsal ölçüm denir. Bu durumda σ-bölgesi üzerinde sayılabilir toplamsal vektör ölçümleri kuvvetli toplamsaldır.

Tanım 2.2.29. [77] Bir S özelliği, herhangi bir E kümesinin sıfır ölçümlü bir E_0 alt kümesi dışındaki bütün noktalarda sağlanıyorsa, S özelliği E üzerinde hemen hemen her yerde (hhhy) sağlanır denir.

Tanım 2.2.30. [29] X Banach uzayı, (Ω, Σ, μ) sonlu ölçüm uzayı ve $f : \Omega \to X$ bir fonksiyon olsun. Buradan

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$$

olacak şekilde, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \Sigma$ bulunabilirse f fonksiyonuna basit fonksiyon denir.

Tanım 2.2.31. [29] X Banach uzayı, (Ω, Σ, μ) sonlu ölçüm uzayı ve $f : \Omega \to X$ bir fonksiyon olsun. Buradan

$$\lim_n \|f_n - f\| = 0 \quad \mu - hhhy$$

olacak şekilde basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi mevcutsa f fonksiyonuna μ-ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.32. [29] X Banach uzayı, (Ω, Σ, μ) sonlu ölçüm uzayı ve $f : \Omega \to X$ bir fonksiyon olsun. Her bir $x^* \in X^*$ için $x^* f$ sayısal fonksiyonu μ-ölçülebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonuna zayıf μ-ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.33. [29] $f : \Omega \to X$ μ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Basit fonksiyonların bir f_n dizisi

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$$

olacak şekilde bulunabilirse f fonksiyonuna Bochner integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda her bir $E \in \Sigma$ için $\int_E f d\mu$ integrali

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, Bochner integrallenebilir fonksiyonların kısa bir karakterizasyonunu veren teoremi verelim.

Teorem 2.2.34. *[29] μ-ölçülebilir bir $f : \Omega \to X$ fonksiyonun Bochner integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.35. [29] X bir Banach uzayı ve (Ω, Σ, μ) sonlu bir ölçüm uzayı olsun. Ω üzerinde

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$$

şeklinde tanımlı bütün X değerli Bochner integrallenebilir f fonksiyonlarının uzayı $L_p(\mu, X)\,(1 \leq p \leq \infty)$ ile gösterilir. $L_p(\mu, X)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\| d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_p(\mu, X)$$

şeklinde tanımlanır. Bilinen hesaplamalarla $L_p(\mu, X)$ uzayının $\|.\|_p$ normu altında Banach uzayı olduğu gösterilebilir. Aynı zamanda basit fonksiyonlar $L_p(\mu, X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayında yoğundur.

Tanım 2.2.36. [83] X bir Banach uzayı ve K kompakt bir Haussdorf uzayı olsun. $f : K \to X$ tanımlı X değerli bütün sürekli fonksiyonların Banach uzayı $C(K, X)$ ile tanımlanır. $C(K, X)$ uzayındaki norm,

$$\|f\|_C = sup\{|f(t)| : t \in K\}$$

şeklinde tanımlanır.

3 TAMAMLAYICI ALTUZAYLAR ve SERİLER

Bu bölümde, doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmanın alt yapısını oluşturan konular detaylı olarak verilecektir.

3.1 Tamamlayıcı Altuzaylar

Bu kısımda, [64]'de ifade edilen tamamlayıcı altuzaylar ve izdüşüm operatörleri arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 3.1.1. X bir vektör uzayı ve $M, N \subset X$ olsun. Her bir $x \in X$ için $y \in M$ ve $z \in N$ olmak üzere, $x = y + z$ tek bir şekilde yazılabilirse X uzayına M ve N'nin direkt toplamı denir ve $X = M \oplus N$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. X bir vektör uzayı olsun. Tanım bölgesi X olan ve bu uzayı kendine dönüştüren bir $P : X \to X$ lineer operatörü

$$P \circ P = P^2 = P$$

eşitliğini sağlıyorsa izdüşüm operatörü adını alır. Herhangi bir $x \in X$ vektörü için $y = Px \in R(P) \subseteq X$ olarak alalım. Kolayca görülebileceği gibi P bir izdüşüm operatörü ise

$$Py = P(Px) = P^2 x = Px = y$$

bulunur. Yani $P|_{R(P)} = I|_{R(P)}$ olur.

İspatı tanımdan açık bir şekilde görülen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.3. *X vektör uzayının M ve N altuzaylarının toplamı olan bir Y altuzayı ancak ve ancak $M \cap N = \{0\}$ ise bu altuzayların direkt toplamıdır. Yani $Y = M + N$ için $M \cap N = \{0\} \Leftrightarrow Y = M \oplus N$.*

Teorem 3.1.4. *Bir X vektör uzayında $P : X \to X$ bir izdüşüm operatörü olsun. $X = R(P) \oplus N(P)$ bağıntısı geçerlidir.*

İspat. Herhangi bir $x \in X$ vektörü için $y = Px \in R(P)$ olsun ve

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ &= x - Px \end{aligned}$$

vektörü tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} Pz &= P(x - Px) \\ &= Px - P^2 x \\ &= Px - Px \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $z \in N(P)$ olarak elde edilir. Buna göre, her $x \in X$ vektörünü,

$$x = y + z, \quad y \in R(P) \quad \text{ve} \quad z \in N(P)$$

şeklinde yazabiliriz. Yani $X = R(P) + N(P)$ bağıntısı geçerlidir.

Şimdi, y vektörünü $y \in R(P) \cap N(P)$ olarak seçilsin. $y \in R(P)$ olduğundan $y = Px$ olacak şekilde $x \in X$ vektörü vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Py &= P(Px) \\ &= P^2x \\ &= Px \\ &= y \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $y \in N(P)$ olduğundan $Py = 0$ ve böylece $y = 0$ olur. Yani $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ olarak elde edilir. Bir önceki teoremden, $X = R(P) \oplus N(P)$ olur. □

İzdüşüm operatörü bir uzayın her vektörünü tek şekilde iki bileşene ayırır. Bir bileşen vektörün P altındaki görüntüsüdür ve vektörün $R(P)$ altuzayına izdüşümü olarak adlandırılır. Öteki bileşenin izdüşümü sıfırdır. Bir X vektör uzayında $P : X \to X$ izdüşüm operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $I - P : X \to X$ operatörü de bir izdüşüm operatörüdür.

(ii) $M = \{x \in X : Px = x\}$ altuzayını tanımlayalım. Bu durumda $M = R(P)$ olur.

(iii) $R(P) = N(I - P)$ bağıntısı geçerlidir.

Önceki bilgilerden aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz.

Teorem 3.1.5. *Bir X vektör uzayı M ve N altuzaylarının direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa $M = R(P)$ ve $N = N(P) = R(I - P)$ olacak şekilde bir tek $P : X \to X$ izdüşümü vardır.*

Kapalı operatörler kavramı aracılığı ile bir normlu uzayda tanımlanacak olan lineer bir P izdüşüm operatörünün bazı özellikleri kolayca elde edilebilir. Cebirsel yapı göz önüne alınarak yukarıda bu özellikler incelendi. Şimdi, normlu uzaylardaki bazı özellikler incelenecektir.

Teorem 3.1.6. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ kapalı bir izdüşüm operatörü ise $R(P)$ değer bölgesi kapalıdır.*

İspat. Bir $z \in \overline{R(P)}$ vektörünü ele alalım. Buna göre, z elemanının her V açık komşuluğu içinde $y = Px$ olacak şekilde bir $y \in R(P)$ vektörü bulunur. $Py = y$ olduğundan $(y, y) \in G(P)$ yazabiliriz. Buradan (y, y) vektörü (z, z) vektörünün $X \times X$'deki $V \times V$ açık komşuluğu içindedir. Yani (z, z), $G(P)$'nin yığılma noktasıdır. $G(P)$ kapalı olduğundan $(z, z) \in G(P)$ çıkar ve $Pz = z$ olur. Böylece $z \in R(P)$ olarak elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.7. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ sürekli bir izdüşüm operatörü ise $R(P)$ değer bölgesi ve $N(P)$ sıfır uzayı kapalıdır.*

İspat. $N(P) = \{x \in X : Px = 0\} = P^{-1}(\{0\})$ şeklinde tanımlıdır. Bir metrik uzayda tek nokta kümesi kapalı ve P sürekli olduğundan $P^{-1}(\{0\})$'da kapalıdır. Diğer taraftan, P sınırlı ise

$$\|(I - P)x\| = \|x - Px\| \leq \|x\| + \|Px\| \leq (1 + C)\|x\|$$

olduğundan $I - P$ izdüşüm operatörü de sınırlıdır. Buradan $N(I - P)$ kapalı ve böylece $R(P) = N(I - P)$ olduğundan $R(P)$ kümesi de kapalı olacaktır. $R(P)$ değer bölgesi ve $N(P)$ sıfır uzayının kapalı olduğunu göstermek için diğer bir yol ise; $Px_n \in R(P)$ ve $Px_n \to y$ olarak alınırsa P izdüşüm operatörünün sürekliliğinden

$$P(Px_n) = P^2 x_n = Px_n \to Py$$

olacağından $Py = y$ elde edilir. Böylece $R(P)$ kapalı olur. $N(P)$ sıfır uzayının kapalı olduğu da aynı şekilde gösterilebilir. $\square$

Teorem 3.1.8. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ bir izdüşüm operatörü olsun. $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı ise P kapalı bir operatördür.*

İspat. Bir $(x_n) \subset X$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n \to x \in X$ ve $\lim_{n\to\infty} Px_n \to y \in X$ olsun. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} (I - P)x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - Px_n) = x - y$$

olarak elde edilir. Böylece $Px_n \in R(P)$, $x_n - Px_n \in N(P)$ ve bu uzaylar kapalı olduğundan $x - y \in N(P)$ ve $y \in R(P)$ olur. Dolayısıyla, $Py = y$ ve

$$\begin{aligned} P(x - y) &= Px - Py \\ &= Px - y \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $Px = y$ ve böylece P kapalı bir operatör olarak elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.9. *X bir Banach uzayı ve $P : X \to X$ bir izdüşüm operatörü olsun. $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı ise P sürekli bir operatördür.*

İspat. Teorem 3.1.8'den, P kapalı bir operatördür. X bir Banach uzayı olduğundan kapalı grafik teoremi kullanılırsa P sürekli bir operatör olur. $\square$

X bir Banach uzayı ve M kapalı bir altuzay ise $M = R(P)$ olacak şekilde bir P izdüşüm operatörü daima vardır. Ancak bu operatör her zaman sürekli olmayabilir. P'nin sürekli olması için $X = M \oplus N$ bağıntısını sağlayan N kapalı altuzayı bulunmalıdır. Böyle uzayların var olmadığı örnekler gözlenmiştir.

Tanım 3.1.10. X normlu uzayının kapalı olan bir M altuzayı verildiğinde,

$$X = M \oplus N \text{ ve } M \cap N = \{0\}$$

olacak şekilde diğer bir kapalı N altuzayı bulunabilirse M'ye X uzayında tamamlayıcı altuzay denir. Bu tanıma denk olarak, M, X uzayındaki sürekli ve lineer olan bir P izdüşüm operatörünün görüntü kümesi ise M altuzayı X uzayında tamamlayıcıdır. Çünkü, $P : X \to X$ sürekli lineer bir izdüşüm operatörü ise Teorem 3.1.7'den $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı olur. Diğer taraftan, $P : X \to X$ izdüşüm operatörü olduğundan $X = R(P) \oplus N(P) = M \oplus N$ yazılabilir. Böylece M altuzayı X uzayında tamamlayıcı olur. M altuzayına N altuzayının tamamlayıcısı denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı yukarıda verilen teoremlerden kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.1.11. *Herhangi bir X Banach uzayının bir altuzayının tamamlayıcı olması için gerek ve yeter şart bu altuzayın X'de sınırlı-lineer bir izdüşüm operatörünün görüntü kümesi olmasıdır.*

3.2 Bazlar ve Temel Diziler

Bu kısımda, baz ve temel dizi kavramları verilecek ve bu kavramlar ile ilgili önemli teoremler yer alacaktır.

Tanım 3.2.1. [65] X bir vektör uzayı ve $S \subset X$ olsun. X uzayının her vektörü S kümesinin elemanlarının sonlu lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilirse S kümesine X uzayının gereni denir.

Tanım 3.2.2. [65] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin farklı elemanlarının her sonlu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alt kümesi ve her $\{\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(n)\} \subset \mathbb{K}$ dizisi için

$$\alpha(1)x_1 + \alpha(2)x_2 + ... + \alpha(n)x_n = 0$$

eşitliği ancak ve ancak

$$\alpha(1) = \alpha(2) = ... = \alpha(n) = 0$$

olması halinde sağlanıyorsa A kümesi lineer bağımsızdır denir.

Tanım 3.2.3. [65] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere, $A \neq \emptyset$ lineer bağımsız bir küme ve $E \subset X$ olsun. Bu takdirde $A \subsetneq E \subset X$ iken E lineer bağımsız değilse A kümesine X uzayı için bir Hamel bazı denir. Bu yüzden bir Hamel bazı maksimal lineer bağımsız bir kümedir.

Teorem 3.2.4. *[65] En az iki elemana sahip olan her vektör uzayı bir Hamel bazına sahiptir.*

Teorem 3.2.5. *[65] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve A kümesi X için bir Hamel bazı olsun. Her bir $x \in X$ için sonlu tane $\alpha \in A$ dışında sıfır değerini alan ve*

$$x = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha).\alpha$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f : A \to \mathbb{K}$ fonksiyonu vardır. Yani x, A'nın elemanlarının sonlu lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

Tanım 3.2.6. [70] X bir Banach uzayı olsun. X uzayıdaki bir dizinin kapalı lineer gereni $[x_n]$, X uzayının tamamlayıcı bir altuzayı ise bu diziye X uzayında tamamlayıcıdır denir.

Tanım 3.2.7. [84] X bir Banach uzayı olsun. $(x_n) \subset X$ ve $(x_n^*) \subset X^*$ olmak üzere,

$$x_i^*(x_j) = \begin{cases} 1 \quad , \quad i = j \\ 0 \quad , \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

oluyorsa bu iki dizi biortogonaldir denir.

Tanım 3.2.8. [70] (x_n), X Banach uzayında bir dizi olsun. Bu takdirde

(i) (x_n) ile (x_n^*) dizileri biortogonal,

(ii) Her bir $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$

olacak şekilde $(x_n^*) \subset X^*$ dizisi varsa (x_n) dizisine X uzayının Schauder bazı denir.

Tanım 3.2.9. [70] (x_n), X Banach uzayının bir Schauder bazı ve $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ olsun. $x_n^*(x) \neq 0$ olan n tamsayılarının altkümesine x'in desteği denir ve $supp(x)$ ile gösterilir. $|supp(x)| < \infty$ ise x sonlu desteklidir denir.

Baz tanımından aşağıdaki önerme ispatlanabilir.

