T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜZEY HACİMLERİ ve MİNİMAL YÜZEYLER

M.Aykut AKGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2009

Tezin Başlığı	:	Yüzey Hacimleri ve Minimal Yüzeyler
Tezi Hazırlayan	:	M.Aykut AKGÜN
Sınav Tarihi	:	02.07.2009

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŞ	(İnönü Üniv.)
Doç. Dr. Bayram ŞAHİN	(İnönü Üniv.)
Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ	(İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail ÖZDEMİR
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Yüzey Hacimleri ve Minimal Yüzeyler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynaçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

M.Aykut AKGÜN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜZEY HACİMLERİ VE MİNİMAL YÜZEYLER

M.Aykut AKGÜN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

109+ix sayfa

2009

Danışman: Prof. Dr. A.İhsan SİVRİDAĞ

Dört bölümden meydana gelen bu çalışmanın birinci bölümü Giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler sunuldu.

Üçüncü bölümde, R^{n+1} de n-boyutlu yüzeylerin hacimleri koordinat vektör alanları cinsinden verildi. $n = 1$ ve $n = 2$ özel hallerinde hacim formülünün, sırasıyla düzlemde bir eğrinin yay uzunluğunu ve R^3 de bir yüzeyin alanını verdiği görülür. Daha sonra R^{n+k} uzayındaki n-boyutlu yüzeylerin hacimleri ζ hacim formu kullanılarak hesaplandı.

Son bölümde Minimal Yüzeylere değinildi. Minimal yüzeylerin hacimleri ile ilgili bazı yorumlar verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Yüzey, yönlendirme, alan, hacim, hacim formu, minimal yüzey

ABSTRACT

MSc. Thesis

SURFACE VOLUMES AND MINIMAL SURFACES

M.Aykut AKGÜN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

109+ix pages

2009

Supervisor: Prof. Dr. A İhsan SİVRİDAĞ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction part of this thesis.

In the second chapter, the basic concepts and theorems used in the other chapters are given.

In the third chapter, the volumes of n-surfaces in R^{n+1} are given in terms of the coordinate vector fields. In the special case $n = 1$ and $n = 2$ it is seen that the volume formula gives the length of a curve and the area of a surface, respectively. Moreover the volume of n-dimensional surface in R^{n+k} is obtained by the help of volume form ζ.

In the last chapter, it is mentioned about the minimal surfaces. Some properties about minimal surface volume are given.

KEY WORDS: Surface, orientation, area, volume, volume form, minimal surface

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. A. İhsan Sivridağ'a ve zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan değerli hocalarım Doç. Dr. Alaettin Esen, Doç. Dr. Bayram Karadağ, Yrd. Doç. Dr. M.Kemal Özdemir ve Arş.Grv. Fulya Durak 'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tezimi yazdığım programla ilgili sorunlarımda bana yardımcı olan Doç. Dr. Bilal Altay'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamıza yön veren makaleleri edindiğim internet kolaylığını ve çalışmalarımı yapmak için her türlü imkânı sağlayan, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e ve bölümdeki diğer hocalarımıza teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

U : Açık küme

R^{n+1} : $(n+1)$ boyutlu vektör uzayı,

α : Parametrik eğri

$\dot{\alpha}$: α nın hız vektör alanı

$\ddot{\alpha}$: α eğrisinin ivmesi

M : Manifold

φ : Parametrik yüzey

V : Tanjant vektör

R_p^{n+1} : p noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı

∇_V : V yönünde türev

$V \cdot W$: İç çarpım

$\times$: Vektörel çarpım

$\|V\|$: Tanjant vektörün normu

X : Vektör alanı

$X(p)$: p noktasındaki tanjant vektörü

S : Yüzey

S_p : S nin p noktasındaki tanjant uzayı

C : Düzlemsel eğri

N : Normal vektör alanı

$N(S)$: S n-yüzeyinin küresel resmi

S^n : Birim n- küre

$\dot{X}$: X in türevi

X' : X in kovaryant türevi

D_V : V yönünde kovaryant türev

L_p : Weingarten dönüşümü

K : Gauss eğrilik fonksiyonu

w_x : 1-form

df : f nin diferensiyeli

k_i : i yinci asli eğrilik

I_p : Birinci temel form

II_p : İkinci temel form

H : Ortalama eğrilik fonksiyonu

E_i : i yinci Koordinat vektör alanı

J_ψ : ψ nin Jacobian matrisi

$\psi|_V$: ψ nin V ye kısıtlanışı

ζ : Hacim formu

Şekiller Dizini

1. GİRİŞ

Bu çalışmada özellikle $(n+1)$-uzayın içindeki n-boyutlu yüzeyler üzerinde durulmuştur. R^{n+1} deki yönlendirilebilen hiperyüzeyler n değişkenli diferensiyellenebilir fonksiyonların görüntü kümesi olarak düşünülecektir. n-boyut üzerinde çalışmanın avantajlarından biri de daha düşük boyutlardaki her kavramı rahatlıkla tanımlayabilmektir. Bu hesaplamalarda vektör alanları ve diferensiyellenebilir formlardan yararlanıldı.

$U \subset R^{n+1}$ olmak üzere $f : U \to R$ fonksiyonunun seviye kümeleri, her c reel sayısı için

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in U : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$$

şeklinde tanımlanır[1]. Burada c sayısına seviye kümesinin *yüksekliği* denir. Buradan seviye kümelerinin tanımını kullanarak yüzeyin grafikleri hakkında bilgi sahibi olabiliriz. R^{n+1} de $n-$boyutlu bir yüzey, R^{n+1} in $S = f^{-1}(c)$ formundaki boş olmayan bir S alt cümlesidir. U, R^{n+1} de açık olmak üzere $f : U \to R$, $\forall p \in S$ için $\nabla f(p) \neq 0$ şartını sağlayan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. R^2 de bir 1-yüzeye bir *Düzlem eğrisi* denir. R^3 de bir 2-yüzeye genellikle bir *Yüzey* denir. R^{n+1} de bir n-yüzeye ise özellikle $n > 2$ olduğunda bir *Hiperyüzey* denir.
S, R^{n+1} de bir yüzey olsun. S nin her bir p noktasına bir $X_p \in R_p^{n+1}$ tanjant vektörü karşılık getiren X fonksiyonuna S üzerinde bir vektör alanı denir. Buna göre;

$$X : S \to \bigcup_{p\in S} R_p^{n+1} \quad X(p) = X_p \in R_p^{n+1}$$

dir. Eğer $\forall p \in S$ için $X_p \in S_p$ ise X vektör alanına S üzerinde bir tanjant vektör alanı denir. Burada S_p, p noktasında S ye teğet olan bütün tanjant vektörlerinin uzayını göstermektedir. Benzer şekilde $\forall p \in S$ için X_p, S yüzeyine ortogonal ise X e, S üzerinde bir normal vektör alanı denir. R^{n+1} de bir S yüzeyi üzerindeki diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına S üzerinde bir *Yönlendirme* denir. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise bu yüzeye *Yönlendirilmiş yüzey* denir.

S, R^{n+1}de bir hiperyüzey, $p \in S$ ve $V \in S_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_p \ : \ & S_p \to S_p \\ & V \to L_p(V) = -\nabla_V N \end{aligned}$$

dönüşümü S yüzeyinin p noktasındaki *Weingarten Dönüşümü* olarak adlandırılır[2]. S, R^{n+1} de N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. $V \in S_p$ için $L_p(V) = -\nabla_V N$ ile tanımlanan $L_p : S_p \to S_p$ Weingarten dönüşümü, S üzerinde p den V hızıyla geçen birinin yaptığı gibi normalin dönme miktarını ölçer. Böylece L_p, S nin R^{n+1} de p deki bükülmesini ölçer. $n = 1$ için L_p,S nin p deki $K(p)$ eğriliğinin bir sayıyla çarpılmasıdır.

R^{n+1} de bir parametrik hiperyüzeyin hacmi

$$V(\varphi) = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{pmatrix} = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1(u_1,...,u_n) \\ . \\ . \\ E_n(u_1,...,u_n) \\ N(u_1,...,u_n) \end{pmatrix} du_1...du_n$$

şeklindedir[1]. Burada E_1,...,E_n ler φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır ve N de φ boyunca yönlendirme vektör alanıdır. Bu belirli integralin neden hacmi ölçtüğüne dair sezgisel bir açıklama da integralin φ boyunca hacmin büyüklüğünü ölçmesidir. Bir $\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyinin N yi içermeyen alternatif bir hacim formülü,

$$V(\varphi) = \int_U \left(\det\left(E_i.E_j\right)\right)^{1/2}$$

şeklinde de verilebilir.

Bir birebir $\varphi : U \to S$ lokal parametrizasyonunun

$$\det \begin{pmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

hacim integrandını göz önüne alalım. Eğer burada φ yerine $\psi : \varphi \circ h : U_2 \to S$ parametre değişimi alınırsa hacim integrandında φ için yazılan koordinat vektör alanları yerine ψ için yazılan koordinat vektör alanları gelecektir. Fakat bu değişiklik yüzeyin hacim integralini değiştirmez. Bu ise $p \in S$ deki hacim integrandının esas önemli kısmının S_p deki n vektörün sıralı her $\{V_1, ..., V_n\}$ kümesine

$$\zeta(V_1, ..., V_n) = \det \begin{pmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

reel sayısını karşılık getiren ζ fonksiyonu olduğunu ortaya koyar. Burada ζ fonksiyonu S üzerindeki *hacim formu* olarak adlandırılır. Hacim formunun R^{n+1} deki kompakt yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi üzerinde integrallenebilir olduğunu göreceğiz; ki bu integral S nin hacmi olacaktır. Buradaki ζ bir diferensiyel n-form örneğidir.

Son olarak da minimal yüzeyler incelenmektedir. $\varphi : U \to R^{n+1}$, R^{n+1} de sonlu hacimli bir parametrik hiperyüzey olsun. O zaman kompaktlıkla desteklenmiş normal varyasyonlara uyan hacim integralinin φ de sabit olması için gerek ve yeter şart S nin ortalama eğriliğinin sıfır olmasıdır. R^{n+1} de ortalama eğriliği sıfır olan bir parametrik hiperyüzeye *Minimal yüzey* denir[1]. Minimal denmesinin sebebi, bir minimal yüzeyin genelde, normal varyasyonlar vasıtasıyle elde edilebilecek bütün yüzeyler içinde hacmi en küçük olan yüzey olmasıdır[7].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde üçüncü ve dördüncü bölümde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Özellikle bir yüzeyin hacim hesabını yapabilmek için gerekli olan vektör alanı kavramı, parametrik eğri ve yüzey kavramları, yüzey üzerinde yönlendirme, Gauss Dönüşümü, şekil operatörü, koordinat vektör alanları ve 1-formlar üzerinde durulmuştur.

2.1 Seviye Kümeleri

Tanım 2.1.1. $U \subset R^{n+1}$ olmak üzere $f : U \rightarrow R$ fonksiyonunun seviye kümeleri, her c reel sayısı için

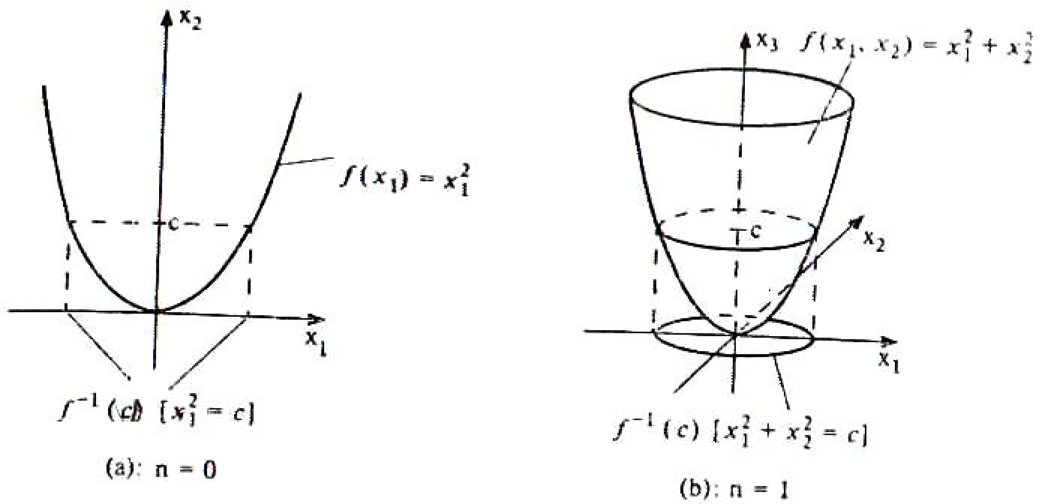
$$f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in U : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada c sayısına seviye kümesinin *yüksekliği* denir.

Seviye kümesi ve yükseklik terimleri bir fonksiyon ve o fonksiyonun grafiği arasındaki ilişkiden ortaya çıkmıştır. $f : U \rightarrow R$ fonksiyonunun grafiği R^{n+1} in bir alt kümesidir ve

$$graf(f) = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in R^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in U\right\}$$

dir. Burada $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ dir. $c \geq 0$ için f nin c yüksekliğindeki seviye kümesi, tanım kümesinin öyle bir alt kümesidir ki grafik bu alt kümenin yukarısında c yüksekliğine sahiptir (Şekil 1.1.1). $c < 0$ için de grafik bu alt kümenin altında $-c$ yüksekliğine sahiptir[1].



Şekil 1.1.1.

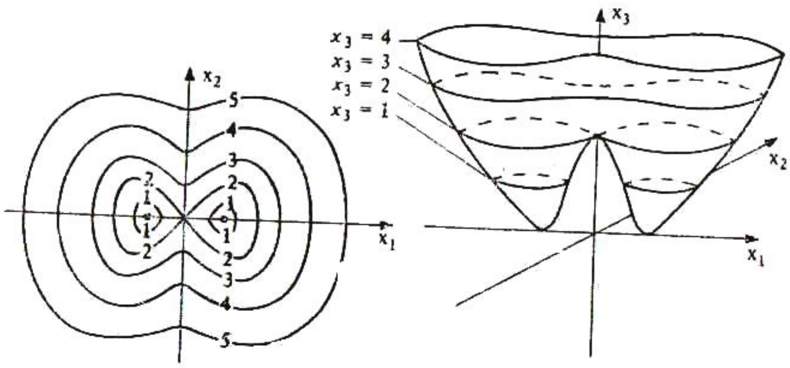
Örneğin, $f(x_1,x_2,...,x_n) = (x_1^2+...+x_n^2)$ fonksiyonunun $f^{-1}(c)$ seviye kümesi $c < 0$ ise boş kümedir. $c = 0$ ise tek bir noktadan, yani orijinden ibaret olur. $c > 0$ ve $n = 1$ ise seviye kümesi iki noktadan ibaret olur. Eğer $n = 2$ ise $f^{-1}(c)$ seviye kümesi, merkezi orijin olan $\sqrt{c}$ yarıçaplı çemberden ibaret olur. Eğer $n = 3$ ise merkezi orijin ve yarıçapı $\sqrt{c}$ olan kürelerden ibaret olur.

$n = 2$ için seviye kümeleri genelde, en azından sabit olmayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar için, R^2 de eğrilerdir. Bu eğriler topoğrafik haritada çevrel çizgilerle aynı rolü oynarlar. Eğer f nin grafiğini yerel maksimuma sahip olan bir bölge olarak düşünürsek bu, dağın tepe noktalarını ve yerel minimum ise ova diplerini ifade eder(Şekil 1.1.2). Bölge haritaları bir bölgenin topoğrafisinin tam bir resmidir. Seviye kümelerinin yardımıyla grafik tamamen belirlenebilir.

$f : R^2 \rightarrow R$ fonksiyonları için seviye eğrileriyle çalışmak f nin grafiğini çizmeyi kolaylaştırır. $f : R^3 \rightarrow R$ fonksiyonları için grafik R^4 de yatar. Fonksiyonun hareketini belirlemek için en iyi araçlar seviye kümelerinin incelenmesidir.

$U \subset R^2$ olmak üzere seviye kümeleri ile verilen $f : U \rightarrow R$ fonksiyonunun grafiğini incelemenin bir yolu şöyledir:

Düşey hareket eden ve (x_1, x_2) düzlemine paralel olan bir düzlem düşünelim. c yüksekliğine ulaştığında, $x_3 = c$ düzlemi $f^{-1}(c)$ seviye kümesinin bu düzleme ötelenmesiyle f nin grafiğini keser. Düzlem hareket ettiğinde bu kümeler f nin grafiğini oluşturur(Şekil 1.1.2)[1].



Şekil 1.1.2.

Tanım 2.1.2. R^{n+1}de bir parametrik eğri, $I \subset R$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha \quad : \quad & I \to R^{n+1} \\ & t \ \to \ \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_{n+1}(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir α diferensiyellenebilir dönüşümüne denir[2].

Tanım 2.1.3. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha : I \to M$ bir C^k sınıfından fonksiyon olsun. O zaman $\alpha(I) \subset M$ altcümlesine $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir M manifoldu üzerinde C^k sınıfından bir eğri kavramı, M nin diferensiyellenebilir yapısı olan atlasına bağlıdır. Çünkü
$\alpha_i = u_i \circ \alpha : I \to R$ fonksiyonları, u_i fonksiyonları yardımıyla tanımlanmışlardır ve u_i fonksiyonları da M nin atlası yardımıyla tanımlıdırlar. Bunlar M üzerinde yerel koordinat

fonksiyonlarıdır. O halde M nin diferensiyellenebilir yapısı ile M üzerindeki bir eğrinin diferensiyellenebilir yapısı sıkı sıkıya bağlı kavramlardır.

Tanım 2.1.4. R^n nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya Düzgün fonksiyondur denir.R^n den R ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(R^n, R)$ ile gösterilir[3].

Tanım 2.1.5. $f : M \to R$ bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. $p \in \varphi(U)$ olacak şekilde M içinde en az bir $\varphi(U)$ yüzeyi için $f \circ \varphi : U \to R$ fonksiyonu $\varphi^{-1}(p)$ noktasında düzgün ise, f fonksiyonu p noktasında düzgündür denir. f fonksiyonu M nin her noktasında düzgün ise, f fonksiyonu M üzerinde düzgündür denir[3].

Tanım 2.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere,

$$X_p : C^\infty(M, IR) \to IR$$
$$f \to X_p(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_t$$

şeklinde tanımlanan X_p fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir[4].

Tanım 2.1.7. $f : U \subset R^{n+1} \to R$, $V \in R_p^{n+1}$ ve $p \in V$ olmak üzere f nin V tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi,

$$\nabla_V f = (f \dot{\circ} \alpha)(t_0)$$

ile ifade edilir. Burada $\alpha : I \to U$ bir parametrik eğri ve $\dot{\alpha}(t_0) = V$ dir. $\nabla_V f$ nin değeri α nın seçiminden bağımsızdır.

$$\nabla_V f = (f \dot{\circ} \alpha)(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)).\dot{\alpha}(t_0) = \nabla f(p).V$$

dir[5].

2.2 Vektör Alanları

Seviye kümelerinin geometrisini çalışmamızı sağlayacak araç vektör alanlarının hesabıdır. $p \in R^{n+1}$ noktasındaki bir tanjant vektör, $V \in R^{n+1}$ olmak üzere $V = (p, v)$

şeklindedir. Geometrik olarak, V, kuyruğu orjin yerine p de olan v vektöründen ibarettir. $(n+1)$ boyutlu R_p^{n+1} tanjant vektör uzayında toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırasıyla,

$$(p,v)+(p,w)=(p,v+w)$$

ve

$$c\,(p,v)=(p,c.v)$$

şeklinde tanımlıdır. $\{v_1,...,v_{n+1}\}$, R^{n+1} in bir bazı iken $\{(p,v_1),...,(p,v_{n+1})\}$ kümesi R_p^{n+1} için bir baz oluşturur. R^{n+1} in tüm noktalarındaki tüm vektörlerin kümesi $R^{n+1}\times R^{n+1}=R^{2n+2}$ Kartezyen çarpımı ile tanımlanabilir. Buradaki toplama işlemi R^{n+1} in farklı noktalarındaki vektörlerin toplanmasına izin vermez.

(p,v) ve (p,w), p de verilen iki nokta olmak üzere bunların iç çarpımı R^{n+1} de $(p,v)\cdot(p,w)=v\cdot w$ standart iç çarpım olarak tanımlanır. (p,v) , $(p,w)\in R_p^3$ tanjant vektörlerinin vektörel çarpımı da $(p,v)\times(p,w)=(p,v\times w)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\times$, R^3 deki vektörel çarpımdır.

p deki $v=(p,v)$ ile $w=(p,w)$ vektörleri arasındaki açı θ ve $\|v\|=(v.v)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$\cos\theta=\frac{v.w}{\|v\|\,.\,\|w\|}\quad ,0\leq\theta<\pi$$

dir.

$U\subset R^{n+1}$ üzerindeki bir X vektör alanı U nun her noktasına bu noktada bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyondur. Böylece $X:U\to R^{n+1}$ fonksiyonları $p\in R^{n+1}$ için $X\,(p)=(p,X\,(p))$ olur. O halde şu tanım verilebilir:

Tanım 2.2.1. S,R^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. S nin her bir p noktasına bir $X_p\in R_p^{n+1}$ tanjant vektörü karşılık getiren X fonksiyonuna S üzerinde bir vektör alanı denir. Buna göre;

$$X:S\to\bigcup_{p\in S}R_p^{n+1}\quad X\,(p)=X_p\in R_p^{n+1}$$

dir. Eğer $\forall p\in S$ için $X_p\in S_p$ ise X vektör alanına S üzerinde bir tanjant vektör alanı denir. Burada S_p, p noktasında S ye teğet olan bütün tanjant vektörlerinin uzayını göstermektedir. Benzer şekilde $\forall p \in S$ için X_p, S yüzeyine ortogonal ise X e, S üzerinde bir normal vektör alanı denir

Bu bölümde genelde diferensiyellenebilir fonksiyonlarla ve vektör alanları ile çalışılacaktır. U, R^{n+1} de açık olmak üzere bir $f : U \to R$ fonksiyonunun bütün noktalarda kısmi türevlari var ve sürekli ise bu fonksiyona diferensiyellenebilirdir denir. $p \in U$ için $f(p) = (f_1(p), ..., f_k(p))$ olmak üzere, her $f_i : U \to R$ bileşeni diferensiyellenebilir ise $f : U \to R^k$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir denir. Eğer $X : U \to R^{n+1}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ise U üzerindeki bir X vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

U, R^{n+1} de açık olmak üzere $f : U \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun ∇f gradienti,

$$(\nabla f)(p) = \left(p, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p)\right)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $\alpha : I \to U \subset R^{n+1}$ ve $\dot{\alpha}(t) = V$ olmak üzere X diferensiyellenebilir vektör alanının V_p tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi;

$$\nabla_V X = (X \dot{\circ} \alpha)(t_0)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\nabla_V X = (\alpha(t_0), (X_1 \dot{\circ} \alpha)(t_0), ..., (X_{n+1} \dot{\circ} \alpha)(t_0)) = (p, \nabla_V X_1, ..., \nabla_V X_{n+1})$$

dir. Ayrıca X_i ler X in bileşenleridir.

Vektör alanları f nin seviye kümeleri üzerindeki çalışmalarda önemli rol oynar. Vektör alanları genelde fizikte sıvı akışlarının hız alanları olarak kullanılır. Böyle bir akışla ilgili parametrik eğrilerin bir ailesine akış doğruları denir. Gerçekten, herhangi bir diferensiyellenebilir vektör alanıyla ilgili bu akış doğruları geometride de fizikteki kadar önemlidir. Geometride bu akış çizgilerine *integral eğrileri* denir.

R^{n+1} de bir parametrik eğri, bir diferensiyellenebilir $\alpha : I \to R^{n+1}$ fonksiyonudur. Burada I, R de bir açık aralıktır. Bu şekildeki bir fonksiyonun diferensiyellenebilirliği demek, I üzerinde α nın $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_{n+1}(t))$ formunda olduğu ve her x_i nin diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olması demektir. $\alpha : I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisinin $t \in I$ anındaki hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \frac{d\alpha}{dt}(t)\right) = \left(\alpha(t), \frac{\partial x_1}{\partial t}(t), ..., \frac{\partial x_n}{\partial t}(t)\right)$$

ile verilen vektördür. Bu vektör α ya $\alpha(t)$ noktasında teğettir. Eğer $\alpha(t)$, R^{n+1}in hareketli bir noktasının her t için t anındaki yerini gösteriyorsa, $\dot{\alpha}(t)$ de t anındaki hızını gösterir[4].

Eğer $\alpha(t) \in U$ ve $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ ise $\alpha : I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisi, R^{n+1} in açık U kümesi üzerindeki X vektör alanının integral eğrisidir. Buna göre X vektör alanının α eğrisinin her noktasında verdiği tanjant vektör ile α eğrisinin o noktasındaki teğet vektörü çakışır.

Teorem 2.2.1. *X, $U \subset R^{n+1}$ üzerinde bir diferensiyellenebilir vektör alanı ve $p \in U$ olsun. O zaman X in sıfırı kapsayan bir I aralığı için $\alpha : I \to R$ integral eğrisi vardır öyle ki*

(i) $\alpha(0) = p$

(ii) Eğer $\beta : \tilde{I} \to U$, X in başka bir integral eğrisi ve $\beta(0) = p$ ise $\tilde{I} \subset I$ ve bütün $t \in \tilde{I}$ ler için $\beta(t) = \alpha(t)$
dir[1].

α integral eğrisi X in p den geçen *maksimal* integral eğrisi olarak adlandırılır.

İspat. Bu teorem birinci dereceden diferensiyel denklem sistemlerinin çözümleri için temel varlık ve teklik teoreminin yeniden düzenlenmesidir. X, U üzerinde
$X(p) = (p, X_1(p), ..., X_{n+1}(p))$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir vektör alanı olsun. Burada $X_i : U \to R$ fonksiyonları U üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bir $\alpha : I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisi $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_{n+1}(t))$ şeklindedir. Burada $x_i : I \to R$ fonksiyonları I üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α nın hız vektörü

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \frac{dx_1}{dt}(t), ..., \frac{dx_{n+1}}{dt}(t)\right)$$

dir. α, X in bir integral eğrisi olduğundan $\dot{\alpha}(t) = (X(\alpha(t)))$ olup

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = X_1(x_1(t), ..., x_{n+1}(t)) \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \frac{dx_{n+1}}{dt}(t) = X_{n+1}(x_1(t), ..., x_{n+1}(t)) \end{cases}$$

denklem sistemini sağlar. Bu ise $(n+1)-$bilinmeyenli bir birinci dereceden adi diferensiyel denklem sistemidir. Varlık teoremine göre bu tür denklemlerin çözümü için I_1 in sıfırı kapsayan bir alt aralığında $i \in \{1, ..., n+1\}$ için $x_i(0) = p_i$ olacak şekilde $x_i : I \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarının bir kümesi başlangıç şartları altında bu denklem sistemini sağlar. Burada $p = (p_1, ..., p_{n+1})$ dir.

β_1 eğrisi $\beta_1(t) = (x_1(t), ..., x_{n+1}(t))$ şeklinde seçilirse X in $\beta_1(0) = p$ olacak şekilde bir $\beta_1 : I_1 \to U$ integral eğrisini verir.

Birinci dereceden adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin teklik teoremine göre, $\tilde{x}_i : I_2 \to R$ bütün $t \in I_1 \cap I_2$ için $\tilde{x}_i(0) = p_i$, $\tilde{x}_i(t) = X_i(t)$ başlangıç şartlarıyla yukarıdaki denklemi sağlayan başka bir fonksiyon kümesi olsun. Diğer bir ifadeyle, $\beta_2(0) = p$ olacak şekilde $\beta_2 : I_2 \to U$, X in başka bir integral eğrisidir öyle ki her $t \in I_1 \cap I_2$ için $\beta_1(t) = \beta_2(t)$ dir. Buradan $\alpha(0) = p$ olan X in bir tek maksimal integral eğrisi vardır. Eğer $\beta(0) = p$ olacak şekilde $\beta : \tilde{I} \to U$, X in başka bir integral eğrisi ise β basitçe α nın daha küçük bir aralık olan $\tilde{I}$ ya kısıtlanmışıdır. □

Örnek 2.2.1. X, $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ olacak şekilde bir vektör alanı olsun.
$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ parametrik eğrisinin X in bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dX_2}{dt} = x_1 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır.

Bu denklem çiftinin genel çözümü

$$x_1(t) = c_1.\cos t + c_2.\sin t$$
$$x_2(t) = c_1.\sin t - c_2.\cos t$$

dir. $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ olmak üzere X in keyfi bir (a,b) noktası üzerindeki integral eğrisi

$$\beta(t) = (a\cos t - b\sin t, a\sin t + b\cos t)$$

dir. Buna göre $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ olmak üzere X in $(1,0)$ noktasındaki integral eğrisi

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

dir.

2.3 Tanjant Uzay

$U \subset R^{n+1}$ bir açık küme olmak üzere $f : U \to R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f^{-1}(c)$ boş olmayacak şekilde $c \in R$ ve $p \in f^{-1}(c)$ olsun. p deki bir vektör, eğer görüntüsü $f^{-1}(c)$ de bulunan R^{n+1} de bir parametrik eğrinin hız vektörü ise, bu vektör $f^{-1}(c)$ seviye kümesine teğettir denir.

Lemma 2.3.1. *f nin $p \in f^{-1}(c)$ noktasındaki gradienti bu noktada $f^{-1}(c)$ ye teğet olan bütün vektörlere diktir[1].*

İspat. p de $f^{-1}(c)$ ye teğet olan her vektör, $\alpha(t_0) = p$ ve $\alpha(I) \subset f^{-1}(c)$ olacak şekilde bazı parametrik eğriler için $\dot{\alpha}(t_0)$ formundadır. Ancak $\alpha(I) \subset f^{-1}(c)$ olması $\forall t \in I$ için $f(\alpha(t)) = c$ olmasını gerektirir. Böylece, zincir kuralından

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)).\dot{\alpha}(t_0) = \nabla f(p).\dot{\alpha}(t_0)$$

dır. □

Eğer $\nabla f(p) = 0$ ise bu lemma hiçbir şey ifade etmez. Ancak $\nabla f(p) \neq 0$ ise, p de $f^{-1}(c)$ ye teğet olan bütün vektörlerin kümesi, $\nabla f(p)$ ye dik olan bütün vektörlerden oluşan R_p^{n+1} in n-boyutlu $[\nabla f(p)]^{\perp}$ alt vektör uzayındadır. $\nabla f(p) \neq 0$ olacak şekildeki bir $p \in R^{n+1}$ noktası f nin *regüler noktası* olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.1. *U, R^{n+1} de bir açık küme ve $f : U \to R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $p \in U$, f nin bir regüler noktası ve $c = f(p)$ olsun. O zaman p de $f^{-1}(c)$ ye teğet olan bütün vektörlerin kümesi, $[\nabla f(p)]^{\perp}$ e eşittir.*

İspat. Yukarıdaki lemmada p noktasında $f^{-1}(c)$ ye teğet olan bu şekildeki her vektörün $[\nabla f(p)]^{\perp}$ de bulunduğu ispatlanmıştı. Buradan, $v = (p, v) \in [\nabla f(p)]^{\perp}$ ise o zaman $\alpha(I) \subset f^{-1}(c)$ olan bazı parametrik eğriler için $v = \dot{\alpha}(0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. α yı oluşturmak için $X(q) = (q, v)$ şeklinde tanımlanan U üzerindeki X sabit vektör alanını göz önüne alalım. X den ∇f boyunca X in bileşenini çıkararak başka bir Y vektör alanı oluşturulabilir. Bu ise

$$Y(q) = X(q) - \frac{X(q) . \nabla f(q)}{\|\nabla f(q)\|^2} \nabla f(q)$$

şeklindedir.

