T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU UZAYLARDA ŞARTSIZ YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Şenol BALTACI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bilal ALTAY

TEMMUZ 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU UZAYLARDA ŞARTSIZ YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Şenol BALTACI
(3611407004)

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bilal ALTAY

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda konu belirlenmesi ve yürütülmesinin her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren bilgi, deneyim ve tavsiyelerinden istifade ettiğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bilal ALTAY'a, çalışmalarımda hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma sürecinde de benden her türlü desteğini esirgemeyen aileme, üzerimde emeği olan tüm hocalarıma minnet ve şükranlarımı sunar teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Normlu Uzaylarda Şartsız Yakınsak Seriler Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Şenol BALTACI

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{B_X}$	:	X uzayının kapalı birim yuvarı,
$\mathbf{c}$	:	Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı,
$\mathbf{c_0}$	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,
$\mathbf{c_{00}}$	:	Sonlu sayıda terimi hariç geriye kalan bütün terimleri sıfır olan dizilerin uzayı,
$\mathbf{cs}$	:	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı,
$\mathbf{CM}$	:	M kümesinin tümleyeni,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi,
dim $\mathbf{X}$	:	X uzayının boyutu
$\mathbf{D(T)}$	:	T operatörünün tanım kümesi,
$\mathbf{G(T)}$	:	T operatörünün grafiği,
$\lvert\mathbb{J}\rvert$	:	$\mathbb{J}$ kümesinin kardinalitesi
$\ell_\mathbf{p}$	:	p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı,
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı,
$\mathbf{M+N}$	:	M ve N kümelerinin toplamı,
$\mathbf{M \oplus N}$	:	M ve N kümelerinin direkt toplamı,
$\overline{\mathbf{M}}$	:	M kümesinin kapanışı,
$\mathbf{N(T)}$	:	T operatörünün çekirdeği,
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi,
$\mathbf{R(T)}$	:	T operatörünün değer kümesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi,
sgn $\mathbf{z}$	:	z kompleks sayısının işaret fonksiyonu
$\mathbf{B_X}$	:	X uzayının birim yuvarı,
$\mathbf{S_X}$	:	X uzayının birim küresi,
$\mathbf{T(X)}$	:	X üzerinde tanımlı olan bir T operatörünün görüntüsü,
$\mathbf{T\vert_E}$	:	T operatörünün E kümesine kısıtlanışı,
$\mathbf{T^*}$	:	T operatörünün adjoint operatörü,
$\mathbf{T^{-1}}$	:	T operatörünün tersi,
$[\mathbf{x_n}]$	:	(x_n) dizisinin gerdiği kapalı lineer uzay,
$\mathbf{X \times Y}$	:	X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı,
$\mathbf{X^*}$	:	X uzayının sürekli duali,
$\mathbf{X^{**}}$	:	X uzayının 2-inci duali,
$\mathbf{w}$	:	Kompleks terimli bütün dizilerin uzayı,
$\lambda_\mathbf{A}$	:	A matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı,

ÖZET

Doktora Tezi

NORMLU UZAYLARDA ŞARTSIZ YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

Şenol BALTACI

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

53+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Beş bölümden oluşan çalışmanın ilk bölümü, konunun tarihsel gelişimine ve konuya ait literatüre ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümler için gerekli fonksiyonel analizin temel kavramları ve teoremleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, bu çalışmanın alt yapısını oluşturan seriler, bazlar, temel diziler konu edilmiştir. c_0 uzayının kopyasını ve tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonu verilmiştir.

Tezin orjinal bölümleri, dördüncü ve beşinci bölümlerdir.

Dördüncü bölümde, Ces_0 dizi uzayı inşa edilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Ces_0 uzayının bazı(temeli) bir şartsız yakınsak seri teşkil ettiği gösterilmiştir. Daha sonra, Ces_0 uzayı üzerinde tanımlı lineer dönüşümlerin bazı özellikleri şartsız Cauchy ve şartsız yakınsak serileri yardımıyla karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Banach uzayı, Dizi uzayı, Kopya, Tamamlayıcı kopya, Temel dizi, Şartsız yakınsak seriler, Zayıf şartsız Cauchy seri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON UNCONDITIONALLY CONVERGENT SERIES IN NORMED SPACES

Şenol BALTACI

İnönü University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

53+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Bilal ALTAY

The first part of the study, which consists of five chapters, is devoted to the historical development of the subject and the literature on the subject.

In the second chapter, the basic concepts and theorems of functional analysis required for the next chapters are discussed.

In the third chapter, the series, bases and fundamental sequences, which form the basis of this study, are discussed. Characterization of Banach spaces containing copy and complementary copy of the sequence space c_0 is given.

The original chapters of the thesis are the fourth and fifth chapters.

In the fourth chapter, the sequence space Ces_0 is introduced and some of its properties are examined.

In the fifth chapter, it is shown that the basis of the space Ces_0 forms an unconditionally convergent series. Then, some properties of certain linear transformations defined on Ces_0 are characterized with the help of unconditionally Cauchy and unconditionally convergent series.

KEYWORDS: Banach space, Sequence space, Copy, Complementary copy, Basic sequence, Unconditionally convergent series, Weakly unconditional Cauchy series.

1. GİRİŞ

Seriler, matematiğin bir çok alanında kullanılır. Örnek olarak, analitik fonksiyonlara kuvvet serileri ile yaklaşım, fonksiyonları daha anlaşılır kılmakta, trigonometrik fonksiyonların serileri yardımıyla periyodik fonksiyonların fourier serilerinin elde edilmesi, matematiksel fizik problemlerin çözümünde özel fonksiyonların seri ile temsili verilebilir. Sonlu toplamdan sonsuz toplama yakınsaklık kavramıyla geçiş yapıldığından, vektör uzay üzerinde bir topolojinin bulunması durumunda serilerden bahsedebiliriz. Normlu uzaylar birer topolojik vektör uzayları olduğundan, bu uzaylarda serilerden söz edebiliriz. Özellikle Banach uzaylarda bazı problemlerin çözümünde(baz kavramı, temel diziler vb.), seriler araç olarak kullanılır.

Banach uzayı teorisi, Banach'ın 1932'de yayınladığı [1] kitabındaki Banach uzaylarına ait bazı problemlemlerin çözümlerinin bulunması çabalarının sonucunda hızla gelişmiştir. Teori, özellikle 1950 li yıllarda gelişmiş ve bu alanda 1977 ve 1979 yıllarında yazılan Lindenstrauss ve Tzafriri'nin kitapları [2, 3] dikkate değerdir. Hâlâ bir çok araştırmacı aktif şekilde Banach uzaylarını çalışmaktadır. Banach uzayları teorisine önemli katkıları olanlar arasında olan Fredholm, Hilbert, F. Riesz gibi araştırmacılar, lineer cebir ile analiz metodlarını kullanarak lineer differansiyel ve integral denklemler ile ilgilenmişlerdir.Fonksiyonel analizin, düzgün sınırlılık, açık dönüşün ve kapalı grafik teoremleri, Hahn Banach Teoremi gibi ilk sonuçları, analizde önemli birer araç olarak kullanılmıştır. Daha sonra, Banach uzayların izomorfik teorisi önem kazanmış ve verilen iki Banach uzayın izorf olup olmadığı veya birinin diğerinin tamamlayıcı alt uzayına izomorf olup olmadığı araştırılmıştır. İzomorfik teoride uzayların bazları veya temel dizileri önemli rol oynar.

Banach'ın [1] deki problemlerden biri, "*Her ayrılabilir uzay bir baza sahip midir?*" şeklindedir. Bu baz problemi üzerinde çok çalışılmış ve problem yaklaşım(approximation) problemine dönüşmüştür. Bu problem, yaklaşım özelliğine sahip olmayan bir ayrılabilir Banach uzay örneği vererek, 1972 yılında [4] Per Enflo tarafından, hayır cevabıyla, çözülmüştür. Diğer taraftan, baz gibi davranan temel diziler için, "Her ayrılabilir Banach uzayı bir temel diziye sahip midir?" problemi olumlu (evet) cevaplanmıştır.

Banach uzayları arasında dizi uzayları önemli bir yere sahiptir. Bir Banach uzayı bir Schauder bazına sahipse, uzayın her elemanı bazdaki elemanlar cinsinde tek türlü yazılabilir. Uzayın her elemanı, baz cinsinden yazıldığında, tek türlü olarak baz koordinatlarına sahiptir. Uzayın bütün elemanları baz kümesine göre koordinatlara sahip olduğundan, elemanları bu koordinatlarla temsil edebileceğimizden, uzayın elemanları dizilerle tanımlayabiliriz. Dolayısıyla, bir Schauder bazına sahip Banach uzayını bir dizi uzayı olarak görebiliriz. Ayrılabilir Banach uzaylarında temel dizileri kullanarak, temel dizinin gerdiği kapalı altuzayını bir dizi uzayına izomorf yaparak, uzayın bazı özellikleri bu dizi uzayı yardımıyla incelenebilir.

Normlu uzaylarda serilerin çeşitli tipten yakınsaklığı ve karakterizasyonu ve serilerin sahip olduğu özellikler uzayın bazı özelliklerini belirlemeye imkan vermektedir. Mesela bir normlu uzayda mutlak yakınsak her serinin yakınsak seri olması uzayın tamlığını (Banach uzay olma) gerektirmektedir. Dvoretzky ve Roger [5] de "Bir Banach uzayında serilerin mutlak yakınsaklığının şartsız yakınsaklığa denk olması için gerek ve yeter şart uzayın sonlu boyutlu olmasıdır" teoremini ispatladı. Bessage ve Pelczynski [6], zayıf şartsız Cauchy serileri ve temel dizileri yardımıyla, c_0 uzayını içeren Banach uzaylarının temel karekterizasyonunu vermiştir.

Ronglu ve Qingying [7], c_0 uzayının kopyasını içermeyen tam yerel konveks bir X uzayındaki her zayıf şartsız Cauchy serisinin şartsız yakınsak olduğunu ve c_0'dan X uzayına olan her sürekli ve lineer dönüşümün kompakt olduğunu göstermiştir. Ronglu ve Cho [8], yerel konveks uzaylarda zayıf şartsız Cauchy serilerinin karakterizasyonunu yapmıştır. Junde ve Ronglu [9] yerel konveks uzaylarda şartsız yakınsak serilerin bir karakterizasyonunu vermiş ve bir X barel uzayının c_0'ın kopyasını içermemesi durumunda denk olduğu şartları elde etmiştir.

Bu ve Wu [10] çalışmasında sınırlı çarpımsal yakınsak seri uzayları yardımıyla Banach uzayları arasındaki lineer operatörlerin şartsız yakınsak serilerini incelemiştir. Aizpuru ve Fernández [11], ℓ_∞, c_0 gibi klasik dizi uzayları ve gözönüne alınan uzayda bir seriden yaralanarak, bazı uzaylar tanımlayarak, Banach uzayların c_0'ın kopyasını içermesi durumunda şartlı yakınsak ve zayıf şartsız Cauchy serilerinin yeni bir karakterizasyonunu elde etmiştir. Aizpuru ve Fernández [12, 13], bu yeni dizi uzaylarının yardımıyla bir normlu uzayın tamlığını ve barrelledliğini karakterize etmiştir. Aizpuru ve arkadaşları [14, 15], Cesàro ve hemen-hemen yakınsaklık yardımıyla şartsız yakınsak ve zayıf şartsız Cauchy seriler için farklı bir karakterizasyon vermiştir.

Cesàro ortalaması yardımıyla çeşitli dizi uzayları inşa edilmiştir [16, 17, 18]. Cesaro dizi uzaylarının özellikleri ve bu uzaylar üzerinde tanımlı lineer operatörler bir çok yazar tarafından incelenmiştir [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

Bu doktora tezinde, Ces_0 uzayı inşa edilerek, uzayın bazı özellikleri incelenecek ve Ces_0 uzayından bir X Banach uzayına tanımlı bazı lineer dönüşümlerin bazı özellikleri şartsız yakınsak Cauchy ve şartsız yakınsak seriler yardımıyla verilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölüm, tezin ileriki bölümlerde kullanılacak analizin temel kavramlar ve teoremlerine ayrılmıştır. Çalışmamızda $\mathbb{K}$ cisminin reel veya kompleks sayılar cismi olduğu ve tanımlarına yer verilmeyen (vektör uzayı, topolojik uzay, metrik uzay, normlu uzay vb....) temel kavramların bilindiği varsayılmıştır.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [28] (x_n), (X, d) bir metrik uzayında bir dizi, $x \in X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ olan bütün $n \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine bir yakınsak dizi, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_0$ olan bütün $n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. Tam normlu uzaya Banach uzay denir.

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ kümelerine X normlu uzayının sırasıyla kapalı birim yuvarı ve birim küresi denir.

Aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki normlu uzay X ve Y, $T : X \to Y$ dönüşümü, her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa bir lineer dönüşüm(operatör) denir. X uzayından Y uzayına lineer dönüşümlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. $T \in L(X, \mathbb{K})$ dönüşümüne X uzayında lineer fonksiyonel denir. $L(X, \mathbb{K})$ ailesine X uzayının cebirsel duali denir ve $X^{\#}$ ile gösterilir.

$T \in L(X, Y)$ için

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

kümesine T dönüşümünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir.

$T \in L(X, Y)$ için her $x \in X$ bakımından

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı mevcut ise T dönüşümüne sınırlı-lineer dönüşüm denir. X uzayından Y uzayına sınırlı-lineer dönüşümlerin kümesi $B(X, Y)$ gösterilir. $X = Y$ olması durumunda $B(X, X)$ yerine $B(X)$ gösterimini kullanacağız. $B(X, \mathbb{K})$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir. $X = X^{**} = (X^*)^*$ (izomorfik anlamında) ise X uzayına yansımalıdır denir.

$T \in B(X, Y)$ için

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in X, \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük $c > 0$ sayısına T dönüşümünün normu denir.

Tanım 2.1.2. [29] Görüntü uzayları sonlu boyutlu olan lineer dönüşüme sonlu boyutlu ya da sonlu ranklıdır denir.

X bir Banach uzayı olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & X \times X & \rightarrow & X \\ & (x,y) & \rightarrow & xy \end{array}$$

işlemi, her $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

(i) $x(yz) = (xy)z$

(ii) $x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy)$

(iii) $x(y+z) = xy + xz$ ve $(x+y)z = xz + yz$

(iv) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

şartlarını sağlarsa, X uzayına bir Banach cebiri denir.

Teorem 2.1.3. *[30] X Banach uzayı, $T \in B(X)$ olmak üzere, $\|T\| \leq 1$ ise $(I-T)^{-1}$ mevcut ve*

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \text{ ve } \|I-(I-T)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|}{1-\|T\|}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.4. [29] X bir Banach uzayı, $T \in B(X)$ olmak üzere her $f \in X^*$ ve $x \in X$ için

$$T^* : X^* \rightarrow X^*, \; (T^*f)(x) = f(Tx)$$

biçiminde tanımlı T^* dönüşümüne T dönüşümünün adjointi denir ve $T^* \in B(X^*)$.

Tanım 2.1.5. [29] Bir (X,d) metrik uzayının M altkümesinden alınan her dizinin limiti M kümesinde olacak şekilde yakınsak bir altdizisi varsa M altkümesine (dizisel)kompakttır denir.

Kapanışı kompakt olan kümeye ön kompakt küme adı verilir.

Tanım 2.1.6. [30] X, Y Banach uzaylar arasındaki $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü, sınırlı her kümeyi ön kompakt kümeye taşıyorsa, T dönüşümüne kompakt (veya tamamen sürekli) lineer dönüşüm denir. X uzayından Y uzayına kompakt lineer dönüşümlerin ailesi $K(X,Y)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.7. *[30] X, Y Banach uzayları ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere:*

i) T *kompakttır.*

ii) $T(B_X)$*, ön kompakttır.*

iv) X *uzayındaki sınırlı dizilerin* T *altında görüntülerinin yakınsak alt dizileri vardır.*

önermeleri denktir.

Teorem 2.1.8. *[29] Normlu bir uzayın kapalı birim yuvarının kompakt olması için gerek ve yeter şart uzayın sonlu boyutlu bulunmasıdır.*

Tanım 2.1.9. [30] X, Y Banach uzayları $T \in L(X, Y)$ olmak üzere, sınırlı kümelerin görüntüsü Y uzayının bir zayıf ön kompakt kümesi ise, T dönüşümüne zayıf kompakttır denir.

Önerme 2.1.10. *[30] Banach uzayları arasındaki her kompakt lineer dönüşüm zayıf kompakttır.*

Tanım 2.1.11. [31] Normlu uzaylar arasındaki bire bir, örten, kendisi ve tersi sürekli olan lineer dönüşümlere izomorfizm (izomorfizma) denir.

Tanım 2.1.12. [32] X ve Y Banach uzaylar, $T \in L(X, Y)$ dönüşümü, $E < X$ (E, X uzayının alt uzayı) sonsuz boyutlu her altuzayı için $T \in L(E, T(E))$ izomorfizm olmuyorsa, T dönüşümüne kesin singüler dönüşüm denir.

Tanım 2.1.13. [29] Topolojik uzaylar arasında tanımlı, açık kümeleri açık kümelere taşıyan dönüşüme açık dönüşüm denir.

Teorem 2.1.14. *[29, Hahn-Banach Teoremi] Reel* X *vektör uzayından* $\mathbb{R}$ *ye* p *fonksiyonu, her* $x, y \in X$ *ve* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *için*

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$

şartlarına sahip, $M < X$ *ve her* $m \in M$ *için* $f(m) \leq p(m)$ *eşitsizliğini sağlayan* $f : M \to \mathbb{R}$ *bir lineer fonksiyonel olsun.* f *nin, her* $x \in X$ *için* $F(x) \leq p(x)$ *eşitsizliği ve her* $m \in M$ *için* $F(m) = f(m)$ *eşitsizliğini gerçekleyen bir* F *lineer genişlemesi vardır.*

Hahn-Banach Teoreminin bazı sonuçlarını verelim.

Sonuç 2.1.15. *[29]* X *bir normlu uzay ve* $0 \neq x_0 \in X$ *olsun. Bu durumda*

$$f(x_0) = \|x_0\| \text{ ve } \|f\| = 1$$

olacak şekilde X *üzerinde bir* f *sürekli lineer fonksiyoneli mevcuttur.*

Sonuç 2.1.16. *[33] X bir normlu uzay ve Y, X uzayının kapalı bir alt uzayı olsun. Bu durumda, her bir $x_0 \in X \setminus Y$ için*

$$f(x_0) = 1 \text{ ve } Y \subset N(f)$$

olacak şekilde X üzerinde bir f sürekli lineer fonksiyoneli mevcuttur.

Sonuç 2.1.17. *[33] X bir normlu uzay ve Y, X uzayının bir alt uzayı olmak üzere, Y uzayı X uzayında yoğun olması için gerek ve yeter şart Y üzerinde sıfır olan dönüşümlerin kümesinin sadece $f = 0$ fonksiyonelinden ibaret (yani $\forall f(Y \subset N(f)) \Rightarrow f = 0$) bulunmasıdır.*

Teorem 2.1.18. *[29, Düzgün Sınırlılık Prensibi] X bir Banach, Y bir normlu uzay ve $T_n \in B(X, Y)$ dizisi ve her $x \in X$ için, c_x bir reel sayı olmak üzere,*

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır.

Teorem 2.1.19. *[29, Açık Dönüşüm Teoremi, Ters Sınırlılık Teoremi] X ve Y Banach uzaylar, $T \in B(X, Y)$ dönüşümü örten ise T bir açık dönüşümdür. Üstelik T bire-bir ise T^{-1} dönüşümü de süreklidir.*

Tanım 2.1.20. [34] X ve Y normlu uzaylar olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

kartezyen çarpımı koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir vektör uzay yapısına sahip ve

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

normuyla bir normlu uzaydır. $X \times Y$ normlu uzayında (x_n, y_n) dizisinin (x, y) noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart X uzayında (x_n) dizisinin x noktasına ve Y uzayında (y_n) dizisinin y noktasına yakınsamasıdır. X ve Y Banach uzaylar ise $X \times Y$ uzayı da Banach uzay olur.

X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere,

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

kümesine T nin grafiği denir. Bir lineer dönüşümün grafiği $X \times Y$ uzayının bir altuzayıdır.

Tanım 2.1.21. [34] $T \in L(X, Y)$ dönüşümünün grafiği $X \times Y$ çarpım uzayında kapalı ise T ye kapalı lineer bir dönüşüm denir.

Teorem 2.1.22. *[34, Kapalı Grafik Teoremi] X, Y Banach uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere, $T \in B(X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $G(T)$ kümesinin kapalı bulunmasıdır.*

Teorem 2.1.23. *[30] X, Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun.*

(i) T nin bir izomorfizm olması için gerek ve yeter şart

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$$

olacak ekilde a ve b pozitif reel sayıların mevcut bulunmasıdır.

(ii) T bir uzaklığı koruyan dönüşüm(izometri) ise T bir izomorfizmadır.

(iii) X Banach uzay ve T izomorfizm ise $T(X)$ Banach uzaydır.

Tanım 2.1.24. [29] (x_n), X normlu uzayındaki dizi, her $x^* \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.25. [30] X normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$\{x^*(x) : x \in M\}$$

kümesi sınırlı ise M kümesine zayıf sınırlı küme denir.

Teorem 2.1.26. *[30] X bir normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. M kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart zayıf sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.1.27. [32] X bir normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$(x^*(x_n))$$

bir Cauchy dizisi ise (x_n) dizisine X uzayında zayıf Cauchy denir.

Tanım 2.1.28. [35] (x_n^*), X^* normlu uzayındaki sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

olacak şekilde bir $x^* \in X^*$ fonksiyoneli varsa, (x_n^*) dizisi x^* fonksiyoneline zayıf* yakınsar denir.

Tanım 2.1.29. [36] X ve Y topolojik vektör uzayları ve X uzayından Y uzayına lineer dönüşümlerin bir kümesi S olsun. Y uzayında sıfırın her V komşuluğu için S kümesindeki her f dönüşümü bakımından $f(U) \subset V$ olacak şekilde X uzayında sıfırın bir U komşuluğu varsa S dönüşüm kümesine eş süreklidir denir.

2.2 Dizi Uzayları

Tanım 2.2.1. [33] $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların cismini göstermek üzere, terimleri $\mathbb{K}$ cisminden alınan dizilerin kümesi

$$w = \{x = (x(k)) : \forall k \in \mathbb{N},\ x(k) \in \mathbb{K}\}$$

şeklinde ifade edilir. w kümesi üzerinde tanımlanan,

$$\begin{array}{ccccccc} + : & w \times w & \to & w & \cdot : & \mathbb{K} \times w & \to w \\ & ((x(k)), (y(k))) & \to & (x(k) + y(k)) & & (\lambda, (x(k))) & \to (\lambda . x(k)) \end{array}$$

işlemleriyle, w, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay teşkil eder. w'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

Tanım 2.2.2. [37] X vektör topolojisine sahip bir dizi uzayı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için X üzerinde $p_i(x) = x(i)$ şeklinde tanımlanan $p_i : X \to \mathbb{C}$ koordinat dönüşümü sürekli ise X dizi uzayına bir K-uzayı denir.

Bazı dizi uzay örnekleri;

$x = (x(k))$ reel terimli bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x(k)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ sayısı mevcut ise x dizisine sınırlı dizi denir. Reel terimli sınırlı dizilerin cümlesi ℓ_∞ ile gösterilir. Buna göre,

$$m = \ell_\infty = \left\{x = (x(k)) \in w : \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < \infty\right\}$$

şeklindedir. Sınırlı olmayan bir diziye sınırsız dizi denir.

Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x(n) - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}$ mevcut ise $(x(n))$ dizisi a noktasına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = a$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak dizilerin cümlesi c ile gösterilir ve

$$c = \left\{x = (x(k)) \in w : \lim_k x(k) \text{ mevcut}\right\}$$

şeklindedir. Sıfıra yakınsak dizilerin cümlesi de c_0 ile gösterilir ve

$$c_0 = \left\{x = (x(k)) \in w : \lim_k x(k) = 0\right\}$$

yazılır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty$$

olan diziye p mutlak yakınsak seri oluşturan dizi denir. p mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi ℓ_p ile gösterilir ve

$$\ell_p = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sum_k |x(k)|^p < \infty \right\}$$

şeklindedir. $p = 1$ haline karşılık gelen ve mutlak yakınsak dizilerin uzayı olarak adlandırılan cümle,

$$\ell_1 = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sum_k |x(k)| < \infty \right\}$$

ile gösterilir. Bunların dışında çok kullanılan dizi uzayı örnekleri, kısmi toplamlar dizisi sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı,

$$bs = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} x(k) \right| < \infty \right\}$$

sınırlı-salınımlı dizilerin uzayı,

$$bv = \left\{ x = (x(k)) \in w : |x(0)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x(k+1)| < \infty \right\}$$

ve yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,

$$cs = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sum_k x(k) \text{ yakınsak} \right\}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$m_0 = \left\{ x = (x(k)) \in w \mid \{x(k) : k \in \mathbb{N}\} \text{ sonlu bir cümle} \right\},$$

$$bv_0 = bv \cap c_0$$

ve sonlu adette terimi dışındaki terimleri sıfır olan dizilerin uzayı

$$\varphi = \left\{ x = (x(k)) \in w : \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_x \text{ için } x(k) = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

e_k, k. terimi 1 ve diğer terimleri sıfır olan dizileri göstersin. φ uzayı, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin gerdiği uzaydır, yani

$$\varphi = \langle \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \rangle$$

eşitliği geçerlidir. Yukarıda tanımlanan dizi uzayları arasında,

$$\varphi \subsetneq \ell \subsetneq cs \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty \subsetneq w$$

ve

$$\ell \subsetneq bv_0 \subsetneq bv = bv_0 \oplus < e > \subsetneq c$$

kapsamaları geçerlidir.

$\ell_\infty,\ c$ ve c_0 uzayları,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x(k)|,$$

$\ell_p(1 \leq p < \infty)$ uzayı,

$$\|x\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\Big)^{1/p},$$

bs ve cs uzayları,

$$\|x\|_{bs} = \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)\right|,$$

bv ve bv_0 uzayları da,

$$\|x\|_{bv} = |x(1)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x(k+1)|$$

normu ile birer Banach K-uzaylarıdır(BK uzayı).

Tanım 2.2.3. [33] X ve Y dizi uzaylar, $A = (a(n,k))$ $(n,\ k \in \mathbb{N})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz matris olsun. Bir X uzayındaki bir $x = (x(k))$ elemanı için

$$y(n) = (Ax)(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)x(k)$$

serileri $n \in \mathbb{N}$ sayıları için yakınsak ise $Ax = ((Ax)(n))$ dönüşüm dizisi (x'in $A-$dönüşüm dizisi) tanımlıdır denir. Eğer, her $x \in X$ için $((Ax)(n))$ dönüşümü mevcut ve Y uzayının elemanı oluyorsa A matrisine X uzayından Y uzayına bir dönüşüm tanımlar denir. X uzayından Y uzayına matris dönüşümlerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir.

Bir $A = (a(n,k))$ matrisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $k > n$ iken $a(n,k) = 0$ ve $a(n,n) \neq 0$ oluyorsa, A matrisine bir üçgen matris denir.

Tanım 2.2.4. [37] X bir dizi uzay, A bir matris olmak üzere, A nın X uzayında etki alanı

$$X_A = \{x = (x(k)) \in w : Ax \in X\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.5. *[38] X bir Banach K-(BK-) uzay ve $A = (a(n,k))$ bir üçgen matris olmak üzere X_A bir BK- uzay olup, $f \in X_A^*$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X_A$ için $g \in X^*$ olmak üzere $f(x) = g(Ax)$ şeklinde olmasıdır.*

Tanım 2.2.6. [37] Her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c(n,k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c(n,k))$ matrisine Cesáro ortalaması denir.

Tanım 2.2.7. [33] $\phi \subset X$ bir BK-uzay olmak üzere,

$$x^{[n]} = \sum_{j=1}^{n} x(j) e_j$$

elemanına, $x = (x(k)) \in X$ elemanın n.kısmı denir.

X BK uzayındaki bir $x = (x(k))$ elemanının n.kısımları ile oluşturulan $(x^{[n]})$ dizisi için,

$$x^{[n]} \to x \text{ (yani } \lim_{n\to\infty} \|x - x^{[n]}\| = 0)$$

oluyorsa ise $x = (x(k))$ elemanı AK özelliğine,

$$\left\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi sınırlı ise AB ve $x \in \overline{\varphi}$ ise AD özelliğine sahiptir denir. X uzayında, AK, AB ve AD özelliğine sahip elemanların kümesi sırasıyla X_{AK}, X_{AB} ve X_{AD} ile göstereceğiz.

$X_{AK} = X$ olması durumunda X uzayına AK-uzay(veya AK özellikli), benzer şekilde X uzayına $X_{AB} = X$ ise AB-uzay ve $\overline{\phi} = X$ ise AD-uzay denir.

Bir $x \in \phi$ elemanı için $x^{[n]} - x$ sıfır dizisi olacağından,

$$\phi \subset X_{AK}$$

içermesi, yakınsak diziler sınırlı olacağından,

$$X_{AK} \subset X_{AB}$$

olur.

Teorem 2.2.8. *[38] $\phi \subset X$ BK-uzayının AK-uzay olması için gerek ve yeter şart uzayın AB- ve AD- uzay bulunmsaıdır.*

Tanım 2.2.9. [33] X bir dizi uzayı olmak üzere

$$\{u = (u(k) \in w : \exists x = (x(k)) \in X, \forall k \in \mathbb{N}, |u(k)| \leq |x(k)|\} \subset X$$

kapsaması geçerli ise X uzayına solid uzay denir.

Tanım 2.2.10. [38, 39] X ve Y iki dizi uzayı olmak üzere

$$XY = \{xy = (x(k)y(k)) : x = (x(k)) \in X, y = (y(k)) \in Y\}$$

kümesine X ile Y uzayının çarpımsal kümesi denir.

$$X^Y = \{a = (a(k)) \in w : \forall x = (x(k)) \in X, ax = (a(k)x(k)) \in Y\}$$

kümesine X uzayının Y-duali denir. Özel olarak $Y = cs, bs$ alınmasıyla elde edilen X^{cs} ve X^{bs} uzaylarına sırasıyla X uzayının β- ve γ-duali adı verilir.

Teorem 2.2.11. *[40]. X, ϕ uzayını içeren bir BK dizi uzayının AB özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$bv_0 X \subset X$$

bulunmasıdır

Tanım 2.2.12. [38] X, ϕ uzayını içeren bir dizi uzayı olmak üzere

$$X^f = \{a = (a(k) \in w : \forall k \in \mathbb{N}, a(k) = f(e_k), f \in X^*\}$$

kümesine X uzayının f-duali denir.

Teorem 2.2.13. *[38] X, ϕ uzayını içeren bir BK dizi uzayı olsun. Bu durumda,*

(i) $X^\beta \subset X^\gamma \subset X^f$.

(ii) X AK özelliğine sahip ise $X^\beta = X^f$.

(iii) X AD özelliğine sahip ise $X^\beta = X^\gamma$.

(iv) X AD özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $X^f = X^*$ (izomorfizm olarak) bulunmasıdır.

önermeleri geçerlidir.

Teorem 2.2.14 ([41]). *$A = (a(n,k)) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_n \sum_k |a(n,k)| < \infty \tag{2.1}$$

bulunmasıdır.

Teorem 2.2.15 ([41]). *$A = (a(n,k)) \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter şart (2.1),*

$$\lim_n a(n,k) \text{ } (\forall k \in \mathbb{N}) \text{ için mevcut} \tag{2.2}$$

ve

$$\lim_n \sum_k a(n,k) \text{ mevcut} \tag{2.3}$$

sağlanmasıdır.

Teorem 2.2.16 ([41]). *$A = (a(n,k)) \in (c_0, c)$ olması için gerek ve yeter şart (2.1) ve*

$$\lim_n a(n,k) = 0 \text{ } (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{2.4}$$

sağlanmasıdır.

Teorem 2.2.17. *[42] X ve Y birer BK dizi uzayı, $U = (u(n,k))$ üçgen bir matris, $V = U^{-1}$, $\alpha = (\alpha(n)) \in Y$ ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için*

$$b(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \alpha(j) u(n,j) v(j,k)$$

olmak üzere $B_Y^U = (b(n,k))$ olsun. Bu durumda, $YX_U \subset X_U$ olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in Y$ için $B_Y^U \in (X, X)$ bulunmasıdır.

Teorem 2.2.11 ve Teorem 2.2.17'nin bir uygulaması olarak, $X \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ için $B_{bv_0}^{C_1} \in (X, X)$ olduğundan;

Sonuç 2.2.18. *X_{C_1} uzayı AB özelliğine sahiptir.*

Hahn [43], çalışmasında

$$h = \left\{ x = (x(k)) \in w : \sum_k k|x(k) - x(k+1)| < \infty, \text{ ve } \lim_k x(k) = 0 \right\}$$

dizi uzayını inşa ederek,

$$\|x\|_h = \sup_k |x(k)| + \sum_{k=1}^{\infty} k|x(k) - x(k+1)|$$

normu ile bir BK uzay olduğunu göstermiştir. Hahn dizi uzayı olarak literatüre geçen h ve genelleştirilmiş h_d uzaylarının özellikleri [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52] çalışmalarda incelenmiştir.

Teorem 2.2.19. *[50] h uzayı AK özellikli olup h uzayının sürekli duali*

$$\begin{aligned} Ces_\infty &= (\ell_\infty)_{C_1} \\ &= \{x = (x(k)) \in w : \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x(k) \right) \in \ell_\infty\} \\ &= \{x = (x(k)) \in w : \sup_k \frac{1}{k} \left| \sum_{i=1}^{k} x(k) \right| < \infty\} \end{aligned}$$

uzayına izomorftur.

2.3 Tamamlayıcı Altuzaylar

Bu kısımda, [31, 30, 53] kaynaklarından normlu uzaylarda tamamlayıcı altuzaylar ve izdüşüm dönüşümler arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 2.3.1. X bir lineer uzayı ve M ve N, X uzayının birer altuzayları olsun. X uzayındaki her bir x elemanı için $x = y + z$ şeklinde tek türlü yazıbilen $y \in M$ ve $z \in N$ elemanları varsa X uzayına M ve N uzaylarının direkt toplamı denir ve $X = M \oplus N$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. X bir vektör uzay, $P : X \to X$ lineer dönüşümü

$$P \circ P = P^2 = P$$

eşitliğini sağlıyorsa P ye izdüşüm dönüşümü denir. Bir $x \in X$ elemanı için $y = Px \in R(P)$ olsun. P bir izdüşüm dönüşümü ise

$$Py = P(Px) = P^2x = Px = y$$

bulunur. Yani $P|_{R(P)} = I|_{R(P)}$ olur.

Teorem 2.3.3. *X vektör uzayının M ve N altuzaylarının toplamı $Y = M + N$ olsun. $M \cap N = \{0\}$ ise Y bu altuzayların direkt toplamıdır.*

Teorem 2.3.4. *X lineer uzayında $P : X \to X$ bir izdüşüm dönüşüm ise $X = R(P) \oplus N(P)$ eşitliği sağlanır.*

İzdüşüm dönüşümü bir uzayın her vektörünü tek şekilde iki bileşene ayırır. Bu bileşenlerden biri vektörün P altındaki görüntüsüdür ve vektörün $R(P)$ altuzayına izdüşümü olarak adlandırılır. Öteki bileşenin izdüşümü sıfırdır. Bir X vektör uzayında $P : X \to X$ izdüşüm dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $I - P : X \to X$ dönüşümü de bir izdüşüm dönüşümüdür.

(ii) $M = \{x \in X : Px = x\}$ altuzayını tanımlayalım. Bu durumda $M = R(P)$ olur.

(iii) $R(P) = N(I - P)$ bağıntısı geçerlidir.

Teorem 2.3.5. *Bir X vektör uzayı M ve N altuzaylarının direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa $M = R(P)$ ve $N = N(P) = R(I - P)$ olacak şekilde bir tek $P : X \to X$ izdüşümü vardır.*

Teorem 2.3.6. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ kapalı bir izdüşüm dönüşümü ise $R(P)$ değer bölgesi kapalıdır.*

Teorem 2.3.7. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ sürekli bir izdüşüm dönüşümü ise $R(P)$ değer bölgesi ve $N(P)$ sıfır uzayı kapalıdır.*

Teorem 2.3.8. *X bir normlu vektör uzay ve $P : X \to X$ bir izdüşüm dönüşümü olsun. $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı ise P kapalı bir dönüşümdür.*

X bir Banach uzayı olduğunda, $R(P)$ ve $N(P)$ kümeleri kapalı olan $P : X \to X$ izdüşüm dönüşümü için kapalı grafik teoremi kullanılırsa,

Teorem 2.3.9. *X bir Banach uzayı ve $P : X \to X$ bir izdüşüm dönüşümü olsun. $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı ise P sürekli bir dönüşümdür.*

X bir Banach uzayı ve M kapalı bir altuzay ise $M = R(P)$ olacak şekilde bir P izdüşüm dönüşümü daima vardır. Ancak bu dönüşüm her zaman sürekli olmayabilir. P'nin sürekli olması için $X = M \oplus N$ bağıntısını sağlayan N kapalı altuzayı bulunmalıdır.

Tanım 2.3.10. X normlu uzayının kapalı olan bir M altuzayı verildiğinde,

$$X = M \oplus N \text{ ve } M \cap N = \{0\}$$

olacak şekilde diğer bir kapalı N altuzayı bulunabilirse M'ye X uzayında tamamlayıcı altuzay denir. Bu tanıma denk olarak, M, X uzayındaki sürekli ve lineer olan bir P izdüşüm dönüşümünün görüntü kümesi ise M altuzayı X uzayında tamamlayıcıdır. Çünkü, $P : X \to X$ sürekli lineer bir izdüşüm dönüşümü ise Teorem 2.3.7'den $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı olur. Diğer taraftan, $P : X \to X$ izdüşüm dönüşümü olduğundan $X = R(P) \oplus N(P) = M \oplus N$ yazılabilir. Böylece M altuzayı X uzayında tamamlayıcı olur. M altuzayına N altuzayının tamamlayıcısı denir.

Teorem 2.3.11. *Herhangi bir X Banach uzayının bir altuzayının tamamlayıcı olması için gerek ve yeter şart bu altuzayın X uzayı üzerinde tanımlı sınırlı lineer bir izdüşüm dönüşümünün görüntü kümesi olmasıdır.*

3. NORMLU UZAYLARDA SERİLER

Bu bölümde, normlu uzaylarda seriler konusu ele alınacaktır.

3.1 Serilerin Yakınsaklığı

Bu kısımda, nümerik ve vektör değerli serilerin yakınsaklığı hakkında genel bilgiler [55] numaralı referanstan faydalanarak verilecektir.

Tanım 3.1.1. X bir normlu uzay olmak üzere, x_k genel terimli $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin sonlu toplamlarıyla elde edilen $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ elemanına, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin n-inci kısmi toplamı denir.

Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan seriye yakınsak seri denir. Kısmi toplamlar dizisinin limiti $\lim_n S_n = S$ sayısına serinin toplamı olarak adlandırılır. Ayrıca (S_n) dizisi X uzayında zayıf yakınsak ise bu seriye zayıf yakınsak seri denir.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin R_n ile gösterilen kalan kısmı, $x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots$ ile verilir. Yakınsak bir seride n büyüdükçe kalan kısım sıfıra yaklaşır.

Bir serinin parçası (segmenti) ardışık terimlerinin sonlu sayıdaki bir toplamıdır; yani $\sum_{k=m+1}^{n} x_k = S_n - S_m$.

Tanım 3.1.2. Reel terimli serilere nümerik seriler denir.

Her k doğal sayısı için $x(k)$ reel sayı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$ serisi bir reel sayıya yakınsıyorsa, $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

Mutlak yakınsak olmayan $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)$ serisi bir reel sayıya yakınsıyorsa, seriye şartlı yakınsak seri denir.

Tanım 3.1.3. Boş olmayan bir X kümesinden kendi üzerine birebir ve örten dönüşümlere X in bir permütasyonu denir.

Teorem 3.1.4. *Pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi bir α sayısına yakınsak ise, doğal sayılar kümesinin her π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serisi yakınsaktır ve toplamı yine α sayısıdır.*

Teorem 3.1.5. *$\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi mutlak yakınsak ise doğal sayıların her π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ serileri yakınsaktır, ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} x(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(\pi(k))$ eşitliği geçerlidir.*

Şartlı yakınsak serilerin önemli bir karakterizasyonunun elde edildiği Riemann Teoremini ispatsız vereceğiz.

Teorem 3.1.6 (Riemann Teoremi)**.** *Reel terimli $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)$ serisi şartlı yakınsak ise*

(i) Her bir $a \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi_a(k)) = a$ olacak şekilde bir π_a permütasyonu vardır.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} x(\pi_\infty(k)) = \infty$ olan bir π_∞ permütasyonu vardır.

önermeleri geçerlidir.

Teorem 3.1.7 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri)**.** *Bir Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart serinin segmentleri dizisinin sıfıra yakınsak olmasıdır, yani*

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| = 0$$

dır.

Tanım 3.1.8. Bir normlu uzayda, $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| < \infty$ ise $\sum_k x_k$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Teorem 3.1.9. *Banach uzaylarında mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.*

İspat. $\sum_k x_k$ serisi mutlak yakınsak olsun. $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| < \infty$ olduğundan Cauchy kriterini kullanırsak,

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| = 0$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|$$

olacağından $\lim_{m,n\to\infty}\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| = 0$ ve böylece Cauchy kriterinden, $\sum_k x_k$ serisi yakınsak olur. □

Tanım 3.1.10. Bir Banach uzayında $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi için terimlerinin herhangi dizilimi ile elde edilen seriler yakınsak oluyorsa şartsız yakınsak seri olarak adlandırılır. Yani, doğal sayıların her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine şartsız yakınsak seri denir.

Nümerik serilerde şartsız yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık birbirine denktir. Genel durumda, bir Banach uzayındaki bir seri mutlak yakınsak iken şartsız yakınsaktır; fakat tersi doğru değildir. Her sonsuz boyutlu Banach uzayında şartsız yakınsak olan fakat mutlak yakınsak olmayan serilerin mevcut olduğunu Dvoretzky ve Rogers [54] çalışmasında ispatlamıştır. Örneğin;

ℓ_2 uzayında k-ıncı koordinatı $\frac{1}{k}$ olan dizi

$$x_k = (0, 0, \ldots, 0, k^{-1}, 0, \ldots)$$

elemanlarının oluşturduğu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisini gözönüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x\|_{\ell_2} = \frac{1}{k}$ olup, $\sum_k \|x_k\|_{\ell_2} = \sum_k \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır. Fakat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi, terimlerinin herhangi bir dizilimi için

$$S = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

elemanına yakınsar.

Sonsuz boyutlu normlu uzaylarda mutlak ve şartsız yakınsaklık kavramları denk olmadığından, şartlı yakınsak seri tanımı sonlu boyutlu uzaylardaki tanımından farklıdır.

Tanım 3.1.11. $\sum_k x_k$ serisi yakınsak fakat şartsız yakınsak değilse $\sum_k x_k$ serisine şartlı yakınsak seri denir.

Yani $\sum_k x_k$ serisi şartlı yakınsak ise, en az bir π_0 permütasyonu için $\sum_k x_{\pi_0(k)}$ serisi ıraksaktır.

Teorem 3.1.12. *X Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak ise doğal sayıların her π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi yakınsak ve*

$$\sum_k x_{(k)} = \sum_k x_{\pi(k)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. X Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak fakat $x \neq y$ olmak üzere, $\sum_k x_k = x$ ve bir π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)} = y$ olduğunu kabul edelim. Hahn-Banach teoreminden, $f(x) \neq f(y)$ olacak şekilde bir $f \in X^*$ fonksiyoneli bulunabilir. $\sum_k f(x_k)$ nümerik serisinin toplamı π permütasyonuna göre değiştiğinden bu seri mutlak yakınsak olamaz. Böylece $\sum_k f(x_k)$ serisi şartlı yakınsak bir seri olur ve buradan Riemann Teoremi (Teorem 3.1.6) kullanılırsa, $\sum_k f(x_{\sigma(k)})$ serisinin ıraksak olduğu bir σ permütasyonu bulunur. Bu durumda f sürekli olduğundan $\sum_k x_{\sigma(k)}$ serisi de ıraksak olur. Bu ise $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması ile çelişir. □

Teorem 3.1.13. *[32, 2] Bir Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi için aşağıdakiler denktir:*

(i) $\sum_k x_k$ *serisi şartsız yakınsaktır,*

(ii) $\sum_k x_k$ *serisi alt serisel yakınsaktır, yani (n_k) tam sayılarının her artan dizisi için $\sum_k x_{n_k}$ serisi yakınsaktır,*

(iii) $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ *($k \in \mathbb{N}$) olmak üzere her $\alpha = (\alpha_k)$ için $\sum_k \alpha_k x_k$ serisi yakınsaktır,*

(iv) *F, $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin herhangi bir sonlu alt kümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 3.1.14. *[32, Orlicz-Pettis Teoremi] Bir Banach uzayında her alt serisi zayıf yakınsak olan seri yakınsaktır.*

Teorem 3.1.15. *[56] Bir Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $t = (t(k)) \in \ell_\infty$ için $\sum_k t(k)x_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.*

Tanım 3.1.16. [6] X bir Banach uzayı ve $\sum_k x_k$, X uzayında bir seri olsun. Her $x^* \in X^*$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$$

ise $\sum_k x_k$ serisine zayıf şartsız Cauchy seri denir.

Zayıf şartsız Cauchy serilerinin temel özelliklerini veren teoremi ifade edelim.

Lemma 3.1.17. *[32, 35] Aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) $\sum_k x_k$ *serisi zayıf şartsız Cauchy seridir,*

(ii) Herhangi bir $t = (t(k)) \in l_\infty$ dizisi için

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t(k)x_k \right\| \leq C. \sup_n |t(n)|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır,

(iii) Herhangi bir $t = (t(k)) \in c_0$ dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty} t(k)x_k$ serisi yakınsaktır,

(iv) Doğal sayıların herhangi bir sonlu F alt kümesi ve terimleri ± 1 olan herhangi bir $t = (t(k))$ dizisi için

$$\left\| \sum_{k \in F} t(k)x_k \right\| \leq C$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

Teorem 3.1.18. *[32] Bir Banach uzayında, bir seri şartsız yakınsak ise zayıf şartsız Cauchy serisidir.*

İspat. Bir X Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak olsun. Bu durumda, doğal sayıların her π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi yakınsak olup, herhangi bir $x^* \in X^*$ için $\sum_k x^*(x_{\pi(k)})$ serisi yakınsaktır. $\sum_k x^*(x_{\pi(k)})$ serisi nümerik bir seri olup, nümerik serilerde şartsız ve mutlak yakınsaklığın denkliğinden

$$\sum_k |x^*(x_k)| < \infty$$

olarak elde edilir. Burdan $\sum_k x_k$ serisinin zayıf şartsız Cauchy seri olduğu görülür. □

Zayıf şartsız Cauchy serileri şartsız yakınsak olmayabilir. Örneğin, (e_n), c_0 uzayının standart bazı olmak üzere, $\sum_n e_n$ serisini gözönüne alalım. Her $x^* \in c^* = \ell_1$ için $x^*(e_k) = a(k)$ olmak üzere $a = (a(k) \in \ell_1$ olup,

$$\sum_k |x^*(e_k)| = \sum_k |a(k)|$$

serisi yakınsak olacağından $\sum_n e_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy seridir; fakat şartsız yakınsak değildir.

3.2 Bazlar ve Temel Diziler

Bu kısımda, baz ve temel dizi kavramları verilecek ve bu kavramlar ile ilgili önemli teoremler yer alacaktır.

Tanım 3.2.1. [57] X bir vektör uzayı ve $S \subset X$ olsun. X uzayının her vektörü S kümesinin elemanlarının sonlu lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa S kümesine X uzayının bir gereni denir.

Tanım 3.2.2. [57] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin farklı elemanlarının her sonlu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alt kümesi ve her $\{\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(n)\} \subset \mathbb{K}$ dizisi için

$$\alpha(1)x_1 + \alpha(2)x_2 + ... + \alpha(n)x_n = 0$$

eşitliği ancak ve ancak

$$\alpha(1) = \alpha(2) = ... = \alpha(n) = 0$$

olması halinde sağlanıyorsa A kümesi lineer bağımsızdır denir.

Tanım 3.2.3. [57] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzay, $\emptyset \neq A \subset X$ lineer bağımsız bir küme olsun. $A \subsetneq E \subset X$ olan her E kümesi lineer bağımlı ise A kümesine X uzayı için bir Hamel bazı denir. Yani uzaydaki maksimal lineer bağımsız her kümeye uzayın bir Hamel bazı denir.

Teorem 3.2.4. *[57] $\{0\}$ dışındaki her vektör uzayı bir Hamel bazına sahiptir.*

Teorem 3.2.5. *[57] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve A kümesi X için bir Hamel bazı olsun. Her bir $x \in X$ için sonlu tane $\alpha \in A$ dışında sıfır değerini alan ve*

$$x = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha).\alpha$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f : A \to \mathbb{K}$ fonksiyonu vardır. Yani x, A'nın elemanlarının sonlu lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

Tanım 3.2.6. [32] X bir Banach uzayındaki bir (x_n) dizisinin kapalı lineer gereni olan $[x_n]$ alt uzayı, X uzayının tamamlayıcı bir altuzayı ise bu diziye X uzayında tamamlayıcıdır denir.

Tanım 3.2.7. [56] X bir Banach uzayı olsun. $(x_n) \subset X$ ve $(x_n^*) \subset X^*$ olmak üzere,

$$x_i^*(x_j) = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

oluyorsa bu iki dizi biortogonaldir denir.

Tanım 3.2.8. [32] (x_n), X Banach uzayında bir dizi olmak üzere

(i) (x_n) ile (x_n^*) dizileri biortogonal,

(ii) Her bir $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$

olacak şekilde $(x_n^*) \subset X^*$ dizisi varsa (x_n) dizisine X uzayının Schauder bazı(kısaca baz) denir.

Önerme 3.2.9. *[58] X bir Banach uzayı ve $(x_n) \subset X$ olsun. (x_n) dizisinin X uzayının bazı olması için gerek ve yeter şart*

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 0$,

(ii) Her $(a(n)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizi ve $n < m$ olmak üzere, her n, m pozitif tam sayıları için

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a(i) x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a(i) x_i \right\|$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti mevcuttur,

(iii) X=$[x_n, n \in \mathbb{N}]$

koşullarının sağlanmasıdır.

Tanım 3.2.10. [32] (x_n), X Banach uzayında bir baz olsun. Her bir $x = \sum_{k=1}^{\infty} a(k) x_k$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a(k) x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a(k) x_k$$

şeklinde tanımlanan $S_n : X \to X$ dönüşümlerine (x_k) bazına ilişkin kısmı toplam dönüşümleri denir. Bu dönüşümler birer projeksiyondur.

Teorem 3.2.11. *[32] (x_n), X Banach uzayında bir baz ve baza ilişkin kısmı toplam dönüşümleri S_n ise*

$$\sup_n \|S_n\| < \infty$$

olur.

Tanım 3.2.12. [58] (x_n), $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ projeksiyonların dizisi ile ilişkili olan bir X Banach uzayının bazı olsun. Bu takdirde

(i) $K = \sup_N \|S_N\|$ sayısı, (x_n) bazının baz sabiti,

(ii) (x_n) dizisinin baz sabiti 1 ise (x_n) monoton baz,

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ise (x_n) normalize edilmiş baz,

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$ ise (x_n) yarı normalize edilmiş baz olarak tanımlanırlar.

Tanım 3.2.13. [2] (x_n), X Banach uzayındaki herhangi bir dizi olsun. (x_n) dizisi kendi kapalı lineer gereni $[x_n]$ için bir Schauder bazı ise (x_n) dizisine temel dizi denir.

Teorem 3.2.14. *[35, Grunblum Kriteri] (x_n), X Banach uzayında sıfırdan farklı vektörlerin bir dizisi olsun. (x_n) dizisinin temel dizi olması için gerek ve yeter şart $(a(n))$ skalerlerinin herhangi seçimi ve herhangi $m < n$ pozitif tamsayıları için*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a(i)x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a(i)x_i \right\|$$

eşitsizliğini sağlayan $K > 0$ sabitinin bulunmasıdır.

Tanım 3.2.15. [2] (x_n) ve (y_n) dizileri sırasıyla X ve Y Banach uzaylarında birer baz(temel dizi) olsun. "$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n$ serisinin yakınsak olmasıdır" önermesi sağlanıyorsa, (x_n) ve (y_n) bazları (temel dizileri) denktir denir.

Teorem 3.2.16. *[32] (x_n) ve (y_n) bazlarının (temel dizilerinin) denk olması için gerek ve yeter şart her bir $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : [x_n] \to [y_n]$ bir izomorfizmanın mevcut olmasıdır.*

İspat. $X = [x_n]$ ve $Y = [y_n]$ olarak alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : X \to Y$ bir izomorfizma olduğunu kabul edelim. T bir izomorfizma olduğundan bütün $(a(n)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizileri için

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n \right\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır. Bu ise (x_n) ile (y_n) dizilerinin denk olması demektir.

Tersine, (x_n) ve (y_n) dizileri denk olsun. Bu durumda $T : X \to Y$ dönüşümü

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)y_n$$

olacak şekilde tanımlanırsa T dönüşümü bire-bir ve örten olur. $(u_j) \subset X$ olmak üzere X uzayında $u_j \to u$ ve Y uzayında $Tu_j \to v$ olduğunu kabul edelim. Buradan $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j)x_n$ ve $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u)x_n$ olarak yazılırsa (x_n) ve (y_n) ile ilişkili biortogonal fonksiyonların sürekliliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n^*(u_j) \to x_n^*(u) \text{ ve } y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$$

olarak elde edilir. Limitin tekliğinden, her n için $x_n^*(u) = y_n^*(v)$ olur. Buradan $Tu = v$ elde edilir ve böylece Teorem 2.1.22 kapalı grafik teoreminden, T dönüşümü sürekli olur. □

Önerme 3.2.17. *[58] (x_n) ve (y_n) bir Banach uzayında iki temel dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:*

(i) *(x_n) ve (y_n) dizileri denktir,*

(ii) *Bütün $(a(i)) \subset \mathbb{R}$ sonlu dizileri için*

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)y_i\right\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır,

(iii) *$[x_n, n \in \mathbb{N}]$ ve $[y_n, n \in \mathbb{N}]$ izomorfiktirler.*

Tanım 3.2.18. [2] (x_n), X Banach uzayının bir bazı olsun. $r_0 = 0$, (r_n) tam sayıların kesin artan bir dizisi ve $(a(n))$ skalerler olmak üzere,

$$z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlı X uzayındaki sıfırdan farklı (z_n) vektörlerinin dizisine (x_n) bazının bir blok temel dizisi denir.

Lemma 3.2.19. *[32] (x_n), X Banach uzayı için K baz sabitine sahip bir baz ve (z_k), (x_n) bazının bir blok temel dizisi olsun. Bu takdirde (z_k) dizisi K'ya denk ya da K'dan daha küçük bir baz sabiti ile bir temel dizi olur.*

İspat. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j$, (x_n) bazının bir blok temel dizisi olsun. Bu durumda herhangi $(b(n))$ skalerleri ve herhangi $m < n$ tamsayıları için

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} b(k)z_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{m} b(k) \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b(k)a(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{r_m} c(j)x_j\right\|, \text{ burada; } r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k \text{ ise } c(j) = a(j)b(k) \\
&\leq K\left\|\sum_{j=1}^{r_n} c(j)x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n} b(k)z_k\right\|
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani (z_k) dizisi Grunblum kriterini sağlar ve böylece (z_k), en fazla K baz sabitli bir temel dizi olur. □

Tanım 3.2.20. [32] X ve Y Banach uzayları olsun. $(x_n) \subset X$ ve $(y_n) \subset Y$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $T : X \to Y$ terslenebilir dönüşümü varsa bu iki diziye (X, Y)'ye göre kongruenttirler denir. (x_n) ve (y_n) dizileri $X = Y$ özel durumunda yukarıdaki özellikleri sağlarsa bu iki dizi kongruenttir denir.

Teorem 3.2.21. *[32, 2, Küçük Karmaşıklık Prensibi] (x_n), X Banach uzayında K baz sabitine sahip bir temel dizi olsun. $(y_n) \subset X$ dizisi için*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \delta < 1$$

eşitsizliği sağlanırsa (x_n) ve (y_n) dizileri kongruenttir. Ayrıca

(i) (x_n) baz ise (y_n)'de bazdır.

(ii) (y_n) bir temel dizidir.

(iii) $[x_n]$ tamamlayıcı ise $[y_n]$'de tamamlayıcıdır.

İspat. $(x_n^*) \subset [x_n]^*$, (x_n) dizisinin biortogonal fonksiyonelleri olmak üzere her $n \geq 2$ ve herhangi $x \in [x_n]$ için

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_n^*(x)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_n^*(x)x_n$$

ifadesine sahibiz. Buaradn

$$\begin{aligned} \|x_n^*(x)x_n\| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \\ &\leq 2K\|x\| \end{aligned}$$

ve böylece $\|x_n^*\|\|x_n\| \leq 2K$ olur. $n = 1$ için $\|x_1^*\|\|x_1\| \leq K$ olduğu kolayca görülür. x_n^* fonksiyonellerinin yerine Hahn-Banach genişlemesi olan $\widehat{x_n^*}$ fonksiyonelleri alınsa bile, yukarıda elde edilen eşitsizlikler sağlanır. Şimdi, her bir $x \in X$ için

$$A(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n^*}(x)(y_n - x_n)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(x_n) &= x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n^*}(x_n)(y_n - x_n) \\ &= y_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\widehat{x_n^*}\|\|y_n - x_n\| \\ &\leq 1 + 2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} \\ &= 1 + \delta \end{aligned}$$

olduğundan $A : X \to X$, $A(x_n) = y_n$ ile sınırlı bir dönüşümdür. Buradan

$$\begin{aligned} \|A - I\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\widehat{x_n^*}\| \|y_n - x_n\| = \delta \\ &< 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Teorem 2.1.3'dan, $I - (I - A) = A$ dönüşümünün tersi vardır ve

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|A - I\|} \\ &= (1 - \delta)^{-1} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $A(x_n) = y_n$ olacak şekilde $A : X \to X$ terslenebilir dönüşümü elde edilir. Böylece Tanım 3.2.20'den, (x_n) ve (y_n) dizileri kongruenttir. $\square$

Teorem 3.2.22. *[32, Bessaga-Pelczynski Seçme Prensibi] (x_n), X Banach uzayının K baz sabitine sahip bir bazı ve $(x_n^*) \subset X^*$ olsun. $(y_n) \subset X$ dizisi*

(i) $\inf_n \|(y_n)\| > 0$,

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde (x_n) bazının bir (z_k) blok temel dizisine kongruent olan $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ dizisi vardır. Aynı sonuç, (y_n) dizisinin sıfıra zayıf yakınsak; fakat norm yakınsak olmadığı durumda da elde edilir.

İspat. $\alpha = \inf_n \|(y_n)\| > 0$ ve $0 < v < \frac{1}{4}$ olduğunu kabul edelim. (x_n) baz olduğundan

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a(k) x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{m+n} a(k) x_k \right\|$$

eşitsizliği ve $(y_{n_1}) \subset (y_n)$ dizisi için

$$y_{n_1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(y_{n_1}) x_k$$

genişlemesi sağlanır. $n_1 = 1$ ve $r_0 = 0$ olarak seçilsin. Buradan S_m, (x_n) bazının m-inci kısmi toplamı olmak üzere

$$\begin{aligned} \|y_{n_1} - S_{r_1} y_{n_1}\| &= \left\| \sum_{k=r_1+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_1}) x_k \right\| \\ &< \frac{v\alpha}{2K} \end{aligned}$$

olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır. (ii)'den, her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_{r_1} y_n = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{r_1} x_k^*(y_n) x_k \right\| = 0$$

ve bu yüzden

$$\begin{aligned}\|S_{r_1}y_{n_2}\| &= \left\|\sum_{k=1}^{r_1} x_k^*(y_{n_2})x_k\right\| \\ &< \frac{v^2\alpha}{2K}\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan $n_2 > n_1$ vardır. Aynı şekilde, (x_n) dizisi X için bir baz olduğundan (y_{n_2}) dizisi

$$y_{n_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(y_{n_2})x_k$$

genişlemesini sağlar. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\|y_{n_2} - S_{r_2}y_{n_2}\| &= \left\|\sum_{k=r_2+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_2})x_k\right\| \\ &< \frac{v^2\alpha}{2K}\end{aligned}$$

olacak şekilde $r_2 > r_1$ seçilebilir ve $\lim_{n\to\infty} S_{r_2}y_n = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|S_{r_2}y_{n_3}\| &= \left\|\sum_{k=1}^{r_2} x_k^*(y_{n_3})x_k\right\| \\ &< \frac{v^3\alpha}{2K}\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan $n_3 > n_2$ vardır. Böyle devam ederek,

$$\begin{aligned}\|S_{r_{k-1}}y_{n_k}\| &= \left\|\sum_{k=1}^{r_{k-1}} x_k^*(y_{n_k})x_k\right\| \\ &< \frac{v^k\alpha}{2K}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|y_{n_k} - S_{r_k}y_{n_k}\| &= \left\|\sum_{k=r_k+1}^{\infty} x_k^*(y_{n_k})x_k\right\| \\ &< \frac{v^k\alpha}{2K}\end{aligned}$$

olacak şekilde $r_0 = 0$, tam sayıların bir (r_k) dizisi ve $(y_{n_k}) \subset X$ elde edelir. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}z_k &= S_{r_k}y_{n_k} - S_{r_{k-1}}y_{n_k} \\ &= \sum_{k=r_{k-1}+1}^{r_k} x_k^*(y_{n_k})x_k\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. (z_k), (x_n) bazının bir blok temel dizisidir. Böylece Lemma 3.2.19'dan (z_k), K'dan daha küçük bir baz sabiti ile temel dizi olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \alpha = \|y_{n_k}\| &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{r_{k-1}} + \sum_{k=r_{k-1}+1}^{r_k} + \sum_{k=r_k+1}^{\infty} \right) x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| \\ &\leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{r_{k-1}} + \sum_{k=r_k+1}^{\infty} \right) x_k^*(y_{n_k}) x_k \right\| + \|z_k\| \\ &\leq \frac{v^k \alpha}{2K} + \frac{v^k \alpha}{2K} + \|z_k\| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \|z_k\| &> \alpha - \frac{v^k \alpha}{K} \\ &\geq \alpha - \frac{v\alpha}{K} \\ &\geq \alpha(1-v) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|z_k - y_{n_k}\| &\leq \|y_{n_k} - S_{r_k} y_{n_k}\| + \|S_{r_{k-1}} y_{n_k}\| \\ &< \frac{v^k \alpha}{2K} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak bulunur. Buradan (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|z_k - y_{n_k}\|}{\|z_k\|} &< 2(1-v)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \\ &= 2(1-v)^{-1} v \frac{1}{1-v} \\ &= 2v(1-v)^{-2} \\ &< \frac{8}{9} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Teorem 3.2.21'den, (y_{n_k}) dizisi (z_k) dizisine kongruent bir temel dizi olur. v istenildiği kadar küçük alınabileceğinden, (y_{n_k}) dizisinin baz sabitini K'ya yakın olarak alabiliriz. Aynı zamanda, (z_k) dizisi X uzayında tamamlayıcı bir dizi ise (y_{n_k}) dizisi de tamamlayıcıdır. □

3.3 c_0 Uzayını İçeren Banach Uzayları

Bu kısımda, c_0 uzayının kopyasını ya da tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonu verilecektir. Burada, c_0 uzayının standart bazına denk olan temel diziler c_0-dizisi olarak adlandırılacaktır.

Tanım 3.3.1. [59] X ve Y Banach uzayları için, X uzayı Y uzayına izomorfik bir alt uzaya sahipse X, Y nin bir kopyasını içerir denir.

X uzayının Y uzayına izomorfik tamamlayıcı bir altuzayı varsa X uzayı Y uzayının tamamlayıcı bir kopyasını içerir denir.

Sıfıra yakınsak c_0 dizilerin uzayının sınırlı dizilerin ℓ_∞ uzayının tamamlayıcı altuzayı olmadığını göstereceğiz.

Lemma 3.3.2. *[32] Her sayılabilir sonsuz S kümesi, herhangi iki elemanı sonlu kesişime sahip olan sonsuz alt kümelerin sayılamaz bir $\{A_i\}_{i\in I}$ ailesini içerir.*

İspat. S kümesini $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılar kümesi alalım ve $S' = [0,1] \setminus S$ olsun. Her $i \in S'$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q_n \to i, \quad n \to \infty$$

olacak şekilde $(q_n) \subset S$ dizisi vardır. $A_i = \{(q_n) : q_n \to i\}$ şeklindeki kümeler tanımlanırsa, i irrasyonel sayı olduğu için sayılamaz-sonsuz elemanlı ve $i \neq j$ iken $A_i \cap A_j$ sonlu kesişimli olacağından, lemmanın şartlarını sağlar. $\square$

$\mathbb{A}$, doğal sayıların bir alt kümesi olmak üzere,

$$\ell_\infty(\mathbb{A}) = \{x = (x(k)) \in \ell_\infty : k \notin \mathbb{A} \text{ ise x(k) = 0}\}$$

kümesini tanımlayalım. $\ell_\infty(\mathbb{A})$, ℓ_∞ uzayının bir altuzayıdır.

Teorem 3.3.3. *[32] $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dönüşümü her $x \in c_0$ için $Tx = 0$ olacak şekilde sınırlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda, her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için $Tx = 0$ olacak şekilde doğal sayıların sonsuz elemanlı bir $\mathbb{A}$ alt kümesi vardır.*

Teorem 3.3.4. *[32, 60, Phillips-Sobczyk Teoremi] ℓ_∞ uzayından c_0 uzayına sınırlı bir izdüşüm dönüşümü yoktur.*

İspat. $P : \ell_\infty \to c_0$ sınırlı bir izdüşüm dönüşümü olsun. $T = I - P$ dönüşümünü göz önüne alalım. $P : \ell_\infty \to c_0$ sınırlı bir izdüşüm olduğundan her $x \in c_0$ için

$$Px = x \text{ ve } Tx = (I-P)(x) = 0$$

olur. Bu yüzden $T = I - P$ dönüşümüne Teorem 3.3.3'ü uygularsak her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için

$$Tx = (I-P)(x) = 0$$

olacak şekilde doğal sayıların sonsuz bir $\mathbb{A}$ alt kümesi elde ederiz. Buradan her $x \in \ell_\infty(\mathbb{A})$ için

$$Px = x$$

olduğu açıktır. Bu ise bir çelişkidir. $\square$

Şimdi de, c_0 uzayının kopyasını içeren Banach uzayının karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3.3.5. *[35] (x_n) yarı normalize edilmiş bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zayıf şartsız yakınsak bir seri olsun. Bu durumda (x_n) temel dizisi c_0 uzayının birim vektör bazına denktir. Yani $[x_n]$ uzayı c_0 uzayına izomorfiktir.*

Teorem 3.3.6. *[6, 61, Bessaga-Pelczynski Teoremi] X bir Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) X uzayında şartsız yakınsak olamayan bir zayıf şartsız Cauchy seri vardır,

(ii) $\inf_n \|x_n\| > 0$ olacak şekilde X uzayında bir zayıf şartsız Cauchy $\sum_n x_n$ serisi vardır,

(iii) X uzayı c_0 uzayına izomorfik olan bir altuzayı içerir.

Son olarak, c_0 uzayının tamamlayıcı kopyasını içeren Banach uzaylarının karakterizasyonunu verelim. Öncelikle Sobczyk teoreminde (Teorem 3.3.9) kullanılacak olan aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Önerme 3.3.7. *[62] Bir X Banach uzayından c_0 uzayına olan sınırlı-lineer dönüşümler, X^* uzayında sıfıra zayıf* yakınsak olan dizilere karşılık gelir. Yani $T : X \to c_0$ sürekli ve lineer bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $T(x) = (x_n^*(x))$ ve $x_n^* \to 0$ zayıf* yakınsak olacak şekilde $(x_n^*) \subseteq X^*$ dizisinin bulunmasıdır.*

Lemma 3.3.8. *[32] X bir Banach uzayı olsun.*

(i) X ayrılabilir ise B_{X^*} zayıf topolojiye göre metriklenebilirdir.*

(ii) $(x_n^*) \subset X^*$, X için ayıran bir dizi olsun, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n^*(x) = 0$ iken $x = 0$'dır. Bu takdirde X uzayının her zayıf kompakt alt kümesi zayıf topolojiye göre metriklenebilirdir.

Teorem 3.3.9. *[32, 60, Sobczyk Teoremi] X ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. E uzayı X'in kapalı bir altuzayı ve $T : E \to c_0$ sınırlı bir dönüşüm ise $\widehat{T}|_E = T$ ve $\|\widehat{T}\| \leq 2\|T\|$ olacak şekilde $\widehat{T} : X \to c_0$ dönüşümü vardır.*

Sonuç 3.3.10. *[32] E, X ayrılabilir Banach uzayının kapalı lineer bir altuzayı olsun. Bu takdirde E uzayı c_0 uzayına izomorfik ise X uzayından E uzayına bir P izdüşüm dönüşümü vardır.*

İspat. $T : E \to c_0$ bir izomorfizma olsun. Sobczyk teoreminden (Teorem 3.3.9), T dönüşümünün

$$\widehat{T}|_E = T \text{ ve } \|\widehat{T}\| \leq 2\|T\|$$

olacak şekilde bir $\widehat{T} : X \to c_0$ genişlemesi vardır. Buradan

$$P = T^{-1} \circ \widehat{T}$$

dönüşümünün X uzayından E uzayına bir izdüşüm ve $\|P\| \leq 2$ olduğu kolayca görülür. □

Önerme 3.3.11. *[59] (x_n) dizisi X uzayında bir c_0-dizisi olsun. (x_n) dizisinin tamamlayıcı dizi olması için gerek ve yeter*

$$x_n^*(x_m) = \delta(n, m)$$

şartını sağlayan bir $(x_n') \subset X^*$ zayıf sıfır dizisinin bulunmasıdır.*

Tamamlayıcı c_0 dizilerini bulmak için kullanılacak temel kriter aşağıdaki teorem olacaktır.

Teorem 3.3.12. *[59] $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X Banach uzayında zayıf şartsız yakınsak bir seri olsun. (x_n) dizisinin tamamlayıcı bir c_0-alt dizisine (temel diziye) sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$x_n^*(x_n) \nrightarrow 0$$

şartını sağlayan bir $(x_n') \subset X^*$ zayıf sıfır dizisinin bulunmasıdır.*

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X Banach uzayında zayıf şartsız yakınsak bir seri ve $(x_n^*) \subset X^*$

$$x_n^*(x_n) \nrightarrow 0$$

olacak şekilde bir zayıf* sıfır dizi olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n^*(x_n)| > \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut olduğunu kabul edelim. Buradan T dönüşümünü, Önerme 3.3.7'deki gibi (x_n^*) ile ilişkili sınırlı-lineer bir dönüşüm olarak alalım. Bu durumda T dönüşümü her $x \in X$ için

$$T : X \to c_0, \quad T(x) = (x_n^*(x))$$

şeklinde tanımlanabilir.

Şimdi, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ serilerinin Teorem 3.3.5'in şartlarını sağladığını göstereceğiz. İlk olarak, (x_n) dizisini göz önüne alalım. Teoremin ifadesinden, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olduğu görülür. Diğer taraftan, T dönüşümünün sınırlılığından, $\|Tx\| \leq C.\|x\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır. Kabulden,

$$0 < \delta < \|Tx_n\| \leq C.\|x_n\|$$

olduğundan her $n \in \mathbf{N}$ için

$$0 < \frac{\delta}{C} = \beta < \|x_n\|$$

olarak elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin yarı normalize edilmiş olması demektir. Şimdi de, $T(x_n)$ dizisini göz önüne alırsak, $|x_n^*(x_n)| = |T(x_n)| > \delta$ olduğundan $T(x_n)$ dizisi yarı normalize edilmiş olur. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zayıf şartsız Cauchy seri olduğundan her $y^* \in c_0^* = l_1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |y^*(Tx_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |T^* y^*(x_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \\ &< \infty \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (x_n) ve $T(x_n)$ dizilerinin her ikisinin de c_0-dizisi olduğunu kabul edebiliriz. $T(x_n) = (y_n)$ olarak alalım. F, (x_n) dizisinin kapalı-lineer gereni ve G de, (y_n) dizisinin kapalı-lineer gereni ise

$$T|_F : F \to G, \quad T(x_n) = (y_n)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir izomorfizma olur. Sonuç 3.3.10'dan, (y_n) dizilerinin kapalı lineer spanı olan G uzayı c_0 uzayında tamamlayıcı olur. $P : c_0 \to G$ bir izdüşüm olsun. Bu durumda

$$(T|_F)^{-1} \circ P \circ T : X \to F$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir izdüşümdür. Sonuç olarak (x_n) dizisi, X Banach uzayında c_0 uzayının birim vektör bazına denk olan tamamlayıcı bir dizi olur. Böylece ispat tamamlanır.

$\square$

4. Ces_0 UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Ces_0 uzayı inşa edilecek ve bazı özellikleri incelenecektir. Bir Banach uzayının Ces_0 uzayının kopyasını içermesinin gerek ve yeter şartı verilecektir.

4.1 Ces_0 uzayı

Cesaro ortalaması sıfıra yakınsak olan dizilerin kümesini

$$Ces_0 = \left\{ x = (x(k)) \in w : \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) \right) \text{ dizisi sıfıra yakınsak} \right\}$$

ile temsil edelim.

Teorem 4.1.1. *Ces_0 kümesi dizilerde koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir vektör uzayı teşkil edip,*

$$\|x\|_{Ces_0} = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) \right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. Ces_0'nin vektör uzayı olduğunu göstermek için " Her $x = (x(i)), y = (y(i)) \in Ces_0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için $\alpha x + \beta y \in Ces_0$ olduğunu gösterelim.

$x = (x(i)), y = (y(i)) \in Ces_0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha x(j) + \beta y(j)) \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha x(j) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta y(j) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x(j) + \beta \lim_{n\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{j=1}^{n} y(j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunduğundan $\alpha x + \beta y \in Ces_0$ olur, bu ise Ces_0 kümesinin w uzayının bir alt dizisi olduğunu gösterir.

$\|.\|_{Ces_0} : Ces_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir norm olduğunu gösterelim.

$x = (x(i)) \in Ces_0$ alalım. Bu durumda, verilen $\varepsilon > 0$ sayısına bağlı $n > n_\varepsilon$ iken

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x(j) \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır.

$$m = maks\{|x(1)|, \frac{1}{2}(|x(1) + x(2)|), \frac{1}{3}(|x(1) + x(2) + x(3)|), ..., \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} x(j) \right|, \varepsilon\}$$

alınırsa, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x(j) \right| \leq m$$

olur ki, bu $\|x\|_{Ces_0} = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x(j) \right| < \infty$, yani sınırlı olur.

(i) $\|x\|_{Ces_0} = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j) = 0$ olur. Öyle ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x(n) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j)\right) - (n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x(j)\right) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olacağından $x = 0$ bulunur.

$\|0\|_{Ces_0} = 0$ olduğu açıktır.

(ii) $\alpha \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{Ces_0} &= \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha x(j)\right| \\ &= |\alpha| \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j)\right| \\ &= |\alpha| \|x\|_{Ces_0} \end{aligned}$$

olur.

(iii) $x = (x(i)), y = (y(i)) \in Ces_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{Ces_0} &= \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x(j)+y(j))\right| \\ &\leq \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j)\right| + \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y(j)\right| \\ &= \|x\|_{Ces_0} + \|y\|_{Ces_0} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(i)-(iii) şartları sağlandığından, $(Ces_0, \|.\|_{Ces_0})$ bir normlu uzaydır.

$(Ces_0, \|.\|_{Ces_0})$ uzayının tamlığını göstermek için $(Ces_0, \|.\|_{Ces_0})$ uzayında bir (x_n) Cauchy dizisi gözönüne alalım. Bu durumda, verilen $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_{Ces_0} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. (x_l) noktasının k-ıncı bileşenini $(x_l(k))$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ ve $n, m > n_\varepsilon$ olduğunda

$$\begin{aligned} |x_n(k) - x_m(k)| &= \left|k\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(x_n(j) - x_m(j))\Big) - (k-1)\Big(\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_n(j) - x_m(j))\right| \\ &\leq 2\|x_n - x_m\|_{Ces_0} \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğin sağlayan bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan, herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için $(x_n(k))$ skalerler dizisi bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{K}$ tam olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \to x(k)$ olacak biçimde $x(k)$ sayıları vardır. $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\sup_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (x_n(j) - x_m(j)) \right| < \varepsilon$$

olduğundan, $n, m > n_\varepsilon$ ve herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (x_n(j) - x_m(j)) \right| < \varepsilon$$

olarak elde edilir. Burada, $n \to \infty$ için limite geçilirse, $\varepsilon > 0$, $m > n_\varepsilon$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (x(j) - x_m(j)) \right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Şu halde, $x_m \to x$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \|(x(j))\|_{Ces_0} &= \sup_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x(j) \right| \\ &\leq \sup_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x(j) - x_m(j) \right| + \sup_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x_m(j) \right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x(j) \right| &= \lim_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x(j) - x_m(j) \right| + \lim_i \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x_m(j) \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x \in Ces_0$ ve böylece $(Ces_0, \|.\|_{Ces_0})$ uzayı tamdır. □

4.2 Ces_0 Uzayının Bazı Özellikleri

Teorem 4.2.1. *Ces_0 uzayı c_0 uzayına izomorftur.*

İspat. $T : Ces_0 \to c_0$, $Tx = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} x(k) \right)$ dönüşümü gözönüne alınırsa, T dönüşümü birebir, örten ve sınırlı olduğu hemen görülür. Açık dönüşüm teoreminden T^{-1} mevcut ve sürekli olup, $\|Tx\|_{c_0} = \|x\|_{Ces_0}$ olduğundan, Ces_0 uzayı ile c_0 uzayı izometrik izomorftur. □

Teorem 4.2.2. *Ces_0 uzayının f-duali h uzayıdır.*

İspat. Ces_0 uzayı ile c_0 uzayı izometrik izomorf ve $Ces_0 = (c_0)_{C_1}$ olduğundan, Teorem 2.2.5'den her $f \in Ces_0^*$ fonsiyoneli için

$$f(x) = g(C_1 x)$$

eşitliğini sağlayan bir $g \in c_0^* \cong \ell_1$ fonksiyoneli mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} f(e_k) &= g(C_1 e_k) \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i} a(i) \ (a = (a(k)) \in \ell_1) \end{aligned}$$

eşitliğ elde edilir. $u(k) = f(e_k)$ alınırsa

$$\begin{aligned} u(1) &= f(e_1) \\ &= a(1) + \frac{1}{2}a(2) + \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \cdots \\ u(2) &= f(e_2) \\ &= \frac{1}{2}a(2) + \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \frac{1}{5}a(5) + \cdots \\ u(3) &= f(e_3) \\ &= \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \frac{1}{5}a(5) + \frac{1}{6}a(6) + \cdots \\ u(4) &= f(e_4) \\ &= \frac{1}{4}a(4) + \frac{1}{5}a(5) + \frac{1}{6}a(6) + \frac{1}{7}a(7) + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a(1) &= u(1) - u(2) \\ a(2) &= 2[u(2) - u(3)] \\ a(3) &= 3[u(3) - u(4)] \\ a(4) &= 4[u(4) - u(5)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. $a = (a(k)) \in \ell_1$ olduğundan

$$\lim_n u(n) = 0 \text{ ve } \sum_k k|u(k) - u(k+1)| < \infty$$

elde edilir. Buna göre, Ces_0 uzayının f duali,

$$\begin{aligned} Ces_0^f &= \{u = (u(k)) : u(k) = f(e_k), f \in Ces_0^*\} \\ &= \{u = (u(k)) : \sum_k k|u(k) - u(k+1)| < \infty \text{ ve } \lim_n u(n) = 0\} \\ &= h \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.2.3. *Ces_0 uzayı c_0 uzayını içerir.*

İspat. $x=(x(k))\in c_0$ alalım. Bu durumda verilen $\varepsilon>0$ için bir $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ bulunabilir ki $n>n_\varepsilon$ olduğunda $|x(n)|<\varepsilon$ olur. $n>n_\varepsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(k)\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}x(k)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}x(k)\right|\\ &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}x(k)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\varepsilon\right|\\ &\leq \frac{1}{n}\left(\|x\|+(n-n_0)\varepsilon\right)\end{aligned}$$

olup, $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(k)=0$$

bulunur ki bu $x=(x(k))$ elemanın Ces_0 uzayında bulunduğunu gösterir. c_0 uzayındaki her eleman bakımından yukarıdaki tartışma geçerli olacağından

$$c_0\subset Ces_0$$

kapsaması geçerlidir.

Diğer taraftan, $x=((-1)^n)$ dizisi Ces_0 uzayında bulunduğu halde c_0 uzayında bulunmadığından $c_0\subset Ces_0$ kapsaması kesindir. □

Teorem 4.2.4. *Ces_0 uzayı ile ℓ_∞ uzayları birbirini kapsamazlar.*

İspat. Bunun için $Ces_0\setminus\ell_\infty\neq\emptyset$ ve $\ell_\infty\setminus Ces_0\neq\emptyset$ olduğunu gösterelim.

$a=(a(k))$ dizisini

$$a(k)=\begin{cases}\sqrt[3]{k} & ,\quad k=t^3, t=1,2,3,4,...\\ 0 & ,\quad \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a(k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{t}k\\ &= \frac{t(t+1)}{2n}, t^3\leq n<(t+1)^3\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a(k)=0$$

bulunur. Buradan $a\in Ces_0$ olduğu anlaşılır. Diğer taraftan,

$$\sup_k|a(k)|=\infty$$

olduğundan $a \notin \ell_\infty$ olup, $a \in Ces_0 \setminus \ell_\infty$ dolayısıyla

$$Ces_0 \setminus \ell_\infty \neq \emptyset$$

bulunur.

$e = (1,1,1,...) \in \ell_\infty$ dizisini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(k) = 1$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(k) = 1$$

bulunur. Bu $e \notin Ces_0$ olduğunu gösterir. Şu halde

$$\ell_\infty \setminus Ces_0 \neq \emptyset$$

olduğu görülür.

□

Teorem 4.2.5. *Ces_0 uzayı AD özelliğine sahiptir.*

İspat. $e_i = (0,0,0,...,0,1,0,...) \in \phi$ elemanı için $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_i(j)) = (0,0,0,...0,1/n,1/(n+1),1/(n+2),...)$ olup,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_i(j) = 0$$

bulunur. Bu ise $e_i \in Ces_0$ olduğunu gösterir. Her $i \in \mathbb{N}$ için $e_i \in Ces_0$ ve Ces_0 bir vektör uzayı olduğundan $span\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = \phi \subset Ces_0$ elde edilir. Ces_0 uzayının sürekli dualindeki her f fonksiyoneli, $g \in c_0^*$ olmak üzere $f(x) = g(C_1 x)$ şeklindedir [38]. c_0^* uzayı ℓ_1 uzayına izomorf olduğundan, g fonksiyoneline karşılık gelen vektör $a = (a(k)) \in \ell_1$ ise

$$\begin{aligned} f(e_i) &= g(C_1 e_i) \\ &= \sum_k a(k)(C_1 e_i)_k \\ &= C_1^t a \end{aligned}$$

olur. Burada C_1^t, Cesaro matrisinin transpozudur. $C_1^t a = 0$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a(1) + \frac{1}{2}a(2) + \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \cdots &= 0 \\ \frac{1}{2}a(2) + \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \cdots &= 0 \\ \frac{1}{3}a(3) + \frac{1}{4}a(4) + \cdots &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden $a = 0$ bulunur. Buradan, $f \in Ces_0^*$ için $f(\phi) = 0$ olması f fonksiyonelinin sıfır olmasını gerektirdiğinden, Hahn-Banach Teoremi sonuçlarından Sonuç 2.1.17 gereği, ϕ, Ces_0 uzayında yoğundur. Buna göre Ces_0 uzayı AD özelliğine sahiptir. □

Ces_0 uzayı AD özelliğine sahip olduğundan, Teorem 2.2.13'dan,

Teorem 4.2.6. *Ces_0 uzayının sürekli duali h uzayına izomorftur.*

Teorem 4.2.7. *Ces_0 uzayı yansımalı değildir.*

İspat. Teorem 4.2.6'den $Ces_0^* = h$ ve Teorem 2.2.19'den $h^* = Ces_\infty$ oluduğundan, $Ces_0^{**} \neq Ces_0$ olur. Yansımalı uzay tanımı dikkate alınırsa, Ces_0 uzayının yansımalı olmadığı görülür. □

Teorem 4.2.8. *Ces_0 uzayı,*

$$\begin{aligned} \cdot : Ces_0 \times Ces_0 &\to Ces_0 \\ (x,y) &\to xy = (x(k)y(k)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı (dizilerin koordinatsal) çarpım ile bir Banach cebiri teşkil etmez.

İspat. Bunun için $x = (x(k)), y = (y(k)) \in Ces_0$ için $xy = (x(k)y(k)) \notin Ces_0$ olduğunu gösteren x, y elemanların varlığını gösterelim.

$x = (x(k)) = ((-1)^k)$ ve $y = (y(k)) = ((-1)^{k+1})$ şeklinde alırsak, $x, y \in Ces_0$ olup, $xy = (-1, -1, -1, ...) \notin Ces_0$ bulunur. □

Teorem 4.2.9. *Ces_0 uzayı solid uzay değildir.*

İspat. Bunun için

$$A = \{z = (z(k)) : \exists b = (b(k)) \in Ces_0, \forall k \in \mathbb{N}, |z(k)| \leq |b(k)|\}$$

dizi kümesinin Ces_0 uzayının bir alt kümesi olmadığını gösterelim.

$z = (1, 1, 1, 1, ...)$ dizisi için $b = ((-1)^k) \in Ces_0$ elemanını gözönüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|z(k)| = |b(k)|$ eşitliği geçerli olduğundan $z = (z(k)) \in A$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z(k) = 1$ olduğundan z elemanı Ces_0 uzayının elemanı değildir.Buna göre $A \not\subset Ces_0$ bulunacağından, Ces_0 uzayı solid uzay değildir. □

Ces_0 uzayı c_0 dizi uzayına izomorf ve c_0 uzayının bir bazı bulunduğundan, Ces_0 uzayı da baz cümlesine sahiptır. Ces_0 ile c_0 uzayını izomorf yapan T dönüşümünden ve c_0 uzayının bazından faydalanarak, Ces_0 uzayının bir baz cümlesini bulabiriz. c_0 uzayının $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ standart baz kümesinin T dönüşümüne göre ters görüntüsü olan $\{T^{-1}(e_k) : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi Ces_0 uzayı için baz olacağından;

Teorem 4.2.10.

$$b_n(k) = \begin{cases} n & , \quad k = n \\ -n & , \quad k = n+1 \qquad (n, k = 1, 2, \ldots) \\ 0 & , \quad \textit{diğerleri} \end{cases}$$

olmak üzere, $\{b_n\} \subset Ces_0$ *kümesi* Ces_0 *uzayı için bir Schauder bazıdır.*

Teorem 4.2.11. Ces_0 *uzayı bir AB uzaydır.*

İspat. Sonuç 2.2.18 den $X = c_0$ alınırsa, $(c_0)_{C_1} = Ces_0$ bulunacağından, Ces_0 uzayı AB özelliğine sahiptir. □

Teorem 4.2.12. Ces_0 *uzayı bir AK uzaydır.*

İspat. AK uzay olma ile ilgili Teorem 2.2.8, Ces_0 uzayının AD olduğunu gösteren Teorem 4.2.5 ve AB olduğunu ifade eden Teorem 4.2.11 dikkate alınırsa, Ces_0 uzayının AK uzay olduğu görülür. □

Teorem 4.2.13. Ces_0 *uzayının* β*- ve* γ*-duali* h *uzayıdır.*

İspat. Ces_0 uzayı ϕ uzayını içeren bir BK dizi uzayı olduğundan, Teorem 2.2.13 (i)'den

$$Ces_0^\beta \subset Ces_0^\gamma \subset Ces_0^f$$

kapsaması geçerlidir. Teorem 4.2.12 dan, Ces_0 uzayı AK özelliğine sahip olduğundan, Teorem 2.2.13 (ii)'den

$$Ces_0^\beta = Ces_0^f$$

eşitliğine ulaşılır. Teorem 4.2.2'den

$$Ces_0^f = h$$

bulunduğundan

$$Ces_0^\beta = Ces_0^\gamma = h$$

elde edilir. □

5. Ces_0 UZAYI VE ŞARTSIZ YAKINSAK SERİLER

Bu kısımda, Ces_0 uzayı üzerinde tanımlanmış sınırlı lineer dönüşüm ve kompakt dönüşümlerin karakterizasyonunu zayıf şartsız Cauchy ve şartsız yakınsak serilerle verilecektir. Daha sonra, Ces_0 ın sonsuz boyutlu bir altuzayının kendisine izomorfik ve Ces_0 uzayında tamamlayıcı olduğu gösterilecektir.

5.1 Ces_0 Uzayının Baz Cümlesi ve Bazı Operatörler

Teorem 5.1.1. *$\sum_n b_n$, Ces_0 uzayında şartsız yakınsak olmayan fakat zayıf şartsız bir Cauchy seridir.*

İspat. $\sum_n b_n$ serisi genel terimi olan b_n için,

$$\|b_n\|_{Ces_0} = 1$$

olduğundan, serinin genel terimi sıfıra yakınsamaz. Dolayısıyla, $\sum_n b_n$ serisi yakınsak değildir ve böylece şartsız yakınsak olamaz. Diğer taraftan, her $x^* \in Ces_0^*$ için

$$x^*(x) = y^*(C_1 x)$$

eşitliğini sağlayan en az bir $y^* \in c_0^*$ var olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_j |x^*(b_j)| &= \sum_j |y^*(C_1 b_j)| \\ &\leq \sum_j |y^*(e_j)| \end{aligned}$$

ve $\sum_j e_j$ serisi c_0 uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olduğundan yukarıdaki toplam sonlu olur. Bu yüzden $\sum_n b_n$ zayıf şartsız Cauchy seridir. □

Teorem 5.1.2. *X Banach uzayı ve $T : Ces_0 \to X$ lineer bir dönüşüm ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olsun. T dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\sum_n x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy bulunmasıdır.*

İspat. $T \in B(Ces_0, X)$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(Tb_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |T^* x^*(b_n)| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada T^*, T dönüşümünün adjoint dönüşümü olup, $T^* x^* \in Ces_0^*$ ve (b_n) dizisi Ces_0 uzayında bir zayıf şartsız Cauchy seri teşkil ettiğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$$

bulunur. Her $x^* \in X^*$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$ olduğundan, $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy serisidir.

Tersine, $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy olsun.

$\phi = span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$\widehat{T} : \phi \to X, \quad \widehat{T}\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k$$

dönüşümünü gözönüne alalım. Her $\alpha = (\alpha(i)) \in \phi$ için $\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) \in c_0$ ve $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \in X$ olup, bu ise $\widehat{T}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \in X : \ \alpha = \alpha(i) \in \phi, \ \|\alpha\|_\infty \le 1 \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Her $x^* \in X^*$ için

$$\begin{aligned} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| &\le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x^*(x_k) \right| \\ &\le \sup_k \left| \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) \right| \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| \end{aligned}$$

olur. Buradan $\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy serisi olduğundan

$$\left| x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| \le M. \sup_k \left| \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) \right|$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sayısı vardır. Buradan S kümesinin zayıf sınırlı olduğu ve Teorem 2.1.26 gereği norm sınırlı olduğu görülür. Teorem 4.2.5'den dolayı Ces_0 uzayı AD özellikli olduğundan T dönüşümü

$$T : Ces_0 \to X$$

sınırlı lineer dönüşümüne genişletilebilir. Diğer taraftan, her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$Tb_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} b_j(i) \right) x_k = x_j$$

olur. □

Teorem 5.1.3. *$\sum_k x_k$, X Banach uzayında bir zayıf şartsız Cauchy serisi olsun. $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere, $T : Ces_0 \to X$ dönüşümünün kompakt olmasıdır.*

İspat. $\sum_n x_n$ şartsız yakınsak bir seri ve S_n, b_k bazı ile ilişkili kısmi toplam izdüşümü olsun. T dönüşümünün kompakt olması için

$$\lim_{n\to\infty} \|T - TS_n\| = 0 \tag{5.1}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, şartsız yakınsak serilerin özelliğinden (Teorem 3.1.13), K; $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin sonlu bir altkümesi olmak üzere

$$\left\| \sum_{k\in K} x_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n = n_\varepsilon$ sayısını bulabiliriz. Şimdi, $x^* \in B_{X^*}$ için $Re\, x^*(x_k)$ kısmını göz önüne alalım. $n > m > n_\varepsilon$ olacak şekilde seçelim ve aynı zamanda

$$K^+ = \{m \leq k \leq n : x^*(x_k) \geq 0\}$$

ve

$$K^- = \{m \leq k \leq n : x^*(x_k) < 0\}$$

kümelerini oluşturalım. Buradan $\|x^*\| \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k\in K} |x^*(x_k)| &= \left| x^* \left(\sum_{k\in K^+} x_k \right) \right| + \left| x^* \left(\sum_{k\in K^-} x_k \right) \right| \\ &\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left| x^* \left(\sum_{k\in K^+} x_k \right) \right| + \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left| x^* \left(\sum_{k\in K^-} x_k \right) \right| \\ &= \left\| \sum_{k\in K^+} x_k \right\| + \left\| \sum_{k\in K^-} x_k \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\alpha = (\alpha(n)) \in B_\phi$ ise her $x^* \in X^*$ ve $n \geq m$ için

$$\begin{aligned} |x^*(T\alpha - TS_m(\alpha))| &= \left| x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| \\ &= \left| x^* \left(\sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) x_k \right) \right| \\ &\leq \sup_k \left| \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right) \right| \sum_{k=m+1}^{n} |x^*(x_k)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Ces_0 AD-uzay özelliğine sahip olduğundan $T : Ces_0 \to X$ genişletilebilir ve böylece

$$\begin{aligned} \|T - TS_m\| &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(T - TS_m)\alpha)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (5.1)'deki ifade sağlanır.

T dönüşümün kompakt olduğunu kabul edelim. Buradan

$$T^{**} : Ces_0^{**} \to X \subset X^{**}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T^{**} dönüşümünün $B_{Ces_0^{**}}$ kümesine kısıtlanışı zayıf*-norm süreklidir. Bu yüzden her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\pi(n)}$ serisi $Ces_0^{**} = Ces_\infty$ uzayında zayıf* yakınsak olduğundan her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi X uzayında yakınsak olur. Bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin X uzayında şartsız yakınsak olması demektir. □

Teorem 5.1.4. *Ces_0 uzayında normalleştirilmiş bir (z_k) blok temel dizisi, (b_k) bazı ile izomorfiktir ve $[z_k]$ uzayı Ces_0 uzayının tamamlayıcı bir altuzayıdır.*

İspat. (z_k) blok dizisini

$$z_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \alpha(j) b_j, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots$ pozitif tam sayılar ve $(\alpha(j))$ $(j \in \mathbb{N})$ skalerler olmak üzere,

$$\|z_k\|_{Ces_0} = \sup_{r_{k-1}+1 \leq i \leq r_k} |\alpha(i)| = 1$$

olsun. İlk olarak (z_k) ile (b_k) dizilerinin izomorfik olduğunu gösterelim. Herhangi bir $c(1), c(2), \ldots, c(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ skalerleri için

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) z_k \right\|_{Ces_0} &= \left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \alpha(i) b_i \right\|_{Ces_0} \\
&= \sup_{1 \leq k \leq m} |c(k)| \sup_{r_{k-1}+1 \leq i \leq r_k} |\alpha(i)| \\
&= \sup_{1 \leq k \leq m} |c(k)| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{m} c(k) b_k \right\|_{Ces_0}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (z_k) ile (b_k) dizileri izomorfik olur. Şimdi $[z_k]$ nın cs uzayında tamamlayıcı olduğunu göstermek için $P : Ces_0 \to [z_k]$ dönüşümünü inşa edelim ve sınırlı-lineer bir izdüşüm dönüşümü olduğunu gösterelim. (b_k) dizisine biortogonal olan fonksiyonelleri,

$$b_m^* = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} e_i \right), \quad (i \in \mathbb{N})$$

olduğundan,

$$b_n^*(b_m) = \begin{cases} 1 & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n \neq m \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

olur. Şimdi,

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) \alpha(j) = 1$$

olacak şekilde $(c(j))$ $(r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k)$ skalerlerini seçelim. Buradan

$$z_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) b_j^*$$

olarak alırsak

$$\begin{aligned}
\|z_k^*\|_h &= \left\| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) b_j^* \right\| \\
&= \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
z_m^*(z_k) &= \sum_{i=r_{m-1}+1}^{r_m} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(i)\alpha(j) b_i^*(b_j) \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad m = k \\ 0 & , \quad m \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu yüzden (z_k^*) ile (z_k) dizileri biortogonal olur. Böylece P izdüşüm dönüşümünü,

$$P(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha) z_k$$

şeklinde tanımlayabiliriz. P dönüşümünün lineerliği açıktır. Diğer taraftan her bir $\alpha = (\alpha(n)) \in \phi$ için

$$\begin{aligned}
\|P(\alpha)\|_{Ces_0} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha) z_k \right\|_{Ces_0} \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(\alpha) b_k \right\|_{Ces_0} \\
&= \sup_{1 \leq k \leq n} |z_k^*(\alpha)| \\
&= \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) b_j^*(\alpha) \right| \\
&= \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} c(j) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right| \\
&\leq \sup_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |c(j)| \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \right| \\
&= \|\alpha\|_{Ces_0}
\end{aligned}$$

olacağından P dönüşümü sınırlı olur ve böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.5. *Y, Ces_0 uzayının herhangi sonsuz boyutlu kapalı bir altuzayı olmak üzere, Ces_0 uzayına izomorfik ve Ces_0 uzayında tamamlayıcı olan Y'nin kapalı bir Y_0 altuzayı vardır.*

İspat. Y uzayı sonsuz boyutlu olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|y_n\| = 1$ olmak üzere $1 \leq k \leq n$ için

$$b_k^*(y_n) = 0$$

olacak şekilde $(y_n) \subset Y$ dizisi vardır. Eğer bu ifade sağlanmazsa, bazı $k \leq n$ indisleri için $b_k^*(y_n) \neq 0$ olur. Buradan

$$S_M : Ces_0 \to Y, \quad S_M\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)b_n\right) = \sum_{n=1}^{M} \alpha(n)b_n$$

kısmi toplam izdüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer ve süreklidir. Buradan $y \neq 0$ olacak şekilde $y \in Y$ dizisini alırsak bazı $k \leq n$ indisleri için

$$b_k^*(y_n) \neq 0$$

olduğundan en az bir $M \in \mathbb{N}$ için $S_M(y) \neq 0$ olur. Bu yüzden S_M dönüşümü $1-1$ ve böylece açık dönüşüm teoreminden izomorfizma olur. Fakat, Y uzayı sonsuz boyutlu olduğundan bu imkansızdır. Bessaga-Pelczynski seçme prensibinden, (b_n) bazının (z_k) blok temel dizisine izomorfik olan $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ altdizisi vardır. Teorem 5.1.4'den, (z_k) ile (b_n) izomorfik ve $[z_k]$, Ces_0 uzayında tamamlayıcı olduğundan Küçük Karmaşıklık Prensibi göz önüne alınırsa, (y_{n_k}) bir temel dizi, (y_{n_k}) ile (b_n) izomorfik ve $Z = [y_{n_k}]$, Ces_0 uzayının tamamlayıcı altuzayı olur. □

Teorem 5.1.6. *$T : Ces_0 \to X$ sınırlı lineer bir dönüşüm ise aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) *T kompakttır,*

(ii) *T zayıf kompakttır,*

(iii) *T kesin singülerdir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. Açık bir şekilde görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. T'nin kesin singüler bir dönüşüm olmadığını kabul edelim. Bu durumda Ces_0 uzayının

$$T : Y \to T(Y)$$

örten bir izomorfizma olacak şekilde sonsuz boyutlu kapalı bir Y altuzayı vardır. Buradan T zayıf kompakt ve T^{-1} sınırlı olduğundan

$$TT^{-1} = I$$

birim dönüşümü zayıf kompakt olur. B_Y zayıf kompakt ve böylece Y uzayı yansımalı (refleksif) olur. Fakat Y, Ces_0 nin kapalı bir altuzayı ve Teorem 4.2.7'den Ces_0 yansımalı uzay olmadığından, Teorem 5.1.5 kullanılırsa bu bir çelişkidir.

$(iii) \Rightarrow (i)$. T kompakt olmasın. Teorem 5.1.3'den, $\sum_n Tb_n$ serisi şartsız yakınsak olmaz ve böylece Teorem 3.1.13'den, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{k\in F_n} Tb_k \right\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve tam sayıların ayrık sonlu altkümelerinin bir F_n dizisi vardır. $x_n = \sum_{k\in F_n} Tb_k$ olarak alalım ve (x_n) ile (b_n) dizilerinin izomorfik olduğunu gösterelim. $\sum_{k\in F_n} b_k$, Ces_0 uzayında sıfıra zayıf yakınsak olduğundan (x_n) dizisi de X uzayında sıfıra zayıf yakınsak olur. Böylece

$$\|x_n\| \geq \varepsilon \text{ ve } x_n \to 0$$

zayıf yakınsak olduğundan Bessaga-Pelczynski seçme prensibinin şartları sağlanır. (x_n) dizisinin K baz sabitine sahip bir temel dizi olduğunu farzedelim. Buradan $\alpha = (\alpha(n)) \in \phi$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) \sum_{k\in F_n} Tb_k \right\| \\
&\leq \|T\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha(n)| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in F_n} b_k \right\|_{Ces_0} \\
&= \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) b_n \right\|
\end{aligned}$$

ve diğer taraftan,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) b_n \right\| \leq 2K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) x_n \right\|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu yüzden (x_n) dizisi Ces_0 uzayının (b_n) bazına denk ve böylece $(\sum_{k\in F_n} b_k)$ ile denk olur. Yani T dönüşümü kesin singüler olamaz. Bu ise ispatı tamamlar. □

Şimdi, yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan faydalanarak bu bölümün temel teoremini vereceğiz.

Teorem 5.1.7. *X Banach uzayındaki her zayıf şartsız Cauchy serinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart X'in Ces_0 uzayının kopyasını içermemesidir.*

İspat. X uzayı Ces_0 uzayının kopyasını içermesin ve $\sum_n x_n$, X uzayında zayıf şartsız Cauchy seri olsun. Teorem 5.1.2'den, her $n \in \mathbb{N}$ için $Tb_n = x_n$ olmak üzere,

$$T : Ces_0 \to X$$

sınırlı lineer bir dönüşüm vardır. Diğer taraftan, X'in Ces_0 uzayının kopyasını içermemesi demek, X uzayının Ces_0 uzayına izomorfik hiç bir altuzayının olmaması demektir. Teorem 5.1.5 göz önüne alınırsa, Ces_0 uzayının her sonsuz boyutlu altuzayı Ces_0 uzayının bir kopyasını içerdiğinden, T kesin singüler bir dönüşüm olmalıdır. Buradan Teorem 5.1.6'i kullanırsak, T dönüşümü kompakt olur ve böylece Teorem 5.1.3'den, $\sum_n x_n$ şartsız yakınsak bir seri olur.

$\sum_n b_n$ serisi Ces_0 uzayında zayıf şartsız Cauchy; fakat şartsız yakınsak olmadığından teoremin tersi kolayca elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] **Banach, S.** (1932) *Théorie des Opérations Linéaires*, No. 1 in Monografje Matematyczne, Warszava-Lwów.

[2] **Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L.** (1977). *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin.

[3] **Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L.** (1979). *Classical Banach Spaces II: Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin.

[4] **Enflo, P.** (1973). A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta mathematica*, 130, 309-317.

[5] **Dvoretzky, A. ve Rogers, C. A.** (1950). Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36(3), 192-197.

[6] **Bessaga, C. ve Pelczynski, A.** (1958). On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Mathematica,* 17, 151-164.

[7] **Ronglu, L. ve Qingying, B.** (1993). Locally convex spaces containing no copy of c_0, *J. Math. Anal. Appl.*, 172, 205-211.

[8] **Ronglu, L. ve Cho, M. H.** (1995) Weakly unconditional Cauchy series on locally convex spaces, *Northeast. Math. J.,* 11(2), 187-190.

[9] **Junde, W. ve Ronglu, L.** (2000). Unconditional convergent series on locally convex spaces, *Taiwanese J. Math.*, 4(2), 253-259.

[10] **Bu, Q. ve Wu, C.** (1997). Unconditionally convergent series of operators on Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 207(2), 291-299.

[11] **Aizpuru, A. ve Pérez-Fernández, F.J.** (1999). Characterizations of series in Banach spaces, *Acta Math. Univ. Comenian.*, 58(2), 337-344.

[12] **Aizpuru, A. ve Pérez-Fernández, F.J.** (2002). Sequence spaces associated to a series in a Banach space(sequence spaces associated to a series), *Indian J. pure appl. Math.*, 33(9), 1317-1329.

[13] **Pérez-Fernández, F.J., Benítez-Trujillo, F. ve Aizpuru, A**. (2000). Characterizations of completeness of normed spaces through weakly unconditionally Cauchy series, *Czechoslovak Math. J.*, 50(125), 889-896.

[14] **Aizpuru, A., Gutiérrez-Dávila, A. ve Sala, A.** (2006). Unconditionally Cauchy series and Cesàro summability, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, 39-48 .

[15] **Aizpuru, A., Armario, R. ve Pérez-Fernández, F. J.** (2008). Almost summability and unconditionally Cauchy series, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin,* 15(4), 635-644.

[16] **Shiue, j. S.** (1982). On the Cesàro sequence spaces, *Tamkang J. Math.* 1, 19-25.

[17] **Ng, P.N. ve Lee, P.Y.** (1978). Cesáro sequence spaces of non-absolute type, *Comment. Math. Prace Mat.* 20(2), 429-433.

[18] **Şengönül, M. ve Başar, F.** (2005). Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, *Soochow J. Math.*, 31(1), 107-119.

[19] **Leibowitz, G. M.** (1971). A note on Cesàro sequence spaces,*Tamkang J. Math.* 2, 151-157.

[20] **Jagers, A. A.** (1974). A note on Cesàro sequence spaces, *Nieuw Arch. Wisk.* 22, 113-124.

[21] **Cui, Y. ve Hudzik, H.** (2001).Packing constant for Cesàro sequence spaces, *Nonlinear Anal.* 47, 2695-2702.

[22] **Komal, B.S., Pandoh, S. ve Raj, K.** (2016). Multiplication operators on Cesàro sequence spaces, *Demonsratio Mathematica* 49(4), 430-436.

[23] **Ramos-Fernández, J. C. ve Rivera-Sarmiento, M. A.**, Salas-Brown, M. (2019). On the essential norm of multiplications operators acting on Cesàro sequence spaces, *Journal of Function Spaces,* Volume 2019, Article ID 5069610, 5 pages.

[24] **Başar, F. ve Braha, N.L.** (2016). Euler-Cesáro difference spaces of bounded, convergent and null sequences, *Tamkang J. Math.* 47(4), 405-420.

[25] **Roopaei, H., Foroutannia, D., Kara, M.İ. ve Kara, E. E.** (2020).Cesáro spaces and norm of operators on these matrix domains, *Mediterr. J Math*. 17(4):121.

[26] **Yıldırım, M. E.** (2020). The spectrum and fine spectrum of $q-$Cesáro matrices with $0 < q < 1$ on c_0, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 41 (3), 361-377.

[27] **Yaying, T., Hazarika, B. ve Mursaleen, M.** (2022). Cesáro sequence spaces via (p, q)-calculus and compact matrix operators, *The Journal of Analysis*, 1-19.

[28] **Maddox, I.J.** (1970). *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

[29] **Kreyszig, E.** (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.

[30] **Megginson, R. E.** (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York,

[31] **Carothers, N. L.** (2004). *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, New York.

[32] **Albiac, F. ve Kalton, N. J.** (2006). *Topics in Banach space theory* (Vol. 233, pp. xii+-373). New York: Springer.

[33] **Boss, J.** (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press.

[34] **Kadets, V.** (2018). *A course in functional analysis and measure theory*. Cham: Springer International Publishing.

[35] **Diestel, J.** (1984). *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York.

[36] **Rudin, W.** (1991). *Functional Analysis,* second ed., McGraw-Hill.

[37] **Başar, F.** (2011). *Summability Theory and Its Applications*, Bentham Science Publishers, İstanbul.

[38] **Wilansky, A.** (1984). *Summability Through Functional Analysis*, North Holland.

[39] **Kamthan, P. K. ve Gupta M.** (1981). *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker, New York.

[40] **Garling, D. J. H.** (1967). On topological sequence spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 63, 997-1019.

[41] **Stieglitz, M. ve Tietz, H.** (1977). Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, *Mathematische Zetschrift* 154, 1-16.

[42] **Altay, B. ve Başar, F.** (2007). Certain topological properties and duals of the domain of a triangle matrix in a sequence space, *J. Math. Anal. Appl.*, 336(2), 632-645.

[43] **Hahn, H.** (1922). Über Folgen linearer Operationen, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 32(1), 3-88.

[44] **Goes, G.** (1972). Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients. II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39(2), 477-494.

[45] **Rao, K.C.** (1990). The Hahn sequence space, *Bull. Cal. Math. Soc.* 82, 72-78.

[46] **Rao, K.C. ve Srinivasalu, T.G.** (1996). The Hahn sequence space-II, *Y. U. J. Educ. Fac.* 1(2), 43-45.

[47] **Rao, K.C. ve Subramanian, N.** (2002). The Hahn sequence space-III, *Bull. Malaysian Math. Sc. Soc.* 25, 163-171.

[48] **Kirişci, M.** (2013).A survey of the Hahn sequence space, *Gen. Math. Notes* 19(2), 37-58.

[49] **Raj, K. and Kiliçman, A.** (2014). On generalized difference Hahn sequence spaces. Hindawi Publishing Corporation, *The Scientific World Journal* Volume 2014, Article ID 398203, 7 pages.

[50] **Malkowsky, E., Rakočević, V. ve Tuğ, O.** (2021). Compact operators on the Hahn space, *Monatshefte für Mathematik,* 196, 519-551.

[51] **Malkowsky, E.** (2021). Some compact operators on the Hahn space, *Scientific Research Communications,* 1(1), 1-14.

[52] **Dolićanin-Dekić, D. ve Gilić, E.** (2022). Caracterisations of bounded linear and compact operators on the generalized Hahn space, *Filomat* 36(2), 497-505.

[53] **Erdoğan S. Ş.** (2001). *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları.

[54] **Dvoretzky, A. ve Rogers, C. A.** (1950). Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36(3), 192-197.

[55] **Kadets, M. I. ve Kadets, V. M.** (1997). *Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence, Translated from the Russian by Andrei lacob*, Birkhauser Verlag, Basel.

[56] **Singer, I.** (1970). *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[57] **Hewitt, E. ve Stromberg, K.** (2013). *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag.

[58] **Guerre-Delabrière, S.** (1992). *Classical Sequences in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York.

[59] **Cembranos, P. ve Mendoza, J.** (1997). *Banach Spaces of Vector-Valued Functions*, Springer-Verlag, Berlin.

[60] **Sobczyk, A.** (1941). Projection of the space (m) on its subspace (c_0), *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47, 938-947.

[61] **Pelczynski, A.** (1960). Projections in certain Banach spaces, *Studia Math.*, 19, 209-228.

[62] **Costara, C. ve Popa, D.** (2003). *Exercises in Functional Analysis*, Kruwer Academic Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Şenol BALTACI

ÖĞRENİM DURUMU:

Lisans : 1993, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : 1996, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Doktora : 2022, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

MESLEKİ DENEYİM:

1995 de MEB'de Matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Malatya'da çeşitli okullarda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2014 yılından itibaren idarecilik görevi yürütmüştür. Halen Malatya Kernek Anadolu Lisesinde idarecilik görevini yürütmektedir.