Önerme 3.2.10. *[85] X bir Banach uzayı ve $(x_n) \subset X$ olsun. (x_n) dizisinin X uzayının bazı olması için gerek ve yeter şart*

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 0$,

(ii) Her $(a(n)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizi ve $n < m$ olmak üzere, her n, m pozitif tam sayıları için

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a(i) x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a(i) x_i \right\|$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti mevcuttur,

(iii) $X = [x_n, n \in \mathbb{N}]$

koşullarının sağlanmasıdır.

Bazlar ve projeksiyonlar arasındaki bağlantının verildiği aşağıdaki önermeyi ispatsız vereceğiz.

Önerme 3.2.11. *[70, 86] (x_n), X Banach uzayında bir baz olsun. Her bir N için $P_N : X \to X$ projeksiyonunun kısmi toplamlar dizisi*

$$P_N \left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n) x_n \right) = \sum_{n=1}^{N} a(n) x_n$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\sup_N \|P_N\| < \infty$$

olur.

Tanım 3.2.12. [85] (x_n), $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ projeksiyonların dizisi ile ilişkili olan bir X Banach uzayının bazı olsun. Bu takdirde

(i) $K = \sup_N \|P_N\|$ sayısı, (x_n) bazının baz sabiti,

(ii) (x_n) dizisinin baz sabiti 1 ise (x_n) monoton baz,

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ise (x_n) normalize edilmiş baz,

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$ ise (x_n) yarı normalize edilmiş baz

olarak tanımlanırlar.

Tanım 3.2.13. [2] (x_n), X Banach uzayındaki herhangi bir dizi olsun. (x_n) dizisi kendi kapalı lineer gereni $[x_n]$ için bir Schauder bazı ise (x_n) dizisine temel dizi denir.

Bir Banach uzayının elemanlarının bir dizisinin temel dizi olduğunu fark etmek için kullanılan aşağıdaki teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 3.2.14. *[71, 87, Grunblum Kriteri] (x_n), X Banach uzayında sıfırdan farklı vektörlerin bir dizisi olsun. (x_n) dizisinin temel dizi olması için gerek ve yeter şart $(a(n))$ skalerlerinin herhangi seçimi ve herhangi $m < n$ pozitif tamsayıları için*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a(i)x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n} a(i)x_i\right\|$$

eşitsizliğini sağlayan $K > 0$ sabitinin bulunmasıdır.

Tanım 3.2.15. [2] "$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n$ serisinin yakınsak olmasıdır" önermesi sağlanıyorsa, (x_n) ve (y_n) bazları (temel dizileri) denktir denir.

Teorem 3.2.16. *[70] (x_n) ve (y_n) bazlarının (temel dizilerinin) denk olması için gerek ve yeter şart her bir $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : [x_n] \to [y_n]$ bir izomorfizmanın mevcut olmasıdır.*

İspat. $X = [x_n]$ ve $Y = [y_n]$ olarak alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : X \to Y$ bir izomorfizma olduğunu kabul edelim. T bir izomorfizma olduğundan bütün $(a(n)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizileri için

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n\right\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır. Bu ise (x_n) ile (y_n) dizilerinin denk olması demektir.

Tersine, (x_n) ve (y_n) dizileri denk olsun. Bu durumda $T : X \to Y$ operatörü

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n$$

olacak şekilde tanımlanırsa T operatörü bire-bir ve örten olur. $(u_j) \subset X$ olmak üzere X uzayında $u_j \to u$ ve Y uzayında $Tu_j \to v$ olduğunu kabul edelim. Buradan $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j)x_n$ ve $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u)x_n$ olarak yazılırsa (x_n) ve (y_n) ile ilişkili biortogonal fonksiyonların sürekliliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n^*(u_j) \to x_n^*(u) \text{ ve } y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$$

olarak elde edilir. Limitin tekliğinden, her n için $x_n^*(u) = y_n^*(v)$ olur. Buradan $Tu = v$ elde edilir ve böylece kapalı grafik teoreminden, T operatörü sürekli olur. $\square$

Aşağıdaki önermenin ispatı önceki teoremden kolayca elde edilebilir.

Önerme 3.2.17. *[85] (x_n) ve (y_n) bir Banach uzayında iki temel dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:*

(i) (x_n) ve (y_n) dizileri denktir,

(ii) Bütün $(a(i)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizileri için

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)y_i\right\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır,

(iii) $[x_n, n \in \mathbb{N}]$ ve $[y_n, n \in \mathbb{N}]$ izomorfiktirler.

Tanım 3.2.18. [2] (x_n), X Banach uzayının bir bazı olsun. $r_0 = 0$, (r_n) tam sayıların kesin artan bir dizisi ve $(a(n))$ skalerler olmak üzere,

$$z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlı X uzayındaki sıfırdan farklı (z_n) vektörlerinin dizisine (x_n) bazının bir blok temel dizisi denir.

Lemma 3.2.19. *[70] (x_n), X Banach uzayı için K baz sabitine sahip bir baz ve (z_k), (x_n) bazının bir blok temel dizisi olsun. Bu takdirde (z_k) dizisi K'ya denk ya da K'dan daha küçük bir baz sabiti ile bir temel dizi olur.*

İspat. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j$, (x_n) bazının bir blok temel dizisi olsun. Bu durumda herhangi $(b(n))$ skalerleri ve herhangi $m < n$ tamsayıları için

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} b(k)z_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{m} b(k)\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b(k)a(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{r_m} c(j)x_j\right\|, \text{ burada; } r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k \text{ ise } c(j) = a(j)b(k) \\
&\leq K\left\|\sum_{j=1}^{r_n} c(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n} b(k)z_k\right\|
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani (z_k) dizisi Grunblum kriterini sağlar ve böylece (z_k), en fazla K baz sabitli bir temel dizi olur. $\square$

Tanım 3.2.20. [70] X ve Y Banach uzayları olsun. $(x_n) \subset X$ ve $(y_n) \subset Y$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : X \to Y$ terslenebilir operatörü varsa bu iki diziye (X, Y)'ye göre kongruenttirler denir. (x_n) ve (y_n) dizileri $X = Y$ özel durumunda yukarıdaki özellikleri sağlarsa bu iki dizi kongruenttir denir.

Teorem 3.2.21. *[70, 2, Küçük Karmaşıklık Prensibi] (x_n), X Banach uzayında K baz sabitine sahip bir temel dizi olsun. $(y_n) \subset X$ dizisi için*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \delta < 1$$

eşitsizliği sağlanırsa (x_n) ve (y_n) dizileri kongruenttir. Ayrıca

(i) (x_n) baz ise (y_n)'de bazdır.

(ii) (y_n) bir temel dizidir.

(iii) $[x_n]$ tamamlayıcı ise $[y_n]$'de tamamlayıcıdır.

İspat. $(x_n^*) \subset [x_n]^*$, (x_n) dizisinin biortogonal fonksiyonelleri olmak üzere her $n \geq 2$ ve herhangi $x \in [x_n]$ için

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_n^*(x)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_n^*(x)x_n$$

ifadesine sahibiz. Buaradn

$$\begin{aligned} \|x_n^*(x)x_n\| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \\ &\leq 2K\|x\| \end{aligned}$$

ve böylece $\|x_n^*\|\|x_n\| \leq 2K$ olur. $n = 1$ için $\|x_1^*\|\|x_1\| \leq K$ olduğu kolayca görülür. x_n^* fonksiyonellerinin yerine Hahn-Banach genişlemesi olan $\widehat{x_n^*}$ fonksiyonelleri alınsa bile, yukarıda elde edilen eşitsizlikler sağlanır. Şimdi, her bir $x \in X$ için

$$A(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n^*}(x)(y_n - x_n)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(x_n) &= x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n^*}(x_n)(y_n - x_n) \\ &= y_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|A\| &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\|\widehat{x_n^*}\|\|y_n-x_n\| \\ &\leq 1+2K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|y_n-x_n\|}{\|x_n\|} \\ &= 1+\delta\end{aligned}$$

olduğundan $A: X \to X$, $A(x_n) = y_n$ ile sınırlı bir operatördür. Buradan

$$\begin{aligned}\|A-I\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\widehat{x_n^*}\|\|y_n-x_n\| = \delta \\ &< 1\end{aligned}$$

olarak bulunur. Teorem 2.1.10'dan, $I-(I-A) = A$ operatörünün tersi vardır ve

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\| &\leq \frac{1}{1-\|A-I\|} \\ &= (1-\delta)^{-1}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $A(x_n) = y_n$ olacak şekilde $A: X \to X$ terslenebilir operatörü elde edilir. Böylece Tanım 3.2.20'den, (x_n) ve (y_n) dizileri kongruenttir. □

Bu teoremin bir uygulaması olarak "Bessaga-Pelczynski Seçme Prensibi" diye bilinen aşağıdaki önermeyi vereceğiz. Bu önermenin ispatında kullanılan teknik "gliding hump" (ya da "sliding hump") olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.22. *[70, 71, Bessaga-Pelczynski Seçme Prensibi] (x_n), X Banach uzayının K baz sabitine sahip bir bazı ve $(x_n^*) \subset X^*$ olsun. $(y_n) \subset X$ dizisi*

(i) $\inf_n \|(y_n)\| > 0$,

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde (x_n) bazının bir (z_k) blok temel dizisine kongruent olan $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ dizisi vardır. Aynı sonuç, (y_n) dizisinin sıfıra zayıf yakınsak; fakat norm yakınsak olmadığı durumda da elde edilir.

İspat. $\alpha = \inf_n \|(y_n)\| > 0$ ve $0 < v < \frac{1}{4}$ olduğunu kabul edelim. (x_n) baz olduğundan

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} a(k)x_k\right\| \leq K\left\|\sum_{k=1}^{m+n} a(k)x_k\right\|$$

eşitsizliği ve $(y_{n_1}) \subset (y_n)$ dizisi için

$$y_{n_1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(y_{n_1})x_k$$

genişlemesi sağlanır. $n_1 = 1$ ve $r_0 = 0$ olarak seçilsin. Buradan S_m, (x_n) bazının m-inci kısmi toplamı olmak üzere

$$\begin{aligned} \|y_{n_1} - S_{r_1} y_{n_1}\| &= \left\| \sum_{k=r_1+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_1}) x_k \right\| \\ &< \frac{v\alpha}{2K} \end{aligned}$$

olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır. (ii)'den, her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_{r_1} y_n = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{r_1} x_k^*(y_n) x_k \right\| = 0$$

ve bu yüzden

$$\begin{aligned} \|S_{r_1} y_{n_2}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{r_1} x_k^*(y_{n_2}) x_k \right\| \\ &< \frac{v^2\alpha}{2K} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan $n_2 > n_1$ vardır. Aynı şekilde, (x_n) dizisi X için bir baz olduğundan (y_{n_2}) dizisi

$$y_{n_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(y_{n_2}) x_k$$

genişlemesini sağlar. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \|y_{n_2} - S_{r_2} y_{n_2}\| &= \left\| \sum_{k=r_2+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_2}) x_k \right\| \\ &< \frac{v^2\alpha}{2K} \end{aligned}$$

olacak şekilde $r_2 > r_1$ seçilebilir ve $\lim_{n\to\infty} S_{r_2} y_n = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|S_{r_2} y_{n_3}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{r_2} x_k^*(y_{n_3}) x_k \right\| \\ &< \frac{v^3\alpha}{2K} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan $n_3 > n_2$ vardır. Böyle devam ederek,

$$\begin{aligned} \|S_{r_{k-1}} y_{n_k}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{r_{k-1}} x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| \\ &< \frac{v^k\alpha}{2K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|y_{n_k} - S_{r_k} y_{n_k}\| &= \left\| \sum_{k=r_k+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| \\ &< \frac{v^k \alpha}{2K}\end{aligned}$$

olacak şekilde $r_0 = 0$, tam sayıların bir (r_k) dizisi ve $(y_{n_k}) \subset X$ elde edelir. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}z_k &= S_{r_k} y_{n_k} - S_{r_{k-1}} y_{n_k} \\ &= \sum_{k=r_{k-1}+1}^{r_k} x_k^*(y_{n_k}) x_k\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. (z_k), (x_n) bazının bir blok temel dizisidir. Böylece Lemma 3.2.19'dan (z_k), K'dan daha küçük bir baz sabiti ile temel dizi olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\alpha = \|y_{n_k}\| &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{r_{k-1}} + \sum_{k=r_{k-1}+1}^{r_k} + \sum_{k=r_k+1}^{\infty} \right) x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| \\ &\leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{r_{k-1}} + \sum_{k=r_k+1}^{\infty} \right) x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| + \|z_k\| \\ &\leq \frac{v^k \alpha}{2K} + \frac{v^k \alpha}{2K} + \|z_k\|\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\|z_k\| &> \alpha - \frac{v^k \alpha}{K} \\ &\geq \alpha - \frac{v \alpha}{K} \\ &\geq \alpha(1-v)\end{aligned} \tag{1}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|z_k - y_{n_k}\| &\leq \|y_{n_k} - S_{r_k} y_{n_k}\| + \|S_{r_{k-1}} y_{n_k}\| \\ &< \frac{v^k \alpha}{2K}\end{aligned} \tag{2}$$

olarak bulunur. Buradan (1) ve (2) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|z_k - y_{n_k}\|}{\|z_k\|} &< 2(1-v)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \\ &= 2(1-v)^{-1} v \frac{1}{1-v} \\ &= 2v(1-v)^{-2} \\ &< \frac{8}{9}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Teorem 3.2.21'den, (y_{n_k}) dizisi (z_k) dizisine kongruent bir temel dizi olur. v istenildiği kadar küçük alınabileceğinden, (y_{n_k}) dizisinin baz sabitini K'ya yakın olarak alabiliriz. Aynı zamanda, (z_k) dizisi X uzayında tamamlayıcı bir dizi ise (y_{n_k}) dizisi de tamamlayıcıdır. □

3.3 Serilerin Yakınsaklığı

Bu kısımda, nümerik ve vektör değerli serilerin yakınsaklığı ile ilgili genel bilgiler verilip, serilerin elemanlarının tekrar düzenlenmesi konusu ele alınacaktır. [88] nolu kaynakda yer alan serilerin temel özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1. Elemanları reel sayılar kümesine ait olan terimlerin sonsuz bir sayısının toplamı şeklinde ifade edilen serilere nümerik seriler denir.

Tanım 3.3.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x(k) \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|$ serisi yakınsak ise bu seriye mutlak yakınsak seri denir.

Tanım 3.3.3. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x(k) \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi yakınsak; fakat mutlak yakınsak değilse bu seriye şartlı yakınsak seri denir.

Tanım 3.3.4. Bir A kümesinin kendi üzerine olan 1-1 ve örten dönüşüme permütasyon denir ve $\pi : A \to A$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.3.5. *Her $k \in \mathbb{N}$ için $x(k) \in \mathbb{R}^+$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi bir S sayısına yakınsak olsun. Bu takdirde doğal sayılar kümesinin herhangi bir π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serisi yakınsak ve toplamı S sayısına eşittir.*

İspat. Elemanları yeniden düzenlenen serinin kısmi toplamını $S_n^{\pi} = \sum_{k=1}^{n} x(\pi(k))$ olarak tanımlayalım. Serinin terimleri negatif olmadığından

$$S_1^{\pi} \leq S_2^{\pi} \leq \ldots \leq S_n^{\pi} \leq \ldots \text{ ve } \sup_k S_k^{\pi} \leq S$$

olduğu kolayca görülür. S_n^{π} dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan bir $S^{\pi} \leq S$ sayısına yakınsaktır ve bu yüzden $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k)) = S^{\pi} \leq S$ olur.