Y vektör alanının tanım kümesi U nun $\nabla f \neq 0$ şartını sağlayan açık bir alt kümesidir. p, f nin bir regüler noktası olduğundan p, Y nin tanım kümesindedir. Ayrıca $X(p) = V \in [\nabla f(p)]^{\perp}$ olduğundan $Y(p) = X(p)$ dir. Böylece Y nin tanım kümesindeki her q için $Y(q) \perp \nabla f(q)$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir Y vektör alanı elde edilir. Buradan $Y(p) = V$ elde edilir.

Şimdi α, p de Y nin bir integral eğrisi olsun. O zaman $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = Y(\alpha(0)) = Y(p) = X(p)$ ve α nın tanım kümesindeki her t için

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) . \dot{\alpha}(t) \overset{(1)}{=} \nabla f(\alpha(t)) . Y(\alpha(t)) \overset{(2)}{=} 0$$

dir. (1) eşitliği α, Y nin integral eğrisi olduğunda; (2) eşitliği Y$\perp$ ∇f olduğunda yazılabilir. Böylece $f(\alpha(t))$ sabittir. $f(\alpha(0)) = f(p) = c$ olduğundan da iddia edildiği gibi $\alpha(I) \subset f^{-1}(c)$ olur. $\square$

Böylece bir diferensiyellenebilir fonksiyonun bir $f^{-1}(c)$ seviye kümesi üzerindeki her p regüler noktasında p den geçen $f^{-1}(c)$ deki bütün parametrik eğrilerin bu noktadaki bütün hız vektörlerinden oluşan iyi tanımlı bir tanjant uzayı vardır. Bu uzay ise tam olarak $[\nabla f(p)]^{\perp}$ dir.

2.4 Yüzeyler

R^{n+1} de $n-$boyutlu bir yüzey, R^{n+1} in $S = f^{-1}(c)$ formundaki boş olmayan bir S alt cümlesidir. U, R^{n+1} de açık olmak üzere $f : U \to R$, $\forall p \in S$ için $\nabla f(p) \neq 0$ şartını sağlayan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. R^2 de bir 1-yüzeye bir *Düzlem eğrisi* denir. R^3 de bir 2-yüzeye genellikle bir *Yüzey* denir. R^{n+1} de bir n-yüzeye ise özellikle $n > 2$ olduğunda bir *Hiperyüzey* denir.

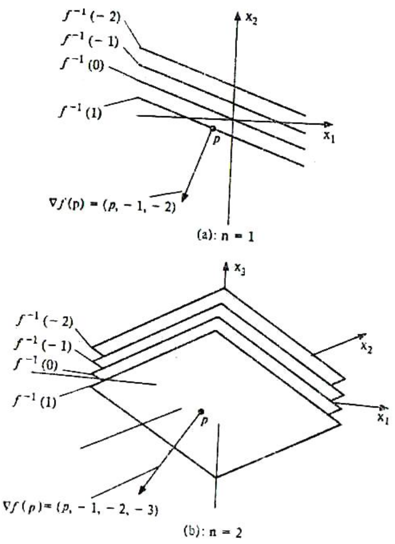
Teorem 2.3.1 den, her S hiperyüzeyinin her $p \in S$ noktasındaki bütün vektörlerin R_p^{n+1} uzayının bir n-boyutlu alt vektör uzayı olan bir tanjant uzayı vardır. Bu tanjant uzayı S_p ile gösterilir. S_p tanjant uzayı sadece S ye bağlıdır; S yi tanımlamak için kullanılan f fonksiyonundan bağımsızdır. Gerçekten, S_p, görüntüleri tamamen S de yatan R^{n+1} deki parametrik eğrilerin hız vektörleri olarak elde edilen p deki bütün vektörlerin kümesi olarak tanımlanmıştır. Eğer f, bazı $c \in R$ ler için $S = f^{-1}(c)$ olacak şekilde herhangi bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise ve $\forall p \in S$ için $\nabla f(p) \neq 0$ ise, o zaman S_p, $[\nabla f(p)]^{\perp}$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek 2.4.1. $x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1$ birim küresi $f^{-1}(1)$ seviye kümesidir. Burada $f(x_1,...,x_{n+1}) = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2$ dir. Bu bir hiperyüzeydir. Çünkü $\nabla f(x_1,...,x_{n+1}) = (x_1,...,x_{n+1}, 2x_1,...,2x_{n+1})$, $(x_1,...,x_{n+1}) = (0,...,0)$ olmadığı taktirde sıfır olmaz. Böylece $\forall p \in f^{-1}(1)$ için $\nabla f(p) \neq 0$ dır. Bu da $(0,...,0)$ noktası birim küre üzerinde olmadığından $\forall p \in f^{-1}(1)$ için $\nabla f(p) \neq 0$ olur. $n = 1$ olduğunda birim n-küre, birim çember olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.2. $0 \neq (a_1,...,a_{n+1}) \in R^{n+1}$ ve $b \in R$ için $a_1x_1 + ... + a_{n+1}x_{n+1} = b$ n-düzlemi $f^{-1}(b)$ seviye kümesidir[1]. Burada

$$f(x_1,...,x_{n+1}) = a_1x_1 + ... + a_{n+1}x_{n+1}$$

dir. $\forall b \in R$ için $\nabla\ f(x_1,...,x_{n+1}) = (x_1,...,x_{n+1},a_1,...,a_{n+1})$ hiçbir zaman sıfır olmadığından bir hiperyüzey gösterir. Bir 1-düzlem genellikle R^2 de bir *Doğru* olarak adlandırılır. Bir 2-düzlem R^3 de bir *Düzlem* olarak adlandırılır. $n > 2$ için bir n-düzlem ise R^{n+1}de bir *Hiperdüzlem* olarak adlandırılır. Aynı $(a_1,...,a_{n+1})$ değeri ile b nin iki farklı değeri paralel n-düzlemler tanımlar(Şekil 1.4.1)[1].



Şekil 1.4.1.

Örnek 2.4.3. U, R^n de bir açık ve $f : U \to R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. f nin grafiği,

$$graf(f) = \left\{(x_1,...,x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1,...,x_n)\right\}$$

kümesi $g^{-1}(0)$ a eşit olduğunda, R^{n+1} de bir hiperyüzey belirtir. Burada

$$g(x_1,...,x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1,...,x_n)$$

dir. Ayrıca

$$\nabla g(x_1,...,x_{n+1}) = \left(x_1,...,x_n,-\frac{\partial f}{\partial x_1},...,-\frac{\partial f}{\partial x_n},1\right)$$

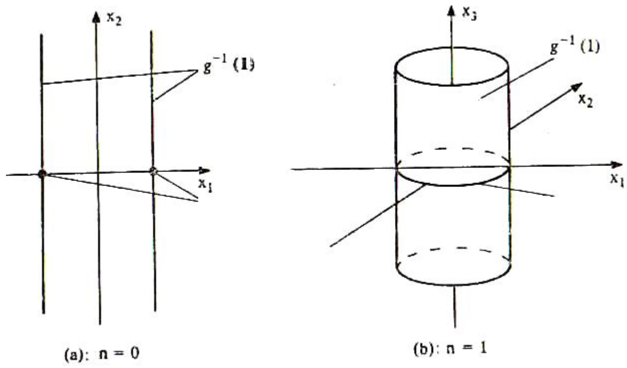
hiçbir zaman sıfır değildir.

Örnek 2.4.4. S, R^n de $S = f^{-1}(c)$ ile verilen bir $(n-1)$ yüzey olsun. Burada U, R^n de açık olmak üzere $f : U \to R$, $\forall p \in f^{-1}(c)$ için $\nabla f\,|_p \neq 0$ şartını sağlasın. $g : U_1 \to R$ olsun.

Burada $U_1 = U \times R = \left\{(x_1,...,x_{n+1}) \in R^{n+1} : (x_1,...,x_n) \in U\right\}$ dir. g ise $g(x_1,...,x_{n+1}) = f(x_1,...,x_n)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $g^{-1}(c)$, R^{n+1} de bir hiperyüzeydir. Çünkü

$$\nabla g(x_1,...,x_{n+1}) = \left(x_1,...,x_{n+1}, \frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n},0\right)$$

dır. O halde $g(x_1,...,x_{n+1}) = f(x_1,...,x_n) = c$ olduğundan $(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}) = 0$ olamaz. Çünkü $(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(c)$ olduğunda $\nabla f(x_1,...,x_n) \neq 0$ dır. $g^{-1}(c)$ n-yüzeyi S üzerinde bir *silindir* olarak adlandırılır(Şekil 1.4.2)[1].



Şekil 1.4.2.

Örnek 2.4.5. C, R^2 de x_1-ekseninin üzerinde kalan bir eğri olsun. Böylece $\forall p \in C$ için $\nabla f\mid_p \neq 0$ olacak şekilde bazı $f : U \to R$ fonksiyonları için $C = f^{-1}(c)$ dir. Burada U, $x_2 > 0$ üst yarı düzlemindedir. $S = g^{-1}(c)$ olarak tanımlayalım. Burada $g = U \times R \to R$, $g(x_1,x_2,x_3) = f\left(x_1,(x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ şeklindedir. O zaman S, bir 2-yüzeydir. Her $p = (a,b) \in C$ noktası S nin noktalarından bir çember üretir. Yani $x_1 = a$, $x_2^2+x_3^2 = b^2$ olacak şekilde $(x_1,x_2,x_3) \in R^3$ noktalarını kapsayan $x_1 = a$ düzlemideki çemberdir. S, x_1-ekseni etrafında C eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen *Dönel Yüzey* olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.1. *S, R^{n+1} de bir hiperyüzey ve $S = f^{-1}(c)$ olsun. Burada $f : U \to R$ fonksiyonu, $\forall q \in S$ için $\nabla f(q) \neq 0$ şeklindedir. $g : U \to R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve $p \in S$ olsun. $\forall q \in S$ için ya $g(q) \leq g(p)$ ya da $g(q) \geq g(p)$ dir. O zaman $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ olacak şekilde bir λ reel sayısı vardır. Burada λ sayısı, Lagrange Çarpanı olarak adlandırılır.*

İspat. S nin p deki tanjant uzayı $S_p = [\nabla f(p)]^{\perp}$ dir. Buradan $S_p^{\perp}$, $\nabla f(p)$ ile gerilen R_p^{n+1} in 1-boyutlu bir alt uzayıdır. $\nabla g(p) \in S_p^{\perp}$ ise bazı $\lambda \in R$ sayıları için $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yani her $V \in S_p$ için $\nabla g(p).V = 0$ olduğu gösterilecektir. Ancak her $V \in S_p$, $\alpha(t_0) = p$ şartını sağlayan $t_0 \in I$ ve bazı $\alpha : I \to S$ parametrik eğrileri için $V = \dot{\alpha}(t_0)$ şeklindedir. $p = \alpha(t_0)$, S üzerinde g nin ekstremum noktası ise, t_0 da I üzerinde g nin ekstremum noktasıdır. Buradan her $V \in S_p$ için

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_0) = \nabla g(\alpha(t_0)).\dot{\alpha}(t_0) = \nabla g(p).V$$

dir. Böylece iddia edildiği gibi bazı λ değerleri için $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ dir. □

Uyarı 2.4.1. *Eğer S kompakt ise her $g : U \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonu, S üzerinde bir maksimum ve bir minimum değerini alır. Yukarıdaki teorem bu ekstremum değerleri bulmak için kullanılabilir. Eğer S kompakt değilse ekstremum nokta olmayabilir.*

Örnek 2.4.6. S, $x_1^2 + x_2^2 = 1$ birim çemberi olsun. $g : R^2 \to R$, $a,b,c \in R$ olmak üzere $g(x_1,x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ şeklinde tanımlansın. O zaman $S = f^{-1}(1)$ dir. Burada f $(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ dir. Buradan

$$\nabla f(x_1,x_2) = (x_1,x_2,2x_1,2x_2)$$

dir. O halde

$$\nabla g(x_1,x_2) = (x_1,x_2,2ax_1 + 2bx_2, 2bx_1 + 2cx_2)$$

dir.

Böylece $p = (x_1,x_2) \in S$ için $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$2ax_1 + 2bx_2 = 2\lambda x_1$$
$$2bx_1 + 2cx_2 = 2\lambda x_2$$

veya

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olmasıdır. Böylece S üzerinde g nin ekstremum noktaları $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin karakteristik vektörleridir. Eğer $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ nin bir karakteristik vektörü ise, o zaman

$$\begin{aligned} ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

dır. Böylece $p = (x_1, x_2)$ ise λ karakteristik değeri $g(p)$ ye eşit olur. 2×2 tipindeki bir matrisin sadece iki tane karakteristik değeri olduğundan, bu karakteristik değerler S kompakt kümesi üzerinde g nin maksimum ve minimum değerleridir.

2.5 Yüzeylerde Vektör Alanları ve Yönlendirme

Bu çalışma boyunca fonksiyonlar ve vektör alanlarının diferensiyellenebilir olduğunu kabul edeceğiz. S, R^{n+1} de bir hiperyüzey olmak üzere $g : S \to R^k$ fonksiyonu, eğer R^{n+1} de S yi kapsayan bazı açık V kümeleri üzerinde tanımlı $\tilde{g} : V \to R^k$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun S ye kısıtlanmışı ise diferensiyellenebilirdir. Benzer olarak S deki bir X vektör alanı, S yi kapsayan bazı açık kümeler üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir vektör alanlarının S ye kısıtlanmışı ise diferensiyellenebilirdir. Böylece X in diferensiyellenebilir olması için gerek yeter şart $X : S \to R^{n+1}$ in diferensiyellenebilir olmasıdır. Burada her $p \in S$ için $X(p) = (p, X(p))$ dir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.2.1 in, yani integral eğrilerinin varlık ve teklik teoreminin hiperyüzeylere uygulanmış halini verir.

Teorem 2.5.1. *S, R^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. X, S de bir diferensiyellenebilir tanjant* *vektör alanı ve $p \in S$ olsun. O zaman sıfırı kapsayan bir I açık aralığı ve bir $\alpha : I \to S$ parametrik eğrisi vardır, öyle ki*

(i) $\alpha(0) = p$ dir.

(ii) $\forall t \in I$ için, $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ dir.

(iii)Eğer $\beta : \tilde{I} \to S$, S de (i) ve (ii) yi sağlayan başka bir parametrik eğri ise o zaman $\forall t \in \tilde{I}$ için $\tilde{I} \subset I$ ve $\beta(t) = \alpha(t)$ dir.

(ii) şartını sağlayan bir $\alpha : I \to S$ parametrik eğrisine, X vektör alanının integral eğrisi denir. (i) ve (iii) yi sağlayan biricik α eğrisine X in p noktasındaki maksimal integral eğrisi denir[1].

İspat. X diferensiyellenebilir olduğunda, S yi kapsayan bir V açık kümesi ve V üzerinde diferensiyellenebilir bir $\tilde{X}$ vektör alanı vardır, öyle ki $\forall q \in S$ için $\tilde{X}(q) = X(q)$ olur. $S = f^{-1}(c)$ ve $\forall q \in S$ için $\nabla f(q) \neq 0$ olacak şekilde $f : U \to R$ ve $c \in R$ verilsin. $W = \{q \in U \cap V : \nabla f(q) \neq 0\}$ olsun. O zaman W, S yi kapsayan açık bir kümedir ve $\tilde{X}$ ile f nin her ikisi de W üzerinde tanımlıdır. Y, W üzerinde f nin her yerde seviye kümelerine teğet olacak şekilde

$$Y(q) = \tilde{X}(q) - \frac{\tilde{X}(q) . \nabla f(q)}{\|\nabla f(q)\|^2} \nabla f(q)$$

ile tanımlansın. $\forall q \in S$ için $Y(q) = X(q)$ dir. $\alpha : I \to W$, p noktasında Y nin maksimal integral eğrisi olsun. O zaman α gerçekten I yı S içine dönüştürür. Çünkü

$$(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) . \dot{\alpha}(t) = \nabla f(\alpha(t)) . Y(\alpha(t)) = 0$$

dır ve $f \circ \alpha(0) = f(p) = c$ dir. Böylece $\forall t \in I$ için $f \circ \alpha(t) = c$ dir. Böylece (i) ve (ii) koşulları sağlanmış olur. (iii) koşulu da sağlanır. Çünkü (i) ve (ii) koşullarını sağlayan herhangi bir $\beta : \tilde{I} \to S$ dönüşümü aynı zamanda W üzerindeki Y vektör alanının integral eğrisidir. Böylece Teorem 2.2.1 uygulanırsa ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 2.5.1. $S = f^{-1}(c)$, R^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. Burada $f : U \to R$ fonksiyonu $\forall q \in S$ için $\nabla f(q) \neq 0$ özelliğini sağlasın ve X, S ye kısıtlanmışı S de bir tanjant vektör alanı olan U üzerinde bir diferensiyellenebilir vektör alanı olsun. Bazı $t_0 \in I$ için $\alpha(t_0) \in S$

olacak şekilde $\alpha : I \to U$, X in herhangi bir integral eğrisi ise, o zaman $\forall t \in I$ için $\alpha(t) \in S$ dir.

$S \subset R^{n+1}$ olsun. Eğer S nin noktalarının her (p,q) çifti için $\alpha : [a,b] \to S$ sürekli dönüşümü varsa S ye *bağlantılıdır* denir. Burada $\alpha(a) = p$ ve $\alpha(b) = q$ dur. Böylece, S deki noktaların her çifti, sürekli ama diferensiyellenebilir olması gerekmeyen ve tamamen S de yatan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa S *irtibatlıdır* denir. Örneğin n-küre ancak ve ancak $n \geq 1$ olduğunda bağlantılıdır.

Bu bölümde özellikle irtibatlı hiperyüzeyler ele alınacaktır.

S bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. S de sürekli bir eğri ile p ye birleştirilebilen ve S nin bütün noktalarını kapsayan S nin bir alt kümesi de bir hiperyüzeydir ve irtibatlıdır. Buradan S nin her bir irtibatlı bileşeni ayrı ayrı incelenerek S incelenebilir.

Teorem 2.5.2. *S, R^{n+1} de irtibatlı bir yüzey olsun. O zaman S üzerinde N_1 ve N_2 gibi sadece iki birim ve diferensiyellenebilir normal vektör alanı vardır öyle ki,*

$$N_2(p) = -N_1(p) \ ,\forall p \in S$$

dir[3]

İspat. S nin bir p noktasının açık bir komşuluğu U olsun. U için S yi tanımlayan diferensiyellenebilir fonksiyon $f : U \to R$ olsun. $\vec{\nabla} f(p) \neq 0$ olması f nin bir yüzey göstermesinin bir sonucudur. O zaman

$$N_1(p) = \frac{\vec{\nabla} f(p)}{\left\| \vec{\nabla} f(p) \right\|} \quad ,\forall p \in S$$

birim vektörü S üzerinde öyle bir N_1 vektör alanı belirtir ki bu alan için

$$N_2(p) = -N_1(p) \ ,\forall p \in S$$

dir. Ayrıca bu vektör alanı S ye diktir. Bunların biricik olduklarını gösterebiliriz. Farzedelim ki N_3 gibi S ye normal bir diğer vektör alanı daha mevcut olsun. O zaman $\forall p \in S$ için her ikisi de 1-boyutlu $S_p^{\perp} \subset R_p^{n+1}$ alt uzayında yatıyorken $N_3(p), N_1(p)$ nin bir katı olmak zorundadır. Böylece $N_3(p) = g(p) N_1(p)$ olmak zorundadır. Burada $g : S \to R$, S

üzerinde diferensiyellenebilirdir. Ayrıca

$$g(p) = \langle N_3(p), N_1(p) \rangle \;, \forall p \in S$$

dir. $N_1(p)$ve $N_3(p)$ nin her ikisi de birim olduğundan

$$g(p) = \pm 1 \quad , \forall p \in S$$

dir. Ayrıca g diferensiyellenebilir ve S irtibatlı olduğundan g fonksiyonu S üzerinde sabit olmak zorundadır. O halde $N_3 = N_1$ veya $N_3 = N_2$ olmak zorundadır. □

R^{n+1} de bir S yüzeyi üzerindeki diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına S üzerinde bir *yönlendirme* denir. Yukarıdaki teoreme göre R^{n+1} deki herbir S yüzeyi üzerinde tam iki yönlendirme vardır. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise bu yüzeye *Yönlendirilmiş yüzey* denir. Bunun yanında Mobius şeridi gibi yönlendirilemeyen yüzeyler de mevcuttur[2].

R_p^{n+1} deki bir birim vektöre p noktasındaki bir *doğrultu* denir. O halde R_p^{n+1} in bir S yüzeyi üzerindeki bir yönlendirme, tanıma göre, S üzerindeki normal doğrultudur[6].

Bir yönlendirilmiş C düzlemsel eğrisinin p noktasındaki pozitif teğet doğrultusu, C üzerindeki yönlendirme olan p deki normal doğrultusunun $-\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi ile elde edilen doğrultudur.

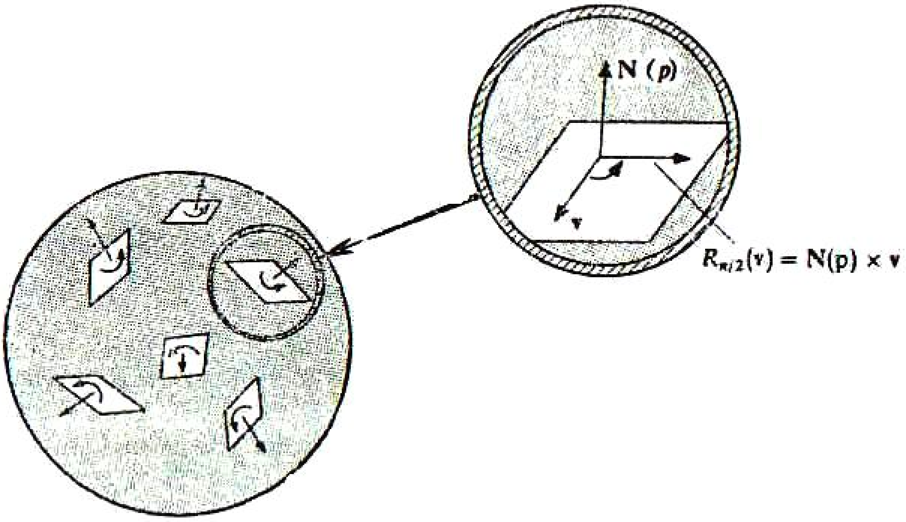
E^3 de bir yüzey üzerinde bir yönlendirme, yüzeyin her bir noktasında tanjant uzayda bir dönme doğrultusu olarak tanımlanabilir. Bir $\theta \in R$ sayısı verilmiş olsun. Yönlendirilmiş S yüzeyinin p noktasında pozitif $\theta -$ *dönmesi* bir

$$R_\theta : \; S_p \to S_p$$

lineer dönüşümü olup

$$R_\theta\left(\vec{V}_p\right) = (\cos\theta)\vec{V}_p + (\sin\theta)\vec{N}(p) \wedge \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır. Burada $\vec{N}(p)$ ile p noktasındaki yönlenmiş normal doğrultu gösterilmektedir. R_θ dönüşümü genelde,“$\vec{N}(p)$ etrafında θ açısı kadar pozitif dönme” olarak adlandırılır(Şekil 1.5.1)[1].



Şekil 1.5.1.

E^4 te 3-boyutlu bir yüzey üzerinde bir yönlendirme, S_p nin $\{e_1, e_2, e_3\}$ bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ N(p) \end{pmatrix}$$

pozitif ise $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazı bir sağ sistem oluşturuyor denir. Burada $N(p) = (p, N(p))$, p deki yönlendirme normal doğrultusudur ve $i \in \{1,2,3\}$ için $e_i = (p, e_i)$ dir. Eğer determinant negatif ise $\{e_1, e_2, e_3\}$ bir sol sistem olur ki bu da bir diğer yönlendirmedir.

R^{n+1}de bir yüzey(n keyfi) üzerinde bir yönlendirme, herbir tanjant uzaydaki bütün sıralı bazların cümlesini iki altcümleye ayırır. Bunlardan biri yönlendirmeyle uyum halinde diğeri ise uyuşmaz haldedir. n-boyutlu S yüzeyinin bir p noktasında S_p tanjant uzayındaki bir $\{V_1, ..., V_n\}$ sıralı bazı için

$$\det \begin{pmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ N(p) \end{pmatrix}, \vec{V}_i = \left(p, \vec{V}_i\right)$$

pozitif ise S üzerindeki N yönlendirmesi ile uyumludur denir ve eğer bu determinant değeri negatif ise, baza N ile uyumsuzdur denir.

2.6 Gauss Dönüşümü

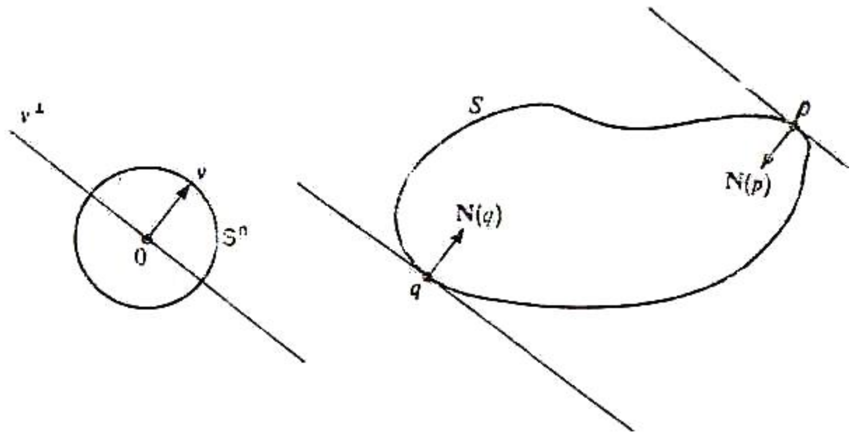
R^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey, basit anlamda bir yüzey değildir. S üzerinde N diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı ile ilişkili bir hiperyüzeydir. N vektör alanı ile $N(p) = (p, N(p))$ şeklinde bağlı olan $N : S \rightarrow R^{n+1}$ fonksiyonu, $\forall p \in S$ için $\|N(p)\| = 1$ olduğunda gerçekten S yi $S^n \subset R^{n+1}$ birim n-küresine resmeder. Böylece her yönlendirilmiş S hiperyüzeyi ile bağlı olan N, $N : S \rightarrow S^n$ şeklinde diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Bu dönüşüm Gauss Dönüşümü olarak adlandılır. Bu dönüşüm $\forall p \in S$ noktasına R^{n+1} de öyle bir nokta karşılık getirir ki bu nokta $\vec{N}(p)$ birim normal vektörünün başlangıç noktasına, yani S^n nin merkezine ötelenmesiyle elde edilir.

Gauss dönüşümünün $N(S) = \{q \in S^n : q = N(p), \text{ bazı } p \in S \text{ için}\}$ görüntüsü, yönlendirilmiş S hiperyüzeyinin Küresel Resmi olarak adlandırılır.

Bu teoremi tam olarak genelleştirmeye yetecek mekanizmamız yoktur. Ancak önemli bir özel hali ispatlayabiliriz. Bu da S nin R^{n+1} in tamamında tanımlı bir diferensiyellenebilir fonksiyonun seviye kümesi olması halidir.

Teorem 2.6.1. *R^{n+1} de kompakt, irtibatlı ve yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi verilsin. $\forall p \in S$ için $\nabla f(p) \neq 0$ ile verilen bir $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferensiyellenebilir fonksiyonu, $f^{-1}(c)$ seviye kümesi olarak tanımlansın. O zaman Gauss dönüşümü S yi birim küre olan S^n ye resmeder.*

İspat. $V \in S^n$ verilsin. $V^{\perp}$ n-düzlemini göz önüne alalım. Bu düzlemi V doğrultusunda yeterince uzağa doğru hareket ettirirsek, S ile kesişimi boş küme olacaktır. Geri çekersek S de sadece p gibi bir noktaya dokunarak teğet olur(Şekil 1.6.1)[1].



Şekil 1.6.1.

Buradan bu noktada $N(p) = \mp V$ olur. Eğer $N(p) = -V$ ise o zaman $N(q) = V$ dir. Burada q da benzer şekilde düzlemi hareket ettirerek elde edilir. Daha açık olarak, $g_p = R^{n+1} \to R$ fonksiyonu

$$g_p = p.V$$

olsun. Yani $g(x_1, ..., x_{n+1}) = a_1 x_1 + ... + a_{n+1} x_{n+1}$ dir. Burada $V = (a_1, ..., a_{n+1})$ dir. g nin seviye kümeleri $V^{\perp}$ e paralel olan düzlemlerdir. S kompakt olduğundan g nin S ye kısıtlanmışı, maksimum ve minimum değerlerini sırasıyla p ve q da alır. Lagrange Çarpanı teoreminden, bazı $\lambda \in R$ için

$$(p, v) = \nabla g(p) = \lambda \nabla f(p) = \lambda \|\nabla f(p)\| N(p)$$

olur. Buradan V ve $N(p)$ biribirinin katı olur. Her ikisi de birim uzunluğa sahip olduğundan $N(p) = \mp V$ dir. Benzer olarak $N(q) = \mp V$ olur. $N(q) \neq N(p)$ olduğunu kontrol etmemiz kaldı. Bunun için, a ve b de diferensiyellenebilir olan $\alpha:[a,b]\to R^{n+1}$ sürekli fonksiyonunu oluşturmak yeterlidir öyle ki

$$(i)\,\alpha(a)=p,\alpha(b)=q,\dot{\alpha}(a)=(p,V),\dot{\alpha}(b)=(q,V)$$

ve

$$(ii)\,a<t<b \text{ için } \alpha(t)\notin S$$

dir. Böylece (i) şartından $N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ olup

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(a)&=\nabla f(\alpha(a)).\dot{\alpha}(a)\\&=\|\nabla f(p)\|N(p).(p,V)\\&=\|\nabla f(p)\|N(p).V\end{aligned}$$

dir. Benzer olarak

$$(f\circ\alpha)'(b)=\|\nabla f(q)\|N(q).V$$

dir. Böylece $(f\circ\alpha)'$ türevi her iki sınır noktasında da aynı işarete sahip olur. $N=-\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ olduğunda da aynı sonuç çıkar. Böylece, $N(p)$, $N(q)$ ya eşit olsaydı o zaman $f\circ\alpha$, sınır noktalarının her ikisinde de artacaktı veya azalacaktı.
$f\circ\alpha(a)=f\circ\alpha(b)=c$ olduğundan $f\circ\alpha(t_1)>c$ ve $f\circ\alpha(t_2)<c$ olacak şekilde a ve b arasında t_1 ve t_2 bulunurdu. Fakat o zaman ortalama değer teoreminden, t_1 ile t_2 arasında $f\circ\alpha(t_3)=c$ olacak şekilde bir t_3 bulunurdu. Bu ise (ii) koşuluyla çelişir. α yı oluşturmak için S yi kapsayan büyük bir S_1 küresi alalım. Bu ise ancak S kompakt olduğunda mümkündür.

