

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HİPERYÜZEY AİLELERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çiğdem TURAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HİPERYÜZEY AİLELERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çiğdem TURAN
(36193614067)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ
Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Mustafa ALTIN

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalıőmasının her aőamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgmeden beni her konuda yönlendiren kıymetli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ'a ve Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ALTIN'a teşekkürü bir borç biliyor ve őükranlarımı sunuyorum.

Tezin Latex dizaynı hakkında bilgilerinden yararlandığım Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Ayrıca, tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalıőmalarım süresince de her zaman bana destek olan başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme ve güzel dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “4-Boyutlu Minkowski Uzayında Hiperyüzey Aileleri ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Çiğdem TURAN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 E_1^3 ve E_1^4 de Temel Tanım ve Teoremler.....	6
3. E_1^3 LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA NULL OLMAYAN ORTAK İZOGEODEZİK VE İZOASİMPTOTİK EĞRİLERE SAHİP YÜZEY AİLELERİ.....	12
3.1 E_1^3 de Parametre Eğrilere Sahip Yüzey Ailelerinin Normal Vektörleri.....	12
3.2 E_1^3 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzogeodezik Eğrilere Sahip Yüzey Aileleri.....	16
3.3 E_1^3 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzoasimptotik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri.....	19
4. E_1^4 LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA NULL OLMAYAN ORTAK İZOGEODEZİK VE İZOASİMPTOTİK EĞRİLERE SAHİP HİPERYÜZEY AİLELERİ.....	24
4.1 E_1^4 de Parametre Eğrilere Sahip Hiperyüzey Ailelerinin Normal Vektörleri.....	24
4.2 E_1^4 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzogeodezik Eğrilere Sahip Hiperyüzey Aileleri.....	39
4.3 E_1^4 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzoasimptotik Eğrilere Sahip Hiperyüzey Aileleri.....	49
5. SONUÇ.....	58
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 : Ortak izogeodezikli (3.2.4) yüzey ailesinin bir elemanı.....	19
Şekil 3.2 : Ortak izoasimptotikli (3.3.4) yüzey ailesinin bir elemanı	23
Şekil 4.1 : Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzey ailesinin x, y, z ve t eksenlerine iz düşümleri.....	46
Şekil 4.2 : Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzey ailesinin x, y, z ve t eksenlerine iz düşümleri.....	48
Şekil 4.3 : Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzey ailesinin x, y, z ve t eksenlerine iz düşümleri.....	55
Şekil 4.4 : Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzey ailesinin x, y, z ve t eksenlerine iz düşümleri.....	57



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

- V : Reel Vektör Uzayı,
 E^n : n-Boyutlu Reel Vektör Uzayı,
 E_g^n : Yarı-Öklidyen Uzayı,
 E_1^3 : 3-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı,
 E_1^4 : 4-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı,
 $\|, \|$: Norm,
 g : Lorentz Metriği,
 \langle, \rangle : Lorentz-Minkowski Uzayında Skaler Çarpım,
 \wedge : Lorentz-Minkowski uzayında Vektörel Çarpım.



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HİPERYÜZEY AİLELERİ

ÇİĞDEM TURAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

61+vii sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin amacı ifade edilerek yüzey aileleri ile ilgili Öklid ve Öklid dışı uzaylarda daha önce yapılmış olan geodezik ve asimptotik eğriler tarafından oluşturulan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında verilen $\alpha(s)$ eğrisinden geçen yüzeylerin Frenet çatısı yardımıyla parametrik denklemi ifade edilmiştir. Daha sonra null olmayan Frenet vektörlü spacelike ve timelike ortak izogeodezik ve izoasimptotik eğrilere sahip yüzey aileleri oluşturulmuştur. Ayrıca çalışmayı destekleyecek örneklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm, çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike $\alpha(s)$ eğrisinin hiperyüzey üzerinde ortak izogeodezik ve izoasimptotik olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek hiperyüzey aileleri oluşturulmuştur. Daha sonra çalışma bazı örneklerle desteklenmiş ve örnekleri verilen bu hiperyüzeyler belirli iz düşüm yöntemleri kullanılarak 3-boyutlu uzaya iz düşürülerek grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperyüzey aileleri, izogeodezik, izoasimptotik, 4-Boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

HYPERSURFACE FAMILIES IN 4-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Çiğdem TURAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

61+vii pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

Prepared as a postgraduate thesis, this study consists of four chapters.

In the first chapter, the purpose of the thesis is expressed and information is given about the studies on surface families created by geodesic and asymptotic curves, which have been done before in Euclidean and non-Euclidean spaces.

In the second chapter, some basic definitions and theorems to be used in oncoming chapters are explained.

In the third chapter, parametric equation of surfaces passing through $\alpha(s)$ curve given in 3-dimensional Lorentz-Minkowski space is explained with the help of Frenet frame. Then, surface families with spacelike and timelike common isogeodesic and isoasymptotic curves with non-null Frenet vectors have been generated. Moreover, examples to support the study are included.

The fourth chapter forms the original section of the study. Hypersurface families are formed by giving the necessary and sufficient conditions so that spacelike and timelike $\alpha(s)$ curve in 4-dimensional Lorentz-Minkowski space is isogeodesic and isoasymptotic common on hypersurface. Afterwards, the study has been supported with some examples and these surfaces, whose examples have been given, were projected into 3-dimensional space using certain projection methods and their graphs have been drawn.

Keywords: Hypersurface families, isogeodesic, isoasymptotic, Lorentz-Minkowski 4-space

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride geodezik ve asimptotik eğriler önemli yer tutmaktadır. Farklı uygulama alanlarında kullanılan özel eğriler olarak bilinen geodezik ve asimptotik eğrilerden sırasıyla bahsedelim. Geodezik eğriler, yüzey üzerinde herhangi iki nokta arasındaki en kısa yol olarak tanımlanır. Geodezik eğriler, imalat endüstrisinde diferansiyel geometri, teorik fizik ve tasarımlarda önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin imalat sanayisinde ayakkabı tasarımı, çadır imalatı, elbise dikimi, yol yapımı ve boyama gibi çeşitli uygulamalarda geodezikler zaman ve malzeme açısından avantaj sağlamaktadır. Asimptotik eğri ise normal eğriliği sıfır olan bir eğridir. Asimptotik eğriler yüzeylerin analizinde asli doğrultuların manyetik sapmalarını belirlemek için faydalı bir araç olup diferansiyel geometri, astronomi, astrofizik, mimari ve computer aided design gibi farklı alanlarda uygulama alanlarına sahiptir. Ayrıca Contopoulos "Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems" isimli çalışmasında Lyapunov yörüngelerindeki asimptotik eğrilerin bulunması durumunda, yıldız sistemindeki yıldızların kaçan yörüngelerinin bulunabileceğini göstermiştir [1]. Geodezik ve asimptotik eğriler ile ilgili bazı çalışmalar aşağıda yer verilmiştir.

Wang ve arkadaşlarının ayakkabı üretim maliyetini düşürmek için yaptıkları "Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic" isimli çalışması, eğriler ve yüzeyler teorisinin bir uygulaması olarak düşünülebilir. Bu çalışmada yüzey üzerindeki bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı yardımıyla belirli bir karakteristik özelliğe sahip yüzey ailelerinin parametrik temsili incelenmiştir. Ayrıca parametrik olarak ifade edilen bu yüzey aileleri üzerinde eğrinin geodezik olması için gerekli koşullar incelenmiştir [2]. Wang ve arkadaşlarının bu çalışmasından sonra konuyla ilgili 3 ve 4 boyutlu farklı uzaylarda birçok araştırma yapılmıştır. Örneğin birçok araştırmacı 3 boyutlu Öklid ve Öklid dışı uzaylarda bu konu üzerinde geodezik eğrilerle ilgili çalışmıştır. Öklid uzayında Rashad ve Abdel [3] ortak asimptotik eğriye sahip yüzey ailesini inceleyip gerekli ve yeterli koşulları oluşturmuştur. Ayrıca Bayram, Güler ve Kasap [4] ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi bulma problemini incelemiştir. Kasap ve ark. [5] yüzeylerin parametrik ifadesini ortak uzay geodeziğinin Frenet çatısının katsayılarını, sapma fonksiyonlarını kullanarak bazı sonuçlar vermiştir. Daha sonra Bayram ve Kasap ise [6] ve [7] de sırasıyla, 4-boyutlu Öklid uzayında ortak izogeodezik ve izoasimptotik eğrilere sahip hiperyüzeyleri incelemiştir. Bu çalışmalara ek olarak Öklid uzayında yüzey aileleri üzerine çalışmalar yapılmıştır ([8], [9], [10]).

Yüzey aileleri ile ilgili Öklid uzayından farklı olarak Minkowski ve Galilean uzaylarında da çalışmalar mevcuttur. Kasap ve Akyıldız [11] da, 3-boyutlu Minkowski uzayında ortak bir geodezik eğriye sahip olan yüzey ailelerini elde ederek sapma fonksiyonları için yeterli koşulları vermiştir. Şafak ve Kasap [12] ise ortak null geodezik eğrili yüzey ailesini incelemiştir. Bu çalışmalara ek olarak 3-boyutlu Minkowski uzayında Şaffak ve arkadaşları [13] yüzey ailelerini ortak bir asimptotik eğri ve üç tür sapma ölçek fonksiyonları ile vermiştir. Minkowski uzayında yüzey aileleri ile ilgili diğer bazı çalışmalar da görülebilir (bak [14], [15]). Ayrıca Galilean uzayında da hiperyüzey aileleriyle ilgili çalışmalar yer almaktadır. Örneğin 3-boyutlu Galilean uzayında Yüzbaşı ile Bektaş [16] ve Yüzbaşı [17] da sırasıyla, ortak geodezik ve ortak asimptotik eğrilerden geçen yüzey aileleri üzerine çalışmıştır. 4-boyutlu Galilean uzayında Yoon ve Yüzbaşı [18] da verilen ortak izogeodezik eğrili hiperyüzey aileleri üzerine çalışmıştır. Bu çalışmalara ek olarak Galilean uzayında yüzey ailesi ile ilgili olarak çalışmalar da mevcuttur ([19], [20]).

Bu çalışmada, ilk olarak 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında verilen bir $\alpha(s)$ eğrisinden geçen hiperyüzeylerin parametrik denklemi, eğrinin Frenet çatsı yardımıyla ifade edilmiştir. Daha sonra 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike ortak izogeodezik ve izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri oluşturulmuştur. Bu hiperyüzey aileleri üzerinde null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğrinin hem parametre eğrisi hem geodezik hem de asimptotik eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Bulunan bu koşullar, özel sapma fonksiyonları yardımıyla yeniden inşa edilmiştir. Son olarak elde edilen koşullar sayesinde ortak izogeodezik ve izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri için örnekler oluşturulmuş ve bu örneklerle verilen hiperyüzeyler üç boyuta iz düşürülerek grafikleri çizilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ele alınacak konu için temel teşkil eden kavramlar verilecektir.

Tanım 2.0.1. V bir reel vektör uzayı olsun. $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w} \in V$ için,

$$\begin{aligned} i. & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ ii. & \langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ iii. & \langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

özelliklerine sahip ise \langle, \rangle dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [21].

Tanım 2.0.2. V bir reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, bir simetrik bilinear form olsun. Eğer, $\forall \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{\xi}, \vec{v} \rangle = 0$ olacak şekilde V nin en az bir $\vec{\xi} \neq 0$ vektörü varsa; \langle, \rangle simetrik bilinear formuna V de dejeneredir, aksi halde non-dejeneredir denir [22].

Tanım 2.0.3. E^n , n – boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\vec{u}, \vec{v} \in E^n$ için

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\sum_{i=1}^q u_i v_i + \sum_{i=q+1}^n u_i v_i$$

eşitliğiyle verilen q – indeksli skaler çarpım ile birlikte E^n uzayına bir yarı-Öklidyen uzay denir ve E_q^n ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla u_i ve v_i ler \vec{u} ve \vec{v} vektörlerinin bileşenleridir [23].

Tanım 2.0.4. Eğer bir V yarı-Öklidyen uzayının indeksi $q = 1$ ise V ye Lorentz uzayı denir. Eğer V yarı-Öklidyen uzayının indeksi $q \geq 1$ ise V ye Minkowski uzayı denir. Lorentz uzayı Minkowski uzayının özel bir halidir [24].

Tanım 2.0.5. Bir reel vektör uzayı V olsun. V üzerinde

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak verilen g dönüşümü bilinear, simetrik ve non-degenere ise g ye V uzayı üzerinde bir skaler çarpım, (g, V) ikilisine de skaler çarpım uzayı denir [23].

Tanım 2.0.6. V bir skaler çarpım uzayı ve $\vec{u} \in V$ olsun.

$$\|\vec{u}\| = (|g(\vec{u}, \vec{u})|)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{u}\|$ reel sayısına \vec{u} vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör denir [23].

Tanım 2.0.7. E_1^n , n – boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olsun. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_1^n$ için

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

ise \vec{u} ve \vec{v} vektörleri Lorentz anlamında diktir (ortogonaldır) denir [21].

