

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİ  
ve  
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Necibullah SAKAR**

**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY**

**HAZİRAN 2022**

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİ  
ve  
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**



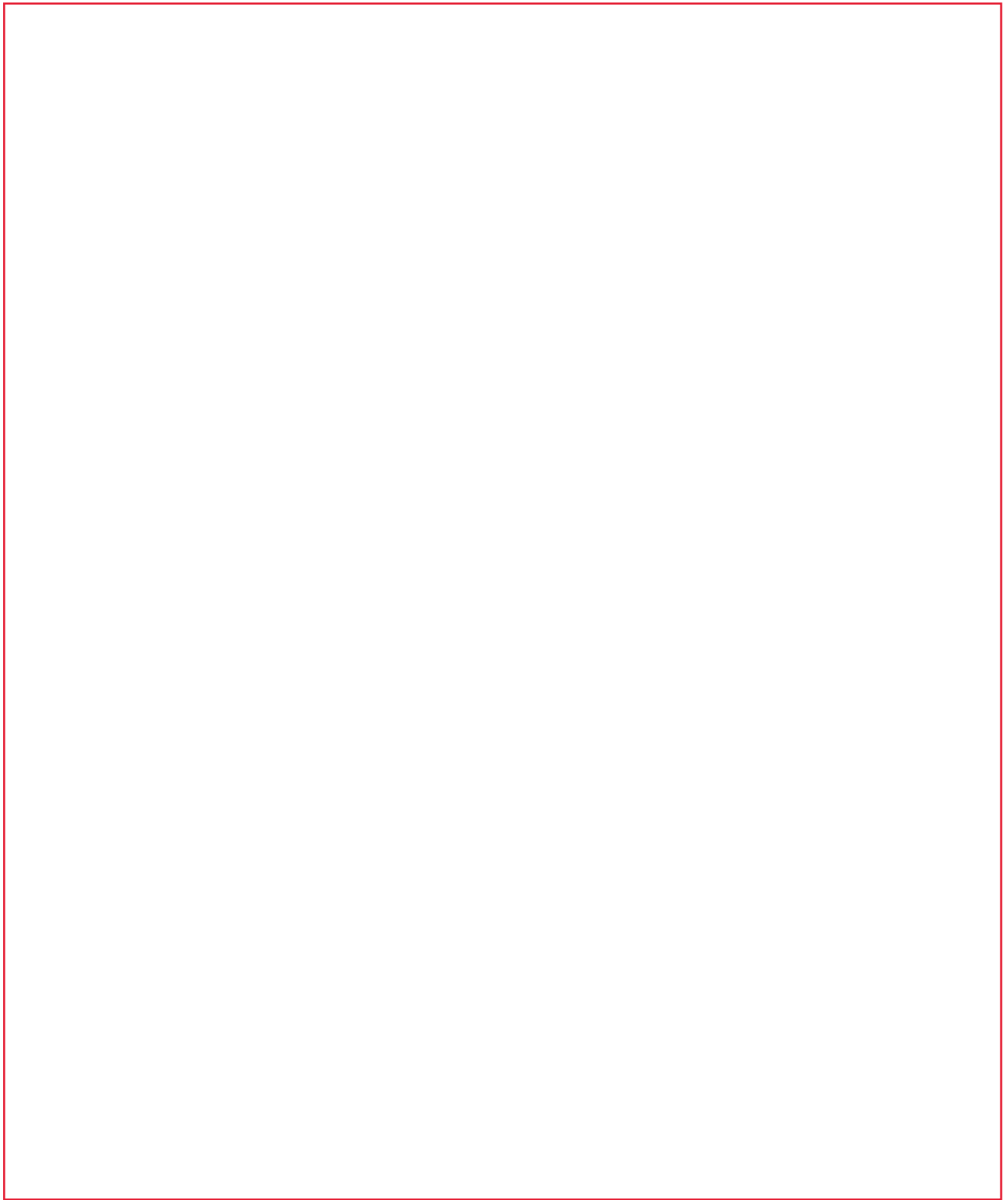
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Necibullah SAKAR  
(36183614072)**

**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY  
Eş Danışman: Doç. Dr. Yusuf UÇAR**

**HAZİRAN 2022**



## TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanlarım çok kıymetli hocalarım sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY ile birlikte Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, tez çalışmamın her aşamasında destek olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocalarım Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU, Doç.Dr. Sibel ÖZER ve Doç. Dr. Berat KARAAĞAÇ'a teşekkürlerimi sunarım.



## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “1-Boyutlu Genelleştirilmiş Rosenau-KdV Denklemi ve Nümerik Çözümü ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Necibullah SAKAR



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
1.1 Model Problemler.....	3
1.1.1 Problem 1.....	3
1.1.2 Problem 2.....	4
<b>2. SONLU FARK YÖNTEMİ VE TÜREVLERE FARK YAKLAŞIMLARI.....</b>	<b>7</b>
2.1 Sonlu Fark Yöntemi.....	7
2.2 İki Değişkenli Fonksiyonun Türevlerine Sonlu Fark Yaklaşımları.....	8
<b>3. 1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİNİN KORUNUMLU CRANK-NICOLSON KAPALI SONLU FARK ŞEMALARI.....</b>	<b>12</b>
3.1 Şema 1.....	12
3.1.1 Kararlılık Analizi.....	16
3.2 Şema 2.....	18
3.3 Nümerik Sonuçlar.....	21
<b>4. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ 1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİNİN KORUNUMLU CRANK-NICOLSON KAPALI SONLU FARK ŞEMALARI.....</b>	<b>28</b>
4.1 Şema 3.....	28
4.1.1 Kararlılık Analizi.....	32
4.2 Şema 4.....	35
4.3 Nümerik Sonuçlar.....	38
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>46</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>48</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>50</b>

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 2.1</b> : İleri Fark Yaklaşımları .....	9
<b>Çizelge 2.2</b> : Geri Fark Yaklaşımları .....	10
<b>Çizelge 2.3</b> : Merkezi Fark Yaklaşımları .....	11
<b>Çizelge 3.1</b> : Problem 1'in $k = 0.05$ için Şema 2'den elde edilen $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. .	22
<b>Çizelge 3.2</b> : Problem 1'in $h = 0.125$ için Şema 2'den elde edilen $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları.	22
<b>Çizelge 3.3</b> : Problem 1'in Şema 2'den elde edilen $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	23
<b>Çizelge 3.4</b> : Problem 1'in $T = 40$ 'da Şema 2'den elde edilen $L_\infty$ hata normu ve doğruluk mertebesi. ....	24
<b>Çizelge 3.5</b> : Problem 1'in $p = 3$ için Şema 2'den elde edilen enerji korunumu.....	25
<b>Çizelge 3.6</b> : Problem 1'in $p = 5$ için Şema 2'den elde edilen enerji korunumu.....	25
<b>Çizelge 4.1</b> : Problem 2'nin Şema 3'den elde edilen $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	39
<b>Çizelge 4.2</b> : Problem 2'nin $T = 40$ 'da Şema 3'ten elde edilen $L_\infty$ hata normu ve doğruluk mertebesi. ....	40
<b>Çizelge 4.3</b> : Problem 2'nin Şema 4'ten elde edilen $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	41
<b>Çizelge 4.4</b> : Problem 2'nin $T = 40$ 'da Şema 4'ten elde edilen $L_\infty$ hata normu ve doğruluk mertebesi. ....	42
<b>Çizelge 4.5</b> : Problem 2'nin $p = 3$ için Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen enerji korunumu.	43
<b>Çizelge 4.6</b> : Problem 2'nin $p = 5$ için Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen enerji korunumu.	43
<b>Çizelge 5.1</b> : Problem 1 ve Problem 2'nin $p = 3$ için Şema 1, Şema 2, Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen $L_\infty$ hata normu .....	47
<b>Çizelge 5.2</b> : Problem 1 ve Problem 2'nin $p = 5$ için Şema 1, Şema 2, Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen $L_\infty$ hata normu .....	47

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 3.1</b> : Problem 1'in analitik (soldakiler) ve Şema 2'den elde edilen nümerik (sağdakiler) çözümlerinin farklı $T$ zamanlarında dalga profilleri.....	26
<b>Şekil 4.1</b> : Problem 2'nin analitik ve Şema 3'den elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda dalga profilleri.....	44
<b>Şekil 4.2</b> : Problem 2'nin analitik ve Şema 4'ten elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda dalga profilleri. ....	45





# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## 1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİ ve NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

NECİBULLAH SAKAR

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

50+vii sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu çalışmada, başlangıç ve sınır koşulları ile verilen lineer olmayan genelleştirilmiş Rosenau-KdV ve konuma göre parçalanmış genelleştirilmiş ikili Rosenau-KdV denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için sonlu fark yöntemleri üzerine temellenen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemaları verildi.

Bu tez beş bölüm halinde planlandı. Birinci bölümde genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin kendisiyle birlikte literatürde mevcut olan bazı temel çalışmalarından kısaca bahsedildi. Ayrıca, bu bölümde tezde ele alınacak iki problem verildi.

İkinci bölümde, Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen türevlere sonlu fark yaklaşım formülleri ile birlikte tezde kullanılacak olan notasyonlar sunuldu.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yöntemine dayanan iki nümerik şema verildi. Sadece bir yöntemin von Neumann yöntemiyle kararlılık analizi yapıldı. Ayrıca, bu bölümde sunulan nümerik şemaların doğruluğunu ve güvenilirliğini kontrol etmek için iki test problem göz önüne alındı ve aynı parametreler kullanılarak hesaplanan bazı hata normları ile birlikte enerjinin korunumu ve şemaların doğruluk mertebeleri çizelgelerde sunuldu. Bunlarla birlikte, hesaplanan nümerik sonuçların problemlerin doğru fiziksel davranışlarını ne kadar iyi temsil ettiklerini göstermek için bazı grafikler verildi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen benzer çalışmalar konuma göre parçalanmış genelleştirilmiş ikili (coupled) Rosenau-KdV denklemine uygulandı.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde ise üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlar kendi aralarında karşılaştırılarak bir kısa sonuçla birlikte ileriki çalışmalar hakkında öneride bulunuldu.

**Anahtar Kelimeler:** Genelleştirilmiş Rosenau-KdV Denklemi, Genelleştirilmiş İkili Rosenau-KdV Denklemi, Korunumlu Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi, Rubin-Graves Yaklaşımı, von Neumann Kararlılık Analizi

## ABSTRACT

Master Thesis

### ONE-DIMENSIONAL GENERALIZED ROSENAU-KdV EQUATION AND ITS NUMERICAL SOLUTION

Necibullah SAKAR

Inonu University  
Graduate School of Nature and Applied Sciences  
Department of Mathematics

50+vii pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

In this study, conservative Crank-Nicolson implicit finite difference schemes based on finite difference methods are given to obtain approximate solutions of nonlinear generalized Rosenau-KdV itself and space split generalized coupled Rosenau-KdV equations with initial and boundary conditions.

This thesis is planned as five chapters. In the first chapter, the generalized Rosenau-KdV equation itself as well as some of its main studies available in the literature are briefly mentioned. Also, in this chapter two problems to be taken into consideration throughout the thesis are introduced.

In the second chapter, finite difference approximation formulas for derivatives obtained with the help of Taylor series expansion and notations to be used in the thesis are presented.

In the third chapter, two numerical schemes based on the conservative Crank-Nicolson implicit finite difference method are given to obtain approximate solutions of the generalized Rosenau-KdV equation. Stability analysis of only one method is also performed by the von Neumann method. Besides, in order to check the accuracy and reliability of the presented numerical schemes, two test problems are considered and some error norms calculated using the same parameters with conservation of energy and accuracy orders of the schemes are presented in the tables. Moreover, some graphs are given to show how good the computed numerical results represent the correct physical behavior of the problems.

In the fourth chapter, similar studies given in the third chapter are applied to the space split generalized coupled Rosenau-KdV equation.

In the fifth chapter that is the last chapter of the thesis, the computed results in the third and fourth chapters are compared, and a brief conclusion and suggestion for future studies are made.

**Keywords:** Generalized Rosenau-KdV Equation, Generalized Coupled Rosenau-KdV Equation, Conservative Crank-Nicolson Finite Difference Method, Rubin-Graves Approximation, von Neumann Stability Analysis

# 1. GİRİŞ

İçinde bulunulan gerçek hayatın akışı içinde doğada ortaya çıkan fiziksel fenomenlerin bir kısmı genellikle lineer olmayan kısmı diferansiyel denklemlerle modellenir. Başta matematikçiler olmak üzere bir çok mühendisin ilgi odağı olan bu tip denklemlerin gerek analitik gerekse yaklaşık çözümlerini bulmak son derece zor ve zahmetlidir. Ancak bu tip denklemlerin yaklaşık çözümleri ile ilgilenmek analitik çözümleri ile ilgilenmekten daha kolaydır. Bu sebeple lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümü için literatürde bir çok nümerik yöntem vardır.

Son yıllarda lineer olmayan kısmı diferansiyel denklemlerin soliteri dalga veya soliton çözümleri fizikçilerin ve uygulamalı matematikçilerin oldukça ilgisini çekmiştir. Solitary dalgaların keşfi bilim insanlarına bu kavramı incelemek ve araştırma yapmaları konusunda ilham kaynağı olmuştur. Pratik önemi nedeniyle özellikle akışkanlar mekaniğindeki doğrusal olmayan dalga fenomenleri katı hal fiziği, plazma fiziği ve doğrusal olmayan optik gibi yine birçok doğrusal olmayan dinamik sistemde popülerlik kazanmıştır. Bu fenomenlerin doğrusal olmayan dinamikleri ile birlikte diğer fiziksel davranışlarını anlamak için genellikle doğrusal olmayan evrimsel kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Bu bağlamda,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

olarak verilen ve doğrusal olmayan bir evrimsel kısmi diferansiyel denklem olan KdV denklemi [1], doğrusal olmama ve dağılım arasındaki dengeyi içeren dinamik sistemlerde önemli bir rol oynar. Bu denklem, uzunlamasına astigmatik dalgaların, manyetik akışkan dalgaların, plazmadaki iyon akustik dalgaların, doğrusal olmayan dağıtıcı ortamda hareket eden bir kristal kafes üzerindeki akustik dalgaların ve zayıf doğrusal olmayan uzun dalgaların yayılmasında geniş uygulama alanına sahiptir. Ancak iyi bilinen KdV denklemi dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimleri problemini çözemez. Bu sorunun üstesinden gelmek için P. Rosenau [2], yoğun ayrık bir sistemin dinamiğini tanımlayan yüksek mertebeden türevli

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxxxt} = 0$$

Rosenau denklemi olarak bilinen denklem modelini geliştirdi. Denklem çözümlerinin varlığı ve teklifi hakkındaki teorik sonuçlar Park [3] tarafından araştırılmış ve verilmiştir. Bu denklemin tam çözümlerini bulmak kolay olmadığı için genellikle nümerik yöntemler üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Daha sonra Zhou [4], lineer olmayan Rosenau denkleminin daha fazla fiziksel davranışlarının anlaşılabilmesi ve değerlendirilebilmesi için  $u_{xxx}$  viskoz teriminin dahil edilmesini önerdi. Bu denklem, iyi bilinen KdV ve Rosenau denklemlerinin bir kombinasyonu olan

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxxt} + uu_x = 0$$

biçiminde verilen bir denklem olup genellikle Rosenau-KdV denklemi olarak adlandırılır [5].

Yukarıda verilen her üç denklem

$$u_t + \delta u_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxxt} + \gamma (u^p)_x = 0; \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (1.0.1)$$

olarak verilen genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi olarak bilinen denklemden elde edilebilir. Bu denklem için başlangıç ve sınır şartları sırasıyla

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.0.2)$$

ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0, \quad t \in [0, T] \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

dir. Burada,  $u = u(x, t)$  değişkeni doğrusal olmayan dalga profili;  $x$  ve  $t$  sırasıyla konumsal ve zamansal değişkenler;  $\delta, \alpha, \beta$  ve  $\gamma$  reel değerli sabitler ve  $p$  ( $p \neq 0, 1$ ) bir pozitif tamsayıdır.

Açıkça, (1.0.1) denklemi  $p = 2$  olduğunda  $\delta = \beta = 0$  ve  $\alpha = \gamma = 1$  için

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

iyi bilinen alışılmış KdV denklemine,  $\delta = \beta = \gamma = 1$  ve  $\alpha = 0$  için

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxxxt} = 0$$

iyi bilinen alışılmış Rosenau denklemine ve  $\delta = \alpha = \beta = \gamma = 1$  için

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxxt} + uu_x = 0$$

iyi bilinen alışılmış Rosenau-KdV denklemine dönüşür.

$p \neq 2$  durumunda ise denklem parametrelerin seçimine göre literatürde mevcut olan genelleştirilmiş KdV, genelleştirilmiş Rosenau ve genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemlerini verir.

Rosenau-KdV denkleminin analitik ve nümerik çözümleri için literatüre girmiş bazı çalışmalarına değinilecek olunursa; Zuo [4] denkleminin periyodik ve soliteri dalga çözümlerini

bulmak için Secant ve Tanjant yöntemlerini kullandı. Esfahani [6] Sech-Ansatz yöntemi ile genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin soliter dalga çözümlerini elde etti ve denklem için iki invaryant verdi. Ebadi [7] ve Saha [8] çalışmalarında denklemin topolojik soliton çözümlerini elde etmek için bir yaklaşım (ansatz) metodunu kullandılar. Ayrıca, bu denklemin birkaç soliton çözümünü daha bulmak için  $(G'/G)$ -açılım ve exp-fonksiyon yöntemlerini de uyguladılar. Zheng ve Zhou [9] genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi için bir ortalama lineer şema geliştirdiler. Wongsaijai ve Pochinapan [10] üç seviyeli ortalama açık sonlu fark yaklaşımıyla denklemin nümerik çözümlerini araştırdılar. Wang [11] ve Hu [12] üç seviyeli lineer korunumlu sonlu fark yöntemi ile denklemin nümerik çözümlerini elde ettiler. Ayrıca enerji ve kütle korunumunu araştırdılar. Hu vd. [13] çalışmalarında iki seviyeli lineer olmayan korunumlu sonlu fark yöntemi ile denklemin nümerik çözümlerini araştırdılar. Zhou vd. [14] denklemin çözümü için lineer olmayan korunumlu açık sonlu fark yöntemini kullandılar. Luo vd. [5] genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için korunumlu bir Crank-Nicolson sonlu fark şeması önerdiler. Son yıllarda, Uçar vd. [15] denklemin nümerik çözümlerini kübik Galerkin B-spline sonlu eleman yöntemi ile elde ettiler.

## 1.1 Model Problemler

Bu çalışmada, (1.0.2) ve (1.0.3) başlangıç şartlarını sağlayan yüksek mertebeden türevli lineer olmayan (1.0.1) ile verilen genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemindeki parametrelerin  $\delta = \alpha = \beta = \gamma = 1$  özel seçimi için elde edilen aşağıdaki iki model problem göz önüne alınacaktır.

### 1.1.1 Problem 1

Bu problemde, (1.0.1) ile verilen

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxx} + (u^p)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (1.1.1)$$

genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.1.2)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla ele alındı. Burada  $p \geq 2$  bir tam sayı olup (1.1.2) ile verilen  $u(x, 0) = u_0(x)$  başlangıç şartı

$p = 3$  için

$$u_0(x) = u(x, 0) = \frac{1}{4} \sqrt{-15 + 3\sqrt{41}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} x \right), \quad x \in [a, b]$$

ve

$p = 5$  için

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sqrt[4]{\frac{4}{15}(-5 + \sqrt{34})} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{3} \sqrt{-5 + \sqrt{34}} x \right), \quad x \in [a, b]$$

dir [5].

Bu başlangıç-sınır değer problemlerinin tam çözümü,

$p = 3$  için

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \sqrt{-15 + 3\sqrt{41}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} \left[ x - \frac{1}{10} (5 + \sqrt{41}) t \right] \right)$$

ve  $p = 5$  için

$$u(x, t) = \sqrt[4]{\frac{4}{15}(-5 + \sqrt{34})} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{3} \sqrt{-5 + \sqrt{34}} \left[ x - \frac{1}{10} (5 + \sqrt{34}) t \right] \right)$$

dir [5].

### 1.1.2 Problem 2

Bu problemde ise (1.0.1) ile verilen

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxx} + (u^p)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (1.1.4)$$

genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi

$$v = u_{xxx}$$

değişken değiştirmesi ile

$$\begin{aligned} u_t + u_x + v + v_{xt} + (u^p)_x &= 0, \quad (p \geq 2 \text{ bir tamsayı}) \\ v - u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

olacak şekilde konum yönünde parçalanmış ikili (coupled) diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek ele alındı. Böylece, Problem 1'den bu coupled sistemin başlangıç ve sınır şartları sırasıyla

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.1.6)$$

ve

$$\begin{aligned} u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad v(a,t) = v(b,t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0, \quad v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0, \quad t \in [0,T] \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

dir. Burada  $v_0(x) = u_{xxx}(x,0)$ ,  $v(a,t) = u_{xxx}(a,t)$ ,  $v(b,t) = u_{xxx}(b,t)$ ,  $v_x(a,t) = u_{xxxx}(a,t)$  ve  $v_x(b,t) = u_{xxxx}(b,t)$  dir.

Bu tezde yukarıda verilen her iki problemin Lou vd. [5]'nin makale çalışmasında önerilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yöntemi ile çözülmesi amaçlanmaktadır. Yönteme geçmeden önce (1.1.1) ve (1.1.5) denklemlerindeki  $(u^p)_x$  nonlinear terimi yerine bu tezde kullanılacak olan Yaklaşım 1 ve Yaklaşım 2 olarak adlandırılan aşağıdaki iki yaklaşımı verelim.

**Yaklaşım 1:** Bu yaklaşımda  $(u^p)_x$  nonlinear terimi yerine Lou vd. [5] tarafından önerilen

$$(u^p)_x = \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + \left[ (u_m^{n+1/2})^p \right]_{\hat{x}} \right\}$$

yaklaşımı ele alındı.

**Yaklaşım 2:** Bu yaklaşımda ise  $(u^p)_x$  nonlinear terimi yerine

$$\begin{aligned} (u^p)_x &= \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^{n+1} + \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^n \\ &= \frac{p}{2} \left( (u^{p-1})^n u_x^{n+1} + (p-1) (u^{p-2})^n u_x^n u_x^{n+1} \right) \\ &\quad - (p-1) \frac{p}{2} (u^{p-1})^n u_x^n + \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^n \end{aligned}$$

olarak verilen Rubin-Graves tipi lineerleştirme alındı [16].

Bu tezin geri kalan bölümleri şöyle planlandı: Tezin ikinci bölümü, Taylor seri açılımından elde edilen türevlere sonlu fark yaklaşım formülleri ile birlikte tezde kullanılacak olan notasyonlara ayrıldı.

Tezin üçüncü bölümünde, Problem 1'in önce Lou vd. [5]'nin çalışması temel alınarak  $(u^p)_x$  nonlinear terimi için önerilen Yaklaşım 1 ile birlikte makale de sunulan korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şeması (Şema 1) verildi. Sonra,  $(u^p)_x$  nonlinear terimi için Yaklaşım 2'de verilen Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak yine Problem 1'in korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şeması (Şema 2) elde edildi. Bu kısım tezin özgün çalışmasından birini oluşturmaktadır.

Tezin diğer özgün çalışmasını teşkil eden dördüncü bölümde ise sırasıyla Şema 3 ve Şema 4 olarak adlandırılan,  $(u^p)_x$  nonlinear terimi için Yaklaşım 1 ve Yaklaşım 2 kullanılarak, Problem 2'nin korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemaları sunuldu.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen nümerik şemaların doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için aynı parametreler kullanılarak hesaplanan nümerik sonuçlar

kendi aralarında ve aynı zamanda diğerk araştırmacıların elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu bağlamda, ayırık noktalarda hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normaları ile beraber enerjinin korunumu ve Şemaların doğruluk mertebeleri karşılaştırılmalı olarak çizelgelerde verildi. Ayrıca, elde edilen nümerik sonuçların problemin doğru fiziksel davranışını ne kadar iyi sergilediğini göstermek için bazı dalga profillerinin grafikleri sunuldu.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde ise bir kısa sonuç ile birlikte ileriki çalışmalar hakkında kısa bir öneri de bulunuldu.





## 2. SONLU FARK YÖNTEMİ VE TÜREVLERE FARK YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde, Problem 1 ve Problem 2'nin nümerik çözümlerini üretecek olan literatürde iyi bilinen sonlu fark yöntemleri üzerine temellenmiş korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemaları verilmeden önce sonlu fark yöntemiyle birlikte türevlere sonlu fark yaklaşımlarından ve tez boyunca kullanılacak olan gösterimlerden bahsedilecektir.

### 2.1 Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu fark yöntemi, uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için en eski yöntemlerden biri olmasına rağmen halen günümüzde yaygın olarak kullanılan bir nümerik yöntemdir. Sonlu fark yönteminde takip edilen adımlar ve işlemler kısaca şöyle sıralanabilir:

- İlk olarak, uygun başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan  $u(x, t)$  bilinmeyenli bir kısmi diferansiyel denklemden oluşan bir problemin  $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$  olarak verilen çözüm bölgesi  $x$  konum değişkeni yönünde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ ,  $h = (b - a)/M$ ,  $x_m = a + mh$ ,  $m = 0(1)M$  ve  $t$  zaman değişkeni yönünde  $t_n = nk$ ,  $k = T/N$ ,  $n = 1(1)N$  olacak şekilde ayrıklaştırılır yani sonlu sayıda kafeslere bölünür. Kafeslerin kesim noktaları üzerindeki herhangi bir  $(x_m, t_n)$  grid noktasındaki  $u(x, t)$ 'nin yaklaşık değeri için genellikle  $u_m^n$  veya  $u_{m,n}$  gösterimlerinden biri kullanılır. Buna göre  $u_m^n, u(x_m, t_n)$ 'ye bir yaklaşımdır. Yani  $u_m^n \simeq u(x_m, t_n)$  dir.
- Sonra, problemde görülen türevler yerine Taylor serisinden elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılarak matris cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanan nümerik şema elde edilir.
- Daha sonra, matris cebirsel denklem sisteminden elde edilecek olan çözümlerin hangi şart veya şartlar altında başlangıç ve sınır değer probleminin analitik çözümüne yakınsayacağı incelenir. Bu ise yakınsaklık olarak bilinir. Bunun için Lax'ın denklik teoreminden faydalanılır. Bu teoreme göre bir sonlu fark yönteminden elde edilen yaklaşık çözümlerin denklemin analitik çözümüne kabul edilebilir doğrulukta yakın kalması için gerekli ve yeterli şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır. Sonlu fark yönteminde  $h$  ve  $k$  sıfıra giderken  $O(h)$  ve  $O(k)$  ile birlikte daha yüksek mertebeden hatalar sıfıra yaklaşacağından yöntem doğası

gereğince genellikle tutarlıdır. Dolayısıyla Lax'ın denklik teoreminden yöntemin yakınsaklığı için sadece kararlılığını incelemek yeterlidir.

- Son olarak, cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanan yakınsak şema direkt yada indirekt çözüm tekniklerinden biri kullanılarak çözülür. Böylece ele alınan başlangıç ve sınır değer probleminin  $m = 0(1)M$  ve  $n = 0(1)N$  olmak üzere  $u(x_m, t_n)$  grid noktalarındaki  $u_m^n$  yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

Bu tezde, Rosenau-KdV denklemin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılacak olan korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yöntemine geçmeden önce denklemden görülen  $u(x, t)$  fonksiyonunun çeşitli mertebeden türevleri yerine alınacak olan sonlu fark yaklaşımlarını verelim.

## 2.2 İki Değişkenli Fonksiyonun Türevlerine Sonlu Fark Yaklaşımları

$u(x, t)$ ,  $n$ -inci mertebeden türevleri mevcut sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir  $(x_m, t_n)$  grid noktasındaki  $u(x, t)$ 'nin yaklaşık değeri  $u_m^n$  ile gösterildiğinden  $h > 0$  ve  $k > 0$  yeterince küçük pozitif reel sayılar olmak üzere,  $u(x_m, t_n + k) = u_m^{n+1}$ ,  $u(x_m + h, t_n) = u_{m+1}^n$  ve  $u(x_m - h, t_n) = u_{m-1}^n$  dir.

### İleri Fark Yaklaşımları

- $u(x_m, t_n + k)$  fonksiyonunun bir  $(x_m, t_n)$  noktası civarında Taylor seri açılımı

$$u(x_m, t_n + k) = u(x_m, t_n) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, t_n) + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_m, t_n) + \dots$$

dir. Bu eşitlik yukarıdaki notasyonların kullanılmasıyla

$$u_m^{n+1} = u_m^n + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, t_n) + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_m, t_n) + \dots$$

olarak yazılır. Bu son eşitlikten  $\frac{\partial u}{\partial t}$  çekilirse

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \underbrace{\frac{k}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, t_n) + \frac{k^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_m, t_n) + \dots}_{O(k)}$$

veya

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + O(k) \quad (2.2.1)$$

biçiminde  $u(x,t)$ 'nin  $(x_m, t_n)$  grid noktasında  $t$ 'ye göre birinci basamaktan türevi için  $O(k)$  mertebeden ileri sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada  $O(k)$ , seriyi sonlandırırken yapılan hata olup kesme hatası olarak adlandırılır. Kesme hatası, kısmi türevle sonlu fark yaklaşımı arasındaki fark olarak tanımlanabilir.  $k \rightarrow 0$  iken  $O(k) \rightarrow 0$  olduğundan  $\frac{\partial u}{\partial t}$  için (2.2.1) sonlu fark yaklaşımı tutarlıdır.  $k > 0$ 'ın yeterince küçük bir pozitif sayı olması durumunda kesme hatası daha da küçük olacağından ihmal edilebilir.

- $u(x_m + h, t_n)$  fonksiyonunun  $(x_m, t_n)$  noktası civarında Taylor seri açılımı

$$u(x_m + h, t_n) = u(x_m, t_n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots$$

dir. Bu eşitlik yukarıdaki notasyonların kullanılmasıyla

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots \quad (2.2.2)$$

olarak yazılır. Bu son eşitlikten  $\frac{\partial u}{\partial x}$  türevi için

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \underbrace{\frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots}_{O(h)}$$

veya

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + O(h)$$

biçiminde  $u(x,t)$ 'nin  $(x_m, t_n)$  grid noktasındaki  $x$ 'e göre birinci basamaktan türevi için  $O(h)$  mertebeden ileri sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada  $O(h)$  kesme hatası olup  $h \rightarrow 0$  iken  $O(h) \rightarrow 0$  olduğundan ihmal edilebilir.

Çizelge 2.1'de verilen yüksek basamaktan türevler için  $O(h)$  mertebeden herhangi bir  $n$ -inci zaman adımında ileri fark yaklaşımları yukarıdakine benzer şekilde elde edilebilir.

**Çizelge 2.1 : İleri Fark Yaklaşımları**

	$u_m^n$	$u_{m+1}^n$	$u_{m+2}^n$	$u_{m+3}^n$	$u_{m+4}^n$	
$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n$	-1	1				
$h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n$	1	-2	1			+ $O(h)$
$h^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n$	-1	3	-3	1		
$h^4 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n$	1	-4	6	-4	1	

### Geri Fark Yaklaşımları

Yukarıdakine benzer şekilde  $u(x_m - h, t_n)$  fonksiyonu  $(x_m, t_n)$  noktası civarında Taylor seri

açılımı

$$u(x_m - h, t_n) = u(x_m, t_n) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots$$

dir. Bu eşitlik, yukarıdaki notasyonların kullanılmasıyla

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots \quad (2.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + \underbrace{\frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots}_{O(h)}$$

veya

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + O(h)$$

biçiminde  $u(x, t)$ 'nin  $(x_m, t_n)$  grid noktasındaki  $x$ 'e göre birinci basamaktan türevi için  $O(h)$  mertebeden geri sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

**Çizelge 2.2 : Geri Fark Yaklaşımları**

	$u_{m+4}^n$	$u_{m+3}^n$	$u_{m+2}^n$	$u_{m+1}^n$	$u_m^n$	
$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n$				-1	1	
$h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n$			1	-2	1	$+O(h)$
$h^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n$		-1	3	-3	1	
$h^4 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n$	1	-4	6	-4	1	

Yüksek basamaktan türevler için Çizelge 2.2'de verilen  $O(h)$  mertebeden herhangi bir  $n$ -inci zaman adımında geri fark yaklaşımları yukarıdakine benzer şekilde elde edilebilir.

### Merkezi Fark Yaklaşımları

(2.2.2) denkleminde (2.2.3) denklemi çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n - u_{m-1}^n &= u_m^n - u_m^n + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) - \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) \\ &+ \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \dots \\ &= 2h \frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) + 2 \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + 2 \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_m, t_n) + \dots \end{aligned}$$

veya

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \underbrace{\frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_m, t_n) + \frac{h^4}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_m, t_n) + \dots}_{O(h^2)}$$

ya da

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + O(h^2)$$

biçiminde  $u(x,t)$ 'nin  $(x_m, t_n)$  grid noktasında  $x$ 'e göre birinci mertebeden türevi için  $O(h^2)$  mertebeden merkezi sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

İleri ve geri sonlu fark yaklaşımlarına benzer şekilde yüksek basamaktan türevler için elde edilecek olan  $O(h^2)$  mertebeli herhangi bir  $n$ -inci zaman adımında merkezi fark yaklaşımları Çizelge 2.3'de verilmiştir.

**Çizelge 2.3 : Merkezi Fark Yaklaşımları**

	$u_{m-2}^n$	$u_{m-1}^n$	$u_m^n$	$u_{m+1}^n$	$u_{m+2}^n$	
$2h \frac{\partial u}{\partial x}_m^n$		-1	0	1		
$h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_m^n$		1	-2	1		$+O(h^2)$
$2h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}_m^n$	-1	2	0	-2	1	
$h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}_m^n$	1	-4	6	-4	1	

### 3. 1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİNİN KORUNUMLU CRANK-NICOLSON KAPALI SONLU FARK ŞEMALARI

Bu bölümde, (1.1.1)-(1.1.3) ile verilen Problem 1 yani

$$\begin{aligned}u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxxt} + (u^p)_x &= 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \\u(a, t) = u(b, t) &= 0, \quad t \in [0, T] \\u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0, \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

problemi göz önüne alındı. Bu problemin yaklaşık çözümlerini bulmak için korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yöntemi üzerine temellenmiş iki nümerik şema verildi.

Bu şemalardan biri (Şema 1) Luo vd. [5]'nin makalesinde önerdiği şema olup diğeri (Şema 2) ise Problem 1 için bilindiği kadarıyla ilk defa bu tezde sunulan şemadır. Şema 2'nin doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için  $p = 3$  ve  $p = 5$  durumlarında Problem 1'den elde edilen iki test problem göz önüne alındı. Şema 2'den ayrıklaştırılmış noktalarda hesaplanan sayısal sonuçlar ( $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, enerjinin korunumu ve şemaların doğruluk mertebesi) bu bölümün sonunda "Nümerik Sonuçlar" kısmında kendi aralarında ve aynı parametre değerleri kullanılarak diğeri bilim insanlarının kullandıkları nümerik yöntemlerden elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırıldı ve çizelgelerde verildi. Ayrıca hesaplanan nümerik çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışını ne ölçüde iyi temsil ettiğini göstermek için bazı dalga grafikleri de çizildi.

#### 3.1 Şema 1

Bu şema tamamen Lou vd. [5]'nin makalesi temel alınarak hazırlandı. Lou vd. çalışmalarında, (1.1.1) ile verilen genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminde  $(u^p)_x$  lineer olmayan terimi yerine

$$\begin{aligned}(u^p)_x &= \frac{1+p}{1+p}(u^p)_x \\&= \frac{1}{1+p}(u^p)_x + \frac{p}{1+p}(u^p)_x \\&= \frac{p}{1+p}u^{p-1}u_x + \frac{p}{1+p}(u^p)_x \\&= \frac{p}{1+p} [u^{p-1}u_x + (u^p)_x] \\&= \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + [(u_m^{n+1/2})^p]_{\hat{x}} \right\}\end{aligned}$$

yaklaşımını kullandılar ve Problem 1 için aşağıdaki kapalı biçimde verilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemasını önerdiler:

$$(u_m^n)_t + (u_m^n)_{xx\hat{x}t} + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + (u_m^{n+1/2})_{x\hat{x}\hat{x}} + (u^p)_x = 0 \quad (3.1.1)$$

$$u_m^0 = u_0(x_m) \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} u_0^n &= u_M^n = 0 \\ (u_0^n)_{\hat{x}} &= (u_M^n)_{\hat{x}} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Burada  $(u_m^n)_x, (u_m^n)_{\bar{x}}, (u_m^n)_{\hat{x}}, (u_m^n)_t$  türev operatörleri ve  $u_m^{n+(1/2)}$

$$\begin{aligned} (u_m^n)_x &= \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, & (u_m^n)_{\bar{x}} &= \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}, \\ (u_m^n)_{\hat{x}} &= \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}, & (u_m^n)_t &= \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k}, \\ u_m^{n+(1/2)} &= \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

olarak tanımlanan operatörlerdir. Bu operatörlerin kullanılmasıyla problemde görülen türevler yerine

$$\begin{aligned} (u_m^n)_t &= \frac{1}{k}(u_m^{n+1} - u_m^n), \\ (u_m^n)_{xx\bar{x}t} &= \frac{1}{kh^4} [(u_{m-2}^{n+1} - u_{m-2}^n) - 4(u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n) + 6(u_m^{n+1} - u_m^n) - 4(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) \\ &\quad + (u_{m+2}^{n+1} - u_{m+2}^n)], \\ (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} &= \frac{1}{4h} [(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)], \\ (u_m^{n+1/2})_{x\bar{x}\hat{x}} &= \frac{1}{4h^3} [(u_{m+2}^{n+1} - u_{m-2}^{n+1}) - 2(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) - 2(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)], \\ (u^p)_{\hat{x}} &= \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + [(u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})]_{\hat{x}} \right\} \\ &= \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} \left[ \frac{(u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n)}{4h} - \frac{(u_{m-1}^{n+1} + u_{m-1}^n)}{4h} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ (u_{m+1}^{n+1/2})^{p-1} \frac{(u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n)}{4h} - (u_{m-1}^{n+1/2})^{p-1} \frac{(u_{m-1}^{n+1} + u_{m-1}^n)}{4h} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

yaklaşımları yazılırsa,

$$\lambda = \frac{p}{p+1} (u_m^{n+1/2})^{p-1} \quad \mu = \frac{p}{p+1} (u_{m+1}^{n+1/2})^{p-1} \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{p}{p+1} (u_{m-1}^{n+1/2})^{p-1} \quad (3.1.6)$$

olmak üzere, (3.1.1) ile verilen denklemden  $n = 0(1)N$  ve  $m = 1(1)M - 1$  için

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) u_{m-2}^{n+1} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) u_{m-1}^{n+1} + \left( \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) u_m^{n+1} \\ &+ \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} + \frac{\lambda+\mu}{4h} \right) u_{m+1}^{n+1} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) u_{m+2}^{n+1} \\ &= \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) u_{m-2}^n + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} + \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) u_{m-1}^n + \left( \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) u_m^n \\ &+ \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{\lambda+\mu}{4h} \right) u_{m+1}^n + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) u_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

biçiminde  $(M+3)$ -bilinmeyenli  $(M-1)$ -denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin bir tek çözümünün olabilmesi için denklem sayısının bilinmeyen sayısına

eşit olması gerekir. Açıkça  $m = 1$  ve  $m = M - 1$  için sistemde problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarında karşılaşılan  $(x_{-1}, t_n), (x_{-1}, t_n + k), (x_{M+1}, t_n)$  ve  $(x_{M+1}, t_n + k)$  hayali noktalarında  $u$ 'nun  $u_{-1}^n, u_{-1}^{n+1}, u_{M+1}^n$  ve  $u_{M+1}^{n+1}$  hayali değerleri problemde verilen

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad \text{ve} \quad u_{\hat{x}}(a, t) = u_{\hat{x}}(b, t) = 0$$

sınır şartlarının kullanılmasıyla yok edilebilir. Şöyle ki,

$$(u_m^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad \text{ve} \quad (u_m^{n+1})_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

olmak üzere  $u_{\hat{x}}(a, t) = 0$  dan

$$u_{-1}^n = u_1^n \quad \text{ve} \quad u_{-1}^{n+1} = u_1^{n+1}$$

ve  $u_{\hat{x}}(b, t) = 0$  dan

$$u_{M+1}^n = u_{M-1}^n \quad \text{ve} \quad u_{M+1}^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}$$

dir. Bunlar (3.1.7)'de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\alpha_1 + \alpha_3)u_m^{n+1} + \alpha_4 u_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{m+2}^{n+1} = (\beta_1 + \beta_3)u_m^n + \beta_4 u_{m+1}^n + \beta_5 u_{m+2}^n, \quad m = 1$$

$$\alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 u_m^{n+1} + \alpha_4 u_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{m+2}^{n+1} = \beta_1 u_{m-2}^n + \beta_2 u_{m-1}^n + \beta_3 u_m^n + \beta_4 u_{m+1}^n + \beta_5 u_{m+2}^n, \quad m = 2(1)M - 2$$

$$\alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} + (\alpha_3 + \alpha_5)u_m^{n+1} = \beta_1 u_{m-2}^n + \beta_2 u_{m-1}^n + (\beta_3 + \beta_5)u_m^n, \quad m = M - 1 \quad (3.1.8)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3}, \\ \alpha_2 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{\lambda}{4h} - \frac{\psi}{4h}, \\ \alpha_3 &= \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \alpha_4 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} + \frac{\lambda}{4h} + \frac{\mu}{4h}, \\ \alpha_5 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3}, \\ \beta_2 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} + \frac{\lambda}{4h} + \frac{\psi}{4h}, \\ \beta_3 &= \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \beta_4 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{\lambda}{4h} - \frac{\mu}{4h}, \\ \beta_5 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \end{aligned}$$

dir.

Luo vd. [5] çalışmalarında (3.1.8) ile verilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemasının yerel kesme hatasının  $O(h^2 + k^2)$  ve doğruluk yani hesaplama mertebesinin ikinci mertebeden olduğunu gösterdiler.  $h \rightarrow 0$  ve  $k \rightarrow 0$  iken  $O(h^2 + k^2) \rightarrow 0$  olacağından (3.1.8) sonlu fark yaklaşımı (1.1.1)-(1.1.3) denklemleriyle verilen Problem 1 ile tutarlı olacaktır.



(3.1.8) ile verilen  $(M - 1)$ -bilinmeyenli  $(M - 1)$ -denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & \vdots & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ & & & & & & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{u}^{n+1}} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & \vdots & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ & & & & & & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 + \beta_5 & \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{u}^n} \quad (3.1.9)$$

veya kısaca

$$A\underline{u}^{n+1} = B\underline{u}^n$$

olarak ifade edilebilir.

İterasyona başlamak için  $\underline{u}^0$  başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bu vektör problemde (3.1.2) ile verilen

$$u_m^0 = u_0(x_m), \quad m = 1(1)M - 1$$

başlangıç şartından kolayca elde edilir.

Açıkça, (3.1.9) cebirsel denklem sistemi (3.1.6) ile verilen nonlinear terimleri içerdiğinden lineer değildir. Dolayısıyla bu sistem direkt çözüm yöntemlerinden biri yardımıyla çözülemez. Bu tip sistemler için etkin bir nümerik yöntem olan Newton-Raphson yöntemi kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilebilir. Ancak bu çalışmada direkt yöntemler yardımıyla çözümlerin elde edilmesi amaçlandığından (3.1.8) cebirsel denklem sisteminde görülen (3.1.6) ile verilen nonlinear terimler yerine herhangi bir direkt çözücünün kullanılması esnasında her bir zaman adımında  $\tilde{u} = \underline{u}^n$  olmak üzere

$$\tilde{u}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\tilde{u}^n + \underline{u}^n}{2}$$

olarak verilen iç iterasyon uygulandı. Bir sonraki zaman adımına geçmeden aynı zaman adımında nonlinear terimleri daha da iyileştirmek için yukarıdaki iç iterasyon birkaç defa tekrarlandı. İlerleyen her bir zaman adımında cebirsel denklem sisteminin çözümü sürecinde benzer işlemler yapılarak istenilen  $T$  zamanındaki yaklaşık çözümler bulundu.

Hesaplama esnasında Matlab sembolik programında kullanılan iç iterasyonun kodları okuyucuya kolaylık olması bakımından aşağıda verildi:

for n=0:N % zaman iterasyon döngüsü

$$\tilde{u}^n = u^n$$

for k=1:5 % iç iterasyon

$$\tilde{u}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\tilde{u}^n + u^n}{2}$$

for m=1:M-1 % konum döngüsü

$A\tilde{u}^n = B\tilde{u}^n$  % sisteminin A ve B katsayılar matrislerini oluştururken

$$\% \lambda = \frac{p}{p+1} (\tilde{u}_m^{n+\frac{1}{2}})^{p-1} \text{ olarak hesapla}$$

$$\% \mu = \frac{p}{p+1} (\tilde{u}_{m+1}^{n+\frac{1}{2}})^{p-1} \text{ olarak hesapla}$$

$$\% \psi = \frac{p}{p+1} (\tilde{u}_{m-1}^{n+\frac{1}{2}})^{p-1} \text{ olarak hesapla}$$

end

$A\tilde{u}^n = B\tilde{u}^n$  % denklem sistemini çöz ve yeni  $\tilde{u}^n$ 'yi bul

end

$$u^{n+1} = \tilde{u}^n$$

% Böylece  $(n+1)$ -inci zaman adımındaki  $u^{n+1}$  değerleri bulunur.

end

### 3.1.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda, 1-boyutlu genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi için verilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemasının kararlılığı von-Neumann yöntemiyle araştırıldı. Bu yöntemle kararlılık şöyle incelenir:  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\gamma$  mod sayısı ve  $\xi$  güçlendirme çarpanı olmak üzere, (3.1.9) ile verilen şemanın genel satırında  $(x_m, t_n)$  ayrık noktadaki  $u_m^n$  yerine

$$u_m^n = \xi^n e^{i\gamma m h} \quad (3.1.10)$$

yazılır. Şemanın kararlı olması için gerek ve yeter şart  $|\xi| \leq 1$  olmasıdır. (3.1.10) eşitliği (3.1.8) fark denkleminin genel satırında yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \xi^{n+1} \left[ \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) e^{i\gamma(m-2)h} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} - \frac{\lambda}{4h} - \frac{\psi}{4h} \right) e^{i\gamma(m-1)h} + \left( \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) e^{i\gamma mh} \right. \\
& \left. + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} + \frac{\lambda}{4h} + \frac{\mu}{4h} \right) e^{i\gamma(m+1)h} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) e^{i\gamma(m+2)h} \right] \\
& = \xi^n \left[ \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) e^{i\gamma(m-2)h} + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} + \frac{\lambda}{4h} + \frac{\psi}{4h} \right) e^{i\gamma(m-1)h} + \left( \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) e^{i\gamma mh} \right. \\
& \left. + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} - \frac{\lambda}{4h} - \frac{\mu}{4h} \right) e^{i\gamma(m+1)h} + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) e^{i\gamma(m+2)h} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

elde edilir.  $h > 0$ 'nın yeterince küçük bir pozitif sayı olması durumunda (3.1.6) ile verilen

$$\lambda = \frac{p}{p+1} (u_m^{n+1/2})^{p-1}, \quad \mu = \frac{p}{p+1} (u_{m+1}^{n+1/2})^{p-1} \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{p}{p+1} (u_{m-1}^{n+1/2})^{p-1}$$

eşitlikleri için

$$\max\{\lambda, \mu, \psi\} = K \tag{3.1.12}$$

alınabilir. (3.1.12) eşitliği (3.1.11)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \xi^{n+1} e^{i\gamma mh} \left[ \frac{1}{kh^4} (e^{2i\gamma h} + e^{-2i\gamma h}) + \frac{1}{4h^3} (e^{2i\gamma h} - e^{-2i\gamma h}) - \frac{4}{kh^4} (e^{i\gamma h} + e^{-i\gamma h}) + \frac{1}{4h} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) \right. \\
& \left. - \frac{2}{4h^3} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) + \frac{K}{4h} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right] \\
& = \xi^n e^{i\gamma mh} \left[ \frac{1}{kh^4} (e^{2i\gamma h} + e^{-2i\gamma h}) - \frac{1}{4h^3} (e^{2i\gamma h} - e^{-2i\gamma h}) - \frac{4}{kh^4} (e^{i\gamma h} + e^{-i\gamma h}) - \frac{1}{4h} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) \right. \\
& \left. + \frac{2}{4h^3} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) - \frac{K}{4h} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Euler formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \xi \left[ \left( \frac{2}{kh^4} \cos(2\gamma h) - \frac{8}{kh^4} \cos(\gamma h) + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) + i \left( \frac{2}{4h^3} \sin(2\gamma h) + \frac{2}{4h} \sin(\gamma h) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4}{4h^3} \sin(\gamma h) + \frac{2K}{4h} \sin(\gamma h) \right) \right] = \\
& \left[ \left( \frac{2}{kh^4} \cos(2\gamma h) - \frac{8}{kh^4} \cos(\gamma h) + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) - i \left( \frac{2}{4h^3} \sin(2\gamma h) + \frac{2}{4h} \sin(\gamma h) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{4}{4h^3} \sin(\gamma h) + \frac{2K}{4h} \sin(\gamma h) \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

olarak yazılabilir.

$$\tilde{A} = \frac{2}{kh^4} \cos(2\gamma h) - \frac{8}{kh^4} \cos(\gamma h) + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \quad \text{ve} \quad \tilde{B} = \frac{2}{4h^3} \sin(2\gamma h) + \frac{2}{4h} \sin(\gamma h) - \frac{4}{4h^3} \sin(\gamma h) + \frac{2K}{4h} \sin(\gamma h)$$

olmak üzere (3.1.13)'den

$$|\xi| = \frac{|\tilde{A}-i\tilde{B}|}{|\tilde{A}+i\tilde{B}|} \quad (3.1.14)$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart  $|\xi| \leq 1$  olmasıdır. Açıkça, (3.1.14)'den

$$|\xi| = 1$$

olup böylece (3.1.9) ile verilen fark şeması şartsız kararlıdır.

### 3.2 Şema 2

Yukarıda Lou vd. [5] tarafından önerilen korunumlu Crank-Nicolson yöntemi hakkında yukarıda verilen hazırlıklardan sonra tezin özgün kısımlarından biri olan bu kısım da  $(u^p)_x$  lineer olmayan terimi yerine Yaklaşım 2'de verilen Rubin-Graves tipi lineerleştirme kullanılarak (1.1.1)-(1.1.3) ile verilen Problem 1'in nümerik şeması elde edilecektir. (1.1.1) denklemindeki lineer olmayan  $(u^p)_x$  terimine, önce Crank-Nicolson ve sonra Rubin-Graves tipi lineerleştirme yaklaşımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} (u^p)_x &= \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^{n+1} + \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^n \\ &= \frac{p}{2} ((u^{p-1})^n u_x^{n+1} + (p-1) (u^{p-2})^n u_x^n u^{n+1}) \\ &\quad - (p-1) \frac{p}{2} (u^{p-1})^n u_x^n + \frac{p}{2} (u^{p-1} u_x)^n \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

elde edilir [16]. Bu yaklaşım (3.1.1) ile verilen

$$(u_m^n)_t + (u_m^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + (u_m^{n+1/2})_{x\bar{x}\hat{x}} + (u^p)_x = 0$$

korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark denkleminde yerine yazılırsa,  $n = 0(1)N$  ve  $m = 1(1)M - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} (u_m^n)_t + (u_m^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + (u_m^{n+1/2})_{x\bar{x}\hat{x}} + \frac{p}{2} \left[ (u_m^{p-1})^n \left( \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2h} \right) \right. \\ \left. + (p-1) (u_m^{p-2})^n \left( \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{2h} \right) u_m^{n+1} + (2-p) (u_m^{p-1}) u_{\hat{x}}^n \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

bulunur. Bu denklemin başlangıç ve sınır şartları (3.1.2) ve (3.1.3)'den

$$\begin{aligned} u_m^0 &= u_0(x_m) \\ u_0^n &= u_M^n = 0 \\ (u_0^n)_{\hat{x}} &= (u_M^n)_{\hat{x}} = 0 \end{aligned}$$

dir.

(3.1.4) ile verilen fark yaklaşımları (3.2.2)'de kullanılırsa,  $n = 0(1)N$  ve  $m = 1(1)M - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) u_{m-2}^{n+1} + \left[ -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n \right] u_{m-1}^{n+1} + \left[ \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} + \frac{p}{4h} \gamma_m (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right] u_m^{n+1} \\
& + \left[ -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} + \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n \right] u_{m+1}^{n+1} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) u_{m+2}^{n+1} \\
& = \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} \right) u_{m-2}^n + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} \right) u_{m-1}^n + \left( \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \right) u_m^n + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} \right) u_{m+1}^n \\
& + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} \right) u_{m+2}^n - \omega_m
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

fark denklemi elde edilir. Burada

$$\gamma_m = (p-1)(u^{p-2})^n \quad \text{ve} \quad \omega_m = (2-p)(u^{p-1}u_x)^n$$

olmak üzere, bu fark denkleminin herhangi bir zaman adımında  $m = 1(1)M - 1$  için  $(M + 3)$ -bilinmeyenli  $(M - 1)$ -denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin bir tek çözümünün olabilmesi için bilinmeyenler sayısının denklem sayısına eşit olması gerekir. Açıkça  $m = 1$  ve  $m = M - 1$  için sistemde problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarında görülen  $(x_{-1}, t_n), (x_{-1}, t_n + k), (x_{M+1}, t_n)$  ve  $(x_{M+1}, t_n + k)$  hayali noktalarında  $u$ 'nun  $u_{-1}^n, u_{-1}^{n+1}, u_{M+1}^n$  ve  $u_{M+1}^{n+1}$  hayali değerleri problemde verilen

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad \text{ve} \quad u_{\hat{x}}(a, t) = u_{\hat{x}}(b, t) = 0$$

sınır şartlarının kullanılmasıyla yok edilebilir. Şöyle ki,

$$(u_m^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad \text{ve} \quad (u_m^{n+1})_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

olmak üzere  $u_{\hat{x}}(a, t) = 0$  dan

$$u_{-1}^n = u_1^n \quad \text{ve} \quad u_{-1}^{n+1} = u_1^{n+1}$$

ve  $u_{\hat{x}}(b, t) = 0$  dan

$$u_{M+1}^n = u_{M-1}^n \quad \text{ve} \quad u_{M+1}^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3}, \\
\alpha_2 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3} - \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n, \\
\alpha_3 &= \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} + \frac{p}{4h} \gamma_m (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \\
\alpha_4 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3} + \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n \quad \alpha_5 = \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3}, \\
\beta_1 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3}, \\
\beta_2 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{2h^3}, \\
\beta_3 &= \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\
\beta_4 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{2h^3}, \\
\beta_5 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3}
\end{aligned}$$

olmak üzere (3.2.3) fark denklemi

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 + \alpha_3)u_m^{n+1} + \alpha_4u_{m+1}^{n+1} + \alpha_5u_{m+2}^{n+1} &= (\beta_1 + \beta_3)u_m^n + \beta_4u_{m+1}^n + \beta_5u_{m+2}^n, & m = 1 \\
 \alpha_1u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2u_{m-1}^{n+1} + \alpha_3u_m^{n+1} + \alpha_4u_{m+1}^{n+1} + \alpha_5u_{m+2}^{n+1} &= \beta_1u_{m-2}^n + \beta_2u_{m-1}^n \\
 &\quad + \beta_3u_m^n + \beta_4u_{m+1}^n + \beta_5u_{m+2}^n, & m = 2(1)M - 2 \\
 \alpha_1u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2u_{m-1}^{n+1} + (\alpha_3 + \alpha_5)u_m^{n+1} &= \beta_1u_{m-2}^n + \beta_2u_{m-1}^n + (\beta_3 + \beta_5)u_m^n, & m = M - 1
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olarak yazılabilir. Böylece, (3.2.4) fark şeması  $(M - 1)$ -bilinmeyenli  $(M - 1)$ -denklemden oluşan çözülebilir bir cebirsel denklem sistemi olup matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & \vdots & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ & & & & & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{u}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & \vdots & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ & & & & & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 + \beta_5 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{u}^n} \tag{3.2.5}$$

veya kısaca

$$A\underline{u}^{n+1} = B\underline{u}^n$$

olarak ifade edilebilir.

Yine burada da iterasyona başlamak için  $\underline{u}^0$  başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bu vektör problemde (3.1.2) ile verilen

$$u_m^0 = u_0(x_m), \quad m = 1(1)M - 1$$

başlangıç şartından kolayca elde edilir.

### 3.3 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Şema 2’de (3.2.5) ile verilen

$$A\underline{u}^{n+1} = B\underline{u}^n$$

matris cebirsel denklem sisteminden Problem 1’in yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

$p = 3$  ve  $p = 5$  için Problem 1’in analitik çözümü bilindiğinden yaklaşık çözümlerin analitik çözüme ne kadar yakın olduğunu ölçmek için sırasıyla ortalama hata ve maksimum hata olarak bilinen

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{m=0}^N (u_m^{tam} - u_m^{num})^2} \quad \text{ve} \quad L_\infty = \max |u_m^{tam} - u_m^{num}|$$

hata normları ile birlikte

$$E^n = \|u^n\|^2 + \|u_{xx}^n\|^2 = \int_a^b [u^2 + u_{xx}^2] dx = E^{n-1} = \dots = E^0$$

$$\text{Mertebe}(L) = \log_2(L(2h, 2k)/L(h, k))$$

olarak tanımlanan enerjinin korunumu ve şemanın doğruluk mertebesi hesaplanacaktır. Burada  $u^{tam}$  ve  $u^{num}$  sırasıyla tam ve nümerik çözümler olup  $L$  ise  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarından birini temsil eder.

Bilindiği üzere nümerik hesaplamalarda problemin çözüm bölgesinin sonlu olması ve parametrelerinin reel sabitler alınması gerekir. Bundan dolayı, bu tezde yapılan tüm hesaplamalarda  $p = 3$ ,  $p = 5$  ve  $[a, b] = [-60, 90]$  alındı. Diğer parametreler ise daha sonra seçilecektir. Bu tez çalışmasında bütün hesaplamalar, AMD Ryzen 7 3700U (Radeon Vega Mobile Gfx 2.30GHz) bilgisayar ile Matlab R2015a sembolik programlama dili kullanılarak elde edildi.

**Çizelge 3.1 :** Problem 1'in  $k = 0.05$  için Şema 2'den elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$h$	$T$	$p = 3$		$p = 5$	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	10	3.50756	1.32926	4.56583	1.70857
	20	6.64923	2.45619	9.09586	3.34599
	30	9.52458	3.44237	13.72656	4.95056
	40	12.25205	4.36228	18.53943	6.58865
0.125	10	0.96980	0.36766	1.29348	0.48643
	20	1.84137	0.68063	2.57751	0.95041
	30	2.64143	0.95507	3.89077	1.40571
	40	3.40179	1.21235	5.25596	1.87274
0.0625	10	0.33516	0.12722	0.47568	0.18094
	20	0.63815	0.23594	0.94767	0.35114
	30	0.91803	0.33200	1.43069	0.51863
	40	1.18520	0.42248	1.93286	0.69029

**Çizelge 3.2 :** Problem 1'in  $h = 0.125$  için Şema 2'den elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$k$	$T$	$p = 3$		$p = 5$	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	10	0.85149	0.32260	1.09914	0.41193
	20	1.61460	0.59669	2.19050	0.80556
	30	2.31293	0.83632	3.30651	1.19265
	40	2.97510	1.06017	4.46669	1.58963
0.005	10	0.84779	0.32119	1.09308	0.40973
	20	1.60752	0.59407	2.17844	0.80104
	30	2.30268	0.83261	3.28833	1.18601
	40	2.96179	1.05541	4.44216	1.58082
0.0025	10	0.84687	0.32084	1.09156	0.40918
	20	1.60575	0.59341	2.17543	0.79991
	30	2.30011	0.83169	3.28379	1.18436
	40	2.95846	1.05423	4.43603	1.57862



**Çizelge 3.3 :** Problem 1'in Şema 2'den elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	$p = 3$						$p = 5$					
		$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )				
10	0.25	6.44630	1.97767	2.44517	1.97494	9.41297	1.97491	3.58472	1.97008				
	0.125	1.61751	1.99469	0.61389	1.99388	2.36014	1.99577	0.90115	1.99202				
	0.0625	0.40471	1.99881	0.15366	1.99816	0.59007	1.99991	0.22544	1.99902				
	0.03125	0.10119	1.99974	0.03842	1.99956	0.14747	2.00046	0.05636	2.00001				
20	0.25	12.28075	1.97249	4.53178	1.96665	18.78547	1.97126	6.95266	1.96094				
	0.125	3.08334	1.99383	1.13935	1.99185	4.70610	1.99701	1.74525	1.99413				
	0.0625	0.77149	1.99877	0.28520	1.99813	1.17558	2.00115	0.43634	1.99990				
	0.03125	0.19289	1.99982	0.07132	1.99957	0.29365	2.00120	0.10903	2.00072				
30	0.25	17.68474	1.96878	6.38131	1.96060	28.41196	1.96739	10.27603	1.95185				
	0.125	4.44150	1.99338	1.60487	1.99138	7.11206	1.99815	2.57813	1.99488				
	0.0625	1.11126	1.99885	0.40179	1.99791	1.77515	2.00232	0.64414	2.00087				
	0.03125	0.27782	1.99993	0.10047	1.99960	0.44320	2.00191	0.16088	2.00138				
40	0.25	22.85746	1.96626	8.12598	1.95214	38.45188	1.96344	13.68543	1.94981				
	0.125	5.74106	1.99327	2.04496	1.99046	9.61779	1.99927	3.43406	1.99465				
	0.0625	1.43623	1.99902	0.51188	1.99819	2.39870	2.00345	0.85727	2.00209				
	0.03125	0.35903	2.00007	0.12799	1.99977	0.59859	2.00261	0.21400	2.00213				

**Çizelge 3.4 :** Problem 1'in  $T = 40$ 'da Şema 2'den elde edilen  $L_\infty$  hata normu ve doğruluk mertebesi.

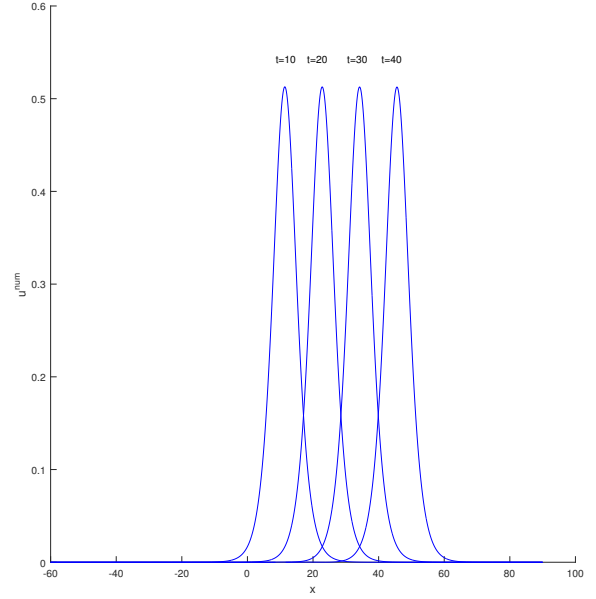
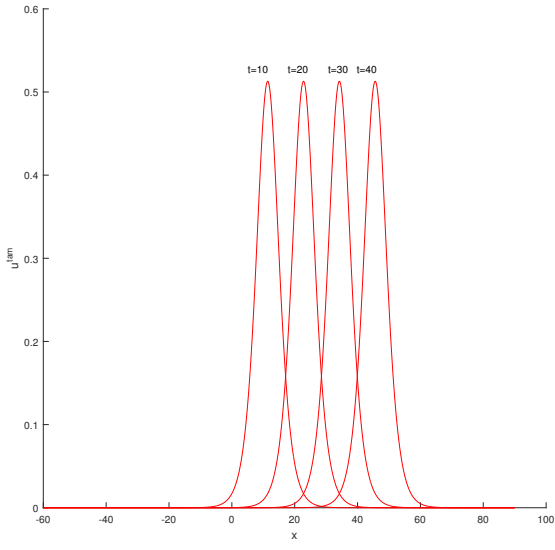
$p$	$h = k$	Şema 2						
		$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	
3	0.25	8.12598	1.95214	7.53941	13.4986	1.97868	7.70544	1.98794
	0.125	2.04496	1.99046	1.89987	3.42489	1.99437	1.94252	1.98794
	0.0625	0.51188	1.99819	0.47584	0.85957	1.99827	0.48655	1.99726
	0.03125	0.12799	1.99977		0.21515		0.12169	1.99937
5	0.25	13.68543	1.94981	12.0204	17.9985			
	0.125	3.43406	1.99465	3.03743	4.56804	1.97822		
	0.0625	0.85727	2.00209	0.76141	1.14689	1.99384		
	0.03125	0.21400	2.00213		0.28708	1.99820		

**Çizelge 3.5 :** Problem 1'in  $p = 3$  için Şema 2'den elde edilen enerji korunumu.

Yöntem	$T$	$E^n$	$E^n$	$E^n$	$E^n$
		$h = k = 0.25$	$h = k = 0.125$	$h = k = 0.0625$	$h = k = 0.03125$
Şema 2	10	1.68248986907	1.68253858565	1.68254607473	1.68254742594
	20	1.68244724538	1.68253385714	1.68254552340	1.68254735785
	30	1.68240700287	1.68252927066	1.68254498085	1.68254729464
	40	1.68236896522	1.68252481812	1.68254444661	1.68254722934
[5](Şema 1)	10	1.68252899329	1.68254308255	1.68254661108	
	20	1.68252899328	1.68254308255	1.68254661095	
	30	1.68252899327	1.68254308255	1.68254661102	
	40	1.68252899325	1.68254308254	1.68254661095	
[9]	10	1.68252899331	1.68254308255	1.68254661103	1.68254749462
	20	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661113	1.68254749389
	30	1.68252899331	1.6825430825	1.68254661113	1.68254749311
	40	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661112	1.68254749364
[14]	10	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661116	1.68254749396
	20	1.68252899331	1.68254308255	1.68254661119	1.68254749500
	30	1.68252899331	1.68254308254	1.68254661109	1.68254749564
	40	1.68252899330	1.68254308254	1.68254661129	1.68254749510

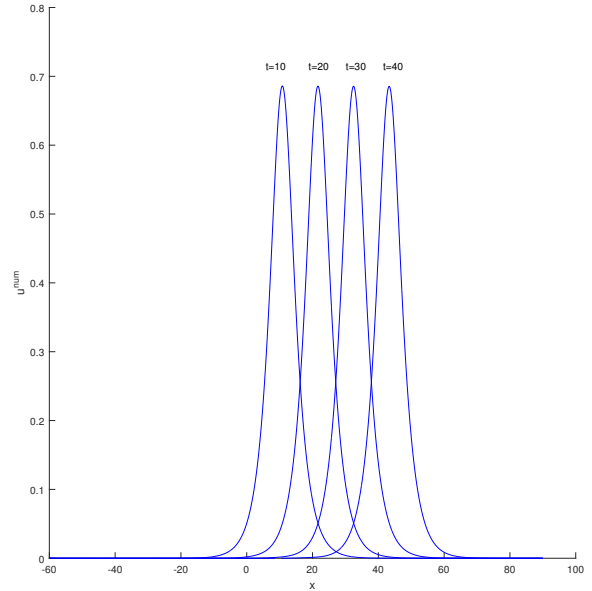
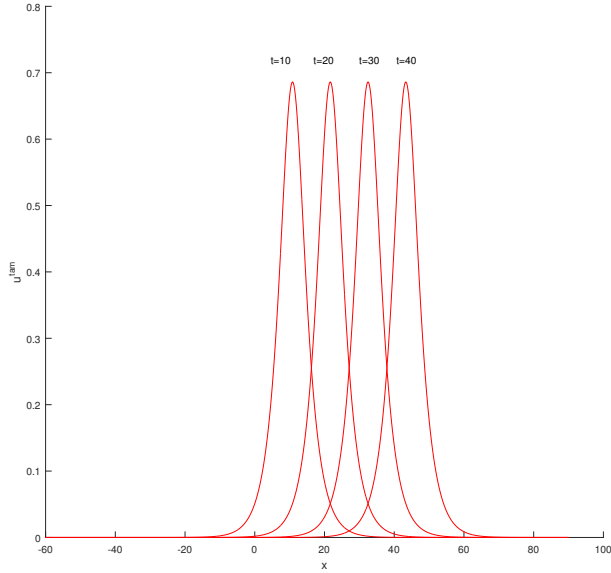
**Çizelge 3.6 :** Problem 1'in  $p = 5$  için Şema 2'den elde edilen enerji korunumu.

Yöntem	$T$	$E^n$	$E^n$	$E^n$	$E^n$
		$h = k = 0.25$	$h = k = 0.125$	$h = k = 0.0625$	$h = k = 0.03125$
Şema 2	10	3.11051055794	3.11068339009	3.11070758792	3.11071142601
	20	3.11033659635	3.11066315538	3.11070516615	3.11071112522
	30	3.11016671004	3.11064311319	3.11070275493	3.11071083985
	40	3.11000088313	3.11062327443	3.11070035490	3.11071054220
[5](Şema 1)	10	3.11067490241	3.11070293879	3.11070996430	
	20	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996426	
	30	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996417	
	40	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996435	
[9]	10	3.11067490241	3.11070293879	3.11070996429	3.11071172144
	20	3.11067490241	3.11070293880	3.11070996430	3.11071172043
	30	3.11067490240	3.11070293880	3.11070996415	3.11071171717
	40	3.11067490241	3.11070293880	3.11070996416	3.11071171899



(a)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik çözüm grafiği.

(b)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için nümerik çözüm grafiği.



(c)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik çözüm grafiği.

(d)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için nümerik çözüm grafiği.

**Şekil 3.1 :** Problem 1'in analitik (soldakiler) ve Şema 2'den elde edilen nümerik (sağdakiler) çözümlerinin farklı  $T$  zamanlarında dalga profilleri.

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için zaman adım uzunluğu  $k = 0.05$  alınarak  $h$  konum adım uzunluğunun küçülmesi ve konum adım uzunluğu  $h = 0.125$  alınarak zaman adım uzunluğunun küçülmesi durumlarında farklı  $T$  zamanlarında ( $T = 10, 20, 30$  ve  $40$  için) Problem 1'in Şema 2'den hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları verildi. Çizelgelere bakıldığında hesaplanan hata normlarının yeterince küçük olduğu ve en önemlisi aynı bitiş  $T$

zamanlarında  $h$  ve  $k$  değerlerinin küçülmesi durumunda hata normlarının da gittikçe azaldığı açıkça görülmektedir.

Çizelge 3.3'de sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için Problem 1'in Şema 2'den elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte bu normlardan elde edilen doğruluk mertebeleri verildi. Çizelgelerden görüldüğü üzere konum adım uzunluğu  $h$  ve zaman adım uzunluğu  $k$  değerleri küçülürken  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarında herhangi bir  $T$  zamanında küçülmektedir. Yine çizelgelerden görüldüğü gibi  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarında hesaplanan hata mertebeleri, teorik değeri 2'nin çok yakın civarındadır.

Çizelge 3.4'de Problem 1'in sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için  $T = 40$  bitiş zamanında Şema 2'den elde edilen  $L_\infty$  hata normu ve doğruluk mertebesi verildi. Aynı parametreler için hesaplanan  $L_\infty$  hata normu [5, 9, 14] referanslarında verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelge 3.4'de açıkça görüldüğü üzere Şema 2'den hesaplanan  $L_\infty$  hata normları  $h$  küçülürken azalmakta olup diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla uyum içindedir.

Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için  $h = k = 0.25, 0.125, 0.0625$  ve  $0.03125$  değerleri için  $T = 10, 20, 30$  ve  $40$ 'da hesaplanan enerji korunumu aynı parametre değerleri için [5, 9, 14]'de verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgelerden görüldüğü üzere Şema 2'den elde edilen enerji korunumunun  $T$  zamanı artarken neredeyse değişmeden sabit kaldığı ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla iyi uyum içerisinde oldukları görülmektedir.

Ayrıklaştırılmış grid noktalarında farklı  $T$  zamanlarında Problem 1'in Şema 2'den elde edilen nümerik çözümlerinin dalga profilleri analitik çözüm ile birlikte Şekil 3.1'de verildi. Nümerik çözümler analitik çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar birbirilerine yakın olup Şekil 3.1'den nümerik çözümlerin açıkça problemin sürekliliğini ve doğru fiziksel davranışını sergilediği görülmektedir.

#### 4. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ 1-BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV DENKLEMİNİN KORUNUMLU CRANK-NICOLSON KAPALI SONLU FARK ŞEMALARI

Bu bölümde, (1.1.5)-(1.1.7) denklemleriyle verilen Problem 2, yani

$$\begin{aligned} u_t + u_x + v + v_{xt} + (u^p)_x &= 0, \quad (p \geq 2 \text{ bir tamsayı}) \\ v - u_{xxx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in [a,b] \\ u(a,t) &= u(b,t) = 0, \quad v(a,t) = v(b,t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u_x(a,t) &= u_x(b,t) = 0, \quad v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

problemi ele alındı ve bu problemin yaklaşık çözümlerini elde etmek için iki nümerik şema verildi.

Bu şemalardan biri (Şema 3) Lou vd. [5]'nin makalesinde tek denklemlerle verilen genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi için önerilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yönteminin konuma göre parçalanmış ikili (coupled) denklem sistemi formuna uygulanması sonucunda elde edilen şemadır. Diğer şema (Şema 4) ise Rubin-Graves tipi lineerleştirme tekniği yardımıyla üretilen şemadır.

Bu şemalar yani Şema 3 ve Şema 4, Problem 2 için bilindiği kadarıyla ilk defa bu çalışmada sunulan şemalar olup her birinin doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için  $p = 3$  ve  $p = 5$  durumlarında Problem 2'den elde edilen iki test problem göz önüne alındı.

Her iki şemadan, ayrıklaştırılmış noktalarda hesaplanan yaklaşık sonuçlar ( $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, enerjinin korunumu ve her bir şemanın doğruluk mertebesi) bölüm sonunda "Nümerik Sonuçlar" kısmında kendi içerisinde ve aynı parametre değerlerinde diğer bilim insanlarının sundukları yöntemlerden elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırıldı ve çizelgelerde verildi.

Ayrıca, çözümlerin sürekliliği ile birlikte problemin doğru fiziksel davranışını ne kadar iyi temsil ettiğini göstermek için dalga profilleri grafikler halinde sunuldu.

##### 4.1 Şema 3

(1.1.5) ile verilen ikili (coupled) denklemin korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned} (u_m^n)_t + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + v_m^{n+1/2} + (v_m^n)_{\hat{x}t} + (u^p)_x &= 0, \\ v_m^{n+1/2} - (u_m^{n+1/2})_{x\hat{x}\hat{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

dir [5]. (4.1.1) yaklaşımında lineer olmayan  $(u^p)_x$  terimi yerine Lou vd. [5] tarafından önerilen

$$(u^p)_{\hat{x}} = \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + \left[ (u_m^{n+1/2})^p \right]_{\hat{x}} \right\}$$

yaklaşımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (u_m^n)_t + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + (v_m^{n+1/2}) + (v_m^n)_{\hat{x}t} + \frac{p}{p+1} \left\{ (u_m^{n+1/2})^{p-1} (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + \left[ (u_m^{n+1/2})^p \right]_{\hat{x}} \right\} &= 0 \\ v_m^{n+1/2} - (u_m^{n+1/2})_{\bar{x}\hat{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

elde edilir. (4.1.2)'de görülen türevler, (3.1.4) ile verilen fark operatörlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} (u_m^n)_t &= \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k}, \\ (v_m^n)_{\hat{x}t} &= \frac{1}{2kh} (v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1} - v_{m+1}^n + v_{m-1}^n), \\ \left( u_m^{n+1/2} \right)_{\hat{x}} &= \frac{1}{4h} (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \\ v_m^{n+1/2} &= \frac{v_{m+1}^{n+1} + v_m^n}{2}, \\ \left( u_m^{n+1/2} \right)_{\bar{x}\hat{x}} &= \frac{1}{4h^3} [(u_{m+2}^{n+1} - u_{m-2}^{n+1}) - 2(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) - 2(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikler, (4.1.2)'de yerlerine konur ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda + \psi}{4h} \right) u_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{k} u_m^{n+1} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda + \mu}{4h} \right) u_{m+1}^{n+1} - \frac{1}{2kh} v_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{2} v_m^{n+1} + \frac{1}{2kh} v_{m+1}^{n+1} \\ = \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda + \psi}{4h} \right) u_{m-1}^n + \frac{1}{k} u_m^n - \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda + \mu}{4h} \right) u_{m+1}^n - \frac{1}{2kh} v_{m-1}^n - \frac{1}{2} v_m^n + \frac{1}{2kh} v_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{4h^3} u_{m-2}^{n+1} - \frac{1}{2h^3} u_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{2h^3} u_{m+1}^{n+1} - \frac{1}{4h^3} u_{m+2}^{n+1} + \frac{1}{2} v_m^{n+1} \\ = -\frac{1}{4h^3} u_{m-2}^n + \frac{1}{2h^3} u_{m-1}^n - \frac{1}{2h^3} u_{m+1}^n + \frac{1}{4h^3} u_{m+2}^n - \frac{1}{2} v_m^n \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

ikili fark denklemleri elde edilir. Burada

$$\lambda = \frac{p}{p+1} (u_m^{n+1/2})^{p-1}, \quad \mu = \frac{p}{p+1} (u_{m+1}^{n+1/2})^{p-1} \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{p}{p+1} (u_{m-1}^{n+1/2})^{p-1} \quad (4.1.6)$$

dir.

(4.1.4) fark denklemi  $(2M - 2)$ -bilinmeyenli  $(M - 1)$ -denklemden oluşan cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanırken, (4.1.5) denklemi  $(2M)$ -bilinmeyenli  $(M - 1)$ -denklemden oluşan sistemle sonuçlanmaktadır. Ancak bu ikili sistemin bir tek çözümünün olması sistemin katsayı matrislerinin karesel olmasıyla mümkündür. Açıkça,  $m = 1$  ve  $m = M - 1$  için (4.1.5) denkleminde problemlerin çözüm bölgesinde olmayan  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman

seviyelerinde ortaya çıkan  $u_{-1}^n$ ,  $u_{-1}^{n+1}$ ,  $u_{M+1}^n$  ve  $u_{M+1}^{n+1}$  değerlerinin yok edilmesiyle bu sorunun üstesinden kolayca gelinebilir. Şöyle ki,

$$(u_m^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad \text{ve} \quad (u_m^{n+1})_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

olmak üzere, problemde verilen

$$u_{\hat{x}}(a, t) = u_{\hat{x}}(b, t)$$

sınır şartlarından

$$u_{-1}^n = u_1^n, \quad u_{-1}^{n+1} = u_1^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = u_{M-1}^n \quad \text{ve} \quad u_{M+1}^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}$$

olur. Bunlar (4.1.5)'de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.1.4) ve (4.1.5) ile verilen ikili sistem sırasıyla her biri  $(M-1)$ -bilinmeyenli  $(M-1)$ -denklemden oluşan

$$\rho_2 u_m^{n+1} + \rho_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1} = \kappa_2 u_m^n + \kappa_3 u_{m+1}^n - \sigma_2 v_m^n + \sigma_3 v_{m+1}^n, \quad m = 1$$

$$\rho_1 u_{m-1}^{n+1} + \rho_2 u_m^{n+1} + \rho_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1} = \kappa_1 u_{m-1}^{n+1} + \kappa_2 u_m^{n+1} + \kappa_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} - \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1}, \quad m = 2(1)M-2$$

$$\rho_1 u_{m-1}^{n+1} + \rho_2 u_m^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} = \kappa_1 u_{m-1}^n + \kappa_1 u_m^n + \sigma_1 v_{m-1}^n - \sigma_2 v_m^n, \quad m = M-1 \quad (4.1.7)$$

$$\alpha_1 u_m^{n+1} - \alpha_2 u_{m+1}^{n+1} - \alpha_1 u_{m+2}^{n+1} + \beta_1 v_m^{n+1} = -\alpha_1 u_m^n + \alpha_2 u_{m+1}^n + \alpha_1 u_{m+2}^n - \beta_1 v_m^n, \quad m = 1$$

$$\alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} - \alpha_2 u_{m+1}^{n+1} - \alpha_1 u_{m+2}^{n+1} + \beta_1 v_m^{n+1} = -\alpha_1 u_{m-2}^n - \alpha_2 u_{m-1}^n + \alpha_2 u_{m+1}^n + \alpha_1 u_{m+2}^n - \beta_1 v_m^{n+1}, \quad m = 2(1)M-2$$

$$\alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} - \alpha_1 u_m^{n+1} + \beta_1 v_{m+1}^{n+1} = -\alpha_1 u_{m-2}^n - \alpha_2 u_{m-1}^n + \alpha_2 u_m^n - \beta_1 v_{m+1}^n, \quad m = M-1 \quad (4.1.8)$$

formunda karesel sisteme dönüşür. Burada

$$\rho_1 = -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda+\psi}{4h}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h}, \quad \sigma_1 = -\frac{1}{2kh},$$

$$\rho_2 = \frac{1}{k}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2},$$

$$\rho_3 = \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\mu}{4h}, \quad \kappa_3 = -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda+\mu}{4h}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2kh},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4h^3}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2h^3},$$



olup

$$R = \begin{bmatrix} \rho_2 & \rho_3 & & & & & \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & & & & \\ & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \\ & & & & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ & & & & & \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_3 & & & & & \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & & & & \\ & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \\ & & & & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ & & & & & \kappa_1 & \kappa_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & & & & & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & & \\ & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \\ & & & & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ & & & & & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & & & \\ \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & & & \\ & \beta_1 & & & & & \\ & & \beta_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \beta_1 & & \\ & & & & & \beta_1 & \\ & & & & & & \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_M \ u_{M-1}]^T$$

ve

$$\underline{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_M \ v_{M-1}]^T$$

olmak üzere, (4.1.7) ve (4.1.8) ikili denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} R & M \\ N & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^{n+1} \\ \underline{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & M \\ -N & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Bu sistem,  $(2M - 2)$ -bilinmeyenli  $(2M - 2)$ -denklemden oluşan çözülebilir bir lineer denklem sistemidir. Cebirsel denklem sisteminde görülen (4.1.6) ile verilen nonlineer terimler yerine herhangi bir direkt çözücünün kullanılması esnasında her bir zaman adımında  $\tilde{\underline{u}} = \underline{u}^n$  olmak üzere

$$\tilde{\underline{u}}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\tilde{\underline{u}}^n + \underline{u}^n}{2}$$

olarak verilen iç iterasyon uygulandı. Bir sonraki zaman adımına geçmeden aynı zaman adımında nonlinear terimleri daha da iyileştirmek için yukarıdaki iç iterasyon birkaç defa tekrarlandı. Böylece ilerleyen her bir zaman adımında cebirsel denklem sisteminin çözümü sürecinde benzer işlemler yapılarak istenilen  $T$  zamanındaki yaklaşık çözümler bulunur.

#### 4.1.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.1.7) ve (4.1.8) fark denklemleriyle verilen nümerik şemanın von Neumann yöntemi yardımıyla kararlılık analizi verildi. Bu yöntemle kararlılığın incelenmesinde (4.1.7) ve (4.1.8)'nin genel satırında herhangi bir  $(x_m, t_n)$  grid noktasındaki  $u_m^n$  ve  $v_m^n$  değerleri yerine,  $W_1$  ve  $W_2$  harmonik genlikler olmak üzere,

$$u_m^n = W_1 \xi^n e^{i\gamma m h} \quad \text{ve} \quad v_m^n = W_2 \xi^n e^{i\gamma m h}, \quad (W_1 \neq 0, \quad W_2 \neq 0) \quad (4.1.9)$$

yazılır. Bu yöntemle şemanın kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

olmasıdır.

Önce (4.1.7) fark denklemini ele alalım. Bu denkleminin genel satırında  $u_m^n$  ve  $v_m^n$  yerlerine (4.1.9) ile verilen eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} \left[ \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{i(m-1)\gamma h} + \frac{1}{k} e^{im\gamma h} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{i(m+1)\gamma h} \right] W_1 \\ & + \xi^{n+1} \left[ -\frac{1}{2kh} e^{i(m-1)\gamma h} + \frac{1}{2} e^{im\gamma h} + \frac{1}{2kh} e^{i(m+1)\gamma h} \right] W_2 \\ & = \xi^n \left[ \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h} e^{i(m-1)\gamma h} + \frac{1}{k} e^{im\gamma h} - \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{i(m+1)\gamma h} \right] W_1 \\ & \xi^n \left[ -\frac{1}{2kh} e^{i(m-1)\gamma h} - \frac{1}{2} e^{im\gamma h} + \frac{1}{2kh} e^{i(m+1)\gamma h} \right] W_2 \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \xi e^{im\gamma h} \left[ \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{-i\gamma h} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{i\gamma h} + \frac{1}{k} \right] W_1 \\ & + \xi e^{im\gamma h} \left[ -\frac{1}{2kh} e^{-i\gamma h} + \frac{1}{2kh} \frac{1}{2} e^{i\gamma h} + \frac{1}{2} \right] W_2 \\ & = e^{im\gamma h} \left[ \left( \frac{1}{4h} + \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{-i\gamma h} + \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\lambda+\psi}{4h} \right) e^{i\gamma h} + \frac{1}{k} \right] W_1 \\ & + e^{im\gamma h} \left[ -\frac{1}{2kh} e^{-i\gamma h} + \frac{1}{2kh} e^{i\gamma h} - \frac{1}{2} \right] W_2 \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

elde edilir.  $h > 0$ 'ın yeterince küçük bir pozitif sayı seçilmesi durumunda (3.1.6) ile verilen

$$\lambda = \frac{p}{p+1}(u_m^{n+1/2})^{p-1}, \quad \mu = \frac{p}{p+1}(u_{m+1}^{n+1/2})^{p-1} \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{p}{p+1}(u_{m-1}^{n+1/2})^{p-1}$$

eşitlikleri için

$$\max\{\lambda, \mu, \psi\} = K \quad (4.1.12)$$

alınabilir. (4.1.12) eşitliği (4.1.11)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \xi \left( -\frac{1+2K}{4h} e^{-im\gamma h} + \frac{1+2K}{4h} e^{im\gamma h} + \frac{1}{k} \right) W_1 + \xi \left( -\frac{1}{2kh} e^{-im\gamma h} + \frac{1}{2kh} e^{im\gamma h} + \frac{1}{2} \right) W_2 \\ & = \left( \frac{1+2K}{4h} e^{-im\gamma h} - \frac{1+2K}{4h} e^{im\gamma h} + \frac{1}{k} \right) W_1 + \left( -\frac{1}{2kh} e^{-im\gamma h} + \frac{1}{2kh} e^{im\gamma h} - \frac{1}{2} \right) W_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & \xi \left[ \frac{1+2K}{4h} 2i \sin(\gamma h) + \frac{1}{k} \right] W_1 + \xi \left[ \frac{1}{2kh} 2i \sin(\gamma h) + \frac{1}{2} \right] W_2 \\ & = \left[ -\frac{1+2K}{4h} 2i \sin(\gamma h) + \frac{1}{k} \right] W_1 + \left[ \frac{1}{2kh} 2i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2} \right] W_2 \end{aligned}$$

veya gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{1+2K}{4h} 2i \sin(\gamma h) \right] (\xi + 1) + \frac{1}{k} (\xi - 1) \right\} W_1 \\ & + \left\{ \frac{1}{2kh} 2i \sin(\gamma h) (\xi - 1) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h^2} \cos(\gamma h) \right] (\xi + 1) \right\} W_2 = 0 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi de (4.1.8) ile verilen fark denklemini ele alalım. Yukarıdakine benzer şekilde bu denklemin genel satırında  $u_m^n$  ve  $v_m^n$  yerlerine (4.1.9) ile verilen eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{im\gamma h} \left( \frac{1}{4h^3} e^{-2i\gamma h} - \frac{2}{4h^3} e^{-i\gamma h} + \frac{2}{4h^3} e^{i\gamma h} - \frac{1}{4h^3} e^{2i\gamma h} \right) W_1 + \xi^{n+1} \frac{1}{2} e^{im\gamma h} W_2 \\ & = \xi^n e^{im\gamma h} \left( -\frac{1}{4h^3} e^{-2i\gamma h} + \frac{2}{4h^3} e^{-i\gamma h} - \frac{2}{4h^3} e^{i\gamma h} + \frac{1}{4h^3} e^{2i\gamma h} \right) W_1 - \xi^n \frac{1}{2} e^{im\gamma h} W_2 \end{aligned}$$

veya gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \xi \left[ -\frac{1}{4h^3} (e^{2i\gamma h} - e^{-2i\gamma h}) + \frac{2}{4h^3} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) \right] W_1 + \xi \frac{1}{2} W_2 \\ & = \left[ \frac{1}{4h^3} (e^{2i\gamma h} - e^{-2i\gamma h}) - \frac{2}{4h^3} (e^{i\gamma h} - e^{-i\gamma h}) \right] W_1 - \frac{1}{2} W_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\xi \left[ -\frac{1}{2h^3} i \sin(2\gamma h) + \frac{1}{h^3} i \sin(\gamma h) \right] W_1 + \xi \frac{1}{2} W_2 = \left[ \frac{1}{2h^3} i \sin(2\gamma h) - \frac{1}{h^3} i \sin(\gamma h) \right] W_1 - \frac{1}{2} W_2$$

veya bir takım cebirsel işlemlerden sonra

$$\left\{ \left[ \frac{1}{h^3} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2h^3} i \sin(2\gamma h) \right] (\xi + 1) \right\} W_1 + \frac{1}{2} (\xi + 1) W_2 = 0$$

olarak yazılabilir.

Yukarıda elde edilen (4.1.7) ve (4.1.8) denklemlerin ortak çözüme sahip olduğundan birlikte çözülecektir. Bunların oluşturduğu sistem

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{1+2K}{4h} 2i \sin(\gamma h) \right] (\xi + 1) + \frac{1}{k} (\xi - 1) \right\} W_1 \\ & + \left\{ \left[ \frac{1}{2kh} 2i \sin(\gamma h) \right] (\xi - 1) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h^2} \cos(\gamma h) \right] (\xi + 1) \right\} W_2 = 0 \\ & \left[ \left( \frac{1}{h^3} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2h^3} i \sin(2\gamma h) \right) (\xi + 1) \right] W_1 + \frac{1}{2} (\xi + 1) W_2 = 0 \end{aligned}$$

formunda homojen bir cebirsel denklem sistemidir. Bu sistemin en az bir  $W_1 \neq 0$  ve  $W_2 \neq 0$  çözümünün mevcut olması ancak ve ancak sistemin katsayılar matrisi determinantının sıfır olması ile mümkündür. Buradan

$$(\xi + 1)^2 \left( \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_4 \lambda_5 \right) + (\xi^2 - 1) (\lambda_1 - \lambda_3 \lambda_5) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Burada

$$\lambda_1 = \frac{1}{k}, \quad \lambda_2 = \left( \frac{1+2M}{4h} \right) 2i \sin(\gamma h), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2kh} 2i \sin(\gamma h), \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{h^3} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2h^3} i \sin(2\gamma h)$$

olmak üzere karakteristik denklemin köklerinden biri açıkça

$$\xi_1 = -1$$

olup

$$|\xi_1| = 1 \tag{4.1.13}$$

dir. Diğer kök ise

$$(\xi_2 + 1) \left( \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_4 \lambda_5 \right) + (\xi_2 - 1) (\lambda_1 - \lambda_3 \lambda_5) = 0$$

denkleminde elde edilir. Bu denklemde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\lambda_5$ 'in yukarıda verilen eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi_2 \left[ \frac{1+2K}{4h} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2h^3} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{4h^3} i \sin(2\gamma h) + \frac{1}{k} - \frac{1}{kh^4} \sin^2(\gamma h) + \frac{1}{2kh^4} \sin(\gamma h) \sin(2\gamma h) \right] \\ & = \left[ -\frac{1+2K}{4h} i \sin(\gamma h) + \frac{1}{2h^3} i \sin(\gamma h) + \frac{1}{4h^3} i \sin(2\gamma h) + \frac{1}{k} - \frac{1}{kh^4} \sin^2(\gamma h) + \frac{1}{2kh^4} \sin(\gamma h) \sin(2\gamma h) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan bir takım cebirsel işlemlerden sonra

$$Q_1 = \frac{1}{k} - \frac{1}{kh^4} \sin^2(\gamma h) + \frac{1}{2kh^4} \sin(\gamma h) \sin(2\gamma h) \quad \text{ve} \quad Q_2 = \frac{1+2K}{4h} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{2h^3} i \sin(\gamma h) - \frac{1}{4h^3} i \sin(2\gamma h)$$

olmak üzere

$$\xi_2 = \frac{Q_1 + iQ_2}{Q_1 - iQ_2}$$

elde edilir. Buradan

$$|\xi_2| = 1 \quad (4.1.14)$$

dir.

Kararlılık için gerek ve yeter şart  $|\xi_1| \leq 1$  ve  $|\xi_2| \leq 1$  olmasıdır. Böylece (4.1.13) ve (4.1.14)'den açıkça  $|\xi_1| = 1$  ve  $|\xi_2| = 1$  olup Şema 3 şartsız kararlıdır.

## 4.2 Şema 4

(4.1.1)'de verilen korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark şemasında lineer olmayan  $(u^p)_x$  terimi yerine (3.2.1)'de verilen Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (u_m^n)_t + (u_m^{n+1/2})_{\hat{x}} + v_m^{n+1/2} + (v_m^n)_{\hat{x}t} + \frac{p}{2} \left[ (u_m^{p-1})^n \left( \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) \right. \\ & \left. + (p-1)(u_m^{p-2})^n \left( \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) u_m^{n+1} + (2-p)(u_m^{p-1}) u_{\hat{x}}^n \right] = 0, \\ & v_m^{n+1/2} - (u_m^{n+1/2})_{x\hat{x}\hat{x}} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte  $u_t$ ,  $u_{\hat{x}}$ ,  $v_{\hat{x}t}$ ,  $u_{x\hat{x}\hat{x}}$  türevleri ve  $v_m^{n+1/2}$  yerine (4.1.3) verilen yaklaşımlar yazılır ve gerekli cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{4h} - \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n \right] u_{m-1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{k} + \frac{p}{4h} \gamma_m (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right] u_m^{n+1} + \left[ \frac{1}{4h} + \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n \right] u_{m+1}^{n+1} \\ & - \frac{1}{2kh} v_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{2} v_m^{n+1} + \frac{1}{2kh} v_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{4h} u_{m-1}^n + \frac{1}{k} u_m^n - \frac{1}{4h} u_{m+1}^n - \frac{1}{2kh} v_{m-1}^n - \frac{1}{2} v_m^n + \frac{1}{2kh} v_{m+1}^n - \omega_m \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h^3} u_{m-2}^{n+1} - \frac{1}{2h^3} u_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{2h^3} u_{m+1}^{n+1} - \frac{1}{4h^3} u_{m+2}^{n+1} + \frac{1}{2} v_m^{n+1} \\ & = -\frac{1}{4h^3} u_{m-2}^n + \frac{1}{2h^3} u_{m-1}^n - \frac{1}{2h^3} u_{m+1}^n + \frac{1}{4h^3} u_{m+2}^n - \frac{1}{2} v_m^n \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

ikili fark denklemleri bulunur. Burada

$$\gamma_m = (p-1)(u^{p-2})^n \quad \text{ve} \quad \omega_m = (2-p)(u^{p-1} u_x)^n$$

dir.

(4.2.1) fark denklemi  $(2M-2)$ -bilinmeyenli  $(M-1)$ -denklemden oluşan cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanırken, (4.2.2) denklemi  $(2M)$ -bilinmeyenli  $(M-1)$ -denklemden oluşan sistemle sonuçlanmaktadır. Ancak bu ikili sistemin bir tek çözümünün olması sistemin katsayı matrislerinin karesel olmasıyla mümkündür. Açıkça, bu sorunun üstesinden  $m=1$  ve  $m=M-1$  için (4.2.2) denkleminde problemlerin çözüm bölgesinde olmayan  $n$ -inci ve  $(n+1)$ -inci

zaman seviyelerinde ortaya çıkan  $u_{-1}^n$ ,  $u_{-1}^{n+1}$ ,  $u_{M+1}^n$  ve  $u_{M+1}^{n+1}$  bilinmeyenlerinin yok edilmesiyle gelinebilir. Şöyle ki,

$$(u_m^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad \text{ve} \quad (u_m^{n+1})_{\hat{x}} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

olmak üzere, problemde verilen

$$u_{\hat{x}}(a, t) = u_{\hat{x}}(b, t)$$

sınır şartlarından

$$u_{-1}^n = u_1^n, \quad u_{-1}^{n+1} = u_1^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = u_{M-1}^n \quad \text{ve} \quad u_{M+1}^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}$$

dir. Bunlar (4.2.2)'de yerlerine yazılır ve gerekli cebirsel işlemler yapılırsa, (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 u_m^{n+1} + \varepsilon_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1} &= \mu_2 u_m^n + \mu_3 u_{m+1}^n - \sigma_2 v_m^n + \sigma_3 v_{m+1}^n, & m = 1 \\ \varepsilon_1 u_{m-1}^{n+1} + \varepsilon_2 u_m^{n+1} + \varepsilon_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1} &= \mu_1 u_{m-1}^{n+1} + \mu_2 u_m^{n+1} \\ &+ \mu_3 u_{m+1}^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} + \sigma_3 v_{m+1}^{n+1}, & m = 2(1)M - 2 \\ \varepsilon_1 u_{m-1}^{n+1} + \varepsilon_2 u_m^{n+1} + \sigma_1 v_{m-1}^{n+1} + \sigma_2 v_m^{n+1} &= \mu_1 u_{m-1}^n + \mu_2 u_m^n + \sigma_1 v_{m-1}^n - \sigma_2 v_m^n, & m = M - 1 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_m^{n+1} - \alpha_2 u_{m+1}^{n+1} - \alpha_1 u_{m+2}^{n+1} + \beta_1 v_m^{n+1} &= -\alpha_1 u_m^n + \alpha_2 u_{m+1}^n + \alpha_1 u_{m+2}^n - \beta_1 v_m^n, & m = 1 \\ \alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} - \alpha_2 u_{m+1}^{n+1} - \alpha_1 u_{m+2}^{n+1} + \beta_1 v_m^{n+1} &= -\alpha_1 u_{m-2}^n - \alpha_2 u_{m-1}^n \\ &+ \alpha_2 u_{m+1}^n + \alpha_1 u_{m+2}^n - \beta_1 v_m^{n+1}, & m = 2(1)M - 2 \\ \alpha_1 u_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{m-1}^{n+1} - \alpha_1 u_m^{n+1} + \beta_1 v_{m+1}^{n+1} &= -\alpha_1 u_{m-2}^n - \alpha_2 u_{m-1}^n + \alpha_1 u_m^n - \beta_1 v_{m+1}^n, & m = M - 1 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{4h} - \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n, \quad \mu_1 = \frac{1}{4h}, \quad \sigma_1 = -\frac{1}{2kh},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{k} + \frac{p}{4h} \gamma_m (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4h} + \frac{p}{4h} (u_m^{p-1})^n, \quad \mu_3 = -\frac{1}{4h}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2kh},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4h^3}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2h^3},$$

olup

$$K = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & & & & & & & & & \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & & & & & & & & \\ & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & & & & \\ & & & & & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & & & \\ & & & & & & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & & \\ & & & & & & & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & \\ & & & & & & & & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \mu_2 & \mu_3 & & & & & & & & & \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & & & & & & & \\ & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & & & \\ & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & & \\ & & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & \\ & & & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \\ & & & & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & & & & & & & & & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & & & & & & \\ & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & & \\ & & & & & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & \\ & & & & & & \sigma_1 & \sigma_2 & & & \\ & & & & & & & \sigma_1 & \sigma_2 & & \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & & & & & & & \\ \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & & \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & & \\ & & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & & \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & & & \\ & \beta_1 & & & & & \\ & & \beta_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \beta_1 & & \\ & & & & & \beta_1 & \\ & & & & & & \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_M \ u_{M-1}]^T$$

ve

$$\underline{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_M \ v_{M-1}]^T$$

olmak üzere (4.2.3) ve (4.2.4) ikili denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} K & M \\ N & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^{n+1} \\ \underline{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ -N & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Bu sistem,  $(2M - 2)$ -bilinmeyenli  $(2M - 2)$ -denklemden oluşan çözülebilir bir lineer denklem sistemidir.

İterasyona başlamak için  $\underline{u}^0$  ve  $\underline{v}^0$  başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bu vektörler problemde (1.1.6) ile verilen

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in [a, b]$$

başlangıç şartlarından kolayca elde edilir.

### 4.3 Nümerik Sonuçlar

Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.3'de sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için Problem 2'in Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte bu normlardan elde edilen doğruluk mertebeleri verildi. Çizelgelerden görüldüğü üzere konum adım uzunluğu  $h$  ve zaman adım uzunluğu  $k$  değerleri küçülürken  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarında herhangi bir  $T$  zamanında küçülmektedir. Yine çizelgelerden görüldüğü gibi  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarında hesaplanan hata mertebeleri, teorik değeri 2'nin çok yakın civarındadır.

Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.4'de Problem 2'in sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için  $T = 40$  bitiş zamanında Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen  $L_\infty$  hata normu ve doğruluk mertebesi verildi. Aynı parametreler için hesaplanan  $L_\infty$  hatası [5,9,14] referanslarında verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.4'dan açıkça görüldüğü üzere Şema 3 ve Şema 4'ten hesaplanan  $L_\infty$  hata normları  $h$  küçülürken azalmakta olup diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla uyum içindedir.

Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6 sırasıyla  $p = 3$  ve  $p = 5$  için  $h = k = 0.25, 0.125, 0.0625$  ve  $0.03125$  değerleri için  $T = 10, 20, 30$  ve  $40$ 'da hesaplanan enerji korunumu aynı parametre değerleri için [5,9,14]'de verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgelerden görüldüğü üzere her iki şemadan elde edilen enerji korunumunun  $T$  zamanı artarken neredeyse değişmeden sabit kaldığı ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla iyi uyum içerisinde oldukları görülmektedir.

Ayrıklaştırılmış grid noktalarında farklı  $T$  zamanlarında Problem 2'in Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen nümerik çözümlerinin dalga profilleri analitik çözüm ile birlikte Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de verildi. Nümerik çözümler analitik çözüme oldukça yakın olduğundan grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar birbirilerine yakın olup her iki şekilden nümerik çözümlerin analitik çözümler gibi açıkça problemin sürekliliğini ve doğru fiziksel davranışını sergilediği görülmektedir.



**Çizelge 4.1 :** Problem 2'nin Şema 3'den elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	$p = 3$						$p = 5$					
		$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )				
10	0.25	5.84087	1.98439	2.25675	1.98446	7.55744	1.98303	2.90797	1.98472				
	0.125	1.46417	1.99610	0.56567	1.99621	1.89495	1.99573	0.72984	1.99436				
	0.0625	0.36629	1.99902	0.14150	1.99915	0.47408	1.99895	0.18257	1.99913				
	0.03125	0.09158	1.99988	0.03538	1.99979	0.11854	1.99975	0.04566	1.99944				
20	0.25	10.84336	1.97840	4.05442	1.97713	14.83625	1.97527	5.54952	1.97108				
	0.125	2.72092	1.99464	1.01872	1.99273	3.72487	1.99386	1.39426	1.99286				
	0.0625	0.68086	1.99866	0.25494	1.99852	0.93220	1.99847	0.34898	1.99828				
	0.03125	0.17025	1.99970	0.06375	1.99966	0.23311	1.99962	0.08729	1.99925				
30	0.25	15.35977	1.97399	5.60001	1.96616	22.26282	1.96836	8.11994	1.95909				
	0.125	3.85703	1.99359	1.40762	1.99217	5.59579	1.99222	2.04316	1.99066				
	0.0625	0.96532	1.99841	0.35237	1.99809	1.40082	1.99807	0.51158	1.99777				
	0.03125	0.24139	1.99964	0.08812	1.99954	0.35032	1.99952	0.12796	1.99926				
40	0.25	19.61051	1.97057	7.03142	1.96218	29.97225	1.96188	10.74798	1.95314				
	0.125	4.92714	1.99280	1.76915	1.99075	7.54143	1.99071	2.70794	1.98879				
	0.0625	1.23331	1.99821	0.44323	1.99692	1.88837	1.99769	0.67864	1.99647				
	0.03125	0.30842	1.99956	0.11084	1.99957	0.47228	1.99942	0.16973	1.99940				

**Çizelge 4.2 :** Problem 2'nin  $T = 40$ 'da Şema 3'ten elde edilen  $L_\infty$  hata normu ve doğruluk mertebesi.

$p$	$h = k$	Şema3				[9]				[14]			
		$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )
3	0.25	7.03142	1.97057	7.53941	1.98855	13.49860	1.97868	7.70544	1.94252	1.98794			
	0.125	1.76915	1.99280	1.89987	1.99735	3.42489	1.99437	1.94252	0.48655	1.99726			
	0.0625	0.44323	1.99821	0.47584	1.99735	0.85957	1.99827	0.12169	0.48655	1.99937			
	0.03125	0.11084	1.99957			0.21515							
5	0.25	10.74798	1.96188	12.02040	1.98456	17.99850	1.97822	7.70544	1.94252	1.98794			
	0.125	2.70794	1.99071	3.03743	1.99610	4.56804	1.99384	1.94252	0.48655	1.99726			
	0.0625	0.67864	1.99769	0.76141	1.99610	1.14689	1.99820	0.12169	0.48655	1.99937			
	0.03125	0.16973	1.99940			0.28708							

**Çizelge 4.3 :** Problem 2'nin Şema 4'ten elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	$p = 3$						$p = 5$					
		$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_\infty$ )				
10	0.25	6.05237	1.98397	2.23668	1.98630	8.58854	1.98677	3.30431	1.97934				
	0.125	1.51696	1.99631	0.56119	1.99479	2.14876	1.99890	0.82622	1.99975				
	0.0625	0.34064	1.99923	0.14035	1.99946	0.53691	2.00075	0.20652	2.00024				
	0.03125	0.09487	1.99987	0.03509	1.99989	0.13416	2.00072	0.05162	2.00027				
20	0.25	11.60055	1.97947	4.17977	1.97358	17.19901	1.98547	6.19364	1.97648				
	0.125	2.90887	1.99566	1.04922	1.99410	4.29690	2.00095	1.54998	1.99853				
	0.0625	0.72760	1.99924	0.26254	1.99870	1.07252	2.00229	0.38721	2.00106				
	0.03125	0.18190	1.99999	0.06564	1.99989	0.26783	2.00161	0.09673	2.00108				
30	0.25	16.77393	1.97628	5.95065	1.96979	26.09815	1.98373	9.27005	1.97066				
	0.125	4.20695	1.99537	1.49470	1.99319	6.51177	2.00282	2.31767	1.99990				
	0.0625	1.05219	1.99937	0.37402	1.99866	1.62374	2.00372	0.57843	2.00246				
	0.03125	0.26303	2.00009	0.09351	1.99992	0.40526	2.00240	0.14443	2.00177				
40	0.25	21.72906	1.97411	7.62792	1.96154	35.38828	1.98156	12.41694	1.96997				
	0.125	5.44973	1.99536	1.91701	1.99243	8.81918	2.00455	3.10692	1.99875				
	0.0625	1.36282	1.99958	0.47969	1.99868	2.19704	2.00508	0.77509	2.00304				
	0.03125	0.34064	2.00027	0.11992	2.00003	0.54805	2.00318	0.19344	2.00247				

**Çizelge 4.4 :** Problem 2'nin  $T = 40$ 'da Şema 4'ten elde edilen  $L_\infty$  hata normu ve doğruluk mertebesi.

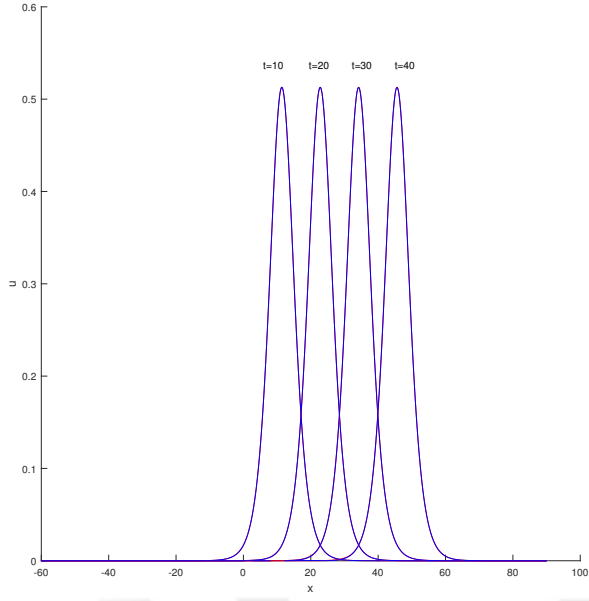
$p$	$h = k$	Şema 4				[9]				[14]			
		$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_\infty$ )
3	0.25	7.62792	1.98156	7.53941	13.49860	1.98855	1.97868	7.70544	1.97868	1.94252	1.98794	1.98794	
	0.125	1.91701	1.99536	1.89987	3.42489	1.99735	1.99437	0.48655	1.99437	0.48655	1.99726	1.99726	
	0.0625	0.47969	1.99958	0.47584	0.85957	1.99827	1.99827	0.12169	1.99827	0.12169	1.99937	1.99937	
	0.03125	0.11992	2.00003		0.21515								
5	0.25	12.41694	1.98156	12.02040	17.99850	1.98456	1.97822	7.70544	1.97822	1.94252	1.98794	1.98794	
	0.125	3.10692	2.00455	3.03743	4.56804	1.99610	1.99384	0.48655	1.99384	0.48655	1.99726	1.99726	
	0.0625	0.77509	2.00508	0.76141	1.14689	1.99820	1.99820	0.12169	1.99820	0.12169	1.99937	1.99937	
	0.03125	0.19344	2.00247		0.28708								

**Çizelge 4.5 :** Problem 2'nin  $p = 3$  için Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen enerji korunumu.

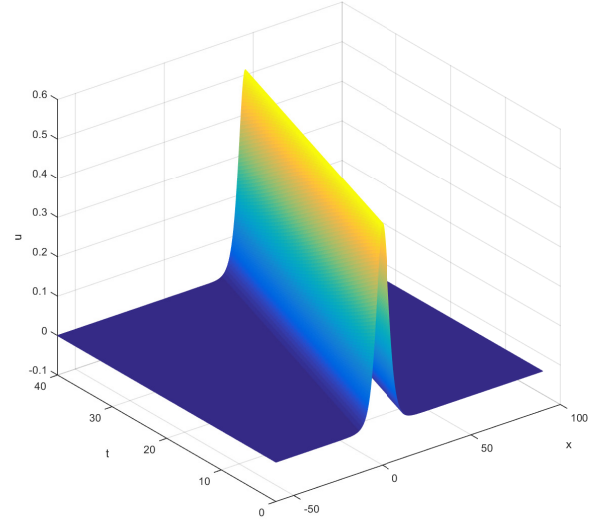
Yöntem	$T$	$E^n$	$E^n$	$E^n$	$E^n$
		$h = k = 0.25$	$h = k = 0.125$	$h = k = 0.0625$	$h = k = 0.03125$
Şema 3	10	1.6825786321	1.6825555695	1.6825497376	1.6825482755
	20	1.6825848148	1.6825572001	1.6825501506	1.6825483790
	30	1.6825845176	1.6825571452	1.6825501385	1.6825483764
	40	1.6825860968	1.6825603154	1.6825538712	1.6825522614
Şema 4	10	1.68254108021	1.68255117443	1.68254920780	1.6825482105
	20	1.68250550382	1.68254813559	1.68254907340	1.6825482479
	30	1.68246529983	1.68254351990	1.68254852014	1.6825481792
	40	1.68244436002	1.68257309690	1.68258867763	1.6825906573
[5](Şema 1)	10	1.68252899329	1.68254308255	1.68254661108	
	20	1.68252899328	1.68254308255	1.68254661095	
	30	1.68252899327	1.68254308255	1.68254661102	
	40	1.68252899325	1.68254308254	1.68254661095	
[9]	10	1.68252899331	1.68254308255	1.68254661103	1.68254749462
	20	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661113	1.68254749389
	30	1.68252899331	1.6825430825	1.68254661113	1.68254749311
	40	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661112	1.68254749364
[14]	10	1.68252899331	1.68254308256	1.68254661116	1.68254749396
	20	1.68252899331	1.68254308255	1.68254661119	1.68254749500
	30	1.68252899331	1.68254308254	1.68254661109	1.68254749564
	40	1.68252899330	1.68254308254	1.68254661129	1.68254749510

**Çizelge 4.6 :** Problem 2'nin  $p = 5$  için Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen enerji korunumu.

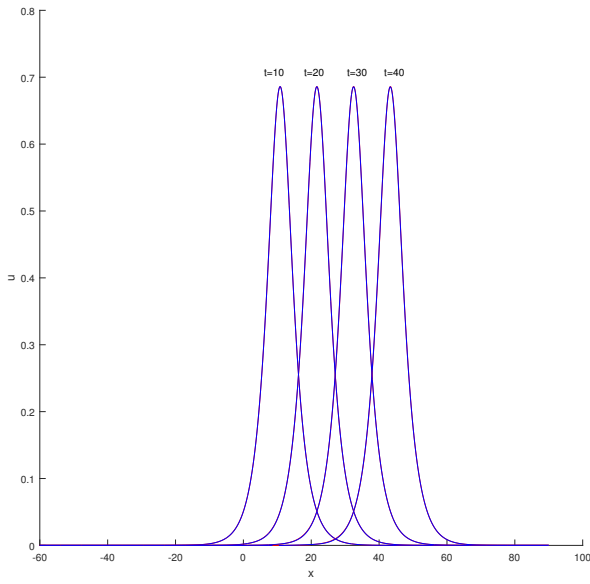
Yöntem	$T$	$E^n$	$E^n$	$E^n$	$E^n$
		$h = k = 0.25$	$h = k = 0.125$	$h = k = 0.0625$	$h = k = 0.03125$
Şema 3	10	3.1107790166	3.1107291129	3.1107165477	3.1107139579
	20	3.1107857015	3.1107309814	3.1107170405	3.1107140326
	30	3.1107852423	3.1107309324	3.1107169992	3.1107139796
	40	3.1107874717	3.1107357045	3.1107219212	3.1107161910
Şema 4	10	3.11061955919	3.11070989521	3.11071419270	3.1107136426
	20	3.11045469645	3.11069171975	3.11071227186	3.1107133859
	30	3.11028556810	3.11067175534	3.11070982488	3.1107130521
	40	3.11017193922	3.11075423590	3.11082694810	3.1108267644
[5](Şema 1)	10	3.11067490241	3.11070293879	3.11070996430	
	20	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996426	
	30	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996417	
	40	3.11067490240	3.11070293879	3.11070996435	
[9]	10	3.11067490241	3.11070293879	3.11070996429	3.11071172144
	20	3.11067490241	3.11070293880	3.11070996430	3.11071172043
	30	3.11067490240	3.11070293880	3.11070996415	3.11071171717
	40	3.11067490241	3.11070293880	3.11070996416	3.11071171899



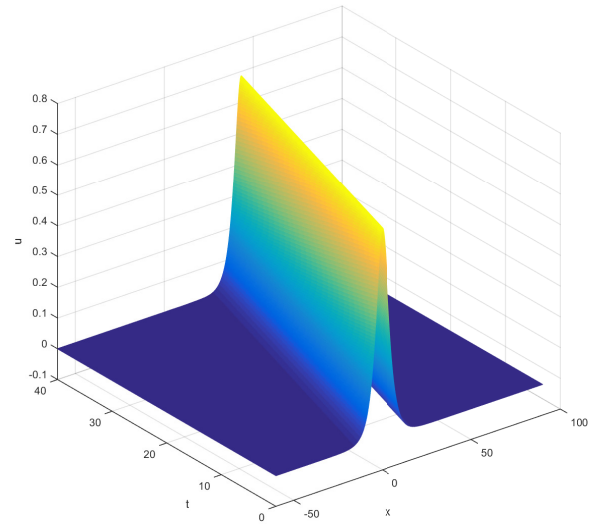
(a)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik ve nümerik çözümler.



(b)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için yüzey grafiği.

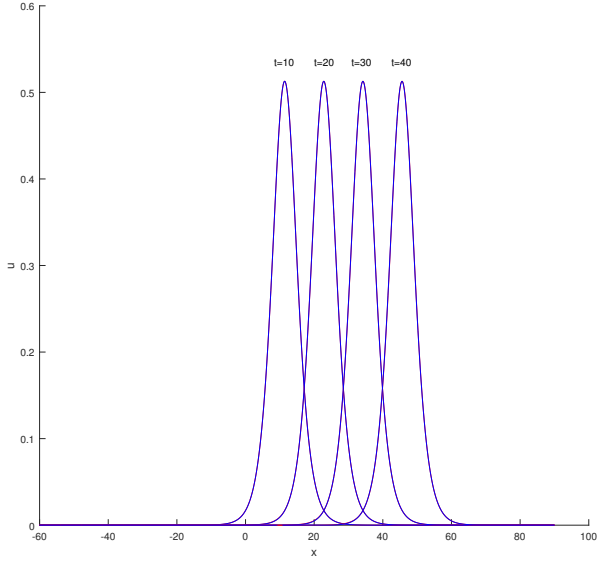


(c)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik ve nümerik çözümler.

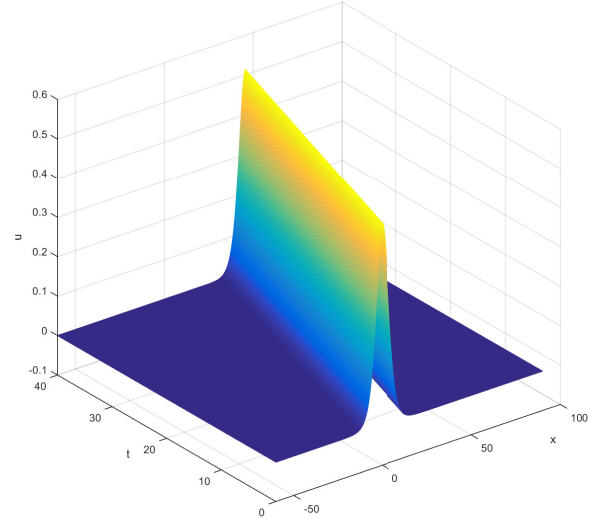


(d)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için yüzey grafiği.

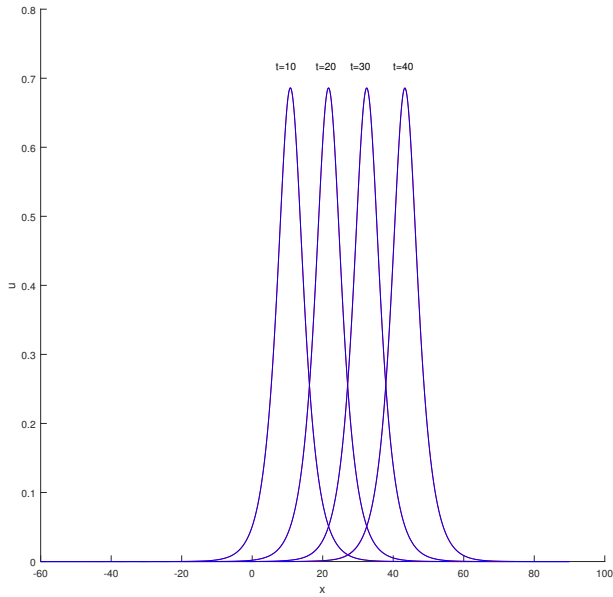
**Şekil 4.1 :** Problem 2'nin analitik ve Şema 3'den elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda dalga profilleri.



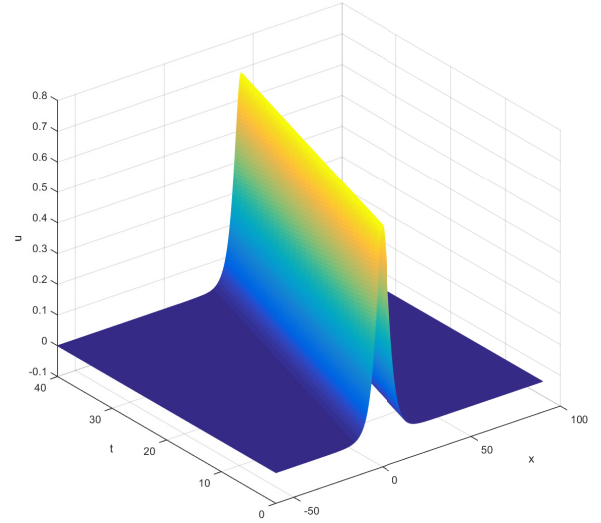
(a)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik ve nümerik çözümler.



(b)  $p = 3$  ve  $h = k = 0.125$  için yüzey grafiği.



(c)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için analitik ve nümerik çözümler.



(d)  $p = 5$  ve  $h = k = 0.125$  için yüzey grafiği.

**Şekil 4.2 :** Problem 2'nin analitik ve Şema 4'ten elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda dalga profilleri.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, önce genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin ve sonra konuma göre parçalanmış genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin korunumlu Crank-Nicolson kapalı sonlu fark yöntemiyle yaklaşık çözümlerini elde etmek için dört farklı nümerik şema verildi.

Her iki denklemdaki  $(u^p)_x$  lineer olmayan terimi yerine Luo vd. [5] tarafından önerilen yaklaşımla birlikte bilindiği kadarıyla ilk defa bu tezde uygulanan Rubin-Graves tipi lineerleştirme tekniği kullanıldı. Sunulan şemaların doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için  $p = 3$  ve  $p = 5$  durumlarında ele alınan iki test problem,  $x \in [-60, 90]$  alınarak farklı  $h$ ,  $k$  ve  $T$  zamanlarında çözüldü. Hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normaları kendi aralarında ve ayrıca aynı parametre değerleri için [5] ve [17] referanslarında verilen sonuçlarla Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de karşılaştırıldı. Çizelgelerde sunulan şemalardan elde edilen sonuçların kendi aralarında ve diğer [5, 17] referanslarında verilen sonuçlarla iyi uyum içinde oldukları görüldü.

Ayrıca, Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 ile birlikte üçüncü ve dördüncü bölümlerdeki çizelgelerden  $h$  ve  $k$  değerleri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yaklaşık çözümlerin beklenen yakınsaklığı sağlayarak analitik çözüme gittikçe yaklaştığı görüldü. Bunların da ötesinde enerji korunumu  $E^n$ 'nin artan zamanla hemen hemen sabit kaldığı, her bir şemanın hesaplanan doğruluk mertebesinin teorik değeri olan 2'ye oldukça yakın olduğu ve verilen grafiklerden ayrıklaştırılmış noktalarda elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin doğru fiziksel davranışını sağladığı ve ayrıca süreklilikle birlikte analitik çözümlerle iyi uyumlu olduğu görüldü.

Her ne kadar tüm şemalardan elde edilen sonuçlar kendi aralarında ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırılabilir yakınlıkta olsalar da genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin konuma göre parçalanmış formu için sunulan Şema 3 ve Şema 4'ten hesaplanan sonuçların daha iyi olduğu görüldü.

Sonuç olarak, bu tezde sunulan şemalar fizik, mühendislik ve uygulamalı matematikte karşılaşılan tek denklemlerle verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte özellikle kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmada rahatlıkla kullanılabilir.



**Çizelge 5.1 :** Problem 1 ve Problem 2'nin  $p = 3$  için Şema 1, Şema 2, Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen  $L_\infty$  hata normu

$T$	$h = k$	Şema 2	Şema 3	Şema 4	[5](Şema 1)	[17]
		$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.25	2.44517	2.25675	2.23668	2.53343	2.56674
	0.125	0.61389	0.56567	0.56119	0.63597	0.64439
	0.0625	0.15366	0.14150	0.14035	0.15918	0.16128
	0.03125	0.03842	0.03538	0.03509		0.04033
20	0.25	4.53178	4.05442	4.17977	4.40914	4.48735
	0.125	1.13935	1.01872	1.04922	1.10927	1.12931
	0.0625	0.28520	0.25494	0.26254	0.27770	0.28273
	0.03125	0.07132	0.06375	0.06564		0.07070
30	0.25	6.38131	5.60001	5.95065	6.03109	6.15513
	0.125	1.60487	1.40762	1.49470	1.51828	1.54976
	0.0625	0.40179	0.35237	0.37402	0.38021	0.38811
	0.03125	0.10047	0.08812	0.09351		0.09707
40	0.25	8.12598	7.03142	7.62792	7.53941	7.70544
	0.125	2.04496	1.76915	1.91701	1.89987	1.94252
	0.0625	0.51188	0.44323	0.47969	0.47584	0.48655
	0.03125	0.12799	0.11084	0.11992		0.12169

**Çizelge 5.2 :** Problem 1 ve Problem 2'nin  $p = 5$  için Şema 1, Şema 2, Şema 3 ve Şema 4'ten elde edilen  $L_\infty$  hata normu

$T$	$h = k$	Şema 2	Şema 3	Şema 4	[5](Şema 1)	[17]
		$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.25	3.58472	2.90797	3.30431	3.43739	3.61271
	0.125	0.90115	0.72984	0.82622	0.86417	0.90887
	0.0625	0.22544	0.18257	0.20652	0.21631	0.22753
	0.03125	0.05636	0.04566	0.05162		0.05690
20	0.25	6.95266	5.54952	6.19364	6.31248	6.67461
	0.125	1.74525	1.39426	1.54998	1.58976	1.68217
	0.0625	0.43634	0.34898	0.38721	0.39816	0.42138
	0.03125	0.10903	0.08729	0.09673		0.10539
30	0.25	10.27603	8.11994	9.27005	9.13274	9.67548
	0.125	2.57813	2.04316	2.31767	2.30402	2.44308
	0.0625	0.64414	0.51158	0.57843	0.57728	0.61231
	0.03125	0.16088	0.12796	0.14443		0.15318
40	0.25	13.68543	10.74798	12.41694	12.02040	7.70544
	0.125	3.43406	2.70794	3.10692	3.03743	1.94252
	0.0625	0.85727	0.67864	0.77509	0.76141	0.48655
	0.03125	0.21400	0.16973	0.19344		0.12169

## KAYNAKLAR

- [1] **Korteweg, D.J. ve De Vries, G.** (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422–443.
- [2] **Rosenau, P.** (1986). A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line, *Physica Scripta*, 34(6B), 827.
- [3] **Park, M.** (1990). On the Rosenau equation, *Mat. Aplic. Comp*, 9, 145–152.
- [4] **Zuo, J.M.** (2009). Solitons and periodic solutions for the Rosenau–KdV and Rosenau–Kawahara equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215(2), 835–840.
- [5] **Luo, Y., Xu, Y. ve Feng, M.** (2014). Conservative difference scheme for generalized Rosenau-KdV equation, *Advances in Mathematical Physics*, 2014.
- [6] **Esfahani, A.** (2011). Solitary wave solutions for generalized Rosenau-KdV equation, *Communications in Theoretical Physics*, 55(3), 396–398.
- [7] **Ebadi, G., Mojaver, A., Triki, H., Yildirim, A. ve Biswas, A.** (2013). Topological solitons and other solutions of the Rosenau-KdV equation with power law nonlinearity, *Romanian Journal of Physics*, 58(1-2), 3–14.
- [8] **Saha, A.** (2012). Topological 1-soliton solutions for the generalized Rosenau-KdV equation, *Fundamental Journal of Mathematical Physics*, 2(1), 19–23.
- [9] **Zheng, M. ve Zhou, J.** (2014). An average linear difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation, *Journal of Applied Mathematics*, 2014.
- [10] **Wongsajjai, B. ve Pochinapan, K.** (2014). A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau–KdV equation and the Rosenau–RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 289–304.
- [11] **Wang, X. ve Dai, W.** (2018). A three-level linear implicit conservative scheme for the Rosenau–KdV–RLW equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330, 295–306.
- [12] **Hu, J., Xu, Y. ve Hu, B.** (2013). Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation, *Advances in Mathematical Physics*, 2013.
- [13] **Hu, J., Zhou, J. ve Zhuo, R.** (2017). A high-accuracy conservative difference approximation for Rosenau-KdV equation., *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 10(6).
- [14] **Zhou, J., Zheng, M. ve Jiang, R.X.** (2016). The conservative difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation, *Thermal Science*, 20(suppl. 3), 903–910.

- [15] **Uçar, Y., Karaagac, B. ve Kutluay, S.** (2017). A Numerical Approach to the Rosenau-KdV equation using Galerkin Cubic Finite Element Method, *International journal of applied mathematics and statistics*, 83–92.
- [16] **Rashidinia, J. ve Rasoulizadeh, M.N.** (2019). Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation, *Wave Motion*, 90, 152–167.
- [17] **Zhou, J., Zheng, M. ve Dai, X.** (2017). Study on convergence and stability of a conservative difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation., *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 10(5).



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Necibullah SAKAR

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, 2010-2014.