$0\le t\le a_1$ olmak üzere $\alpha_1(t)=p+tv$ olsun. Burada a_1, $\alpha_1(a_1)\in S$ özelliğini sağlar. $0\le t\le a_2$ olmak üzere $\alpha_2(t)=q-tv$ olsun. Burada ise a_2, $\alpha_2(a_2)\in S$ özelliğini sağlar. $\alpha_3:[b_1,b_2]\to S_1$, $\alpha_3(b_1)=\alpha_1(a_1)$ ve $\alpha_3(b_2)=\alpha_2(a_2)$ olacak şekilde verilsin. Böyle bir α_3 vardır çünkü S_1 hiperyüzeyi $n\ge1$ için irtibatlıdır. O zaman

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_1(t) & (0\le t\le a_1)\\ \alpha_3(t+b_1-a_1) & (a_1\le t\le a_1+b_2-b_1)\\ \alpha_2(a_1+a_2+b_2-b_1-t) & (a_1+b_2-b_1\le t\le a_1+a_2+b_2-b_1)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan α, istenilen özellikleri sağlar. Burada $a = 0$ ve $b = a_1 + a_2 + b_2 - b_1$ dir. Süreklilik ve (i) koşulu kolaylıkla görülür. (ii) koşulu da sağlanır çünkü

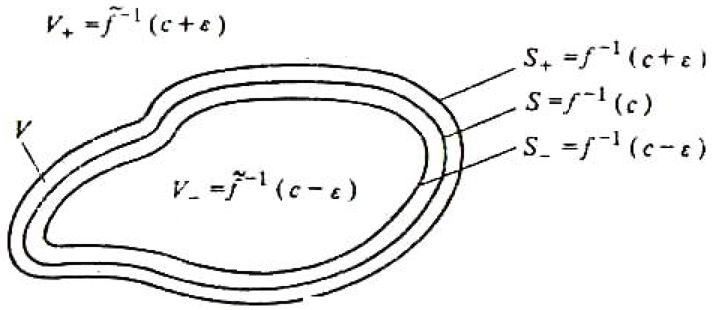
(1) $(g \circ \alpha_1)'(t) = \nabla g(\alpha_1(t)).\dot{\alpha}_1(t) = V.V > 0$ olduğundan $t > 0$ için $\alpha_1(t) \notin S$ olur. Böylece g, α_1 boyunca artandır ve S üzerinde maksimum değerini $\alpha_1(0) = p$ noktasında alır.

(2) $(g \circ \alpha_2)'(t) = V.(-V) < 0$ olduğundan $t > 0$ için $\alpha_2(t) \notin S$ olur. Böylece g, α_2 boyunca azalandır ve S üzerinde minimum değerini $\alpha_2(0) = q$ noktasında alır.

(3) $\alpha_3(t) \in S_1$ ve $S_1 \cap S = \varnothing$ olduğundan $t \in [b_1, b_2]$ için $\alpha_3(t) \notin S$ dir. □

Uyarı 2.6.1. *Bu teoremin genel hali şu sezgisel iddiadan elde edilebilir:*

Farzedelim ki S kompakt ve irtibatlı olsun. O zaman S, R^{n+1} i iki bölgeye ayırır. Bunlardan biri S nin iç bölgesi, diğeri ise S nin dış bölgesidir. $f : U \to R$ için $S = f^{-1}(c)$ olsun. O zaman yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ için $f^{-1}(c+\varepsilon)$ seviye kümesi, S nin her noktasının ∇f boyunca S nin dışına itilerek elde edilen S_+ n-yüzeyi olsun(Şekil 1.6.2). $f^{-1}(c)$, S den uzakta olan bazı noktaları da kapsayabilir, fakat bu iddiamızda bunu görmezden geleceğiz.



Şekil 1.6.2.

Benzer olarak, yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ için $f^{-1}(c-\varepsilon)$ seviye kümesi S nin diğer tarafında bir S_- n-yüzeyi olacaktır. Bu yüzey $-\nabla f$ boyunca S nin her noktasını S nin dışına iterek elde edilen yüzeydir. S_- ile S_+ arasındaki noktaların kümesini V ile gösterelim. S ile S_+ nın aynı tarafında yatan $R^{n+1}-V$ deki noktaların kümesi V_+ ile gösterilir. S nin diğer tarafında yatan $R^{n+1}-V$ deki noktaların kümesi V_- ile gösterilir. $\tilde{f}: R^{n+1} \to R$ fonksiyonunu

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p), & p \in V için \\ c+\varepsilon, & p \in V için \\ c-\varepsilon, & p \in V için \end{cases}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. O zaman $\tilde{f}$, R^{n+1} üzerinde süreklidir, S civarındaki V açık kümesi üzerinde diferensiyellenebilirdir ve $\tilde{f}^{-1}(c) = S$ dir.

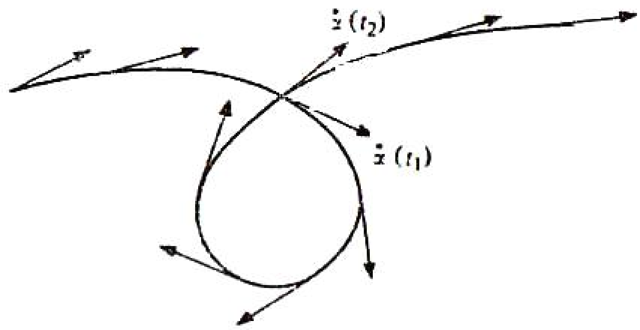
Yukarıdaki ispat, Gauss dönüşümünün üzerine olduğunu göstermek için f yi her yerde $\tilde{f}$ ile değiştirerek uygulanabilir[1].

2.7 Geodezikler

Geodezikler, R^n de doğruların oynadığı rolün aynısını hiperyüzeylerde oynayan eğrilerdir. Kesin bir tanım vermeden önce, parametrik eğriler boyunca tanımlanan fonksiyonlar ve vektör alanlarının türevlenme yöntemlerini göstermeliyiz. Bu şekildeki fonksiyonlar ve vektör alanlarının parametrik bir yüzeyin kendi üzerinden geçtiği bir noktada farklı değerler alabileceği göz önüne alınarak; bu fonksiyonlar ve vektör alanlarını parametre aralığında tanımlamak, eğrinin görüntüsü üzerinde tanımlamaktan daha uygundur.

$\alpha: I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisi boyunca bir X vektör alanı, her $t \in I$ ya $\alpha(t)$ noktasında bir $X(t)$ vektörü karşılık getiren bir fonksiyondur. Yani $\forall t \in I$ için $X(t) \in R_p^{n+1}$ dir. α boyunca bir f fonksiyonu, basitçe bir $f: I \to R$ fonksiyonudur. Böylece örneğin, $\alpha: I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisinin $\dot{\alpha}$ hız vektör alanı, α boyunca bir vektör alanıdır. $\|\dot{\alpha}\|: I \to R$ uzunluğu, $\|\dot{\alpha}\|(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$ şeklinde tanımlanan α boyunca bir fonksiyondur.

$\|\dot{\alpha}\|$, α nın hızı olarak tanımlanır(Şekil 1.7.1)[1].



Şekil 1.7.1.

Parametrik eğriler boyunca fonksiyonlar ve vektör alanları çoğu zaman kısıtlamalar olarak meydana gelirler. Böylece, U, R^{n+1} de α nın görüntüsünü kapsayan bir açık küme olmak üzere X, U üzerinde bir vektör alanı ise o zaman $X \circ \alpha$ da α boyunca bir vektör alanıdır. Benzer olarak, $f : U \to R$ için $f \circ \alpha$ da α boyunca bir fonksiyondur. Burada U, α nın görüntüsünü kapsar.

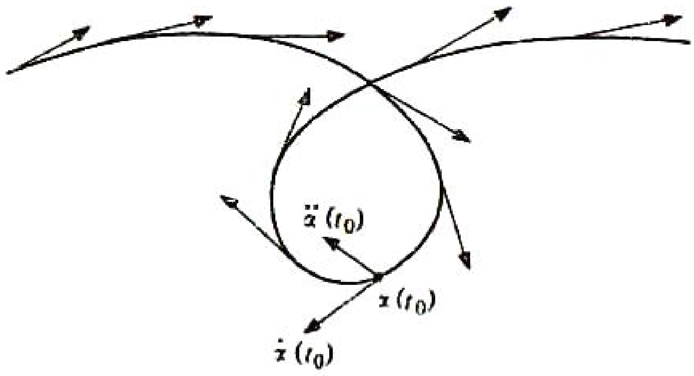
α boyunca her X vektör alanı

$$X(t) = (\alpha(t), X_1(t), ..., X_n(t))$$

şeklindedir. Burada X_i bileşenlerinin her biri α boyunca bir fonksiyondur. Her $X_i : I \to R$ diferensiyellenebilir ise X diferensiyellenebilirdir. α boyunca diferensiyellenebilir bir X vektör alanının türevi

$$\dot{X}(t) = \left(\alpha(t), \frac{dX_1}{dt}(t), ..., \frac{dX_{n+1}}{dt}(t)\right)$$

şeklinde tanımlanır. $\dot{X}(t)$, α boyunca $X(t)$ nin $(X_1(t), ..., X_{n+1}(t))$ vektör kısmının değişim oranını ölçer. Böylece örneğin, bir α parametrik eğrisinin $\ddot{\alpha}$ türevi, $\dot{\alpha}$ hız alanının diferensiyeli alınarak elde edilen, α boyunca bir vektör alanıdır(Şekil 1.7.2)[1].



Şekil 1.7.2.

Parametrik eğriler boyunca vektör alanlarının diferensiyelinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu görmek zor değildir. X ve Y, $\alpha : I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisi boyunca vektör alanları ve f de α boyunca bir fonksiyon olmak üzere

(i) $(X+Y)' = \dot{X} + \dot{Y}$

(ii) $(fX)' = f'X + f\dot{X}$

(iii) $(X.Y)' = \dot{X}.Y + X.\dot{Y}$

dır[4]. Burada $X+Y$, fX, $X.Y$ fonksiyonları, α boyunca $\forall t \in I$ için

$$(X+Y)(t) = X(t) + Y(t)$$

$$(fX)(t) = f(t)X(t)$$

$$(X.Y)(t) = X(t).Y(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

$S \subset R^{n+1}$ hiperyüzeyindeki bir geodezik, ivmesi her yerde S ye ortogonal olan $\alpha : I \to S$ parametrik eğrisidir. Bu da $\forall t \in I$ için $\ddot{\alpha}(t) \in S^{\perp}_{\alpha(t)}$ demektir.

Geodezikler sabit hıza sahiptirler. Çünkü, $\forall t \in I$ için $\dot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)}$ dir ve $\ddot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)}^{\perp}$ olması

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t).\dot{\alpha}(t)) = 2\dot{\alpha}(t).\ddot{\alpha}(t) = 0$$

olmasını gerektirir. Bir başka ifadeyle, T, α eğrisinin teğet vektör alanı ve ∇ da yüzey üzerindeki konneksiyonu göstermek üzere α nın geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T T = 0$$

olmasıdır.

Örnek 2.7.1. Eğer bir S n-yüzeyi bir $\alpha(t) = p + tv \ (t \in I)$ doğrusunun bir kısmını kapsıyorsa, o zaman bu kısım S de bir geodeziktir. Gerçekten, $\forall t \in I$ için $\ddot{\alpha}(t) = 0$ dır. Özel olarak, $\forall t \in I$ için $\ddot{\alpha}(t) \perp S_{\alpha(t)}$ dir[4].

Örnek 2.7.2. Her $a,b,c,d \in R$ için $\alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$ parametrik eğrisi R^3 de $x_1^2 + x_2^2 = 1$ silindiri üzerinde bir geodeziktir. Çünkü, $\forall t \in R$ için

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), -a^2\cos(at+b), -a^2\sin(at+b), 0\right) = \mp a^2 N(\alpha(t))$$

dir.

Örnek 2.7.3. R^3 deki $\{e_1, e_2\}$ ortogonal birim vektörlerinin her çifti ve her $a \in R$ için $\alpha(t) = (\cos at)e_1 + (\sin at)e_2$ büyük çemberi veya $a = 0$ için de noktası, R^3 de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 2-küresi üzerinde bir geodeziktir. Çünkü, $\forall t \in R$ için

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), -a^2\alpha(t)\right) = \mp a^2 N(\alpha(t))$$

dir.

S deki herhangi bir p noktası ve p de herhangi bir v ilk hızı verilsin. S de v ilk hızı ile p den geçen bir geodeziğin var olacağı açıktır. Son olarak S üzerinde v hızıyla p den geçen bir araba yarışında S de düz bir şekilde sabit $\|v\|$ hızıyla gidilirse, S de bir geodezik ortaya çıkar.

Şimdi vereceğimiz teorem p noktasından v ilk hızıyla geçen tek bir geodezik olduğunu gösterir.

Teorem 2.7.1. *S, R^{n+1} de bir hiperyüzey, $p \in S$ ve $v \in S_p$ olsun. O zaman sıfırı kapsayan bir açık I aralığı ve $\alpha : I \to S$ geodeziği vardır öyle ki*

$(i)\, \alpha(0) = p$ *ve* $\dot{\alpha}(0) = v$

(ii)*Eğer* $\beta : \tilde{I} \to S$, $\beta(0) = p$ *ve* $\dot{\beta}(0) = v$ *olacak şekilde başka bir geodezik ise o zaman* $\forall t \in \tilde{I}$ *için* $\tilde{I} \subset I$ *ve* $\beta(t) = \alpha(t)$
dir[2].

Burada p den v ilk hızıyla geçen α geodeziği S deki maksimal geodezik olarak adlandırılır.

Bu teoremden sonra, R^3 deki birim 2-küre üzerindeki her maksimal geodezik, herhangi bir noktasındaki hızı sabit olduğundan ya büyük çember ya da $\alpha(t) = p$ şeklinde sabit olur. Benzer olarak R^3 deki $x_1^2 + x_2^2 = 1$ silindiri üzerindeki her maksimal geodezik, dikey bir doğru, yatay bir çember, bir helis veya sabittir.

2.8 Weingarten Dönüşümü

Şimdi bir hiperyüzey üzerinde eğriliğin yerel değişimi incelenecektir. R^{n+1} de bir hiperyüzeyin eğriliğini, noktaları hareket ettirdiğimizde normalin yönünün değişimine göre ölçeceğiz. Normalin yönünün değişim oranını ölçmek için hiperyüzeyler üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanlarına ihtiyacımız vardır.

R^{n+1} de bir açık U kümesi üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu verilsin. $V \in R_p^{n+1}$ vektörü ve $p \in U$ olsun. f nin V yönündeki türevi,

$$\nabla_V f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

reel sayısıdır. Burada $\alpha : I \to U$, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde herhangi bir parametrik eğridir. α, $\nabla_V f$ formülünde bulunmasına rağmen, türevin değeri α nın seçiminden bağımsızdır. Gerçekten, zincir kuralı uygulanırsa

$$\nabla_V f = (f \circ \alpha)'(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)) . \dot{\alpha}(t_0) = \nabla f(p) . V$$

olur. $\nabla_V\ f$ yi f nin gradienti cinsinden ifade eden bu formül $\nabla_V\ f$ nin değerinin V hızıyla p den geçen α nın seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. Bu formül hesaplamalarda çoğu zaman en kullanışlı formüldür. Aynı zamanda bu formül, V yi $\nabla_V\ f$ ye götüren fonksiyonun R_p^{n+1} den R ye bir lineer dönüşüm olduğunu da gösterir. Gerçekten de $\forall V, W \in R_p^{n+1}$ ve $c \in R$ için

$$\nabla_{V+W}\ f = \nabla_V\ f + \nabla_W\ f$$
$$\nabla_{cV}\ f = c.\nabla_V\ f$$

dir.

$\nabla_V\ f$, V nin yönü kadar büyüklüğüne de bağlıdır. Örneğin, $\nabla_{2V}\ f = 2\nabla_V\ f$ formülü, p den iki kat hızla geçildiğinde f nin değişim oranının da iki katına çıkacağını gösterir.

$\|V\| = 1$ olduğunda $\nabla_V\ f$ ye, f nin V yönündeki *Yöne Göre Türevi* denir.

S, R^{n+1} de bir hiperyüzey ve $f : S \to R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Benzer şekilde f nin S ye teğet olan vektörü

$$\nabla_V\ f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

şeklindedir. Burada $\alpha : I \to S$, S üzerinde $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde herhangi bir parametrik eğridir.

$$\nabla_V\ f = \left(\tilde{f} \circ \alpha\right)'(t_0) = \nabla\tilde{f}(\alpha(t_0)).\dot{\alpha}(t_0) = \nabla\tilde{f}(p).V$$

olduğundan $\nabla_V\ f$ değeri, S üzerinde p den geçen ve V hızlı α eğrisinden bağımsızdır. Burada $\tilde{f} : U \to R$, S yi kapsayan bir U açık kümesi üzerinde tanımlanan ve S ye kısıtlanmışı f olan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. O halde bu son formül, V yi $\nabla_V\ f$ ye götüren fonksiyonun S_p den R ye bir lineer dönüşüm olduğunu gösterir.

$p \in U$ olmak üzere R^{n+1} deki bir U açık komşuluğu üzerindeki bir X vektör alanının bir $V_p \in R_p^{n+1}$ vektörüne göre türevi

$$\nabla_V X = (X \dot{\circ} \alpha)(t_0)$$

olarak tanımlanır[4]. Burada α, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde U da bir parametrik eğridir. R^{n+1} deki bir S hiperyüzeyi üzerindeki diferensiyellenebilir X vektör alanı ve p noktasında S ye teğet olan V vektörü için $\nabla_V X$ türevi de aynı formülle tanımlanır. Şimdi burada α, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde S de bir parametrik eğri olmalıdır. Her iki halde de, $\nabla_V X \in R_p^{n+1}$ ve

$$\begin{aligned} \nabla_V X &= \left(\alpha(t_0), (X_1 \circ \alpha)'(t_0), ..., (X_{n+1} \circ \alpha)'(t_0)\right) \\ &= (p, \nabla_V X_1, ..., \nabla_V X_{n+1}) \end{aligned}$$

dir. Burada X_i ler X in bileşenleridir. $\nabla_V X$ değeri de α nın seçiminden bağımsızdır. Her $f : U \to R$ (veya $f : S \to R$) diferensiyellenebilir fonksiyonu ve U daki (veya S deki) her diferensiyellenebilir X ve Y vektör alanları için

(i) $\nabla_V (X+Y) = \nabla_V X + \nabla_V Y$

(ii) $\nabla_V (fX) = \nabla_V f\, X(p) + f(p)(\nabla_V X)$

(iii) $\nabla_V (X.Y) = (\nabla_V X).Y(p) + X(p).\nabla_V Y$

özellikleri vardır. Diğer taraftan, her diferensiyellenebilir X vektör alanı için X, U açık kümesi üzerinde bir vektör alanı ise V yi $\nabla_V X$ e götüren fonksiyon R_p^{n+1} den R_p^{n+1} e bir lineer dönüşümdür. Eğer X, S de bir vektör alanı ise, fonksiyon S_p den R_p^{n+1} e bir lineer dönüşümdür.

p noktasında S ye teğet olan bir V vektörüne göre S deki bir X tanjant vektör alanının $\nabla_V X$ türevi genelde S ye teğet değildir. Sonraki bölümlerde $\nabla_V X$ in teğetsel bileşeni olan $D_V X$ i kullanmak daha çok işimize yarayacaktır. Burada

$$D_V X = \nabla_V X - (\nabla_V X.N(p))N(p)$$

dir. Buradaki N, S de bir yönlendirmedir. $D_V X$, X tanjant vektör alanının $V \in S_p$ yönündeki *kovaryant türevi* olarak adlandırılır. $D_V X = (X \circ \alpha)'(t_0)$ dır. Burada α, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde S üzerinde herhangi bir parametrik eğridir. Kovaryant diferensiyel normal diferensiyelle aynı özelliklere sahiptir. Diğer taraftan, S deki her diferensiyellenebilir X tanjant vektör alanı için V yi $D_V X$ e götüren fonksiyon, S_p den S_p ye lineer bir dönüşümdür.

Şimdi R^{n+1} deki yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi üzerindeki N normal yönünün değişim oranına bakabiliriz. $p \in S$ ve $V \in S_p$ için $\nabla_V N$ türevi

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_V (1) &= \nabla_V (N.N) \\ &= (\nabla_V N) N(p) + N(p) . (\nabla_V N) \\ &= 2 (\nabla_V N) . N(p) \end{aligned}$$

olduğundan S ye teğettir.

Tanım 2.8.1. S, R^{n+1}de bir hiperyüzey, $p \in S$ ve $V \in S_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_p \ : \ \ & S_p \to S_p \\ & V \to L_p(V) = -\nabla_V \, N \end{aligned}$$

dönüşümü S yüzeyinin p noktasındaki *Weingarten Dönüşümü* olarak adlandırılır[3].

L_p nin geometrik anlamı

$$\nabla_V \, N = -\left(N \dot{\circ} \alpha\right)(t_0)$$

formülünden görülebilir. Burada $\alpha : I \to S$, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde S de bir parametrik eğridir. $L_p(V)$, p den geçen herhangi bir α eğrisi boyunca N nin değişim oranını ölçer. $S_{\alpha(t)}$, $\alpha(t)$ noktasında S nin tanjant uzayı olduğundan, $[N(\alpha(t))]^{\perp}$ olarak alınabilir. Tanjant uzayı N normalinin döndüğü gibi döner. Böylece $L_p(V)$, α boyunca p den geçen tanjant uzayının dönmesinin ölçüsü olarak yorumlanabilir. Böylece L_p, S nin şekli hakkında bilgi verir. Bu sebeple L_p, S nin p deki *şekil operatörü* olarak da adlandırılır. $L_p(V)$ yi hesaplamak için

$$\begin{aligned} L_p(V) = -\nabla_V \, N &= -\left(p, \nabla_V \, N_1, ..., \nabla_V \, N_{n+1}\right) \\ &= -\left(p, \nabla \tilde{N}_1(p).V, ..., \nabla \tilde{N}_{n+1}(p).V\right) \end{aligned}$$

formülü kullanılabilir. Burada $\tilde{N}, \forall q \in S$ için $\tilde{N}(q) = N(q)$ olacak şekilde S yi kapsayan bir U açık kümesi üzerinde tanımlanmış bir diferensiyellenebilir vektör alanıdır.

$\tilde{N}(q)$ nun, $q \notin S$ için birim vektör olmasına gerek yoktur. Bazı $c \in R$ ve $f : U \to R$ için $S = f^{-1}(c)$ ve $\forall q \in S$ için $N(q) = \nabla f(q) \diagup \|\nabla f(q)\|$ olsun. Buna göre $\tilde{N} = \nabla f \diagup \|\nabla f\|$ olarak alınması doğaldır. Bazen $\tilde{N}$ nın başka bir seçimi daha uygun olur. Bunu da aşağıdaki örnekle verelim:

Örnek 2.8.1. S, $x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = r^2$ n-küresi olsun ve içe doğru olan N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş olsun. $\forall q \in S$ için

$$N(q) = (q, -q \diagup \|q\|) = (q, -q \diagup r)$$

dir. $q \in R^{n+1}$ için $\tilde{N}(q) = (q, -q \diagup r)$ düzenlenirse

$$\tilde{N}(x_1 + ... + x_{n+1}) = \left(x_1 + ... + x_{n+1}, \frac{-x_1}{r}, ..., \frac{-x_{n+1}}{r} \right)$$

elde edilir. Buradan $\forall p \in S$ ve $V \in S_p$ için

$$\begin{aligned} L_p(V) &= -\nabla_V N = -\left(p, \nabla_V \tilde{N}_1, ..., \nabla_V \tilde{N}_{n+1}\right) \\ &= -\left(p, \nabla_V \left(\frac{-x_1}{r}\right), ..., \nabla_V \left(\frac{-x_{n+1}}{r}\right)\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(p, \nabla_V (x_1), ..., \nabla_V (x_{n+1})\right) \end{aligned}$$

bulunur. Ancak her $i \in \{1, ..., n+1\}$ için

$$\begin{aligned} \nabla_V x_i &= \nabla x_i(p).V \\ &= (p, 0, ..., 1, 0, ...0).(p, V_1, ..., V_{n+1}) \\ &= V_i \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$L_p(V) = \frac{1}{r}(p, V_1, ..., V_{n+1}) = \frac{1}{r}V$$

olur.

Böylece, r yarıçaplı n-kürenin Weingarten dönüşümü altındaki görüntüsü, onun $1 \diagup r$ katıdır. Eğer S, $-N$ dış normali ile yönlendirilmiş ise yukarıdaki çarpan $-1 \diagup r$ olur.

Şimdi aşağıda verilecek olan iki teorem, Weingarten dönüşümünün önemli özelliklerini ortaya koyar.

Teorem 2.8.1. *S, R^{n+1} de N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir hiperyüzey, $p \in S$ ve $v \in S_p$ olsun. Bazı $t_0 \in I$ için $\dot{\alpha}(t_0) = v$ olacak şekilde her $\alpha : I \to S$ parametrik eğrisi için*

$$\ddot{\alpha}(t_0) . N(p) = L_p(V) . V$$

dir.

Bu teorem, ivmenin $\ddot{\alpha}(t_0) . N(p)$ normal bileşeninin S üzerinde p den geçen ve V hızına sahip olan bütün eğriler için aynı olduğunu gösterir. İvmenin normal bileşeni, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekildeki bazı α eğrileri için sıfırdan farklı ise, o zaman aynı hızla p den geçen S deki bütün eğriler için sıfırdan farklıdır.

İvmenin bu bileşeni, S üzerindeki böyle bir eğri tarafından S nin p deki şekline uygun olarak etkilenir. Bu etkilenme yukarıdaki teoremden, V deki Weingarten dönüşümünün değeri ile doğrudan hesaplanabilir.

α geodezik olduğunda, sadece ivmesinin bileşeni yüzeye normaldir. Bu ivme α üzerinde yüzeyin şekliyle etkilenir.

r yarıçaplı S n-küresi için yukarıdaki hesaplamalar gösterir ki S üzerindeki her α birim hızlı eğrisi, ivme içe doğru olan $1/r$ büyüklüğüne sahip bir normal bileşene sahiptir[1].

İspat. α, S de bir parametrik eğri olduğundan $\forall t \in I$ için $\dot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)} = [N(\alpha(t))]^{\perp}$ dir. Yani α boyunca $\dot{\alpha}.(N \circ \alpha) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= [\dot{\alpha}.(N \circ \alpha)]'(t_0) \\ &= \ddot{\alpha}(t_0).(N \circ \alpha)(t_0) + \dot{\alpha}(t_0).(N \dot{\circ} \alpha)(t_0) \\ &= \ddot{\alpha}(t_0).N(\alpha(t_0)) + V.\nabla_V N \\ &= \ddot{\alpha}(t_0).N(p) - V.L_p(V) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\ddot{\alpha}(t_0).N(p) = L_p(V).V$ bulunur. Bu da iddia edilendir. □

Teorem 2.8.2. *Weingarten dönüşümü, self-adjointtir. Yani* $\forall V,W \in S_p$ *için*

$$L_p(V).W = V.L_p(W)$$

dir.

İspat. U, R^{n+1} de açık olmak üzere bazı $c \in R$ için $S = f^{-1}(c)$ olacak şekilde $f : U \to R$ ve $\forall p \in S$ için $N(p) = \nabla f(p) \diagup \|\nabla f(p)\|$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} L_p(V).W &= (-\nabla_V N).W = -\nabla_V \left(\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \right).W \\ &= -\left[\nabla_V \left(\frac{1}{\|\nabla f\|} \right) \nabla f(p) + \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla_V(\nabla f) \right].W \\ &= -\nabla_V \left(\frac{1}{\|\nabla f\|} \right) \nabla f(p).W - \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} [\nabla_V(\nabla f)].W \end{aligned}$$

dir. $\nabla f(p).W = 0$ olduğundan birinci terim yok olur. Böylece

$$\begin{aligned} L_p(V).W &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} [\nabla_V(\nabla f)].W \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \left(p, \nabla_V \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \nabla_V \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right).W \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \left(p, \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(p).V, ..., \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n41}} \right)(p).V \right).W \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \left(p, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p).V_i, ..., \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{n+1}}(p).V_i \right).W \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).V_i.W_j \end{aligned}$$

olur. Burada $V = (p, V_1, ..., V_{n+1})$ ve $W = (p, W_1, ..., W_{n+1})$ dir. Aynı hesaplamada V ile W yer değiştirilirse,

$$L_p(W).V = -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).W_i.V_j$$

olur. Her (i,j) için $\partial^2 f \diagup \partial x_i \partial x_j = \partial^2 f \diagup \partial x_j \partial x_i$ olduğunda

$$\begin{aligned} L_p(V).W &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).V_i.W_j \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).V_i.W_j \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).W_j.V_i \\ &= L_p(W).V \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

2.9 Düzlem Eğrilerinin Eğrilikleri

$f : U \to R$ olsun. $C = f^{-1}(c)$, $N = \nabla f \diagup \|\nabla f\|$ yönlendirmesi ile $U \subset R^2$ de bir düzlem eğrisi olsun. O zaman $\forall p \in C$ için L_p Weingarten dönüşümü, C_p 1-boyutlu uzayında bir lineer dönüşümdür. 1-boyutlu uzaydan kendi içine olan her bir lineer dönüşüm, bir reel sayıyla çarpım olduğundan $\forall p \in C$ için bir $K(p)$ reel sayısı vardır, öyle ki $\forall V \in C_p$ için

$$L_p(V) = K(p).V$$

şeklindedir. $K(p)$, C nin p noktasındaki eğriliği olarak adlandırılır.

Eğer V, C düzlem eğrisine p noktasında teğet olan sıfırdan farklı bir vektör ise, o zaman

$$L_p(V).V = K(p).\|V\|^2$$

dir. Böylece C nin p deki eğriliği

$$K(p) = L_p(V).V \diagup \|V\|^2$$

formülüyle verilir. Özel olarak, $\alpha : I \to C$, $\forall t \in I$ için $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ olacak şekilde bir parametrik eğri ise, o zaman Teorem 2.8.1 den

$$K(\alpha(t)) = \frac{L_p(\dot{\alpha}(t)).\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2} = \frac{\ddot{\alpha}(t).N(\alpha(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2}$$

olur. Eğer α, birim hızlı bir parametrik eğri ise

$$K(\alpha(t)) = \ddot{\alpha}(t).N(\alpha(t))$$

formülü ortaya çıkar. Böylece C nin $p \in C$ noktasındaki eğriliği, p den geçen herhangi bir parametrik eğrinin ivmesinin normal bileşenini ölçer[5].

$K(p)$ nin işaretinin anlamı şu şekildedir:

$K(p) > 0$ ise p deki eğri, $N(p)$ normaline doğru kıvrılır. Eğer $K(p) < 0$ ise eğri $N(p)$ den uzaklaşacak şekilde kıvrılır.

Bir düzlem eğrisinin eğriliğini hesaplamanın bir yolu da

$$K \circ \alpha = \frac{(\ddot{\alpha}.N \circ \alpha)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2}$$

formülünü kullanmaktır. Burada α, hızı hiçbir yerde sıfır olmayan C deki herhangi bir parametrik eğridir. Eğer böyle bir α eğrisi, C üzerindeki yönlendirme ile uyumlu bir şekilde yönlendirilirse, buna C nin *yerel parametrizasyonu* denir.

C bir yönlendirilmiş düzlem eğrisi ve $p \in C$ olsun. C nin p yi kapsayan kısmının bir parametrizasyonu, bir $\alpha : I \to C$ parametrik eğrisidir. Bu eğri,

(i) regülerdir($\forall t \in I$ için $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$ dır).

(ii) C ile uyumlu bir şekilde yönlendirilmiştir

$\big(\forall t \in I$ için $C_{\alpha(t)}$ nin $\{\dot{\alpha}(t)\}$ bazı C nin N yönlendirmesiyle uymludur$\big)$.

(iii) p, α nın görüntüsüne aittir.

koşullarını sağlar[1]. Eğer α örten ise α ya C nin *global parametrizasyonu* denir.

Düzlem eğrilerinin yerel parametrizasyonları prensip olarak kolay elde edilir. Eğer $C = f^{-1}(c)$, $N = \nabla f / \|\nabla f\|$ ile yönlendirilmiş ise o zaman $\forall q \in C$ için $\nabla f(q) = (q, (\partial f / \partial x_1)(q), (\partial f / \partial x_2)(q))$, C_q ya diktir.

$X(q) = (q, (\partial f / \partial x_2)(q), -(\partial f / \partial x1)(q))$ şeklinde tanımlanan X vektör alanı, ∇f ye her yerde diktir. Çünkü $X(q)$, $\nabla f\ (q)$ nun $-\pi/2$ kadar döndürülmesiyle elde edilmiştir. Böylece X, C de bir tanjant vektör alanıdır. Bir adım daha ilerlersek, $q \in C$ için $X(q) \neq 0$ dır ve $\{X(q)\}$, N yönlendirmesiyle uyumludur. Buradan, $p \in C$ için X in

p den geçen $\alpha : I \to C$ maksimal eğrisi, C nin p yi kapsayan bir kısmının bir parametrizasyonu olacaktır.

Bu anlamda $\forall t \in C$ için

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|X(\alpha(t))\| = \|N(\alpha(t))\| = 1$$

olduğunda ∇f vektör alanı $N = \nabla f \diagup \|\nabla f\|$ vektör alanı ile yer değiştirilirse α, C nin p yi kapsayan bir kısmının birim hızlı bir parametrizasyonu haline gelir.

Düzlem eğrilerinin yerel parametrizasyonları, parametre değişimi haricinde tektir. C nin p yi kapsayan bir kısmının herhangi bir $\beta : \tilde{I} \to R$ parametrizasyonu verilsin. $\forall t \in \tilde{I}$ için $h'(t) > 0$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir $h : \tilde{I} \to R$ fonksiyonu vardır, öyle ki $\forall t \in \tilde{I}$ için $\beta(t) = \alpha(h(t))$ dir. Burada α, yukarıda söylendiği gibi birim hızlı bir yerel parametrizasyondur. Gerçekten $\{X(\beta(t))\}$, 1-boyutlu $C_{\beta(t)}$ vektör uzayının bir bazı olduğundan, $\dot{\beta}(t)$, $\{X(\beta(t))\}$ nin bir katı olmak zorundadır. Aslında $\|X\| = 1$ ve $\left\{\dot{\beta}(t)\right\}$ ile $\{X(\beta(t))\}$ nin her ikisi de C nin yönlendirmesiyle uyumlu olduğundan $\dot{\beta}(t) = \left\|\dot{\beta}(t)\right\| .X(\beta(t))$ olur. Buradan

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\dot{\beta}(\tau)\right\| d\tau$$

bulunur. Burada t_0, $\beta(t_0) = p$ şartını sağlar. Böylece t_0 ı sıfıra götüren, $\forall t \in \tilde{I}$ için $h'(t) = \left\|\dot{\beta}(t)\right\| > 0$ olacak şekilde monoton artan bir diferensiyellenebilir $h : \tilde{I} \to R$ fonksiyonu elde edilir. $\beta \circ h^{-1}$ parametrik eğrisi

$$\begin{aligned}
\left(\beta \dot{\circ} h^{-1}\right)(t) &= \dot{\beta}\left(h^{-1}(t)\right)\left(h^{-1}\right)'(t) \\
&= \dot{\beta}\left(h^{-1}(t)\right) \diagup h'\left(h^{-1}(t)\right) \\
&= \dot{\beta}\left(h^{-1}(t)\right) \diagup \left\|\dot{\beta}\left(h^{-1}(t)\right)\right\| \\
&= X\left(\beta\left(h^{-1}(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

hızına sahiptir. Böylece bu eğri, $\beta \circ h^{-1}(0) = p = \alpha(0)$ olacak şekilde X vektör alanının bir integral eğrisidir. İntegral eğrilerinin tekliğinden, $\beta \circ h^{-1}$ in tanım kümesindeki her t için $\beta \circ h^{-1}$ in tanım kümesi I nın alt kümesidir ve $\beta \circ h^{-1}(t) = \alpha(t)$ dir. Diğer bir ifadeyle, $\forall t \in \tilde{I}$ için $\beta(t) = \alpha(h(t))$ olur. Bu da iddia edilendir.

Özel olarak, $\beta : \tilde{I} \rightarrow C$, $\beta(t_0) = p$ olacak şekilde C nin birim hızlı yerel parametrizasyonu ise o zaman $\forall t \in \tilde{I}$ için $h(t) = t - t_0$ ve $\beta(t) = \alpha(t - t_0)$ dır.

Örnek 2.9.1. C, $f^{-1}\left(r^2\right)$ çemberi $\nabla f \diagup \|\nabla f\|$ dış normali ile yönlendirilmiş olsun. Burada $f(x_1,x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$ dir. $p = (x_1,x_2) \in R^2$ için $\nabla f(p) = (p, 2(x_1 - a), 2(x_2 - b))$ olduğundan $X(p) = (p, 2(x_2 - b), -2(x_1 - a))$ nin integral eğrileri, C nin yerel parametrizasyonları olacaktır. $(a + r, b)$ deki integral eğrisi, $\alpha(t) = (a + r\cos 2t, b - r\sin 2t)$ küresel parametrizasyonunu verir. Buradan

$$\begin{aligned}
K(\alpha(t)) &= \frac{\ddot{\alpha}(t) . N(\alpha(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2} = \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2} \frac{\nabla f(\alpha(t))}{\|\nabla f(\alpha(t))\|} \\
&= \frac{(-4r\cos 2t, 4r\sin 2t) . (2r\cos 2t, -2r\sin 2t)}{\|(-2r\sin 2t, -2r\cos 2t)\|^2 \|(2r\cos 2t, -2r\sin 2t)\|} \\
&= \frac{-8r^2}{(4r^2)(2r)} \\
&= -\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

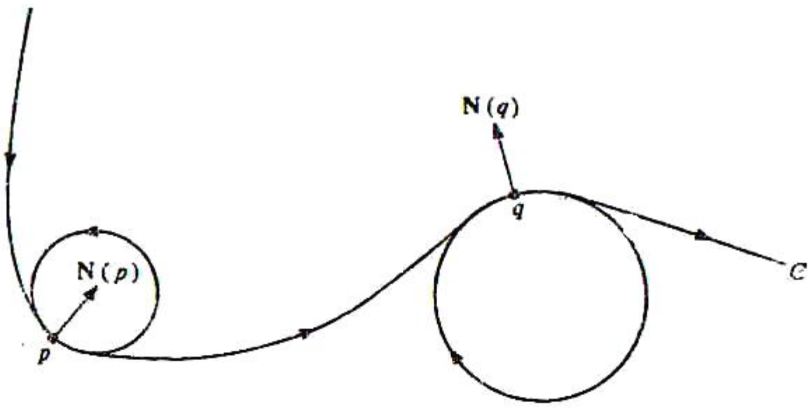
elde edilir. Eğer C, iç normalle yönlendirilmiş olsaydı; eğrilik her bir noktada $+1\diagup r$ olacaktı[1].

C keyfi bir yönlendirilmiş düzlem eğrisi ve $p \in C$ için $K(p) \neq 0$ olacak şekilde bir tek O çemberi vardır. Bu çembere C nin p deki eğrilik çemberi denir. Bu ise

(i) p de C ye teğettir$(C_p = O_p)$.

(ii) C ile O uyumlu bir şekilde yönlendirilmiştir$(N(p) = N_1(p))$. Burada N ve N_1 sırasıyla C ve O nun yönlendirmeleridir.

(iii) Normali, C nin normalinin p de kıvrıldığı oranda kıvrılır. Yani $\forall V \in C_p = O_p$ için $\nabla_V N = \nabla_V N_1$ dir(Şekil 1.9.1)[1].



Şekil 1.9.1.

Bu eğrilik çemberi, p yi kapsayan bütün çemberlerden C eğrisine sarılanlardan en yakın olanıdır. (i) koşulu, O nun merkezinin, C de p noktasındaki normal doğrultunun üzerinde olması demektir. (iii) koşulu, çemberin r yarıçapının $1/r = |K(p)|$ eşitliğini sağladığını gösterir. Burada $K(p)$, p noktasındaki C nin eğriliğidir. (ii) koşulu, $K(p) > 0$ ise $N(p)$ nin O nun merkezine doğru olduğunu; $K(p) < 0$ ise merkezden dışarı doğru olduğunu gösterir. Bu çemberin $r = 1/|K(p)|$ olan yarıçapı, C nin p noktasındaki eğrilik yarıçapıdır. O nun merkezi C nin p deki eğriliğinin merkezidir.

2.10 Yay Uzunluğu ve Çizgisel İntegraller

Bir $\alpha : I \to R^{n+1}$ parametrik eğrisinin $l(\alpha)$ uzunluğu,

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt$$

şeklinde tanımlanır[2]. Burada a ve b, I nın sınır noktalarıdır. $l(\alpha)$, $\mp\infty$ olabilir. Ayrıca bir parametrik eğrinin uzunluğu, eğri üzerinde katedilen toplam mesafedir. α, kendi üzerinden geçerse, o zaman görüntünün birden fazla kaplanmış kısımları da sayılacaktır. Eğer $\beta : \tilde{I} \to R^{n+1}$, α nın bir parametrizasyonu ise, o zaman $l(\beta) = l(\alpha)$ olur. Gerçekten,

$\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall t \in I$ için $h'(t) > 0$ olacak şekilde $h : \tilde{I} \to I$ ise o zaman

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \int_c^d \left\| \dot{\beta}(t) \right\| dt = \int_c^d \| \dot{\alpha}(h(t)) \| h'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \| \dot{\alpha}(u) \| du \\ &= l(\alpha) \end{aligned}$$

dır. Burada c ve d, $\tilde{I}$ nın sınır noktalarıdır. Eğer α, birim hızlı bir eğri ve $\forall t_1, t_2 \in I$ için $t_1 < t_2$ ise o zaman

$$\int_{t_1}^{t_2} \| \dot{\alpha}(t) \| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1$$

olur. Böylece, α nın herhangi bir kısmının uzunluğu bu kısma karşılık gelen parametre aralığının uzunluğuna eşittir. Bu nedenle birim hızlı eğriler genelde yay uzunluğu ile parametrelidir denir. Bir parametrik eğrinin uzunluğu kavramını kullanarak, bir yönlendirilmiş düzlem eğrisinin uzunluğunu tanımlamak için iki ön bilgiye ihtiyacımız vardır. Şimdi bunları inceleyelim.

Teorem 2.10.1. *C bir yönlendirilmiş düzlem eğrisi olsun. O zaman C nin bir global parametrizasyonunun olması için gerek ve yeter şart C nin irtibatlı olmasıdır.*

Teorem 2.10.2. *C, irtibatlı yönlendirilmiş bir düzlem eğrisi ve $\beta : I \to C$, C nin birim hızlı global parametrizasyonu olsun. O zaman β, ya birebirdir ya da periyodiktir. Ayrıca β nın periyodik olması için gerek ve yeter şart ise C nin kompakt olmasıdır.*

β periyodik fonksiyonunun esas periyodu, her t için t ve $t + \tau$ nun ikisi de β nın tanım kümesinde olmak üzere $\beta(t + \tau) = \beta(t)$ eşitliğini sağlayan en küçük τ sayısıdır. Eğer τ, β nın periyodu ise $[t_0, t_0 + \tau]$ formundaki β nın tanım kümesinin herhangi bir alt kümesi, β nın Esas Tanım Kümesi olarak adlandırılır. Kompakt bir düzlem eğrisinin herhangi bir β periyodik global parametrizasyonunun esas tanım kümesine kısıtlanmışı esas tanım kümesini birebir ve örten olan β nın görüntüsüne dönüştürür. Buradan, yarı-açık aralıkları açık aralıklar gibi parametrik eğrilerin tanım kümesi olarak düşünürsek, her irtibatlı yönlendirilmiş düzlem eğrisi bir birebir birim hızlı global parametrizasyonu kabul eder. Diğer taraftan, bu şekildeki $\alpha : I \to C$ ve $\beta : \tilde{I} \to C$ parametrizasyonları aynı uzunluktaki I ve $\tilde{I}$ parametre aralıklarına sahiptirler. Gerçekten, bazı $t_0 \in R$ için α ve β, $\beta(t) = \alpha(t - t_0)$ şeklinde ilişkilidirler. Böylece $\tilde{I}$, basitçe I nın bir ötelenmesidir. Buradan, bir C irtibatlı yönlendirilmiş düzlem eğrisinin uzunluğunu I nın uzunluğu olarak tanımlayabiliriz. Burada, $\alpha : I \to C$, C nin herhangi bir birebir birim hızlı global parametrizasyonudur. β nın uzunluğu, α nın uzunluğu ile aynı olduğundan, yani α, β nın herhangi bir parametrizasyonu olduğundan, irtibatlı yönlendirilmiş C düzlem eğrisinin uzunluğu

$$l(C) = l(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt$$

formülüyle hesaplanabilir. Burada $\alpha : I \to C$, C nin herhangi bir birebir global parametrizasyonu ve a ile b, I nın sınır noktalarıdır.

Örnek 2.10.1. C, dış normali ile yönlendirilmiş $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 = r^2$ çemberini göstersin. O zaman, $\alpha(t) = (a + r\cos 2t, b - r\sin 2t)$ şeklinde tanımlanan
$\alpha : I \to C$, C nin bir global parametrizasyonudur. α periyodiktir ve periyodu π dir. Böylece, α nın $[0, \pi)$ aralığına kısıtlanmışı, C nin bir birebir global parametrizasyonudur. Buradan,

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^\pi \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt \\ &= \int_0^\pi \|(-2r\sin 2t, -2r\cos 2t)\|\, dt \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

dir.

Bu bölümün kalan kısmı, diferensiyellenebilir 1-formlar ve integralleri üzerine olacaktır. Genellikle basitçe 1-form olarak adlandırılan bir diferensiyellenebilir 1-form, $U \subset R^{n+1}$ açık kümesi üzerinde $w : U \times R^{n+1} \to R$ şeklinde bir fonksiyondur. $\forall p \in U$ için w nin $R_p^{n+1} \subset U \times R^{n+1}$ kümesine kısıtlanmışı lineerdir.

Örnek 2.10.2. X, U üzerinde bir vektör alanı olsun. $w_x : U \times R^{n+1} \to R$,

$$w_x(p, v) = X(p) . (p, v)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman, w_x, U üzerinde bir 1-formdur. w_x, X in duali olan bir 1-formdur[3].

Örnek 2.10.3. Bir $f : U \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için
$df : U \times R^{n+1} \to R$,

$$df(v) = \nabla_V f = \nabla f(p).V$$

şeklinde tanımlansın. Burada $v = (p, v) \in R_p^{n+1}$ ve $p \in U$ dur. O zaman, df, U üzerinde bir 1-formdur ve f nin diferensiyeli olarak tanımlanır[4].

Örnek 2.10.4. Her $i \in \{1, ..., n+1\}$ için $U \subset R^{n+1}$ olmak üzere $x_i : U \to R$,

$$x_i(a_1, ..., a_{n+1}) = a_i$$

şeklinde tanımlansın. x_i, U üzerinde Kartezyen Koordinat Fonksiyonu olarak tanımlanır. dx_i 1-formu basitçe tanım kümesindeki her vektörü kendisinin i. bileşenine götürür. Her $V = (p, V_1, ..., V_{n+1}) \in R_p^{n+1}$ ve $p \in U$ için

$$dx_i(V) = \nabla x_i(p).V = (p, 0, ..., 1, ..., 0).V = V_i$$

dir.

$U \subset R^{n+1}$ üzerindeki bir w 1-formu, $w : U \times R^{n+1} \subset R^{2n+2} \to R$ bir fonksiyon olarak diferensiyellenebilir ise diferensiyellenebilirdir. Eğer $f : U \to R$, U üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise o zaman onun diferensiyeli olan df de U üzerinde bir diferensiyellenebilir 1-formdur. $U \subset R^{n+1}$ açık kümesi üzerindeki w_1 ve w_2 1-formlarının toplamı da

$$(w_1 + w_2)(V) = w_1(V) + w_2(V)$$

şeklinde tanımlanan bir 1-formdur. Bir $f : U \to R$ fonksiyonu ile U üzerindeki bir w 1-formunun çarpımı, U üzerinde

$$(fw)(p, V) = f(p)w(p, V)$$

şeklinde tanımlanan bir 1-formdur. Buradan görülüyor ki iki diferensiyellenebilir 1-formun toplamı diferensiyellenebilirdir ve bir diferensiyellenebilir fonksiyon ile bir diferensiyellenebilir 1-formun çarpımı da diferensiyellenebilirdir. w bir 1-form ve $X, U \subset R^{n+1}$ üzerinde bir vektör alanı olarak verilsin. $w(X) : U \to R$ fonksiyonu

$$(w(X))(p) = w(X(p))$$

şeklinde tanımlanır[1]. Eğer w ve X in her ikisi de diferensiyellenebilir ise $w(X)$ de diferensiyellenebilirdir.

Önerme 2.10.1. *U, R^{n+1} de açık olmak üzere, U üzerindeki her w 1-formu için*

$$w = \sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i$$

şeklinde $f_i : U \to R$ tek fonksiyonları vardır. Üstelik w nin diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart her f_i fonksiyonunun diferensiyellenebilir olmasıdır[1].

İspat. Her $j \in \{1, ..., n+1\}$ için X_j, U üzerinde $X_j(p) = (p, 0, ..., 1, ..., 0)$ olacak şekilde diferensiyellenebilir vektör alanını göstersin ve 1, vektör kısmının j. bileşeni olsun. O zaman

$$dx_i(X_j) = \begin{cases} 1, \ i = j \text{ ise} \\ 0, \ i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Böylece $w = \sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i$ ise o zaman, her $j \in \{1, ..., n+1\}$ için

$$f_j = \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i \right) (X_j) = w(X_j)$$

olur. Bu formül, f_j fonksiyonlarının varsa tek olduklarını ve diferensiyellenebilir olduklarında w nin de diferensiyellenebilir olduğunu gösterir. Diğer taraftan, f_j fonksiyonlarını yukarıdaki gibi tanımlarsak, o zaman w 1-formları ve $\sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i$, R_p^{n+1} in her $X_i(p)$ baz vektörü üzerinde aynı değeri alır. Lineerlikten, $p \in U$ için R_p^{n+1} deki bütün vektörlerin üzerinde de aynı değeri alır. Böylece $w = \sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i$ dir. Açıkça her f_i diferensiyellenebilir ise w de diferensiyellenebilirdir. $\square$

Sonuç 2.10.1. U, R^{n+1} de açık olmak üzere $f : U \to R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman

$$df = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

dir.

İspat. $df\left(X_j\right) = \nabla f . X_j = \partial f \diagup \partial x_j$ dir. $\square$

Şimdi w, $U \subset R^{n+1}$ açık kümesi üzerinde bir diferensiyellenebilir 1-form ve $\alpha : [a,b] \to U$, U da bir parametrik eğri olsun. w nin α üzerindeki integrali

$$\int_{\alpha} w = \int_{a}^{b} w\left(\dot{\alpha}(t)\right) dt$$

reel sayısıdır[1]. Bu tür integrallere Çizgisel İntegraller denir. $\beta : [c,d] \to U$, $\beta = \alpha \circ h$ olacak şekilde α nın herhangi bir yeni parametrizasyonu olsun. Burada $h : [c,d] \to [a,b]$, her yerde pozitif türeve sahiptir. O zaman

$$\begin{aligned} \int_{\beta} w &= \int_{c}^{d} w\left(\dot{\beta}(t)\right) dt = \int_{c}^{d} w(\dot{\alpha}(h(t).h'(t))dt \\ &= \int_{c}^{d} w(\dot{\alpha}(h(t)).h'(t)dt = \int_{a}^{b} w\left(\dot{\alpha}(u)\right) du \\ &= \int_{\alpha} w \end{aligned}$$

olur. Özel olarak, U, R^2 de açık bir küme ve C, U da bir kompakt irtibatlı yönlendirilmiş düzlem eğrisi ise, o zaman C üzerinde w nin integrali

$$\int_{C} w = \int_{\alpha} w$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha : [a,b] \to C$, $[a,b)$ ye kısıtlanmışı C nin bir birebir global parametrizasyonu olan herhangi bir parametrik eğridir. Bu sonuç α nın seçiminden bağımsızdır. Ayrıca $\int_{\alpha} w$ çizgisel integrali, parçalı diferensiyellenebilir parametrik bir α eğrisi için de geçerlidir. $\alpha : [a,b] \to U \subset R^{n+1}$ sürekli ve her bir $i \in \{0, 1, ..., k\}$ için α

nın $[t_i, t_{i+1}]$ e kısıtlanmışı diferensiyellenebilirdir. Burada $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k+1} = b$ dir. O zaman w 1-formunun U üzerinde α boyunca integrali

$$\int_{\alpha} w = \sum_{i=0}^{k} \int_{\alpha_i} w$$

dir. Buradan α_i, α nın $[t_i, t_{i+1}]$ e kısıtlanmışıdır.

Uyarı 2.10.1. *$\int_{\alpha} w$ ve $\int_{C} w$ çizgisel integrallerini tanımlarken, α parametrik eğrisinin tanım kümesinin kapalı bir aralık olmasında ve C düzlem eğrisinin kompakt olmasında ısrar ettik. Bu ise integrallerin varlığını garantilemek için yapıldı. Bu yüklemeleri uzunluk integrallerinde yapmak zorunda değiliz. Çünkü integrand negatif değildir ve bu integral her zaman vardır veya $+\infty$ olabilir.*

Örnek 2.10.5. U, R^{n+1} de bir açık ve $f : U \to R$ fonksiyonu diferensiyellenebilir olsun. O zaman U daki herhangi bir $\alpha : [a,b] \to U$ parametrik eğrisi için

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} df &= \int_a^b df(\dot{\alpha}(t))\, dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\, dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))\end{aligned}$$

dır. Özel olarak $\alpha(a) = \alpha(b)$ ise o zaman $\int_{\alpha} df = 0$ olur[4].

Bir diferensiyellenebilir fonksiyonun diferensiyeli olan bir 1-forma *Tam*dır denir. $\alpha(a) = \alpha(b)$ olacak şekildeki bir $\alpha : [a,b] \to R^{n+1}$ parametrik eğrisine *Kapalı*dır denir[4]. Yukarıdaki hesaplama, kapalı bir eğri üzerindeki tam bir 1-formun intagralinin her zaman sıfıra eşit olduğunu gösterir. Özel olarak, tam bir 1-formun bir kompakt irtibatlı yönlendirilmiş düzlem eğrisi üzerindeki integrali her zaman sıfırdır.

Örnek 2.10.6. η, $R^2 - \{0\}$ üzerinde bir 1-form ve

$$\eta = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

olsun. C ise iç normali ile yönlendirilmiş $\left(x_1^2 / a^2\right) + \left(x_2^2 / b^2\right) = 1$ elipsini göstersin. $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$ şeklinde tanımlanan $\alpha : [0, 2\pi] \to C$ parametrik eğrisi $[0, 2\pi)$ aralığı üzerinde C nin bir birebir global parametrizasyonuna kısıtlanmışıdır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\int_C \eta = \int_\alpha \eta &= \int_0^{2\pi} \eta\left(\dot{\alpha}(t)\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\left(\alpha(t)\right) dx_1\left(\dot{\alpha}(t)\right) + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left(\alpha(t)\right) dx_2\left(\dot{\alpha}(t)\right) \right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-b\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\left(-a\sin t\right) + \frac{a\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\left(b\cos t\right) \right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{(b/a)\sec^2 t}{1+(b/a)^2\tan^2 t} dt \\
&= 4\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2\pi
\end{aligned}
$$

dir.

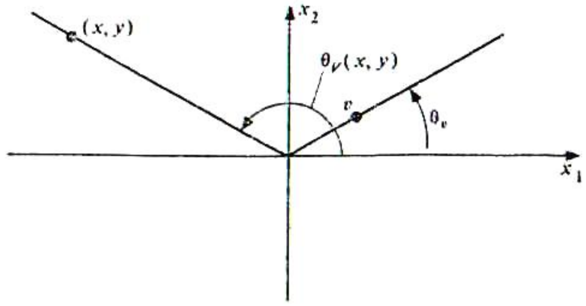
Yukarıdaki η 1-formunun C kompakt eğrisi üzerindeki integrali sıfır değilse, η tam olamaz. Halbuki V ye kısıtlanmışı; daha açık olarak $V \times R^2$ ye kısıtlanmışı tamdır. Burada V, orjindeki herhangi bir ışının R^2 deki bütünleyenidir. Gerçekten, R^2 deki herhangi bir V birim vektörü ve $V = R^2 - \{r.v : r \geq 0\}$ için $\eta = d\theta_V$ dir. Burada $\theta_V : V \to R$, şu şekilde tanımlanır: θ_V, $0 \leq \theta_V \leq 2\pi$ olacak şekilde tek reel sayısını belirtsin öyle ki, $V = (\cos\theta_V, \sin\theta_V)$ dir(Şekil 1.10.1)[1]. O zaman her $(x,y) \in V$ için $\theta_V(x,y)$ yi $\theta_V \leq \theta_V(x,y) < \theta_V + 2\pi$ olacak şekilde tek reel sayısı olarak tanımlayalım, öyle ki

$$
\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \right) = \left(\cos\theta_V(x,y), \sin\theta_V(x,y)\right)
$$

dir. $d\theta_V = \eta\,|_V$ olduğunu göstermek için basitçe, $\tan\theta_V(x,y) = y/x$ ve $\cot\theta_V(x,y) = x/y$ olduğunu hatırlayalım. Böylece yeterince küçük her açık kümede bu eşitliklerden biri çözülebilir ve

$$
d\theta_V = \frac{\partial\theta_V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\theta_V}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} dx_2
$$

hesaplanabilir.



Şekil 1.10.1.

Teorem 2.10.3. η, $R^2 - \{0\}$ *üzerinde*

$$\eta = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

şeklinde tanımlanan 1-form olsun. O zaman $R^2 - \{0\}$ da herhangi bir kapalı parçalı diferensiyellenebilir $\alpha : [a,b] \to R^2 - \{0\}$ parametrik eğrisi ve bazı k tamsayıları için

$$\int_\alpha \eta = 2\pi k$$

dır[1].

İspat. $\varphi : [a,b] \to R$, $\varphi(t) = \varphi(a) + \int_{\alpha_t} \eta$ şeklinde tanımlansın. Burada α_t, α nın $[a,b]$ aralığına kısıtlanmışıdır ve $\varphi(a)$,

$$\alpha(a) \diagup \|\alpha(a)\| = (\cos\varphi(a), \sin\varphi(a))$$

olarak seçilmiştir. $\forall t \in [a,b]$ için

$$\alpha(t) \diagup \|\alpha(t)\| = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) \quad ...(*)$$

olduğunu iddia ediyoruz. t_0, $\{\tau \in [a,b] : (*), \ a \leq t \leq \tau$ için sağlanır$\}$ kümesinin en küçük üst sınırını belirtsin. Süreklilikten, $(*)$, $t = t_0$ da da sağlanmak zorundadır.

$V = -\alpha(t_0) \diagup \|\alpha(t_0)\|$ olarak alınırsa ve yukarıda bulduğumuz θ_V,

$$\begin{aligned}(\cos\theta_V(\alpha(t_0)), \sin\theta_V(\alpha(t_0))) &= \alpha(t_0) \diagup \|\alpha(t_0)\| \\ &= (\cos\varphi(t_0), \sin\varphi(t_0))\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, bazı m tamsayıları için $(\cos\theta_V(\alpha(t_0)), \sin\theta_V(\alpha(t_0))) = 2\pi m$ olur. $\forall t \in [a,b]$ için $\alpha(t) \in V$ ve $|t - t_0| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçersek; $t \in [a,b]$, $|t - t_0| < \delta$ ve $t \neq t_i$ (t_i, α nın diferensiyellenebilir olmadığı nokta) için

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) - \theta_V(\alpha(t))) = \eta(\dot{\alpha}(t)) - d\theta_V(\dot{\alpha}(t)) = 0$$

olarak bulunur. Böylece $|t - t_0| < \delta$ olacak şekilde $\forall t \in [a,b]$ için $\varphi(t) - \theta_V(\alpha(t)) = 2\pi m$ olur. O zaman sadece $t_0 = b$ ve her t için

$$(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) = (\cos\theta_V(\alpha(t)), \sin\theta_V(\alpha(t))) = \alpha(t) \diagup \|\alpha(t)\|$$

dir. Böylece $t_0 = b$ dir ve $(*)$, $\forall t \in [a,b]$ için sağlanır. Bu da iddia edilendir. Son olarak, $\alpha(a) = \alpha(b)$ olduğunda $(*)$,

$$(\cos\varphi(a), \sin\varphi(a)) = (\cos\varphi(b), \sin\varphi(b))$$

anlamına gelir. Böylece bazı k tamsayıları için $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$ dır ve

$$\int_\alpha \eta = \int_a^b \eta(\dot{\alpha}(t))\, dt = \varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$$

dır. $k(\alpha) = (1 \diagup 2\pi) \int_\alpha \eta$, kapalı α eğrisinin orjin etrafında kaç defa döndüğünü belirttiğinden, α nın *dönme sayısı* olarak adlandırılır[1]. $\square$

2.11 Yüzeylerin Eğrilikleri

S, R^{n+1} de N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. $V \in S_p$ için $L_p(V) = -\nabla_V N$ ile tanımlanan $L_p : S_p \to S_p$ Weingarten dönüşümü, S üzerinde p den V hızıyla geçen birinin yaptığı gibi normalin dönme miktarını ölçer.

Böylece L_p, S nin R^{n+1} de p deki bükülmesini ölçer. $n=1$ için L_p, S nin p deki $K(p)$ eğriliğinin bir sayıyla çarpılmasıdır[1]. Şimdi $n>1$ için L_p yi inceleyelim.

Her $V \in S_p$ için $L_p(V).V$, S de V hızıyla p den geçen her parametrik α eğrisinin ivmesinin normal bileşenine eşittir. İvmenin bu bileşeni R^{n+1} de α üzerinde S nin eğriliği ile ilgilidir. $\|V\|=1$ olduğunda

$$k(V)=L_p(V).V$$

sayısı, S nin p noktasında V yönündeki *normal eğriliği* olarak adlandırılır[6]. Eğer $k(V)>0$ ise S yüzeyi V yönünde N ye doğru bükülür. Eğer $k(V)<0$ ise S yüzeyi V yönünde N den uzaklaşarak bükülür. $n=1$ olduğunda bütün $V \in S_p$ birim vektörleri için $k(V)=K(p)$ olur.

Örnek 2.11.1. $S, N(p)=(p,-p/\|p\|)$ iç normali ile yönlendirilmiş r yarıçaplı $x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=r^2$ küresi olsun. O zaman L_p, basitçe $1/r$ ile çarpımdır. Buradan $k(V)=1/r$, her $p \in S$ noktalarındaki bütün V teğet doğrultuları için aynı değeri alır.