Tanım 2.0.8. V bir Lorentz-Minkowski uzayı olsun. $\forall \vec{u} \in V$ için,

$g(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ veya $\vec{u} = 0$ ise \vec{u} ye spacelike vektör,

$g(\vec{u}, \vec{u}) < 0$ ise \vec{u} ye timelike vektör,

$\vec{u} \neq 0$ iken $g(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ ise \vec{u} ye lightlike(null) vektör denir [23].

Tanım 2.0.9. I , \mathbb{R} nin bir açık alt aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E_1^n$ şeklinde C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir bir α dönüşümüne E_1^n Lorentz-Minkowski uzayında bir diferansiyellenebilir eğri adı verilir [25].

Tanım 2.0.10. $\alpha : I \rightarrow E_1^n$ herhangi bir eğri olmak üzere $\vec{\alpha}'(s)$ hız vektörü sırasıyla, spacelike, timelike veya null ise α eğrisine spacelike, timelike veya null eğri adı verilir [25]. Böylece α eğrisinin hız vektörü $\vec{\alpha}'$ olmak üzere

i) $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle > 0$ ise α ya spacelike eğri

ii) $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle < 0$ ise α ya timelike eğri

iii) $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle = 0$ ise α ya null eğri

denir [26].

Tanım 2.0.11. M^2 , E_1^n nin bir alt kümesi olsun. $\forall p \in M^2$ noktası için E_1^n Lorentz-Minkowski uzayında aşağıdaki koşulları sağlayan bir V alt komşuluğu ve bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açık alt kümesinden $V \cap M^2 \subset E_1^n$ üzerine bir $z : U \rightarrow V \cap M^2$ dönüşümü mevcutsa M^2 ye bir yüzey denir.

i. z dönüşümü türevlenebilirdir.

ii. z dönüşümü bir homeomorfizmadır.

iii. z dönüşümü regülerdir [27].

Tanım 2.0.12. E_1^n , n – boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bir yüzey M^2 olsun. $\forall p \in M^2$ ve $\forall w_p \in T_p M^2$ için $g(u_p, w_p) = 0 \Rightarrow u_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa M ye E_1^n de non-degenere yüzey denir [23].

Tanım 2.0.13. M^2, E_1^n de bir yüzey olsun. M^2 üzerine indirgenen metrik pozitif tanımlı ise M^2 ye E_1^n uzayında spacelike yüzey denir [23].

Tanım 2.0.14. M^2, E_1^n de bir yüzey olsun. M^2 yüzeyi üzerine indirgenen metrik Lorentz metriği ise M^2 ye E_1^n uzayında timelike yüzey denir [23].

Tanım 2.0.15. E_q^{n+1} , yarı-öklidyen uzayın $n -$ boyutlu bir altmanifolduna E_q^{n+1} de bir hiperyüzey denir [21].

Tanım 2.0.16. $M \subseteq E_1^4$ bir hiperyüzey ve α bu hiperyüzey üzerinde bir eğri olsun. $\vec{\alpha}''$ vektörü $\forall s \in M$ noktası için M ye dik ise α ya M üzerinde bir geodezik eğri denir [28]. Diğer bir ifadeyle α eğrisinin M hiperyüzeyi üzerinde bir geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{N}(s)$ normali ile hiperyüzeyin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normalinin paralel (yani, $(\vec{n}(s, x_0, y_0) // \vec{N}(s))$ olmasıdır [29].

Tanım 2.0.17. $M \subseteq E_1^4$ bir hiperyüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\vec{\alpha}'(s)$ hız vektörü $\alpha(s)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M hiperyüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir. $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\left\langle \frac{\partial n(s, x_0, y_0)}{\partial s}, T(s) \right\rangle = 0$ olmalıdır [30].

Tanım 2.0.18. $\phi : D \subseteq E^3 \rightarrow E_1^4$

$(s, x, y) \rightarrow \phi(s, x, y)$ ile tanımlanan $\phi(D) \subseteq E_1^4$ hiperyüzeyi verilsin. Hiperüzey üzerinde

$$x = x_0 \text{ ve } y = y_0 \text{ sabitler için } \phi(s, x_0, y_0) = \alpha(s),$$

$$s = s_0 \text{ ve } y = y_0 \text{ sabitler için } \phi(s_0, x, y_0) = \gamma(x),$$

$$s = s_0 \text{ ve } x = x_0 \text{ sabitler için } \phi(s_0, x_0, y) = \beta(y)$$

eğrilerine sırasıyla, $s -$ parametre eğrisi, $x -$ parametre eğrisi ve $y -$ parametre eğrisi denir [28]. E_1^4 de $\phi = \phi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoparametrik bir eğri sabit s, x veya y parametre değerlerine sahip olan eğrilerdir. Diğer bir deyişle s_0, x_0 veya y_0 öyle parametrelerdir ki $\phi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$, $\phi(s_0, x, y_0) = \gamma(x)$ veya $\phi(s_0, x_0, y) = \beta(y)$ dir.

E_1^4 de $\phi = \phi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde $\alpha(s)$ eğrisinin izogeodezik olması demek hem geodezik hem de parametre eğrisi olması demektir [5].

E_1^4 de $\phi = \phi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde $\alpha(s)$ eğrisinin izoasimptotik olması demek hem asimptotik hem de parametre eğrisi olması demektir [13].

Tanım 2.0.19. Eğer bir hiperyüzey üzerindeki indirgenmiş metrik bir Lorentz metrik ise E_1^4 de bir hiperyüzey bir timelike hiperyüzey olarak adlandırılır. Bu durumda hiperyüzeyin normal bir spacelike vektördür [31].

2.1 E_1^3 ve E_1^4 de Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, Lorentz-Minkowski uzayı E_1^3 (ve E_1^4) de kullanılacak temel tanımlar ile ortak izogeodezik veya izoasimptotik eğriye sahip yüzey (ve hiperyüzey) aileleri oluştururken yararlanacağımız null olmayan Frenet vektörlere sahip eğriler için Frenet takımı ve türev denklemleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörler olsun. E_1^3 de skaler çarpım ve vektörel çarpım sırasıyla,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada \vec{e}_1, \vec{e}_2 ve \vec{e}_3 vektörleri E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında standart baz vektörleridir [31].

E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayındaki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$ ve eğrinin null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike olması durumuna göre Frenet türev denklemleri aşağıdaki gibi hesaplanılır.

İlk olarak, kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi spacelike olsun. α spacelike bir eğri iken α eğrisinin asli normal ve binormal vektörlerinin spacelike veya timelike olmalarına göre E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$ ve türev denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 2.1.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri ve bu eğrinin binormali timelike olsun. Bu durumda binormali timelike olan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki

Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{\alpha}', \\ \vec{N} &= \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}, \\ \vec{B} &= \vec{T} \wedge \vec{N}, \\ k_1 &= \|\vec{T}'\|, \\ k_2 &= -\langle \vec{N}', \vec{B} \rangle\end{aligned}$$

ve türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

dir.

Durum 2.1.2. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri ve bu eğrinin asli normali timelike olsun. Bu durumda aslinormali timelike olan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{\alpha}', \\ \vec{N} &= \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}, \\ \vec{B} &= -\vec{T} \wedge \vec{N}, \\ k_1 &= \|\vec{T}'\| = \sqrt{-\langle \vec{T}', \vec{T}' \rangle}, \\ k_2 &= \langle \vec{N}', \vec{B} \rangle\end{aligned}$$

ve türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

dir.

İkinci olarak, farz edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi timelike olsun. Bu eğri bir timelike eğri iken α eğrisinin asli normal ve binormal vektörleri spacelike olacağından E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$ ve türev denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 2.1.3. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir timelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k_1, k_2\}$

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{\alpha}', \\ \vec{N} &= \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}, \\ \vec{B} &= -\vec{T} \wedge \vec{N}, \\ k_1 &= \|\vec{T}'\|, \\ k_2 &= -\langle \vec{N}', \vec{B} \rangle\end{aligned}$$

ve türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

dir.

Ayrıca E_1^3 de $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}]$ olarak verilen Frenet vektörleri sırasıyla, tanjant, asli normal ve binormal vektör alanları olarak adlandırılır. k_1 ve k_2 de sırasıyla, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğriliklerini ifade eder ([31], [32]).

Tanım 2.1.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ve $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ vektörler olsun. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında skaler çarpım ve vektörel çarpım sırasıyla,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = - \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ve \vec{e}_4 vektörleri E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında standart baz vektör alanlarıdır [33].

E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayındaki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden Frenet takımı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2, k_1, k_2, k_3\}$ ve eğrinin null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike olması durumuna göre Frenet türev denklemleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

Teorem 2.1.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2, k_1, k_2, k_3\}$ Frenet takımı

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \\ \vec{N} &= \frac{\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' - g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'}{\|\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' - g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'\|}, \\ \vec{B}_1 &= \vec{N} \wedge \vec{T} \wedge \vec{B}_2, \\ \vec{B}_2 &= \mu \frac{\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''}{\|\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''\|}, \\ k_1 &= \frac{\|\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' - g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'\|}{\|\vec{\alpha}'\|^4}, \\ k_2 &= \frac{\|\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''\| \cdot \|\vec{\alpha}'\|}{\|\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' - g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'\|}, \\ k_3 &= \frac{g(\vec{\alpha}^{(iv)}, \vec{B}_2)}{\|\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''\| \cdot \|\vec{\alpha}'\|}\end{aligned}$$

dir. Burada $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2]$ matrisinin determinantını +1 yapmak için $\mu = +1$ ya da $\mu = -1$ olarak alınır [33].

Teorem 2.1.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir timelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2, k_1, k_2, k_3\}$ Frenet takımı

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \\ \vec{N} &= \frac{\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' + g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'}{\|\|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' + g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'\|}, \\ \vec{B}_1 &= \mu \vec{N} \wedge \vec{T} \wedge \vec{B}_2, \\ \vec{B}_2 &= \mu \frac{\vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''}{\|\vec{N} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}'''\|},\end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{\left\| \|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' + g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}' \right\|}{\|\vec{\alpha}'\|^4},$$

$$k_2 = \frac{\left\| \vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}''' \right\| \cdot \|\vec{\alpha}'\|}{\left\| \|\vec{\alpha}'\|^2 \cdot \vec{\alpha}'' + g(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}' \right\|},$$

$$k_3 = \frac{g(\vec{\alpha}^{(n)}, B_2)}{\left\| \vec{T} \wedge \vec{N} \wedge \vec{\alpha}''' \right\| \cdot \|\vec{\alpha}'\|}$$

dir. Burada $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2]$ matrisinin determinantını +1 yapmak için $\mu = +1$ ya da $\mu = -1$ olarak alınır [34].

Ayrıca E_1^4 de $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2]$ olarak verilen Frenet vektörleri sırasıyla, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki tanjant, asli normal, binormal ve trinormal vektör alanları olarak adlandırılır [33].

Şimdi de E_1^4 de $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin spacelike ve timelike olması durumuna göre Frenet türev denklemlerini elde edelim.

İlk olarak, kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi spacelike olsun. α spacelike bir eğri iken α eğrisinin asli normal, binormal ve trinormal vektörlerinin spacelike ve timelike olmalarına göre E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında Frenet türev denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 2.1.4. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri ve α eğrisinin asli normal timelike olsun. Bu durumda asli normal timelike olan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'_1(s) \\ \vec{B}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}_1(s) \\ \vec{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

dir.

Durum 2.1.5. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri ve α eğrisinin binormal timelike olsun. Bu durumda binormal timelike olan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'_1(s) \\ \vec{B}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}_1(s) \\ \vec{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

dir.

Durum 2.1.6. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike eğri ve α eğrisinin trinormali timelike olsun. Bu durumda trinormali timelike olan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'_1(s) \\ \vec{B}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}_1(s) \\ \vec{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

dir.

İkinci olarak, kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi bir timelike eğri olsun. α bir timelike eğri iken bu eğrinin asli normal, binormal ve trinormal vektörleri spacelike olacağından E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında Frenet türev denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 2.1.7. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir timelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'_1(s) \\ \vec{B}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}_1(s) \\ \vec{B}_2(s) \end{bmatrix}, \quad (2.1.9)$$

olarak elde edilir.

Burada k_1 , k_2 ve k_3 sırasıyla, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü eğriliklerini ifade eder [32].

3. E_1^3 LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA NULL OLMAYAN ORTAK İZOGEODEZİK VE İZOASİMPTOTİK EĞRİLERE SAHİP YÜZEY AİLELERİ

E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında sapma fonksiyonları ile null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri ve bu eğrinin Frenet vektörleriyle yüzey aileleri oluşturulacaktır. Bu eğrinin parametre, geodezik ve asimptotik eğri olma durumlarına göre yüzey aileleri 3 alt başlıkta incelenecektir.