Diğer taraftan, $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi ile $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serisinin rolleri değiştirilip ve yukarıdaki yol takip edilirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x(k) = S \leq S^{\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, $S = S^{\pi}$ olur. □

Teorem 3.3.6. *$\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ ve doğal sayıların herhangi bir π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serileri yakınsaktır, ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} x(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ eşitliği geçerlidir.*

İspat. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için

$$x^+ = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ve

$$x^- = x^+ - x$$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^+$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^-$ serileri göz önüne alınırsa bu seriler negatif olmayan sayıların serileridir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^+ \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} x(k)^- \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|$$

olduğundan bu seriler yakınsaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^+ = S^+$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^- = S^-$ olduğunu kabul edelim. Böylece Teorem 3.3.5'den herhangi bir π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^+$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^-$ serileri yakınsaktır ve aynı zamanda

$$\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^+ = S^+ \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^- = S^-$$

olur. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^+ - \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))^-$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k)) = S^+ - S^-$$

olarak elde edilir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serisi yakınsak olur. Açıkça, $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi de yakınsaktır ve toplamı $S^+ - S^-$ sayısına eşittir. □

Şartlı yakınsak serilerin önemli bir karakterizasyonunun elde edildiği Riemann Teoremini ispatsız vereceğiz.

Teorem 3.3.7 (Riemann Teoremi). $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ *reel sayıların şartlı yakınsak bir serisi olsun. Bu takdirde*

(i) Herhangi bir $S \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k)) = S$ olacak şekilde bir π permütasyonu bulunabilir.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} x(\sigma(k)) = \infty$ olacak şekilde bir σ permütasyonu bulunabilir.

Tanım 3.3.8. X Banach uzayının elemanlarının bir serisi, X uzayına ait olan terimlerin sonsuz sayıdaki toplamı şeklinde ifade edilir.

Bir şey hatırlatmak gerekirse, bu toplam alışılmış şekildeki bir toplam değildir. Çünkü, bir Banach uzayındaki toplama sadece terimlerin sonlu bir sayısı için tanımlıdır. Bu toplamın anlam kazanması için kısmi toplam tanımı verilecektir.

Tanım 3.3.9. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin n-inci kısmi toplamı, bu serinin ilk n teriminin ($n < \infty$) toplamıdır ve $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.10. Bir serinin kısmi toplamlar dizisi X uzayının normuna göre yakınsaksa bu seriye yakınsak seri denir. Bu dizinin limiti $\lim_n S_n = S$, serinin toplamı olarak adlandırılır. Ayrıca (S_n) dizisi X uzayında zayıf yakınsak ise bu seriye zayıf yakınsak seri denir.

Tanım 3.3.11. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin kalan kısmı $R_n = S - S_n$ şeklinde ifade edilir. Başka bir deyişle, R_n kalanı, $x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots$ toplamına eşittir. Yakınsak bir seride n büyüdükçe kalan kısım sıfıra yaklaşır.

Tanım 3.3.12. Bir serinin parçası (segmenti) ardışık terimlerinin sonlu sayısının bir toplamıdır; yani $\sum_{k=m+1}^{n} x_k = S_n - S_m$.

Teorem 3.3.13 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri)**.** *$\sum_k x_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart serinin segmentleri dizisinin sıfıra yakınsak olmasıdır, yani*

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| = 0$$

dır.

İspat. $S_n \to S$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| &= \|S_n - S_m\| \\ &\leq \|S_n - S\| + \|S_m - S\| \to 0 \end{aligned}$$

olur ve böylece Cauchy şartı sağlanır.

Tersine, Cauchy şartı sağlansın, yani $\lim_{m,n\to\infty} \|S_n - S_m\| = 0$ olsun. X tam olduğundan kısmi toplam dizisi yakınsaktır. Bu yüzden $\sum_k x_k$ serisi yakınsak olur. □

Tanım 3.3.14. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ ise $\sum_k x_k$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Teorem 3.3.15. *Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.*

İspat. $\sum_k x_k$ serisi mutlak yakınsak olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ olduğundan Cauchy kriterini kullanırsak,

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = 0$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$$

olacağından $\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| = 0$ ve böylece Cauchy kriterinden, $\sum_k x_k$ serisi yakınsak olur. □

Tanım 3.3.16. X bir Banach uzayı olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi terimlerinin herhangi dizilimi için yakınsak oluyorsa şartsız yakınsak seri olarak adlandırılır. Bu tanıma denk olarak, her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine şartsız yakınsak seri denir.

Nümerik serilerde şartsız yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık birbirine denktir. Genel durumda, bir Banach uzayındaki bir seri mutlak yakınsak iken şartsız yakınsaktır; fakat tersi doğru değildir. Örneğin;

$X = \ell_2$ ve k-ıncı koordinatı sıfırdan farklı olan dizi

$$x_k = (0, 0, \ldots, 0, k^{-1}, 0, \ldots)$$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi, terimlerinin herhangi bir dizilimi için

$$S = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

elemanına yakınsar. Fakat, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi mutlak yakınsak değildir.

Tanım 3.3.17. $\sum_k x_k$ serisi yakınsak; fakat şartsız yakınsak değilse şartlı yakınsak seri olarak adlandırılır. Yani $\sum_k x_k$ serisi şartlı yakınsak ise, en az bir π_0 permütasyonu için $\sum_k x_{\pi_0(k)}$ serisi ıraksaktır.

Bu tanım nümerik seriler için verilen tanımdan farklıdır. Çünkü, nümerik serilerde mutlak ve şartsız yakınsaklık denktir.

Teorem 3.3.18. *X Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak ise bu serinin tekrar dizilimlerinin hepsi aynı toplama sahiptir.*

İspat. $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak; fakat $S \neq S'$ olmak üzere, $\sum_k x_k = S$ ve π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)} = S'$ olduğunu kabul edelim. Hahn-Banach teoreminden, $f(S) \neq f(S')$ olacak şekilde bir $f \in X^*$ fonksiyoneli bulunabilir. $\sum_k f(x_k)$ nümerik serisinin toplamı π permütasyonuna göre değiştiğinden bu seri mutlak yakınsak olamaz. Böylece $\sum_k f(x_k)$ serisi şartlı yakınsak bir seri olur ve buradan Riemann Teoremi (Teorem 3.3.7) kullanılırsa, $\sum_k f(x_{\sigma(k)})$ serisinin ıraksak olduğu bir σ permütasyonu bulunur. Bu durumda f sürekli olduğundan $\sum_k x_{\sigma(k)}$ serisi de ıraksak olur. Bu ise $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması ile çelişir. □

Şartsız yakınsak serilerin çalışmaları Tanım 3.3.16'ya dayalı olduğundan bazı zorluklar çıkar. Bundan dolayı şartsız yakınsak serilerin tanımına denk olan daha kullanışlı bir tanım verilecektir.

Tanım 3.3.19. Bir Banach uzayının elemanlarının $\sum_k x_k$ serisi verilsin. Bu durumda $\alpha(k) = \pm 1$ katsayılarının herhangi seçimi için $\sum_k \alpha(k)x_k$ serisi yakınsak oluyorsa $\sum_k x_k$ serisine mükemmel yakınsak seri denir.

Teorem 3.3.20. *[70, 2] Bir Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi için aşağıdakiler denktir:*

(i) *$\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsaktır,*

(ii) *$\sum_k x_k$ serisi alt serisel yakınsaktır, yani (n_k) tam sayılarının her artan dizisi için $\sum_k x_{n_k}$ serisi yakınsaktır,*

(iii) *$\sum_k x_k$ serisi mükemmel yakınsaktır,*

(iv) *F, $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin herhangi bir sonlu alt kümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. Sadece $(i) \Rightarrow (iv)$ olduğunu göstereceğiz.

(iv)'deki ifadenin sağlanmadığını kabul edelim. Bu durumda en az bir $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin sonlu bir F_n alt kümesi bulunabilir. $n_1 = 1$ ve $A_1 = F_{n_1}$ olsun. $n_2 = \max A_1$ ve

$$B_1 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2\} \setminus A_1$$

olarak seçilsin. Aynı şekilde $A_2 = F_{n_2}$, $n_3 = \max A_2$ ve

$$B_2 = \{n_2 + 1, \ldots, n_3\} \setminus A_2$$

alarak devam edilirse bir (n_k) dizisini ve $\{n_k + 1, \ldots, n_{k+1}\} = A_k \cup B_k$ kısmı elde edelir. Buradan π permütasyonu A_k'nın B_k'dan önce geldiği şekilde alınırsa Cauchy yakınsaklık kriterinden, $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi ıraksak olur. □

Şartsız yakınsaklığı gerektiren aşağıdaki teorem ispatsız verilecektir.

Teorem 3.3.21. *[70, Orlicz-Pettis Teoremi] $\sum_k x_k$ bir X Banach uzayındaki her alt serisi zayıf yakınsak olan bir seri ise $\sum_k x_k$ şartsız yakınsak bir seridir.*

Teorem 3.3.22. *[84] Herhangi bir X Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $(t(k)) \in \ell_\infty$ için $\sum_k t(k)x_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.*

İspat. $t(k) = \pm 1$ için $\sum_k t(k)x_k$ yakınsak iken, $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olduğu Teorem 3.3.20'den elde edilir.

$\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak olsun. X uzayı tam olduğundan Cauchy kriterini kullanarak, $\sum_k t(k)x_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Buna göre

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=m}^{n} t(k)x_k\right\| &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|x^*\left(\sum_{k=m}^{n} t(k)x_k\right)\right| \\ &\leq \sup_{m\leq k\leq n} |t(k)| \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k=m}^{n} |x^*(x_k)|\end{aligned}$$

olacağından, teoremin ispatı için

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k\leq m} |x^*(x_k)| = 0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak olduğundan Teorem 3.3.20 (iv)'den, $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $\min F > m_\varepsilon$ olmak üzere, herhangi bir $F \subset \mathbb{N}$ sonlu alt kümesi için

$$\left\|\sum_{k\in F} x_k\right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Sabit olan bir $x^* \in B_{X^*}$ için $Re\, x^*(x_k)$ kısmını göz önüne alalım. $n > m > m_\varepsilon$ olarak seçilerek

$$F^+ = \{m \leq k \leq n : Re\, x^*(x_k) \geq 0\}$$

ve

$$F^- = \{m \leq k \leq n : Re\, x^*(x_k) < 0\}$$

kümeleri oluşturulduğunda

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} |Re\, x^*(x_k)| &= \left|Re\, x^*\left(\sum_{k\in F^+} x_k\right)\right| + \left|Re\, x^*\left(\sum_{k\in F^-} x_k\right)\right| \\ &\leq \left\|\sum_{k\in F^+} x_k\right\| + \left\|\sum_{k\in F^-} x_k\right\| \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, $\sum_{k=m}^{n} |Im\, x^*(x_k)| < 2\varepsilon$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 3.3.23. [8] X bir Banach uzayı ve $\sum_k x_k$, X uzayının elemanlarının bir serisi olsun. Her $x^* \in X^*$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$$

ise $\sum_k x_k$ serisine zayıf şartsız Cauchy seri denir. Bu tanıma denk olarak, her π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi zayıf Cauchy ise $\sum_k x_k$ serisine zayıf şartsız Cauchy seri denir.

Aşağıda verilecek olan lemma zayıf şartsız Cauchy serilerinin temel özelliklerini içermektedir.

Lemma 3.3.24. *[70, 71] Aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) $\sum_k x_k$ *zayıf şartsız Cauchy seridir,*

(ii) Herhangi bir $t = (t(k)) \in l_\infty$ *dizisi için*

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t(k)x_k \right\| \leq C. \sup_n |t(n)|$$

olacak şekilde $C > 0$ *sabiti vardır,*

(iii) Herhangi bir $t = (t(k)) \in c_0$ *dizisi için* $\sum_{k=1}^{\infty} t(k)x_k$ *serisi yakınsaktır,*

(iv) Doğal sayıların herhangi bir sonlu F *alt kümesi ve herhangi bir* $\pm$ *işareti için*

$$\left\| \sum_{k \in F} \pm x_k \right\| \leq C$$

olacak şekilde $C > 0$ *sabiti vardır.*

İspat. (i)'nin sağlandığını kabul edelim ve

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} t(k)x_k \in X : t = (t(k)) \in l_\infty, \|t\|_\infty \leq 1 \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Herhangi bir $t = (t(k)) \in B_{l_\infty}$ ve herhengi bir $x^* \in B_{X^*}$ için

$$\begin{aligned} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^{n} t(k)x_k \right) \right| &\leq |x^*(t(1)x_1)| + \ldots + |x^*(t(n)x_n)| \\ &= |t(1)x^*(x_1)| + \ldots + |t(n)x^*(x_n)| \\ &\leq \sup_n |t(n)| \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k| \\ &= C. \sup_n |t(n)| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan S kümesi zayıf sınırlı ve böylece sınırlı olur. Bu da (ii)'nin doğruluğunu gösterir.

(ii) sağlansın ve $(t(k)) \in c_0$ olsun. Bu durumda $m < n$ olarak alınırsa

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} t(k)x_k\right\| \leq C. \sup_{m\leq k\leq n} |t(k)| \to 0$$

olur. Böylece Cauchy yakınsaklık kriterinden $\sum_{k=1}^{\infty} t(k)x_k$ serisi yakınsak olur.

(iii) sağlanırsa

$$T : c_0 \to X, \quad t(k) \to T(t(k)) = \sum_k t(k)x_k$$

operatörünü tanımlayabiliriz. T açıkca lineerdir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^{n} t_j(k)x_k - \sum_{k=1}^{n} t(k)x_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n}(t_j(k) - t(k))x_k\right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |t_j(k) - t(k)|\|x_k\| \to 0 \end{aligned}$$

olacağından, T sınırlı bir operatördür. Böylece B_{c_0} üzerinde T'nin değeri sınırlıdır. $\sum_{k\in F} \pm x_k$ formundaki vektörler B_{c_0} üzerinde T'nin değerleri arasındadır ve bu da (iv) şıkkını ifade eder.

Son olarak (iv) sağlanırsa herhangi bir $x^* \in B_{X^*}$, doğal sayıların herhangi sonlu bir F alt kümesi ve herhangi $\pm$ işaretleri için

$$\begin{aligned} \sum_{k\in F} |x^*(x_k)| &= \sum_{k\in F} \pm x^*(x_k) \\ &= x^* \left(\sum_{k\in F} \pm x_k\right) \\ &\leq \left\|\sum_{k\in F} \pm x_k\right\| \\ &\leq C \end{aligned}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.3.25. *[70] Bir X Banach uzayındaki her şartsız yakınsak seri zayıf şartsız Cauchy seridir.*

İspat. $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak ise her π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi yakınsaktır. Herhangi bir $x^* \in X^*$ için $\sum_k x^*(x_{\pi(k)})$ serisi yakınsak olur. Nümerik serilerde şartsız yakınsaklık ile mutlak yakınsaklık denk olduğundan

$$\sum_k |x^*(x_k)| < \infty$$

olarak elde edilir ve böylece $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy seri olur. □

Yukarıdaki önermenin tersi her zaman sağlanmayabilir. (e_n), c_0 uzayının standart bazı olmak üzere, $\sum_n e_n$ zayıf şartsız Cauchy seridir; fakat şartsız yakınsak değildir.