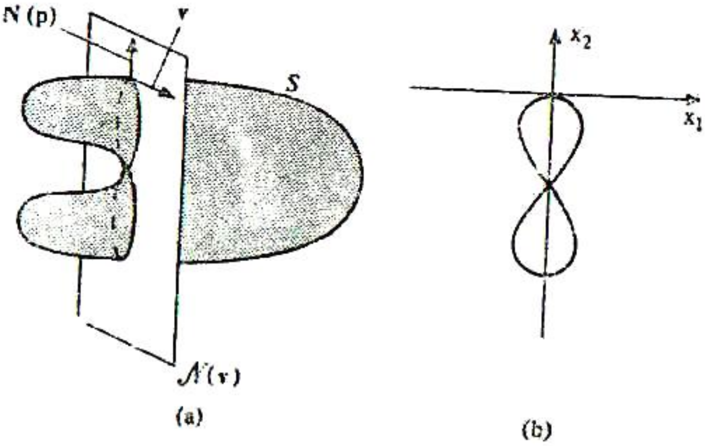
Örnek 2.11.2. S, $p=(x_1,x_2,x_3) \in S$ için $N(p)=(p,-x_1/\|p\|,x_2/\|p\|,x_3/\|p\|)$ birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş $-x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ hiperboloidi olsun. O zaman $p=(0,0,1)$ için her $V \in S_p$ birim vektörü $(p,V_1,V_2,0)$ şeklindedir. Burada $V_1^2+V_2^2=1$, $L_p(V)=-\nabla_V N=(p,V_1,-V_2,0)$ ve $k(V)=V_1^2-V_2^2$ dir. Özel olarak, $V=(p,1,0,0)$ olduğunda $k(V)=1$ ve $V=(p,0,1,0)$ olduğunda $k(V)=-1$ olur. Diğer taraftan $V=\mp\left(p,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ve $V=\mp\left(p,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\right)$ olduğunda $k(V)=0$ olur. $\alpha(t)=\left(t/\sqrt{2},t/\sqrt{2},0\right)$ ve $\beta(t)=\left(t/\sqrt{2},-t/\sqrt{2},0\right)$ doğrularının her ikisi de tamamıyle S de yatıyor olduğunda bu sonuç sürpriz olmayacaktır. Böylece S, p den geçen bu doğrultulardaki parametrik eğriler üzerinde herhangi bir ivme ile etkilenmez, yani ivmesizdir.

Bundan başka, normal eğrilik, normal kesitlerle açıklanabilir. R^{n+1} de N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir $S=f^{-1}(c)$ hiperyüzeyi verilsin. Normal kesit, $p \in S$ olmak üzere $V=(p,v)$ birim vektörü ile tanımlanır ve R^{n+1} in bir alt kümesidir.

$\aleph(V)$ normal kesiti

$$\aleph(V) = \{q \in R^{n+1} : \text{bazı } (x,y) \in R^2 \text{ için } q = p + xv + yN(p)\}$$

şeklindedir. Burada N, $N(p) = (p, N(p))$ şeklindeki Gauss dönüşümüdür. $\aleph(V)$, p nin orijine, $p+v$ nin $(1,0)$ noktasına ve $p+N(p)$ nin $(0,1)$ noktasına karşılık geldiği R^2 nin bir kopyasıdır. Böylece $\aleph(V)$, R^2 ile aynı düşünülecek ve $S \cap \aleph(V)$ kesişimini de R^2 nin bir alt kümesi olarak görülecektir(Şekil 1.11.1)[1].



Şekil 1.11.1.

Daha açık olarak, $i : R^2 \to R^{n+1}$ dönüşümünü $i(x,y) = p + xv + yN(p)$ şeklinde tanımlarsak $\aleph(V) = i(R^2)$ olur. O zaman

$$(x,y) \in S \cap \aleph(V) \iff i(x,y) \in S \iff f \circ i(x,y) = c$$

dir. Böylece i altında $(f \circ i)^{-1}(c)$ seviye kümesi $S \cap \aleph(V)$ ile aynı tutulur. $(f \circ i)^{-1}(c)$, bir düzlem eğrisi olmak zorunda değildir. Ama ∇f nin $\aleph(V)$ ye dik olduğu noktalar çıkarılırsa bu şekilde olmak zorunda kalır.

Teorem 2.11.1. *S, R^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve V, $p \in S$ için S_p de bir birim vektör olsun. O zaman p yi kapsyan bir $V \subset R^{n+1}$ açık kümesi vardır, öyle ki $S \cap \aleph(V) \cap V$ bir düzlem eğrisidir. Diğer taraftan, bu eğrinin p deki eğriliği $k(V)$ normal eğriliğine eşittir[1].*

İspat. $S=f^{-1}(c)$ olacak şekilde $f:U\to R$ fonksiyonu verilsin. $\forall q\in S$ için $\nabla f(q)\neq 0$ olsun. $p\in S$ için $V=(p,v)\in S_p$ verilsin. $i:R^2\to R^{n+1}$ yukarıdaki gibi olsun ve

$$V=\left\{q\in U:\tilde{\nabla} f(q).v\neq 0 \text{ veya } \tilde{\nabla} f(q).N(p)\neq 0\right\}$$

olsun. Burada $\tilde{\nabla} f(q)$, $\nabla f(q)$ nun vektör kısmıdır$\left(\nabla f(q)=\left(p,\tilde{\nabla} f(q)\right)\right)$. O zaman $(x,y)\in i^{-1}(V)$ için

$$\nabla(f\circ i)(x,y)=\left(x,y,\tilde{\nabla} f(i(x,y)).v,\tilde{\nabla} f(i(x,y)).N(p)\right)$$

ifadesi hiç bir zaman sıfır değildir. Böylece

$$C=i^{-1}(S\cap\aleph(V)\cap V)=(f\circ i)^{-1}(c)\cap i^{-1}(V)$$

söylenildiği gibi bir düzlem eğrisidir. Yani $S\cap\aleph(V)\cap V$ bir düzlem eğrisidir. Diğer taraftan, $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, $\dot{\alpha}(t_0)=(0,0,1,0)$ olacak şekilde C de bir birim hızlı eğri ise (bu vektör $\nabla(f\circ i)(0,0)$ a dik ise C ye teğettir), o zaman

$$\begin{aligned}\|(i\dot{\circ}\alpha)(t)\|^2&=\left\|i\circ\alpha(t),x'(t)v+y'(t)N(p)\right\|^2\\&=\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\\&=\|\dot{\alpha}(t)\|^2\\&=1\end{aligned}$$

dir. $(i\dot{\circ}\alpha)(t_0)=V$ olduğunda $i\circ\alpha$ da $S\cap\aleph(V)$ de bir birim hızlı eğridir. Eğer C yi yönlendirirsek, böylece $(0,0)$ daki yönlendirme normali $(0,0,0,1)$ dir. O zaman $(0,0)$ da C nin eğriliği

$$K(\alpha(t_0))=\ddot{\alpha}(t_0).(\alpha(t_0),0,1)=y''(t_0)$$

dır. Halbuki V doğrultusunda S nin normal eğriliği

$$\begin{aligned}k(V)&=(i\dot{\circ}\alpha)(t_0).N(p)\\&=\left(p,x''(t_0)v+y''(t_0)N(p)\right).(p,N(p))\\&=y''(t_0)\end{aligned}$$

dır. Böylece $k(V)=K(\alpha(t_0))$ olur. Bu da iddia edilendir. □

Yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi üzerindeki bir p noktası için $k(V)$ normal eğriliği, p deki her V birim vektörü için S_p tanjant uzayında tanımlanır. Böylece p deki normal eğrilik, S_p de tanım kümesi birim küre olan reel değerli bir fonksiyondur. k sürekli ve küre kompakt olduğunda bu fonksiyon maksimum ve minimum değerlerine ulaşır. Şimdi vereceğimiz lemma bu ekstremumların L_p Weingarten dönüşümünün karakteristik değerleri olduğunu gösterecektir.

Lemma 2.11.1. *V, iç çarpımlı bir sonlu boyutlu vektör uzayı ve $L : V \to V$, V üzerinde self-adjoint bir lineer transformasyon olsun. $S = \{v \in V : v.v = 1\}$ ve $f(v) = L(v).v$ olacak şekilde $f : S \to R$ bir fonksiyon olsun. Farzedelim ki f, $v_0 \in S$ de sabit olsun. Yani $\alpha(t_0) = v_0$ olacak şekilde her $\alpha : I \to S$ parametrik eğrisi için $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$ olsun. O zaman $L(v_0) = f(v_0)v_0$ olur. Yani v_0, L nin karakteristik değeri $f(v_0)$ olan karakteristik vektörüdür.*

İspat. f, v_0 da sabit olduğundan $\alpha(0) = v_0$ olacak şekilde S deki her α parametrik eğrisi için $(f \circ \alpha)'(0) = 0$ dır. $v.v_0 = 0$ olan herhangi bir v birim vektörü için $\alpha(t) = (\cos t)v_0 + (\sin t)v$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} 0 = (f \circ \alpha)'(0) &= \frac{d}{dt}\,|_0\, L(\alpha(t)).\alpha(t) \\ &= \frac{d}{dt}\,|_0 \left[\left(\cos^2 t\right) L(v_0).v_0 + 2\sin t \cos t L(v_0).v + \left(\sin^2 t\right) L(v).v\right] \\ &= 2L(v_0).v \end{aligned}$$

olur. Böylece her $v \in v_0^{\perp}$ birim vektörü için $L(v_0) \perp v$ dir. O zaman $L(v_0) \perp v_0^{\perp}$ olur. Yani bazı $\lambda \in R$ için $L(v_0) = \lambda v_0$ dır. Böylece v_0, L nin bir karakteristik vektörüdür. λ karakteristik değeri

$$\lambda = \lambda v_0.v_0 = L(v_0).v_0 = f(v_0)$$

ile verilir. □

Bu lemmada bir $\alpha : I \to V$ diferensiyellenebilir parametrik eğri kavramı kullanıldı. Burada V, iç çarpımlı bir sonlu boyutlu vektör uzayıdır. Diferensiyellenebilirlik, bu düzenlemede anlam kazanır. Çünkü limitler ve türevler alışılmış olan şu yollarla tanımlanır:

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = v$$

olması, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $0 < |t - t_0| < \delta$ olduğunda $\|\alpha(t) - v\| < \varepsilon$ olması demektir.

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)(t_0) = \lim_{t \to t_0} (\alpha(t) - \alpha(t_0)) \diagup (t - t_0)$$

olduğundan bu limit vardır. Aslında burada R^{n+1} de yapılan işlemler V üzerinde de yapılabilir.

Yukarıdaki lemmanın tersi de doğrudur. Eğer v_0, L nin bir karakteristik vektörü ise $f(v) = L(v).v$, $v_0 \in S$ de sabittir. Eğer $\alpha : I \to S$ ise o zaman $\alpha(t).\alpha(t) = 1$ dir. Böylece $\forall t \in I$ için $\alpha(t).(d\alpha \diagup dt)(t) = 0$ dır. Eğer $\alpha(t_0) = v_0$ ise o zaman

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)'(t_0) &= \frac{d}{dt}|_{t_0} [L(\alpha(t)).\alpha(t)] \\
&= L\left(\frac{d\alpha}{dt}(t_0)\right).\alpha(t_0) + L(\alpha(t_0)).\frac{d\alpha}{dt}(t_0) \\
&= 2L(\alpha(t_0)).\frac{d\alpha}{dt}(t_0) \\
&= 2\lambda\alpha(t_0).\frac{d\alpha}{dt}(t_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 2.11.2. *V, iç çarpımlı sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $L : V \to V$, V üzerinde self-adjoint bir dönüşüm olsun. O zaman V nin, L nin karakteristik vektörlerini kapsayan bir ortonormal bazı vardır[3].*

İspat. V nin n boyutu üzerinde duralım. $n = 1$ için teorem basitçe görülebilir. Farzedelim ki $n = k$ için doğru olsun. $n = k + 1$ için bakalım. Lemmadan, V de L nin karakteristik vektörü olan bir v_1 birim vektörü vardır. Her $v \in V$ birim vektörü için v_1 i, $L(v_1).v_1 \geq$

$L(v).v$ olacak şekilde seçelim. $W = v_1^{\perp}$ olsun. O zaman her $w \in W$ için

$$L(w).v_1 = w.L(v_1) = w.\lambda_1 v_1 = \lambda_1 (w.v_1) = 0$$

dır. Buradan λ_1, v_1 in karakteristik değeridir. Böylece L nin W ye $L|_W$ kısıtlanışı W yi W ye dönüştürür. Açıkça $L|_W$ self-adjointtir. $boy(W) = boyV - 1 = k$ olduğunda başlangıçtaki varsayımdan $L|_W$ nin karakteristik vektörlerini kapsayan W için bir $\{v_2, ..., v_{k+1}\}$ ortonormal bazı vardır. □

n-boyutlu bir vektör uzayı üzerinde bir L self-adjoint lineer dönüşümün en fazla n tane karakteristik değeri vardır. Çünkü her karakteristik vektör, λ nın n. dereceden bir polinomu olan $\det(L - \lambda I)$ karakteristik polinomunun bir köküdür. Burada I, V üzerinde birim dönüşümdür. Bu polinomun bir kökü olan λ nın $L(v) = \lambda v$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $(L - \lambda I)(v) = 0$ olmasıdır. Böylece $L - \lambda I$ tekil olmak zorundadır. Çarpanlar sayılırsa L nin n tane karakteristik değeri olduğu görülür. L nin v_i karakteristik doğrultularının tek olarak belli olması için gerek ve yeter şart L nin karakteristik değerlerinin farklı olmasıdır.

$p \in S$ ve R^{n+1} deki bir yönlendirilmiş S hiperyüzeyi için $L_p : S_p \to S_p$ Weingarten dönüşümünün $k_1(p), ..., k_n(p)$ karakteristik değerleri S nin *asli eğrilikleri* olarak adlandırılır. L_p nin birim karakteristik vektörleri *asli doğrultuları* olarak adlandırır. Asli eğrilikler $k_1(p) \leq k_2(p) \leq ... \leq k_n(p)$ şeklinde sıralı ise, yukarıda anlatılanlar $k_n(p)$ nin $\|V\| = 1$ ve $V \in S_p$ için $k_1(p)$ normal eğriliğinin maksimum değeri olduğunu gösterir. $k_{n-1}(p)$, $\|V\| = 1$ ve $V \perp V_n$ için $k(V)$ nin maksimum değeridir. Burada $V_n, k_n(p)$ ye karşılık gelen asli doğrultusudur.
$k_{n-2}(p) = \max\{k(V) : V \in S_p, \|V\| = 1, V \perp \{V_n, V_{n-1}\}\}$ şeklinde devam edebiliriz. Bundan başka, bütün $k_i(p)$ asli eğrilikleri normal eğriliğin sabit değerleridir. $V \in S_p$ ve $\|V\| = 1$ için $k_1(p)$, $k(V)$ nin minimum değeridir.

Örnek 2.11.3. S, R^3 de $N(p) = (p, -x_1 / \|p\|, x_2 / \|p\|, x_3 / \|p\|)$ ile yönlendirilmiş $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ hiperboloidi ve $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$ olsun. O zaman daha önce gördüğümüz gibi, $p = (0,0,1)$ için $S_p = \{(p, v_1, v_2, 0) : v_1, v_2 \in R\}$ dir. $\|v\| = 1$ için

$k(v) = v_1^2 - v_2^2$ dir. Böylece $k(v)$, $v = (p, \mp 1, 0, 0)$ olduğunda maksimum değerini $\|v\| = v_1^2 + v_2^2 = 1$ için alır. $v = (p, 0, \mp 1, 0)$ olduğunda minimum değerini alır. Böylece p de asli eğrilikler $k_1(p) = -1$ ve $k_2(p) = 1$ dir.

Teorem 2.11.3. *S, R^{n+1} de bir yönlendirilmiş hiperyüzey olsun. $p \in S$ ve $\{k_1(p), ..., k_n(p)\}$, S nin R deki $\{V_1, ..., V_n\}$ asli doğrultularına karşılık gelen asli eğrilikleri olsun. O zaman $V \in S_p$ $(\|V\| = 1)$ yönündeki $k(V)$ normal eğriliği*

$$k(V) = \sum_{i=1}^{n} k_i(p)(V.V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i(p) . \cos^2 \theta_i$$

şeklindedir. Burada $\theta_i = \cos^{-1}(V.V_i)$, V ile V_i arasındaki açıdır[1].

İspat. V, $V = \sum_{i=1}^{n} (V.V_i) V_i$ şeklinde $\{V_1, ..., V_n\}$ ortonormal baz vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak ifade edildiğinde

$$\begin{aligned} k(V) = L_p(V).V &= \sum_{i=1}^{n} (\cos\theta_i) . L_p(V_i) . V \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\cos\theta_i) . k_i(p) V_i . V \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i(p) \cos^2 \theta_i \end{aligned}$$

dir. □

$V = \sum_{i=1}^{n} (\cos\theta_i) . V_i$ şeklindeki $\cos\theta_i = V.V_i$ sayıları, $\{V_1, ..., V_n\}$ ortonormal bazıyla ilgili olan doğrultman kosinüsleridir.

Harhangi bir $L : V \to V$ lineer dönüşümüne bağlı olan $II : V \to R$ reel değerli fonksiyonu

$$II(V) = L(V).V$$

şeklinde tanımlanır. Burada V, iç çarpımlı bir vektör uzayıdır. II fonksiyonu, L ile ilgili olan *kuadratik form* dur. Bir $S \subset R^{n+1}$ yönlendirilmiş hiperyüzeyinin bir p noktasındaki L_p Weingarten dönüşümüne bağlı kuadratik formu, S nin p deki *ikinci temel formu* olarak adlandırılır ve II_p ile gösterilir[1]. Böylece

$$II_p(V) = L_p(V).V = \ddot{\alpha}(t_0).N(p)$$

dir. Burada $\alpha : I \to S$, $\alpha(t_0) = p$ olacak şekilde herhangi bir parametrik eğri ve $\dot{\alpha}(t_0) = V$ dir. Özel olarak, $\|V\| = 1$ olduğunda $II_p(V)$, S nin p de V doğrultusundaki normal eğriliğine eşit olur.

S nin p deki *birinci temel formu*, S_p üzerindeki birim dönüşüm ile birleştirilmiş I_p kuadratik formudur. Böylece her $V \in S_p$ için

$$I_p(V) = V.V = \|V\|^2$$

dir.

Bir L self-adjoint lineer dönüşümüne bağlı kuadratik formu, L ile aynı bilgileri içerir. L, II den

$$L(v).w = \frac{1}{2}\left[II(v+w) - II(v) - II(w)\right]$$

formülü ile bulunabilir. Bu formül V deki bütün v ve w lar için geçerlidir.

Bir II kuadratik formu,

-her $v \neq 0$ için $II(v) > 0$ ise pozitif tanımlıdır.

-her $v \neq 0$ için $II(v) < 0$ ise negatif tanımlıdır.

-pozitif veya negatif tanımlı ise tanımlıdır.

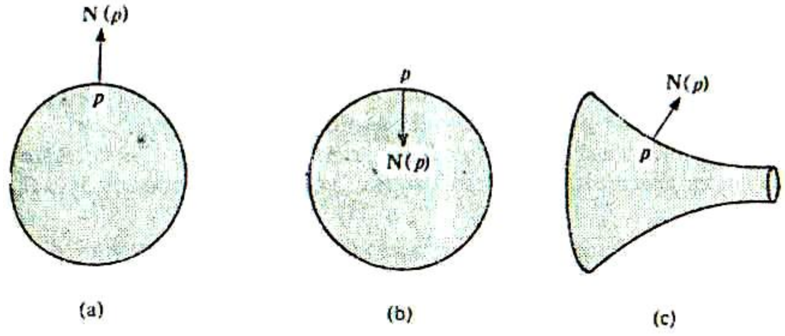
-pozitif veya negatif tanımlı değil ise tanımlı değildir.

-her v için $II(v) \geq 0$ ise pozitif yarı-tanımlıdır.

-her v için $II(v) \leq 0$ ise negatif yarı-tanımlıdır.

-pozitif veya negatif yarı-tanımlı ise yarı-tanımlıdır.

Böylece yönlendirilmiş bir $S \subset R^{n+1}$ hiperyüzeyinin birinci temel formu her zaman pozitif tanımlıdır. II_p ikinci temel formunun pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart p deki her V doğrultusu için $k(V) = II_p(V)$ normal eğriliğinin pozitif olmasıdır. Önceki teoremden, bu durumun doğru olması için gerek ve yeter şart S nin p deki bütün $k_i(p)$ asli eğriliklerinin pozitif olmasıdır. Benzer olarak, II_p nin negatif tanımlı olması için gerek ve yeter şart S nin p deki bütün asli eğriliklerinin negatif olmasıdır. II_p pozitif tanımlı olduğunda S yüzeyi p deki her V tanjant doğrultusu yönünde $N(p)$ birim normaline doğru bükülür. II_p negatif tanımlı olduğunda S her yönde $N(p)$ den uzaklaşarak bükülür(Şekil 1.11.2)[1].



Şekil 1.11.2.

Teorem 2.11.4. *R^{n+1} deki her kompakt yönlendirilmiş S hiperyüzeyi üzerinde bir p noktası vardır öyle ki bu p noktasında ikinci temel form tanımlıdır[1].*

İspat. Bu ispatın amacı S yi büyük bir çember ile çevreleyip, bu çemberi S ye dokunana kadar büzmektir. Teğet noktasında S nin normal eğriliği, sıfır ile normal eğrilik arasında sınırlıdır.

Daha açık olarak, $g : R^{n+1} \to R$, $g(x_1, ..., x_{n+1}) = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2$ şeklinde tanımlansın. S kompakt olduğundan, her $q \in S$ için $g(p) \geq g(q)$ olacak şekilde $p \in S$ vardır. Lagrange çarpanı teoreminden,

$$\nabla g(p) = \lambda.\nabla f(p) = \mu.N(p)$$

olacak şekilde $\lambda \in R$ vardır. Burada $S = f^{-1}(c)$ ve $\mu = \mp\lambda \|\nabla f(p)\|$ dir. μ nün işareti S nin yönlendirilmesine bağlıdır. Bir an için $\mu < 0$ olduğunu farzedelim. Yani S iç normali ile yönlendirilmiş olsun. O zaman

$$\mu = -|\mu| = -\|\mu.N(p)\| = -\|g(p)\| = -2\|p\|$$

olur. Böylece

$$N(p) = \frac{1}{\mu}\nabla g(p) = -\frac{1}{\|p\|}(p,p)$$

dir.

Şimdi her $V \in S_p$ ve $\|V\| = 1$ için $\alpha : I \to S$ eğrisini $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde alalım. O zaman $\forall t \in S$ için $g \circ \alpha(t_0) \geq g \circ \alpha(t)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{d^2}{dt^2}\,|_{t_0}\,(g \circ \alpha) &= \frac{d}{dt}\,|_{t_0}\,\nabla g(\alpha(t)).\dot{\alpha}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\,|_{t_0}\,2\alpha(t).\frac{d\alpha}{dt}(t) \\ &= 2\left[\|\dot{\alpha}(t_0)\|^2 + (\alpha(t_0), \alpha(t_0)).\ddot{\alpha}(t_0)\right] \\ &= 2\left[1 - \|p\| N(p).\ddot{\alpha}(t_0)\right] \\ &= 2\left[1 - \|p\| k(V)\right] \end{aligned}$$

dir. Böylece her $V \in S_p$ doğrultusu için $k(V) \geq 1 / \|p\|$ dir.

Eğer S dış normali ile yönlendirilmiş olsaydı, $\mu = \nabla g(p).N(p) > 0$ olurdu. O zaman normal eğrilik p de her V doğrultusu için işaret değiştirip $k(V) \leq -1 / \|p\|$ olurdu.

□

Weingarten dönüşümünün determinantı ve izi diferensiyel geometride özel bir yere sahiptir. $K(p) = \det L_p$ determinantı, S nin p deki Gauss Eğriliği olarak adlandırılır. Bu eğrilik p deki asli eğriliklerin çarpımına eşittir. $n = 2$ olduğunda $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ olur ve basitçe p deki Gauss eğriliği olarak adlandırılır. $1/n$ defa L_p nin izi S nin p de $H(p)$ *ortalama eğriliği* olarak adlandırılır. Böylece

$$H(p) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} k_i(p)$$

değeri, p deki ortalama eğriliktir[2].

Şimdi verilecek teorem Gauss eğriliğinin hesabında kullanışlı bir yöntem vermektedir.

Teorem 2.11.5. *S, R^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. Z, S üzerinde $N = Z / \|Z\|$ olacak şekilde sıfırdan farklı herhangi bir normal vektör alanı* *ve* $\{V_1,...,V_N\}$, S_p *için bir baz olsun. O zaman*

$$K(p) = (-1)^n \det \begin{bmatrix} \nabla_{V_1} Z \\ . \\ . \\ \nabla_{V_n} Z \\ Z(p) \end{bmatrix} \diagup \|Z(p)\|^n . \det \begin{bmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ Z(p) \end{bmatrix}$$

dir. Burada $W_1,...,W_{n+1} \in R_p^{n+1}$ *için* $W_i = (p, w_{i,1},...,w_{i,n+1})$ *dir. O halde*

$$\det \begin{bmatrix} W_1 \\ . \\ . \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} w_{1,1} & . & . & w_{1,n+1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ w_{n+1,1} & . & . & w_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

dir[1].

İspat. $Z = \|Z\| .N$ olduğunda

$$\det \begin{bmatrix} \nabla_{V_1} Z \\ . \\ . \\ \nabla_{V_n} Z \\ Z(p) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (\nabla_{V_1} \|Z\|) .N(p) + \|Z(p)\| .\nabla_{V_1} N \\ . \\ . \\ (\nabla_{V_n} \|Z\|) .N(p) + \|Z(p)\| .\nabla_{V_n} N \\ \|Z(p)\| .N(p) \end{bmatrix}$$

$$= \|Z(p)\|^n \det \begin{bmatrix} \nabla_{V_1} N \\ . \\ . \\ \nabla_{V_n} N \\ \|Z(p)\| .N(p) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n \|Z(p)\|^n \det \begin{bmatrix} L_p(V_1) \\ . \\ . \\ L_p(V_n) \\ Z(p) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n \|Z(p)\|^n \det \left(\begin{bmatrix} & & 0 \\ & A^t & . \\ & & . \\ 0 & . \; . & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ Z(p) \end{bmatrix} \right)$$

$$= (-1)^n \|Z(p)\|^n (\det A) \det \begin{bmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ Z(p) \end{bmatrix} = (-1)^n \|Z(p)\|^n K(p) \det \begin{bmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ Z(p) \end{bmatrix}$$

dir. Burada A, L_p nin S_p için $\{V_1, ..., V_n\}$ bazına karşılık gelen matrisidir. $K(p)$ için çözüm yapılırsa ispat tamamlanmış olur. □

Örnek 2.11.4. S, dış normali ile yönlendirilmiş $\left(x_1^2 / a^2\right) + \left(x_2^2 / b^2\right) + \left(x_3^2 / c^2\right) = 1$ elipsoidi olsun. $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$ için

$$Z(p) = \frac{1}{2} \nabla f(p) = \left(p, x_1 / a^2, x_2 / b^2, x_3 / c^2\right)$$

olsun. S_p için bir baz, $Z(p)$ ye dik olan herhangi bir vektör çifti ile oluşur. $x_1 \neq 0$ için

$V_1 = \left(p, x_2 / b^2, -x_1 / a^2, 0\right)$ ve $V_2 = \left(p, x_3 / c^2, 0, -x_1 / a^2\right)$ olarak alabiliriz. O zaman

$$\det \begin{bmatrix} \nabla_{V_1} Z \\ \nabla_{V_2} Z \\ Z(p) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 / a^2 b^2 & -x_1 / a^2 b^2 & 0 \\ x_3 / a^2 c^2 & 0 & -x_1 / a^2 c^2 \\ x_1 / a^2 & x_2 / b^2 & x_3 / c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1}{a^4 b^2 c^2} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \right) = \frac{x_1}{a^4 b^2 c^2}$$

dir. Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ Z(p) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 / b^2 & -x_1 / a^2 & 0 \\ x_3 / c^2 & 0 & -x_1 / a^2 \\ x_1 / a^2 & x_2 / b^2 & x_3 / c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1}{a^2} \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right)$$

dir. Buradan

$$\|Z(p)\| = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right)^{1/2}$$

dir. Böylece elipsoidin Gauss eğriliği

$$K(p) = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right)^2}$$

olur. K nın bu formülü $x_1 \neq 0$ için türetilmiş olsa da süreklilikten, her $p \in S$ için geçerlidir.

Bir önceki teorem, diferensiyel geometride genel bir teorem örneğidir. Bir S hiperyüzeyinin bir özelliğine, S yüzeyi hakkında bir bütün olarak bir durumu tanımlıyorsa genel bir özellik denir. Örneğin, "S hiperyüzeyi irtibatlıdır; kompakttır" gibi veya "C 1-yüzeyi sınırlı uzunluğa sahiptir" gibi özelliklerden bahsediliyorsa bu özellikler genel özelliklerdir. Diğer taraftan, S hiperyüzeyinin bir özelliği S yüzeyinin özel bir noktasında veya civarında bir durumu tanımlıyorsa, bu özelliğe de yerel bir özellik denir. Bu durum, o noktayı kapsayan keyfi küçük bir açık kümede hesaplamalarla ispatlanmış olabilir.

Örneğin, S nin p deki ikinci temel formu tanımlıdır veya S nin p deki Gauss eğriliği pozitiftir gibi özellikler yerel özelliklerdir. Genel bir teorem, içindeki önemli hipotezlerde ve sonuçlarda genel bir özellik bulunduran teoremlerdir. Diğer taraftan bütün önemli hipotezlerde ve sonuçlarda yerel özellikler bulunuyorsa bu teoreme yerel bir teorem denir. Böylece Teorem 2.11.3 ve Teorem 2.11.5 yerel teoremlerdir. Ancak, S nin yönlendirilmiş olması genel bir hipotez olmasına rağmen bu durum önemli değildir; bu teoremler yönlendirmenin seçiminden bağımsızdır ve aslında bu teoremlerin geçerliliği için gerekli olan, p de veya civarında tanımlı N diferensiyellenebilir birim normal vektör alanının bir seçimidir. Tersine, Teorem 2.11.4 bir genel teoremdir. Bunun geçerliliği kritik olarak S nin kompakt olması hipotezine dayanır.

Şimdi verilecek olan teorem ilginç bir genel teorem çeşitidir. Bir S hiperyüzeyi üzerindeki her noktada iki yerel özelliğin denkliğini iddia eder. Ancak sadece bir tane genel hipotez bulunmaktadır. Kompaktlık hipotezi çıkarıldığında teorem doğru olmaktan çıkar. Örneğin, R^3 de tek kanatlı bir hiperboloid bu şekildedir.

Teorem 2.11.6. *S, R^{n+1} de kompakt irtibatlı ve yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun. O zaman her $p \in S$ için S nin p deki $K(p)$ Gauss eğriliğinin sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter şart S nin p deki II_p ikinci temel formunun tanımlı$(II_p(V) \neq 0)$ olmasıdır[1].*

İspat. Eğer II_p, her $p \in S$ için tanımlı ise o zaman $k(V) = II_p(V)$ normal eğriliği her $V \in S_p$ doğrultusu için sıfırdan farklıdır. Böylece özel olarak p deki bütün asli eğrilikler sıfırdan farklıdır. Buradan bunların çarpımı olan $K(p)$ de sıfırdan farklıdır.

Tersine, teorem 2.11.4 den, II_{p_0} tanımlı olacak şekilde bir $p_0 \in S$ noktası vardır. Farzedelim ki II_{p_0} pozitif tanımlı olsun. O zaman S nin k_1 minimum asli eğriliği, p_0 da pozitiftir. $k_1 : S \to R$ sürekli olduğunda S irtibatlı olur. Böylece k_1 hiçbir yerde sıfır değildir. k_1 her yerde pozitif olmak zorundadır. Buradan bütün asli eğrilikler her yerde pozitif olmalıdır ve II_p her $p \in S$ için pozitif tanımlıdır. Eğer II_{p_0} negatif tanımlı olsaydı, benzer olarak k_1 ile k_n maksimum eğriliği yer değiştirirdi. Bu da II_p nin her $p \in S$ için negatif tanımlı olduğunu gösterirdi. $\square$

Tanım 2.11.1. Bir diferensiyellenebilir $f : R^n \rightarrow R^m$ fonksiyonuna f nin Jakobian matrisiyle belirli olan

$$f_* : R^n_p \rightarrow R^m_{f(p)}$$

lineer dönüşümü karşılık gelir. Burada $\forall V_p \in R^n_p$ için

$$f_*\left(\vec{V}_p\right) = \vec{V}_p[f] = \left(\vec{V}_p[f_1], ..., \vec{V}_p[f_m]\right)|_{f(p)}$$

dir. f_* lineer dönüşümünün eki

$$f^* : {R^m_{f(p)}}^* \rightarrow R^{n*}_p$$

ile gösterilen bir diğer lineer dönüşümdür. Burada ${R^m_{f(p)}}^*$, R^m_p nin dual uzayıdır. f^* ın matrisi f_* ın matrisinin transpozudur. Ayrıca

$$[f^*(w)]_p\left(\vec{V}_p\right) = w|_{f(p)}\left[f_*\left(\vec{V}_p\right)\right]$$

ile tanımlıdır[3].

2.12 Parametrik Yüzeyler

Her C bağlantılı yönlendirilmiş yüzey eğrisi genel parametrizasyona sahiptir ve bunu kullanarak,

(i) eğrilik için $K \circ \alpha = \ddot{\alpha} \cdot N \circ \alpha \diagup \|\dot{\alpha}\|^2$
şeklinde kullanışlı bir formül ve

(ii) C üzerinde çeşitli integraller
tanımlayabiliriz[1].

Şimdi benzer bir gösterimi hiperyüzeyler $(n > 1)$ için uygulayacağız. Buradan yönlendirilmiş hiperyüzeylerin (bağlantılı olanlar) genelde sadece yerel parametreleri kabul etmesi durumu ortaya çıkar ki bu da bizim ihtiyacımızı karşılar.

Bir parametrizasyonun sağlaması gereken ilk özellik düzgün olmasıdır. Düzgünlüğü tanımlamak için bir dönüşümün diferensiyeline ihtiyacımız vardır.

U, R^n de bir açık küme olsun ve $\varphi : U \to R^m$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin diferensiyeli, $d\varphi : U \times R^n \to R^m \times R^m$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür. Bu dönüşüm şöyle tanımlanır:

Bir $V \in U \times R^n$ noktası V=(p,V) şeklinde bir tanjant vektörüdür. V verildiğinde, $\alpha : I \to U$, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde U da herhangi bir parametrik eğri olsun. Bu durumda $d\varphi(V) \in R^m_{\varphi(p)}$ olup

$$d\varphi(V) = \varphi\dot{\circ}\alpha(t_0)$$

şeklinde tanımlanır. $d\varphi(V)$ nin değeri α parametrik eğrisinin seçimine bağlı değildir. Çünkü

$$\begin{aligned}\varphi\dot{\circ}\alpha(t_0) &= \left(\varphi \circ \alpha(t_0), (\varphi_1 \circ \alpha)'(t_0), ..., (\varphi_m \circ \alpha)'(t_0)\right) \\ &= (\varphi(p), \nabla\varphi_1(\alpha(t_0).\dot{\alpha}(t_0)), ..., \nabla\varphi_m(\alpha(t_0).\dot{\alpha}(t_0))) \\ &= (\varphi(p), \nabla\varphi_1(p).V, ..., \nabla\varphi_m(p).V)\end{aligned}$$

dir. Burada φ_i ler her $q \in U$ için φ nin bileşenleridir. Böylece

$$d\varphi(V) = (\varphi(p), \nabla_V\varphi_1, ..., \nabla_V\varphi_m)$$

olur.

Yukarıdaki formül $d\varphi$ nin kısıtlanmışının $d\varphi_p : R^n_p \to R^m_{\varphi(p)}$ lineer dönüşümü olduğunu ortaya koyar. Bunun matrisi R^n_p nin standart bazlarıyla ilişkilidir ve $R^m_{\varphi(p)}$, φ nin p deki Jakobian matrisidir. $\left(\left(\partial\varphi_i / \partial x_j\right)(p)\right)$ Gerçekten, eğer $e_j = (p, 0, ..., 1, ..., 0)$, $e'_i = (\varphi(p), 0, ..., 1, ..., 0)$ olsun. Burada 1, vektör kısımlarının j.ve i. bileşenindedir. Bu durumda $d\varphi_p$ nin (a_{ij}) matrisi

$$d\varphi_p(e_j) = \sum a_{ij}.e'_i \ \ , j \in \{1, ..., n\}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}a_{ij} = d\varphi_p(e_j).e'_i &= \left(\varphi(p), \nabla_{e_j}\varphi_1, ..., \nabla_{e_j}\varphi_m\right).e'_i \\ &= \left(\varphi(p), \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}(p), ..., \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}(p)\right).e'_i \\ &= \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(p)\end{aligned}$$

dir.

$U \times R^n = \bigcup\limits_{p\in U} R^n_p$ kümesi R^n de U açık kümesinin tanjant demeti olarak adlandırılır ve $T(U)$ ile gösterilir. Böylece $\varphi : U \to R^m$ diferensiyellenebilir dönüşümünün diferensiyeli $T(U)$ yu $T(R^m)$ ye dönüştürür. Benzer olarak, eğer S, R^{n+1} de bir hiperyüzey ise tanjant demeti $T(S) = \bigcup\limits_{p\in S} S_p \subset S\times\, R^{n+1}$ kümesidir.
$\varphi : S \to R^m$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin. Bu dönüşümün diferensiyeli olan $d\varphi : T(S) \to T(R^m)$ dönüşümü,

$$d\varphi(V) = (\varphi\dot{\circ}\alpha)(t_0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada α, S üzerinde $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde herhangi bir parametrik eğridir. $d\varphi$, φ nin R^{n+1} deki bir açık kümeye herhangi bir genişletmesinin $d\tilde{\varphi}$ diferensiyelinin $T(S)$ ye kısıtlanmışıdır ve bundan dolayı özel olarak $d\varphi(V)$, α nın seçiminden bağımsızdır. Buradan $d\varphi$ nin S_p ye kısıtlanmışı olan $d\varphi_p : S \to R^m_{\varphi(p)}$ dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

$k \geq 0$ olmak üzere R^{n+k} da bir parametrik n-yüzey, $\varphi : U \to R^{n+k}$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Burada U, R^n de regüler olan bağlantılı bir açık kümedir. Yani $p \in U$ için $d\varphi_p$ regülerdir. Bu durumda $d\varphi_p$ nin rankı n dir. $d\varphi_p$ nin tekil olma durumu, $d\varphi_p$ nin her $p \in U$ için $R^{n+k}_{\varphi(p)}$ nin n-boyutlu bir altuzayı olmasını garanti eder. $d\varphi_p$ nin görüntüsü, φ nin p noktasındaki tanjant uzayıdır. Burada φ nin birebir olmasına gerek yoktur. Yani $q \neq p$ için $\varphi(q) = \varphi(p)$ olması $d\varphi_p$ nin görüntüsünün, $d\varphi_q$ nun görüntüsüne eşit olmasını gerektirmez.

Örnek 2.12.1. Bir parametrik 1-yüzey basitçe *regüler* bir parametrik eğridir[4].

Örnek 2.12.2. U, R^n de açık olmak üzere $f : U \to R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $\varphi : U \to R^{n+1}$ dönüşümü $\varphi(p) = (p, f(p))$ şeklinde tanımlansın. Böylece φ, R^{n+1} de, görüntüsü f nin grafiği olan parametrik bir hiperyüzeydir.

Örnek 2.12.3. $\varphi : U \to R^3$,

$$\varphi(\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $U = \left\{(\theta,\phi) \in R^2 : 0 < \phi < \pi\right\}$ ve $r > 0$ olsun. O zaman φ, görüntüsü R^3 de r yarıçaplı, kuzey ve güney kutupları çıkarılmış 2-küre olan bir parametrik 2-yüzeydir. Burada φ, birebir değildir. Aslında φ, R^2 deki U şeridini kürenin etrafında defalarca örter. Kuzey ve güney kutupları φ nin görüntüsünden çıkarılmıştır. Çünkü $d\varphi_p$, U şeridinin $\phi = 0$ ve $\theta = \pi$ köşeleri boyunca tekildir. $-\pi < \theta < \pi$ olduğunda θ ve ϕ sayıları, küre üzerindeki $\varphi(\theta,\phi)$ noktasının küresel koordinatları olarak adlandırılırlar.

Örnek 2.12.4. $k \geq 1$ olmak üzere $L : R^n \to R^{n+k}$ tekil olmayan bir lineer dönüşüm ve $w \in R^{n+k}$ olsun.

$$\varphi(p) = L(p) + w$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : R^n \to R^{n+k}$ dönüşümü, R^{n+k} da w boyunca bir parametrik n-düzlemdir. Her $(p,v) \in R^n_p$ ve $p \in R^n$ için

$$d\varphi_p(p,v) = (\varphi(p), L(v))$$

dir. Eğer $\alpha(t) = p + tv$ ise o zaman $\dot{\alpha}(0) = (p,v)$ dir ve

$$\begin{aligned}(\varphi\dot{\circ}\alpha)(0) &= \left(\varphi \circ \dot{\alpha}(0), \frac{d}{dt}\,|_0\,(L(p+tv)+w)\right) \\ &= \left(\varphi(p), \frac{d}{dt}\,|_0\,(L(p)+tL(v)+w)\right) \\ &= (\varphi(p), L(v))\end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.12.5. $U \subset R^n$ olmak üzere $\varphi : U \to R^{n+k}$ bir parametrik n-yüzey olsun. $(u_1,...,u_{n+1}) \in U$ ve $u_{n+1} \in R$ olmak üzere φ üzerindeki silindir,

$$\tilde{\varphi}(u_1,...,u_{n+1}) = (\varphi(u_1,...,u_n), u_{n+1})$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\varphi} : U \times R \to R^{n+k+1}$ parametrik $(n+1)$ yüzeydir[1].

Örnek 2.12.6. I, R de açık olmak üzere $\alpha : I \to R^2$ eğrisi, görüntüsü x_1-ekseninin üst tarafında kalan bir regüler parametrik eğri olsun. Bu durumda her $t \in I$ için $y(t) > 0$ dır.

Burada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ dir. $\varphi : I \times R \rightarrow R^3$,

$$\varphi(t,\theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta)$$

şeklinde tanımlansın. φ, α nın x_1-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen parametrik dönel yüzeydir[4].

U, R^n de açık olmak üzere $\varphi : U \rightarrow R^{n+k}$ herhangi bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ boyunca bir X vektör alanı, her $p \in U$ noktasına bir $X_p \in R^{n+k}_{\varphi(p)}$ vektörü karşılık getiren bir dönüşümdür. $X : U \rightarrow R^{2(n+k)}$, bir dönüşüm olarak diferensiyellenebilir ise X diferensiyellenebilirdir. Bu da her $X_i : U \rightarrow R$ fonksiyonunun U üzerinde diferensiyellenebilir olması demektir. Burada $p \in U$ için $X(p) = (\varphi(p), X_1(p), .., X_{n+k}(p))$ dir. X vektör alanı, U üzerindeki bazı Y vektör alanları için $X(p) = d\varphi_p(Y(p))$ formunda ise φ ye teğettir. Eğer her $p \in U$ için $X(p)$, $d\varphi_p$ nin görüntüsüne dik ise X, φ ye normaldir.

Bir φ parametrik eğrisi için, $\dot{\varphi}$ hız vektör alanı her t için $\dot{\varphi}(t) = d\varphi_t(t,1)$ olduğundan φ boyunca tanjant vektör alanıdır. Hız vektör alanı şu şekilde genelleştirilebilir:

U, R^n de açık olmak üzere bir $\varphi : U \rightarrow R^{n+k}$ diferensiyellenebilir dönüşümü için $i \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere φ boyunca E_i tanjant vektör alanları,

$$E_i(p) = d\varphi_p(p, 0, ..., 1, ..., 0)$$

şeklinde tanımlansın. Burada 1, vektör kısmının i. bileşendedir. E_i bileşenleri φ nin p deki Jakobian matrisinin i. sütununun elemanlarıdır. Buradan

$$E_i(p) = \left(\varphi(p), \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(p)\right) = \left(\varphi(p), \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_i}(p), ..., \frac{\partial\varphi_{n+k}}{\partial u_i}(p)\right)$$

dır. Burada $p \in U$ için $\varphi(p) = (\varphi_1(p), ..., \varphi_{n+k}(p))$ dir. E_i ler φ boyunca *koordinat vektör alanları* olarak adlandırılır. Aynı zamanda $E_i(p)$, $\varphi(p)$ den geçen u_i haricindeki u_j ler sabit olacak şekildeki $u_i \longmapsto \varphi(u_1, ..., u_n)$ koordinat eğrisinin p deki teğet vektörüdür. φ bir parametrik n-yüzey olduğunda, yani φ regüler olduğunda, bu vektör alanları $d\varphi_p$ tekil değilse her $p \in U$ noktasında lineer bağımsızdırlar. Böylece her $p \in U$ için bu vektör alanları $d\varphi_p$ nin görüntüsü için bir baz oluştururlar.

U, R^n de açık olmak üzere $\varphi : U \to R^{n+k}$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve φ boyunca bir X diferensiyellenebilir vektör alanı için X in $V \in R^n_p$ yönündeki $\nabla_V X \in R^{n+k}_{\varphi(p)}$ türevi

$$\begin{aligned}\nabla_V \mathbf{X} &= \left(\varphi(p), \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (X \circ \alpha)\right) \\ &= (\varphi(p), \nabla_V X_1, ..., \nabla_V X_{n+k})\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, $\mathbf{X}$ in vektör kısmıdır. Yani $q \in U$ için $\mathbf{X}(q) = (\varphi(q), X(q))$ dur. α, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde U daki herhangi bir parametrik eğri ve $X_i : U \to R$ fonksiyonları da $\mathbf{X}$ in bileşenleridir. Yani $q \in U$ için $\mathbf{X}(q) = (\varphi(q), X_1(q), ..., X_{n+k}(q))$ dur. $V = e_i = (p, 0, ..., 1, ..., 0)$ olduğundan

$$\nabla_{e_i} \mathbf{X} = \left(\varphi(p), \frac{\partial X}{\partial u_i}(p)\right) = \left(\varphi(p), \frac{\partial X_1}{\partial u_i}(p), ..., \frac{\partial X_{n+k}}{\partial u_i}(p)\right)$$

elde edilir. Farzedelim ki $\varphi : U \to R^{n+1}$, R^{n+1} de bir parametrik hiperyüzey olsun. O zaman her $p \in U$ için $N(p)$, $\varphi(p)$ de biricik olan birim vektörü göstersin öyle ki $N(p)$, $d\varphi_p$ nin görüntüsüne diktir. Buradan

$$\det \begin{bmatrix} E_1(p) \\ . \\ . \\ E_n(p) \\ N(p) \end{bmatrix} > 0$$

dir. Burada N, φ boyunca bir diferensiyellenebilir birim normal vektör alanıdır. N, φ boyunca yönlendirme vektör alanı olarak da adlandırılır.

Örnek 2.12.7. φ, R^3 de

$$\varphi(\theta, \phi) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi)$$

şeklinde tanımlı parametrik tor olsun. φ boyunca koordinat vektör alanlarının vektör kısımları

$$E_1(\theta, \phi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (a + b\cos\phi)(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

ve

$$E_2(\theta,\phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = b(-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

dir. φ boyunca N yönlendirme vektör alanının vektör kısmı

$$\begin{aligned} N(\theta,\phi) &= \frac{E_1(\theta,\phi)\times E_2(\theta,\phi)}{\|E_1(\theta,\phi)\times E_2(\theta,\phi)\|} \\ &= (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \end{aligned}$$

dir. Buradan $p = (\theta,\phi) \in R^2$ için

$$\begin{aligned} L_p(E_1(p)) = L_p(d\varphi_p(p,1,0)) = -\nabla_{(p,1,0)}N &= -\left(\varphi_p, \frac{\partial N}{\partial\theta}\right) \\ &= -(\varphi_p, -\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \\ &= -\frac{\cos\phi}{a+b\cos\phi}E_1(p) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L_p(E_2(p)) &= -\left(\varphi_p, \frac{\partial N}{\partial\phi}\right) \\ &= -(\varphi_p, -\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\phi) \\ &= -\frac{1}{b}E_2(p) \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı $E_1(p)$ ve $E_2(p)$, L_p nin karakteristik vektörleridir. Asli eğrilikler, $-(\cos\phi)/(a+b\cos\phi)$ ve $-1/b$ dir. Gauss eğriliği, $K(\theta,\phi) = (\cos\phi)/b(a+b\cos\phi)$ dir. Torun dış tarafında$(-\pi/2 < \phi < \pi/2)$ $K > 0$ dır. İç tarafında$(\pi/2 < \phi < 3\pi/2)$ $K < 0$ dır. Torun üstünde$(\phi = \pi/2)$ ve altında$(\phi = -\pi/2)$ ise $K = 0$ dır[1].

2.13 Yüzeyler ve Parametrik Yüzeylerin Yerel Denkliği

Teorem 2.13.1. (*Ters Fonksiyon Teoremi*) U, R^{n+1} *de bir açık küme olsun.* $\psi : U \to R^{n+1}$ *diferensiyellenebilir olsun. Farzedelim ki* $p \in U$ *için* $d\psi_p$ *tekil olmasın. O zaman* p *civarında bir* $V \subset U$ *açık kümesi bulunur, öyle ki* ψ *nin* $\psi|_V$*ye kısıtlanmışı* V *yi*

R^{n+1} deki W açık kümesine birebir dönüştürür. Üstelik $(\psi\mid_V)^{-1}: W \to V$ ters dönüşümü diferensiyellenebilirdir[1].

$d\psi(p)$ nin R_p^{n+1} ve $R_{\psi(p)}^{n+1}$ deki standart bazlarına göre matrisi, ψ nin p deki $J_\psi(p)$ Jakobiyan matrisi olduğundan, $d\psi(p)$ nin tekil olmama durumu basitçe det $J_\psi(p) \neq 0$ olmasını gerektirir.

Şimdi, yerel olarak hiperyüzeylerin ve parametrik hiperyüzeylerin aynı olduğunu gösteren iki teorem verilecektir.

Teorem 2.13.2. *S, R^{n+1} de bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. O zaman R^{n+1} de p civarında bir V açık kümesi ve φ, U dan $V \cap S$ ye birebir olacak şekilde bir $\varphi: U \to R^{n+1}$ dönüşümü vardır[1].*

İspat. Bazı $c \in R$ için $S = f^{-1}(c)$ olacak şekilde, U_1, R^{n+1} de açık olmak üzere $f: U_1 \to R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $q \in S$ için $\nabla f(q) \neq 0$ olsun. $(\partial f / \partial x_i)(p) \neq 0$ olacak şekilde $i \in \{1, ..., n+1\}$ seçelim. Böyle bir seçim, $\nabla f(p) \neq 0$ olduğundan dolayı yapılabilir. $\psi: U_1 \to R^{n+1}$,

$$\psi(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_{i-1}, f(x_1, ..., x_{n+1}), x_{i+1}, ..., x_{n+1})$$

şeklinde tanımlansın. Böylece ψ, f nin seviye kümelerini x_i =sabit hiperdüzlemlerine dönüştürür. Özel olarak ψ, S yi $x_i = c$ düzlemine dönüştürür. $J_\psi(p)$ Jakobiyan matrisi, i. sütunu $\nabla f(p)$ nin bileşenleriyle değiştirilmiş özdeşlik matrisidir. Buradan det $J_\psi(p) = (\partial f / \partial x_i)(p) \neq 0$ dır. Böylece ters fonksiyon teoreminden, p civarında bir $V_1 \subset U_1$ açık kümesi vardır öyle ki ψ, $\psi(p)$ civarında V_1 i W_1 açık kümesine birebir dönüştürür ve $(\psi\mid_{V_1})^{-1}: W_1 \to V_1$ diferensiyellenebilirdir. Her $j \in \{1, ..., n+1\}$ için $a_j < b_j$ olacak şekilde $a_j, b_j \in R$ seçelim öyle ki

$$W = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) : a_j < x_j < b_j, \text{ her } j \text{ için}\right\}$$

kümesi W_1 in bir alt kümesidir ve $\psi(p) \in W$ dir. Son olarak $V = (\psi\mid_{V_1})^{-1}(W)$ ve

$$U = \left\{(u_1, ..., u_n) \in R^n : a_j < u_j < b_j,\ j < 1 \text{ için ve } a_{j+1} < u_j < b_{j+1},\ j \geq 1 \text{ için}\right\}$$

olsun. $\varphi : U \to R^{n+1}$,

$$\varphi(u_1,...,u_n) = (\psi|_V)^{-1}(u_1,...,u_{i-1},c,u_i,...,u_n)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece φ, iddia edildiği gibi parametrik hiperyüzeydir. $\square$

Bu teoremde φ parametrik yüzeyinin N^{φ} vektör alanı ile S nin N^S yönlendirme vektör alanları uyumlu olarak seçilebilir. Bu da her $q \in U$ için $N^{\varphi}(q) = N^S(\varphi(q))$ olması demektir. Aslında φ nin görüntüsü S nin alt kümesi olduğundan $\forall q \in U$ için $d\varphi_q$ nin görüntüsü $S_{\varphi(q)}$ nin alt kümesidir. Böylece $\forall q \in U$ için $N^S(\varphi(q))$, $d\varphi_q$ nin görüntüsüne diktir. Üstelik,

$$g(q) = \det \begin{bmatrix} E_1(q) \\ . \\ . \\ E_n(q) \\ N^S(\varphi(q)) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $g : U \to R$ fonksiyonu süreklidir ve hiçbir yerde sıfır değildir. U irtibatlı olduğunda g, ya her yerde pozitiftir ya da her yerde negatiftir. Eğer $\forall q \in U$ için $g(q) > 0$ ise o zaman $N^{\varphi} = N^S \circ \varphi$ dir. Eğer $\forall q \in U$ için $g(q) < 0$ ise o zaman $N^{\varphi} = -N^S \circ \varphi$ dir. Böylece φ yerine $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to R^{n+1}$

$$\tilde{\varphi}(u_1,u_2,u_3,...,u_n) = \varphi(u_2,u_1,u_3,...,u_n)$$

şeklinde tanımlanan parametrik hiperyüzeyi alınırsa $N^{\tilde{\varphi}} = N^S \circ \tilde{\varphi}$ olur. Burada

$$\tilde{U} = \{(u_1,u_2,u_3,...,u_n) \in R^n : (u_2,u_1,u_3,...,u_n) \in U\}$$

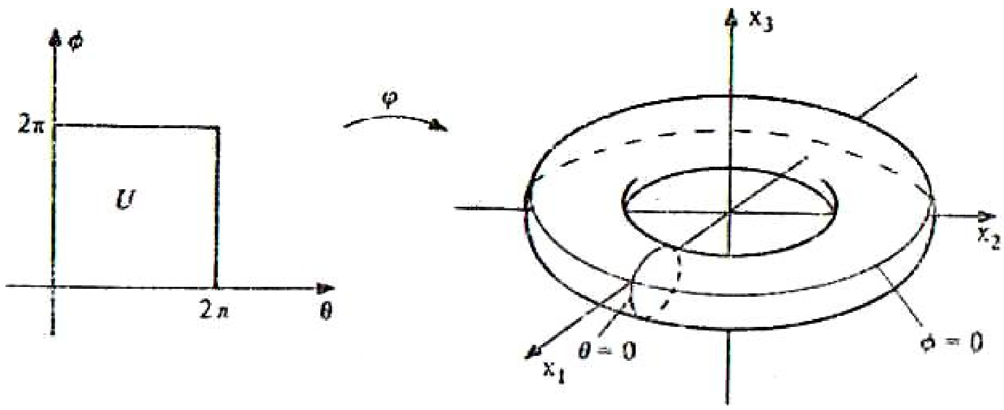
dir.

Görüntüsü, yönlendirilmiş S hiperyüzeyinin bir açık alt kümesi olan ve yönlendirme vektör alanı S nin yönlendirme vektör alanı ile aynı olan$\left(N^{\varphi} = N^S \circ \varphi\right)$ bir $\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyi, S nin bir *yerel parametrizasyonu* olarak adlandırılır. Yukarıdaki teorem, S nin herhangi bir noktası civarında, görüntüsü S de bir açık küme olan S nin bir birebir yerel parametrizasyonunun varlığını garanti eder. Böyle bir $\varphi : U \to S$ parametrizasyonunun φ^{-1} tersi genelde bir *harita* olarak adlandırılır. Çünkü φ^{-1} boyunca φ nin görüntü kümesi $U \subset R^n$ üzerine resmedilmiştir. Örneğin, dünyanın bir bölgesinin bir topoğrafik veya siyasi harita üzerine çizilmesi gibi düşünülebilir. φ^{-1}, aynı zamanda koordinat sistemi olarak da adlandırılır. Çünkü φ^{-1} boyunca φ nin görüntüsündeki her p noktası için reel sayıların sıralı n-lisine karşılık gelir. Bu da p nin koordinatlarıdır[1].

Örnek 2.13.1. $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$ açık küresinden R^3 e tanımlı bir φ dönüşümü her $a > b > 0$ için

$$\varphi(\theta,\phi) = ((a + b\cos\theta)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi)$$

şeklinde tanımlansın.



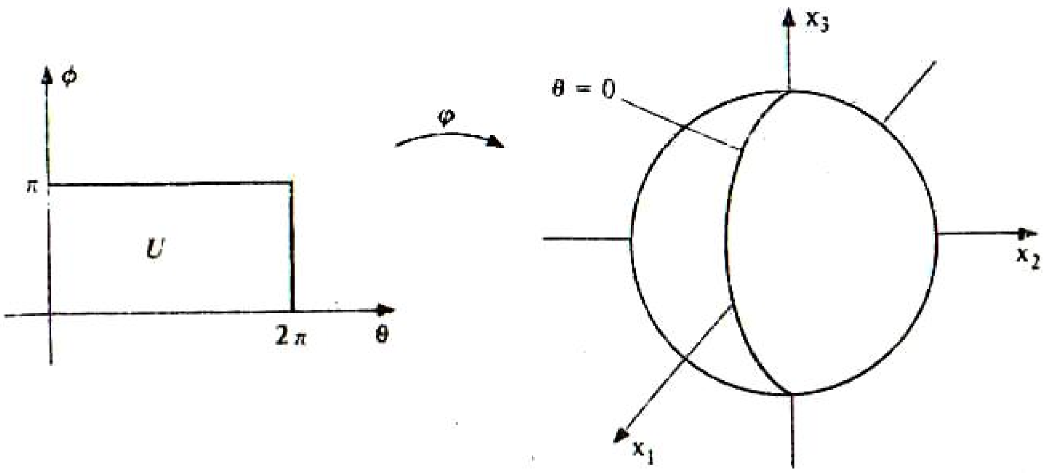
Şekil 1.13.1.

O zaman φ^{-1}, iki çemberi çıkarılmış $\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2 + x_3^2 = b^2$ toru üzerinde bir haritadır(Şekil 1.13.1)[1].

Örnek 2.13.2. $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$ açık dikdörtgenini R^3 e resmeden φ dönüşümü,

$$\varphi(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman φ^{-1}, S^2 birim küresi üzerinde bir yarım çemberi çıkarılmış bir haritadır(Şekil 1.13.2)[1].



Şekil 1.13.2

Teorem 2.13.3. $\varphi : U \to R^{n+1}$, R^{n+1} *de bir parametrik hiperyüzey ve* $p \in U$ *olsun.* p *civarında bir* $U_1 \subset U$ *açık kümesi vardır öyle ki* $\varphi(U_1)$, R^{n+1} *de bir hiperyüzeydir[1].*

İspat. $\psi : U \times R \to R^{n+1}$, $\psi(q,s) = \varphi(q) + s.N(q)$ şeklinde tanımlansın. Burada $N(q)$, φ boyunca yönlendirme vektör alanının q deki vektör kısmıdır. O zaman

$$J_\psi(p,0) = \begin{bmatrix} & . \\ & . \\ J_\psi(p) & N(p) \\ & . \\ & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & & & & . & . \\ . & & & & . & . \\ E_1(p) & . & . & . & E_n(p) & N(p) \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & . \end{bmatrix}$$

matrisi, sütunları E_i koordinat vektör alanlarının ve N birim normal vektör alanının p deki vektör kısımları olan matristir. Buradan $J_\psi(p)$ nin sütunları lineer bağımsızdır ve $\det J_\psi(p,0) \neq 0$ dır. Ters fonksiyon teoreminden, $(\psi|_V)^{-1}$ diferensiyellenebilir olacak şekilde ve ψ nin V ye kısıtlanmışı V yi $\varphi(V)$ üzerine birebir resmedecek şekilde $(p,0)$ civarında bir $V \subset U \times R$ açık kümesi vardır. Eğer gerekirse V yi büzerek, p yi kapsayan bazı $U_1 \subset U$ açık kümeleri için ve sıfırı kapsayan bazı $I \subset R$ açık aralıkları için $V = V_1 \times I$ olarak alabiliriz. Şimdi f, $\psi|_V$ nin görüntüsünden R ye $f(\psi(q,s)) = s$ şeklinde tanımlansın. Böylece $f(\psi(q,s))$, $\psi(q,s)$ den φ nin görüntüsüne olan dik uzaklıktır. f, iyi tanımlıdır ve diferensiyellenebilirdir. Çünkü f, $(\psi|_V)^{-1}$ dönüşümü ile $U_1 \times I \to I$ izdüşüm dönüşümünün birleşimidir. $f^{-1}(0)$ seviye kümesi sadece $\varphi(U_1)$ dir. Çünkü

$$f^{-1}(0) = \{\psi(q,s) : q \in U_1, s = 0\} = \{\varphi(q) : q \in U_1\}$$

dir.

Son olarak, $Z = \psi(q,0) \in f^{-1}(0)$ için $\nabla f(Z) \neq 0$ dır. Çünkü $\alpha(s) = \psi(q,s) = \varphi(q) + s.N(q)$ olarak alırsak

$$\nabla f(Z).N(q) = \nabla f(\alpha(0)).\dot{\alpha}(0) = (f \circ \alpha)'(0) = 1 \neq 0$$

elde edilir. Böylece $\varphi(U_1) = f^{-1}(0)$, R^{n+1} de bir hiperyüzeydir. $\square$

Teorem 2.13.2, R^{n+1} de bir S hiperyüzeyinin her p noktası civarında $S \cap V$, bir birebir parametrik hiperyüzeyinin görüntüsü olacak şekilde bir V açık kimesi olduğunu gösterir. Teorem 2.13.3, R^{n+1} üzerindeki bir φ parametrik hiperyüzeyinin tanım kümesindeki her p noktası civarında $\psi|_V$ nin görüntü kümesi bir hiperyüzey olacak şekilde bir açık V kümesi olduğunu gösterir. R^{n+1} in bir S alt kümesi hem bir $S = f^{-1}(c)$ hiperyüzeyi olması hem de $\forall p \in U$ için $N^{\varphi}(p) = N^S(\varphi(p))$ normaline sahip olan bir $\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyinin görüntüsü olması halinde φ ve S her noktada aynı geometriye sahip olur. Bu durumda

(i) $p \in U$ daki φ nin L_p^{φ} Weingarten dönüşümü, S nin $\varphi(p)$ deki $L_{\varphi(p)}^S$ Weingarten dönüşümü ile aynıdır. Çünkü, $V \in R_p^n$ için

$$\begin{aligned} L_p^{\varphi}(d\varphi(V)) &= -\nabla_V N^{\varphi} = -\nabla_V \left(N^S \circ \varphi\right) = -\left(N^S \circ \dot{\varphi} \circ \alpha\right)(t_0) \\ &= -\nabla_{\varphi \dot{\circ} \alpha(t_0)} N^S = -\nabla_{d\varphi(V)} N^S = L_{\varphi(p)}^S(d\varphi(V)) \end{aligned}$$

dir. Burada $\alpha : I \to U$, $\dot{\alpha}(t_0) = V$ olacak şekilde bir eğridir.

(ii) $p \in U$ daki φ nin asli eğrilikleri, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, Weingarten dönüşümünden hesaplandığından S nin $\varphi(p)$ noktasındaki karşılık gelen eğriliklerine eşittir.

Teorem 2.13.3 e göre, eğer φ, R^{n+1} de bir parametrik hiperyüzey ise o zaman yerel olarak φ nin görüntüsü bir hiperyüzeydir. Bu ise gradienti sıfıra eşit olmayan bir reel değerli f fonksiyonunun bir seviye kümesi olması demektir. Doğal olarak φ, R^{n+k} da bir parametrik n-yüzey olduğunda φ nin görüntüsü civarında benzer bir açıklama yapılabilip yapılamaması sorusu ortaya çıkar. Cevap ise olumludur. Açıklama, R^{n+k} da aşağıdaki gibi tanımlanan n-yüzeyle birlikte aynıdır.

R^{n+k} da n-boyutlu bir yüzey, R^{n+k} nın, $c \in R^k$ olmak üzere $S = f^{-1}(c)$ formundaki boş olmayan bir alt kümesidir. Burada U, R^{n+k} da açık olmak üzere $f : U \to R^k$, her $p \in S$ için df_p nin rankı k olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. df_p nin R_p^{n+k} ve $R^k_{\varphi(p)}$ nın bazlarına karşılık gelen matrisi, sütunları $\nabla f_i(p)$ gradient vektörlerinin vektör kısmı olan Jakobian matrisidir. Burada $q \in U$ ve $f(q) = (f_1(q), ..., f_k(q))$ dur. Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

R^{n+k} da bir n-yüzey, R^{n+k} nın

$$S = f_1^{-1}(c_1) \cap ... \cap f_k^{-1}(c_k) = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(c_i)$$

formundaki boş olmayan bir alt kümesidir. Burada U, R^{n+k} da açık olmak üzere $f_i : U \to R$ fonksiyonları $\forall p \in S$ için $\{\nabla f_1(p), ..., \nabla f_k(p)\}$ lineer bağımsız olacak şekilde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece R^{n+k} da bir n-yüzey, kesişimin her noktasında normal doğrultuları lineer bağımsız olan k tane $(n+k-1)$-yüzeyin kesişimidir[1].

R^{n+k} da bir $S = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(c_i)$ n-yüzeyinin $p \in S$ deki S_p tanjant uzayı, $\dot{\alpha}(t_0)$ formundaki R_p^{n+k} daki bütün vektörlerin kümesidir. Burada α, $\alpha(t_0) = p$ olacak şekilde S de herhangi bir parametrik eğridir. Böylece

$$\begin{aligned} S_p &= \left[f_1^{-1}(c_1)\right]_p \cap \ldots \cap \left[f_k^{-1}(c_k)\right]_p \\ &= \left\{V \in R_p^{n+k} : \nabla f_i(p).V = 0, \forall i \in \{1,...,n\} \text{ için}\right\} \end{aligned}$$

uzayı, R_p^{n+k} nın $\{\nabla f_1(p),...,\nabla f_k(p)\}$ vektörleri ile gerilen k-boyutlu $S_p^{\perp}$ alt uzayı, p de S nin normal uzayıdır.

Örnek 2.13.3. R^3 de bir 1-yüzey, genelde bir uzay eğrisi olarak adlandırılır[4].

Örnek 2.13.4. $i \in \{1,2\}$ olmak üzere $f_i : R^4 \to R$,

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2 + x_2^2 \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_3^2 + x_4^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

O zaman $S = f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(2)$, R^4 de bir 2-yüzey olan tor yüzeyidir. S, (x_1,x_2)-düzlemindeki birim çemberin ve (x_3,x_4)-düzlemindeki birim çemberin kartezyen çarpımıdır. S, parametrik bir tor olan φ nin görüntüsünden ibarettir.

3. YÜZEY HACİMLERİ

Bu bölümde öncelikle R^{n+1} uzayındaki hiperyüzeylerin hacim formülleri koordinat vektör alanları cinsinden elde edilmiştir. Daha sonra R^{n+k} daki bir n-yüzeyin hacmi için k-formlar yardımıyla hesaplamalar yapılmıştır. Ayrıca Gauss Dönüşümü ile hacimler arasında bir ilişki verilmiş ve özellikle Gauss eğriliğinin bir geometrik yorumu verilmiştir.

3.1 YÜZEY HACİMLERİ

R^{n+1} de bir hiperyüzeyin hacmini $(n = 2 \text{ için alanını})$ nasıl bulacağımızı araştıracağız. Yüzey eğrilerinin uzunlukları gibi bunu da iki adımda yapacağız. Önce parametrik bir hiperyüzeyin hacmi tanımlanır, daha sonra hiperyüzeyin hacmi yerel parametrelerle tanımlanır.

$\alpha : I \to R^2$ bir parametrik eğrisinin uzunluğu; a ve b I aralığının sınır noktaları olmak üzere

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \; dt$$

formülü ile verilir. Parametrik yüzeylere göre eğer α düzgün ise $\dot{\alpha}$ hız vektörü α parametrik eğrisi boyunca E_1 koordinat vektör alanını verir.

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|E_1(t)\| = \|E_1(t)\| . \det \begin{pmatrix} E_1(t) \diagup \|E_1(t)\| \\ N(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_1(t) \\ N(t) \end{pmatrix}$$

dir. Burada N, α boyunca bir yönlendirme vektör alanıdır. Yani R^{n+1} de bir hiperyüzey üzerinde diferensiyellenebilir birim normal vektör alanıdır. İkinci eşitlik $E_1(t) \diagup \|E_1(t)\|$ ve $N(t)$ vektörlerinin $R^2_{\alpha(t)}$ de bir ortonormal baz oluşturmalarının sonucudur. Böylece

$$\det \begin{pmatrix} E_1(t) \diagup \|E_1(t)\| \\ N(t) \end{pmatrix}$$

bir ortogonal matrisin determinantıdır ve bundan dolayı ∓ 1 e eşittir. İşareti pozitiftir çünkü $E_1(t) \diagup \|E_1(t)\|$ bazı N nin yönlendirmesinden bağımsızdır.

Şimdi α nın uzunluk formülü;

$$\ell(\alpha) = \int_I \det \begin{pmatrix} E_1 \\ N \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir[1]. Bu integral parametrik hiperyüzeyler için şüphesiz özel bir haldir. $\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyin hacmi

$$V(\varphi) = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{pmatrix} = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1(u_1,...,u_n) \\ . \\ . \\ E_n(u_1,...,u_n) \\ N(u_1,...,u_n) \end{pmatrix} du_1...du_n$$

şeklindedir. Burada $E_1,...,E_n$ ler φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır ve N de φ boyunca yönlendirme vektör alanıdır.

$n = 1$ iken φ nin hacmi genelde φ nin uzunluğuna karşılık gelir ve $\ell(\varphi)$ ile gösterilir.

$n = 2$ iken φ nin hacmi genelde φ nin alanı olarak bilinir ve $A(\varphi)$ ile gösterilir.

$$\det \begin{pmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

hacim integrandı her yerde pozitif olduğundan $V(\varphi) > 0$ olup $+\infty$ da olabilir. Bu belirli integralin neden hacmi ölçtüğüne dair sezgisel bir açıklama da integralin φ boyunca hacmin büyüklüğünü ölçmesidir. Ancak, N yönlü vektör alanının hesabına ihtiyaç duyulmayan bir hacim formülü kullanmak daha uygundur. Bu amaçla şu teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $\varphi : U \to R^{n+1}$ *bir parametrik hiperyüzey olsun. Bu durumda,*

$$V(\varphi) = \int_U \left(\det\left(E_i.E_j\right)\right)^{1/2}$$

dir[1].

İspat.

$$\left[\det\begin{pmatrix}E_1\\ .\\ .\\ E_n\\ N\end{pmatrix}\right]^2=\det\begin{pmatrix}E_1\\ .\\ .\\ E_n\\ N\end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix}E_1\\ .\\ .\\ E_n\\ N\end{pmatrix}^t=\det\left[\begin{pmatrix}E_1\\ .\\ .\\ E_n\\ N\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}E_1^t & . & . & E_n^t & N^t\end{pmatrix}\right]$$

$$=\det\begin{pmatrix}E_1.E_1 & . & . & E_1.E_n & E_1.N\\ . & & & . & .\\ . & & & . & .\\ E_n.E_1 & . & . & E_n.E_n & E_n.N\\ N.E_1 & . & . & N.E_n & N.N\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}E_1.E_1 & . & . & E_1.N & 0\\ . & & & . & .\\ . & & & . & .\\ E_n.E_1 & . & . & E_n.E_n & 0\\ 0 & . & . & 0 & 1\end{pmatrix}$$

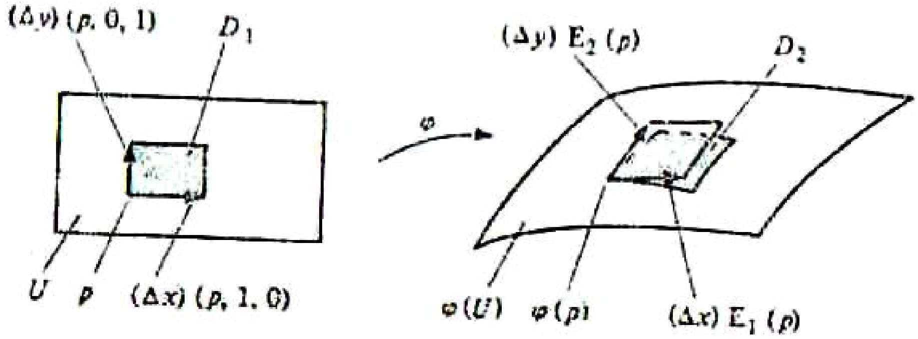
$$=\det\left(E_i.E_j\right)$$

olur. Her iki tarafın karekökünü alıp U üzerinde integral alınırsa integral formülü çıkar.

□

$g_{ij}=E_i.E_j:U\to R$ fonksiyonları φ boyunca metrik katsayıları olarak adlandırılır. $\det\left(g_{ij}\right)$ determinantı diferensiyel geometride g harfi ile ifade edilir ve hacim integrali şu hali alır:

$$V(\varphi)=\int_U\sqrt{g}$$



Şekil 2.1.1

Üstteki şekil R^3de φ parametrik 2-yüzeyi boyunca alan büyüklüğünü göstermektedir[4]. U daki taralı $(\triangle x)(\triangle y)$ alanlı D_1 dörtgeni φ ile $\varphi(U)$ şeklinde D_2 bölgesine resmedilir. D_2 alanı $R^3_{\varphi(p)}$ deki

$$d\varphi\left((\triangle x)(p,1,0)\right) = (\triangle x)E_1(p)$$

ve

$$d\varphi\left((\triangle x)(p,0,1)\right) = (\triangle y)E_2(p)$$

tarafından gerilen paralelkenarın alanına çok yakındır. Bahsedilen paralelkenarın alanı,

$$\begin{aligned} \|(\triangle x)E_1(p)\times(\triangle y)E_2(p)\| &= (\triangle x)(\triangle y)E_1(p)\times E_2(p)N(p) \\ &= (\triangle x)(\triangle y)\det\begin{pmatrix} E_1(p) \\ E_2(p) \\ N(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. İki bölgenin alanları oranı

$$A(D_2)/A(D_1) = \det\begin{pmatrix} E_1(p) \\ E_2(p) \\ N(p) \end{pmatrix} + \varepsilon(p,\triangle x,\triangle y)$$

dir. Burada

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to 0} \varepsilon\left(p,\triangle x,\triangle y\right)=0$$

dır. Bu oranın limiti;

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to 0} A\left(D_2\right)/A\left(D_1\right)=\det\begin{pmatrix} E_1\left(p\right) \\ E_2\left(p\right) \\ N\left(p\right) \end{pmatrix}$$

dır. Bu ise p de φ altındaki alan büyüklüğünü ölçer ve onun U üzerindeki integrali φ nin alanını verir.

Örnek 3.1.1. $U=\left\{(\theta,\phi)\in R^2:\ -\pi\ <\ \theta\ <\ \pi,0\ <\phi\ <\pi\right\}$ olmak üzere $\varphi : U\to R^3$,

$$\varphi\left(\theta,\phi\right)\ =\left(r.\cos\theta.\sin\phi,r.\sin\theta.\sin\phi,r.\cos\theta\right)$$

ile tanımlı olsun. Bu yüzeyin alanını hesaplayalım. Böylece φ, R^3 de bir büyük çemberin yarısı çıkarılmış r yarıçaplı kürenin küresel koordinatlardaki parametrizasyonudur. Bu alan yukarıdaki iki formülden herhangi biriyle bulunabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} A\left(\varphi\right) &= \int_U \det\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ N \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \det\begin{pmatrix} -r.\sin\theta.\cos\phi & r.\cos\theta.\sin\phi & 0 \\ r.\cos\theta.\cos\phi & r.\sin\theta.\cos\phi & -r.\sin.\phi \\ -\cos\theta.\sin\phi & -\sin\theta.\sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\sin\phi\ d\theta d\phi = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} A\left(\varphi\right) &= \int_U \left(\det\left(E_i.E_j\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\det\begin{pmatrix} r^2\sin\phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\sin\phi\ d\theta d\phi = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

dir[1].

Teorem 3.1.1 deki formül bütün $k \geq 0$ sayıları için R^{n+k} daki parametrik yüzeylerin hacmini tanımlamamızı sağlar. Genel olarak n-boyuttaki hacmi, U, R^n de açık olmak üzere $\varphi : U \to R^{n+k}$ diferensiyellenebilir dönüşümüne çevirmemize olanak sağlar. $\varphi : U \to R^{n+k}$ diferensiyellenebilir dönüşümü R^{n+k} da bir *tekil n-yüzey* olarak adlandırılır. Tekil denilmesinin sebebi φ nin düzgün olması gerekmediğini vurgulamak içindir. Örneğin, $d\varphi_p$, bazı $(veya\ herhangi, hepsi)$ $p \in U$ lar için tekil olabilir. Her parametrik n-yüzey bir tekil n-yüzeydir fakat bu tekil n-yüzeyler genelde parametrik n-yüzey değillerdir. $\varphi : U \to R^{n+k}$ tekil n-yüzeyinin $V(\varphi)$ hacmi

$$V(\varphi) = \int_U \left(\det\left(E_i.E_j\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır. Genelde olduğu gibi E_i ler φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır.

Örnek 3.1.2. $U = \{(r,\theta,\phi) : 0 < r < a\ ,\ 0 < \theta < 2\pi\ ,0 < \phi < \pi\}$ olmak üzere R^3 deki bir parametrik 3-yüzey

$$\varphi : U \to R^3$$

$$\varphi(r,\theta,\phi) = (r.\cos\theta.\sin\phi, r.\sin\theta.\sin\phi, r.\cos\theta)$$

ile verilsin. φ dönüşümü U yu R^3 de bir yarım disk çıkartılmış O merkezli a yarıçaplı bir açık küreye birebir dönüştürür. $p = (r,\theta,\phi) \in V$ için

$$E_1(p) = \left(p, \frac{\partial\varphi}{\partial r}(p)\right) = (p, \cos\theta.\sin\phi, \sin\theta.\sin\phi, \cos\phi)$$

$$E_2(p) = \left(p, \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(p)\right) = (p, -r.\sin\theta.\sin\phi, r.\cos\theta.\sin\phi, 0)$$

$$E_3(p) = \left(p, \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(p)\right) = (p, r.\cos\theta.\cos\phi, r.\sin\theta.\cos\phi, -r.\sin\theta)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \int_U \left(\det\left(E_i.E_j\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} drd\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin\phi.drd\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.2. *$\varphi : U \to R^{n+1}$ bir parametrik hiperyüzey ve $N : U \to S^n$ her $p \in U$ için onun Gauss Dönüşümü olsun. Yani $N(p) = (\varphi(p), N(p))$ dir. Burada N, φ boyunca yönlendirme vektör alanıdır. Böylece*

$$V(N) = \int_U |K| \det\left(E_i^{\varphi}.E_j^{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur öyle ki $K : U \to R$, φ nin Gauss eğriliğidir ve E_i^{φ} ler φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır[1].

İspat. N tekil hiperyüzeyinin E_i^N koordinat vektör alanı $p \in U$ noktasında $\partial N / \partial x_i(p)$ ye eşit olan bir vektör kısmına sahiptir ve bu

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} N &= -L_p\left(d\varphi_p(e_i)\right) = -L_p\left(E_i^{\varphi}(p)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(p).E_k^{\varphi}(p) \end{aligned}$$

nin vektör kısmıyla aynıdır. Burada $e_i = (p, 0, ..., 1, ..., 0)$ olup 1, vektör kısmının i. bileşenindedir. Ayrıca L_p, φ nin p noktasındaki Weingarten dönüşümüdür ve $\left(a_{ij}(p)\right)$, $d\varphi_p$ nin görüntü uzayının $\left\{E_i^{\varphi}(p)\right\}$ bazına göre L_p nin matrisidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \det\left(E_i^N.E_j^N\right) &= \det\left(\sum_k a_{ki}E_k^{\varphi}.\sum_l a_l j E_l^{\varphi}\right) \\ &= \det\left(\sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}E_k^{\varphi}E_l^{\varphi}\right) \\ &= \left(\det\left(a_{ij}\right)\right)^2.\det\left(E_i^{\varphi}.E_j^{\varphi}\right) \\ &= K^2.\det\left(E_i^{\varphi}.E_j^{\varphi}\right) \end{aligned}$$

dir. Her iki tarafın karekökü alınıp integral alınırsa,

$$V(N) = \int_U \det\left(E_i^N.E_j^N\right)^{\frac{1}{2}} = \int_U |K| \det\left(E_i^{\varphi}.E_j^{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. □

Sonuç 3.1.1. $\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyinin $p \in U$ daki Gauss eğriliğinin mutlak değeri için

$$|K(p)| = \lim_{\varepsilon \to 0} V\left(N_{|B_\varepsilon}\right) \big/ V\left(\varphi_{|B_\varepsilon}\right)$$

eşitliği vardır. Burada

$$B_\varepsilon = \{q \in U : \|q - p\| \ \langle\ \varepsilon\}$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.2 den ve integraller için Ortalama Değer Teoreminden, bazı $p_1, p_2 \in B_\varepsilon$ için

$$\frac{V\left(N_{|B_\varepsilon}\right)}{V\left(\varphi_{|B_\varepsilon}\right)} = \frac{|K(p_1)| \det\left[E_i^\varphi(p_1) . E_j^\varphi(p_1)\right]^{\frac{1}{2}} \int_{B_\varepsilon} 1}{\det\left[E_i^\varphi(p_2) . E_j^\varphi(p_2)\right]^{\frac{1}{2}} \int_{B_\varepsilon} 1}$$

dir. $\varepsilon \to 0$ için limit alırsak ispat tamamlanmış olur. □

Bu sonuç bize yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyinin K-Gauss eğriliğini Gauss Dönüşümü altında hacim büyüklüğü cinsinden veren bir geometrik yorum verir. K nın işareti aşağıdaki şekildedir:

S, R^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $p \in S$ olsun. N, S üzerinde normal vektör alanı ve $\{V_{1,\ldots,}V_n\}$ de S_p nin bir bazı olsun. Bu durumda

$$K(p) = (-1)^n . \det\begin{pmatrix} \nabla_{V_1} Z \\ . \\ . \\ \nabla_{V_n} Z \\ N(p) \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} dN(V_1) \\ . \\ . \\ dN(V_n) \\ N^{S^n}(N(p)) \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

dir. Burada $V_1, ..., V_n$ S_p için bir baz ve N^{S^n}, S^n üzerinde $N^{S^n}(q) = (q, (-1)^n q)$ şeklinde olan standart yönlendirmedir. Böylece $K(p) > 0$ olması için gerek ve yeter şart dN nin, S_p nin S üzerindeki yönlendirmeyle uyumlu her bazını $S^n_{N(p)}$ nin S^n üzerindeki standart yönlendirmeyle uyumlu bir bazına dönüştürmesidir. S ve $\tilde{S}$, R^{n+1} de yönlendirilmiş iki yüzey olmak üzere $f : S \to \tilde{S}$ diferensiyellenebilir dönüşümü, $df_p : S_p \to \tilde{S}_{f(p)}$ düzgün olacak şekilde verilsin. f, p de yönlendirmeyi koruyor denir eğer df, S_p nin S üzerindeki yönlendirme ile uyumlu bazlarını $\tilde{S}_{f(p)}$ nin $\tilde{S}$ üzerindeki yönlendirmeyle uyumlu bazlarına dönüştürüyorsa. Aksi taktirde f, p de yönlendirmeyi ters çeviriyor denir. Böylece $K(p)$ Gauss eğriliğinin pozitif olması için gerek ve yeter şart $N : S \to S^n$ Gauss dönüşümünün p de yönlendirmeyi korumasıdır. $K(p)$ nin negatif olması için gerek ve yeter şart ise N nin p de yönlendirmeyi ters çevirmesidir.

Parametrik bir eğrinin uzunluğunun parametre değişimi altında değişmediği gibi, tekil n-yüzeyin hacmi de parametre değişiminde değişmez. Tekil bir n-yüzeyin,
$\varphi : U_1 \to R^{n+k}$ nin bir parametre değişimi $\psi = \varphi \circ h$ formundaki $\psi : U_2 \to R^{n+k}$ tekil n-yüzeyidir, öyle ki $h : U_2 \to U_1$ in tersi diferensiyellenebilir ve Jakobian determinantı her yerde pozitif olan bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Böyle tekil n-yüzey çifti her zaman aynı görüntüye sahiptir. Ayrıca φ bir parametrik n-yüzey ve ψ de φ nin yeni bir parametrizasyonudur. Bu durumda ψ bir parametrik n-yüzeydir ve $k = 1$ için φ boyunca yönlendirme vektör alanı N^{φ} ve ψ boyunca yönlendirme vektör alanı N^{ψ} ise bunlar her $p \in U_2$ için $N^{\psi}(p) = N^{\varphi}(h(p))$ şeklinde bağıntılıdırlar.

Teorem 3.1.3. *$\varphi : U_1 \to R^{n+k}$ bir tekil n-yüzey ve $\psi = \varphi \circ h : U_2 \to R^{n+k}$, φ nin bir parametre değişimi olsun. Bu durumda $V(\psi) = V(\varphi)$ dir[1].*

İspat. E_i^{φ} ve E_i^{ψ} sırasıyla φ ve ψ boyunca koordinat vektör alanları olsunlar. Ayrıca X_i, $X_i(p) = (p, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ şeklinde tanımlı R^n üzerinde bir vektör alanı belirtsin , öyle ki, $p \in U_2$ için 1, vektör kısmının i. bileşeninde olsun.

$$\begin{aligned} E_i^{\psi}(p) &= d\psi(X_i(p)) = d(\varphi \circ h)(X_i(p)) = d\varphi(dh(X_i(p))) \\ &= d\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p) X_k(h(p))\right) = \sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p)\, d\varphi(X_k(h(p))) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p) E_k^{\varphi}(h(p)) \end{aligned}$$

dir. Burada $h_{ij} = \partial h_i \big/ \partial x_j$ ler h nin Jakobian matrisinin bileşenleridir. Buradan

$$E_i^{\psi}.E_j^{\psi} = \sum_{k,l=1}^{n} h_{ki} h_{lj} E_k^{\varphi} \circ h . E_l^{\varphi} \circ h$$

ve

$$\begin{aligned} \det\left(E_i^{\psi}.E_j^{\psi}\right) &= \left(\det\left(h_{ij}\right)\right)^2 . \det\left(E_i^{\varphi} \circ h . E_j^{\varphi} \circ h\right) \\ &= J_h^2 . \det\left(E_i^{\varphi} \circ h . E_j^{\varphi} \circ h\right) \end{aligned}$$

dir. Burada J_h , h nin Jakobian matrisidir. Değişken Değiştirme Teoreminden

$$\begin{aligned} V(\psi) &= \int_{U_2} \left(\det\left(E_i^{\psi}.E_j^{\psi}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{h^{-1}(U_1)} \left(\det\left(E_i^{\varphi} \circ h . E_j^{\varphi} \circ h\right)\right)^{\frac{1}{2}} . J_h \\ &= \int_{U_1} \det\left(E_i^{\varphi}.E_j^{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= V(\varphi) \end{aligned}$$

dir. □

R^{n+1} deki yönlendirilmiş S hiperyüzeyler için S nin hacmini, birebir tekil hiperyüzeylerin görüntülerinin alt kümelerinin hacimlerini toplayarak bulacağız. Bununla beraber, genelde S yi bu tür ayrık kümelerin birleşimi olarak tanımlayamayız. S yi sadece sınırları boyunca çakışan kapalı dikdörtgenlerinin görüntülerinin birleşimi olarak tanımlayabiliriz. Sınır noktalarının kümesi hacim integraline birşey katmaz ve böylece çakışma sorun olmayacaktır. S nin hacmi bu tekil dikdörtgenlerin hacimlerinin toplamı olarak tanımlanabilir. Bu yol sezgisel olarak oldukça cazip olmasına rağmen, detaylı olarak uygulanması zordur. Bu nedenle alternatif bir yaklaşım benimseyeceğiz.

Bir birebir $\varphi : U \to S$ lokal parametrizasyonunun

$$\det \begin{pmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

hacim integrandını göz önüne alalım. Eğer burada φ yerine $\psi : \varphi \circ h : U_2 \to S$ parametre değişimi alınırsa hacim integrandında φ için yazılan koordinat vektör alanları yerine ψ için yazılan koordinat vektör alanları gelecektir. Fakat bu değişiklik yüzeyin hacim integralini değiştirmez. Bu ise $p \in S$ deki hacim integrandının esas önemli kısmının S_p deki n vektörün sıralı her $\{V_1, ..., V_n\}$ kümesine

$$\zeta(V_1, ..., V_n) = \det \begin{pmatrix} V_1 \\ . \\ . \\ V_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

reel sayısını karşılık getiren ζ fonksiyonu olduğunu ortaya koyar. Burada ζ fonksiyonu S üzerindeki $hacim\ formu$ olarak adlandırılır[1]. Hacim formunun R^{n+1} deki kompakt yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi üzerinde integrallenebilir olduğunu göreceğiz; ki bu integral S nin hacmi olacaktır. Buradaki ζ bir diferensiyel n-form örneğidir. Genellikle basitçe bir k-form olarak adlandırılan bir diferensiyellenebilir k-form, S n-yüzeyi üzerinde, $\{V_1, ..., V_k\}$ sıralı vektörlerine $w(V_1, ..., V_k)$ reel sayısını karşılık getiren bir w formdur[1]. Bu durumda,

(i) her $i \in \{1,...,k\}$ için ve $V_1,...,V_{i-1},V_{i+1},...,v_k \in S_p$, $p \in S$ için $V \in S_p$ yi $w(V_1,...,V_{i-1},V,V_{i+1},...,V_k) \in R$ ye götüren fonksiyon lineerdir

(ii) her $V_1,...,V_k \in S_p$ ve $\{1,...,k\}$ tamsayılarının her σ permütasyonu için

$$w\left(V_{\sigma(1)},...,V_{\sigma(k)}\right) = (sign\sigma)\,w(V_1,...,V_k)$$

dir.

(i) ve (ii) özellikleri $k = n$ olduğunda determinantın benzer özelliklerini tanımlar ve w, ζ hacim formu olarak alınmıştır.

(i).özellik $n-$ $lineerlik$ özelliği ve (ii).özellik ise $anti-$ $simetriklik$ özelliği olarak adlandırılır.

Bir w k-formu ve S üzerinde $X_1,...,X_k$ tanjant vektör alanları verilsin. S üzerindeki reel değerli bir $w(X_1,...,X_k)$ fonksiyonu $p \in S$ için

$$[w(X_1,...,X_k)](p) = w(X_1(p),...,X_k(p))$$

şeklinde tanımlanır[3]. $X_1,...,X_k$ vektör alanları diferensiyellenebilir olduğunda $w(X_1,...,X_k) : S \to R$ diferensiyellenebilir ise o zaman w k-formu da diferensiyellenebilirdir denir.

Örnek 3.1.3. S üzerinde bir $1-form$ sadece bir $w : T(S) = \bigcup\limits_{p \in S} S_p \to R$ fonksiyonudur, öyle ki w nin S_p ye kısıtlanışı lineerdir. Bu durumda eğer X, S üzerinde bir tanjant vektör alanı ise $w_X(V) = X(p).V \quad (V \in S_p, p \in S)$ olacak şekilde tanımlanan $w_X = T(S) \to R$ fonksiyonu S üzerinde bir 1-formdur. Bu şekilde tanımlı w_X, X in duali olan 1-form olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.4. w_1 ve w_2, S üzerinde birer 1-form olsunlar.

$$(w_1 \Lambda w_2)(V_1,V_2) = w_1(V_1).w_2(V_2) - w_1(V_2).w_2(V_1)$$

şeklinde tanımlanan $w_1 \Lambda w_2$ fonksiyonu S üzerinde bir 2-formdur. Bu 2-form w_1 ile w_2 nin dış çarpımıdır[4].

Örnek 3.1.5. R^{n+1} deki yönlendirilmiş bir S hiperyüzeyi üzerindeki ζ hacim formu, S üzerinde bir diferensiyellenebilir n-formdur.

Örnek 3.1.6. w, S üzerinde bir k-form $(k > 1)$ olsun ve X de S üzerinde bir tanjant vektör alanı olsun. Bu durumda

$$(X \lrcorner w)(V_1, ..., V_{k-1}) = w(X(p), V_1, ..., V_{k-1})$$

şeklinde tanımlanan $X \lrcorner w$ fonksiyonu S üzerinde bir $(k-1)$ formdur. Buradaki $X \lrcorner w$, X ile w nin interior çarpımıdır.

Örnek 3.1.7. $\tilde{S}$ ve S sırasıyla m ve n boyutlu iki yüzey olmak üzere , w, $\tilde{S}$ üzerinde bir k-form ve $f : S \to \tilde{S}$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$(f^{\star} w)(V_1, ..., V_{k-1}) = w(df(V_1), ..., df(V_k))$$

şeklinde tanımlanan $f^{\star} w$ fonksiyonu S üzerinde bir k-formdur. Bu şekilde tanımlı $f^{\star} w$, w nin f altındaki "Pull Back" i olarak adlandırılır.

S hiperyüzeyi üzerindeki w_1 ve w_2 k-formlarının $w_1 + w_2$ toplamı

$$(w_1 + w_2)(V_1, ..., V_{k-1}) = w_1(V_1, ..., V_k) + w_2(V_1, ..., V_k)$$

şeklinde tanımlanır. Bir $f : S \to R$ fonksiyonu ile S üzerindeki bir w k-formun çarpımı S üzerinde

$$(fw)((V_1, ..., V_k)) = f(p)\, w(V_1, ..., V_k) \quad , \quad p \in S \text{ ve } V_1, ..., V_k \in S_p$$

şeklinde tanımlanan bir k-formdur. Burada iki diferensiyellenebilir k-formun toplamı da diferensiyellenebilirdir ve bir diferensiyellenebilir fonksiyon ile bir diferensiyellenebilir k-formun çarpımı da diferensiyellenebilirdir.

S üzerindeki bir diferensiyellenebilir w k-formu ve S içindeki tekil bir φ k-yüzeyi için w nin φ üzerindeki integrali

$$\int_{\varphi} w = \int_U w\left(E_1^{\varphi}, ..., E_k^{\varphi}\right)$$

şeklindedir ve bu integral mevcuttur. E_i^{φ} vektör alanları φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır. Bu integral, özellikle $w\left(E_1^{\varphi},...,E_k^{\varphi}\right)$ fonksiyonu, U nun bazı kompakt alt cümlelerinin dışında her yerde sıfır olduğunda mevcuttur.

Örnek 3.1.8. S nin bir φ yerel parametrizasyonu ve S üzerindeki ζ hacim formu için

$$\int_{\varphi}\zeta = V(\varphi)$$

dir. Eğer ψ, S deki bir tekil k-yüzeyin parametre değişimi ve w, S üzerinde $\int_{\varphi} w$ integrali mevcut olacak şekilde diferensiyellenebilir bir k-form ise bu durumda $\int_{\varphi} w$ varken $\int_{\psi} w$ integrali de vardır ve

$$\int_{\psi} w = \int_{\varphi} w$$

dir. Gerçekten, eğer $\varphi : U_1 \to S$ ve $\psi = \varphi \circ h : U_2 \to S$ ise son teoremin ispatındaki gibi $E_i^{\psi} = \sum\limits_{j=1}^{k} h_{ji} E_j^{\varphi} \circ h$ olup, böylece

$$\begin{aligned}\int_{\psi} w &= \int_{U_2} w\left(E_1^{\psi},...,E_k^{\psi}\right)\\ &= \int_{U_2} w\left(\sum_{j_1=1}^{k} h_{j_1 1} E_{j_1}^{\varphi}\circ h,...,\sum_{j_k=1}^{k} h_{j_k k} E_{j_k}^{\varphi}\circ h\right)\\ &= \int_{U_2}\sum_{j_1\cdots j_k} h_{j_1 1}...h_{j_k k} w\left(E_{j_1}^{\varphi}\circ h,...,E_{j_k}^{\varphi}\circ h\right)\end{aligned}$$

dir. Burada son eşitlik w nin n-lineerliğinin bir sonucudur. w nin anti-simetrikliğinden dolayı E_{ji}^{φ} ve E_{js}^{φ} lerin herhangi ikisinin eşit olması halinde de $w\left(E_{j_1}^{\varphi}\circ h,...,E_{j_k}^{\varphi}\circ h\right)$ sıfır olur. $\{1,...,k\}$nın bazı σ permütasyonları için $j_1 = \sigma(1),...,j_k = \sigma(k)$ olduğunda $w\left(E_{j_1}^{\varphi},...,E_{j_k}^{\varphi}\right) = (sign\sigma)\, w\left(E_1^{\varphi},...,E_k^{\varphi}\right)$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\int_{\psi} w &= \int_{U_2}\sum_{\sigma}(sign\sigma)\ h_{\sigma(1)1},...,h_{\sigma(k)k} w\left(E_1^{\varphi}\circ h,...,E_k^{\varphi}\circ h\right)\\ &= \int_{h^{-1}(U_1)}\left(w\left(E_1^{\varphi},...,E_k^{\varphi}\right)\circ h\right) J_h\\ &= \int_{U_1} w\left(E_1^{\varphi},...,E_k^{\varphi}\right)\\ &= \int_{\varphi} w\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da iddia edilendir[1].

Şimdi bir S kompakt yönlendirilmiş hiperyüzeyi üzerinde w n-formunun integralini tanımlayacağız. Bu ise n-formu, bazı birebir lokal φ_i parametrizasyonlarının görüntüsü dışında sıfıra eşit olan w_i n-formlarının toplamı olarak ifade ederek ve $\int_S w = \sum_i \int_{\varphi_i} w_i$ yi tanımlayarak yapılır. w_i n-formları, $\sum_i f_i = 1$ özelliğini sağlayan f_i fonksiyonları ile w nin çarpımları olarak bulunacaktır.

Tanım 3.1.1. S n-yüzeyi üzerinde Birimin Parçalanması $f_i : S \to R$ $(i \in \{1,...,m\})$ diferensiyellenebilir fonksiyonların bir sınırlı koleksiyonudur öyle ki

(i) her $i \in \{1,...,m\}$ ve her $q \in S$ için $f_i(q) \geq 0$

(ii) her $i \in \{1,...,m\}$ için $\varphi_i : U_i \to S$ bir birebir lokal parametrizasyonu vardır öyle ki f_i, U_i nin bir kompakt altkümesi φ_i nin görüntüsü altında sıfıra eşittir.

(iii) $\sum_{i=1}^{m} f_i(q) = 1$, her $q \in S$ için

Eğer $\{\varphi_i\}$, (ii). yi sağlayan birebir lokal parametrizasyonların bir koleksiyonu ise $\{f_i\}$ birimin parçalanması $\{\varphi_i\}$ ye bağlıdır denir.

Teorem 3.1.4. *S, R^{n+1} de bir kompakt hiperyüzey olsun. O halde S üzerinde bir birimin parçalanması vardır[1],[3].*

İspat. Öncelikle her $p \in S$ için $g_p : S \to R$ bir "çarpma fonksiyonu" aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$p \in S$ verilsin, S nin $\varphi_p : U_p \to S$ bir birebir lokal parametrizasyonu, görüntüsü $p \in S$ yi kapsayan bir açık olacak şekilde verilsin.

$$B_p = \left\{x \in R^n : \left\|x - \varphi_p^{-1}\right\| \leq r_p\right\} \subset U_p$$

olacak şekilde $r_p > 0$ sayısını seçelim. $g_p : S \to R$ çarpma fonksiyonunu da

$$V_p = \left\{q \in \varphi_p(U_p) : \left\|\varphi_p^{-1}(q) - \varphi_p^{-1}(p)\right\| < r_p\right\}$$

olmak üzere

$$g_p(q) = \begin{cases} e^{-1/\left(r_p^2 - \left\|\varphi_p^{-1}(q) - \varphi_p^{-1}(p)\right\|\right)} & , \ q \in V_p \text{ için} \\ 0 & , \ q \notin V_p \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. g_p diferensiyellenebilirdir ve $B_p \subset U_p$ kompakt kümesinin φ_p altında görüntüsü dışında sıfıra eşittir. Ayrıca S de p civarındaki V_p açık kümesindeki her q için $g_p(q) > 0$ dır. Bir an için $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{pi} = S$ olacak şekilde sonlu bir $\{p_1, ..., p_m\}$ kümesi bulunduğunu varsayalım. Her bir $i \in \{1, ..., m\}$ için $f_i : S \to R$ fonksiyonu

$$f_i(q) = g_{pi}(q) \diagup \sum_{j=1}^{m} g_{pj}(q)$$

olarak tanımlayabiliriz. $g_{pj} \geq 0$ olduğundan payda hiç bir yerde sıfır olmaz. $q \in V_{pj}$ olacak şekilde j indisleri için $g_{pj}(q) > 0$ olur. $\{f_i\}$, S üzerinde $\{\varphi_{pi}\}$ ye göre birimin bir alt parçalanmasıdır. Sonuç olarak, S de $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{pi} = S$ olacak şekilde $\{p_1, ..., p_m\}$ sonlu bir kümenin bulunabilmesi Heine-Borel Teoremi nin bir sonucudur. Bu durumda$\{V_p : p \in S\}$açık alt kümeleri olup S nin bir örtüsünü oluşturur. Heine– Borel Teoremi'ne göre bir S kümesinin açıklardan oluşan her örtüsünün bir sonlu alt örtüsü bulunur. Yani $\{V_{p_1}, ..., V_{pm}\}$sonlu bir koleksiyonu vardır ki $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{pi} = S$ özelliğini sağlar. R^{n+1} deki kompakt yönlendirilmiş S hiperyüzeyi üzerinde bir diferensiyellenebilir w n-formunun integrali

$$\int_S w = \sum_i \int_{\varphi_i} (f_i w)$$

gerçel sayısıyla tanımlanır. Burada $\{f_i\}$ kümesi S nin birebir lokal parametrizasyonlarının bir $\{\varphi_i\}$ koleksiyonuna göre birimin bir alt parçalanmasıdır. $\int_S w$ birimin parçalanmasının seçimine bağlı değildir. Çünkü eğer$\{\tilde{f}_i\}$ kümesi $\{\tilde{\varphi}_j\}$ yerel parametrizasyonlarına göre bir başka birimin alt parçalanması ise bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_j \int_{\tilde{\varphi}_j} (\tilde{f}_j w) &= \sum_j \int_{\tilde{\varphi}_j} \left(\sum_i f_i\right) \tilde{f}_j(w) = \sum_j \sum_i \int_{\tilde{\varphi}_j} (f_i \tilde{f}_j w) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{i,j} \int_{\tilde{\varphi}_{ji}} (f_i \tilde{f}_j w) \quad \overset{(2)}{=} \sum_{i,j} \int_{\varphi_{ij}} (\tilde{f}_j f_i w) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_i \sum_j \int_{\varphi_i} (\tilde{f}_j f_i w) = \sum_i \int_{\varphi_i} \left(\sum_j \tilde{f}_j\right) f_i w \\
&= \sum_i \int_{\varphi_i} (f_i w)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\tilde{\varphi}_{ji}$, $\tilde{\varphi}_j$ nin $\varphi_j^{-1}(V_{ij})$ açık kümesine kısıtlanmışıdır ve V_{ij}, $\tilde{\varphi}_j$ nin görüntü kümesi ile φ_i nin görüntü kümesinin kesişimidir. Ayrıca φ_{ij} de φ_i nin $\varphi_i^{-1}(V_{ij})$ ye kısıtlanmışıdır. (1)-(3) eşitlikleri $f_i\tilde{f}_j$ nin V_{ij} nin dışında her yerde sıfır olmasından dolayı sağlanır. (2) eşitliği de φ_{ij} nin $\tilde{\varphi}_{ji}$ nin bir parametre değişimi olmasından dolayı sağlanır. $\square$

R^{n+1} de S yönlü ve kompakt hiperyüzeyinin hacmini, onun ζ hacim formunun S üzerinde integrali olarak tanımlayabiliriz. Yani

$$V(S) = \int_S \zeta$$

dir. Ayrıca herhangi bir diferensiyellenebilir $f : S \to R$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini de

$$\int_S f = \int_S f.\zeta$$

şeklinde tanımlayabiliriz[1].

4. MİNİMAL YÜZEYLER

Bu bölümde yüzeylerin hacimleri ile ilgili bir varyasyonel yaklaşımla, R^{n+1} de bir hiperyüzeyin hacim integralinin sabit olması için gerek ve yeter şartın S nin ortalama eğriliğinin sıfır olması(minimal yüzey olması) gerektiğini ifade eden bir teorem verildi.

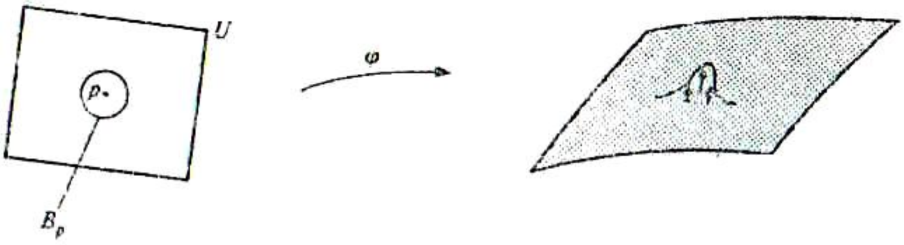
4.1 MİNİMAL YÜZEYLER

$\varphi : U \to R^{n+1}$, R^{n+1} de bir parametrik hiperyüzey olsun. φ nin bir varyasyonu, $\forall p \in U$ için $\psi(p,0) = \varphi(p)$ olacak şekilde $\psi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^{n+1}$ diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Böylece bir varyasyon φ hiperyüzeyini $\varphi_s(p) = \psi(p,s)$ şeklinde tanımlı bir $\varphi_s : U \to R^{n+1}$ tekil hiperyüzey ailesi ile çevreler. Burada $-\varepsilon < s < \varepsilon$ dur.

Bir ψ varyasyonu

$$\psi(p,s) = \varphi(p) + s.f(p).N(p)$$

şeklindedir. Burada f, φ boyunca bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve N, φ nin normal varyasyonu olarak tanımlanan Gauss dönüşümüdür. Eğer f, 1 e eşit olan sabit bir fonksiyon ise ψ varyasyonu her s için φ yi normal doğrultusundan s kadar uzaklaştırır. Eğer f bir çarpan fonksiyonu ise ψ varyasyonu $p \in U$ civarında sadece B_p komşuluğunda kalacak şekilde φ yi normal boyunca dışarı iten bir çarpan üretir (Şekil 3.1.1)[1]. Eğer φ, p de zaten bir çarpana sahipse, o zaman ψ normal varyasyonu çarpanı yok etme eğiliminde olabilir. p, U nun bazı kompakt C alt kümeleri dışında kaldığında, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ için $\psi(p,s) = \psi(p,0)$ şeklindeki bir ψ varyasyonuna “kompaktlıkla desteklenmiştir” denir[1].



Şekil 3.1.1.

Eğer $\psi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^{n+1}$, φ nin kompaktlıkla desteklenmiş bir varyasyonu ise $|s| < \varepsilon_1$ için her φ_s bir parametrik yüzey olacak şekilde bir $\varepsilon_1 > 0$ vardır. Bunu görmenin bir yolu da

$$\delta(p,s) = \det \begin{bmatrix} E_1^s(p) \\ . \\ . \\ E_n^s(p) \\ N(p) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $\delta : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R$ fonksiyonunu incelemektir. Burada E_i^s ler φ_s boyunca koordinat vektör alanlarının vektör kısımlarıdır. N ise φ boyunca sürekli olan Gauss dönüşümüdür. Buradan

$$C_1 = \left\{(p,s) \in R^{n+1} : p \in C, |s| \leq \varepsilon/2, \delta(p,s) = 0\right\}$$

küresi kompakttır. C_1 boş küme ve $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ olsun. Başka bir deyişle, ε_1, C_1 üzerinde g nin minimum değeri olsun. Burada $g : R^{n+1} \to R$, $g(p,s) = |s|$ şeklindedir. O zaman

(i) $\forall p \in U$ için $\delta(p,0) \neq 0$ olduğundan $\varepsilon_1 \neq 0$ dır.

(ii) $p \in C$ ve $|s| < \varepsilon_1$ olursa $\delta(p,s) \neq 0$ dır.

(iii) $p \notin C$ olursa, $|s| < \varepsilon$ olacak şekilde her s için $\delta(p,s) \neq 0$ dır. Bu durum E_i^s lerin φ boyunca koordinat vektör alanlarına eşit olması halinde doğrulanır[1].

Buradan $p \in U$ ve $|s| < \varepsilon_1$ olduğunda $\delta(p,s) \neq 0$ olur. Böylece φ_s nin E_i^s koordinat vektör alanları lineer bağımsızdırlar. O halde φ_s iddia edildiği gibi regülerdir.

Kompaktlıkla desteklenmiş normal varyasyonların hacim üzerinde oynadığı rolü inceleyeceğiz. $\varphi : U \to R^{n+1}$ sonlu hacimli bir parametrik hiperyüzey ve
$\psi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^{n+1}$, φ nin kompaktlıkla desteklenmiş normal varyasyonu olsun. O halde

$$\psi(p,s) = \varphi(p) + sf(p)N(p)$$

olur. O zaman φ nin E_i^s koordinat vektör alanları

$$E_i^s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + s\frac{\partial f}{\partial u_i}N + sf\frac{\partial N}{\partial u_i}$$

şeklinde vektör kısmına sahiptirler. Diğer taraftan $\forall p \in U$ için $\partial N / \partial u_i(p)$,

$$\nabla_{E_i(p)} N = -L_p(E_i(p)) = -\sum_{j=1}^{n} c_{ji}(p) E_j(p)$$

vektöründen ibarettir. Burada L_p, φ nin p deki Weingarten dönüşümüdür. E_i ler de φ boyunca koordinat vektör alanlarıdır. $\left(c_{ji}(p)\right)$ ise L_p nin $d\varphi_p$ görüntü tanjant uzayının $\{E_i(p)\}$ bazına karşılık gelen matrisidir. Buradan

$$E_i^s = E_i + s\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}N - f\sum_{j=1}^{n} c_{ji}E_j\right)$$

dir. φ_s nin hacmi

$$V(\varphi_s) = \int_U \det \begin{bmatrix} E_1^s \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n^s \\ N^s \end{bmatrix}$$

dir. Burada N^s, φ_s boyunca yönlendirme vektör alanıdır. Hacmin $s=0$ daki değişim oranı

$$\frac{d}{ds}|_0 V(\varphi_s) = \int_U \frac{\partial}{\partial s}|_0 \det \begin{bmatrix} E_1^s \\ . \\ . \\ E_n^s \\ N^s \end{bmatrix}$$

dir. Ancak $E_i^0 = E_i$ ve $N^0 = N$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial s}|_0 \det \begin{bmatrix} E_1^s \\ . \\ . \\ E_n^s \\ N^s \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ \frac{\partial E_i^s}{\partial s}|_{s=0} \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ \frac{\partial N^s}{\partial s}|_{s=0} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial u_i} N - f \sum_{j=1}^{n} c_{ji} E_j \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix}$$

$$= -f \sum_{i,j=1}^{n} c_{ji} \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ E_j \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix} \overset{(2)}{=} -f \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix}$$

olur. (1) eşitliğini elde etmek için $N = N^0$ a dik olan $(\partial N^s \diagup \partial s)\,|_{s=0}$, $\{E_1, ..., E_n\}$ in bir lineer kombinasyonu olarak alındı. Böylece bu $(n+1)$ vektörü satır kabul eden matrisin determinantı sıfır olmak zorundadır. (2) eşitliğini elde etmek için, $j \neq i$ olduğunda c_{ji} katsayısı iki eşit satırı olan bir matrisin determinantıdır ve dolayısıyle bu determinantın değeri sıfırdır. O zaman

$$\frac{d}{ds}\,|_0\, V(\varphi_s) = -n \int_U f.H \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $H(p) = \frac{1}{n}\, izL_p$, φ nin $p \in U$ daki ortalama eğriliğidir.

Bu formülün kompaktlıkla desteklenmiş φ nin bütün varyasyonları için uygun olduğu gösterilebilir. Burada $f : U \to R$ fonksiyonu $f = X.N$ şeklinde tanımlıdır. X ise φ boyunca $X(p) = E^{\psi}_{n+1}(p, 0)$ şeklinde tanımlı varyasyonun vektör alanıdır. E^{ψ}_{n+1}, ψ boyunca $(n+1)$. koordinat vektör alanıdır. Bu formül aynı zamanda bütün gerekli integraller tanımlandığında ve $(d \diagup ds)\,|_0$ ile $\int_U$ in değişimi ispatlandığında, kompaktlıkla desteklenmiş normal varyasyonlar için de geçerlidir.

$\varphi : U \to R^{n+1}$ parametrik hiperyüzeyinde φ nin kompaktlıkla desteklenmiş bütün ψ normal varyasyonları için $V(\varphi) < \infty$ ve $(d \diagup ds)\,|_0\, V(\varphi_s) = 0$ ise hacim integraline sabittir denir. Örneğin, kompaktlıkla desteklenmiş bir normal varyasyon vasıtasıyla φ den elde edilen her φ_s parametrik hiperyüzeyinin hacminden φ nin hacminin küçük olması durumu böyle bir durumdur. R^{n+1} de ortalama eğriliği sıfır olan bir parametrik hiperyüzeye *Minimal yüzey* denir.

Teorem 4.1.1. *$\varphi : U \to R^{n+1}$, R^{n+1} de sonlu hacimli bir parametrik hiperyüzey olsun. O zaman kompaktlıkla desteklenmiş normal varyasyonlara uyan hacim integralinin φ de sabit olması için gerek ve yeter şart S nin ortalama eğriliğinin sıfır olmasıdır[1].*

İspat. $H = 0$ ise φ nin kompaktlıkla desteklenmiş her ψ normal varyasyonu için

$$\frac{d}{ds}|_0 V(\varphi_s) = -n\int_U f.H \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix} = 0$$

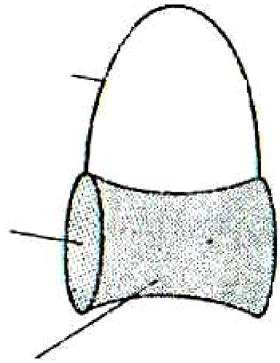
dir.

Tersine, bazı $p \in U$ için $H(p) \neq 0$ ise U da p civarındaki ε yarıçaplı kapalı küresindeki gibi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. $h : U \to R$, $\forall q \in U$ için $h(q) \geq 0$ ve $h(p) = 1$ olan bir diferensiyellenebilir çarpan fonksiyonu olsun. $\|q - p\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde her q için $h(q) = 0$ olsun. ψ, $f = h.H$ özelliğini sağlayan φ nin normal varyasyonu olsun. O zaman ψ kompaktlıkla desteklenmiştir. $f.H = h.H^2$, U üzerinde negatif değildir ve p de pozitiftir. Böylece

$$\frac{d}{ds}|_0 V(\varphi_s) = -n\int_U h.H^2 \det \begin{bmatrix} E_1 \\ . \\ . \\ E_n \\ N \end{bmatrix} < 0$$

olur. □

Minimal yüzeyler için kullanılan minimal kelimesinin sebebi, bir minimal yüzeyin genelde, normal varyasyonlar vasıtasıyle elde edilebilecek bütün yüzeyler içinde hacmi en küçük olan yüzey olmasıdır. R^3 de minimal 2-yüzeylere doğada örnek olarak sabun şeriti verilebilir. Eğer sabun şeritleri bir tel çerçeve ile gerilen bir yüzeyin şeklini alırsa(Şekil 3.1.2)[1], o zaman yüzeyin sabit olabilmesi için alanı, yakınında bu çerçeveyle gerilen bütün yüzeylerin alanından küçük olmalıdır.



Şekil 3.1.2.

Özel olarak $n = 2$ olması durumunda R^3 deki 2-yüzey için yukarıdaki varyasyonel yaklaşım için yüzeyin tanım kümesine ait bir $\gamma_s = \varphi_s \circ \gamma$ basit kapalı eğrisinin φ_s yüzeyi üzerindeki sınırladığı bölgenin alanı $A(s)$ olmak üzere

$$\dot{A}(s) = \int\int_{i\c{c}(\gamma)} dA_{\varphi_s}$$

dir. Burada $(\cdot)$ s ye göre türevi göstermektedir.

Buradaki notasyonlar altında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.2. *Yukarıdaki kabul ve notasyonlar altında φ_s varyasyonu γ eğrisi boyunca sıfıra eşit ise*

$$\dot{A}(0) = -2\int\int_{i\c{C}(\gamma)} H(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}\alpha dudv...(1)$$

dir. Burada H, φ nın ortalama eğriliğidir. E, F ve G ise birinci temel formun katsayılarıdır. $\alpha = \varphi.N$ ve N, φ nin standart birim normalidir[7].

γ sınır eğrisi ile verilen bütün yüzeyler boyunca φ minimum alana sahip ise o zaman A, $s = 0$ noktasında bir mutlak minimuma sahip olmak zorundadır. Böylece bu yüzeylerin bütün diferensiyellenebilir aileleri için $\dot{A}(0) = 0$ olur. Bu ise (1) integralinin her $\alpha : U \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için sıfır olması demektir. Bu da sadece integrandda α ile çarpılan terimlerin sıfır olmasıyla mümkündür. Diğer bir ifadeyle $H = 0$ olması demektir. O halde bir minimal yüzey, ortalama eğriliği her yerde sıfır olan bir yüzeydir.

Sonuç 4.1.1. Bir S yüzeyi aynı sınır eğrisi ile bütün yüzeyler boyunca minimum alana sahip ise o zaman S bir minimal yüzeydir[7].

Örnek 4.1.1. Bir catenoid, $x = \frac{1}{a} cosh\ az$ eğrisinin xz-düzleminde z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir yüzeydir[7]. Burada a, sıfırdan farklı sabit bir sayıdır. Kolaylık olması açısından $\alpha = 1$ olarak alınacaktır. Bir catenoid,

$$\varphi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

şeklinde parametrelendirilsin. O zaman

$$\varphi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1), \varphi_v = (-\cosh u \sin v, \coth u \cos v, 0),$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u),$$

$$N = (-sech\ u \cos v, -sech\ u \sin v, \tanh u),$$

$$\varphi_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0),$$

$$\varphi_{uv} = (\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0),$$

$$\varphi_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

dir. Buradan φ nın birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları için

$$E = G = \coth^2 u, F = 0, L = -1, M = 0, N = 1$$

elde edilir. Böylece

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0$$

bulunur. Bu ise catenoidin bir minimal yüzey olduğunu gösterir.

Örnek 4.1.2. f, iki değişkenli bir diferensiyellenebilir fonksiyon olduğunda $z = f(x,y)$ nin minimal olması için gerek ve yeter şartın

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$

olduğunu gösterelim.

Yüzeyi $\varphi(u,v) = (u,v,f(u,v))$ ile parametrelendirelim. O zaman

$$\varphi_u = (1,0,f_u), \varphi_v = (0,1,f_v), N = (1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{-1}{2}}(-f_u,-f_v,1)$$

$$\varphi_{uu} = (0,0,f_{uu}), \varphi_{vv} = (0,0,f_{vv}), \varphi_{uv} = (0,0,f_{uv})$$

elde edilir. Buradan

$$E = 1+f_u^2, F = f_uf_v, G = 1+f_v^2$$

ve

$$L = (1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{-1}{2}}f_{uu}, M = (1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{-1}{2}}f_{uv},$$

$$N = (1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{-1}{2}}f_{vv}$$

dir. Buradan bu değerlerin

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0$$

denkleminde yerine yazılmasıyla

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$

şartına ulaşılır.

Bir $a_1x_1 + \ldots + a_{n+1}x_{n+1} = b$ n-düzleminin, bütün asli eğrilikleri ve ortalama eğriliği de sıfır olduğundan R^{n+1} de bir minimal yüzey belirtir. Teorem 2.11.4 e göre R^{n+1} deki her kompakt hiperyüzey, bütün asli eğriliklerin sıfırdan farklı olduğu ve aynı işarete sahip olduğu bir nokta bulundurmak zorunda olduğundan R^{n+1} de kompakt olan minimal yüzey yoktur.

R^3 deki minimal olan 2-dönel yüzeylerin tamamını bulalım:

İlk olarak, $\alpha : I \to R^2$, $\forall t \in I$ için $y(t) > 0$ olacak şekilde bazı $y : I \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için $\alpha(t) = (t, y(t))$ formunda bir parametrik eğri olduğunu düşünelim. α nın x_1-ekseni yönünde döndürmesiyle elde edilen 2-yüzey

$$\varphi(t,\theta) = (t, y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta)$$

şeklindedir. Düzgün bir hesaplamayla φ nin asli eğriliklerinin

$$K_1(t,\theta) = -y''(t) \diagup \left(1 + \left(y'(t)\right)^2\right)^{3\diagup 2}$$
$$K_2(t,\theta) = 1 \diagup y(t) \left(1 + \left(y'(t)\right)^2\right)^{1\diagup 2}$$

olduğu görülür. Böylece φ nin ortalama eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart $y(t)$ nin

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3\diagup 2}} = \frac{1}{y(1+y'^2)^{1\diagup 2}}$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır. Her iki tarafı $y'\left(1+y'^2\right)^{1\diagup 2}$ ile çarparsak

$$\frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{y'}{y}$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali ise

$$\frac{1}{2}\log\left(1+y'^2\right) = \log y + \log c = \log c.y$$

veya

$$1+y'^2 = (c.y)^2$$

olur. Burada $c > 0$, integrasyon sabitidir. y' için çözüm

$$y' = \mp\left((c.y)^2 - 1\right)^{1\diagup 2}$$

veya

$$y' \diagup \left((c.y)^2 - 1\right)^{1\diagup 2} = \mp 1$$

olur. Tekrar integral alınırsa

$$(1\diagup c)\left(\cosh^{-1}(cy) - c_2\right) = \mp t$$

veya

$$y = (1 \diagup |c_1|) \cosh (c_1 t + c_2)$$

elde edilir. Burada $c_1 = \mp c$ ve c_2 başka bir integrasyon sabitidir.

R^2 de $x_2 = (1 \diagup |c_1|) \cosh (c_1 x_1 + c_2)$ formundaki bir eğri *zincir eğrisi* (*catenary*) olarak adlandırılır. Böyle bir eğriyi x_1-ekseni etrafında döndürerek elde edilen dönel yüzeye ise *catenoid* denir. Yukarıda anlatılanlar R^3 de bir diferensiyellenebilir fonksiyonun grafiğinin x_1-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen her minimal yüzeyin bir catenoidin bir parçası olduğunu gösterir.

α parametrik eğrisinin görüntüsünün bir fonksiyonun grafiği olması durumunda catenoidler sadece düzlem parçaları olarak elde edilir. Aslında, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ise o zaman α nın $x' \neq 0$ şartını sağlayan herhangi bir aralık üzerinde $\beta(t) = \left(t, y \circ x^{-1}(t)\right)$ şeklinde yeni bir β parametrizasyonu vardır. Böylece bu aralık üzerinde α nın görüntüsü bir fonksiyonun grafiğidir. x' nün sıfır olduğu herhangi bir aralık üzerinde α, bazı $c \in R$ için $\alpha(t) = (c, y(t))$ şeklinde olmalıdır. Böylece α nın bu parçasının x_1-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey $x_1 = c$ düzleminde kalır. Farklı $c_1$ve c_2 değerleri seçilerek tanımlanan iki catenoid, diferensiyellenebilirlik yönünden birbirine uymaz ve bir catenoidin bir parçası, bir düzlemin bir parçası üzerine diferensiyellenebilir olarak yapıştırılamaz. Sonuç olarak, R^3 de sadece irtibatlı minimal dönel yüzeyler catenoidlerin ve düzlemlerin birer parçalarıdır[1].

KAYNAKLAR

[1] Thorpe J.A., *Elemantary Topics in Differentiel Geometry*, Academic Press, 1979.

[2] Hacisalihoğlu H.H. , *Diferensiyel Geometri*, Cilt 2,A.Ü.Fen Fakültesi, Ankara, 2000.

[3] Hacisalihoğlu H.H. , *Diferensiyel Geometri Problemleri*, Cilt 2,A.Ü.Fen Fakültesi, Ankara, 1996.

[4] O'Neill Barrett, *Elemantary Differantial Geometry*, Academic Press, 1997.

[5] Sabuncuoğlu Arif., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın ve Dağıtım, 2004.

[6] De Carmo, M.P., *Diferantial Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey 1976.

[7] Andrew Presley, *Elemantary Differential Geometri*, King's College, London 2000

ÖZGEÇMİŞ

02 Mayıs 1978 tarihinde Adıyaman'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adıyaman'da tamamladı. 1997 yılında Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2001'de öğrenimini tamamlayarak, Adıyaman ili Kahta ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Eylül 2007'de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı.