T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI VE BAZ ÇEŞİTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Fatma MEŞE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Eylül 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI VE BAZ ÇEŞİTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Fatma MEŞE
36193614076

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Eylül 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bilal ALTAY'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Tez yazımında beni yönlendiren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ ve Sayın Doç. Dr. Ramazan KAMA'ya ve beni yüksek lisans konusunda cesaretlendiren değerli hocam Dr. Halise LEVENT'e çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Bazı Dizi Uzayları ve Baz Çeşitleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ayşe Fatma MEŞE

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{B_X}$	: X uzayının kapalı birim yuvarı,
$\mathbf{c}$	: Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı,
$\mathbf{c_0}$	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,
$\mathbf{c_{00}}$	: Sonlu sayıda terimi hariç geriye kalan bütün terimleri sıfır olan dizilerin uzayı,
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi,
$\mathbf{dim}\, X$	: X uzayının boyutu
$\mathbf{D(T)}$	: T operatörünün tanım kümesi,
$G(T)$	: T operatörünün grafiği,
$\lvert\mathbb{J}\rvert$	: $\mathbb{J}$ kümesinin kardinalitesi
ℓ_p	: p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı,
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı,
$\mathbf{M}+\mathbf{N}$	: M ve N kümelerinin toplamı,
$\mathbf{M}\oplus\mathbf{N}$	: M ve N kümelerinin direkt toplamı,
$\overline{\mathbf{M}}$	: M kümesinin kapanışı,
$\mathbf{N(T)}$	: T operatörünün çekirdeği,
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi,
$\mathbf{R(T)}$	: T operatörünün değer kümesi,
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi,
$\mathbf{S_X}$	: X uzayının birim küresi,
$\mathbf{T(X)}$	: X üzerinde tanımlı olan bir T operatörünün görüntüsü,
$\mathbf{T}\vert_{\mathbf{E}}$	: T operatörünün E kümesine kısıtlanışı,
$\mathbf{T}^*$	: T operatörünün adjoint operatörü,
$\mathbf{T^{-1}}$	: T operatörünün tersi,
$[\mathbf{x_n}]$	: (x_n) dizisinin gerdiği kapalı lineer uzay,
$\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$	: X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı,
$\mathbf{X}^*$	: X uzayının sürekli duali,
$\mathbf{X}^{**}$	: X uzayının 2-inci duali,
$\mathbf{w}$	: Kompleks terimli bütün dizilerin uzayı,

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DİZİ UZAYLARI VE BAZ ÇEŞİTLERİ

Ayşe Fatma MEŞE

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

45+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Beş bölümden oluşan tezin ilk bölümü, konunun tarihsel gelişimine ve gerekli literatüre ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümler için fonksiyonel analiz ve topolojinin gerekli temel kavramları ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü Bölümde, Banach uzayları için verlen baz ve temel dizi kavramları verilerek, bazların ve temel dizilerin denkliği incelenmiştir. Temel dizilerin bir uygulaması olarak Eberlein-Smulian Teoreminin ispatı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere, ℓ_p ve c_0 Banach uzaylarının izomorfik ve tamamlayıcı altuzaylarına ayrılmıştır.

Beşinci bölümde, Banach uzayların şartsız, büzülen ve sınırlı-tam baz türleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Banach uzayı, Dizi uzayı, Baz, Schauder baz, Temel dizi, Şartsız baz, Büzülen baz, Sınırlı-tam baz

ABSTRACT

Master Thesis

SOME SEQUENCE SPACES AND BASIS TYPES

Ayşe Fatma MEŞE

İnönü University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

45+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Bilal ALTAY

The first part of the thesis, which consists of five parts, is devoted to the historical development of the subject and the necessary literature.

In the second chapter, necessary basic concepts and theorems of functional analysis and topology are given for the next chapters.

In the third chapter, the concepts of basis and basic sequences given for Banach spaces are given and the equivalence of bases and basic sequences is examined. The proof of the Eberlein-Smulian Theorem is given as an application of basic sequences.

In the fourth chapter, $(1 \leq p < \infty)$ is divided into isomorphic and complementary subspaces of Banach spaces ℓ_p and c_0.

In the fifth chapter, unconditional, shrinking and boundedly complete basis types of Banach spaces are examined.

KEYWORDS: Banach space, Sequence space, Basis, Schauder basis, Basic sequence, Unconditional basis, Shrinking basis, Boundedly complete basis

1. GİRİŞ

Banach uzay teorisinde izomorfik uzaylar, baz, temel diziler ve tamamlayıcı altuzay konuları bir çok problemin çözümünde yer alır. Özellikle sonsuz boyutlu uzaylarda baz ve temel diziler kavramı, izomorfik uzaylar için kullanılan önemli araçlardandır. Vektör uzayları için Hamel baz kavramı, reel sayılar üzerinde bir süreksiz lineer fonksiyon tanımlamak için Hamel [1] tarafından verilmiştir. Her uzay bir Hamel bazına sahiptir. Sonlu boyutlu vektör uzaylarda Hamel baz kavramı oldukça kullanışlı olmasına karşın topolojik yapıya sahip sonsuz boyutlu uzaylarda pek kullanışlı değildir. Topolojik vektör uzaylarında her x elemanı için $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$ olacak şekilde bir tek $(f_i(x))$ skaler dizisi var ise (x_i) dizisine uzay için bir baz kümesidir denir. Sonsuz boyutlu topolojik vektör uzaylarında, baza ait $(f_i(x))$ koordinat fonksiyonellerinin sürekli olma şartını ekleyerek Schauder [2], Schauder baz tanımını vermiştir. Bir Banach uzayın Schauder bazı varsa uzay ayrılabilirdir (sayılabilir yoğun altkümeye sahip) ve yaklaşım özelliğine (her kompakt kümesinin elemanlarına sonlu-ranklı dönüşümle yaklaşılabilir) sahiptir.

Banach [3] tarafından ifade edilen "Her ayrılabilir Banach uzayı bir Schauder bazına sahip midir?" problemi, 1973 yılında, "her ayrılabilir uzay yaklaşım özelliğine sahip midir" problemine çözüm arayan Enflo [4] tarafından inşa edilen yaklaşım özelliğine sahip olmayan ayrılabilir yansımalı Banach uzayı örneği ile olumsuz olarak çözüldü.

Sonsuz boyutlu Banach uzaylarında ve uzayların izomorfikliği ile ilgili bir önemli kavram da temel dizilerdir. Baz problemine benzer olan "Her sonsuz boyutlu Banach uzayı bir temel dizi içerir mi?" problemi Pełczyński [5] tarafından olumlu olarak cevaplandırıldı. Yine "Her ayrılabilir Banach uzay, bir baza sahip uzaya izometrik olarak gömülebilir mi?" problemi, Banach ve Mazur [6] tarafından, her ayrılabilir Banach uzayı, bir Schauder baza sahip olan $C[0,1]$ uzayına izometrik olarak gömülebilir olduğu gösterilerek, olumlu olarak yanıtlanmıştır.

Metriklenebilir topolojik uzaylarda çakışan fakat genel topolojik uzaylarda farklı kompaktlık tanımları(dizisel kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ...) mevcuttur. Banach uzaylarda, kompakt küme üzerinde zayıf topolojinin metriklenebilir gibi davrandığı Eberlein-Smulian [7, 8] tarafından yapılan ispatı, temel diziler kavramı kullanılarak Pełczyński [9] tarafından daha basit bir şekilde verilmiştir.

Banach uzaylarında serilerin farklı yakınsaklığı söz konusu olduğundan, baz kavramında yer alan serinin yakınsamasına bağlı olarak farklı bazlar tanımlanmıştır. Norm, zayıf ve zayıf* topolojilerine göre baz, zayıf baz ve zayıf* baz, serinin şartsız, düzgün ve mutlak yakınsaklığına göre şartsız baz, düzgün baz ve mutlak baz gibi kavramlar tanımlanmıştır. Zayıf, mutlak ve şartsız baz kavramları Karlin [10] çalışmasında ele alınmıştır.

Herhangi bir Banach uzayı için bir Schauder bazı verildiğinde, uzay için bir koordinat sistemi belirlendiğinden, uzay bu koordinat sistemiyle bir dizi uzayı ile temsil edilmiş olur. Verilen iki Banach uzayının belirlenmiş bazlarına göre izomorf olup olmadıkları problemi fonksiyonel analizin önemli problemlerinden biridir. Banach uzayları için Schroeder-Bernstein problemi olarak bilinen, X uzayı, Y uzayının bir tamamlayıcı alt uzayına izomorf ve Y, X uzayının bir tamamlayıcı alt uzayına izomorf ise X ve Y Banach uzayları izomorfik midir? sorusu, Gowers [11] tarafından olumsuz cevaplandı. Tamamlayıcı altuzay problemi olarak adlandırılan "Her kapalı altuzayı tamamlayıcı olan Banach uzayı bir Hilbert uzayına izomorf mudur?" problemi Lindenstrauss ve Tzafriri [12] tarafından olumlu olarak cevaplandırılmıştır. Her sonsuz boyutlu Banach uzayının, bir baza sahip olan sonsuz boyutlu bir kapalı altuzayının mevcut olduğu [13, 14, 15] tarafından ispatlanmıştır.

Şartsız bazlar için "Her sonsuz boyutlu Banach uzay şartsız bir temel diziye sahip midir?" problemi ve bu problem ile ilgili " Her sonsuz boyutlu Banach uzayı, ya yansımalı ya da ℓ_1 veya c_0 uzayına izomorf olan bir sonsuz boyutlu altuzaya sahiptir" beklentisi, Gower ve Maurey [16] tarafından verilen şartsız temel diziye sahip olmayan sonsuz boyutlu uzay örneği ve Gower [17] tarafından ne yansımalı ne de ℓ_1 veya c_0 uzaylarına gömülebilen sonsuz boyutlu altuzaya sahip Banach uzayı örneği verilerek olumsuz olarak yanıtlandı. Karlin, [10] çalışmasında $C[0, 1]$ uzayının bir şartsız baza sahip olmadığını göstererek, ayrılabilir bir sonsuz boyutlu Banach uzayının şartsız baza sahip olmayabileceğini ispatlamıştır. Sınırlı-tam bazların dual uzayını gerdiğini ilk Alaoglu [18] ifade etmiştir. Büzülen baz ve sınırlı-tam bazlar ile ilgili önemli sonuçlar [19, 20, 21, 22] numaralı kaynaklarda yer almaktadır.

Bu tezde, [23, 24, 25, 26] kaynaklarından faydalanarak, Banach uzaylarda baz ve temel dizi kavramları, denk baz ve temel diziler ile ilgili sonuçlar, Eberlein-Šmulian Teoreminin temel dizilerle yapılan ispatı verildi. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_p ve c_0 uzaylarının kanonik bazlarına denk temel diziler, uzayların karşılıklı alt uzaylarının izomorfikliği, tamamlayıcı alt uzayları incelendi. Banach uzayların şartsız, büzülen ve sınırlı-tam olarak isimlendirilen baz çeşitleri ve bazı sonuçlar verildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Temel Tanımlar

Bu kısımda, [24, 25, 27, 28, 29, 30] numaralı kaynaklardan, fonksiyonel analizin temel kavramları ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar ifade edilecektir.

Tanım 2.1.1. X bir küme, $\tau \subset P(X)$ olmak üzere,

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(T3) $A_\alpha \in \tau(\alpha \in I$ index kümesi$) \Rightarrow \cup_\alpha A_\alpha \in \tau$

şartları sağlanıyorsa, τ sınıfına X kümesi için bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine topolojik uzay, τ kümesinin her bir elemanına açık küme, tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme, $x \in X$ noktasını içeren her açık kümeye, x noktasının bir (açık) komşuluğu, $K \subset X$ kümesini kapsayan kapalı kümelerin kesişimine K kümesinin kapanışı denir. Kapanışı uzaya eşit olan kümeye yoğundur denir.

$K \subset \cup_\alpha A_\alpha$ olacak şekilde $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subset \tau$ sınıfına K için bir açık örtü, her açık örtüsünün sonlu örtüsü varsa K kümesine kompakttır denir. Kapanışı kompakt olan kümeye ön(veya rölatif) kompakt küme denir.

Tanım 2.1.2. X boştan farklı bir küme olmak üzere

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

şartlarını taşıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

$x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ olmak üzere

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir. Bir metrik uzayda, her noktasının bir açık yuvarını kapsayan kümeye açık küme denir. Metrik uzayın her açık kümesini eleman kabul eden τ_d sınıfına X üzerindeki d metriğinin doğurduğu (metrik) topoloji denir. X üzerindeki bir τ topolojisi bir metrik tarafından elde edilebilirse, τ topolojisine metriklenebilirdir denir.

Tanım 2.1.3. (x_n), (X, d) bir metrik uzayında bir dizi, $x \in X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ olan bütün $n \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine yakınsak dizi, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_0$ olan bütün $n, m \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayının M altkümesinden alınan her dizinin limiti M kümesinde olacak şekilde yakınsak bir altdizisi varsa M altkümesine dizisel kompakttır denir.

Tanım 2.1.5. X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olmak üzere

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $(X, \|.\|)$ ikilisine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzay denir.

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayının bir elemanına yakınsıyorsa, bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. X bir normlu uzay olmak üzere

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı denir. Her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlı d metriğine $\|\cdot\|$ normundan elde edilen metrik adı verilir.

Sayılabilir yoğun bir altkümeye sahip normlu uzaya ayrılabilir uzay denir.

Tanım 2.1.6. X ve Y , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzaylar olsun. Bu durumda $T : X \to Y$ fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ve her $\alpha, \mu \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha x_1 + \mu x_2) = \alpha T(x_1) + \mu T(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa, bir lineer dönüşüm ya da bir lineer operatör adını alır. X uzayından Y uzayına olan bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. $Y = \mathbb{F}$ ise T operatörü lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. X uzayında tanımlı bütün lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X, \mathbb{F})$ uzayına X uzayının cebirsel duali denir ve $X^\dagger$ ile gösterilir.