3.4 c_0 Uzayını İçeren Banach Uzayları

Bu kısımda, c_0 uzayının kopyasını ya da tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonu verilecektir. Burada, c_0 uzayının standart bazına denk olan temel diziler c_0-dizisi olarak adlandırılacaktır. İlk olarak, kopya ve tamamlayıcı kopya tanımları verilecektir.

Tanım 3.4.1. [83] X ve Y Banach uzayları olmak üzere, X uzayı Y uzayına izomorfik bir altuzaya sahipse X uzayı Y uzayının bir kopyasını içerir denir. Ayrıca X uzayı Y uzayına izomorfik tamamlayıcı bir altuzaya sahipse X uzayı Y uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir denir.

Şimdi, c_0'ın ℓ_∞ uzayının tamamlayıcı altuzayı olmadığını gösterelim.

Lemma 3.4.2. *[70] Her sayılabilir sonsuz $\mathbb{S}$ kümesi, herhangi iki elemanı sonlu kesişime sahip olan sonsuz alt kümelerin sayılamaz bir $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ailesini içerir.*

İspat. $\mathbb{S}$ kümesi $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılar olarak alalım ve $\mathcal{I} = [0,1] \setminus \mathbb{S}$ olsun. Her $i \in \mathcal{I}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q_n \to i, \quad n \to \infty$$

olacak şekilde $(q_n) \subset \mathbb{S}$ dizisi seçilirse $\mathbb{A}_i = \{(q_n) : q_n \to i\}$ şeklindeki kümeler, i irrasyonel sayı olduğu için sayılamaz-sonsuz elemanlı ve $i \neq j$ iken $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j$ sonlu kesişimli olacağından, lemmanın şartlarını sağlar. $\square$

$\mathbb{A}$, doğal sayıların herhangi bir alt kümesi olmak üzere, ℓ_∞ uzayının $\ell_\infty(\mathbb{A})$ altuzayı,

$$\ell_\infty(\mathbb{A}) = \{x = (x(k)) \in \ell_\infty : k \notin \mathbb{A} \text{ ise x(k)} = 0\}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.4.3. *[70] Her $x \in c_0$ için $Tx = 0$ olmak üzere, $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ sınırlı bir operatör olsun. Bu takdirde her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için $Tx = 0$ olacak şekilde doğal sayıların sonsuz bir $\mathbb{A}$ alt kümesi vardır.*

İspat. Bunu görmek için Lemma 3.4.2'de verilen doğal sayıların sonsuz alt kümelerinin $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ailesini göz önüne alalım ve böyle kümeler için $Tx_i \neq 0$ olacak şekilde $x_i \in \ell_\infty(\mathbb{A}_i)$ elemanlarının bulunduğunu kabul edelim. Normalizasyon ile her $i \in \mathcal{I}$ için $\|x_i\|_\infty = 1$ olarak kabul edelim. $\mathcal{I}$ sayılamaz olduğundan

$$\mathcal{I}_n = \{i \in \mathcal{I} : (Tx_i)(n) \neq 0\}$$

kümesinin sayılamaz olduğu $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Benzer şekilde, $\mathcal{I}_n$ sayılamaz olduğundan

$$\mathcal{I}_{n,k} = \left\{ i \in \mathcal{I} : |(Tx_i)(n)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

kümesinin de sayılamaz olduğu $k \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\mathcal{I}_{n,k}$ kümesi sayılamaz olacak şekilde n ve k sabitlensin. $\mathbb{J}$, $\mathcal{I}_{n,k}$'nın sonlu bir alt kümesi ve $|\mathbb{J}| = m$ olsun. Bu durumda

$$y = \sum_{j \in J} \text{sgn } [(Tx_j)(n)] x_j$$

olarak alınırsa y'nin seçiminden dolayı,

$$(Ty)(n) = \sum_{j \in J} \text{sgn } [(Tx_j)(n)](Tx_j)(n) \geq \frac{m}{k} \tag{3}$$

olur. $i \neq j$ iken $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j$ sonlu olduğundan, w sonlu destekli ve $\|z\| \leq 1$ olmak üzere, $y = w + z$ olarak yazabiliriz. Bu yüzden T üzerindeki hipotezden dolayı

$$T(y) = T(w) + T(z) = T(z)$$

ve böylece $\|T(y)\| \leq \|T\|\|z\| \leq \|T\|$ olarak elde edilir. Bu ise (3)'deki ifadeden dolayı,

$$m \leq k\|T\|$$

olması demektir. Bu ifade, $\mathcal{I}_{n,k}$'nın her sonlu alt kümesi için sağlanacağından, $\mathcal{I}_{n,k}$ kümesinin sonlu olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.4. *[70, Phillips-Sobczyk Teoremi] ℓ_∞ uzayından c_0 uzayına sınırlı bir izdüşüm operatörü yoktur.*

İspat. $P : \ell_\infty \to c_0$ sınırlı bir izdüşüm operatörü olsun. $T = I - P$ operatörünü göz önüne alalım. $P : \ell_\infty \to c_0$ sınırlı bir izdüşüm olduğundan her $x \in c_0$ için

$$Px = x \text{ ve } Tx = (I - P)(x) = 0$$

olur. Bu yüzden $T = I - P$ operatörüne Teorem 3.4.3'ü uygularsak her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için

$$Tx = (I - P)(x) = 0$$

olacak şekilde doğal sayıların sonsuz bir $\mathbb{A}$ alt kümesi elde ederiz. Buradan her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için

$$Px = x$$

olduğu açıktır. Bu ise bir çelişkidir. $\square$

Şimdi de, c_0 uzayının kopyasını içeren Banach uzayının karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3.4.5. *[71] (x_n) yarı normalize edilmiş bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zayıf şartsız yakınsak bir seri olsun. Bu durumda (x_n) temel dizisi c_0 uzayının birim vektör bazına denktir. Yani $[x_n]$ uzayı c_0 uzayına izomorfiktir.*

İspat. (x_n) bir temel dizi ve $\sum_n t(n)x_n$ serisi yakınsak olsun. $(\sum_{k=1}^{n} t(k)x_k)$ bir Cauchy dizisi olacağından

$$|t(n)|\|x_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} t(k)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} t(k)x_k \right\|$$

dizisi, $n \to \infty$ iken limit alınırsa sıfıra yakınsar. Buradan $\inf_n \|x_n\| > 0$ olduğundan $t(n) \to 0$ olur, yani $(t(n)) \in c_0$'dır. Böylece $(t(n)) \in c_0$ için $\sum_n t(n)e_n$ serisi yakınsak olur.

Tersine, $(t(n)) \in c_0$ olsun. (e_n) dizisi c_0 uzayı için bir Schauder bazı olduğundan, $\sum_n t(n)e_n$ yakınsaktır. (x_n) bir temel dizi ve $\sum_n x_n$ zayıf şartsız yakınsak seri olduğundan Lemma 3.3.24 kullanılırsa, $\sum_n t(n)x_n$ serisi yakınsak olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.6. *[8, Bessaga-Pelczynski Teoremi] X bir Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) X uzayında şartsız yakınsak olamayan bir zayıf şartsız Cauchy seri vardır,

(ii) $\inf_n \|x_n\| > 0$ olacak şekilde X uzayında bir zayıf şartsız Cauchy $\sum_n x_n$ serisi vardır,

(iii) X uzayı c_0 uzayına izomorfik olan bir altuzayı içerir.

İspat. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız yakınsak; fakat şartsız yakınsak değilse, indislerin en az bir (σ_n) permütasyonu için $\sum_n x_{\sigma_n}$ serisi yakınsak değildir. Cauchy yakınsaklık kriterinden,

$$\inf_n \left\| \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} x_{\sigma_i} \right\| > 0$$

olacak şekilde indislerin artan bir (q_n) dizisi vardır. Buradan

$$y_n = \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} x_{\sigma_i}$$

olarak alınırsa, $\sum_n y_n$ serisi zayıf şartsız yakınsak olur ve böylece (ii) şartı elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $\inf_n \|x_n\| > 0$ olmak üzere $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız yakınsak olsun. Zayıf şartsız yakınsak serinin tanımından, (x_n) dizisi sıfıra zayıf yakınsak olur. Böylece her $x^* \in X^*$ için

$$\inf_n \|x_n\| > 0 \text{ ve } x^*(x_n) \to 0$$

olduğundan Bessaga-Pelczynski seçme prensibinin (Önerme 3.2.22) şartları sağlanır, dolayısıyla (x_{n_k}) alt dizisi bir temel dizi olacak şekilde (n_k) dizisi mevcuttur. Bu durumda $\inf_k \|x_{p_n}\| > 0$ ve $\sum_k x_{n_k}$ şartsız yakınsak bir seri olduğundan (x_{n_k}) dizisi, Teorem 3.4.5'in şartlarını sağlar. Böylece X uzayı c_0 uzayına izomorfik olan $[x_{n_k}]$ altuzayını içerir.

$(iii) \Rightarrow (i)$. $T : c_0 \to X$ bir izomorfizma ve $x_n = Te_n$ olsun. $\sum_n e_n$ serisi şartsız yakınsak olmadığından, izomorfizma kullanılırsa, $\sum_n x_n$ serisi de şartsız yakınsak olmaz. Diğer taraftan, $\sum_n e_n$ zayıf şartsız yakınsak ve bu özellik izomorfizma altında değişmez kaldığından, $\sum_n x_n$ serisi de zayıf şartsız yakınsak olur. □

Son olarak, c_0 uzayının tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonunu verelim. Öncelikle Sobczyk teoreminde (Teorem 3.4.9) kullanılacak olan aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Önerme 3.4.7. *[89] Bir X Banach uzayından c_0 uzayına olan sınırlı-lineer operatörler, X^* uzayında sıfıra zayıf* yakınsak olan dizilere karşılık gelir. Yani $T : X \to c_0$ sürekli ve lineer bir operatör olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $T(x) = (x_n^*(x))$ ve $x_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olacak şekilde $(x_n^*) \subseteq X^*$ dizisinin bulunmasıdır.*

İspat. $(x_n^*) \subseteq X^*$ için $x_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olsun. Buradan $(x_n^*(x)) \in c_0$ ve böylece

$$T : X \to c_0, \quad T(x) = (x_n^*(x))$$

operatörü iyi tanımlı olur. T operatörünün lineerliği açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\,(x_n^*(x))\,| \\ &\leq \left(\sup_n \|x_n^*\|\right) \|x\| \end{aligned}$$

olur. Her $x \in X$ için $x_n^*(x) \to 0$ olduğundan (x_n^*) sınırlı bir dizidir. Düzgün sınırlılık prensibinden, $\sup_n \|x_n^*\| < \infty$ olur. Böylece T operatörü sürekli ve lineerdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_n |x_n^*(x)| \\ &= \sup_n \sup_{\|x\| \leq 1} |x_n^*(x)| \\ &= \sup_n \|x_n^*\| \end{aligned}$$

olur.

Tersine, T operatörünün sürekli ve lineer olduğunu kabul edelim. Buradan her $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \subset X$ için

$$P_n : X \to \mathbb{K}, \quad P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = x_n$$

standart izdüşüm operatörünü tanımlayalım. Bu durumda $P_n \circ T : X \to \mathbb{K}$ operatörü sürekli ve lineerdir. Buradan $x_n^* = P_n \circ T$ olarak alınırsa $x \in X$ için

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \\ &= (P_1(T(x)), P_2(T(x)), \ldots, P_n(T(x)), \ldots) \\ &= (P_n(T(x))) \\ &= (x_n^*(x)) \end{aligned} \tag{4}$$

eşitliği elde edilir. Bu yüzden her $x \in X$ için $Tx \in c_0$ olduğundan (4)'deki ifadeden, $(x_n^*(x)) \to 0$ olur. $\square$

Sobczyk teoreminin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı ispatsız vereceğiz.

Lemma 3.4.8. *[70] X bir Banach uzayı olsun.*

(i) X ayrılabilir ise B_{X^*} zayıf topolojiye göre metriklenebilirdir.*

(ii) $(x_n^*) \subset X^*$, X için ayıran bir dizi olsun, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n^*(x) = 0$ iken $x = 0$'dır. Bu takdirde X uzayının her zayıf kompakt alt kümesi zayıf topolojiye göre metriklenebilirdir.

Teorem 3.4.9. *[70, Sobczyk Teoremi] X ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. E uzayı X'in kapalı bir altuzayı ve $T : E \to c_0$ sınırlı bir operatör ise $\widehat{T}|_E = T$ ve $\|\widehat{T}\| \leq 2\|T\|$ olacak şekilde $\widehat{T} : X \to c_0$ operatörü vardır.*

İspat. Genelliği bozmayacağından $\|T\| = 1$ olarak kabul edelim. Önerme 3.4.7'den T operatörü, bazı $(f_n^*) \subset E^*$ fonksiyonelleri için

$$T(x) = (f_n^*(x))$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca her n için $f_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak ve $\|f_n^*\| \leq 1$'dir. Hahn-Banach teoreminden, her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_n^*\| \leq 1 \text{ ve } x_n^*|_E = f_n^*$$

olacak şekilde $x_n^* \in X^*$ mevcuttur. X ayrılabilir olduğundan Lemma 3.4.8 göz önüne alınırsa B_{X^*} zayıf* topolojiye göre metriklenebilirdir. ρ, B_{X^*} üzerinde zayıf* topoloji ile üretilen metrik olsun. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n^*, B_{X^*} \cap E^\perp) = 0$$

olduğunu göstereceğiz. Bu durum sağlanmazsa, en az bir $\varepsilon > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(x_{n_k}^*, B_{X^*} \cap E^\perp) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $(x_{n_k}^*) \subset (x_n^*)$ vardır. $x_{n_{k_j}}^* \to x^*$ zayıf* yakınsak olmak üzere, $(x_{n_{k_j}}^*) \subset (x_{n_k}^*)$ olsun. Her bir $e \in E$ için

$$x^*(e) = \lim_j x_{n_{k_j}}^*(e) = \lim_j f_{n_{k_j}}^*(e) = 0$$

olduğundan $x^* \in B_{X^*} \cap E^\perp$ olur. Böylece her j için

$$\rho(x_{n_{k_j}}^*, x^*) \geq \varepsilon \tag{5}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, $\rho(\cdot\,, B_{X^*} \cap E^\perp) \geq \varepsilon$ fonksiyonu B_{X^*} üzerinde zayıf* sürekli olduğundan

$$\lim_{j\to\infty} \rho(x_{n_{k_j}}^*, B_{X^*} \cap E^\perp) = \rho(x^*, B_{X^*} \cap E^\perp) = 0 \tag{6}$$

olur. Açıkça, (5) ve (6)'da bulunan ifadeler aynı anda sağlanmaz. Böylece göstermek istediğimizi elde etmiş oluruz.