E_1^3 de $\Psi = \Psi(s, x)$ parametrik bir yüzey olsun. E_1^3 de $\alpha(s)$ eğrisinden geçen parametrik yüzey

$$\Psi(s, x) : [C_1, C_2] \times [P_1, P_2] \rightarrow E_1^3$$

$$\Psi(s, x) = \alpha(s) + u(s, x)\vec{T}(s) + v(s, x)\vec{N}(s) + w(s, x)\vec{B}(s) \quad (3.0.1)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada $u(s, x), v(s, x)$ ve $w(s, x) \in C^1$ sapma fonksiyonları ve $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ ise $\alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısıdır.

3.1 E_1^3 de Parametre Eğrilere Sahip Yüzey Ailelerinin Normal Vektörleri

Bu bölümde, (3.0.1) yüzey ailelerini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul ifade edilecektir. Ayrıca (3.0.1) yüzeyinin parametre eğrisinin, spacelike eğri olması halinde iki ve timelike eğri olması halinde bir durum olmak üzere toplam üç durumda normal vektörü hesaplanacaktır.

E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında (3.0.1) yüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğri olması için $\Psi(s, x_0) = \alpha(s)$, olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$ bulunması, öyle ki

$$u(s, x_0) = v(s, x_0) = w(s, x_0) = 0, \quad (3.1.1)$$

$$C_1 \leq s \leq C_2$$

olması gerekli ve yeterlidir. Buradan

$$\frac{\partial u(s, x_0)}{\partial s} = \frac{\partial v(s, x_0)}{\partial s} = \frac{\partial w(s, x_0)}{\partial s} = 0 \quad (3.1.2)$$

olduğu görülür.

$\Psi(s, x)$ yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{n}(s, x) = \frac{\partial \Psi(s, x)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \Psi(s, x)}{\partial x} \quad (3.1.3)$$

dir. Buna göre $\Psi(s,x)$ yüzeyinin $\vec{n}(s,x)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden

$$\vec{n}(s,x) = \beta_1(s,x)\vec{T}(s) + \beta_2(s,x)\vec{N}(s) + \beta_3(s,x)\vec{B}(s) \quad (3.1.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında yüzeyin $\alpha(s)$ parametre eğrisinin, null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike eğri olma durumlarına göre yüzey ailelerinin normal vektörü elde edilecektir.

İlk olarak E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında (3.0.1) yüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ bir spacelike parametre eğri olsun. Bu eğrinin asli normal ve binormal vektörlerinin spacelike ve timelike olmalarına göre E_1^3 de yüzey ailelerinin normal vektörü hesaplanacaktır.

Durum 3.1.1. *Bu durumda E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında (3.0.1) ile verilen yüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi asli normal vektörü timelike (yani, $g(\vec{N}, \vec{N}) = -1$) olan bir spacelike eğri olsun. Bu yüzey ailesinin $\vec{n}(s,x)$ normalini bulmak için ilk olarak (3.0.1) ile verilen $\Psi(s,x)$ yüzeyinin kısmi türevleri alınacaktır. Bunun için (2.1.3) eşitliği yardımıyla (3.0.1) yüzey ailesinin kısmi türevleri*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \vec{B}(s) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s),$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu kısmi türevler, (2.1.1) ve (3.1.3) formüllerinde yerine yazılırsa Ψ yüzeyinin (3.1.4) ile verilen normal vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} \beta_1(s,x) &= \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right) \\ &- \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(s,x) &= \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right) \\ &- \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

$$\beta_3(s,x) = \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right) - \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right)$$

olarak elde edilir. Burada (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 değeri alındığında

$$\begin{cases} \beta_1(s,x_0) = 0, \\ \beta_2(s,x_0) = \frac{\partial w(s,x)}{\partial x}, \\ \beta_3(s,x_0) = \frac{\partial v(s,x)}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Bu durumda yüzeyin normal vektörü

$$\vec{n}(s,x_0) = \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s)$$

olarak bulunur.

Durum 3.1.2. Bu durumda E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında (3.0.1) ile verilen yüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi binormal vektörü timelike (yani, $g(\vec{B}, \vec{B}) = -1$) olan bir spacelike eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin geçtiği yüzey ailesinin $\vec{n}(s,x)$ normalini hesaplamak için (3.0.1) verilen yüzeyin kısmi türevleri alınıp (2.1.2) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} - k_1 v(s,x) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \vec{B}(s) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s),$$

olduğu görülür. Ayrıca (2.1.1) ve (3.1.3) formüllerinden yararlanılırsa, Ψ yüzeyinin (3.1.4) ile verilen normal vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} \beta_1(s,x) &= \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right) \\ &- \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(s,x) &= \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} - k_1 v(s,x) \right), \end{aligned}$$

$$\beta_3(s,x) = \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} + k_2 w(s,x) \right) - \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} - k_1 v(s,x) \right),$$

olarak hesaplanır. Şimdi $\beta_1(s,x)$, $\beta_2(s,x)$ ve $\beta_3(s,x)$ de (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 değeri alındığında

$$\begin{cases} \beta_1(s,x_0) = 0, \\ \beta_2(s,x_0) = -\frac{\partial w(s,x)}{\partial x}, \\ \beta_3(s,x_0) = -\frac{\partial v(s,x)}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilir. Bu durumda yüzeyin normal vektörü

$$\vec{n}(s,x_0) = -\frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) - \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s)$$

olarak bulunur.

İkinci olarak E_1^3 de (3.0.1) yüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ bir timelike parametre eğrisi olsun. Bu eğrinin asli normal ve binormal vektörlerinin spacelike olmalarına göre E_1^3 de yüzey ailelerinin normal vektörü hesaplanacaktır.

Durum 3.1.3. Bu durumda E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında (3.0.1) ile verilen yüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir timelike (yani, $g(\vec{T}, \vec{T}) = -1$) eğri olsun. Bu yüzey ailesinin $\vec{n}(s,x)$ normalini hesaplamak için (3.0.1) ile verilen $\Psi(s,x)$ yüzeyinin kısmi türevleri alınıp (2.1.4) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} - k_2 w(s,x) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \vec{B}(s) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.1.1) ve (3.1.3) formüllerinden yararlanılırsa, Ψ yüzeyinin (3.1.4) ile verilen normal vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} \beta_1(s,x) &= \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} - k_2 w(s,x) \right), \end{aligned}$$

$$\beta_2(s,x) = \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x) + \frac{\partial w(s,x)}{\partial s} \right) - \frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right),$$

$$\beta_3(s,x) = \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + k_1 v(s,x) \right) - \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial s} - k_2 w(s,x) \right),$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden x_0 değeri alındığında

$$\begin{cases} \beta_1(s,x_0) = 0, \\ \beta_2(s,x_0) = -\frac{\partial w(s,x)}{\partial x}, \\ \beta_3(s,x_0) = \frac{\partial v(s,x)}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Bu durumda yüzeyin normal vektörü

$$\vec{n}(s,x_0) = -\frac{\partial w(s,x)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \vec{B}(s)$$

olarak bulunur.

3.2 E_1^3 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzogeodezik Eğrilere Sahip Yüzey Aileleri

Bu bölümde, E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike ortak izogeodezik eğrili yüzey aileleri oluşturulacaktır. E_1^3 de yüzey ailelerinin ortak izogeodezik eğrilere sahip olması için gerekli teorem ifade edilip ispatı yapılacaktır. Teoremden verilen koşullar, sapma fonksiyonları kullanılarak yeniden ifade edilecektir. Ayrıca bu çalışmayı destekleyecek örnek verilecektir.

E_1^3 de parametrik bir yüzey (3.0.1) şeklinde verilmiş olsun. E_1^3 de herhangi bir yüzey üzerinde verilen bir eğrinin izogeodezik olması için biliyoruz ki bu eğrinin yüzey üzerinde hem parametre hem de geodezik eğri olması gerekir.

İlk olarak E_1^3 de (3.0.1) yüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olması için $\Psi(s,x_0) = \alpha(s)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$ bulunabilmesi, yani önceki bölümde verilen (3.1.1) ve (3.1.2) koşullarının sağlanmasıdır.

İkinci olarak $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde $\alpha(s)$ eğrisinin bir geodezik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{N}(s)$ normalini ile Ψ yüzeyinin $\vec{n}(s,x_0)$ normalinin paralel yani $\vec{n}(s,x_0) // \vec{N}(s)$ olmasıdır [29].

E_1^3 de null olmayan Frenet vektörlere sahip bir eğri $\alpha(s)$ olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin (3.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde bir izogeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} u(s, x_0) = v(s, x_0) = w(s, x_0) = 0, \\ \frac{\partial w(s, x_0)}{\partial x} \neq 0, \\ \frac{\partial v(s, x_0)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

olmalıdır.

İspat: E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Bu durumda (3.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s,x)$ yüzeyinin $\vec{n}(s, x_0)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden

$$\vec{n}(s, x_0) = \beta_1(s, x_0) \vec{T}(s) + \beta_2(s, x_0) \vec{N}(s) + \beta_3(s, x_0) \vec{B}(s) \quad (3.2.2)$$

olsun. $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde bir parametre eğri $\alpha(s)$ ise, keyfi $x = x_0$ parametresi için $\Psi(s, x_0) = \alpha(s)$ dir. Böylece

$$u(s, x_0) = v(s, x_0) = w(s, x_0) = 0,$$

$$\exists x_0 \in [P_1, P_2], \quad C_1 \leq s \leq C_2,$$

eşitliği ifade edilir. Ayrıca, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde geodezik olması için yüzeyin $\vec{n}(s, x_0)$ normal vektörü ile $\alpha(s)$ eğrisinin asli normali $\vec{N}(s)$ birbirine paralel olmalıdır.

Bu durumda

$$\beta_2(s, x_0) \neq 0, \quad \beta_3(s, x_0) = 0, \quad (3.2.3)$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], \quad C_1 \leq s \leq C_2,$$

olur. $\Psi(s,x)$ yüzeyinin $\vec{n}(s, x_0)$ normal vektöründeki (3.1.5), (3.1.6) ve (3.1.7) bileşenlerinden (3.2.3) eşitliği göz önüne alınarak (3.2.1) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sapma Fonksiyonu

Bu alt kısımda, işlemlerde kolaylık sağlaması ve dizayn problemlerinin iyi analiz edilebilmesi için yüzey denkleminde verilen $u(s,x), v(s,x)$ ve $w(s,x)$ sapma fonksiyonları

özel seçilerek yüzey üzerindeki eğrinin izogeodezik olabilmesi için gerekli ve yeterli şart incelenecektir.

Kabul edelim ki $u(s,x)$, $v(s,x)$ ve $w(s,x)$ sapma fonksiyonları, $h(s)$, $k(s)$, $r(s)$, $U(x)$, $V(x)$, $W(x) \in C_1$ ve $h(s) \neq k(s) \neq r(s) \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki gibi

$$u(s,x) = h(s)U(x),$$

$$v(s,x) = k(s)V(x),$$

$$w(s,x) = r(s)W(x),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2,$$

verilsin. Böylece:

Sonuç 3.2.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (3.2.1) dan $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde izogeodezik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$U(x_0) = V(x_0) = W(x_0) = 0,$$

$$r(s) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \neq 0,$$

$$k(s) \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} = 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

Şimdi de elde edilen teorik sonuçları destekleyen null olmayan Frenet vektörlerine sahip timelike izogeodezik eğrili yüzey aileleri için örnek verilecektir. Ayrıca bu örnekte verilen izogeodezik eğrili yüzeyin grafiği çizilecektir.

Örnek 3.2.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$ eğrisi verilsin. α eğrisi birim hızlı timelike bir eğridir. Böylece α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.4) eşitliğinden

$$\vec{T}(s) = (\cosh s, \sinh s, 0),$$

$$\vec{N}(s) = (\sinh s, \cosh s, 0),$$

$$\vec{B}(s) = (0, 0, 1),$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

$$u(s, x) = sx + s^2x,$$

$$v(s, x) = x^2s,$$

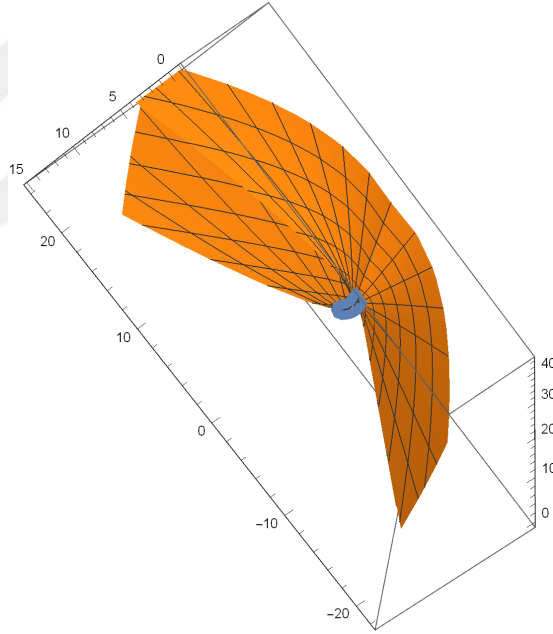
$$w(s, x) = x^2 + sx,$$

fonksiyonları alınır; $x_0 = 0$ ve $s \neq 0$ noktaları için (3.2.1) şartları sağlanır. Böylece (3.0.1) den yüzey ailesi

$$\Psi(s, x) = \begin{pmatrix} \cosh s (sx + s^2x) + \sinh s(x^2s + 1), \\ \sinh s (sx + s^2x) + \cosh s(x^2s + 1), \\ x^2 + sx \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu yüzey $\alpha(s)$ eğrisini izogeodezik olarak kabul eden yüzey ailesinin bir elemanı olur.

Elde edilen ortak izogeodezikli yüzeyin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1 : Ortak izogeodezikli (3.2.4) yüzey ailesinin bir elemanı

3.3 E_1^3 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzoasimptotik Eğriye Sahip

Yüzey Aileleri

Bu bölümde, E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike ortak izoasimptotik eğri yüzey aileleri oluşturulacaktır. E_1^3 de

yüzey ailelerinin ortak izoasimptotik eğrilere sahip olması için gerekli teorem ifade edilip ispatı yapılacaktır. Teoremde verilen koşullar, sapma fonksiyonları kullanılarak yeniden ifade edilecektir. Ayrıca bu çalışmayı destekleyecek örnek verilecektir.

E_1^3 de parametrik bir yüzey (3.0.1) şeklinde verilmiş olsun. E_1^3 de herhangi bir yüzey üzerinde verilen bir eğrinin izoasimptotik olması için bu eğrinin yüzey üzerinde hem parametre hem de asimptotik eğri olması gerekir.

İlk olarak E_1^3 de (3.0.1) yüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olması için $\Psi(s, x_0) = \alpha(s)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$ bulunabilmesi, yani önceki bölümde (3.1.1) ve (3.1.2) koşulları sağlanmalıdır.

İkinci olarak $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x)$ yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olması için

$$\left\langle \frac{\partial \vec{n}(s, x_0)}{\partial s}, \vec{T}(s) \right\rangle = 0 \quad (3.3.1)$$

olmalıdır.

E_1^3 de null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri $\alpha(s)$ olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x)$ yüzeyi üzerinde bir izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} u(s, x_0) = v(s, x_0) = w(s, x_0) = 0, \\ \frac{\partial w(s, x)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v(s, x)}{\partial x} \neq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

olmasıdır.

İspat: E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi (3.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x)$ yüzeyinin $\vec{n}(s, x_0)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden (3.2.2) ile verilmiş olsun. $\Psi(s, x)$ yüzeyi üzerinde bir parametre eğri $\alpha(s)$ ise, keyfi $x = x_0$ parametresi için $\Psi(s, x_0) = \alpha(s)$ dir. Böylece

$$u(s, x_0) = v(s, x_0) = w(s, x_0) = 0,$$

$$\exists x_0 \in [P_1, P_2], \quad C_1 \leq s \leq C_2,$$

eşitliği ifade edilir. Ayrıca, $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde asimptotik olması için (3.3.1) kullanılırsa

$$\beta_2(s,x_0) = 0, \quad \beta_3(s,x_0) \neq 0, \quad (3.3.3)$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x_0 \leq P_2,$$

olur. $\Psi(s,x)$ yüzey ailesinin (3.2.2) ile verilen $\vec{n}(s,x_0)$ normal vektörünün $\beta_1(s,x_0)$, $\beta_2(s,x_0)$ ve $\beta_3(s,x_0)$ bileşenleri yüzey üzerindeki izoasimptotik α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki null olmayan Frenet vektörlerinin spacelike ve timelike durumlarına göre (3.1.5), (3.1.6) ve (3.1.7) gibi bulunur. Bu durumda (3.3.3) eşitliği göz önüne alınırsa (3.1.5), (3.1.6) ve (3.1.7) den (3.3.2) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sapma Fonksiyonu

Bu alt kısımda, işlemlerde kolaylık sağlaması ve dizayn problemlerinin iyi analiz edilebilmesi için yüzey denkleminde verilen $u(s,x)$, $v(s,x)$ ve $w(s,x)$ sapma fonksiyonları özel seçilerek yüzey üzerindeki eğrinin izoasimptotik olabilmesi için gerekli ve yeterli şart incelenecektir.

Farz edelim ki $u(s,x)$, $v(s,x)$ ve $w(s,x)$ sapma fonksiyonları, $h(s)$, $k(s)$, $r(s)$, $U(x)$, $V(x)$, $W(x) \in C_1$ ve $h(s) \neq k(s) \neq r(s) \neq 0$ olmak üzere

$$u(s,x) = h(s)U(x),$$

$$v(s,x) = k(s)V(x),$$

$$w(s,x) = r(s)W(x),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x \leq P_2,$$

olsun. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (3.3.2) den $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x)$ yüzeyi üzerinde izoasimptotik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$U(x_0) = V(x_0) = W(x_0) = 0,$$

$$r(s) \frac{\partial W(s,x_0)}{\partial x} = 0,$$

$$k(s) \frac{\partial V(s, x_0)}{\partial x} \neq 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], C_1 \leq s \leq C_2,$$

olmalıdır.

Şimdi de elde edilen teorik sonuçları destekleyen null olmayan Frenet vektörlerine sahip timelike izoasimptotik eğrili yüzey aileleri için örnek verilecektir. Ayrıca bu örnekte verilen izoasimptotik eğrili yüzeyin grafiği çizilecektir.

Örnek 3.3.1. E_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sqrt{2}s, \sin s, \cos s)$ eğrisi verilsin. α eğrisi birim hızlı timelike bir eğridir. Böylece α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.4) eşitliğinden

$$\vec{T}(s) = (\sqrt{2}, \cos s, -\sin s),$$

$$\vec{N}(s) = (0, -\sin s, -\cos s),$$

$$\vec{B}(s) = (1, \sqrt{2} \cos s, -\sqrt{2} \sin s),$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

$$u(s, x) = sx + s^2x,$$

$$v(s, x) = x^2 + sx,$$

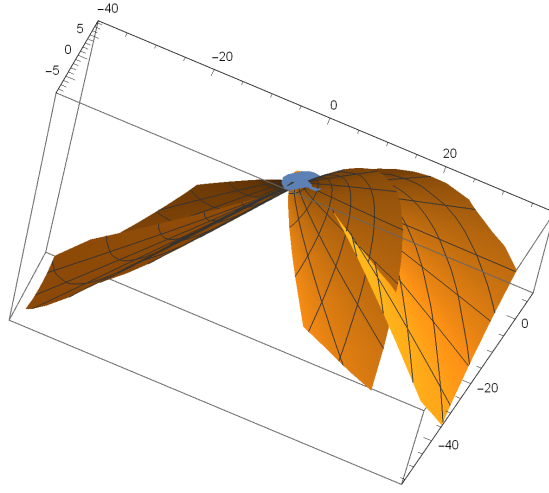
$$w(s, x) = x^2s,$$

fonksiyonları alınırsa; $x_0 = 0$ ve $s \neq 0$ noktaları için (3.3.2) şartları sağlanır. Böylece (3.0.1) den yüzey ailesi

$$\Psi(s, x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(sx + s^2x + s) + x^2s, \\ \cos s (sx + s^2x + \sqrt{2}x^2s) - \sin s (x^2 + sx - 1), \\ -\sin s (sx + s^2x + \sqrt{2}x^2s) - \cos s (x^2 + sx - 1), \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu yüzey $\alpha(s)$ eğrisini izoasimptotik olarak kabul eden yüzey ailesinin bir elemanı olur.

Bu örnek ile verilen ortak izoasimptotikli yüzeyin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.2 : Ortak izoasimptotikli (3.3.4) yüzey ailesinin bir elemanı



4. E_1^4 LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA NULL OLMAYAN ORTAK İZOGEODEZİK VE İZOASİMPTOTİK EĞRİLERE SAHİP HİPERYÜZEY AİLELERİ

E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğrinin Frenet vektörleriyle hiperyüzey aileleri oluşturulacaktır. Ayrıca sapma fonksiyonları yardımıyla hiperyüzey yeniden inşa edilecektir. Hiperyüzey üzerindeki bu eğrinin parametre, geodezik ve asimptotik eğri olma durumlarına göre hiperyüzey aileleri 3 alt başlıkta incelenecektir.

E_1^4 de $\Psi = \Psi(s, x, y)$, parametrik bir hiperyüzey olsun. E_1^4 de $\alpha(s)$ eğrisinden geçen parametrik hiperyüzey

$$\Psi(s, x, y) : [C_1, C_2] \times [P_1, P_2] \times [M_1, M_2] \rightarrow E_1^4$$

$$\begin{aligned} \Psi(s, x, y) = \alpha(s) + u(s, x, y) \vec{T}(s) + v(s, x, y) \vec{N}(s) \\ + w(s, x, y) \vec{B}_1(s) + q(s, x, y) \vec{B}_2(s), \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$ ve $q(s, x, y) \in C^1$ sapma fonksiyonları ve $[\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)]$ ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısıdır.

4.1 E_1^4 de Parametre Eğrilere Sahip Hiperyüzey Ailelerinin Normal Vektörleri

Bu bölümde, (4.0.1) hiperyüzey ailelerini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul ifade edilecektir. Ayrıca (4.0.1) hiperyüzeyinin parametre eğrisinin spacelike eğri olması durumunda üç ve timelike eğri olması durumunda bir olmak üzere hiperyüzeyin normal vektörü toplam dört durumda hesaplanacaktır.

E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olması için

$\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$, olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$, $\exists y_0 \in [M_1, M_2]$ bulunabilmesi, yani

$$\begin{aligned} u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0, \\ C_1 \leq s \leq C_2 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

olması gerekli ve yeterlidir. Buradan

$$\frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} = 0 \quad (4.1.2)$$

olduğu görülür.

$\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörü $\vec{n}(s, x, y)$

$$\vec{n}(s, x, y) = \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} \quad (4.1.3)$$

dir. Buna göre $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x, y)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \vec{n}(s, x, y) &= \beta_1(s, x, y) \vec{T}(s) + \beta_2(s, x, y) \vec{N}(s) \\ &+ \beta_3(s, x, y) \vec{B}_1(s) + \beta_4(s, x, y) \vec{B}_2(s) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de E_1^4 de hiperyüzeyin $\alpha(s)$ parametre eğrisinin, null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike eğri olma durumlarına göre hiperyüzey ailelerinin normal vektörü elde edilecektir.

İlk olarak E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir spacelike eğri olsun. Bu eğrinin asli normal, binormal ve trinormal vektörlerinin spacelike ve timelike olmalarına göre hiperyüzey ailelerinin normal vektörü hesaplanacaktır.

Durum 4.1.1. *Bu durumda E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi asli normal vektörü timelike (yani, $g(\vec{N}, \vec{N}) = -1$) olan bir spacelike eğri olsun. Bu hiperyüzey ailesinin $\vec{n}(s, x, y)$ normalini bulmak için ilk olarak (4.0.1) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin kısmi türevleri alınacaktır. Bunun için (2.1.6) eşitliği yardımıyla hiperyüzey ailesinin (4.0.1) kısmi türevleri*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \vec{B}_1(s) \\ &+ \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \vec{B}_2(s), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_2(s)$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_2(s)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu kısmi türevler, (2.1.5) ve (4.1.3) formüllerinde yerine yazılırsa hiperyüzey ailesinin normal vektörünün (4.1.4) deki $\beta_1(s, x, y)$, $\beta_2(s, x, y)$, $\beta_3(s, x, y)$ ve $\beta_4(s, x, y)$ bileşenleri

$$\begin{aligned}\beta_1(s, x, y) = & \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2(s, x, y) = & \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3(s, x, y) = & \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s, x, y) &= \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadelerde (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta_1(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{n}(s, x_0, y_0) &= \left[\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{N}(s) \\
&+ \left[\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \right] \vec{B}_1(s) \\
&+ \left[\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{B}_2(s)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Durum 4.1.2. Bu durumda E_1^4 de binormali timelike (yani, $g(\vec{B}_1, \vec{B}_1) = -1$) olan (4.0.1) hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir spacelike eğri olsun. Bu hiperyüzey ailesinin $\vec{n}(s, x, y)$ normalini bulmak için (4.0.1) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin kısmi türevleri alınıp

(2.1.7) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \vec{B}_1(s) \\ &+ \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \vec{B}_2(s), \\ \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_2(s)\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_2(s)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.1.5) ve (4.1.3) formüllerinden yararlanılırsa, (4.1.4) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörünün $\beta_1(s, x, y)$, $\beta_2(s, x, y)$, $\beta_3(s, x, y)$ ve $\beta_4(s, x, y)$ bileşenleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\beta_1(s, x, y) &= \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\ &+ \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} + k_2 w(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2(s, x, y) &= \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\ &+ \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s,x,y) &= \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} - k_1 v(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} + k_2 w(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} - k_1 v(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} + k_2 w(s,x,y) \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s,x,y) &= \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} - k_1 v(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} + k_3 q(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} + k_2 w(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} + k_3 q(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} - k_1 v(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} + k_2 w(s,x,y) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadelerde (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\beta_1(s,x_0,y_0) &= \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial s} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned}\vec{n}(s, x_0, y_0) &= \left[\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{N}(s) \\ &+ \left[\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{B}_1(s) \\ &+ \left[\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{B}_2(s)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Durum 4.1.3. Bu durumda E_1^4 de trinormal vektörü timelike (yani, $g(\vec{B}_2, \vec{B}_2) = -1$) olan (4.0.1) ile verilen hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir spacelike eğri olsun. Bu hiperyüzey ailesinin $\vec{n}(s, x, y)$ normalini bulmak için (4.0.1) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin kısmi türevleri alınıp (2.1.8) deki Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \vec{B}_1(s) \\ &+ \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \vec{B}_2(s), \\ \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_2(s)\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_2(s)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.1.5) ve (4.1.3) formüllerinden yararlanılırsa, Ψ hiperyüzeyinin (4.1.4) ile verilen normal vektörünün $\beta_1(s, x, y)$, $\beta_2(s, x, y)$, $\beta_3(s, x, y)$ ve $\beta_4(s, x, y)$ bileşenleri

$$\begin{aligned}\beta_1(s, x, y) &= \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ &+ \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2(s, x, y) = & \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\
& + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\
& - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s, x, y) = & \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\
& + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\
& - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s, x, y) = & \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\
& + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} - k_1 v(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} + k_3 q(s, x, y) \right) \\
& - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\beta_1(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{n}(s, x_0, y_0) &= \left[\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{N}(s) \\
&+ \left[\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \right] \vec{B}_1(s) \\
&+ \left[\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{B}_2(s)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

İkinci olarak E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir timelike eğri olsun. Bu eğrinin asli normal, binormal ve trinormal vektörlerinin spacelike olmalarına göre hiperyüzey ailelerinin normal vektörü hesaplanacaktır.

Durum 4.1.4. Bu durumda E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir timelike eğri (yani, $g(\vec{T}, \vec{T}) = -1$) olsun. Bu hiperyüzey ailesinin $\vec{n}(s, x, y)$ normalini hesaplamak için (4.0.1) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin kısmi türevleri alınıp (2.1.9) deki Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \vec{T}(s) \\ &+ \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \vec{N}(s) \\ &+ \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \vec{B}_1(s) \\ &+ \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \vec{B}_2(s), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \vec{B}_2(s)$$

ve

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \vec{T}(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \vec{N}(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \vec{B}_2(s)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.1.5) ve (4.1.3) formüllerinden yararlanılırsa, Ψ hiperyüzeyinin (4.1.4) ile verilen normal vektörünün $\beta_1(s, x, y)$, $\beta_2(s, x, y)$, $\beta_3(s, x, y)$ ve $\beta_4(s, x, y)$ bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \beta_1(s, x, y) &= \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ &+ \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ &- \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ &- \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2(s,x,y) &= \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} - k_3 q(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} - k_3 q(s,x,y) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s,x,y) &= \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} - k_2 w(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(k_3 w(s,x,y) + \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial q(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} - k_2 w(s,x,y) \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s,x,y) &= \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} - k_3 q(s,x,y) \right) \\
&+ \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} - k_2 w(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial x} \left(k_2 v(s,x,y) + \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial s} - k_3 q(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial s} + k_1 v(s,x,y) \right) \\
&- \frac{\partial w(s,x,y)}{\partial y} \frac{\partial u(s,x,y)}{\partial x} \left(k_1 u(s,x,y) + \frac{\partial v(s,x,y)}{\partial s} - k_2 w(s,x,y) \right).
\end{aligned}$$

Burada (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\beta_1(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta_4(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} \right) \\
&- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\
&= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{n}(s, x_0, y_0) &= \left[\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{N}(s) \\
&+ \left[\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \right] \vec{B}_1(s) \\
&+ \left[\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right] \vec{B}_2(s)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.2 E_1^4 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzogeodezik Eğrilere Sahip Hiperyüzey Aileleri

Bu bölümde, E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike ortak izogeodezik eğrili hiperyüzey aileleri oluşturulacaktır. E_1^4 de hiperyüzey ailelerinin ortak izogeodezik eğrilere sahip olması için gerekli teorem ifade edilip ispatı yapılacaktır. Teoremde verilen koşullar, sapma fonksiyonları kullanılarak yeniden ifade edilecektir. Ayrıca bu çalışmayı destekleyecek örneklere yer verilecektir.

E_1^4 de parametrik bir hiperyüzey (4.0.1) ile verilmiş olsun. E_1^4 de herhangi bir hiperyüzey üzerinde verilen bir eğrinin izogeodezik olması için hiperyüzey üzerinde bulunduran $\alpha(s)$ eğrisinin hem parametre hem de geodezik eğri olması gerekir.

İlk olarak E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin parametre eğrisi olması için $\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$, olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$, $\exists y_0 \in [M_1, M_2]$ bulunabilmesi, yani önceki bölümde (4.1.1) ve (4.1.2) koşulları sağlanmalıdır.

İkinci olarak $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir geodezik olması için gerek ve yeter koşul $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{N}(s)$ normali ile Ψ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normalinin paralel yani $\vec{n}(s, x_0, y_0) // \vec{N}(s)$ olmasıdır [29].

E_1^4 de null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri $\alpha(s)$ olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1. E_1^4 de $\alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin (4.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir izogeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0, \\ \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0, \\ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

olmasıdır.

İspat: E_1^4 de (4.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Bu durumda $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden

$$\vec{n}(s, x_0, y_0) = \beta_1(s, x_0, y_0) \vec{T}(s) + \beta_2(s, x_0, y_0) \vec{N}(s) + \beta_3(s, x_0, y_0) \vec{B}_1(s) + \beta_4(s, x_0, y_0) \vec{B}_2(s), \quad (4.2.2)$$

olarak yazılabilir. Eğer $\alpha = \alpha(s)$, $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir parametre eğri ise, keyfi $x = x_0$ ve $y = y_0$ parametreleri için $\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$ dir. Böylece

$$u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0,$$

$$\exists x_0 \in [P_1, P_2], \exists y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2,$$

eşitliği ifade edilir. Ayrıca, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde geodezik olması için hiperyüzeyin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normal vektörü ile $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{N}(s)$ asli normalini birbirine paralel olmalıdır. Bu durumda

$$\beta_2(s, x_0, y_0) \neq 0, \quad \beta_3(s, x_0, y_0) = \beta_4(s, x_0, y_0) = 0, \quad (4.2.3)$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], \quad y_0 \in [M_1, M_2], \quad C_1 \leq s \leq C_2.$$

olur.

Eğer (4.0.1) denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisinin asli normali timelike (yani, $g(\vec{N}, \vec{N}) = -1$) olan bir spacelike eğri ise bu durumda $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normal vektörünün (4.2.2) eşitliğindeki $\beta_1(s, x_0, y_0)$, $\beta_2(s, x_0, y_0)$, $\beta_3(s, x_0, y_0)$ ve $\beta_4(s, x_0, y_0)$ bileşenleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(s, x_0, y_0) = 0, \\ \beta_2(s, x_0, y_0) = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \\ \beta_3(s, x_0, y_0) = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}, \\ \beta_4(s, x_0, y_0) = \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

dir.

Eğer (4.0.1) denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisinin binormali timelike (yani, $g(\vec{B}_1, \vec{B}_1) = -1$) olan bir spacelike eğri ise bu durumda $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normal vektörünün (4.2.2) eşitliğindeki $\beta_1(s, x_0, y_0)$, $\beta_2(s, x_0, y_0)$, $\beta_3(s, x_0, y_0)$ ve $\beta_4(s, x_0, y_0)$ bileşenleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(s, x_0, y_0) = 0, \\ \beta_2(s, x_0, y_0) = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \\ \beta_3(s, x_0, y_0) = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \\ \beta_4(s, x_0, y_0) = \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

dir.

Eğer (4.0.1) denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisinin trinormali timelike (yani, $g(\vec{B}_2, \vec{B}_2) = -1$) olan bir spacelike eğri ise bu durumda $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s, x_0, y_0)$ normal vektörünün (4.2.2) eşitliğindeki $\beta_1(s, x_0, y_0)$, $\beta_2(s, x_0, y_0)$, $\beta_3(s, x_0, y_0)$ ve $\beta_4(s, x_0, y_0)$ bileşenleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(s, x_0, y_0) = 0, \\ \beta_2(s, x_0, y_0) = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \\ \beta_3(s, x_0, y_0) = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}, \\ \beta_4(s, x_0, y_0) = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

dir.

Eğer (4.0.1) denklemi ile verilen $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzey ailesinin $\alpha(s)$ parametre eğrisi bir timelike eğri ise bu durumda $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s,x_0,y_0)$ normal vektörünün (4.2.2) eşitliğindeki $\beta_1(s,x_0,y_0)$, $\beta_2(s,x_0,y_0)$, $\beta_3(s,x_0,y_0)$ ve $\beta_4(s,x_0,y_0)$ bileşenleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(s,x_0,y_0) = 0, \\ \beta_2(s,x_0,y_0) = \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial y}, \\ \beta_3(s,x_0,y_0) = \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s,x_0,y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial x}, \\ \beta_4(s,x_0,y_0) = \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s,x_0,y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s,x_0,y_0)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

dir. (4.2.3) eşitliği göz önüne alınırsa (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) ve (4.2.7) den (4.2.1) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda, işlemlerde kolaylık sağlaması ve dizayn problemlerinin iyi analiz edilebilmesi için hiperyüzey denkleminde verilen $u(s,x,y)$, $v(s,x,y)$, $w(s,x,y)$ ve $q(s,x,y)$ sapma fonksiyonları özel olarak seçilip hiperyüzeyi üzerindeki eğrinin izogeodezik olması için sonuçlar verilecektir.

I. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s,x,y)$, $v(s,x,y)$, $w(s,x,y)$ ve $q(s,x,y)$ sapma fonksiyonları, $h(s)$, $k(s)$, $r(s)$, $b(s)$, $U(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$, $Q(x,y) \in C_1$ ve $h(s) \neq k(s) \neq r(s) \neq b(s) \neq 0$ olmak üzere

$$u(s,x,y) = h(s)U(x,y),$$

$$v(s,x,y) = k(s)V(x,y),$$

$$w(s,x,y) = r(s)W(x,y),$$

$$q(s,x,y) = b(s)Q(x,y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2,$$

olarak seçilirse şu sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.2.1) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x,y)$

hiperyüzeyi üzerinde izogeodezik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
U(x_0, y_0) &= V(x_0, y_0) = W(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0, \\
r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} - b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y} &\neq 0, \\
b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} - b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} &= 0, \\
k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y} - r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0, \\
x_0 &\in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2
\end{aligned}$$

olmalıdır.

II. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$ ve $q(s, x, y)$ sapma fonksiyonları $h(s, x)$, $k(s, x)$, $r(s, x)$, $b(s, x)$, $U(y)$, $V(y)$, $W(y)$, $Q(y) \in C_1$ olmak üzere

$$u(s, x, y) = h(s, x)U(y),$$

$$v(s, x, y) = k(s, x)V(y),$$

$$w(s, x, y) = r(s, x)W(y),$$

$$q(s, x, y) = b(s, x)Q(y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olarak seçilirse aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.2.1) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izogeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
h(s, x_0)U(y_0) &= k(s, x_0)V(y_0) = r(s, x_0)W(y_0) = b(s, x_0)Q(y_0) = 0, \\
\frac{\partial r(s, x_0)}{\partial x} W(y_0) b(s, x_0) \frac{\partial Q(y_0)}{\partial y} - \frac{\partial b(s, x_0)}{\partial x} Q(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y} &\neq 0, \\
\frac{\partial b(s, x_0)}{\partial x} Q(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} - b(s, x_0) \frac{\partial q(y_0)}{\partial y} \frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) &= 0, \\
\frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y} - \frac{\partial r(s, x_0)}{\partial x} W(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} &= 0, \\
x_0 &\in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2
\end{aligned}$$

olmalıdır.

III. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$ ve $q(s, x, y)$ sapma fonksiyonları $h(s, y)$, $k(s, y)$, $r(s, y)$, $b(s, y)$, $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, $Q(x) \in C_1$ olmak üzere

$$u(s, x, y) = h(s, y)U(x),$$

$$v(s, x, y) = k(s, y)V(x),$$

$$w(s, x, y) = r(s, y)W(x),$$

$$q(s, x, y) = b(s, y)Q(x),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.2.1) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izogeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$h(s, y_0)U(x_0) = k(s, y_0)V(x_0) = r(s, y_0)W(x_0) = b(s, y_0)Q(x_0) = 0,$$

$$r(s, y_0) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \frac{\partial b(s, y_0)}{\partial y} Q(x_0) - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0,$$

$$\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

Örnekler

Bu alt kısımda, elde edilen teorik sonuçları destekleyen null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike ya da timelike izogeodezik eğrili hiperyüzey aileleri için örnekler verilecektir. Ayrıca bu örneklerde elde edilen hiperyüzey ve üzerindeki izogeodezik eğriler 3-boyutlu uzaya iz düşürülerek grafikleri çizilecektir.

Örnek 4.2.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s, \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{7}s}{2})$ eğrisi verilsin. α eğrisi birim hızlı spacelike bir eğridir. α eğrisinin binormal vektörü timelike olup, α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \left(\cosh s, \sinh s, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right), \\ \vec{N}(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0, 0), \\ \vec{B}_1(s) &= \left(\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4} \right), \\ \vec{B}_2(s) &= \left(0, 0, -\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

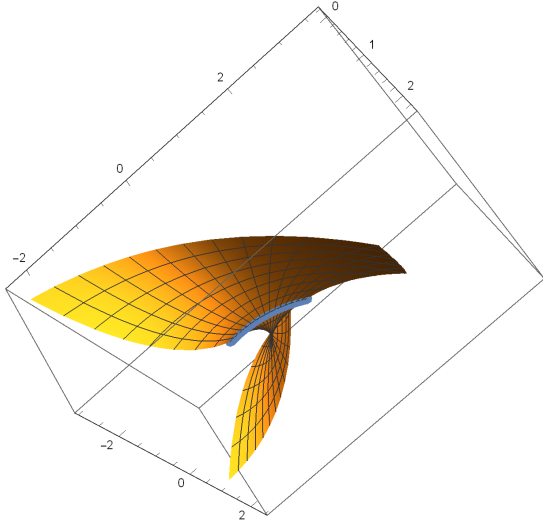
$$\begin{aligned}u(s, x, y) &= s^2 y + xs, \\ v(s, x, y) &= y^2 + x^2 s, \\ w(s, x, y) &= xs + y, \\ q(s, x, y) &= x + ys.\end{aligned}$$

fonksiyonları alınırsa; $x_0 = y_0 = 0$, $s \neq \mp 1$ noktaları için (4.2.1) şartları sağlanır. Böylece (4.0.1) den hiperyüzey ailesi

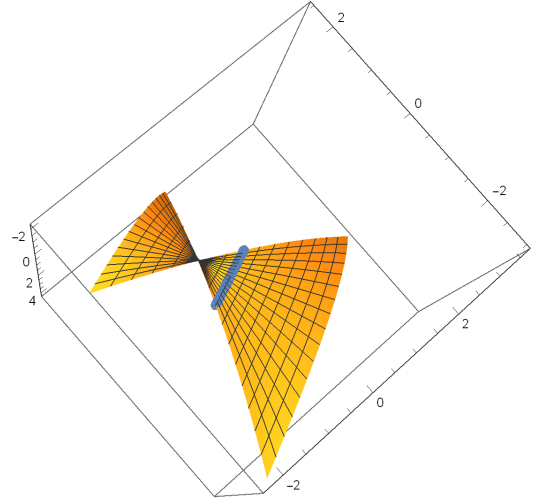
$$\Psi(s, x, y) = \begin{pmatrix} (1 + y^2 + x^2 s) \sinh s + (s^2 y + xs + \sqrt{2}(xs + y)) \cosh s, \\ (s^2 y + xs + \sqrt{2}(xs + y)) \sinh s + (1 + y^2 + x^2 s) \cosh s, \\ \frac{s}{2} + \frac{1}{2}(s^2 y + xs) + \frac{\sqrt{2}}{4}(xs + y) - \frac{\sqrt{14}}{4}(x + ys), \\ \frac{\sqrt{7}s}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}(s^2 y + xs) + \frac{\sqrt{14}}{4}(xs + y) + \frac{\sqrt{2}}{4}(x + ys), \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu hiperyüzey $\alpha(s)$ eğrisini izogeodezik olarak kabul eden hiperyüzey ailesinin bir üyesi olur.

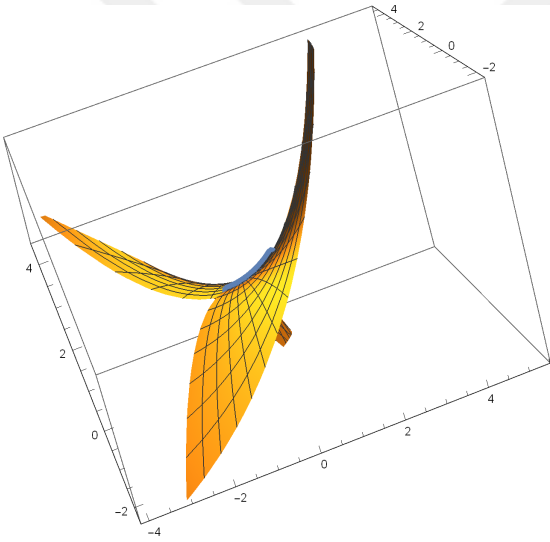
Elde edilen bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya iz düşürülmesiyle oluşan hiperyüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibidir.



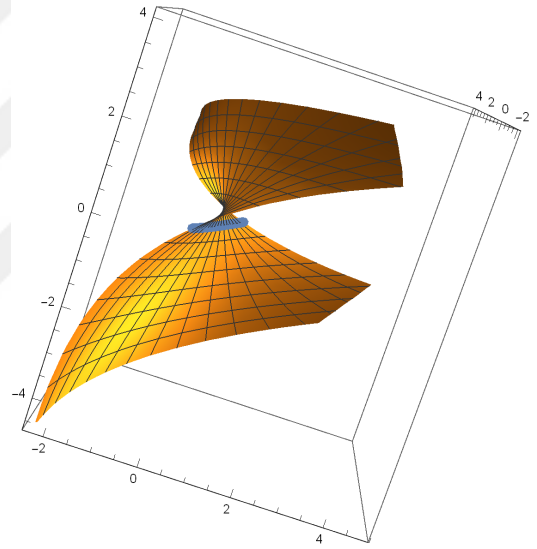
(a) Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzeyinin x -eksenine göre iz düşümü



(b) Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzeyinin y -eksenine göre iz düşümü



(c) Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzeyinin z -eksenine göre iz düşümü



(d) Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzeyinin t -eksenine göre iz düşümü

Şekil 4.1 : Ortak izogeodezikli (4.2.8) hiperyüzey ailesinin x , y , z ve t eksenlerine iz düşümleri

Örnek 4.2.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sqrt{3} \sinh s, \sqrt{3} \cosh s, s, s)$ eğrisi verilsin. α eğrisi birim hızlı timelike bir eğridir. Böylece α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= (\sqrt{3} \cosh s, \sqrt{3} \sinh s, 1, 1), \\ \vec{N}(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0, 0), \\ \vec{B}_1(s) &= \left(-\sqrt{2} \cosh s, -\sqrt{2} \sinh s, \frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2} \right), \\ \vec{B}_2(s) &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

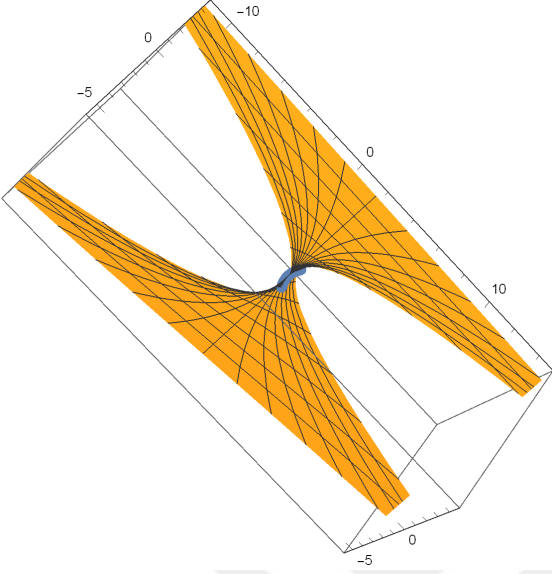
$$\begin{aligned}u(s, x, y) &= s^2 y + xs, \\ v(s, x, y) &= y^2 + x^2 s, \\ w(s, x, y) &= xs + y, \\ q(s, x, y) &= x + ys.\end{aligned}$$

fonksiyonları alınursa; $x_0 = y_0 = 0$, $s \neq \mp 1$ noktaları için (4.2.1) şartları sağlanır. Böylece (4.0.1) den hiperyüzey ailesi

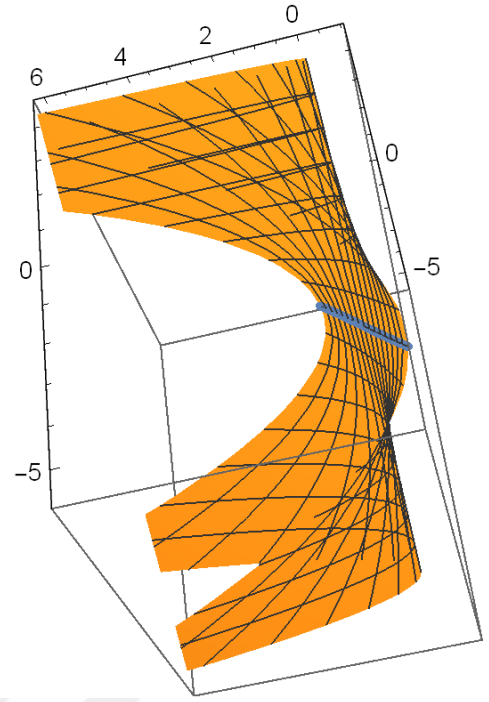
$$\Psi(s, x, y) = \begin{pmatrix} (\sqrt{3} + (y^2 + x^2 s)) \sinh s + (\sqrt{3}(s^2 y + xs) - \sqrt{2}(xs + y)) \cosh s, \\ (\sqrt{3}(s^2 y + xs) - \sqrt{2}(xs + y)) \sinh s + (\sqrt{3} + (y^2 + x^2 s)) \cosh s, \\ s + (s^2 y + xs) - \frac{\sqrt{6}}{2}(xs + y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + ys), \\ s + (s^2 y + xs) - \frac{\sqrt{6}}{2}(xs + y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + ys), \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu hiperyüzey $\alpha(s)$ eğrisini izogeodezik olarak kabul eden hiperyüzey ailesinin bir üyesi olur.

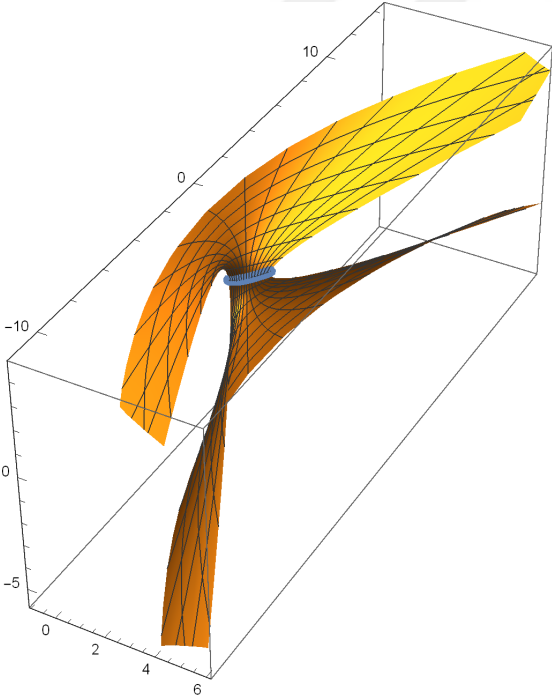
Elde edilen bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya iz düşürülmesiyle oluşan hiperyüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibidir.



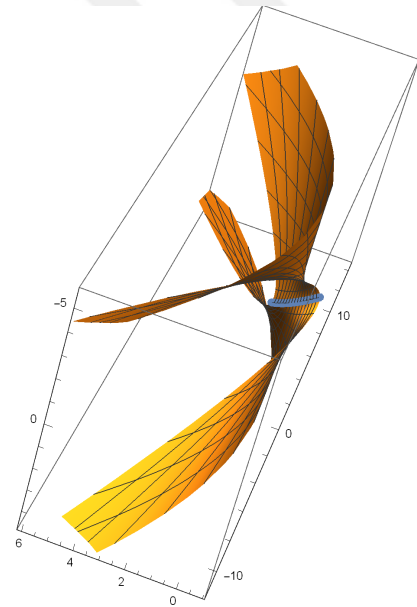
(a) Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzeyinin x -eksenine göre iz düşümü



(b) Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzeyinin y -eksenine göre iz düşümü



(c) Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzeyinin z -eksenine göre iz düşümü



(d) Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzeyinin t -eksenine göre iz düşümü

Şekil 4.2 : Ortak izogeodezikli (4.2.9) hiperyüzey ailesinin x , y , z ve t eksenlerine iz düşümleri

4.3 E_1^4 Lorentz-Minkowski Uzayında Null olmayan Ortak İzoasimptotik Eğrilere Sahip

Hiperyüzey Aileleri

Bu bölümde, E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike ortak izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri oluşturulacaktır. E_1^4 de hiperyüzey ailelerinin ortak izoasimptotik eğrilere sahip olması için gerekli teorem ifade edilip ispatı yapılacaktır. Teoremden verilen koşullar, sapma fonksiyonları kullanılarak yeniden ifade edilecektir. Ayrıca bu çalışmayı destekleyecek örneklere yer verilecektir.

E_1^4 de parametrik bir hiperyüzey (4.0.1) şeklinde verilmiş olsun. E_1^4 de herhangi bir hiperyüzey üzerinde verilen bir eğrinin izoasimptotik olması için bu eğrinin hiperyüzey üzerinde hem parametre hem de asimptotik eğri olması gerekir.

İlk olarak E_1^4 de (4.0.1) hiperyüzeyini oluşturan $\alpha(s)$ eğrisinin bir parametre eğrisi olması için $\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$ olacak şekilde $\exists x_0 \in [P_1, P_2]$, $\exists y_0 \in [M_1, M_2]$ bulunabilmesi, yani önceki bölümde (4.1.1) ve (4.1.2) koşulları sağlanmalıdır.

İkinci olarak $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olması için

$$\left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}(s, x_0, y_0), \vec{T}(s) \right\rangle = 0 \quad (4.3.1)$$

olmalıdır.

E_1^4 de null olmayan Frenet vektörlere sahip bir eğri $\alpha(s)$ olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin (4.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0, \\ 0 = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \\ 0 \neq \left(\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ + \left(\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

olmasıdır.

İspat: E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi (4.0.1) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzeyinin $\vec{n}(s,x_0,y_0)$ normal vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden (4.2.2) ile verilmiş olsun. $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir parametre eğri ise, keyfi $x = x_0$ ve $y = y_0$ parametreleri için $\Psi(s,x_0,y_0) = \alpha(s)$ dir. Böylece

$$u(s,x_0,y_0) = v(s,x_0,y_0) = w(s,x_0,y_0) = q(s,x_0,y_0) = 0,$$

$$\exists x_0 \in [P_1, P_2], \exists y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2.$$

eşitliği ifade edilir. Ayrıca, $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzeyi üzerinde asimptotik olması için (4.3.1) kullanılırsa

$$\beta_1(s,x_0,y_0) = \beta_2(s,x_0,y_0) = 0, \quad \beta_3^2(s,x_0,y_0) + \beta_4^2(s,x_0,y_0) \neq 0, \quad (4.3.3)$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x_0 \leq P_2, \quad M_1 \leq y_0 \leq M_2$$

olur. $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzey ailesinin $\vec{n}(s,x_0,y_0)$ normal vektörünün (4.2.2) eşitliğindeki $\beta_1(s,x_0,y_0)$, $\beta_2(s,x_0,y_0)$, $\beta_3(s,x_0,y_0)$ ve $\beta_4(s,x_0,y_0)$ bileşenleri (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) ve (4.2.7) gibi bulunur. Bu durumda $\alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s,x,y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için hiperyüzeyin $\vec{n}(s,x_0,y_0)$ normal vektöründeki (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) ve (4.2.7) bileşenlerinden (4.3.3) eşitliği göz önüne alınarak (4.3.2) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda, işlemlerde kolaylık sağlaması ve dizayn problemlerinin iyi analiz edilebilmesi için hiperyüzey denkleminde verilen $u(s,x,y)$, $v(s,x,y)$, $w(s,x,y)$ ve $q(s,x,y)$ sapma fonksiyonları üç farklı durumda tanımlanarak her bir durum için hiperyüzey üzerindeki eğrinin izoasimptotik olması için sonuçlar verilecektir.

I. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s,x,y)$, $v(s,x,y)$, $w(s,x,y)$ ve $q(s,x,y)$ sapma fonksiyonları, $h(s)$, $k(s)$, $r(s)$, $b(s)$, $U(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$, $Q(x,y) \in C_1$ ve $h(s) \neq k(s) \neq r(s) \neq b(s) \neq 0$ olmak üzere

$$u(s, x, y) = h(s)U(x, y),$$

$$v(s, x, y) = k(s)V(x, y),$$

$$w(s, x, y) = r(s)W(x, y),$$

$$q(s, x, y) = b(s)Q(x, y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2,$$

olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.3.2) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} U(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) = W(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0, \\ \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y}, \\ 0 \neq \left(k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y} - r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ + \left(b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} - b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2, \\ x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2] \quad C_1 \leq s \leq C_2 \end{aligned}$$

olmalıdır.

II. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$ ve $q(s, x, y)$ sapma fonksiyonları $h(s, x)$, $k(s, x)$, $r(s, x)$, $b(s, x)$, $U(y)$, $V(y)$, $W(y)$, $Q(y) \in C_1$ olmak üzere

$$u(s, x, y) = h(s, x)U(y),$$

$$v(s, x, y) = k(s, x)V(y),$$

$$w(s, x, y) = r(s, x)W(y),$$

$$q(s, x, y) = b(s, x)Q(y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.3.2) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$h(s, x_0)U(y_0) = k(s, x_0)V(y_0) = r(s, x_0)W(y_0) = b(s, x_0)Q(y_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(s, x_0,)}{\partial x} W(y_0) b(s, x_0) \frac{\partial Q(y_0)}{\partial y} &= \frac{\partial b(s, x_0,)}{\partial x} Q(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y}, \\ 0 \neq &\left(\frac{\partial b(s, x_0,)}{\partial x} Q(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} - b(s, x_0) \frac{\partial q(y_0)}{\partial y} \frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y} - \frac{\partial r(s, x_0)}{\partial x} W(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} \right)^2, \\ &x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2] \quad C_1 \leq s \leq C_2 \end{aligned}$$

olmalıdır.

III. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda; $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$ ve $q(s, x, y)$ sapma fonksiyonları $h(s, y)$, $k(s, y)$, $r(s, y)$, $b(s, y)$, $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, $Q(x) \in C_1$ olmak üzere

$$u(s, x, y) = h(s, y)U(x),$$

$$v(s, x, y) = k(s, y)V(x),$$

$$w(s, x, y) = r(s, y)W(x),$$

$$q(s, x, y) = b(s, y)Q(x),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x \leq P_2, \quad M_1 \leq y \leq M_2$$

olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.3. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda (4.3.2) dan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$h(s, y_0)U(x_0) = k(s, y_0)V(x_0) = r(s, y_0)W(x_0) = b(s, y_0)Q(x_0) = 0,$$

$$r(s, y_0) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \frac{\partial b(s, y_0)}{\partial y} Q(x_0) = b(s, y_0) \frac{\partial Q(x_0)}{\partial x} \frac{\partial r(s, y_0)}{\partial y} W(x_0),$$

$$0 \neq \left(b(s, y_0) \frac{\partial Q(x_0)}{\partial x} \frac{\partial k(s, y_0)}{\partial y} V(x_0) - \frac{\partial b(s, y_0)}{\partial y} Q(x_0) k(s, y_0) \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(k(s, y_0) \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} \frac{\partial r(s, y_0)}{\partial y} W(x_0) - r(s, y_0) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \frac{\partial k(s, y_0)}{\partial y} V(x_0) \right)^2,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2] \quad C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

Örnekler

Bu alt bölümde, elde edilen teorik sonuçları destekleyen null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike ya da timelike izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri için örnekler verilecektir. Ayrıca örnekleri verilen hiperyüzeyler 3-boyutlu uzaya iz düşürülerek grafikleri çizilecektir.

Örnek 4.3.1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\frac{\sqrt{11}s}{3}, \frac{\sqrt{2}s}{3}, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$ eğrisi verilsin. α eğrisi birim hızlı spacelike bir eğridir. Böylece α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) &= \left(\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2} \sin s, \sqrt{2} \cos s \right), \\ \vec{N}(s) &= (0, 0, -\cos s, -\sin s), \\ \vec{B}_1(s) &= \left(\frac{\sqrt{22}}{3}, \frac{2}{3}, -\sin s, \cos s \right), \\ \vec{B}_2(s) &= \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{11}}{3}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

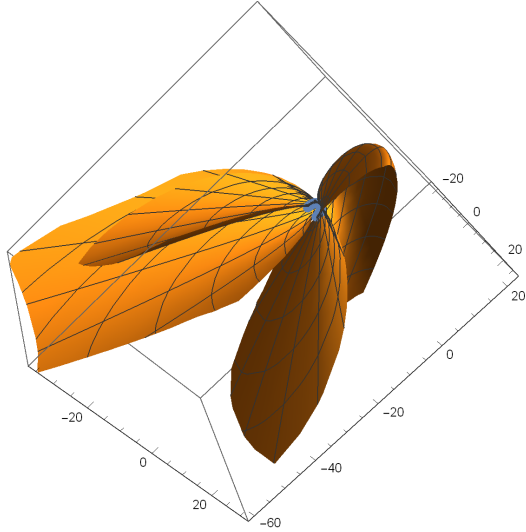
$$\begin{aligned} u(s, x, y) &= s^2(x-2) + y^2, \\ v(s, x, y) &= (s^2 + x^2)y, \\ w(s, x, y) &= (x^2 - 4)(y^2 + s), \\ q(s, x, y) &= sxy^2 \end{aligned}$$

fonksiyonları alınursa; $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $s \neq 0$, noktaları için (4.3.2) şartlar sağlanır. Böylece (4.0.1) den hiperyüzey ailesi

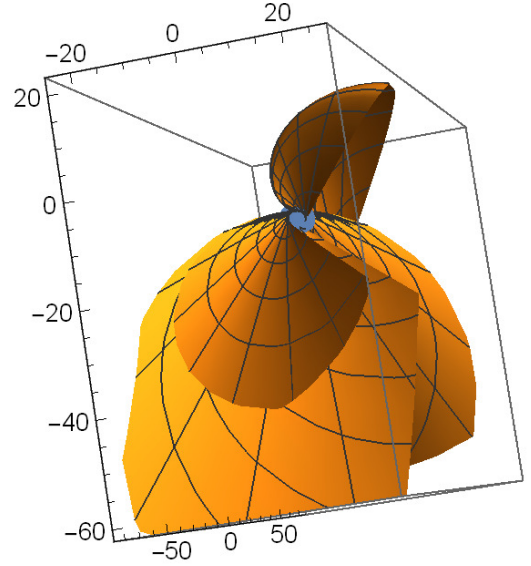
$$\Psi(s, x, y) = \left(\begin{array}{l} \frac{\sqrt{11}s}{3} + (s^2(x-2) + y^2) \frac{\sqrt{11}}{3} + (x^2 - 4)(y^2 + s) \frac{\sqrt{22}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} sxy^2, \\ \frac{\sqrt{2}s}{3} + (s^2(x-2) + y^2) \frac{\sqrt{2}}{3} + (x^2 - 4)(y^2 + s) \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{11}}{3} sxy^2, \\ \cos s \left(\sqrt{2} - (s^2 + x^2)y \right) - \sin s \left((x^2 - 4)(y^2 + s) + \sqrt{2} (s^2(x-2) + y^2) \right), \\ \sin s \left(\sqrt{2} - (s^2 + x^2)y \right) + \cos s \left((x^2 - 4)(y^2 + s) + \sqrt{2} (s^2(x-2) + y^2) \right), \end{array} \right) \quad (4.3.4)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu hiperyüzey $\alpha(s)$ eğrisini izoasimptotik olarak kabul eden hiperyüzey ailesinin bir elemanı olur.

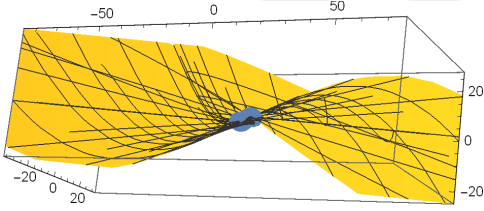
Parametrik denklemler ile verilen bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya iz düşürülmesiyle oluşan hiperyüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibidir.



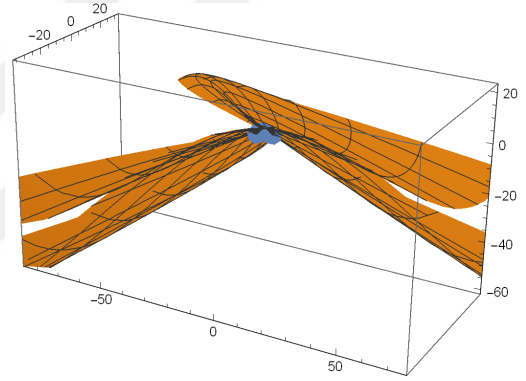
(a) Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzeyinin x -eksenine göre iz düşümü



(b) Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzeyinin y -eksenine göre iz düşümü



(c) Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzeyinin z -eksenine göre iz düşümü



(d) Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzeyinin t -eksenine göre iz düşümü

Şekil 4.3 : Ortak izoasimptotikli (4.3.4) hiperyüzey ailesinin x , y , z ve t eksenlerine iz düşümleri

Örnek 4.3.2. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \cosh s, \sin s, \cos s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$ eğrisi verilsin. Bu eğri bir timelike eğridir. Böylece α eğrisinin Frenet vektörleri (2.1.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= (\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \cos s, -\sin s), \\ \vec{N}(s) &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sinh s, \frac{\sqrt{6}}{3} \cosh s, \frac{-\sqrt{3}}{3} \sin s, \frac{-\sqrt{3}}{3} \cos s \right), \\ \vec{B}_1(s) &= (-\cosh s, -\sinh s, -\sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s), \\ \vec{B}_2(s) &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \sinh s, \frac{-\sqrt{3}}{3} \cosh s, \frac{-\sqrt{6}}{3} \sin s, \frac{-\sqrt{6}}{3} \cos s \right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sapma fonksiyonları olarak

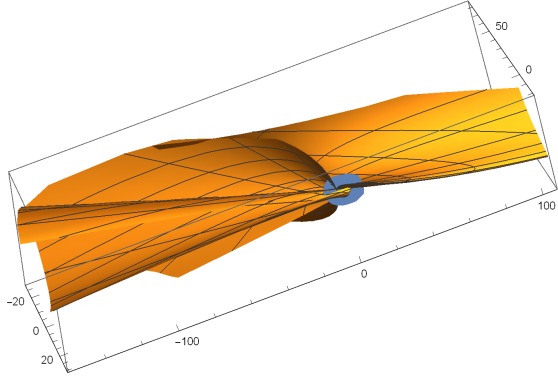
$$\begin{aligned} u(s, x, y) &= s^2(x-2) + y^2, \\ v(s, x, y) &= (s^2 + x^2)y, \\ w(s, x, y) &= (x^2 - 4)(y^2 + s), \\ q(s, x, y) &= sxy^2 \end{aligned}$$

fonksiyonları alınır; $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $s \neq 0$, noktaları için (4.3.2) şartlar sağlanır. Böylece (4.0.1) den hiperyüzey ailesi

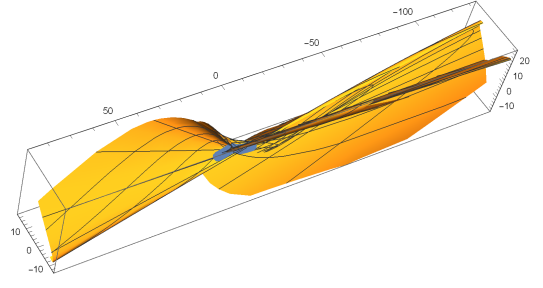
$$\Psi(s, x, y) = \begin{pmatrix} \sinh s \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}(s^2 + x^2)y - \frac{\sqrt{3}}{3}(sxy^2) \right) \\ + \cosh s \left(\sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) - (x^2 - 4)(y^2 + s) \right), \\ \cosh s \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}(s^2 + x^2)y - \frac{\sqrt{3}}{3}(sxy^2) \right) \\ + \sinh s \left(\sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) - (x^2 - 4)(y^2 + s) \right), \\ \sin s \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}(s^2 + x^2)y - \frac{\sqrt{6}}{3}(sxy^2) \right) \\ + \cos s \left((s^2(x-2) + y^2) - \sqrt{2}(x^2 - 4)(y^2 + s) \right), \\ \cos s \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}(s^2 + x^2)y - \frac{\sqrt{6}}{3}(sxy^2) \right) \\ + \sin s \left(\sqrt{2}(x^2 - 4)(y^2 + s) - (s^2(x-2) + y^2) \right), \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu hiperyüzey $\alpha(s)$ eğrisini izoasimptotik olarak kabul eden hiperyüzey ailesinin bir elemanı olur.

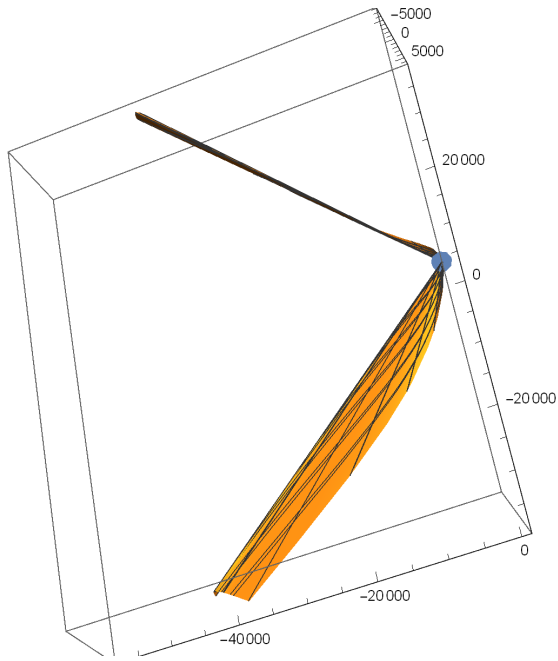
Parametrik denklemleri ile ifade edilen bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya iz düşürülmesiyle oluşan hiperyüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibidir



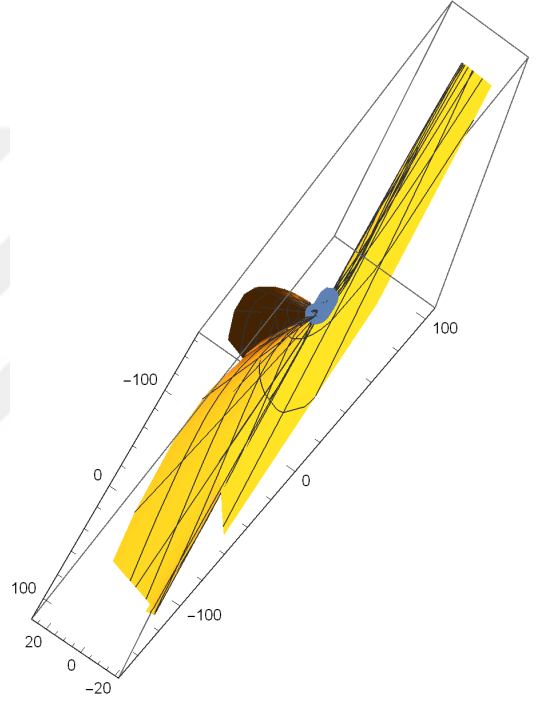
(a) Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzeyinin x -eksenine göre iz düşümü



(b) Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzeyinin y -eksenine göre iz düşümü



(c) Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzeyinin z -eksenine göre iz düşümü



(d) Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzeyinin t -eksenine göre iz düşümü

Şekil 4.4 : Ortak izoasimptotikli (4.3.5) hiperyüzey ailesinin x , y , z ve t eksenlerine iz düşümleri

5. SONUÇ

Bu çalışmada, E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike eğrilerden geçen hiperyüzeylerin parametrik denklemi, bu eğrilerinin Frenet çatıları yardımıyla ifade edilerek spacelike ve timelike eğrilerin hiperyüzey üzerinde ortak izogeodezik ve ortak izoasimptotik olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek hiperyüzey aileleri oluşturulmuştur. Sapma fonksiyonları yardımıyla da elde edilen bu koşullar sadeleştirilmiştir. Bu çalışma ve kaynaklarda verdiğimiz bu konu ile ilgili pseudo null eğrilerden geçen hiperyüzeyler elde edilerek uygulamada kullanılacak bazı sonuçlar verilebilir. Ayrıca bu metodlar diğer bazı farklı uzaylara da genelleştirilebilir. Bu nedenle, ümit ederiz ki çalışmamız bu konu üzerine araştırma yapanlara referans olacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] **Contopoulos, G.** (1990). Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems, *Astronomy and Astrophysics*, 231(1), 41–55.
- [2] **Wang, G.J., Tang, K. ve Tai, C.L.** (2004). Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic, *Computer-Aided Design*, 36(5), 447–459.
- [3] **Abdel-Baky, R.A.** (2016). A surface family with a common asymptotic curve in the Euclidean 3-space, *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 2016.
- [4] **Bayram, E., Güler, F. ve Kasap, E.** (2012). Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve, *Computer-Aided Design*, 44(7), 637–643.
- [5] **Kasap, E., Akyildiz, F.T. ve Orbay, K.** (2008). A generalization of surfaces family with common spatial geodesic, *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2), 781–789.
- [6] **Bayram, E. ve Kasap, E.** (2014). Hypersurface family with a common isogeodesic, *Scientific Studies and Research*, 24(2).
- [7] **Bayram, E. ve Kasap, E.** (2014). Hypersurface family with a common isoasymptotic curve, *Geometry*, 2014.
- [8] **Ayvacı, K.H. ve Atalay, G.Ş.** (2020). Ortak Bertrand-B isogeodezik eğriye sahip yüzey aileleri, *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(3), 1975–1983.
- [9] **Atalay, G.Ş. ve Kasap, E.** (2016). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve according to Bishop frame in Euclidean space, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(1), 164–174.
- [10] **Şenyurt, S., Ayvacı, K.H. ve Canlı, D.** Ortak Mannheim-D isogeodezik eğriye sahip yüzeyler, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 10(2), 105–116.
- [11] **Kasap, E. ve Akyildiz, F.T.** (2006). Surfaces with common geodesic in Minkowski 3-space, *Applied mathematics and computation*, 177(1), 260–270.
- [12] **Şaffak, G. ve Kasap, E.** (2009). Family of surface with a common null geodesic, *International journal of the physical sciences*, 4(8).
- [13] **Şaffak, G., Bayram, E. ve Kasap, E.** (2013). Surfaces with a common asymptotic curve in Minkowski 3-space, *arXiv preprint arXiv:1305.0382*.
- [14] **Ergün, E. ve Bayram, E.** 3-Boyutlu Minkowski uzayında timelike binormalı spacelike eğrinin tabii liftini asimptotik kabul eden yüzey ailesi, *Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(2), 1082–1089.
- [15] **Kocayığıt, H. ve Çiçek, Z.** (2015). Some characterizations of constant breadth spacelike curves in Minkowski 4-space, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2), 1–12.
- [16] **Yüzbaşı, Z.K. ve Bektaş, M.** (2016). On the construction of a surface family with common geodesic in Galilean space G_3 , *Open Physics*, 14(1), 360–363.

- [17] **Yüzbaşı, Z.K.** (2016). On a family of surfaces with common asymptotic curve in the Galilean space G_3 , *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 518–523.
- [18] **Yoon, D.W. ve Yuzbasi, Z.K.** (2018). An approach for hypersurface family with common geodesic curve in the 4D Galilean space G_4 , *The Pure and Applied Mathematics*, 25(4), 229–241.
- [19] **Altın, M. ve Yüzbaşı, Z.K.** (2020). Surfaces using Smarandache asymptotic curves in Galilean space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3, 1–15.
- [20] **Altın, M., Kazan, A. ve Karadağ, H.B.** Hypersurface families with Smarandache curves in Galilean 4-space, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70(2), 744–761.
- [21] **O’Neil, B.**, (1983), *Semi-Riemannian Geometry*.
- [22] **Ferrandez, A., Gimenez, A. ve Lucas, P.** (2001). Null helices in Lorentzian space forms, *International Journal of Modern Physics A*, 16(30), 4845–4863.
- [23] **Turgut, M. ve Yılmaz, S.** (2009). Some characterizations of type-3 slant helices in Minkowski space-time, *Involve, a Journal of Mathematics*, 2(1), 115–120.
- [24] **Soytürk, E.** (2005). Osculating spheres and osculating circles of a curve in Semi-Riemannian space, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 54(02).
- [25] **Petrovic-Torgašev, M., Ilarslan, K. ve Nešovic, E.** (2005). On partially null and pseudo null curves in the semi-euclidean space R_4^2 , *Journal of Geometry*, 84, 106–116.
- [26] **Tozak, H.** (2010). *Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi* (Yüksek Lisans Tezi). Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [27] **Pinsky, N.** (2013). *Mathematical knowledge for teaching and visualizing differential geometry*.
- [28] **O’neill, B.** (2006). *Elementary differential geometry*, Elsevier.
- [29] **Thorpe, J.A.** (2012). *Elementary topics in differential geometry*, Springer Science & Business Media.
- [30] **Hacisalihoglu, H.H.** (1983). Diferensiyel Geometri, *Inonu Univ. yayinlari, mat.*, 2, 227.
- [31] **López, R.** (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44–107.
- [32] **Walrave, J.** (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*.
- [33] **Turgut, M. ve Yılmaz, S.** (2008). On the Frenet frame and a characterization of space-like involute-evolute curve couple in Minkowski space-time, *Int. Math. Forum*, cilt 3, s.793–801.
- [34] **Ali, A.T.** (2010). Time-like Smarandache Curves Derived from a Space-like Helix, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 8(1), 93–100.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Çiğdem TURAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, Dicle Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- MEB'de çalışıyor

YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR

- **Turan, Ç., Altın, M. ve Karadağ, H. B.** (2021). Parametric Representation of Hypersurfaces Pencil with Common Geodesic in E_1^4 , *18 th. International Geometry Symposium*, Malatya, Türkiye, July 12-13.(Özet Bildiri)
- **Turan, Ç., Altın, M. ve Karadağ, H. B.** (2022). Hypersurface families with common non-null geodesic in Minkowski 4-space, *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 15(1), 167-180.
- **Turan, Ç., Altın, M. ve Karadağ, H. B.** (2022). 4-Boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan ortak izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri, *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*. (Kabul Edildi)