X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer dönüşüm olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq M \, \|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir M pozitif reel sayısı mevcut ise T lineer dönüşümüne sınırlı lineer dönüşüm denir. X uzayından Y uzayına bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesini $B(X,Y)$ ($X=Y$ ise $B(X)$) ile göstereceğiz. $T \in B(X,Y)$ için

$$\|T\| = \inf\{M : M > 0, \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X\}$$

sayısına T dönüşümünün normu denir. X üzerindeki sınırlı fonksiyonellerin kümesine X uzayının sürekli duali(kısaca duali) denir ve X^* ile gösterilir.

$dimT(X) < \infty$ olan lineer dönüşüme sonlu ranklı (sonlu boyutlu) dönüşüm denir.

X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine dönüştüren lineer dönüşüme kompakt (veya tamamen sürekli) lineer dönüşüm denir. X uzayından Y uzayına olan bütün kompakt lineer dönüşümlerin kümesi $K(X,Y)$ ile gösterilir.

X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir zayıf ön kompakt kümesine taşıyan lineer dönüşüme zayıf kompakttır denir.

Teorem 2.1.7. *Bir normlu uzayın kapalı birim yuvarının kompakt olması için gerek ve yeter şart uzayın sonlu boyutlu olmasıdır.*

Teorem 2.1.8. *X normlu uzayından Y Banach uzayına tanımlı (T_n) kompakt lineer dönüşümlerin dizisi bir T dönüşümüne düzgün yakınsak ise T operatörü kompakttır.*

Tanım 2.1.9. X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer dönüşümü bire bir, sürekli ve tanım kümesi $T(X)$ olan T^{-1} dönüşümü sürekli ise $T : X \to Y$ bir izomorfizm (izomorfizma) olarak adlandırılır. T izomorfizmi uzaklığı koruyorsa, izometrik izomorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.10. X, Y sonsuz boyutlu iki Banach uzaylarının ortak (izomorfik) sonsuz boyutlu alt uzayları yok ise bu uzaylara tamamen uyumsuz (totally incomparable) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.11. T, X Banach uzayından Y Banach uzayına sınırlı bir dönüşümü için $T|_E$ nin kendi görüntü uzayına izomorfik olacak şekilde hiçbir sonsuz boyutlu $E \subset X$ uzayı yoksa, T ye kesin singülerdir denir.

Tanım 2.1.12. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $x^* \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına zayıf yakınsar denir.

Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için $(x^*(x_n))$ bir Cauchy dizisi ise (x_n) dizisine zayıf Cauchy denir.

Tanım 2.1.13. X normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. Her $x^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$\{x^*(x) : x \in M\}$$

kümesi sınırlı ise M kümesine zayıf sınırlı küme denir.

Teorem 2.1.14. *X bir normlu uzayında $M \subset X$ kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart zayıf sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.1.15. Normlu bir X uzayındaki her zayıf Cauchy dizisi, X uzayında zayıf yakınsak ise X uzayına zayıf tamdır denir.

Tanım 2.1.16. (x_n^*), X^* normlu uzayındaki sınırlı-lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

olacak şekilde bir $x^* \in X^*$ fonksiyoneli varsa, (x_n^*) dizisi x^* fonksiyoneline zayıf* yakınsar denir.

Tanım 2.1.17. X bir normlu uzay ve $M \subset X^*$ olsun. Her $x \in X$ için

$$\{x^*(x) : x^* \in M\}$$

kümesi K üzerinde sınırlı ise M'ye zayıf* sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.18. X bir normlu uzay, $M \subset X$ olmak üzere

$$M^\perp \;=\; \{x^* : x^* \in X^* \text{ her bir } x \in M \text{ için } x^*(x) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan $M^\perp$ kümesine X^* uzayında M'nin sıfırlayıcısı (annihilator) denir.

Tanım 2.1.19. X normlu uzay olmak üzere, her $x \in X$ ve $x^* \in X^*$ için

$$(Q(x))(x^*) = x^*(x)$$

şeklinde tanımlı Q dönüşümüne X uzayından X^{**} uzayına doğal (veya kanonik gömme) dönüşümü denir.

Doğal dönüşümü örten olan normlu uzaya yansımalıdır denir.

Teorem 2.1.20. *Bir Banach uzayının birim yuvarının zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart uzayın yansımalı bulunmasıdır.*

Tanım 2.1.21. X bir vektör uzayı olmak üzere,

"Her $0 \leq t \leq 1$ ve $x, y \in C$ için $tx + (1-t)y \in C$ "

önermesini sağlayan $C \subset X$ kümesine konvekstir denir.

Teorem 2.1.22. *X Banach uzayı, $T \in B(X)$ olmak üzere, $\|T\| \leq 1$ ise $(I-T)^{-1}$ mevcut ve*

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \text{ ve } \|I-(I-T)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|}{1-\|T\|}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.23. X bir Banach uzayı, $T \in B(X)$ olmak üzere her $f \in X^*$ ve $x \in X$ için

$$T^* : X^* \to X^*,\ (T^*f)(x) = f(Tx)$$

biçiminde tanımlı T^* dönüşümüne T dönüşümünün adjointi denir ve $T^* \in B(X^*)$.

Teorem 2.1.24. *X, Y Banach uzayları ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere:*

i) *T kompakttır.*

ii) *$T(B_X)$, ön kompakttır.*

iv) *X uzayındaki sınırlı dizilerin T altında görüntülerinin yakınsak alt dizileri vardır.*

önermeleri denktir.

Teorem 2.1.25 (Hahn-Banach Teoremi)**.** *Reel X vektör uzayından $\mathbb{R}$ ye p fonksiyonu, her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için*

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$

şartlarına sahip, $M < X$ (M, X uzayının altuzayı) ve her $m \in M$ için $f(m) \leq p(m)$ eşitsizliğini sağlayan $f : M \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonel olsun. f fonksiyonelinin X uzayına, her $x \in X$ için $F(x) \leq p(x)$ eşitsizliği ve her $m \in M$ için $F(m) = f(m)$ eşitliğini gerçekleyen, bir F lineer genişlemesi vardır.

Teorem 2.1.26 (Düzgün Sınırlılık Prensibi)**.** *X bir Banach, Y bir normlu uzay ve $T_n \in B(X, Y)$ ve her $x \in X$ için, c_x bir reel sayı olmak üzere,*

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.1.27. X, Y topoljik uzaylar ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. X üzerindeki açık kümelerin T altındaki görüntüleri Y uzayında açık ise T dönüşümüne açık dönüşüm denir.

Teorem 2.1.28 (Açık Dönüşüm Teoremi, Ters Sınırlılık Teoremi)**.** *X ve Y Banach uzaylar, $T \in B(X, Y)$ dönüşümü örten ise T bir açık dönüşümdür. Üstelik T bire-bir ise T^{-1} dönüşümü de süreklidir.*

Tanım 2.1.29. X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ kartezyen çarpımı koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir vektör uzay yapısına sahip ve

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

normuyla bir normlu uzaydır. $X \times Y$ normlu uzayında (x_n, y_n) dizisinin (x, y) noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart X uzayında (x_n) dizisinin x noktasına ve Y uzayında (y_n) dizisinin y noktasına yakınsamasıdır. X ve Y Banach uzaylar ise $X \times Y$ uzayı da Banach uzay olur.

X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere,

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

kümesine T nin grafiği denir. Bir lineer dönüşümün grafiği $X \times Y$ uzayının bir altuzayıdır.

$T \in L(X, Y)$ dönüşümünün grafiği $X \times Y$ çarpım uzayında kapalı ise T ye kapalı lineer dönüşüm denir.

Teorem 2.1.30. *X, Y normlu uzaylar olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer bir dönüşümünün kapalı olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(T)$ olmak üzere, $x_n \to x$ ve $Tx_n \to y$ iken, $x \in D(T)$ ve $Tx = y$ olmasıdır.*

Teorem 2.1.31 (Kapalı Grafik Teoremi)**.** *X, Y Banach uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere, $T \in B(X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $G(T)$ kümesinin kapalı bulunmasıdır.*

Teorem 2.1.32. *[31, Mazur Teoremi] Normlu uzaylarda bir konveks kümenin norm kapanışı ile zayıf kapanışı aynıdır.*

Teorem 2.1.33. *[26, Banach- Alaoglu Teoremi] Normlu bir uzayın zayıf birim yuvarı zayıf* kompakttır.*

2.2 Dizi Uzayları

Tanım 2.2.1. $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların cismini göstermek üzere, terimleri $\mathbb{K}$ cisminda olan dizilerin kümesi

$$w = \{x = (x_k) : \forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{K}\}$$

şeklinde ifade edilir. w kümesinde tanımlanan,

$$\begin{array}{ccccccccc} + : & w \times w & \to & w & \qquad & \cdot : & \mathbb{K} \times w & \to & w \\ & ((x_k), (y_k)) & \to & (x_k + y_k) & & & (\lambda, (x_k)) & \to & (\lambda x_k) \end{array}$$

işlemleriyle, w, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay teşkil eder. w uzayının her bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

λ bir dizi uzayı olmak üzere, her $i \in \mathbb{N}$ için λ üzerinde $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i : \lambda \to \mathbb{C}$ koordinat dönüşümü sürekli ise λ dizi uzayına bir K-uzayı denir.

$$m = \ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in w : \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k \text{ mevcut } \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

kümelerine sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları denir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\sum_k |x_k|^p < \infty$$

olan diziye p mutlak yakınsak seri oluşturan dizi denir. p mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi ℓ_p ile gösterilir ve

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}$$

şeklindedir.

Sonlu adette terimi dışındaki terimleri sıfır olan dizilerin uzayı

$$c_{00} = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_x \text{ için } x_k = 0 \right\}$$

ile gösterilir. e_k, k. terimi 1 ve diğer terimleri sıfır olan dizileri göstersin. c_{00} uzayı, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin gerdiği uzaydır, yani

$$c_{00} = \langle \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \rangle.$$

Yukarıda tanımlanan dizi uzayları arasında, $1 \leq p < q < \infty$

$$c_{00} \subsetneq \ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty \subsetneq w$$

kapsamaları geçerlidir.

$\ell_\infty,$ c ve c_0 uzayları,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

ve $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ uzayı,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile birer Banach K-uzaylarıdır(BK uzayı).

2.3 Tamamlayıcı Altuzaylar

Bu kısımda, [24, 25, 30, 32] kaynaklarından normlu uzaylarda tamamlayıcı altuzaylar ve izdüşüm dönüşümler arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 2.3.1. X bir lineer uzay, $M < X$ ve $N < X$ olmak üzere, X uzayındaki her bir x elemanı için $x = y + z$ tek türlü yazılacak şekilde $y \in M$ ve $z \in N$ elemanları varsa X uzayına M ve N uzaylarının direkt toplamı denir ve $X = M \oplus N$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. X bir vektör uzay, $P : X \to X$ lineer dönüşümü

$$P \circ P = P^2 = P$$

eşitliğini sağlıyorsa P ye izdüşüm(projeksiyon) dönüşümü denir.

Teorem 2.3.3. *X lineer uzayında $P : X \to X$ bir izdüşüm dönüşüm ise $X = R(P) \oplus N(P)$ eşitliği sağlanır.*

Bir X vektör uzayında $P : X \to X$ izdüşüm dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $I - P : X \to X$ dönüşümü de bir izdüşüm dönüşümüdür.

(ii) $M = \{x \in X : Px = x\}$ altuzayını tanımlayalım. Bu durumda $M = R(P)$ olur.

(iii) $R(P) = N(I - P)$ bağıntısı geçerlidir.

Teorem 2.3.4. *Bir X vektör uzayı M ve N altuzaylarının direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa $M = R(P)$ ve $N = N(P) = R(I - P)$ olacak şekilde bir tek $P : X \to X$ izdüşümü vardır.*

Teorem 2.3.5. *X bir normlu uzay ve $P : X \to X$ izdüşüm dönüşü olsun.*
(i) P kapalı dönüşüm ise $R(P)$ değer bölgesi kapalıdır.
(ii) P sürekli ise $R(P)$ değer bölgesi ve $N(P)$ sıfır uzayı kapalıdır.
(iii) $R(P)$ ve $N(P)$ kapalı ise P sürekli bir dönüşümdür.

Tanım 2.3.6. X normlu uzayının kapalı olan bir M altuzayı verildiğinde,

$$X = M \oplus N \text{ ve } M \cap N = \{0\}$$

olacak şekilde diğer bir kapalı N altuzayı bulunabilirse M'ye X uzayında tamamlayıcı altuzay denir. Bu tanıma denk olarak, M, X uzayındaki sürekli ve lineer olan bir P izdüşüm dönüşümünün görüntü kümesi ise M altuzayı X uzayında tamamlayıcıdır.

Teorem 2.3.7. *X Banach uzayının bir altuzayının tamamlayıcı olması için gerek ve yeter şart bu altuzayın X'de sınırlı lineer bir izdüşüm dönüşümünün görüntü kümesi olmasıdır.*

2.4 Serilerin Yakınsaklığı

Bu kısımda, nümerik ve vektör değerli serilerin yakınsaklığı hakkında genel bilgiler [23, 26, 30, 33, 34, 35] numaralı kaynaklardan faydalanarak verilecektir.

Tanım 2.4.1. X bir normlu uzay olmak üzere, x_k genel terimli $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin sonlu toplamlarıyla elde edilen $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ elemanına, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin n-inci kısmi toplamı denir.

Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan seriye yakınsak seri denir. Kısmi toplamlar dizisinin limiti $\lim_n S_n = S$ sayısına serinin toplamı olarak adlandırılır. Ayrıca (S_n) dizisi X uzayında zayıf yakınsak ise bu seriye zayıf yakınsak seri denir.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin R_n ile gösterilen kalan kısmı, $x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots$ ile verilir. Yakınsak bir seride n büyüdükçe kalan kısım sıfıra yaklaşır.

Bir serinin parçası (segmenti) ardışık terimlerinin sonlu sayıdaki bir toplamıdır; yani $\sum_{k=m+1}^{n} x_k = S_n - S_m$ $(n > m)$.

Reel terimli serilere nümerik seriler denir. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nümerik seriye mutlak yakınsaktır denir. Mutlak yakınsak olmayan yakınsak serilere şartlı yakınsak seri denir.

Boş olmayan bir X kümesinden kendi üzerine 1-1 ve örten dönüşümlere X in bir permütasyonu denir.

Teorem 2.4.2. *Pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi bir α sayısına yakınsak ise, doğal sayılar kümesinin her π permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ serisi yakınsaktır ve toplamı yine α sayısıdır.*

Teorem 2.4.3 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri)**.** *Bir Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart serinin segmentleri dizisinin sıfıra yakınsak olmasıdır, yani*

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| = 0$$

dır.

Tanım 2.4.4. Bir normlu uzayda, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ ise $\sum_k x_k$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Tanım 2.4.5. Bir Banach uzayında $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi için terimlerinin herhangi dizilimi ile elde edilen seriler yakınsak oluyorsa şartsız yakınsak seri olarak adlandırılır. Yani, doğal sayıların her π permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine şartsız yakınsak seri denir.

Nümerik serilerde şartsız yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık birbirine denktir. Bir Banach uzayındaki bir seri mutlak yakınsak ise şartsız yakınsaktır, fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin;

ℓ_2 uzayında k-ıncı koordinatı $\frac{1}{k}$ olan dizi

$$x_k = (0, 0, \ldots, 0, k^{-1}, 0, \ldots)$$

elemanlarının oluşturduğu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisini gözönüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x\|_{\ell_2} = \frac{1}{k}$ olup, $\sum_k \|x_k\|_{\ell_2} = \sum_k \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır. Fakat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi, terimlerinin herhangi bir dizilimi için

$$S = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

elemanına yakınsar.

Sonsuz boyutlu normlu uzaylarda mutlak ve şartsız yakınsaklık kavramları denk olmadığından, şartlı yakınsak seri tanımı sonlu boyutlu uzaylardaki tanımından farklıdır.

$\sum_k x_k$ serisi yakınsak fakat şartsız yakınsak değilse şartlı yakınsak seri olarak adlandırılır. Yani $\sum_k x_k$ serisi şartlı yakınsak ise, en az bir π_0 permütasyonu için $\sum_k x_{\pi_0(k)}$ serisi ıraksaktır.

Teorem 2.4.6. *X Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi şartsız yakınsak ise bu serinin farklı dizilimlerinin hepsi aynı toplama sahiptir.*

Teorem 2.4.7. *Bir Banach uzayındaki $\sum_k x_k$ serisi için aşağıdakiler denktir:*

(i) $\sum_k x_k$ *serisi şartsız yakınsaktır,*

(ii) $\sum_k x_k$ *serisi alt serisel yakınsaktır, yani (n_k) tam sayılarının her artan dizisi için $\sum_k x_{n_k}$ serisi yakınsaktır,*

(iii) $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ *($k \in \mathbb{N}$) olmak üzere her $\alpha = (\alpha_k)$ için $\sum_k \alpha_k x_k$ serisi yakınsaktır,*

(iv) *F, $\{n+1, n+2, \ldots\}$ kümesinin herhangi bir sonlu alt kümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 2.4.8. *Bir Banach uzayında $\sum_k x_k$ serisinin şartsız yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $t = (t_k) \in \ell_\infty$ için $\sum_k t_k x_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.*

Tanım 2.4.9. X bir Banach uzayı ve $\sum_k x_k$, X uzayında bir seri olsun. Her $x^* \in X^*$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$$

ise $\sum_k x_k$ serisine zayıf şartsız Cauchy seri denir. Bu tanıma denk olarak, her π permütasyonu için $\sum_k x_{\pi(k)}$ serisi zayıf Cauchy ise $\sum_k x_k$ serisine zayıf şartsız Cauchy seri denir.

Lemma 2.4.10. *Aşağıdaki önermeler denktir:*

(i) $\sum_k x_k$ *serisi zayıf şartsız Cauchy seridir,*

(ii) *Her $t = (t_k) \in l_\infty$ dizisi için*

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \leq C. \sup_n |t_n|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır,

(iii) Her $t = (t_k) \in c_0$ dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ serisi yakınsaktır,

(iv) Doğal sayıların her sonlu F alt kümesi ve terimleri ± 1 olan her $t = (t_k)$ dizisi için

$$\left\| \sum_{k \in F} t_k x_k \right\| \leq C$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

3. BAZ VE TEMEL DİZİLER

Bu bölümde, [24, 25, 26] kaynaklarından faydalanarak, bir Banach uzay için baz, Schauder baz ve temel dizi kavramlarını tanıtacağız.

3.1 Baz ve Schauder Baz

Tanım 3.1.1. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, sonsuz boyutlu X Banach uzayında bir dizi olsun. Her $x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

olacak şekilde $\mathbb{F}$ cisminde bir tek $a = (a_n)$ dizisi bulunuyorsa, (e_n) dizisine X uzayının bir bazı denir.

Burada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ olması $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right)_{N=1}^{\infty}$ dizisinin x elemanına yakınsamasıdır.

$e_n^{\#} : X \to \mathbb{F}$, $e_n^{\#}(x) = a_n$ alınırsa, $e_n^{\#}$ fonksiyonları (e_n) bazına karşılık gelen koordinat fonksiyonelleri olur.

Tanım 3.1.2. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, X Banach uzayında bir dizi, $n \neq k$ için $\delta_{nk} = 0$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_{nn} = 1$ olmak üzere ,

(i) $e_k^* (e_j) = \delta_{jk}$,

(ii) Her $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^* (x) e_n$

olacak şekilde X^* da $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ dizisi varsa, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, X uzayının bir Schauder bazı denir ve $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonellerine $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin biortogonal fonksiyonelleri denir.

Baz ve Schauder baz tanımlarının Banach uzaylar için denk olduğunu gösteren teoremi verelim.

Teorem 3.1.3. *X bir Banach uzayı olsun. X de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin Schauder bazı olması için gerek ve yeter şart $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nin X de baz olmasıdır.*

İspat. (e_n) dizisi X uzayının bazı olsun. (e_n) dizisine ilişkin $S_0(x) = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^{\#}(x) e_k$$

şeklinde tanımlanan kısmi toplam dönüşümlerini (projeksiyonlarını) gözönüne alalım.

X uzayı üzerinde

$$|||x||| = \sup_{n \geq 1} \|S_n(x)\|$$

şeklinde yeni bir norm tanımlayalım. Her bir $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|x - S_n(x)\| = 0$ olduğundan, $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$ eşitsizliği geçerlidir. X uzayının yeni normla tam uzay olduğunu göstereceğiz.

(x_n) dizisi $(X, |||\cdot|||)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. (x_n) dizisi X uzayının orjinal normuna göre bir $x \in X$ noktasına yakınsaktır.

Her k sabiti için $(S_k x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, orjinal normda bir $y_k \in X$ elemanına yakınsak olup, $(S_k x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi sonlu boyutlu $[e_1, e_2, ..., e_k]$ altuzayındadır. $e_j^{\#}$ fonksiyonelleri, sonlu boyutlu alt uzaylara tanımlı olduğundan, süreklidir ve $1 \leq j \leq k$ için

$$\lim_{n\to\infty} e_j^{\#}(x_n) = e_j^{\#}(y_k)$$

olup, $e_j^{\#}(y_k) = a_j$ olarak alalım. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ serisinin orjinal norma göre x elemanına yakınsadığını gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde, $m \geq n$ ve $k \geq k_0$ olduğunda

$$|||x_m - x_n||| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{ve} \quad \|x_n - S_k x_n\| \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

olacak şekilde n ve k_0 tamsayısılarını alalım. Bu durumda $k \geq k_0$ için;

$$\begin{aligned} \|y_k - x\| &\leq \lim_{m\to\infty} \|S_k x_m - S_k x_n\| + \|S_k x_n - x_n\| + \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu $\lim_{m\to\infty} \|y_k - x\| = 0$ ve (e_k) dizisinin uzayın bazı olduğundan, $S_k x = y_k$ elde edilir.

$$\begin{aligned} |||x_n - x||| &= \sup_{k\geq 1} \|S_k x_n - S_k x\| \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} \sup_{k\geq 1} \|S_k x_n - S_k x_m\| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} |||x_n - x||| = 0$$

olduğu görülür. Şu halde $(X, |||.|||)$ tamdır.

Kapalı Grafik teoreminden $i : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ birim dönüşümü sınırlı olup, her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|S_n x\| \leq K \|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan $K > 0$ sayısı mevcuttur. Buradan

$$|e_n^{\#}(x)| \, \|e_n\| = \|S_n x - S_{n-1} x\| \leq 2K \|x\|$$

olduğu anlaşılır. Şu halde $e^{\#} \in X^*$ ve $\left\|e_n^{\#}\right\| \leq 2K \|e_n\|^{-1}$ elde edilir. □

$\{e_n\}$ bazına sahip X Banach uzayında, e_k^* dönüşümleri sürekli olduğundan, $S_0(x) = 0$ ve $n \geq 1$ için $S_n : X \to X$, $S_n(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x) e_k) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$ ile tanımlı kısmi toplam dönüşümleri(izdüşümleri) süreklidir ve düzgün sınırlıdır. Düzgün Sınırlılık Prensibi'nden

$$\sup_n \|S_n\| < \infty$$

olur.

Tanım 3.1.4. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, X Banach uzayında bir baz olmak üzere,

$$K_b = \sup_n \|S_n\|$$

sayısına $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ bazının baz sabiti denir. $K_b = 1$ olması durumunda $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ bazı monoton baz olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.5. *X Banach uzayı, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $S_n : X \to X$ lineer dönüşümleri*

(i) Her n için $\dim S_n(x) = n$,

(ii) Her m,n için $S_n S_m = S_m S_n = S_{\min\{m,n\}}$,

(iii) Her $x \in X$ için $S_n(x) \to x$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, sıfır vektörü olmayan $e_1 \in S_1(X)$ ve $k \geq 2$ için $e_k \in S_k(X) \cap S_{k-1}^{-1}(0)$ vektörlerinden oluşturulan her (e_k) dizisi, X uzayı için, kısmi toplam projeksiyonları(izdüşümleri) $\{S_n\}$ olan, bazdır.

İspat. $0 \neq e_1 \in S_1(X)$ alalım ve

$$e_1^* : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonelini

$$e_1^*(x)e_1 = S_1(x)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Yine, $0 \neq e_2 \in S_2(X) \cap S_1^{-1}(0)$ alalım ve

$$e_2^* : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonelini,

$$e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x)$$

eşitliğini saylayacak şekilde tanımlayalım. Bu şekilde devanm edilerek, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $0 \neq e_n \in S_n(X) \cap S_{n-1}^{-1}(0)$ alınarak,

$$e_n^* : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonelleri

$$e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilerek, (e_n) dizisini ve biortogonal fonksiyonelleri olan (e_n^*) dizisine ulaşılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_n^*(x)| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \, \|e_n\|^{-1} \\ &\leq 2 \sup_n \|S_n\| \, \|e_n\|^{-1} \, \|x\| \end{aligned}$$

olup, $e_n^* \in X^*$, her k, j sayı çifti için

$$e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$$

ve her $x \in X$ için $S_0(x) = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (S_k(x) - S_{k-1}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \end{aligned}$$

bulunur. (iii) den dolayı (e_n) dizisi baz ve bu baza ilişkin kısmi toplam dönüşümleri (S_n) olur.

□

Tanım 3.1.6. X Banach uzayı, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ uzaydan seçilen bir dizi ve bu dizinin kapalı lineer geren uzayı $[e_k]$ olsun. (e_k) dizisi, $[e_k]$ uzayı için bir baz ise (e_k) dizisine bir temel dizi denir.

Temel diziyi karakterize eden *Grunblum kriteri*'ni [36] verelim.

Teorem 3.1.7 (Grunblum Kriteri)**.** *X Banach uzayının, terimleri sıfır olmayan, (e_k) dizisinin temel dizi olması için gerek ve yeter şart her (a_k) skaler dizisi ve $m \leq n$ olan $m, n \in \mathbb{N}$ için*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir K pozitif sabiti bulunmasıdır.

İspat. (e_k) temel dizi ve her $m \in \mathbb{N}$ için $S_m : [e_k] \to [e_k]$ kısmı toplam projeksiyonları olsun. $m \leq n$ ise her (a_k) skaler dizisi için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| &= \left\| S_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) \right\| \\ &\leq \sup_m \|S_m\| \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup, $K = \sup_m \|S_m\|$ alınırsa, (3.1) eşitsizliğini sağlayan pozitif K sayısı bulunmuş olur.

Her (a_k) skaler dizisi ve $m \leq n$ olan $m, n \in \mathbb{N}$ için (3.1) eşitsizliğini sağlayan pozitif K sayısı mevcut ve (e_k) dizisinin lineer gereni E uzayı olsun. (3.1) şartı (e_k) vektörlerinin lineer bağımsızlığını gerektirir. Bu ise her m için

$$s_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} a_k e_k, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

şeklinde, sonlu ranklı, $s_m : E \to [e_k]_{k=1}^{m}$ operatörlerini tanımlamamıza izin verir. E kümesinin $[e_k]_{k=1}^{\infty}$ uzayında yoğun olmasından dolayı, s_m operatörlerinin $\|S_m\| = \|s_m\| \leq K$ olacak şekilde $S_m : [e_k] \to [e_k]_{k=1}^{m}$ genişlemeleri vardır. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned} S_n S_m(x) &= S_m S_n(x) \\ &= S_{\min\{m,n\}}(x), \quad m, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğundan, yoğunluktan dolayı her $x \in [e_k]$ için de (3.2) sağlanır.

Her bir $x \in [e_k]$ için $(S_n(x))$ dizisi x noktasına yakınsar. $\{x \in [e_k] : S_m(x) \to x\}$ kümesi kapalı ve E kümesini içerir. Teorem 3.1.7'den (e_k), $[e_k]$ uzayı için S_m kısmi toplam projeksiyonlarına sahip bazdır.

□

3.2 Baz ve Temel Dizilerin Denkliği

Sonlu boyutlu uzayda bir baz seçilirse, uzay için bir koordinat sistemi seçilmiş olur. Benzer şekilde sonsuz boyutlu bir X Banach uzayı için bir (e_k) bazı seçilmesi durumunda, uzay için bir koordinat sistemi seçilmiş olur ve uzayın her $x \in X$ elemanı $(e_n^*(x))$ koordinatıyla belirlenir. Bu her (a_n) dizisinin X uzayının bir elemanını belirlediği anlamına gelmemektedir. X uzayı koordinatlarla belirlendiği için, X belirli şartları taşıyan bir dizi uzayı olarak ele alınabilir. Seçilen bazlara göre Banach uzayları dizi uzaylarına denk olacağından, iki bazın denkliğinden bahsetmek doğaldır.

Tanım 3.2.1. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sırasıyla X ve Y Banach uzayında iki baz (ya da temel dizi) için her $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ skaler dizisi bakımından "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ yakınsak ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ yakınsaktır" önermesi doğru ise (x_n) ve (y_n) bazları denktir denir ve $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$ şeklinde yazılır.

X ve Y uzaylarının sırasıyla (x_n) ve (y_n) bazları denk ise bu bazların belirttiği koordinat sistemine göre X ve Y uzaylarına karşılık gelen dizi uzayları aynı olacağından, Kapalı Grafik Teoremi'nden bu uzayların izomorfik olduğu görülür.

Teorem 3.2.2. *(x_n) ve (y_n) bazlarının(temel dizilerinin) denk olması için gerek ve yeter şart $T : [x_n] \to [y_n]$, $Tx_n = y_n$ ile tanımlı dönüşümün izomorfizma olmasıdır.*

İspat. $X = [x_n]$, $Y = [y_n]$ ve $Tx_n = y_n$ ile tanımlı örten $T : X \to Y$ dönüşümü bir izomorfizm ise (x_n) ve (y_n) bazları denk olduğu görülür.

(x_n) ve (y_n) bazları denk olsun. $Tx = T(\sum_k a_k x_k) = \sum_k a_k y_k$ ile tanımlı $T : X \to Y$ dönüşümünü tanımlayalım. T birebir ve örtendir. X uzayında (u_j) dizisi u elemanına yakınsak ve Y uzayında Tu_j dizisi v elemanına yakınsak olsun.

$$u_j = \sum_k x_k^*(u_j) x_k \quad \text{ve} \quad u = \sum_k x_k^*(u) x_k$$

olup, biortogonal fonksiyonellerin sürekliliğinden her n için

$$x_n^*(u_j) \to x_n^*(u)$$

olması

$$y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$$

olmasını gerektirir. Limitin tekliğinden her n için

$$x_n^*(u) = y_n^*(v)$$

ve buradan $Tu = v$ elde edilir. Kapalı Grafik Teoremi'nden T dönüşümünün sürekli olduğu görülür. $\square$

Sonuç 3.2.3. *X ve Y Banach uzaylarının sırasıyla (x_n) ve (y_n) bazlarının denk olması için gerek ve yeter şart her $(a_i) \in c_{00}$ dizisi için*

$$C^{-1}\left\|\sum_k a_k y_k\right\| \leq \left\|\sum_k a_k x_k\right\| \leq C\left\|\sum_k a_k y_k\right\| \tag{3.3}$$

eşitsizliklerini sağlayan pozitif bir C sayısının bulunmasıdır.

(3.3) eşitsizliğinde $C = 1$ olması durumunda (x_n) ve (y_n) temel dizilerine izometrik denktir denir.

Tanım 3.2.4. (e_n), X Banach uzayının bir bazı, $p_0 = 0$, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tamsayıların artan bir dizisi ve (a_n) bir skaler dizi olsun.

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

ile tanımlı (u_n) dizisine (e_n) dizisinin bir blok temel dizisi denir.

Teorem 3.2.5. *X Banach uzayında K_b baz sabitine sahip (e_n) bazının bir (u_n) blok temel dizisi, baz sabiti K_b den küçük eşit olan bir temel dizidir.*

İspat. Herhangi bir skaler (b_k) dizisi için

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} b_k a_j e_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j\right\|, \quad c_j = a_j b_k, p_{k-1}+1 \leq j \leq p_k \\
&\leq K_b \left\|\sum_{j=1}^{p_n} c_j e_j\right\| \\
&= K_b \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\|
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olacağından, Theorem 3.1.7'den (u_n) dizisinin K_b baz sabitine sahip bir temel dizi olduğu anlaşılır. $\square$

Tanım 3.2.6. Bir X Banach uzayında, kapalı lineer geren uzayı tamamlayıcı alt uzay olan temel diziye tamamlayıcı temel dizi denir.

(x_n), X Banach uzayında tamamlayıcı temel dizi $Y = [x_n]$ ve $P : X \to Y$ bir projeksiyon olsun. (x_n) dizisine karşılık gelen biortogonal fonksiyoneller dizisi (x_n^*) olmak üzere, $(x_n^*) \subset Y^*$ ise Hahn-Banach genişleme teoreminden, her bir x_n^* fonksiyonelinin X uzayına genişlemesi olan $\hat{x}_n^*$ fonksiyonelleriyle $(\hat{x}_n^*) \subset X^*$ biortogonal diziyi elde edelim. P projeksiyonu yardımıyla her bir x_n^* fonksiyonellerini X uzayının tamamında tanımlı olacak $u_n^* = x^* \circ P$ fonksiyonellerine genişletelim. Bu durumda, her $x \in X$ için

$$\sum_n u_n^*(x)x_n = P(x)$$

eşitliğini elde ederiz. Tersine, $u_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ ve her b$x \in X$ için

$$\sum_n u_n^*(x)x_n$$

serisini yakınsak yapan $(u_n^*) \subset X^*$ dizi elde edilirse, $[x_n]$ uzayı,

$$\begin{aligned} P : X &\to [x_n] \\ x &\to \sum_n u_n^*(x)x_n \end{aligned}$$

projeksiyonu ile tamamlayıcı alt uzay olur.

Tanım 3.2.7. X ve Y Banach uzaylarında sırasıyla (x_n) ve (y_n) dizileri için $Tx_n = y_n$ ile tanımlı tersi mevcut (invertible) bir $T : X \to Y$ dönüşümü varsa, bu dizilere (X, Y) ye göre eşdeğerdir denir. $X = Y$ ise, dizilere kısaca eşdeğerdir denir.

(x_n) ve (y_n) sırasıyla X ve Y Banach uzaylarındaki eşdeğer diziler, eşdeğer diziler tanımındaki dönüşüm dikkate alınırsa, "(x_n) baz ise (y_n) bazdır", "(x_n) dizisinin baz sabiti K_b ise (y_n) dizisinin baz sabiti en çok $K_b \|T\| \|T^{-1}\|$ olur" gibi izomorfik özelliklerin korunmasını beklemek doğaldır.

Teorem 3.2.8. *X Banach uzayında, (x_n), K_b baz sabitine sahip bir temel dizi ve (y_n)*

$$2K_b \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x_j - y_j\|}{\|x_j\|} = \alpha < 1$$

şartını saylayan bir dizi ise (x_n) ve (y_n) dizileri eşdeğerdir. Ayrıca,

(i) (y_n), $K_b(1+\alpha)(1-\alpha)^{-1}$ baz sabitine sahip temel dizidir.

(ii) (x_n) baz ise (y_n) bazdır.

(iii) $[x_n]$ tamamlayıcı alt uzay ise $[y_n]$ uzayı da tamamlayıcıdır.

İspat. $(x_n^*) \subset [x_n]^*$ dizisi (x_n) dizisine karşılık gelen biortogonal fonksiyoneller olmak üzere, $x \in [x_n]$ ve $n \geq 2$ için

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^*(x)x_k$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikten

$$\|x_n^*(x)x_n\| \leq 2K_b \|x\|$$

ve dolayısıyla

$$\|x_n^*\| \|x_n\| \leq 2K_b$$

eşitsizliği elde edilir. $n = 1$ için $\|x_1^*\| \|x_1\| \leq K_b$ olduğu açıktır. Bu eşitsizlikler x_n^* fonksiyonellerin X uzayına Hahn-Banach genişlemeleri olan $\hat{x}_n^*$ fonksiyonelleri için de geçerlidir.

Her $x \in X$ için

$$A(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^*(x)(y_n - x_n)$$

alalım. $A : X \to X$, $A(x_n) = y_n$ dönüşümü şeklinde olup,

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n^*\| \|y_n - x_n\| \\ &\leq 1 + 2K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} \\ &= 1 + \alpha \end{aligned}$$

normu ile sınırlıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|A - I_X\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n^*\| \|y_n - x_n\| \\ &= \alpha \end{aligned}$$

olduğundan A operatörünün tersi mevcut ve $\|A^{-1}\| \leq (1-\alpha)^{-1}$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.2.9 (Bessaga-Pełczyński seçme ilkesi)**.** *X Banach uzayında, (e_n), K_b baz sabitine ve (e_n^*) biortogonal fonksiyonellerine sahip bir baz ve (x_n)*

(i) $\inf_n \|x_n\| > 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0$, $(\forall k \in \mathbb{N})$

şartlarını sağlayan bir dizi ise (x_n) dizisinin (e_n) bazının bir (y_n) blok temel dizisine eşdeğer (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Ayrıca, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için baz sabiti en çok $K_b + \varepsilon$ olacak şekilde (x_{n_k}) alt dizisi mevcuttur.

İspat. $\inf_n \|x_n\| = \alpha > 0$ ve $0 < \nu < \frac{1}{4}$ olsun. $n_1 = 1$ ve $r_0 = 0$ seçelim. Bu durumda, S_m, (e_n) bazının kısmi toplam projeksiyonları olmak üzere,

$$\|x_{n_1} - S_{r_1}x_{n_1}\| < \frac{\nu\alpha}{2K_b}$$

olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_1}x_n\| = 0$ olduğundan,

$$\|S_{r_1}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K_b}$$

olacak şekilde $n_2 > n_1$ sayısı vardır.

$$\|x_{n_2} - S_{r_2}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K_b}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $r_2 > r_1$ seçelim. Yine, $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_2}x_n\| = 0$ olduğundan,

$$\|S_{r_2}x_{n_3}\| < \frac{\nu^3\alpha}{2K_b}$$

olacak şekilde $n_3 > n_2$ sayısı vardır. Bu şekilde devam edilerek

$$\left\|S_{r_{k-1}}x_{n_k}\right\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K_b} \quad \text{ve} \quad \|x_{n_k} - S_{r_k}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K_b}$$

eşitsizliklerini sağlayan $(x_{n_k}) \subset X$ ve tamsayıların $r_0 = 0$, (r_k) dizilerini elde ederiz. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = S_{r_k}x_{n_k} - S_{r_{k-1}}x_{n_k}$$

olarak alırsak, (y_k) dizisi (e_k) bazının bir blok temel dizisi olur. Teorem 3.2.5 'den (y_k) blok temel dizinin baz sabiti K_b sayısından küçük veya eşittir. Her bir k için,

$$\|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{K_b}$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_k\| &> \alpha - \frac{\nu\alpha}{K_b} \\ &\geq (1-v)\alpha \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} 2K_b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|y_k - x_{n_k}\|}{\|y_k\|} &< 2(1-\nu)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k \\ &= 2\nu(1-\nu)^{-2} \\ &< \frac{8}{9} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.2.8'den (x_{n_k}) temel dizisi (y_k) dizisine eşdeğerdir. ν istenildiği kadar küçük seçilirse, (x_{n_k}) dizisinin baz sabiti K_b sayısına yakınlaştırılabilir. Ayrıca, (y_k), X uzayında tamamlayıcı ise (x_{n_k}) dizisi de tamamlayıcıdır. □

3.3 Temel Dizilerin Oluşturulması

Teorem 3.3.1. *S, X^* uzayının $0 \in \overline{S}^{weak^*} \setminus \overline{S}^{\|\cdot\|}$ özelliğine sahip bir altkümesi, E, X^* uzayının sonlu boyutlu bir altuzayı olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $e^* \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq (1-\varepsilon)\|e^*\|$$

eşitsizliğini sağlayan $x^* \in S$ elemanı mevcuttur.

İspat. Sonsuz boyutlu Banach uzayları için zayıf ve norm topolojiler farklı olduğundan, X^* uzayının $0 \in \overline{S}^{weak^*}$ fakat $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$ özelliğine sahip bir S altkümesi mevcuttur. $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$ olması her $x^* \in S$ için $\|x^*\| \geq \alpha > 0$ ($\alpha < \infty$) olmasını gerektirir.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve $\overline{\varepsilon} = \frac{\alpha\varepsilon}{2(1+\alpha)}$ ve $U_E = \{e^* \in E : \|e^*\| = 1\}$ olsun. E sonlu boyutlu olduğu için U_E norm-kompakt olur. $e^* \in U_E$ için

$$\|e^* - y_k^*\| < \overline{\varepsilon}$$

olacak şekilde bir $y_k^* \in \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*\} \subset U_E$ elemanı vardır.

Her bir $j \in \{1, 2, 3, ..., N\}$ için $y_j^*(x_j) > 1 - \overline{\varepsilon}$ olacak şekilde $x_j \in B_X$ elemanlarını seçelim. $0 \in \overline{S}^{weak^*}$ olduğundan, X^* uzayının weak* topolojisinde 0'ın her komşuluğunda S kümesinin 0 dan farklı bir elemanı vardır. Ayrıca, her bir $j \in \{1, 2, 3, ..., N\}$ için $x^*(x_j) < \overline{\varepsilon}$ olacak şekilde $x^* \in S$ elemanı vardır.

$e^* \in U_E$ ve $|\lambda| \geq \frac{2}{\alpha}$ ise

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq |\lambda|\alpha - 1 \geq 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

$|\lambda| < \frac{2}{\alpha}$ ise

$$\|e^* - y_k^*\| < \overline{\varepsilon}$$

olacak şekilde y_k^* seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|y_k^* + \lambda x^*\| &\geq y^*(x_k) + \lambda x^*(x_k) \\
&> (1 - \overline{\varepsilon}) + \lambda x^*(x_k) \\
&\geq (1 - \overline{\varepsilon}) - |\lambda|\overline{\varepsilon} \\
&\geq 1 - \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\overline{\varepsilon}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\|e^* + \lambda x^*\| &\geq \left| \|e^* - y_k^*\| - \|y_k^* + \lambda x^*\| \right| \\
&\geq 1 - \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon} \\
&= 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.2. *S, X^* uzayının $0 \in \overline{S}^{weak^*} \setminus \overline{S}^{\|\cdot\|}$ özelliğine sahip bir altkümesi ise S kümesi her $\varepsilon > 0$ sayısı için baz sabiti $1 + \varepsilon$ sayısından büyük olmayan bir temel dizi içerir.*

İspat. $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ ve $\prod_n (1 - \varepsilon_n) > (1 + \varepsilon)^{-1}$ şartlarını sağlayan pozitif sayıların azalan bir (ε_n) dizisini alalım. $x_1^* \in S$ elemanını 1-boyutlu $E_1 = [x_1^*]$ uzayından seçelim. Teorem 3.3.1'den her $e^* \in E_1$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\|e^* + \lambda x_2^*\| \geq (1 - \varepsilon_1)\, \|e^*\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_2^* \in S$ elemanı vardır.

Teorem 3.3.1'den her $e^* \in E_2 = [x_i^*]_{i=1}^2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\|e^* + \lambda x_3^*\| \geq (1 - \varepsilon_2) \|e^*\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_3^* \in S$ elemanı vardır.

Bu işlemi tekrarlayarak, her $n \in \mathbb{N}$ ve (a_k) skaler dizisi için

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^* \right\| \geq (1 - \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\|$$

eşitsizliğini sağlayan $(x_n^*) \subset S$ dizisini elde edelim. Bu durumda, her $m \leq n$ olan $m, n \in \mathbb{N}$ ve (a_k) skaler dizisi için

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k^* \right\| \geq \frac{1}{\prod_{j_1}^{n-1} (1 - \varepsilon_j)} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\|$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.1.7'dan (x_n^*) dizisinin baz sabiti en çok $1 + \varepsilon$ olan bir temel dizi olduğu görülür.

□

Teorem 3.3.3. *Her sonsuz boyutlu Banach uzayı,* $\epsilon > 0$ *için temel sabiti* $1 + \epsilon$ *den büyük olmayan bir temel dizi içerir.*

İspat. X sonsuz boyutlu Banach uzay, $S = \partial B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ olsun. Bir $\epsilon > 0$ için $V \cap S = \emptyset$ olacak şekilde 0'ın bir

$$V = \{x \in X : |x_k^*(x)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, ..., n \text{ için}\}$$

komşuluğunu veren X^* uzayında $x_1^*, ..., x_n^*$ fonksiyonellerinin var olduğunu kabul edelim. x_k^* fonksiyonellerinin sıfır uzaylarının kesişimi $\{0\}$ uzayından farklı ve V nin bir alt kümesi olup S ile ortak noktalara sahip olacağından bu durum imkansızdır. Şu halde 0, S kümesinin zayıf* kapanışındadır. Teorem 3.3.2'den baz sabiti istenildiği kadar 1 'e yakın olacak şekilde S kümesinde bir temel dizinin var olduğu görülür. □

Teorem 3.3.4. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, *sonsuz boyutlu* X *Banach uzayında* $\inf_n \|x_n\| > 0$ *şartını sağlayan zayıf sıfır dizi ise* (x_n) *dizisi, her* $\epsilon > 0$ *için baz sabiti* $1 + \epsilon$ *sayısından büyük olmayan bir temel altdiziyi içerir.*

İspat. (x_n) dizisi zayıf yakınsak olduğundan, $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi norm sınırlıdır, $0 \in \overline{S}^{weak}$ olup, Teorem 3.3.2 den baz sabiti en çok $1 + \epsilon$ olan bir temel dizi içerir. □

Teorem 3.3.5. (x_n), X *uzayında bir temel dizi, her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x^*(x_n) = 1$ *olacak şekilde bir lineer fonksiyonel* $x^* \in X^*$ *olsun. Bu durumda,* $u \notin [x_n]$ *ise* $(x_n + u)_{n=1}^{\infty}$ *bir temel dizidir.*

İspat. $u \notin [x_n]$ olduğundan $x^*(u) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X \\ x &\rightarrow Tx = x^*(x)u \end{aligned}$$

alalım. Bu durumda $I_X + T$ dönüşümünün tersi mevcut ve tersi $I_X - T$ dönüşümüdür. $(I_X + T)x_n = x_n + u$ olduğundan, (x_n) ile $(x_n + u)$ dizileri eşdeğerdir. (x_n) temel dizi olduğundan $(x_n + u)$ dizisi de temel dizidir. □

Teorem 3.3.6. *S, X Banach uzayının $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$ olan sınırlı bir altkümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.*

(i) S bir temel dizi içermez.

(ii) $\overline{S}^{weak}$ zayıf kompakttır ve 0 noktasını içermez.

İspat. (i)⇒ (ii)$(x_n) \subset S$ bir temel dizi olsun. $\overline{S}^{weak}$ zayıf kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $x \in \overline{S}^{weak}$ zayıf yığılma noktası vardır. Mazur Teoremi'nden $x \in [x_n]$ ve $x = \sum_n x^*n(x)x_n$ olarak yazabiliriz. (x_n^*) fonksiyonellerin sürekliliğinden, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n^*(x)$ noktası sıfıra yakınsayan $(x_n^*(x_m))_{n=1}^{\infty}$ skaler dizisinin bir yığılma noktasıdır. Her n için $x_n^*(x) = 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur. Bu hipotezle çelişir dolayısıyla S bir temel dizi içermez.

(ii) ⇒ (i) S kümesi temel dizi içermesin. S kümesini zayıf* topolojisine göre X^{**} uzayının bir alt kümesi olarak gözönüne alarak, Teorem 3.3.2'den, 0 elemanın S zayıf kapanışının bir elemanı olamayacağını gösterelim. S nin rölatif zayıf kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için S kümesinin X^{**} daki her zayıf* yığılma noktasının X uzayında olduğunu gösterelim. $x^{**} \in X \setminus X$ noktası S kümesinin bir zayıf* yığılma noktası olsun. $S - x^{**} = \{x - x^{**} : s \in S\} \subset X^{**}$, Teorem 3.3.2'den S kümesinin $(x_n - x^{**})$ dizisi temel olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. Seçilen bir N sayısı için $x^{**} \notin [x_n - x^{**}]_{n \geq N}$ olduğundan $x^{**} \notin [x_n - x^{**}]_{n \geq 1}$ alalım. Hahn-Banach Teoremi'inden, $x^{***}(x^{**}) = -1$, $x^{***} \in X^{\perp}$ olacak şekilde $x^{***} \in X^{***}$ elemanı vardır. Her bir n için $x^{***}(x_n - x^{**}) = 1$ olup, Teorem 3.3.5'den (x_n) dizisinin bir temel dizi olacağı anlaşılır ki bu S kümesinin temel dizi içermesin kabulüyle çelişir.

□

3.4 Eberlein-Šmulian Teoremi

Metriklenebilir topolojik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık kavramları çakıştığı halde genel topolojik uzaylarda çakışma olmayabilmektedir. Eberlein-Šmulian teoremi, Banach uzaylarda, kompakt küme üzerinde metriklenebilir olmak zorunda olmayan zayıf topolojinin bu kümeler için metriklenebilir şekilde davrandığını ifade eder. Zayıf kompaktlığın zayıf dizisel kompaktlığını gerektirdiği Šmulian [7], ve zayıf dizisel kompaktlığın zayıf kompaktlığı geretirdiği Eberlein [8] tarafından verilmiştir. Bu gerektirmelerin ispatlarında kullanılmayan temel diziler kavramı Pełczyński [9] tarafından daha basit bir şekilde verilmiştir.

Teorem 3.4.1. *Bir Banach uzayının bir x noktası bir (x_n) temel dizinin zayıf yığılma noktası ise $x = 0$'dır.*

İspat. x, $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ konveks kümenin zayıf kapanışında bulunacağından, Mazur Teoreminden, $x \in [x_n]$ olur. Bu durumda $x = \sum_n x_n^*(x) x_n$ olacağından, her bir n için $x_n^*(x)$, $(x_n^*(x_m))_{m=1}^\infty$ dizisinin bir yığılma noktasıdır. Her bir n için $(x_n^*(x_m))_{m=1}^\infty$ dizisinin bir yığılma noktası 0 olduğundan, $x = 0$ bulunur. □

Teorem 3.4.2. *A, X Banach uzayının rölatif zayıf sayılabilir kompakt bir alt kümesi ve $(x_n) \subset A$ dizisinin zayıf yığılma noktası yalnızca $x \in X$ ise (x_n) dizisi x noktasına zayıf yakınsaktır.*

İspat. (x_n) dizisi x noktasına zayıf yakınsak olmasın. Bu durumda bir $x^* \in X^*$ için $(x^*(x_n))$ dizisi $x^*(x)$ noktasına yakınsamaz. Buradan,

$$\inf_k \left| x^*(x) - x^*(x_{n_k}) \right| > 0$$

olan (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi seçilebilir. Bu ise x noktasının, (x_{n_k}) dizisinin bir zayıf yığılma noktası olamayacağını gösterir. □

Teorem 3.4.3 (Eberlein-Šmulian Teoremi)**.** *A, X Banach uzayının bir altkümesi olsun. Bu durumda,*

(i) A (rölatif) zayıf kompakttır.

(ii) A (rölatif) zayıf dizisel kompakttır.

(iii) A (rölatif) zayıf sayılabilir kompakttır.

önermeleri denktir.

İspat. (i) ve (ii) önermelerinin (iii) önermesini gerektirdiği açıktır. (iii) $\Rightarrow$ (i) A rölatif zayıf kompakt küme olmasın. Banach-Alaoglu teoreminden, A kümesinin X^{**} uzayındaki zayıf* kapanışı olan W kümesi zayıf* kompakt olduğundan, W, X uzayının bir altkümesi değildir. Buradan en az bir $x^{**} \in W \setminus X$ elemanı vardır. $x^{**}(x^*) > 1$ olacak şekilde $x^* \in X^*$ elemanı seçelim. x^{**} elemanı, $A_0 = \{x \in A : x^*(x) > 1\}$ kümesinin zayıf* kapınışında bulunduğundan A_0 kümesi rölatif zayıf kompakt değildir. Teorem 3.3.6'dan, A_0 kümesinde bir (x_n) temel dizisi mevcuttur. Sayılabilir kompaktlık tanımından, (x_n) dizisinin bir x zayıf yığılma noktasının mevcut olduğu ve Teorem 3.4.1'den de bu x noktasının 0 olması gerektiği sonucu elde edilir. Bu $x^*(x) \geq 1$ ile çelişir. □

Teorem 3.4.2 ve Teorem 2.1.20'den aşağıdaki sonucu vereilim.

Sonuç 3.4.4. *X Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter şart X de her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.*

4. ℓ_p Ve c_0 Uzayları

Bu bölümde, klasik dizi uzaylarından ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0 dizi uzaylarının izomorfik yapıları, tamamlayıcı alt uzayları gibi bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Her bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $e_n = (0, 0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{n.koordinat}, 0, ...))$ olmak üzere $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0 uzayların kanonik bazı olarak alınacaktır.

4.1 ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0 uzaylarının izomorfik Yapıları

Bu kısımda, ℓ_p ve c_0 uzaylarının farklı Banach uzay olduklarını gösterilecektir.

Teorem 4.1.1. *$(y_k)_{n=1}^{\infty}$, c_0 veya ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayında normalleştirilmiş blok temel dizi ise (y_k), dizisi kanonik baza izometrik denktir ve $[y_k]$ uzayı bir daralma projeksiyonun görüntüsüdür.*

İspat. ℓ_p uzayı için ispatını yapalım.

$k \in \mathbb{N}$, (r_k), $0 = r_0 < r_1 < r_2 < ...$ olan pozitif tamsayıların bir dizisi ve (a_k) skalerlerin bir dizisi olmak üzere,

$$\|y_k\|^p = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p = 1$$

olacak şekilde

$$y_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a_j e_j$$

olarak alalım. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ ve skalerlerin (b_k) dizisi için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} b_k y_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_k a_j e_j \right\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan, izometrik denklik sağlanmış olur.

$1 < p < \infty$ olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q = 1$$

ve

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j a_j = 1$$

olacak şekilde skalerlerin $(b_j)_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}$ dizisini seçelim.

$$y_k^* = \sum_{r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*$$

alalım. Açıkça $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ile biortogonal olup $\|y_n^*\| = \|y_n\| = 1$ dir.ℓ_p uzayından $[y_k]$ uzayına

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^*(x) y_k,\ x \in \ell_p$$

operatörünü tanımlayalım. Her bir $x = (x_j) \in c_{00}$ için

$$\begin{aligned} |y_k^*(x)| &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j x_j \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\|Px\| \leq \|x\|$$

olduğu görülür. $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ile $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin izometrik denkliğinden,

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, P dönüşümünün birim normlu bir daralma projeksiyonu ve görüntü uzayının $[y_k]$ olduğunu gösterir. □

Not 4.1.2. (y_n) normalize edilmemiş fakat

$$0 < a \leq \|y_n\| \leq b < \infty, n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde a, b sabitleri varsa (ki bu durumda (y_n) dizisine yarı normalleştirilmiş denir) Teorem 4.1.1 de $(y_n / \|y_n\|)_{n=1}^{\infty}$ dizisi alınarak ispat yapılır.

Teorem 4.1.3. *Her $j \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = 0$ olacak şekilde $(x_n = (x_{nj}))_{n=1}^{\infty}$, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ (veya c_0) uzayında normalleştirilmiş bir dizi ise (x_n) dizisinin kanonik baza denk bir temel dizi olan $[x_{n_k}]_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve $[x_{n_k}]_{k=1}^{\infty}$, ℓ_p (veya c_0) uzayında tamamlayıcıdır.*

İspat. Gliding hump tekniği kullanılarak $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ bazının bir blok temel dizisine denk olan $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ altdizisi belirlenir ve Teorem 4.1.1'den istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.4 (Pitt Teoremi)**.** *X, ℓ_r ($1 \leq p < r < \infty$) uzayının kapalı bir altuzayı ve $T : X \to \ell_p$ dönüşümü sınırlı ise T kompakttır.*

İspat. ℓ_r uzayı yansımalı olduğundan X altuzayı uzayı yansımalı ve B_X kümesi zayıf kompaktır.

T dönüşümünün kompaktlığı için $T\,|_{B_x}$ dönüşümünün norm-zayıf sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. X uzayının zayıf topolojisinin B_x kümesine kısıtlanışı(indirgenmiş) topolojisi metriklenebilir olduğundan, B_X kümesinde x noktasına zayıf yakınsak olan her $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_X$ dizileri için $(T\,(x_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisinin norm topolojisine göre Tx noktasına yakınsadığını görmek yeterlidir.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, X uzayında zayıf sıfır dizi ise $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$ olduğunu gösterelim. Bu önerme doğru değilse, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve $\|Tx_n\| \geq \delta > 0$ olacak şekilde sıfıra zayıf yakınsak bir (x_n) dizisi vardır. Altdizi olarak ele alındığında, Theorem 4.1.3'den (x_n) dizisini ℓ_r nin kanonik bazına denk olan temel dizi alabiliriz. (Tx_n) dizisi de zayıf sıfır dizisi olduğundan, altdizi olarak $(Tx_n/\,\|Tx_n\|)$ ve böylece (Tx_n) dizisi ℓ_p uzayının kanonik bazına denk temel dizidir. T sınırlı olduğundan, $i : \ell_r \to \ell_p$ birim dönüşümünün sınırlı olduğunu göstermiş oluruz ki bu bir çelişkidir.

$\square$

Not 4.1.5. a) ℓ_r yerine c_0 uzayı için Teorem 4.1.4'in ispatı tamamen benzerdir. c_0 yansımalı olmadığı halde, B_X kümesinin en azından zayıf metriklenebilir olması ve $T|_{B_X}$ dönüşümünün zayıf-norm sürekliliği, görüntüsünün ön kompakt olduğunu gösterir.

b) Teorem 4.1.4'den, $1 \leq p < r < \infty$ ve $T : \ell_r \to \ell_p$ sınırlı operatör olmak üzere, (x_n) ℓ_r uzayında zayıf sıfır dizi ise $\|Tx_n\|_p \to 0$ olur. $\|Te_n\|_p \to 0$ ve bu durum $T : c_0 \to \ell_p$ dönüşümü için de geçerlidir.

Sonuç 4.1.6. *$\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$ kümesinin uzayları arasında karşılıklı olarak izomorfiklik yoktur. $\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$ uzaylarından birinin sonsuz boyutlu X altuzayı, diğer uzayların hiçbir altuzayına izomorfik değildir.*

Bu sonuçtan, $\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$ uzaylarının tamemen uyumsuz olduğu anlaşılır.

Teorem 4.1.7. *$p \neq r$ ise her $T : \ell_r \to \ell_p$ dönüşümü kesin singülerdir.*

4.2 ℓ_p ve c_0 uzaylarında Tamamlayıcı Altuzaylar

Teorem 4.2.1. *ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) (c_0) uzayının sonsuz boyutlu kapalı her Y altuzayı, ℓ_p (c_0) uzayında tamamlayıcı ve ℓ_p (c_0) uzayına izomorfik kapalı bir Z altuzayını ihtiva eder.*

İspat. Y sonsuz boyutlu olduğundan, her n için $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $e_k^*(x_n) = 0$ olacak şekilde $\|x_n\| = 1$ olan $x_n \in Y$ dizisi vardır. Eğer yoksa, bazı $N \in \mathbb{N}$ için

$$S_N(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$$

izdüşümün Y uzayına $S_N|_Y$ kısıtlanışı birebir olacağından, görüntüsü üzerine örten bir izomorfizm olacaktır ki bu Y nin sonsuz boyutlu olmasıyla çelişir. Teorem 4.1.3'den (x_n) dizisi ℓ_p uzayının kanonik bazına denk olan bir $(x_{n_k}$ alt dizisine sahiptir ve altuzay olarak $Z = [x_{n_k}]$ alınırsa, Z uzayı ℓ_p uzayında tamamlayıcıdır. □

c_0 ve ℓ_1 yansımalı olmadığından ve yansımalı uzayın her kapalı altuzayı yansımalı olduğundan, Teorem 4.2.1'den aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.2. *ℓ_1 veya c_0 uzayının sonsuz boyutlu kapalı her altuzayı yansımalı değildir.*

X bir Banach uzay olmak üzere, X uzayının ℓ_p anlamında sonsuz direkt toplamı

$$\begin{aligned} \ell_p(X) &= (X \oplus X \oplus X \oplus ...)_p \\ &= \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in X, (\|x_n\|_X)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p\} \end{aligned}$$

ve c_0 anlamında sonsuz direkt toplamı

$$\begin{aligned} c_0(X) &= (X \oplus X \oplus X \oplus ...)_{c_0} \\ &= \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in X, (\|x_n\|_X)_{n=1}^{\infty} \in c_0\} \end{aligned}$$

uzaylarını tanımlayalım.

$\ell_p(\ell_p)$ uzayı $\ell_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ile tanımlananbilir ve ℓ_p uzayına izometriktir. Benzer şekilde, $c_0(c_0)$ uzayı c_0 uzayı ile izometriktir.

Teorem 4.2.3 (Pełczyński ayrıştırma tekniği)**.** *X ve Y Banach uzay, X, Y uzayının tamamlayıcı bir altuzayına izomorfik ve Y, X uzayının tamamlayıcı bir altuzayına izomorfik olsun.*

(a) $X \approx X^2 = X \oplus X$ ve $Y \approx Y^2$, veya

(b) $X \approx c_0(X)$ veya bazı $(1 \leq p < \infty)$ için $X \approx \ell_p(X)$

şartlarından biri sağlanırsa, X uzayı Y uzayına izomorfiktir.

İspat. $X \approx Y \oplus E$ ve $Y \approx X \oplus F$ alalım. Eğer (a) sağlanırsa

$$X \approx Y \oplus Y \oplus E \approx Y \oplus X,$$

elde ederiz ve benzer şekilde $Y \approx X \oplus Y$ olur. Dolayısıyla $Y \approx X$.

Eğer X (b) yi sağlıyorsa, $X \approx X^2$ ve (a) olduğu gibi, $Y \approx X \oplus Y$ elde ederiz. Buradan,

$$\ell_p(X) \approx \ell_p(Y \oplus E) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E)$$

elde edilir. $X \approx \ell_p(X)$ ise

$$X \approx Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y \oplus \ell_p(X) \approx Y \oplus X$$

olur.

$X \approx c_0(X)$ olduğu benzer şekilde gösterilir. □

Teorem 4.2.4. *$\ell_p(1 \leq p < \infty)$ (veya c_0) uzayının tamamlayıcı sonsuz boyutlu her altuzayı ℓ_p (veya c_0) uzayına izomorfiktir.*

İspat. Y, $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ (veya c_0) uzayının tamamlayıcı sonsuz boyutlu bir altuzayı ise Teorem 4.2.1'den Y uzayının ℓ_p (veya c_0) uzayında tamamlayıcı ve ℓ_p (veya c_0) uzayına izomorfik olan sonsuz boyutlu bir Z altuzayı mevcuttur. Z Y uzayında tamamlayıcı olduğu açıktır ve bu nedenle ℓ_p (veya c_0) uzayı Y uzayında tamamlayıcı altuzaydır. $\ell_p(\ell_p) = \ell_p$ (veya $c_0(c_0) = c_0$) olduğundan Teorem 4.2.3 (b)'den Y uzayının ℓ_p (veya c_0) uzayına izomorfik olduğu anlaşılır. □

Tanım 4.2.5. Her tamamlayıcı sonsuz boyutlu alt uzayı kendisine izomorfik olan Banach uzaylarına asaldır(prime) denir.

ℓ_p ve c_0 uzayları asaldır.

4.3 ℓ_1 Uzayı

ℓ_1 uzayı Banach uzaylar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu kısımda, ℓ_1 uzayının bazı özelliklerini vereceğiz.

Teorem 4.3.1. *Eğer X ayrılabilir Banach uzayı ise sürekli örten bir $Q : \ell_1 \to X$ dönüşümü vardır.*

İspat.

$$Q(\{\xi \in \ell_1 : \|\xi\|_1 < 1\}) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

eşitliğini sağlayan bir $Q : \ell_1 \to X$ sürekli dönüşümün varlığını gösterelim.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, B_X de yoğun bir dizi ve $Q : \ell_1 \to X$, $Q(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ ile tanımlayalım. Her $\xi = (\xi_n) \in \ell_1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ serisi X de mutlak yakınsak olduğundan, Q iyi tanımlıdır. Q lineerdir ve

$$\|Q(\xi)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|\xi_n\|_1$$

den $\|Q\| = 1$ olduğu görülür.

$Q(B_{\ell_1})$, B_X in yoğun bir altkümesidir dolayısıyla $x \in B_X$ ve $0 < \epsilon < 1$ verildiğinde, $\|x - Q\xi_1\| < \epsilon$ olacak şekilde $\xi_1 \in B_{\ell_1}$ vardır.

$$\left\| \frac{1}{\epsilon}(x - Q\xi_1) - Q\acute{\xi_2} \right\| < \epsilon$$

olacak şekilde $\acute{\xi_2} \in B_{\ell_1}$ bulalım. $\xi_2 = \epsilon \acute{\xi_2}$ olarak alırsak

$$\|x - Q(\xi_1 + \xi_2)\| < \epsilon^2$$

elde ederiz. Benzer şekilde devam ederek, B_{ℓ_1} de

(i) $\|\xi_n\|_1 < \epsilon^{n-1}$

(ii) $\|x - Q(\xi_1 + ... + \xi_n)\| < \epsilon^n$

şartlarını sağlayan bir (ξ_n) dizisi bulunur. $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ alınırsa,

$$\|\xi\|_1 \leq (1-\epsilon)^{-1}$$

ve

$$Q\xi = x$$

olur. ϵ keyfi olduğundan,

$$Q\{\xi \in \ell_1 : \|\xi\|_1 < \epsilon\} = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

sonucunu elde ederiz. □

Sonuç 4.3.2. *Ayrılabilir her Banach uzayı, ℓ_1 uzayının bir bölüm uzayına izometrik olarak izomorftur.*

İspat. X ayrılabilir Banach uzayı ise Teorem 4.3.1'den $Q : \ell_1 \to X$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu durumda $\ell_1 / \ker Q$ bölüm uzayı X uzayına izometrik olarak izomorftur. □

Sonuç 4.3.3. *ℓ_1 uzayı, tamamlayıcı olmayan bir kapalı alt uzaya sahiptir.*

İspat. X, ℓ_1 uzayına izomorf olmayan ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Teorem 4.3.1'den, çekirdeği ℓ_1 in kapalı bir altuzayı olan $Q : \ell_1 \to X$ örten dönüşümü mevcuttur. $\ker Q$, ℓ_1 uzayında tamamlayıcı ise $\ell_1 = \ker Q \oplus M$ olacak şekilde ℓ_1 uzayın kapalı bir M altuzayı vardır, dolayısıyla

$$X = \ell_1 / \ker Q \approx M$$

olur. Bu ise, Teorem 4.2.4'den, X uzayının ℓ_1 uzayına izomorfik olmasıyla mümkündür. □

Tanım 4.3.4. Dizilerin zayıf ve norm yakınsaklığı çakışan(denk olan) Banach uzaylarına Schur özelliğine sahiptir (Schur uzayıdır) denir.

$\ell_p (1 < p < \infty)$ ve c_0 uzayları, (e_n) kanonik bazları norm yakınsak olmayıp zayıf olarak sıfıra yakınsak olduğundan, Schur özelliğine sahip değillerdir.

Teorem 4.3.5. *ℓ_1 uzayı Schur özelliğine sahiptir.*

İspat. (x_n), ℓ_1 uzayında sıfıra zayıf yakınsak fakat sıfıra norm yakınsak olmasın. Theorem 4.3.1'den, (x_n) dizisi, kanonik baza eşdeğer olan bir alt dizi içerecektir. ℓ_1 uzayının kanonik bazı sıfıra zayıf yakınsak olmadığından, çelişki elde edilir. □

Teorem 4.3.6. *Schur uzayında bir kümenin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart kümenin norm kompakt olmasıdır.*

İspat. W, X Schur uzayının zayıf kompakt alt kümesi ve $(x_n) \subset W$ olsun. Eberlein-Šmulian teoremine göre, W zayıf dizisel kompakt olduğundan, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir $x \in W$ elemanına zayıf yakınsayan bir $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ altdizisi mevcuttur. X Schur özelliğine sahip olduğundan, $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ norma göre x noktasına yakınsar. Bu ise W kümesinin norm kompakt olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.3.7. *Schur özelliğine sahip yansımalı bir Banach uzayı sonlu boyutludur.*

İspat. X yansımalı bir Banach uzayı Schur özelliğine sahip ise birim yuvarı Teorem 4.3.6'de norm-kompakt olur ki bu X uzayının sonlu boyutlu olduğunu gösterir. □

Tanım 4.3.8. X Banach uzayında her x^* için $\lim x^*(x_n)$ mevcut olan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine zayıf Cauchy dizisi denir.

X Banach uzayında herhangi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zayıf Cauchy dizisi düzgün sınırlılık ilkesinden norm sınırlıdır. "Bir Banach uzayın yansımalı olması için gerek ve yeter şart her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir altdiziye sahip olması" önermesinden, X yansımalı ise $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi zayıf yığılma x noktasına sahip olacağından, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zayıf olarak x e yakınsar. X yansımalı değilse zayıf Cauchy olan ancak zayıf yakınsak olmayan diziler olabilir.

Tanım 4.3.9. Her zayıf Cauchy dizisi zayıf yakınsak olan Banach uzayına zayıf dizisel tamdır (WSC) denir.

c_0 uzayında $x_n = e_1 + e_2 + ... + e_n$ dizisi, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zayıf Cauchydir fakat zayıf yakınsak olmadığından, c_0 zayıf dizisel tam (WSC) değildir.

Önerme 4.3.10. *Schur özelliğine sahip Banach uzayı zayıf dizisel tamdır.*

İspat. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zayıf Cauchy olsun. Bu durumda, $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ tamsayıların herhangi iki kesin artan dizisi için $(x_{m_k} - x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zayıf sıfır dizisidir ve $\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - x_{n_k}\| = 0$ olur. Schur özelliğinden, (x_n) norm-Cauchy olup $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, norm yakınsaktır. Norm yakınsak olan her dizi zayıf yakınsak olacağından (x_n) dizisi zayıf yakınsaktır. □

5. BAZ ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde, [26, 23, 25, 24] kaynaklarından, sonsuz boyutlu uzaylarda tanımlanan şartsız, büzülen ve tamamen sınırlı baz türleri ve özellikleri incelenecektir.

5.1 Şartsız Bazlar

Banach uzaylarında şartsız baz kavramı ilk olarak Karlin [10] çalışmasında tanımlanmıştır. Karlin [10], şartsız baza sahip olan uzayların bazı özelliklerini incelemiş ve bir Schauder bazına sahip $C[0,1]$ uzayının bir şartsız baza sahip olmadığı ispatlamıştır.

Tanım 5.1.1. Bir X banach uzayında her $x \in X$ için $\sum_n u^*(x)u_n$ serisi şartsız yakınsak olan (u_n) bazına şartsız baz denir.

$(u_n)_{n=1}^{\infty}$, X uzayında şartsız baz olması için her $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $\left(u_{\pi(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin X için baz olması gerek ve yeterdir.

ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0 uzayının kanonik (e_n) bazı şartsız bazdır.

Şartlı(şartsız olmayan) baza örnek olarak, c_0 uzayında

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

bazı verilebilir. Her $\xi = (\xi_n) \in c_0$ için $f_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} f^*(\xi) f_n &= \sum_{n=1}^{N} (e_n^*(\xi) - e_{n+1}^*(\xi)) f_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\xi_n - \xi_{n+1}) f_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n - \sum_{n=2}^{N+1} \xi_n f_{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \xi_n (f_n - f_{n-1}) - \xi_{N+1} f_N \\
&= (\sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n) - \xi_{N+1} f_N
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\| \xi - \sum_{n=1}^{N} f_n^*(\xi) f_n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{N+1}^{\infty} \xi_n e_n + \xi_{N+1} f_N \right\|_{\infty} \\
&\leq \left\| \sum_{N+1}^{\infty} \xi_n e_n \right\|_{\infty} + |\xi_{N+1}| \, \|f_N\|_{\infty} \to 0, \ (N \to \infty)
\end{aligned}$$

olduğundan f_n bir bazdır.

$\sum_n \alpha_n f_n$ serisinin yakınsak olduğu (α_n) katsayıların oluşturduğu küme S olsun. "$(\alpha_n) \in S$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_n = \xi_n - \xi_{n+1}$ olacak şekilde $\xi = (\xi_n) \in c_0$ bulunmasıdır" önermesi geçerlidir. $\sum_n \alpha_n$ serileri mutlak yakınsak olmadıkça $\sum_n \alpha_n f_n$ serisinin c_0 uzayında yakınsaklığı, (ϵ_n) işaret dizisinin her seçilişine $\sum_n \epsilon_n \alpha_n f_n$ serisinin yakınsaklığına denk olmaycağından, (f_n) şartsız baz olamaz.

Teorem 5.1.2. *$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin X Banach uzayında şartsız baz olması için gerek ve yeter şart her $N \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$ $(n = 1, 2, ..., N)$ skaler dizileri için,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n u_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n u_n \right\|. \tag{5.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K \geq 1$ sabitinin mevcut olmasıdır.

İspat. $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ şartsız baz olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ yakınsak ise Teorem 2.4.8 'dan her $(t_n) \in \ell_\infty$ için $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n u_n$ yakınsaktır. Banach-Steinhaus teoreminden $T_{(t_n)} : X \to X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \to Tx = \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n u_n$ ile tanımlı dönüşüm lineer ve süreklidir. Düzgün Sınırlılık Prensibinden, (5.1 eşitsizliğini sağlayan K sayısı vardır.

Tersine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ serisi X uzayında yakınsak olsun. Teorem 2.4.7'den $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ serisinin şartsız yakınsak olduğunu göstermek için artan her $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi bakımından $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} u_{n_k}$ altserisinin yakınsak olduğunu göstermemiz yeterlidir. Verilen $\epsilon > 0$ için $m_2 > m_1 \geq N$ olduğunda

$$\left\| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n u_n \right\| < \frac{\epsilon}{K}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $N \leq n_k < ... < n_{k+l}$ ise

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{k+l} a_{n_j} u_{n_j} \right\| \leq K \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+l}} a_j u_j \right\| < \epsilon$$

bulunur ki bu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} u_{n_k}$ serisinin Cauchy dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterir. □

Tanım 5.1.3. (u_n), X Banach uzayının bir şartsız bazı olsun. (5.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük K sayısına (u_n) bazının K_u şartsız baz sabiti denir. $K \geq K_u$ olduğunda (u_n) bazına K-şartsız denir.

$(u_n)_{n=1}^{\infty}$, X Banach uzayının bir şartsız bazı olsun. $|\alpha_n| = 1$ olan (α_n) skaler dizisi için, $T_{(\alpha_n)} : X \to X, T_{(\alpha_n)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n u_n$ ile tanımlı izomorfizm dönüşümünü alalım. Bu durumda

$$K_u = \sup_{(\alpha_n)} \left\{ \left\| T_{(\alpha_n)} \right\| : \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| = 1 \right\}$$

olur.

Her $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $P_A : X \to [u_k], x = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^*(x) u_k \to P_A(x) = \sum_{k \in A} u_k^*(x) u_k$ ile tanımlı bir projeksiyon vardır. $\{P_A : A \subset \mathbb{N}\}$ kümesinin her bir elemanı, (u_n) şartsız baza karşılık gelen doğal projeksiyonlardır.

Teorem 5.1.4. *$(u_n)_{n=1}^{\infty}$, X Banach uzayının bir bazı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) (u_n) şartsız bazdır.

(ii) Her $A \subset \mathbb{N}$ için P_A dönüşümü iyi tanımlıdır.

(iii) Her $A \subset \mathbb{N}$ için P_A dönüşümü iyi tanımlı ve $\sup_A \|P_A\| < \infty$.

(iv) $\sup\{\|P_F\| : F \subset \mathbb{N}, F$ sonlu $\} < \infty$.

(v)Her tümleyeni sonlu $B \subset \mathbb{N}$ için P_B dönüşümü iyi tanımlı ve

$$\sup\{\|P_B\| : B \subset \mathbb{N}, B \textit{ nin tümleyeni sonlu } \} < \infty.$$

Yukarıdaki ifadelerden bir geçerli ise (iii), (iv) ve (v) deki supremumlar çakışır.

İspat. Teorem 3.1.3'den (i), (ii) ifadesini gerektirir. Düzgün sınırlılık prensibinden (ii), (iii) önermesini gerektirir. (iii) nin (iv) önermesini ve (iv) nin (v) önermesini gerektirmesi açıktır.

(iv) nin (iii) önermesini gerektirdiğini gösterelim. $A \subset \mathbb{N}$ ve $S = supp(x) = \{n : u_n^*(x) \neq 0\}$ sonlu olan $x \in X$ elemanı için $P_A(x) = P_{A\cap S}(x)$ olacağından,

$$\begin{aligned} \|P_A(x)\| &= \|P_{A\cap S}(x)\| \\ &\leq \|P_{A\cap S}\| \, \|x\| \\ &\leq \sup\{\|P_F\| : F \subset \mathbb{N}, F \text{ sonlu } \} \, \|x\| \end{aligned}$$

olur. Yoğunlukdan dolayı P_A dönüşümünün X uzayına genişlemesi sınırlıdır.

(v) nin (iii) önermesini gerektirdiğini gösterelim. $A \subset \mathbb{N}$ ve $S = supp(x)$ sonlu olan $x \in X$ elemanı için $P_A(x) = P_{A\cap S^C}(x)$ olacağından,

$$\begin{aligned} \|P_A(x)\| &= \|P_{A\cap S^C}\| \, \|x\| \\ &\leq \sup\{\|P_B\| : B \subset \mathbb{N}, B^C \text{ sonlu } \} \, \|x\| \end{aligned}$$

olur. Yoğunluktan dolayı P_A dönüşümünün X uzayına genişlemesi sınırlıdır. □

5.2 Büzülen ve Sınırlı-Tam Bazlar

Bir X Banach uzayının (e_n) bazına karşışık gelen (e_n^*) biortogonal fonksiyoneller dizisi X^* uzayı için temel dizi olup, baz olmayabilir.

Tanım 5.2.1. X Banach uzayının bir bazı (u_n), baza karşılık gelen biortogonal fonksiyoneller dizisi (u_n^*) ve her bir pozitif m tamsayısı için x^* elemanının $[u_n]_{n=m}^{\infty}$ uzayına kısıtlanışının normu $\|x^*\|_{(m)}$ olsun. Her $x^* \in X^*$ için $\lim_m \|x^*\|_{(m)} = 0$ oluyorsa, (u_n) bazına büzülen(shrinking) baz denir.

Teorem 5.2.2. *(u_n), X Banach uzayının bir bazı ve baza karşılık gelen biortogonal fonksiyoneller dizisi (u_n^*) olsun. (u_n^*) dizisi X^* uzayının bazı olması için gerek ve yeter şart (u_n) bazının büzülen olmasıdır.*

İspat. (u_n^*) dizisi X^* uzayının bazı olsun. $x^* = \sum_i a_i u_i^* \in X^*$ ise her m pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned} \|x^*\|_{(m)} &= \left\|\sum_i a_i u_i^*\right\|_{(m)} \\ &= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i u_i^*\right\|_{(m)} \\ &\leq \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i u_i^*\right\| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$\lim_m \|x^*\|_{(m)} = 0$$

bulunur. Buna göre (u_n) bazı büzülendir.

(u_n) bazı büzülen, (u_n) dizisinin baz sabiti K ve $x^* \in X^*$ olsun. Her m pozitif tamsayısı ve $x = \sum_n a_n u_n \in X$ için

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n u_n\right\| &\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n u_n\right\| \\ &\leq (1+K)\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right\| \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \left|\left(x^* - \sum_{n=1}^{m}(x^*(u_n))u_n^*\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right)\right| &= \left|x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_u\right)\right| \\ &\leq \|x^*\|_{(m)}(1+K)\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|x^* - \sum_{n=1}^{m}(x^*(u_n))u_n^*\right\| \leq \|x^*\|_{(m)}(1+K)$$

olacağından

$$\lim_m \left\|x^* - \sum_{n=1}^{m}(x^*(u_n))u_n^*\right\| = 0$$

bulunur.Bu ise $X^* = [u_n^*]_{n1}^{\infty}$ dolayısıyla (u_n^*) dizisinin X^* uzayı için bir baz olduğunu gösterir.

□

Teorem 5.2.3. (u_n)*, X Banach uzayının bir bazı olsun.*

(i) (u_n) *büzülen bazdır.*

(ii) Her $x^* \in X^*$ *için* $\lim_n \|x^* - P_n^* x^*\| = 0$.

(iii) X uzayının her sınırlı blok dizisi zayıf sıfır dizisidir.

önermeleri denktir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): $Z = [u_n^*]$ olmak üzere, $P_n^* : Z \to Z$ baz projeksiyonları olmak üzere, (u_n) büzülen baz ise (u_n^*), X^* için baz olacağından, her $x^* \in X^*$ için

$$\lim_n \|x^* - P_n^* x^*\| = 0$$

bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (x_n), X uzayında sınırlı blok dizi ve $C = \sup_n \|x_n\|$ olsun. Bir $x^* \in X^*$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $n \geq n_0$ için $\|x^* - P_n^* x^*\| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 sayısını seçelim. Bu durumda, $n \geq n_0$ için $\min supp(x_n) > n_0$ ve $(I - P_{n_0})x_n = x_n$ olup,

$$\begin{aligned} |x^*(x_n)| &= |x^*((I - P_{n_0})x_n)| \\ &= |(x^* - P_{n_0}^* x^*)x_n| \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. ε keyfi olduğundan, $x^*(x_n) \to 0$ elde edilir. Her $x^* \in X$ için bu tartışma geçerli olacağından, (x_n) dizisi zayıf sıfır dizisidir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\|x^*\|_{X^*/[u_n^*]} > \varepsilon > 0$ olacak şekilde bir $x^* \in X^*$ elemanı mevcut olsun. $x^*(x_1) > \varepsilon$ olacak şekilde sonlu desteğe sahip ($supp(x)$ kümesi sonlu) olan bir $x_1 \in B_X$ elemanı seçelim. $n_1 = \max supp(x_1)$ olsun. $(x^* - P_{n_{i-1}}^* x^*)(x_i) > \varepsilon$ ve her bir $1 \leq i < k$ için $supp(x_i) \subset [1, n_i]$ şartlarını sağlayan $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \subset B_X$ ve $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ sayılarını seçelim. $\left\|x^* - P_{n_{k-1}}^* x^*\right\| > \varepsilon$ olduğundan $(x^* - P_{n_{k-1}}^* x^*)(x_k) > \varepsilon$ ve sonlu desteğe sahip $x_k \in B_X$ elemanı vardır. $n_k = \max supp(x_k)$ olsun. Bu şekilde tekrarlamalı yapıyı tamamlayalım.

Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $y_i = (I - P_{n_{i-1}})x_i$ alınırsa, $supp(y_i) \subset (n_{i-1}, n_i]$ ve $\|y_i\| \leq 1 + \left\|P_{n_{i-1}}\right\| \leq 1 + K$ olur. Bu ise (y_i) dizisinin sınırlı blok dizi ve her i için $x^*(y_i) = (x^* - P_{n_{i-1}} x^*)(x_i) > \varepsilon$ olduğunu gösterir. Şu halde, (y_i) dizisi zayıf sıfıra yakınsak olmayan bir sınırlı blok dizidir. $\square$

ℓ_1^* uzayında x^* elemanı $(1, 1, 1, ...) \in \ell_\infty$ alınırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x^* - P_n^* x^*\|_\infty = 1$ olup,

$$\lim_n \|x^* - P_n^* x^*\|_\infty = \lim_n 1 = 1 \neq 0$$

olduğundan, ℓ_1 uzayının kanonik bazı büzülen bir baz değildir. c_0 ve ℓ_p $(1 < p < \infty)$ uzaylarının kanonik bazı, her sınırlı blok dizi, zayıf sıfır dizi olmak zorunda olduğundan, büzülen bazdır.

Teorem 5.2.4. *(u_n), X Banach uzayının şartsız bazı olsun. Bu durumda,*

(i) ℓ_1 uzayı X içine gömülür.

(ii) (u_n) bazı büzülendir.

önermelerinden sadece biri doğrudur.

İspat. (u_n) bazının büzülen baz olması X^* uzayının ayrılabilir olmasını ve ℓ_1 uzayının X içine gömülmesi X^* uzayının ayrılabilir olmamasını gerektiğinden, her iki önermenin aynı anda doğru olmasının mümkün olmadığını gösterir.

(u_n) büzülen baz olmasın. Bu durumda zayıf sıfır olamayan bir (x_n) sınırlı blok dizisi mevcuttur. Her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^*(x_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x^* \in B_{X^*}$ elemanı vardır.Bu ise, terimleri negatif olmayan (a_i) skaler dizisi için

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| &\geq x^*(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) \\ &\geq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

olduğunu gösterir. (u_n) dizisi K-şartsız ise (x_i) dizisi de K-şartsız olup, herhangi bir (a_i) skaler dizisi için

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \geq (\varepsilon/K) \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

olacağından, (x_i), ℓ_1 uzayının bazına denktir. □

Tanım 5.2.5. X Banach uzayinin bir bazı (u_n) olsun.

$$\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\| < \infty$$

olan her (a_n) skaler dizisi için $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ serisi yakınsak oluyorsa, (u_n) bazına sınırlı-tam baz denir.

(e_k), ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayının kanonik bazı olmak üzere, (a_k) skaler dizisi için $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_p$ sonlu ise

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| &= \sup_n \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\ &= \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_p^p \\ &< \infty\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_i a_i e_i$ serisi $(a_n) \in \ell_p$ elemanına yakınsar. Bu nedenle ℓ_p uzayının kanonik bazı sınırlı-tam bazdır.

c_0 uzayının (e_n) kanonik bazı,

$$\begin{aligned}\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|_\infty &= \sup_n \left\|(1, 1, 1, ..., \underbrace{1}_{\text{n.terim}}, 0, 0, ...)\right\|_\infty \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğu halde

$$\sum_k e_k$$

serisi c_0 uzayında yakınsak olmadığından, sınırlı-tam baz değildir.

Yine, c_0 uzayının $f_n = \sum_{k=1}^n e_k$ bazı,

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n (-1)^k f_k \right\|_\infty = 1$$

olduğu halde

$$\sum_k f_k$$

serisi c_0 uzayında yakınsak olmadığından, sınırlı-tam baz değildir.

ϕ, X Banach uzayından $[u_n^*]^*$ uzayına $\phi(x)(\sum_i a_i u_i^*) = \sum_i a_i u_i^*(x)$ ile tanımlı dönüşüm olsun. $[u_n^*] \subset X^*$ olduğundan $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ eşitsizliği geçerlidir. Her $x \in X$ ve sabit bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|P_n x\| = x^*(P_n x)$ olacak şekilde bir x^* elemanını bulabilirz. (u_n) bazının baz sabiti K olmak üzere, $y^* = P_n^* x_n^*/K$ olarak alalım. Bu durumda (y_n^*) dizisi $[u_n^*]$ uzayının birim yuvarında olup $y_n^*(x) = x_n^*(P_n x)/K = \|P_n x\|/K \to \|x\|/K$ elde edilir.Bu ise, $\|\phi(x)\| \geq \|x\|/K$ ve ϕ dönüşümünün izomorfik bir gömme olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.6. *(u_n), X Banach uzayının bir bazı ve $Z = [u_n^*]$ olsun. Bu durumda,*

(i) (u_n) sınırlı-tam bazdır.

(ii) (x_n), sıfır dizisi olmayan sınırlı blok dizi ise $\sup_N \left\| \sum_{n=1}^N x_n \right\| = \infty$

(iii) $\phi : X \to Z^*$, ($\phi(x)(\sum_i a_i u_i^*) = \sum_i a_i u_i^*(x)$) örten dir.

önermeleri denktir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): (x_i) bir blok dizi ise $k \geq i$ için $u_i^*(\sum_{j=1}^i x_j) = u_k^*(\sum_{j=1}^i x_j)$ olur. $a_i = u_i^*(\sum_{j=1}^i x_j)$ alalım. $\sum_{i=1}^N a_i u_i = P_N \sum_{i=1}^N x_i$ olacağından, (u_i) bazının baz sabiti K olmak üzere,

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i u_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^N x_i \right\|$$

eşitsizliği sağlanır. $\sup_N \left\| \sum_{i=1}^N x_i \right\| < \infty$ ise $\sup_N \left\| \sum_{i=1}^N a_i u_i \right\| < \infty$ ve $\sum_{i=1}^\infty a_i u_i$ serisi yakınsak olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $m_0 = 0$ ve $m_n = \max supp(x_n)$ alınırsa,

$$\|x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{m_n} a_i u_i - \sum_{i=1}^{m_{n-1}} a_i u_i \right\| \to 0, \ (n \to \infty)$$

bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $f \in Z^*$ ve $y_n = \sum_{i=1}^n f(u_i^*) u_i$ alınırsa, her $\sum_{i=1}^\infty a_i u_i^* \in Z$ için

$$\begin{aligned} |(\sum_{i=1}^\infty a_i u_i^*)(y_n)| &= |\sum_{i=1}^n a_i f(u_i^*)| \\ &= |f(P_n^* \sum_{i=1}^\infty a_i u_i^*)| \\ &\leq K \|f\| \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (y_n) dizisinin norma göre yakınsak olduğunu gösterir. Bu durumda, $\phi(y_n)$ dizisi de norm yakınsaktır. $\phi(y_n)$ sınırlı, $n \geq i$ için $\phi(y_n)(u_i^*) = f((u^*)$ ve yoğunluktan dolayı her x^* için $\phi(y_n)(x^*) \to f((x^*)$ olduğundan, $\phi(y_n) \stackrel{w^*}{\to} f$ olduğu görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\sup_n \|\sum_{i=1}^n a_i u_i\| = C < \infty$ olacak şekilde (a_k) skaleri için $\phi(u_i) = u_i^{**}$ olduğundan $\sup_n \|\sum_{i=1}^n a_i u_i^{**}\| < \infty$ olur. $\sum b_i u_i^* \to \sum a_i b_i$ dönüşümü $[e^*]^*$ uzayının bir elemanı olacağından, $\phi(x) = f$ olacak şekilde $x \in X$ elemanı mevcuttur. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $a_i = f(u_i^*) = \phi(x)(u_i^*) = u_i^*(x)$ olup, $x = \sum a_i u_i$ olduğundan, $\sum_i a_i u_i$ serisi norm yakınsaktır. □

Teorem 5.2.7. *(u_n), X Banach uzayının şartsız bazı olsun. Bu durumda,*

(i) c_0 uzayı X içine gömülür.

(ii) (u_n) bazı sınırlı-tamdır.

önermelerinden sadece biri doğrudur.

İspat. (u_n), X uzayında sınırlı-tam baz olsun. Bu durumda $\sup_N \left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| = C < \infty$ olacak şekilde (x_n) yarınormalleştirilmiş blok dizisi vardır. Herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ ve $|\varepsilon| = 1$ olan (ε_n) dizisi için, (u_n) bazının baz sabiti K olmak üzere, $\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\right\| \leq CK$ eşitsizliği geçerlidir. Her $N \in \mathbb{N}$ ve (a_i) skaler dizisi için $a = \max_{1\leq i\leq N} |a_i|$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^N a_i x_i \in co\{a\sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i : |\varepsilon_i| = 1\} \subset aCKB_X$$

olduğundan $\left\|\sum_{i=1}^N a_i x_i\right\| \leq aCK$ olur. (x_i) yarınormalleştirilmiş blok dizi olduğundan, c_0 bazını içereceğinden, c_0 uzayının bazına denktir.

□

Teorem 5.2.8. *X Banach uzayının (u_n) bazının büzülen (sınırlı-tam) bazı olması için gerek ve yeter şart (u_n^*) dizisinin sınırlı-tam (büzülen) baz olmasıdır.*

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\phi(u_i) = u_i^{**}$, X^* uzayı, $\sum_{i=1}^\infty a_i u_i^*$ serisinin sınırlı kısmi toplamlarıyla, $[u_n^*]^*$ uzayı, $\sum_{i=1}^\infty a_i u_i^{**}$ serisinin sınırlı kısmi toplamlarıyla tanımlanabilir. (u_i) bir büzülen bazı olması için gerek ve yeter şart $\sum_i a_i e_i^*$ serisinin kısmi toplamlarıyla oluşturulan $[u_i^*]$ uzayının norm yakınsak $\sum_i a_i u_i^*$ serilerinden oluşmasıdır. Bu ise sınırlı kısmi toplamların norm yakınsaklığa denk olduğunu gösterir. Şu halde (u_n) bazının büzülen olması için grek ve yeter şart (u_i^*) bazının sınırlı-tam olması gerektiğini anlariz. □

KAYNAKLAR

[1] **Hamel, G.** (1905). Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Mathematische Annalen*, 60, 459–462.

[2] **Schauder, J.** (1927). Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.*, 26, 47–65

[3] **Banach, S.** (1932) *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszava-Lwów.

[4] **Enflo, P.** (1973). A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta mathematica*, 130, 309-317.

[5] **Pełczyński, A.** (1962). A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces", *Studia Mathematica*, 21, 371–374

[6] **Banach S. and Mazur S.** (1933). Zur Theorie der linearen Dimension, *Studia Mathematica 4, 100–112.*

[7] **Šmulian V.** (1940). Über lineare topologische Räume, *Rec. Math. [Math. Sib.] N.S.*, 7, 425–488.

[8] **Eberlein, W. F.** (1947). Weak compactness in Banach spaces, *I. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A*. 33, 51–53.

[9] **Pełczyński, A.** (1964). A proof of Eberlein–Smulian theorem by an application of basic sequences, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 12, 543–548.

[10] **Karlin, S.** (1948). Bases in Banach spaces, *Duke Math. J.,* 15, 971–985.

[11] **Gowers, W. T.** (1996). A solution to the Schroeder–Bernstein problem for Banach spaces, *Bull.Lond. Math. Soc.* 28(3), 297–304.

[12] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.**, (1971) On the complemented subspaces problem, *Isr. J. Math.* 9, 263–269.

[13] **Day, M. M.** (1962). On the basis problem in nonmed spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, 655–658.

[14] **Gelbaum, B. R.** (1958) Banach spaces and bases, *An. Acad. Brasil. Ci.*, 30, 29–36.

[15] **Bessaga, C. ve Pełczyński, A.** (1958). On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.,* 17, 151-164.

[16] **Gowers, W.T., Maurey, B.** (1993). The unconditional basic sequence problem, *J. AMS.,* 6, 851–874

[17] **Gowers, W. T.** (1991). A Banach space not containing c_0, ℓ_1 or a reflexive subspace, *Trans. Amer. Math. Soc.* 344, 407-420

[18] **Alaoglu, L.** 1940. Weak topologies in nonmed linear spaces, *Ann. Math.*, 41, 252–267.

[19] **Dieudonne, J.** (1954). On biorthogonal systems, *Michigan Math. J.*, 2, 7–20.

[20] **James, R. C.** (1950). Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math.* (2) 52 , 518–527.

[21] **Retherford, J. R.** (1966). Bases, basic sequences and reflexivity of linear topological spaces, *Mathematische Annalen*, 164, 280–285.

[22] **Retherford, J. R. and McArthur, C. W.** (1966). Some remarks on bases in linear topological spaces. *Mathematische Annalen*, 164, 38–41.

[23] **Diestel, J.** (1984). *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York.

[24] **Megginson, R. E.** (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York.

[25] **Carothers, N. L.** (2004). *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, New York.

[26] **Albiac, F. ve Kalton, N. J.** (2016). *Topics in Banach space theory*. Springer-Verlag, New York.

[27] **Boos, J.** (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press.

[28] **Kreyszig, E.** (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.

[29] **Maddox, I. J.** (1970). *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

[30] **Kadets, V.** (2018). *A course in functional analysis and measure theory*. Cham: Springer International Publishing.

[31] **Mazur, S.** (1930). Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält. *Studia Mathematica*, 2, 7-9.

[32] **Erdoğan S. Ş.** (2001). *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları.

[33] **Kadets, M. I. ve Kadets, V. M.** (1997). *Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence, Translated from the Russian by Andrei lacob*, Birkhauser Verlag, Basel.

[34] **Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L.** (1977). *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin.

[35] **Singer, I.** (1970). *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[36] **Grunblum, M. M.** (1941). Certains theoremes sur la base dans un espace du type (B), *C. R. Dokl. Acad. Sci. URSS (N.S.)* 31, 428–432

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Ayşe Fatma MEŞE

ÖĞRENİM DURUMU:

- Lisans: 2015, Bingöl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik
- Yüksek Lisans: 2022, İnönü Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

MESLEKİ DENEYİM:
2020 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak çalışıyor.