$E^\perp$ zayıf* kapalı olduğundan $B_{X^*} \cap E^\perp$ kümesi zayıf* kompakt olacağından her bir n için

$$\rho(x_n^*, v_n^*) = \rho(x_n^*, B_{X^*} \cap E^\perp)$$

olacak şekilde $v_n^* \in B_{X^*} \cap E^\perp$ elemanını seçebiliriz. $y_n^* = x_n^* - v_n^*$ ve X uzayında $\widehat{T}$ operatörü $\widehat{T}(x) = (y_n^*(x))$ şeklinde tanımlanırsa $y_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olduğundan $\widehat{T}x \in c_0$ olur. Ayrıca her bir $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}(x)\| &= \sup_n |y_n^*(x)| \\ &= \sup_n (x_n^*(x) - v_n^*(x)) \\ &\leq \sup_n (\|x_n^*\| + \|v_n^*\|) \|x\| \\ &\leq 2\|x\| \end{aligned}$$

olacağından $\|\widehat{T}\| \leq 2$ olarak bulunur. □

Sonuç 3.4.10. *[70] E, X ayrılabilir Banach uzayının kapalı lineer bir altuzayı olsun. Bu takdirde E uzayı c_0 uzayına izomorfik ise X uzayından E uzayına bir P izdüşüm operatörü vardır.*

İspat. $T : E \to c_0$ bir izomorfizma olsun. Sobczyk teoreminden (Teorem 3.4.9), T operatörünün

$$\widehat{T}|_E = T \text{ ve } \|\widehat{T}\| \leq 2\|T\|$$

olacak şekilde bir $\widehat{T} : X \to c_0$ genişlemesi vardır. Buradan

$$P = T^{-1} \circ \widehat{T}$$

operatörünün X uzayından E uzayına bir izdüşüm ve $\|P\| \leq 2$ olduğu kolayca görülür. □

Önerme 3.4.11. *[83] (x_n) dizisi X uzayında bir c_0-dizisi olsun. (x_n) dizisinin tamamlayıcı dizi olması için gerek ve yeter*

$$x_n^*(x_m) = \delta(n, m)$$

şartını sağlayan bir $(x_n^*) \subset X^*$ zayıf sıfır dizisinin bulunmasıdır.*

Tamamlayıcı c_0 dizilerini bulmak için kullanılacak temel kriter aşağıdaki teorem olacaktır.

Teorem 3.4.12. *[83] $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X Banach uzayında zayıf şartsız yakınsak bir seri olsun. (x_n) dizisinin tamamlayıcı bir c_0-alt dizisine (temel diziye) sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$x_n^*(x_n) \not\to 0$$

şartını sağlayan bir $(x_n^*) \subset X^*$ zayıf sıfır dizisinin bulunmasıdır.*

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X Banach uzayında zayıf şartsız yakınsak bir seri ve $(x_n^*) \subset X^*$

$$x_n^*(x_n) \not\to 0$$

olacak şekilde bir zayıf* sıfır dizi olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n^*(x_n)| > \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut olduğunu kabul edelim. Buradan T operatörünü, Önerme 3.4.7'deki gibi (x_n^*) ile ilişkili sınırlı-lineer bir operatör olarak alalım. Bu durumda T operatörü her $x \in X$ için

$$T : X \to c_0, \quad T(x) = (x_n^*(x))$$

şeklinde tanımlanabilir.

Şimdi, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ serilerinin Teorem 3.4.5'in şartlarını sağladığını göstereceğiz. İlk olarak, (x_n) dizisini göz önüne alalım. Teoremin ifadesinden, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olduğu görülür. Diğer taraftan, T operatörünün sınırlılığından, $\|Tx\| \leq C.\|x\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır. Kabulden,

$$0 < \delta < \|Tx_n\| \leq C.\|x_n\|$$

olduğundan her $n \in \mathbf{N}$ için

$$0 < \frac{\delta}{C} = \beta < \|x_n\|$$

olarak elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin yarı normalize edilmiş olması demektir. Şimdi de, $T(x_n)$ dizisini göz önüne alırsak, $|x_n^*(x_n)| = |T(x_n)| > \delta$ olduğundan $T(x_n)$ dizisi yarı normalize edilmiş olur. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zayıf şartsız Cauchy seri olduğundan her $y^* \in c_0^* = l_1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |y^*(Tx_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |T^* y^*(x_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \\ &< \infty \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (x_n) ve $T(x_n)$ dizilerinin her ikisinin de c_0-dizisi olduğunu kabul edebiliriz. $T(x_n) = (y_n)$ olarak alalım. F, (x_n) dizisinin kapalı-lineer gereni ve G de, (y_n) dizisinin kapalı-lineer gereni ise

$$T|_F : F \to G, \quad T(x_n) = (y_n)$$

şeklinde tanımlı operatör bir izomorfizma olur. Sonuç 3.4.10'dan, (y_n) dizilerinin kapalı lineer spanı olan G uzayı c_0 uzayında tamamlayıcı olur. $P : c_0 \to G$ bir izdüşüm olsun. Bu durumda

$$(T|_F)^{-1} \circ P \circ T : X \to F$$

şeklinde tanımlı operatör bir izdüşümdür. Sonuç olarak (x_n) dizisi, X Banach uzayında c_0 uzayının birim vektör bazına denk olan tamamlayıcı bir dizi olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

3.5 $L_p(\mu, X)$ Uzayı Üzerinde c_0 Uzayının Tamamlayıcı Kopyası

Bu kısımda, ilk olarak Rademacher fonksiyonları ve limitlenmiş küme kavramları tanımlanıp ana teoremin ispatında kullanılacak olan önemli bir lemma verilecektir.

Tanım 3.5.1. [83] Her $t \in [0, 1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$r_n(t) = \text{sgn }(\sin(2^n \pi t))$$

ile tanımlı fonksiyonlara Rademacher fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında Lebesgue ölçülebilirdir ve $\lambda\{r_n = 1\} = \lambda\{r_n = -1\} = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanır.

Tanım 3.5.2. [45] M, X Banach uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. Her bir $(x_n^*) \subset X^*$ zayıf* sıfır dizisi için

$$\lim_n \sup_{x \in M} |x_n^*(x)| = 0$$

oluyorsa M kümesine limitlenmiş bir küme denir.

Teorem 3.4.12'nin farklı bir versiyonu olan aşağıdaki lemmayı ispatsız verelim.

Lemma 3.5.3. *[45] X Banach uzayı c_0 uzayının birim vektör bazına denk olan limitlenmemiş bir (x_n) dizisini içerirse X uzayı c_0 uzayının bir tamamlayıcı kopyasını içerir.*

Teorem 3.5.4. *[45] (Ω, Σ, μ) tamamen atomik olmayan bir ölçüm uzayı olsun. X Banach uzayı c_0 uzayının bir kopyasını içeriyorsa $L_p(\mu, X)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayı c_0 uzayının bir tamamlayıcı kopyasını içerir.*

İspat. c_0 uzayının birim vektör bazına denk ve $L_p(\mu, X)$ uzayında limitlenmeyen fonksiyonların bir dizisini inşa edeceğiz ve böylece Lemma 3.5.3'ün ifadesiyle ispat tamamlanacaktır.

$x_m^*(x_n) = \delta(m, n)$ olmak üzere, (x_n) dizisi X uzayında c_0 uzayının birim bazına denk ve (x_n^*) dizisi X^* uzayında sınırlı olsun. Lebesgue ölçümüne sahip

$[0,1]$ aralığının düşünülmesi yeterlidir. Buradan (r_n) Rademacher fonksiyonları yardımıyla $L_p(\mu, X)$ uzayındaki bir (f_n) dizisini

$$f_n = r_n x_n$$

ve $(L_p(\mu, X))^*$ uzayındaki bir (f_n^*) dizisini

$$f_n^* = r_n^* x_n^*$$

olarak tanımlayalım.

(f_n) dizisinin c_0 uzayının birim bazına denk bir dizi olduğunu göstereceğiz. (x_n), c_0 uzayının birim bazının bir kopyası olduğundan reel sayıların her $(a(i))$ sonlu dizisi için

$$h_1 \max_{1\le i\le s} |a(i)| \le \left\| \sum_{i=1}^{s} a(i) x_i \right\|_X \le h_2 \max_{1\le i\le s} |a(i)|$$

eşitsizliğini sağlayan $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^+$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $[0,1]$ üzerinde $|r_i(t)| = 1$ olduğundan

$$h_1 \max_{1\le i\le s} |a(i)| \le \left\| \sum_{i=1}^{s} a(i) r_i(t) x_i \right\|_X \le h_2 \max_{1\le i\le s} |a(i)|, \quad t \in [0,1]$$

olsun. Bu durumda

$$h_1 \max_{1\le i\le s} |a(i)| \le \left\| \sum_{i=1}^{s} a(i) f_i \right\|_{L_p(\mu,X)} \le h_2 \max_{1\le i\le s} |a(i)|$$

olur. Bu ise (f_n) dizisinin c_0 uzayının birim bazına denk olması demektir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n^*(f_n) = \int_{[0,1]} x_n^*(x_n) r_n^2(t) d\mu = 1$$

olduğu görülür. Böylece geriye sadece $f_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olduğunu göstermek kalır. $h \in L_p(\mu, X)$ alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |f_n^*(h)| &= \left| \int_{[0,1]} x_n^*\,(h(t))\, r_n(t) d\mu \right| \\ &\le \|x_n^*\| \left\| \int_{[0,1]} h(t) r_n(t) d\mu \right\| \end{aligned}$$

olur. (x_n^*) sınırlı ve

$$\lim_n \left\| \int_{[0,1]} h(t) r_n(t) d\mu \right\| = 0$$

olduğundan

$$\lim_n f_n^*(h) = 0$$

olarak elde edilir. Burada h keyfi olduğundan $f_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olur. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

3.6 $C(K,X)$ Uzayı Üzerinde c_0 Uzayının Tamamlayıcı Kopyası

Bu kısımda $C(K,X)$ uzayının c_0'ın tamamlayıcı kopyasını daima içerdiği gösterilecektir. İlk olarak, ispatta kullanılacak olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.6.1. *[20, Urysohn Teoremi] X bir normal uzay ve A, B kümeleri X uzayının ayrık kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = 0$ ve her $x \in B$ için $f(x) = 1$ olacak şekilde $f : X \to [0,1]$ sürekli bir dönüşüm vardır.*

Teorem 3.6.2. *[43] K sonsuz boyutlu kompakt bir Hausdorff uzayı ve X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $C(K,X)$ uzayı c_0 uzayına izomorfik tamamlayıcı bir altuzayı içerir.*

İspat. X sonsuz boyutlu olduğundan her n için $\|x_n^*\| = 1$ olmak üzere, X^* uzayında sıfıra zayıf* yakınsak bir (x_n^*) dizisi vardır, yani her $x \in X$ için

$$x_n^*(x) \to 0$$

dır. Diğer taraftan, K sonsuz boyutlu olduğundan K uzayının ikişer-ikişer ayrık boş olmayan açıklarının bir (G_n) dizisi vardır. $(x_n) \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n^*(x_n) = 1 \text{ ve } \|x_n\| \leq 2$$

olacak şekilde bir dizi olsun. Her bir n için $t_n \in G_n$ dizisini seçelim. Buradan $T : C(K,X) \to \ell_\infty$ operatörünü

$$T(\phi) = x_n^*(\phi(t_n))$$

olacak şekilde tanımlayalım. T operatörünün sınırlı-lineer olduğu açıktır. Ayrıca $f \in C(K)$ ve $x \in X$ ise $T(f(.)x) = (f(t_n)x_n^*(x))$; fakat her bir n için

$$|f(t_n)x_n^*(x)| \leq \|f\|\|x_n^*(x)\|$$

olacağından

$$\lim_n f(t_n)x_n^*(x) = 0$$

olur. Buradan

$$\{f(.)x : f \in C(K), x \in X\}$$

kümesinin lineer gereni $C(K,X)$ uzayında yoğun olduğundan T operatörü c_0 değerli olur. Urysohn teoreminden (Teorem 3.6.1), her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(t_n) = 1, f_n(K \setminus G_n) = \{0\} \text{ ve } \|f_n\| = 1$$

olacak şekilde $f_n \in C(K)$ vardır. σ, doğal sayıların sonlu bir alt kümesi ise

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n\in\sigma} f_n(.)x_n \right\| &= \sup_{t\in K} \left\| \sum_{n\in\sigma} f_n(t)x_n \right\| \\ &= \sup_{t\in\cup_{n\in\sigma}G_n} \|f_n(t)x_n\| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

olur. Böylece Lemma 3.3.24'den, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(.)x_n$, $C(K,X)$ uzayında bir zayıf şartsız Cauchy seridir. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$T(f(.)x_n) = e_n$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} T(f(.)x_n)$, c_0 uzayında şartsız yakınsak olmayan bir seridir. Bessaga-Pelczynski teoreminden (Teorem 3.4.6), $T|_H : H \to T(H)$ örten bir izomorfizma olacak şekilde c_0 uzayına izomorfik, $C(K,X)$ uzayının bir H altuzayı vardır. Sobczyk Teoreminden (Teorem 3.4.9), $T(H)$ altuzayı c_0 uzayında tamamlayıcı olur. Buradan

$$P_1 : c_0 \to T(H)$$

sürekli bir izdüşüm operatörü ise

$$P = (T|_H)^{-1} \circ P_1 \circ T$$

$C(K,X)$ uzayından H üzerine sürekli ve lineer bir izdüşümdür. Bu ise $C(K,X)$ uzayının c_0 uzayına izomorfik tamamlayıcı bir altuzayı içerdiğini gösterir.

$\square$

4 cs UZAYINI İÇEREN BANACH UZAYLARI

Bu bölümde, bir Banach uzayının yakınsak serilerin uzayı cs'nin kopyasını içermesinin gerek ve yeter şartı verilecektir. Bunu vermeden önce bu bölümün giriş kısmında bazı hazırlıklar yapılacaktır.

4.1 Giriş

Yakınsak seri teşkil eden dizilerin kümesini

$$cs = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \text{ yakınsak} \right\}$$

ile tanımladığımızı hatırlatalım.

Teorem 4.1.1. *cs kümesi dizilerde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir vektör uzayı oluşturup,*

$$\|x\|_{cs} = \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} x(k) \right|$$

normu ile bir Banach uzayı teşkil eder.

İspat. cs'nin vektör uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. $x = (x(n)) \in cs$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \right| &= \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x(k) \right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} x(k) \right| \\ &\leq \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} x(k) \right| \end{aligned}$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} x(k) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} x(k) \right|$$

olduğundan $\|x\|_{cs} = \sup_n \left|\sum_{k=n}^{\infty} x(k)\right| < \infty$, yani sınırlı olur. $\|.\|_{cs}$'nin cs uzayında bir norm teşkil ettiğini gösterelim.

(i) $\|x\|_{cs} = 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=n}^{\infty} x(k) = 0$ olur. Öyle ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x(n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} x(k) = 0 - 0 = 0$$

olacağından $x = 0$ olarak bulunur.

(ii) $\alpha \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{cs} &= \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha x(k) \right| \\ &= |\alpha| \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} x(k) \right| \\ &= |\alpha| \|x\|_{cs} \end{aligned}$$

olur.

(iii) $y = (y(n)) \in cs$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{cs} &= \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} (x(k)+y(k)) \right| \\ &\leq \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} x(k) \right| + \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} y(k) \right| \\ &= \|x\|_{cs} + \|y\|_{cs} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece $(cs, \|.\|_{cs})$ bir normlu uzay olur. Şimdi ise $(cs, \|.\|_{cs})$ uzayının tam olduğunu gösterelim.

$(x_n) \subset cs$ bir Cauchy dizisi olsun. Yani her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. (x_n) dizisinin k-ıncı bileşenini $(x_n(k))$ ile gösterelim. Buradan her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} |x_n(k) - x_m(k)| &= \left| \sum_{i=k}^{\infty} (x_n(i) - x_m(i)) - \sum_{i=k+1}^{\infty} (x_n(i) - x_m(i)) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=k}^{\infty} (x_n(i) - x_m(i)) \right| + \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} (x_n(i) - x_m(i)) \right| \\ &\leq 2\|x_n - x_m\| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için $(x_n(k)) \subseteq \mathbb{K}$ skalerlerin dizisi bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{K}$ tam olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \to x(k)$ olur. Buradan her $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\sup_i \left| \sum_{k=i}^{\infty} (x_n(k) - x_m(k)) \right| < \varepsilon$$

olduğundan her $n, m > n_\varepsilon$ ve herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=i}^{\infty} (x_n(k) - x_m(k)) \right| < \varepsilon$$

olarak elde edilir. Öyle ise $n \to \infty$ iken limite geçilirse her $\varepsilon > 0$, her $m > n_\varepsilon$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\sum_{k=i}^{\infty}(x(k) - x_m(k))\right| \le \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $x_m \to x$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \|x(k)\| &= \sup_i \left|\sum_{k=i}^{\infty} x(k)\right| \\ &\le \sup_i \left|\sum_{k=i}^{\infty} x(k) - x_m(k)\right| + \sup_i \left|\sum_{k=i}^{\infty} x_m(k)\right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan $x \in cs$ ve böylece $(cs, \|.\|_{cs})$ uzayı tam normlu bir uzay olur. □

Teorem 4.1.2.

$$b_n(k) = \begin{cases} -1 & , \quad k = n-1 \\ 1 & , \quad k = n \\ 0 & , \quad \textit{diğerleri} \end{cases} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots)$$

olmak üzere, $\{b_n\} \subset cs$ kümesi cs uzayı için bir Schauder bazıdır.

İspat. (b_n^*), (b_n) dizisinin biortogonal fonksiyonelleri olmak üzere, (b_n) dizisinin cs uzayının bir bazı olduğunu görmek için her bir $x = (x(n)) \in cs$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(x) b_n$$

olduğunu ispatlamamız gerekiyor. (b_n^*) fonksiyonellerini hesaplarsak

$$b_n^* = \left(\sum_{k=n}^{\infty} e_k\right), \quad (k \in \mathbb{N})$$

olarak elde edilir. Buradan herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ verildiğinde

$$\begin{aligned} \left\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n^*(x) b_n\right\|_{cs} &= \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^*(x) b_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \sum_{k=n}^{\infty} x(k)\right\| \\ &= \|b_{N+1}\big(x(N+1) + \ldots\big) + b_{N+2}\big(x(N+2) + \ldots\big) + \ldots\| \\ &= \| - \big(x(N+1) + x(N+2) + \ldots\big), x(N+1), \ldots\| \\ &= \sup_n |0, x(N+1) + \ldots, x(N+2) + \ldots, \ldots| \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece $n \geq 2$ için

$$\sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=N+k-1}^{\infty} x(i) \right| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

olacağından (b_n) dizisi cs uzayı için bir bazdır. □

Ayrıca hatırlatalım ki; her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|b_n\|_{cs} = 1$ olduğundan (b_n) dizisi cs uzayının standart bir bazıdır. Aşağıdaki teoremi vermeden önce cs^* ile l_1 ve cs^{**} ile l_∞ uzaylarının izomorfik olduğunu not edelim.

Teorem 4.1.3. *$\sum_n b_n$, cs uzayında zayıf şartsız Cauchy seridir; fakat şartsız yakınsak bir seri değildir.*

İspat. $\sum_n b_n$ serisinin genel teriminin limiti sıfıra gitmediğinden, yakınsak değildir ve böylece şartsız yakınsak olamaz. Diğer taraftan, her $x^* \in cs^*$ için

$$\begin{aligned} \sum_n |x^*(b_n)| &= \sum_n |x^*(e_n - e_{n-1})| \\ &\leq \sum_n |x^*(e_n)| + \sum_n |x^*(e_{n-1})| \end{aligned}$$

ve $\sum_n e_n$ serisi c_0 uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olduğundan yukarıdaki toplam sonlu olur. Bu yüzden $\sum_n b_n$ zayıf şartsız Cauchy seridir. □

4.2 cs Uzayının Kopyasının Karakterizasyonu

Bu kısımda ilk olarak cs uzayıdaki sınırlı-lineer operatör ve kompakt operatörlerin karakterizasyonu, sırasıyla zayıf şartsız Cauchy ve şartsız yakınsak seriler yardımıyla yapılacaktır. Daha sonra, cs'nin sonsuz boyutlu bir altuzayının cs uzayına izomorfik ve cs uzayında tamamlayıcı olduğu gösterilecek ve son olarak, bölümün ana teoremi verilecektir.

Teorem 4.2.1. *(x_n), X Banach uzayında bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere, $T : cs \to X$ sınırlı-lineer bir operatör olması için gerek ve yeter şart $\sum_n x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olmasıdır.*

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere, $T : cs \to X$ sınırlı-lineer bir operatör olsun. Her bir $x^* \in X^*$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(Tb_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |T^* x^*(b_n)| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Adjoint operatörünün özelliğinden, $T^*x^* \in cs^*$ ve (b_n) dizisi cs uzayında bir zayıf şartsız Cauchy seri teşkil ettiğinden yukarıdaki toplam sonludur. Bu ise $\sum_n x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olması demektir.

Tersine, $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy olsun. Buradan

$$T : c_{00} \to X, \quad T\alpha = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) x_k$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) x_k \in X$ olacağından T dönüşümü iyi tanımlıdır. Şimdi

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) x_k \in X : \alpha = \alpha(i) \in c_{00}, \ \|\alpha\|_\infty \leq 1 \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Her $x^* \in X^*$ için

$$\begin{aligned}
\left| x^* \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| &= \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) \right) x^*(x_1) + \ldots + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \alpha(i) \right) x^*(x_n) \right| \\
&\leq \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) \right) x^*(x_1) \right| + \ldots + \left| \left(\sum_{i=n}^{\infty} \alpha(i) \right) x^*(x_n) \right| \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) \right| \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy serisi olduğundan

$$\left| x^* \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| \leq M. \max_{1 \leq k \leq n} \left| \left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha(i) \right) \right|$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sayısı vardır. Bu eşitsizlikten, S kümesi zayıf sınırlı ve böylece norm sınırlı olur. cs AD-uzay özelliğine sahip olduğundan T operatörü

$$T : cs \to X$$

sınırlı-lineer operatörüne genişletilebilir. Diğer taraftan, her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$Tb_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_j(i) \right) x_k = x_j$$

olur. □

Teorem 4.2.2. *X bir Banach uzayı ve $\sum_n x_n$ zayıf şartsız Cauchy seri olsun. Bu takdirde $\sum_n x_n$ serisinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere, $T : cs \to X$ operatörünün kompakt olmasıdır.*

İspat. $\sum_n x_n$ şartsız yakınsak bir seri ve S_n, b_k bazı ile ilişkili kısmi toplam izdüşümü olsun. T operatörünün kompakt olması için

$$\lim_{n\to\infty} \|T - TS_n\| = 0 \tag{7}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, şartsız yakınsak serilerin özelliğinden (Teorem 3.3.20), K; $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin sonlu bir altkümesi olmak üzere

$$\left\|\sum_{k\in K} x_k\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n = n_\varepsilon$ sayısını bulabiliriz. Şimdi, $x^* \in B_{X^*}$ için $Re\, x^*(x_k)$ kısmını göz önüne alalım. $n > m > n_\varepsilon$ olacak şekilde seçelim ve aynı zamanda

$$K^+ = \{m \leq k \leq n : x^*(x_k) \geq 0\}$$

ve

$$K^- = \{m \leq k \leq n : x^*(x_k) < 0\}$$

kümelerini oluşturalım. Buradan $\|x^*\| \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in K} |x^*(x_k)| &= \left|x^*\left(\sum_{k\in K^+} x_k\right)\right| + \left|x^*\left(\sum_{k\in K^-} x_k\right)\right| \\
&\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|x^*\left(\sum_{k\in K^+} x_k\right)\right| + \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|x^*\left(\sum_{k\in K^-} x_k\right)\right| \\
&= \left\|\sum_{k\in K^+} x_k\right\| + \left\|\sum_{k\in K^-} x_k\right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\alpha = (\alpha(n)) \in B_{c_{00}}$ ise her $x^* \in X^*$ ve $n \geq m$ için

$$\begin{aligned}
|x^*(T\alpha - TS_m(\alpha))| &= \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\alpha(i)\right)x_k - \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\alpha(i)\right)x_k\right)\right| \\
&= \left|x^*\left(\sum_{k=m+1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\alpha(i)\right)x_k\right)\right| \\
&\leq \max_{m+1\leq i\leq n}\left|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(i)\right)\right| \sum_{k=m+1}^{n}|x^*(x_k)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. *cs* *AD*-uzay özelliğine sahip olduğundan $T : cs \to X$ genişletilebilir ve böylece

$$\begin{aligned}
\|T - TS_m\| &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(T - TS_m)\alpha)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (7)'deki ifade sağlanır.

T operatörün kompakt olduğunu kabul edelim. Buradan

$$T^{**} : cs^{**} \to X \subset X^{**}$$

operatörünü göz önüne alalım. T^{**} operatörünün $B_{cs^{**}}$ kümesine kısıtlanışı zayıf*-norm süreklidir. Bu yüzden her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\pi(n)}$ serisi cs^{**} uzayında zayıf* yakınsak olduğundan her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi X uzayında yakınsak olur. Bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin X uzayında şartsız yakınsak olması demektir. $\square$

Teorem 4.2.3. *(z_k), cs uzayında normalize edilmiş bir blok temel dizi olsun. Bu takdirde (z_k) dizisi (b_k) bazı ile izomorfiktir ve $[z_k]$, cs uzayının tamamlayıcı bir altuzayıdır.*

İspat. (z_k) blok dizisini

$$z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \alpha(j) b_j, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots$ pozitif tam sayılar ve $(\alpha(j))$ $(j \in \mathbb{N})$ skalerler olmak üzere, $\|z_k\|_{cs} = \sup_{r_{k-1}+1 \le j \le r_k} |\alpha(j)| = 1$ olsun. İlk olarak (z_k) ile (b_k) dizilerinin izomorfik olduğunu gösterelim. Herhangi bir $c(1), c(2), \ldots, c(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ skalerleri için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) z_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \alpha(j) b_j \right\| \\ &\le \sup_{1 \le k \le m} |c(k)| \sup_{r_{k-1}+1 \le j \le r_k} |\alpha(j)| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) b_k \right\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (z_k) ile (b_k) dizileri izomorfik olur. Şimdi $[z_k]$ nın cs uzayında tamamlayıcı olduğunu göstermek için $P : cs \to [z_k]$ operatörünü inşa edelim ve sınırlı-lineer bir izdüşüm operatörü olduğunu gösterelim. (b_k) dizisine biortogonal olan fonksiyonelleri,

$$b_m^* = \left(\sum_{k=m}^{\infty} e_k \right), \quad (k \in \mathbb{N})$$

olarak elde etmiştik, yani

$$b_m^*(b_k) = \begin{cases} 1 & , \quad m = k \\ 0 & , \quad m \ne k \end{cases} \quad (m, k = 1, 2, \ldots)$$

olur. Şimdi,

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j)\alpha(j) = 1$$

olacak şekilde $(c(j))$ $(r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k)$ skalerlerini seçelim. Buradan

$$z_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j)b_j^*$$

olarak alırsak

$$\begin{aligned} \|z_k^*\|_{cs^*} &= \left\| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j)b_j^* \right\| \\ &= \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z_m^*(z_k) &= \sum_{i=r_{m-1}+1}^{r_m} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(i)\alpha(j)b_i^*(b_j) \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad m = k \\ 0 & , \quad m \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu yüzden (z_k^*) ile (z_k) dizileri biortogonal olur. Böylece P izdüşüm operatörünü,

$$P(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha)z_k$$

şeklinde tanımlayabiliriz. P operatörünün lineerliği açıktır. Diğer taraftan her bir $\alpha = (\alpha(n)) \in c_{00}$ için

$$\begin{aligned} \|P(\alpha)\|_{cs} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha)z_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha)b_k \right\| \\ &= \sup_{1\leq k\leq n} |z_k^*(\alpha)| = \sup_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j)b_j^*(\alpha) \right| \\ &= \sup_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) \sum_{i=j}^{\infty} \alpha(i) \right| \\ &\leq \sup_{1\leq k\leq n} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| \sup_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \sum_{i=j}^{\infty} \alpha(i) \right| \\ &= \|\alpha\|_{cs} \end{aligned}$$

olacağından P operatörü sınırlı olur ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.4. *Y, cs uzayının herhangi sonsuz boyutlu kapalı bir altuzayı olsun. Bu durumda cs uzayına izomorfik ve cs uzayında tamamlayıcı olan Y'nin kapalı bir Z altuzayı vardır.*

İspat. Y uzayı sonsuz boyutlu olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|y_n\| = 1$ olmak üzere $1 \leq k \leq n$ için

$$b_k^*(y_n) = 0$$

olacak şekilde $(y_n) \subset Y$ dizisi vardır. Eğer bu ifade sağlanmazsa, bazı $k \leq n$ indisleri için $b_k^*(y_n) \neq 0$ olur. Buradan

$$S_M : cs \to Y, \quad S_M\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) b_n\right) = \sum_{n=1}^{M} \alpha(n) b_n$$

kısmi toplam izdüşümünü tanımlayalım. Bu operatör lineer ve süreklidir. Buradan $y \neq 0$ olacak şekilde $y \in Y$ dizisini alırsak bazı $k \leq n$ indisleri için

$$b_k^*(y_n) \neq 0$$

olduğundan en az bir $M \in \mathbb{N}$ için $S_M(y) \neq 0$ olur. Bu yüzden S_M operatörü $1-1$ ve böylece açık dönüşüm teoreminden izomorfizma olur. Fakat, Y uzayı sonsuz boyutlu olduğundan bu imkansızdır. Bessaga-Pelczynski seçme prensibinden, (b_n) bazının (z_k) blok temel dizisine izomorfik olan $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ altdizisi vardır. Teorem 4.2.3'den, (z_k) ile (b_n) izomorfik ve $[z_k]$, cs uzayında tamamlayıcı olduğundan Küçük Karmaşıklık Prensibi göz önüne alınırsa, (y_{n_k}) bir temel dizi, (y_{n_k}) ile (b_n) izomorfik ve $Z = [y_{n_k}]$, cs uzayının tamamlayıcı altuzayı olur. □

Teorem 4.2.5. *$T : cs \to X$ sınırlı-lineer bir operatör ise aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) T kompakttır,

(ii) T zayıf kompakttır,

(iii) T kesin singülerdir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. Açık bir şekilde görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. T'nin kesin singüler bir operatör olmadığını kabul edelim. Bu durumda cs uzayının

$$T : Y \to T(Y)$$

örten bir izomorfizma olacak şekilde sonsuz boyutlu kapalı bir Y altuzayı vardır. Buradan T zayıf kompakt ve T^{-1} sınırlı olduğundan

$$T.T^{-1} = I$$

birim operatörü zayıf kompakt olur. B_Y zayıf kompakt ve böylece Y uzayı yansımalı (refleksif) olur. Fakat Y, cs nin kapalı bir altuzayı ve cs yansımalı uzay olmadığından, Teorem 4.2.4 kullanılırsa bu bir çelişkidir.

$(iii) \Rightarrow (i)$. T kompakt olmasın. Teorem 4.2.2'den, $\sum_n Tb_n$ serisi şartsız yakınsak olmaz ve böylece Teorem 3.3.20'den, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{k\in F_n} Tb_k \right\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve tam sayıların ayrık sonlu altkümelerinin bir F_n dizisi vardır. $x_n = \sum_{k\in F_n} Tb_k$ olarak alalım ve (x_n) ile (b_n) dizilerinin izomorfik olduğunu gösterelim. $\sum_{k\in F_n} b_k$, cs uzayında sıfıra zayıf yakınsak olduğundan (x_n) dizisi de X uzayında sıfıra zayıf yakınsak olur. Böylece

$$\|x_n\| \geq \varepsilon \text{ ve } x_n \to 0$$

zayıf yakınsak olduğundan Bessaga-Pelczynski seçme prensibinin şartları sağlanır. (x_n) dizisinin K baz sabitine sahip bir temel dizi olduğunu farzedelim. Buradan $\alpha = (\alpha(n)) \in c_{00}$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) \sum_{k\in F_n} Tb_k \right\| \\
&\leq \|T\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha(n)| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in F_n} b_k \right\|_{cs} \\
&= \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) b_n \right\|
\end{aligned}$$

ve diğer taraftan,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) b_n \right\| \leq 2K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) x_n \right\|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu yüzden (x_n) dizisi cs uzayının (b_n) bazına denk ve böylece $\left(\sum_{k\in F_n} b_k\right)$ ile denk olur. Yani T operatörü kesin singüler olamaz. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Şimdi, yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan faydalanarak bu bölümün ana teoremini vereceğiz.

Teorem 4.2.6. *X Banach uzayındaki her zayıf şartsız Cauchy serinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart X'in cs uzayının kopyasını içermemesidir.*

İspat. X uzayı cs uzayının kopyasını içermesin ve $\sum_n x_n$, X uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olsun. Teorem 4.2.1'den, her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere,

$$T : cs \to X$$

sınırlı-lineer bir operatör vardır. Diğer taraftan, X'in cs uzayının kopyasını içermemesi demek, X uzayının cs uzayına izomorfik hiç bir altuzayının olmaması demektir. Teorem 4.2.4 göz önüne alınırsa, cs uzayının her sonsuz boyutlu altuzayı cs'nin bir kopyasını içerdiğinden, T kesin singüler bir operatör olmalıdır. Buradan Teorem 4.2.5'i kullanırsak, T operatörü kompakt olur ve böylece Teorem 4.2.2'den, $\sum_n x_n$ şartsız yakınsak bir seri olur.

$\sum_n b_n$ serisi cs uzayında zayıf şartsız Cauchy; fakat şartsız yakınsak olmadığından teoremin tersi kolayca elde edilir. □

5 c_0 UZAYININ KOPYASINI İÇEREN NORMLU UZAYLARIN TAMLIĞI ve BARELLEDLİĞİ

Bu bölümde, bir X normlu uzayındaki bir dizi ve ℓ_∞, c_0 uzaylarının Cesàro etki alanları kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlanacaktır. Daha sonra, bu dizi uzayları ve X uzayındaki zayıf ve zayıf* şartsız Cauchy serileri yardımıyla, X uzayının tamlığı ve barelledliği karakterize edilecektir.

5.1 Giriş

Bir $a = (a(k))$ dizisinin Cesàro dönüşümü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau_a(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a(k)$$

şeklinde tanımlanan $\tau_a = (\tau_a(n))$ dizisi olsun. Cesàro dizi uzayları ile ilgili bazı çalışmalar [90, 91, 92, 93, 94, 95] numaralı çalışmalarda yer almaktadır. $x = (x_k)$, X normlu uzayındaki ve $x^* = (x_k^*)$ ise X^* uzayındaki bir dizi olmak üzere,

$$\begin{aligned} SC(x) &= \left\{a = (a(k)) \in (\ell_\infty)_C : \sum_k \tau_a(k)x_k,\ X \text{ uzayında yakınsak}\right\}, \\ SC_w(x) &= \left\{a = (a(k)) \in (\ell_\infty)_C : \sum_k \tau_a(k)x_k,\ X \text{ uzayında zayıf yakınsak}\right\}, \end{aligned}$$

ve

$$SC_{w^*}(x^*) = \left\{a = (a(k)) \in (\ell_\infty)_C : \sum_k \tau_a(k)x_k^*,\ X^* \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $SC(x)$, $SC_w(x)$ ve $SC_{w^*}(x^*)$ kümeleri, vektör uzayı işlemleri ile lineer uzaylardır. Ayrıca,

$$\|a\|_{SC} = \|Ca\|_\infty$$

normu ile normlu uzay olurlar.Buradan X Banach uzayı c_0 uzayının kopyasını içermezse,

(i) $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy serisidir.

(ii) $\sum_k x_k$ şartsız yakınsak seridir.

(iii) $SC(x) = SC_w(x) = (l_\infty)_C$.

şartları denk olur. Aksi belirtilmedikçe X Banach uzayının c_0 uzayının kopyasını içerdiği kabul edilecektir.

5.2 $SC(x)$ Uzayı Yardımıyla Tamlık

Bu kısımda, $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy seri olmak üzere, $SC(x)$ uzayı yardımıyla X normlu uzayının tamlığı karakterize edilecektir.

Teorem 5.2.1. *X Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olması için gerek ve yeter şart $SC(x)$ uzayının tam olmasıdır.*

İspat. $\sum_k x_k$, X uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olsun ve S kümesini

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a(k)x_k : \, |a(k)| \leq 1, \; k = 1, 2, \ldots, n; \; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{8}$$

şeklinde tanımlayalım. Lemma 3.3.24'den, S kümesi sınırlı olur. Her $s \in S$ için $\|s\| \leq K$ $(K > 0)$ olduğunu kabul edelim.

(a_m), $SC(x)$ uzayındaki bir Cauchy dizisi olsun. $SC(x) \subset (\ell_\infty)_C$ ve $(\ell_\infty)_C$ Banach uzayı olduğundan $a_m \to a_0$ $(m \to \infty)$ olacak şekilde $a = (a_0(k)) \in (\ell_\infty)_C$ vardır. Bu yüzden $\varepsilon > 0$, her $m \geq m_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $\frac{3K}{\varepsilon}|\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)| < 1$ olduğundan

$$\frac{3K}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} (\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)) x_k \in S$$

ve böylece $m > m_0$ için

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)\right) x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için (a_m) dizisi $SC(x)$ uzayında olduğundan $n \geq n_0$ için

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \tau_{a_m}(k) x_k - y_m \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $(y_m) \subset X$ dizisi vardır. Her $p > q > m_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|y_p - y_q\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \tau_{a_p}(k) x_k - y_p \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \tau_{a_q}(k) x_k - y_q \right\| \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\tau_{a_q}(k) - \tau_{a_p}(k)\right) x_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olacağından (y_m), X uzayında bir Cauchy dizisi olur. Böylece $\varepsilon > 0$ ve her bir $m > m_1$ için

$$\|y_m - y_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ifadesini sağlayan $y_0 \in X$ vardır. $m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ olarak alırsak $n \geq n_0$ ve $m > m_2$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n} \tau_{a_0}(k)x_k - y_0\right\| &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n}(\tau_{a_0}(k) - \tau_{a_m}(k))x_k\right\| \\
&+ \left\|\sum_{k=1}^{n} \tau_{a_m}(k)x_k - y_m\right\| + \|y_m - y_0\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani $(a_0) \in SC(x)$ ve bu yüzden $SC(x)$ uzayı tam olur.

Şimdi, $SC(x)$ uzayının tam; fakat $\sum_k x_k$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olmadığını kabul edelim. Bu durumda c_0 uzayında $\sum_{k=1}^{n} a_0(k)x_k$ serisinin yakınsak olmadığı $a_0 = (a_0(k))$ dizisi vardır. Buradan $\tau_{b_0}(k) = a_0(k)$ olacak şekilde $b_0 = (b_0(k)) \in (c_0)_C$ dizisi bulunabileceğinden

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_{b_0}(k)x_k$$

serisi de yakınsak değildir. $b_0 = (b_0(k)) \notin SC(x)$ ve böylece $(c_0)_C \nsubseteq SC(x)$ olur. Diğer taraftan, [94, Teorem 2.4]'den, $(c_0)_C$ bir AD-uzayı olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} y_m(k) = b_0(k)$$

olacak şekilde c_{00} uzayında bir $y = (y_m(k))$ Cauchy dizisi vardır (aynı zamanda $SC(x)$ uzayındadır). Bu yüzden $SC(x)$ uzayı tam değildir. Bu ise bir çelişkidir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.2.2. *X normlu uzayının tam olması için gerek ve yeter şart X uzayındaki her $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy seri için $SC(x)$ uzayının tam olmasıdır.*

İspat. Gerek şart Teorem 5.2.1'den elde edilir. Biz yeter şartı elde edelim.

X uzayının tam olmadığını kabul edelim. Bu durumda X uzayında mutlak yakınsak; fakat yakınsak olmayan bir $\sum_k x_k$ serisi vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_k\| < \frac{1}{k2^k}$$

olsun. Buradan $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} kx_k & , \ k \text{ tek ise,} \\ -kx_k & , \ k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım ve

$$b(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ k = 1 \text{ ise}, \\ \frac{2k+1}{k+1} & , \ k \neq 1 \text{ ve } k \text{ tek ise}, \\ -\frac{2k-1}{k} & , \ k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $b = (b(k)) \in (c_0)_C$ dizisini göz önüne alalım. $\sum_k y_k$ zayıf şartsız Cauchy seri olur; fakat $\sum_k \tau_b(k) y_k$ serisi yakınsak değildir. Bu da, $(c_0)_C \nsubseteq SC(y)$ olması demektir. Böylece $SC(y)$ uzayı tam değildir. □

5.3 $SC_w(x)$ Uzayı Yardımıyla Tamlık

Bu kısımda, $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy seri olmak üzere, $SC_w(x)$ uzayı yardımıyla X normlu uzayının tamlığı karakterize edilecektir.

Lemma 5.3.1. *X Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olması için gerek ve yeter şart $(c_0)_C \subseteq SC_w(x)$ olmasıdır.*

İspat. $\sum_k x_k$ serisi zayıf şartsız Cauchy olsun. Lemma 3.3.24'den, $a = (a(k)) \in c_0$ dizisi için $\sum_{k=1}^n a(k) x_k$ serisi yakınsak olur. $b = (b(k)) \in (c_0)_C$ için $\tau_b(k) = a(k)$ olarak alırsak, $\sum_{k=1}^n \tau_b(k) x_k$ serisi yakınsak ve böylece zayıf yakınsak olur. Bu yüzden $b = (b(k)) \in SC_w(x)$ olarak elde edilir.

Tersine, $(c_0)_C \subseteq SC_w(x)$ olduğunu kabul edelim. Her $b = (b(k)) \in (c_0)_C$ dizisi için $\sum_k \tau_b(k) x_k$ serisi zayıf yakınsak olur. Şimdi, pozitif tam sayıların artan bir (n_k) dizisi için

$$z(n) = \begin{cases} \tau_b(n) & , \ n = n_k \text{ ise}, \\ 0 & , \ n \neq n_k \text{ ise} \end{cases}$$

dizisini tanımlayalım. Buradan $\sum_{i=1}^n z(i) x_i = \sum_{k=1}^n \tau_b(i_k) x_{i_k}$ serisi zayıf yakınsak ve bu yüzden $\sum_{k=1}^n \tau_b(k) x_k$ alt serisel zayıf yakınsak olur. Orlicz-Pettis teoreminden, $\sum_k \tau_b(k) x_k$ şartsız yakınsak seri olur. Buradan $\sum_k \tau_b(k) x_k$ serisi yakınsak ve böylece $\sum_k x_k$ serisi zayıf şartsız Cauchy olarak elde edilir. □

Teorem 5.3.2. *X bir Banach uzayı ve $\sum_k x_k$, X uzayında bir seri olsun. $SC_w(x)$ uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $\sum_k x_k$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olmasıdır.*

İspat. Gerek şart, Lemma 5.3.1'den kolayca elde edilir.

$\sum_k x_k$, X uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olsun. (8)'de tanımladığımız S kümesi sınırlı olduğundan her $s \in S$ için $\|s\| \leq K$ olarak alalım. (a_m), $SC_w(x)$ uzayındaki bir Cauchy dizisi olsun. $(\ell_\infty)_C$ uzayında $a_m \to a_0$ $(m \to \infty)$ olarak alalım. Buradan $\varepsilon > 0$, her $m \geq m_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $3K/\varepsilon|\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)| < 1$ olduğundan

$$\frac{3K}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)\right)x_k \in S$$

ve böylece $m > m_0$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_{a_m}(k) - \tau_{a_0}(k)\right)x_k\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $n \geq n_0$ ve her $x^* \in X^*$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\tau_{a_m}(k)x^*(x_k) - x^*(y_m)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $(y_m) \subset X$ dizisi vardır. Ayrıca, Hahn-Banach teoremini kullanırsak $\|y_p - y_q\| = |x^*(y_p - y_q)|$ olacak şekilde $x^* \in X^*$ bulunabilir. Her $p > q > m_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|y_p - y_q\| = |x^*(y_p - y_q)| < \varepsilon$$

olacağından (y_m), X uzayında bir Cauchy dizisi olur. Böylece $\varepsilon > 0$ ve $m > m_1$ için

$$\|y_m - y_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $y_0 \in X$ vardır. $m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ olarak alırsak, $n \geq n_0$ ve $m > m_2$ için

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\tau_{a_0}(k)x^*(x_k) - x^*(y_0)\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_{a_0}(k) - \tau_{a_m}(k)\right)x^*(x_k)\right| \\ &+ \left|\sum_{k=1}^{n}\tau_{a_m}(k)x^*(x_k) - x^*(y_m)\right| + |x^*(y_m) - x^*(y_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $(a_0) \in SC_w(x)$ olacağından $SC_w(x)$ uzayı tam olur. □

Lemma 5.3.3. *X normlu bir uzay ve $\sum_k x_k$, X uzayında şartsız Cauchy seri olsun. Bu takdirde $SC(x) = SC_w(x)$ olur.*

İspat. $SC_w(x) \subseteq SC(x)$ kapsamasını göstermemiz yeterlidir. $a = (a(k)) \in SC_w(x)$ olarak alırsak her $x^* \in X^*$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tau_a(k)x^*(x_k) = x^*(x)$$

olacak şekilde $x \in X$ vardır. Diğer taraftan, $\sum_k x_k$ serisi X uzayında şartsız Cauchy olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_a(k) x_k = x^{**}$$

olacak şekilde $x^{**} \in X^{**}$ vardır. Böylece, limitin tekliğinden $x^{**} = x$ olarak elde edilir. Yani $a = (a(k)) \in SC(x)$ olur.

□

Teorem 5.3.4. *X normlu uzayının tam olması için gerek ve yeter şart X uzayındaki her $\sum_k x_k$ zayıf şartsız Cauchy serisi için $SC_w(x)$ uzayının tam olmasıdır.*

İspat. Teorem 5.2.2'nin ispatındaki gibi, X uzayının tam olmadığını kabul edelim. X uzayında

$$(c_0)_C \nsubseteq SC(y)$$

kapsamasını sağlayan bir $\sum_k y_k$ zayıf şartsız Cauchy seri bulabiliriz. Bu yüzden $SC(y)$ uzayı tam değildir. $\sum_k y_k$ şartsız Cauchy seri olduğundan Lemma 5.3.3'ü göz önüne alırsak, $SC(y) = SC_w(y)$ olur. Böylece $SC_w(y)$ uzayı tam değildir. □

5.4 $SC_{w^*}(x^*)$ Uzayı Yardımıyla Barelledlik

Bu kısımda, $\sum_k x_k^*$ serisi X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy olmak üzere, $SC_{w^*}(x^*)$ uzayı yardımıyla X normlu uzayının barelledliği karakterize edilecektir.

Teorem 5.4.1. *X bir normlu uzay ve $\sum_k x_k^*$, X^* uzayındaki bir seri olmak üzere,*

(i) $\sum_k x_k^*$, *X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy seridir,*

(ii) $SC_{w^*}(x^*) = (l_\infty)_C$,

(iii) Her $x \in X$ için $\sum_k |x_k^*(x)| < \infty$

olsun. Bu durumda (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) sağlanır. Ayrıca, X normlu uzayının bir barrelled uzay olması için gerek ve yeter şart (iii) ⇒ (i) olmasıdır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. $b = (b(k)) \in (l_\infty)_C$ dizisini alalım. $\sum_k x_k^*$, X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olduğundan $\sum_k \tau_b(k) x_k^*$ serisi de X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy olur. $S_n = \sum_{k=1}^n \tau_b(k) x_k^*$ olmak üzere, (S_n) dizisi X^* uzayında sınırlı ve X^* uzayındaki zayıf* topoloji için bir Cauchy dizisidir. Böylece $\sum_k \tau_b(k) x_k^*$ serisi zayıf* yakınsak olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $SC_{w^*}(x^*) = (\ell_\infty)_C$ olsun. Her $x \in X$ ve $b = (b(k)) \in (\ell_\infty)_C$ için $\sum_{k=1}^n \tau_b(k) x_k^*$ serisi yakınsaktır. Buradan $\tau_b(k) = \operatorname{sgn} x_k^*(x)$ olarak alırsak, $\sum_k |x_k^*(x)| < \infty$ olur.

Şimdi, X bir barrelled uzay olsun. $(iii) \Rightarrow (i)$ olduğunu gösterelim. Buradan

$$S' = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a(k)x_k^* : \, |a(k)| \leq 1, \, k = 1, 2, \ldots, n; \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. S' kümesi noktasal sınırlı ve böylece X^* uzayının norm topolojisi için sınırlı olur. Bu yüzden $\sum_k x_k^*$ serisi X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy olarak elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ sağlansın; fakat X barrelled uzay olmasın. Bu durumda sınırlı olmayan bir zayıf* sınırlı $A \subseteq X^*$ kümesi vardır. Buradan $k \in \mathbb{N}$ için $(x_k^*) \subset A$ dizisini

$$\|x_k^*\| > 2^{2k}$$

olarak alalım. Böylece $k \in \mathbb{N}$ için $y_k^* = \frac{1}{2^k} x_k^*$ olarak alırsak, her $x \in X$ için $\sum_k y_k^*(x)$ serisi mutlak yakınsak olur. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|y_k^*\| > 2^k$$

olduğundan $\sum_k \frac{1}{2^k} y_k^*$ serisi yakınsak değildir. Böylece $\sum_k y_k^*$ serisi X^* uzayında zayıf şartsız Cauchy olamaz.

$\square$

KAYNAKLAR

[1] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, No. 1 in Monografje Matematyczne, Warszava-Lwów, 1932.

[2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[3] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II: Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[4] A. E. Taylor, *The extension of linear functionals*, Duke Math. J., 5 (1939), 538-547.

[5] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 516-541.

[6] A. Sobczyk, *Projection of the space (m) on its subspace (c_0)*, Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), 938-947.

[7] R. D. McWilliams, *On projections of separable subspaces of (m) onto (c)*, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 872-876.

[8] C. Bessaga, A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math., 17 (1958), 151-164.

[9] A. Pelczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math., 19 (1960), 209-228.

[10] G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1935), 357-378.

[11] G. Birkhoff, *Dependent probabilities and the space* (L), Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 24 (1938), 154-159.

[12] R. P. Boas, *Expansions of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 48(3) (1940), 467-487.

[13] S. Bochner, *Integration von funktionen, deren werte die elemente eines vectorraumes sind.*, Fund. Math., 20 (1933), 262-276.

[14] S. Bochner, A. E. Taylor, *Linear functional on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math., 39(2) (1938), 913-944.

[15] J.A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 396-414.

[16] J.A. Clarkson, *A characterization of C-spaces*, Ann. of Math., 48(2) (1947), 845-850.

[17] M. M. Day, *The space L^p with* $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 816-823.

[18] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer, Berlin, 1958.

[19] N. Dunford, *Integration and linear operations*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 474-494.

[20] N. Dunford, Jacob T. Schwartz, *Linear Operators Part I, General Theory*, Volume VII, Interscience Publishers Inc., Newyork, 1957.

[21] I. M. Gelfand, *Abstrakte funktionen und lineare operatoren*, Mat.Sb., 4(46) (1938), 235-286.

[22] N. Dunford, B.J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940), 323-392.

[23] B.J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 277-304.

[24] R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940), 114-145.

[25] A. Grothendieck, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math., 74 (1952), 168-186.

[26] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canad. J. Math., 5 (1953), 129-173.

[27] J.K. Brooks, N. Dinculeanu, *Weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and applications*, Adv. Math., 24 (1977), 172-188.

[28] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, New York, 1967.

[29] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, American Mathematical Society, 1977.

[30] S. Kwapien, *On Banach spaces containing* c_0, A supplement to the paper by J. Hoffmann-Jorgensen ”Sum of independent Banach space valued random variables ”, Studia Math., 52 (1974), 187-188.

[31] B. Maurey, *Thèrémes de factorisation pour les opérateurs linéaires á valeurs dans les espaces* L^p, Société Mathématique de France, Paris, 1974, With an English summary; Astérisque, No. 11. (French).

[32] B. Maurey, G. Pisier, *Séries de variables aléatoires indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math., 58 (1976), 45-90.

[33] G Pisier, *Une propriéte de stabilité de la classe des espaces ne contenant pas* ℓ_1, C R Acad Sci Paris Sér A, 86 (1978), 747-749.

[34] J. Bourgain, *An averaging result for co-sequences*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, 30 (1978), 83-87.

[35] J. Bourgain, *A note on the Lebesgue spaces of vector valued functions*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, 31 (1979), 45-47.

[36] J. Bourgain, *New Classes of* L^p*-Spaces*, Lecture Notes in Math. 889, Springer-Verlag, 1981.

[37] M. Talagrand, *Un nouveau* $C(K)$ *qui possède la propriètè de Grothendieck*, Israel J. Math., 37 (1980), 181-191.

[38] M. Talagrand, *Weak Cauchy sequences in* $L_1(E)$, Amer. J. Math., 106 (1984), 703-724.

[39] J. Hoffmann-Jorgensen, *Sum of independent Banach space valued random variables*, Studia Math., 52 (1974), 159-186.

[40] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* l_1, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 71 (1974), 2411-2413.

[41] N. J. Kalton, *Spaces of compact operators*, Math. Ann., 208 (1974), 267-278.

[42] E. Saab, P. Saab, *A stability property of a class of Banach spaces not containing a complemented copy of* l_1, Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 44-46.

[43] P. Cembranos, *C(K,E) contains a complemented copy of* c_0 , Proc. Amer. Math. Soc., 91(4)(1984), 556-558.

[44] L. Ronglu, *A characterization of Banach spaces containing no copy of* c_0, Chinese Sci. Bull., 7 (1984), 444.

[45] G. Emmanuele, *On complemented copies of* c_0 *in* L^p_X, $1 \leq p < \infty$, Proc. Amer. Math. Soc., 104(3)(1988), 785-786.

[46] P. N. Dowling, *Complemented copies of* c_0 *in vector-valued Hardy spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 107(1)(1989), 251-254.

[47] L. Drewnowski, *Copies of* l_∞ *in an operator space*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 108 (1990), 523-526.

[48] J. Mendoza, *Copies of* l_∞ *in* $L_p(\mu, X)$, Proc. Amer. Math. Soc., 109 (1990), 125-127.

[49] D. Leung, F. Rabiger, *Complemented copies of* c_0 *in* l_∞*-sums of Banach spaces*, Illinois J. Math., 34 (1990), 52-58.

[50] J. Mendoza, *Comlemented copies of* l_1 *in* $L_p(\mu, X)$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 111 (1992), 531-534.

[51] F. Bombal, *Distinguished subsets in vector sequence spaces*, Progress in Functional Analysis, Proceedings of the Peniscola Meeting on occasion of 60th birthday of M. Valdivia (Edited by J. Bonet et al.), Elsevier Science Publishers 1992, 293-306.

[52] L. Ronglu, B. Qingying, *Locally convex spaces containing no copy of* c_0, J. Math. Anal. Appl., 172 (1993), 205-211.

[53] S. Diaz, *Comlemented copies of* c_0 *in* $L_\infty(\mu, X)$, Proc. Amer. Math. Soc., 120 (1994), 1167-1172.

[54] L. Ronglu, M.-H. Cho, *Weakly unconditional Cauchy series on locally convex spaces*, Northeast. Math. J., 11(2) (1995), 187-190.

[55] W. Junde, L. Ronglu, *Unconditional convergent series on locally convex spaces*, Taiwanese J. Math., 4(2) (2000), 253-259.

[56] J. C. Ferrando, *Copies of* c_0 *in certain vector-valued function Banach spaces*, Math. Scand., 77 (1995), 148-152.

[57] J. C. Ferrando, *Complemented copies of* c_0 *in the vector-valued bounded function space*, J. Math. Anal. Appl., 239 (1999), 419-426.

[58] A. Aizpuru, F. J. Pérez-Fernández, *Characterizations of series in Banach spaces*, Acta Math. Univ. Comenian., 58(2) (1999), 337-344.

[59] A. Aizpuru, F. J. Pérez-Fernández, *Sequence spaces associated to a series in a Banach space(sequence spaces associated to a series)*, Indian J. pure appl. Math., 33(9) (2002), 1317-1329.

[60] F.J. Pérez-Fernández, F. Benítez-Trujillo, A. Aizpuru, *Characterizations of completeness of normed spaces through weakly unconditionally Cauchy series*, Czechoslovak Math. J., 50(125) (2000), 889-896.

[61] A. Aizpuru, A. Gutiérrez-Dávila, A. Sala, *Unconditionally Cauchy series and Cesàro summability*, J. Math. Anal. Appl., 324 (2006), 39-48 .

[62] A. Aizpuru, R. Armario, F. J. Pérez-Fernández, *Almost summability and unconditionally Cauchy series*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 15(4) (2008), 635?644.

[63] I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[64] Erdoğan S. Şuhubi, *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[65] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[66] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[67] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1978.

[68] Megginson, Robert E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[69] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, New York, 2004.

[70] F.Albiac, N. J.Kalton, *Topics in Banach Spaces Theory*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[71] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[72] W. Rudin, *Functional Analysis*, second ed., McGraw-Hill, 1991.

[73] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, New York, 1978.

[74] J. Boss, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, 2000.

[75] P. K. Kamthan, M. Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker, New York, 1981.

[76] F. Başar, *Summability Theory and Its Applications*, Bentham Science Publishers, İstanbul, 2011.

[77] I. P. Natanson, *Reel Analiz*, çev. Abdullah Yıldız ve Kevser Köklü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2005.

[78] Joshua H. Lifton, *Measure Theory and Lebesgue Integration*, Swarthmore College Mathematics Senior Conference, 1999.

[79] R. L. Wheeden, A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, Newyork, 1977.

[80] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, Newyork, 1970.

[81] G. P. Curbera, *The Space of Integrable Functions with Respect to a Vector Measure*, The degree of Doctor in Mathematics, Sevilla, September 1992.

[82] R.A. Johnson, *Atomic and nonatomic measures*, Proc. Amer. Math. Soc., 25(3) (1970), 650-655.

[83] P. Cembranos, J. Mendoza, *Banach Spaces of Vector-Valued Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[84] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[85] S. Guerre-Delabrière, *Classical Sequences in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[86] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991.

[87] Charalambos D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, 1985.

[88] M. I. Kadets, V. M. Kadets, *Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence*, Translated from the Russian by Andrei lacob, Birkhauser Verlag, Basel, 1997.

[89] C. Costara, D. Popa, *Exercises in Functional Analysis*, Kruwer Academic Publishers, 2003.

[90] B. Altay, F. Başar, *Certain topological properties and duals of the domain of a triangle matrix in a sequence space*, J. Math. Anal. Appl., 336(2) (2007), 632-645.

[91] E. Malkowsky, F. Özger, V. Velickovic, *Some spaces related to Cesàro sequence spaces and an application to crystallography*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 70(3) (2013), 867–884.

[92] P. -N. Ng, P. -Y. Lee, *Cesàro sequences spaces of non-absolute type*, Comment. Math., 20(2) (1978), 429-433.

[93] J. Shiue, *On the Cesàro sequence spaces*, Tamkang J. Math., 1(1) (1970), 19-25.

[94] M. Şengönül, F. Başar, *Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c*, Soochow J. Math., 31(1) (2005), 107-119.

[95] N. Şimşek, V. Karakaya, *Structure and some geometric properties of generalized Cesàro sequence space*, Int. J. Contemp. Math. Sci., 3(5-8) (2008), 389-399.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ramazan KAMA

Doğum Yeri ve Tarihi: Solhan / 02.06.1984

Adres: İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi A-blok

E-Posta: ra.kama12@gmail.com

Lisans: Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2003-2007)

Yüksek Lisans: Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2007-2009)

Mesleki Deneyim ve Ödüller: 2009 - … Siirt Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi