T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARINDA DİZİSEL ÇİFT BAND MATRİSİNİN ETKİ ALANI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve AKDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat CANDAN

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARINDA DİZİSEL ÇİFT BAND MATRİSİNİN ETKİ ALANI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve AKDOĞAN
(36193614069)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat CANDAN

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, her aşamasında yardım, öneri, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr.Murat CANDAN'a, tez yazımı konusunda her türlü desteğini eksik etmeyen hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e çalışmalarımda ayrıca hayatımın tümünde olduğu gibi bu çalışmalarım sürecinde de bana her türlü destekte bulunan aileme teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Bazı Dizi Uzaylarında Dizisel Çift Band Matrisinin Etki Alanı ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Merve AKDOĞAN

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ ....

ONUR SÖZÜ i

İÇİNDEKİLER ii

SEMBOLLER VE KISALTMALAR iii

ÖZET iv

ABSTRACT v

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3

3. FARK DİZİ UZAYLARI 12

4. B$(\tilde{r},\ \tilde{s})$ MATRİSİNİN ETKİ ALANI İLE TÜRETİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI.... 14

5. $\tilde{\ell}_\infty$, $\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_1$ DİZİ UZAYLARI İLE İLİŞKİLİ BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ .. 36

6. SONUÇ.................... 44

KAYNAKLAR.................... 45

ÖZGEÇMİŞ 49

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	:	her,
$\exists$	:	en az bir,
$=$	:	eşittir,
$\neq$	:	eşit değildir,
$\in$	:	elemanıdır
$\ni$	:	öyle ki
$\Rightarrow$	:	gerek şart,
$\Leftarrow$	:	yeter şart,
$\Leftrightarrow$	:	gerek ve yeter şart,
$\subset$	:	alt cümle,
$\lvert x \rvert$	:	mutlak değer,
Σ	:	toplam sembolü,
Π	:	çarpım sembolü,
$\Vert . \Vert$	:	norm,
$\lim$	:	limit,
$\sup$	:	supremum,
$\inf$	:	infimum,
(X,d)	:	metrik uzay,
$\overline{M}$	:	M cümlesinin kapanışı,
(x_k)	:	dizi,
λ, μ	:	dizi uzayları,
ω	:	tüm kompleks dizilerin uzayı,
ℓ_∞	:	sınırlı dizilerin uzayı,
c	:	yakınsak dizilerin uzayı,
c_0	:	sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı,
ℓ_p	:	p-inci dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzayı,
$S(\lambda, \mu)$	:	çarpım uzayı,
(λ, μ)	:	lambda dizi uzayını mü dizi uzayına taşıyan matrislerin sınıfı,
U^{-1}	:	U matrisinin tersi
$\circ$	:	bileşke işlemi,
$\cong$	:	izomorfizm,
λ^{α}	:	lambda uzayının alfa duali,
λ_A	:	A matrisinin lambda etki alanı,
λ^*	:	lambda uzayının sürekli duali,
$B(r,s)$	:	genelleştirilmiş fark matrisi,
$B(\tilde{r},\tilde{s})$	:	dizisel çift band matrisi,

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DİZİ UZAYLARINDA DİZİSEL ÇİFT BAND MATRİSİNİN ETKİ ALANI

MERVE AKDOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

49+v sayfa

2022

Danışman: Doç. Dr. Murat CANDAN

Tez konusu olarak hazırlanan bu çalışmanın ana amacı $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ dizi uzayını tanımlamak ve bu uzayın β- ve γ- duallerini belirtmektir. Burada λ dizi uzayı ℓ_∞, c, c_0 veya ℓ_p uzaylarından herhangi birisidir. Ayrıca bu çalışmada $\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$ uzayları için Schauder bazı verilip $\tilde{c}$, $\tilde{\ell}_1$ ve $\tilde{\ell}_p$ uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelendi. Son olarak $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ uzayı üzerindeki matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karekterize edildi.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, matris etki alanı aracılığıyla yeni bir dizi uzayı inşa etme yönteminden ve halihazırda literatürde bulunan bu yöntem için kullanılan farklı sonsuz band matrislerinden söz ettikten sonra tezin bölümlerinin kısa bir özeti verilmiştir.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde, fark dizi uzayları üzerindeki çalışmalar özetlendi.

Dördüncü bölümde, $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ olmak üzere λ dizi uzayında $B(\tilde{r}, \tilde{s})$ dizisel çift band matrisinin $\lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ etki alanını tanımlanarak ve $\lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ nin β- ve γ- duallerini belirlenmiştir. Hangi şartlar altında $\lambda \subset \lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ olduğu ve $\lambda = \lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ eşitliğinin sağlandığını ispatladıktan sonra $(c_0)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$, $(\ell_1)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ ve $(l_p)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ uzaylarının Schauder bazı verildi. Son olarak $\tilde{c}_0$, $\tilde{\ell}_1$ ve $p > 1$ iken $\tilde{\ell}_p$ uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelendi.

Beşinci bölümde, bir üçgensel matrisin etki alanından herhangi bir dizi uzayına matris dönüşümlerini karakterize eden genel bir teorem ifade ve ispat edildi. Bu basit teoremin uygulaması olarak $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ ve $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_1\}$ olmak üzere $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ dan μ ye matris dönüşümlerinin gerekli ve yeterli şartlarını veren bir tablo sunuldu.

Altıncı bölümde, tezde elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Beta ve gamma dualleri, dizi uzaylarında matris etki alanı, Schauder bazı ve matris dönüşümleri.

ABSTRACT

Master Thesis

DOMAİN OF THE DOUBLE SEQUENTİAL BAND MATRİX
İN SOME SEQUENCE SPACES

Merve AKDOĞAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

49+v pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat CANDAN

The main purpose of this study, which is prepared as a thesis topic, is to define the sequence space $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ and to specify the $\beta-$ and $\gamma-$ duals of this space. Here, the sequence space λ is any of the ℓ_∞, c, c_0 or ℓ_p spaces. In addition, in our study, Schauder basis for $\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$ and $\tilde{\ell}_p$ spaces is given and some topological properties of $\tilde{c}$, $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_p$ spaces are examined. Finally, some classes of matrix transformations on the space $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ are characterised.

This study is organized as follows.

In the first chapter, after mentioning the method of constructing a new sequence space via matrix domain and the different infinite band matrices used for this technique available in the literature, a brief summary of the chapters of the thesis is presented.

In the second chapter; basic definitions and theorems are given.

In the third chapter; The studies on difference sequence spaces are summarized.

In the fourth chapter; We have defined the domain of $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ of the sequential double band matrix $B(\tilde{r},\tilde{s})$ in λ sequence space, $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ and $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ We have determined the $\beta-$ and $\gamma-$ duals of . After proving under which conditions it is $\lambda \subset \lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ and the equality of $\lambda = \lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ is satisfied, we have given the Schauder basis of $(c_0)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$, $(\ell_1)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ and $(\ell_p)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ spaces. Finally, we examined some topological properties of spaces $\tilde{c}_0$, $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_p$ when $p > 1$.

In the fifth chapter; A general theorem characterizing matrix transformations from the domain of a triangular matrix to any sequence space is stated and proved. As an application of this simple theorem, $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ and $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_1\}$ .We have made a table giving necessary and sufficient conditions for matrix transformations from $\lambda_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ to μ.

In the sixth chapter, the results we have obtained in the thesis are mentioned.

Keywords: Beta and gamma duals, matrix domain of a sequence space, Schauder basis and matrix transformations.

1. GİRİŞ

İnsanların genellikle öğrenimleri sırasında ilk karşılaştıkları sayılar, bir şeyleri saymak için kullanılan 1, 2, 3,... sayılarıdır. Bu sayılar 0 sayısının katılımı ile oluşturulan cümleye doğal sayılar cümlesi denilmekte ve $\mathbb{N}$ sembolü ile gösterilmektedir.

X boş cümleden farklı herhangi bir cümle olmak üzere $\mathbb{N}$ den X e tanımlanan herbir fonksiyona bir dizi denir ve diziler X e göre adlandırılır. $X = \mathbb{R}$ ise bu diziye bir reel terimli dizi denir. Bu tezde kullanılan tüm diziler birer reel terimli dizidir. Diziler ile yakından ilişkili olan bir diğer kavram ise seri kavramıdır. Verilen bir (x_n) reel terimli dizisinin tüm terimlerinin toplanması veya çarpılması ile birer seri elde edilir. Detayları lisans derslerinden iyi bilinen bu serilerden bu tezde sadece sonsuz toplam şeklinde olan seriler kullanılmıştır.

Bilindiği gibi dizi uzayı inşa etmenin bir çok farklı tekniği bulunmaktadır. Bu tekniklerden biri sonsuz bir matrisin etki alanını kullanmaktır. Bu fikir son zamanlarda birçok matemetikçi tarafından kullanılmıştır. Detayları tezin ilerleyen kısımlarında verilmiş olan matrislerden bazıları; fark matrisleri, genelleştirilmiş fark matrisi veya başka bir ifade ile terimleri sıfırda farklı iki sabit dizi ile teşkil edilmiş matris, yine terimleri sıfırdan farklı üç sabit dizi ile teşkil edilmiş üçlü band matrisi, terimleri sıfırdan farklı ve yakınsak iki farklı dizi kullanılarak oluşturulmuş ikili dizisel band matrisi, Fibonacci dizileri ile oluşturulmuş band matrisleri ve burada sayamayacağımız farklı matrisler bunlardan bir kısmıdır. Birçok araştırmacı bu ve benzeri matrislerin farklı dizi uzaylarındaki etki alanını kullanarak inşa ettikleri yeni dizi uzaylarının çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. Son zamanlarda matris etki alanını kullanılarak inşa edilmiş mutlak olmayan tipten yeni dizi uzaylarının cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerinin açığa çıkarılması incelemeye değer görülmüştür. Bu araştırma çalışmalarının bazıları [1–14] nolu referanslarda verilmiştir.

Bu tezin temel kaynağı Candan'ın [1] nolu referansındaki makalesi olup toplamda altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm cebir, fonksiyonel analiz ve çeşitli toplanabilme derslerinden iyi bilinen ve tezin ilerleyen kısımlarda kullanılacak olan temel tanım, teorem ve sonuç gibi kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde fark dizi uzayları üzerindeki çalışmalar özetlenmiştir. 4. bölümde $\ell_\infty,\ c,\ c_0, \ell_p$ dizi uzaylarında dizisel çift band matrisinin etki alanını tanımlanarak ve β- ve γ- duallerini belirlenmiştir. Schauder bazına değinilmiştir. 5. bölümde bir üçgensel matrisin etki alanından herhangi bir dizi uzayına matris dönüşümlerini karekterize eden bir teorem ifade ve ispat edilmiş ve bu teoremin bir uygulaması yapılmıştır. 6. ve son bölümde tez çalışmasında elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde ihtiyaç duyulan fonksiyonel analiz, cebir branşlarının temel tanım, teorem ve sonuçlarına yer verilmiştir. Matris etki alanı tanımını kullanarak yeni bir dizi uzayı inşa etme yönteminde kullanılacak bazı sonsuz matrislerin tanımına yer verilmiştir.

Çalışma boyunca aksi söylenmedikçe $p,q > 1$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve dizilerin negatif terimlerini sıfıra eşit olarak kabul edilecektir. Gösterimde basitlik olması için toplam sembollerindeki 0 dan ∞ a ifadesi yazılmayacaktır.

Tanım 2.0.1. *X, boştan farklı bir cümle ve F kompleks ya da reel sayıların bir cismi olmak üzere*

$$+ : X\mathrm{x}X \to X$$

$$. : FxX \to X$$

işlemleri her $x,y,z \in X$ ve $\alpha,\beta \in F$ için

i) $x+y=y+x$,

ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

iii) $x+\theta=x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *mevcut,*

iv) $x+(-x)=\theta$ *olacak şekilde bir* $-x \in X$ *mevcut,*

v) $1x=x$,

vi) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

vii) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

viii) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

şartlarını sağlarsa, X e F skaler cismi üzerinde bir vektör $(lineer)$ uzay denir [15].

Tanım 2.0.2. *X boştan farklı bir cümle ve $d : X \mathrm{x}\, X \to R$ bir fonksiyon olmak üzere her $x,y,z \in X$ için,*

i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

ii) $d(x,\ y)=d(y,x)$,

iii) $d(x,y) \le d(x,\ z)+d(z,y)$

koşullarını sağlayan d fonkiyonuna X de bir metrik ve $(X,\ d)$ *ifadesine de bir metrik uzay denir [15].*

Tanım 2.0.3. *X bir uzay* $(lineer)$ *ve* $\|.\|$*, X den* $\mathbb{R}$ *ye tanımlı olmak üzere eğer her* α *skaleri ve* $x,y \in X$ *vektörü için;*

$i)$ $||0\| = 0,$

$ii)$ $||\alpha x|| = |\alpha|\|x||,$

$iii)$ $||x+y\| \leq \|x|| + \|y\|$

koşullarını sağlanıyorsa, $||.\|$ *fonksiyonuna X de bir yarı-norm ve* $(X,||.\|)$ *ifadesine de bir yarı-normlu uzay denir. Eğer* X, (ii) *ve* (iii) *koşullarıyla birlikte*

$$||x\| = 0 \ \ ise \ \ x = 0$$

koşulunu da sağlarsa $||.\|$ *fonksiyonuna bir norm ve* $(X,||.\|)$ *ifadesine de normlu uzay denir [15].*

Tanım 2.0.4. *Lineer uzayları lineer uzaylara dönüştüren dönüşüme operatör denir. Aynı K cismi üzerinde tanımlı olan X ve Y iki lineer uzay olmak üzere ve her* $x,y \in X$ *ve* $\alpha \in K$ *için,* $T : X \to Y$ *operatörü;*

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \ \ ve \ \ T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

koşullarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [15].

Tanım 2.0.5. λ *bir uzay* $(lineer)$ *ve* τ_λ *ise* λ *uzayında adi toplam ve skalerla çarpım işlemlerini sürekli yapan topoloji olsun. O halde* (λ,τ_λ) *ifadesi, topolojik vektör uzayı* (TVU) *veya lineer topolojik uzay,* τ_λ *topolojisi de* λ *üzerindeki lineer topoloji olarak ifade edilir [16].*

Tanım 2.0.6. *X ve Y iki vektör uzay olsun. Eğer birebir örten bir* $T : X \to Y$ *dönüşümü lineer ise T dönüşümü X vektör uzayından Y vektör uzayına bir lineer izomorfizm adını alır. Buradan X ve Y uzayları (lineer) izomorfik uzaylar olarak adlandırılır [15].*

Teorem 2.0.1. $(X,\ d)$ *bir metrik uzay* $N \subset X$ *ve* $\overline{N}$, *N nin kapanışını göstermek üzere,*

$$X \in \bar{N} \Longleftrightarrow x_n \to x \text{ olacak şekilde } (x_n) \in N$$

olmasıdır [15].

Tanım 2.0.7. (X,d) *bir metrik uzay olmak üzere eğer X de tanımlı olan skalerle çarpma ve toplama işlemleri d nin ürettiği topolojiye göre sürekli ise X e lineer metrik uzay denir [17].*

Tanım 2.0.8. *ω tüm kompleks dizilerin uzayı ve $\lambda \subset \omega$ için λ, ω uzayı üzerinde tanımlı vektör uzay işlemleriyle bir vektör uzayı ise λ uzayı bir dizi uzayı olarak ifade edilir.*

Tanım 2.0.9. *c yakınsak, ℓ_∞ sınırlı, c_0 sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı ve ℓ_p de p-inci dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzaylarını ifade etmek üzere;*

$$
\begin{aligned}
m = \ell_\infty &= \{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \varepsilon \mathrm{N}} |x_k| < \infty\}, \\
c &= \{x = (x_k) \in \omega : \exists \ell \in \mathbb{C} \ni \lim_{k \to \infty} x_k = l\}, \\
c_0 &= \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} x_k = 0\}, \\
\ell_p &= \{x = (x_k) \in \omega : \sum_k | x_k |^p < \infty\}, \quad (1 \le p < \infty)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır [16]. Diğer taraftan sınırlı seri teşkil eden dizi uzayı bs ile, yakınsak seri teşkil eden dizi uzayı cs ile gösterilir. Yani

$$
bs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_k x_k \right| < \infty \right\},
$$
$$
cs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \exists \ell \in \mathbb{C} \ni \lim_{k \to \infty} \left(\sum_k x_k \right) = \ell < \infty \right\}
$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $(x_k - x_{k+1})$ in ℓ_1 de olduğu tüm (x_k) dizilerinden oluşan sınırlı salınımlı dizilerin uzayı bv de

$$
bv = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k | x_k - x_{k+1} | < \infty \right\}
$$

şeklinde ifade edilir. bv_0 uzayı ise bv ve c_0 uzaylarının ara kesitidir. Yani $bv_0 = bv \cap c_0$ dır.

Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matris için;

$$
(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k, \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in D_{00}(A)) \tag{2.1}
$$

olarak yazılır. Burada $D_{00}(A)$, bir sonlu toplam olarak toplamı mevcut olan $x = (x_k) \in \omega$ lardan ibaret olan ω nın alt uzayını göstermektedir. Daha genel olarak eğer μ normlu uzay ise (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki seriler μ normuna göre yakınsak olacak şekildeki $x = (x_k) \in \omega$ dizilerinin cümlesi için $D_\mu(A)$ yazılır. λ dizi uzayını, μ dizi uzayına taşıyan bütün matrislerin sınıfını $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir. Yani

$$
(\lambda : \mu) = \{A : \lambda \subseteq D_\mu(A)\}
$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.0.10. *λ ve μ iki dizi uzayı olmak üzere;*

$$S(\lambda,\mu) := \{z = (z_k) \in \omega : xz = (x_k z_k) \in \mu,\ her\ \ x = (x_k) \in \lambda\}$$

olarak verilen $S(\lambda,\mu)$ cümlesine λ ve μ uzaylarının çarpım uzayı denir.

Tanım 2.0.11. *λ bir dizi uzayı olmak üzere;*

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha} &= \{a = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için\ ax \in \ell_1\}\\ &= \{\alpha = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için \sum_k \mid \alpha, x_k \mid <\infty\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\beta} &= \{a = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için\ ax \in cs\}\\ &= \{\alpha = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için \sum_k \alpha, x_k \ yakınsak\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\gamma} &= \{a = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için\ ax \in bs\}\\ &= \{a = (a_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \ için\ \sup_n \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big| < \infty\},\end{aligned}$$

cümlelerine sırasıyla λ uzayının α-, β-, γ- duali denir [18].

Burada çarpım uzayının tanımı kullanılırsa α-, β-, γ- dualleri şu şekilde gösterilebilir.

$$\lambda^{\alpha} := S\,(\lambda,\ \ell_1),\quad \lambda^{\beta} := S(\lambda,\ cs)\quad \text{ve}\quad \lambda^{\gamma} := S(\lambda,\ bs).$$

Burada $\mu \subseteq \nu \subseteq \lambda$ olan bir v dizi uzayı için

$$S(\lambda,\mu) \subset S(v,\mu)\ \text{ ve } S(\lambda,\ \mu) \subset S(\lambda, v)$$

kapsama ilişkilerinin sağlandığını görmek kolaydır.

Tanım 2.0.12. *λ bir dizi uzayı olsun. λ uzayı için,*

$$\tilde{\lambda} = \{(u_k) \in \omega : \exists x = (x_k) \in \lambda,\ \forall k \in \mathbb{N}\ için\ |u_k| \leq |x_k|\} \subset \lambda$$

kapsama işlemi geçerli ise λ uzayına solid uzay denir [16] .

Teorem 2.0.2. *λ bir dizi uzayı olmak üzere*

$$\lambda \text{ uzayı solid uzaydır} \Longleftrightarrow \ell_{\infty}\lambda \subset \lambda$$

dir [16].

Teorem 2.0.3. *λ, ω uzayının bir altuzayı olmak üzere λ solid uzay ise $\lambda^a = \lambda^\beta = \lambda^\gamma$ dir [16].*

Örnek 2.0.1. *a)φ, ω, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, c_0 ve ℓ_∞ dizi uzayları solid dir.*

b) bv ve c uzayları solid değillerdir.

Tanım 2.0.13. *$k > n$ olmak üzere $a_{nk} = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için a_{nn} sıfırdan farklı ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir.*

Lemma 2.0.1. *Bir x dizisi ve A, B üçgen matrisleri için;*

$$A(Bx) = (AB)x$$

olduğu açıktır. Buna ilave olarak U üçgensel matris ise $U^{-1} = V$ terside üçgen matris olup tektir. Buradan her $x \in \omega$ için

$$x = U(Vx) = V(Ux)$$

sağlanır [16].

Tanım 2.0.14. *Sınırlı diziler arasındaki lineer dönüşüme limitleme metodu denir [19].*

Şimdi ileride ihtiyaç duyulacak bazı üçgensel limitleme matrislerinin tanımını verelim. Pozitif reel sayılarının bir dizisi $t = (t_k)$ için

$$T_n := \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \mathrm{t}_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu taktirde birinci sıradan Cesàro ortalaması, Riesz ortalaması ve r-inci sıradan Euler ortalaması sırasıyla $C = (c_{nk})$, $R^t = (r^t_{nk})$ ve $E^r = (e^r_{nk})$ matrisleri ile aşağıdaki gibi tanımlanır. Burada her $k, n \in \mathbb{R}$ için;

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad (0 \leq k \leq n), \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

$$r^t_{nk} := \begin{cases} \frac{t_k}{T_n} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

ve

$$e^{\mathrm{t}}_{nk} := \begin{cases} \binom{n}{k}(1-r)^{n-k} r^k & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

dir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için u_k sıfırdan farklı olan tüm $u = (u_k)$ dizilerinin cümlesi U ile gösterilir. $u \in U$ için $\frac{1}{u} = (\frac{1}{u_k})$ olarak yazılır.

$u,v,z \in U$ ve $S=(s_{nk})$ toplam matrisi, $\Delta=(\delta_{nk})$ fark matrisi, $G(u,v)=(g_{nk})$ genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama veya faktöriyellenebilir matrisi, $\Delta^{(m)}=\left(\Delta_{nk}^{(m)}\right)$, $A_u^r=\{a_{\text{nk}}(r)\}$ ve $A^z=(a_{nk}^z)$ her $k,m,n \in \mathbb{N}$ için;

$$s_{nk}:=\begin{cases} 1 & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k>n) \end{cases}$$

$$c_{nk}:=\begin{cases} (-1)^{n-k} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (0 \leq k < n-1 \text{ veya } k>n) \end{cases}$$

$$g_{\text{n}k}:=\begin{cases} u_n v_k & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k>n) \end{cases}$$

$$a_{nk}(r):=\begin{cases} \frac{1+r^k}{n+1}u_k & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k>n) \end{cases}$$

$$a_{nk}^z:=\begin{cases} (-1)^{n-k}z_k & , \quad (maks\ \{0,n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (0 \leq k < n-1 \text{ veya } k>n) \end{cases}$$

$$\Delta_{nk}^{(m)}:=\begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{m}{n-k} & , \quad (maks\ \{0,n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (0 \leq k < n-1 \text{ veya } k>n) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada u_n sadece n ye ve v_{k} sadece k ya bağlıdır.

Tanım 2.0.15. *A bir sonsuz matris ve bir λ dizi uzayı için,*

$$\lambda_A := \{x=(x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\} \tag{2.2}$$

olarak ifade edilen cümleye A matrisinin $\lambda-$etki alanı denir. Bu durumda λ_A ifadesi de bir dizi uzayı olarak adlandırılır [16].

Tanım 2.0.16. *Bir λ dizi uzayı için λ_A uzayının sürekli duali*

$$\lambda_A^*=\{f : f=g \circ A,\ g \in \lambda^*\}$$

olarak tanımlanır.

Bir λ dizi uzayından bir A limitleme matrisi ile üretilen λ_A yeni dizi uzayı çoğu durumda orijinal A uzayının genişlemesi ya da büzülmesi olmasına rağmen bazı durumlarda bu uzayların çakıştığı gözlemlenebilir. Gerçekten $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ için $\lambda_s \subset \lambda$ kesin kapsamasının sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Bunun gibi $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_{\text{p}}\}$ için $\lambda \subset \lambda_{\Delta^1}$ kesin kapsaması var olduğu sonucuna da ulaşılabilir. Buna rağmen eğer

$$\lambda := c_0 \oplus span\{z\} \quad z=((-1)^k),$$

olmak üzere $x \in \lambda$ için gerek ve yeter şart bazı $s \in c_0$ ve bazı $\alpha \in \mathbb{C}$ *için*

$$x := s+\alpha z$$

olmasıdır ve her $n \in \mathbb{N}$ için A matrisi de satırlarının herbiri $A_n := (-1)^n e^{(n)}$ olarak tanımlanırsa $Ae = z \in \lambda$ fakat $Az = e \notin \lambda$ olur bu da

$$z \in \lambda \backslash \lambda_A \quad ve \quad e \in \lambda_A \backslash \lambda$$

sonucunu verir. Burada $e = (1,1,1,....)$ ve $e^{(n)}$ de her bir $n \in \mathbb{N}$ için n-inci terimi 1 diğer terimleri sıfır olan dizidir.

Yani λ_A ve λ dizi uzayları daima birbirlerini kapsamak zorunda değildirler [20].

Matris etki alanı aracılığıyla bir özel limitleme metodunun yeni bir dizi uzayı kurma yaklaşımı son zamanlarda Wang [21] , Ng ve Lee [22], Malkowsky [23], Altay ve Başar [24, 25], Malkowsky ve Savaş [26], Başarır [27], Aydın ve Başar [28], Şengönül ve Başar [29], Malkowsky ve diğerleri [30] tarafından kullanıldı.

Tablo 1 de Δ, Δ^2 ve Δ^m sırasıyla $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ ve $\Delta^{\langle m \rangle}$ matrislerinin transpozudur ve $c_0(u,p)$ ve $c(u,p)$ sırasıyla $u \in U$ için $c_0(p)$ ve $c(p)$ uzaylarında olan $x = (x_k)$ dizilerinden ibaret olan uzaylardır ki bu uzaylar Başarır [27] tarafından incelendi. Son zamanlarda belirli topolojik özellikleri üreten yeni teknikler, örneğin $AK-$, $KB-$, $AD-$ özellikleri, solidlik ve monotonluk ve bir dizi uzayında bir üçgensel matrisin $\beta-$ ve γ- duallerini belirleme de Altay ve Başar [25] tarafından verildi.

Tanım 2.0.17. *$r,s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$b_{nk} := \begin{cases} r & , \quad (k = n) \\ s & , \quad (k = n-1) \\ 0 & , \quad (0 \le k \le n-1 \text{ veya } k > n) \end{cases}$$

olarak ifade edilen $B(r,s) = \{b_{nk}(r,\ s)\}$ matrisine genelleştirilimiş fark matrisi denir.

Burada şu da kaydedilmelidir ki $B(r,s)$ matrisinde $r = 1$ ve $s = -1$ alınırsa $\Delta^{(1)}$ fark matrisi elde edilir. Bu nedenle $B(r,\ s)$ matrisinin matris etki alanı ile ilgili elde edilen sonuçlar $\Delta^{(1)}$ in matris etki alanı ile ilgili elde edilen sonuçlardan daha kapsamlı ve daha geneldir ve de bu sonuçları içerir.

Tanım 2.0.18. *$\tilde{r} = (r_n)_{n=0}^{\infty}$ ve $\tilde{s} = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların yakınsak dizileri ve her $k,n \in \mathbb{N}$ için*

$$b_{nk} := \begin{cases} r_n & , \quad k = n \\ s_n & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad (0 \le k \le n-1 \text{ veya } k > n) \end{cases}$$

olarak tanımlanan $B(\tilde{r},\tilde{s}) = \{b_{nk}(\tilde{r},\ \tilde{s})\}$ matrisine çift dizisel genelleştirilmiş fark matrisi denir [31].

Sonsuz A matrisinin λ dizi uzayında λ_A etki alanı ile ilişkili olan bir kısmı yukarıda verilmiş olması ile birlikte Feyzi Başar ın [20] "Summability theory and its applications" adlı kitabının 50-inci sayfasındaki tablo ve referanslar esas alınarak oluşturulan aşağıdaki tabloyu incelemek son derece faydalı olacaktır. Tezde aktif olarak kullanılmayan matrisler ve etki alanlarıyla ilgili çalışmalara [20] nolu kitaptan ve içindeki kaynaklardan ulaşılabilir.

Tablo – 1 Bazı üçgen matrislerin belirli dizi uzayları üzerindeki etki alanları

λ	A	λ_A
c	N_q	c_{N_q}
$\ell_p\,(1\le p\le\infty)$	C_1	X_p, X_∞
$X_p(1\le \mathrm{p}\le\infty)$	Δ^m	$C_p(\Delta^m),\ C_\infty(\Delta^m)$
c_0, c, ℓ_∞	R^q	$(\overline{N},q)_0,\ (\overline{N},q),\ (\overline{N},q)_\infty$
c_0, c, ℓ_∞	Δ	$c_0(\Delta),\ c(\Delta),\ \ell_\infty\left(\Delta^2\right)$
c_0, c, ℓ_∞	Δ^2	$c_0(\Delta^2),\ c(\Delta^2),\ \ell_\infty(\Delta^2)$
c_0, c, ℓ_∞	$u\Delta^2$	$c_0(u;\Delta^2),\ c(u;\Delta^2),\ \ell_\infty(u;\Delta^2)$
c_0, c, ℓ_∞	Δ^2	$c_0(\Delta^2),\ \mathrm{c}(\Delta^2),\ \ell_\infty(\Delta^2)$
c_0, c, ℓ_p	$G(u,\ v)$	$Z(u,v,c_0),\ Z(u,v;c),\ Z(\mathrm{u},v;\ell_p)$
c_0, c	C	$\tilde{c}_0, \tilde{c},$
c_0, c	E^r	$e^r_o,\ e^r_c$
c_0, c	$G(u,v)$	$(c_0)_{G(u,v)}, c_{G(u,v)}$
c_0, c	A^r_1	a^r_0, a^r_c
$\ell_p, (1\le p\le\infty)$	A^r_1	a^r_p, a^r_∞
$\ell_p, (1\le p\le\infty)$	E^r	$e^r_p,\ e^r_\infty$
a^r_0, a^r_c	Δ^1	$a^r_0(\Delta),\ a^r_c(\Delta)$
$\ell_p, (1\le p\le\infty)$	$G(u,v)$	ℓ^p_A
$\ell_p, (1\le p\le\infty)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p
$\ell_p, (0<p<1)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p

$Tablo-1 \quad devamı$

λ	A	λ_A
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	$\Delta^{(m)}$	$\ell_p(\Delta^m)$
$c_{0,}\ c,\ \ell_\infty$	$\Delta^{(m)}$	$c_0\left(\Delta^{(m)}\right),\ e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right),\ \ell_\infty\left(\Delta^{(m)}\right)$
e_r^0, e_c^0	$\Delta^{(m)}$	$e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right),\ e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right),\ \ell_p\left(\Delta^{(m)}\right)$
$\omega_0^p,\ \omega^p,\ \omega_\infty^p$	Δ	$\omega_0^p(\Delta),\ \omega^p(\Delta),\ \omega_\infty^p(\Delta)$
$\omega_0^p,\ \omega^p,\ \omega_\infty^p$	T	$\omega_0^p(T),\ \omega^p(T),\ \omega_\infty^p(T)$
$\ell_\infty(p)$	S	$bs(p)$
$\ell(p)$	A_u^r	$a^r(u,p)$
$\ell(p)$	$B(r,s)$	$\ell(p)$
$\ell(p)$	S	$\ell(p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	Δ	$\Delta c_0(p),\ \Delta c(p),\ \Delta\ell_\infty(p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	$u\Delta$	$c_0(u,\Delta,p),\ c(u,\Delta,p),\ \ell_\infty(u,\Delta,p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	$u\Delta^2$	$c_0\left(u,\Delta^2,p\right),\ c\left(u,\Delta^2,p\right),\ \ell_\infty\left(u,\Delta^2,p\right)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	$G(u,v)$	$c_0(u,v,p),\ c(u,v,p),\ \ell_\infty(u,v,p)$
$\ell(p)$	$G(u,v)$	$\ell(u,v,p)$
$\ell(p), \ell_\infty(p)$	A^z	$bv(z,p),\ bv_\infty(z,p)$
$c_0(u,p),\ c(u,p)$	A_1^r	$a_0^r(u,p),\ a_c^r(u,p)$
$\ell(p)$	R^t	$r^t(p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	R^t	$r_0^t(p),\ r_c^t(p),\ r_\infty^t(p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	Δ^m	$\Delta^m c_0(p),\ \Delta^m c(p),\ \Delta^m \ell_\infty(p)$
$c_0(p),\ c(p),\ \ell_\infty(p)$	$u\Delta^{(m)}$	$\Delta_u^{(m)} c_o(p),\ \Delta_u^{(m)} c(p),\ \Delta_u^{(m)} \ell_\infty(p)$

3. FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde fark dizi uzayları ile ilgili litaretürde yapılmış olan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

λ; ℓ_∞, c veya c_0 klasik dizi uzaylarından herhangi birini göstersin. Kızmaz [32] tarafından tanımlanan fark dizi uzayı olarak adlandırılan $\lambda(\Delta)$ dizi uzayı $\Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in \lambda$ olan $x = (x_k)$ dizilerinden ibarettir.

Kızmaz [32], $\lambda(\Delta)$ dizi uzayının

$$||x||_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty; \; x = (x_k) \in \lambda(\Delta)$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu ve $\lambda \subset \lambda(\Delta)$ kapsamasının kesin olduğunu ispatladı. O aynı zamanda fark uzaylarının α-, β- ve γ- duallerini belirledi ve $\lambda, \mu \in \{\ell_\infty, c\}$ olmak üzere sonsuz matrislerin $(\lambda(\Delta) : \mu)$ ve $(\mu : \lambda(\Delta))$ sınıflarını karakterize etti. Daha sonra Kızmaz [32], Sarıgül [33] $\lambda(\Delta)$ fark uzaylarını aşağıdaki gibi $\lambda(\Delta_r)$ uzaylarına genelleştirdi.

$$\lambda(\Delta_r) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta_r x = \{k^r(x_k - x_{k+1})\} \in \lambda, \; r < 1 \text{ için}\}$$

ve $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere $\lambda(\Delta_r)$ uzaylarının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesapladı. Eğer $0 < r < 1$ ise $\lambda(\Delta_r) \subset \lambda(\Delta)$ ve $r < 0$ ise $\lambda(\Delta) \subset \lambda(\Delta_r)$ olduğunu görmek kolaydır.

Aynı yıl Ahmed ve Mursaleen [34] bu uzayları $\lambda(p, \Delta)$ uzaylarına genişletti ve ilgili problemleri inceledi. Malkowsky [35] $\ell_\infty(p, \Delta)$ ve $c_0(p, \Delta)$ uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini belirledi ve matris dönüşümlerinin karekterizasyonunun yeni ispatlarını verdi. 1993 de Chodhary ve Mishra [36] $r \geq 1$ için $c_0(\Delta_r)$ dizi uzayının bazı özelliklerini inceledi. Aynı yıl Mishra [37] $s\ell_\infty(\Delta)$ dan bir BK-uzayına kompakt operatör olacak şekilde bir matris dönüşümü için yeterli şartları ve matris dönüşümleri açısından $sc_o(\Delta)$ ya alt uzay izomorfisi içeren $BK-$ uzaylarının bir karekterizasyonunu verdi. O, $s\ell_\infty(\Delta)$ dan, bir BK- uzayına (ki bu uzay $s\ell_\infty(\Delta)$ a herhangi bir alt uzay izomorfisi içermez) herhangi bir matris dönüşümünün kompakt olduğunu gösterdi. Burada $x_1 = 0$ için

$$s\lambda(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (\Delta x_k) \in \lambda, \; \lambda = \ell_\infty \; veya \; c_0 \}$$

dır.

1996 da Mursaleen [38]

$$l_\infty(p, \Delta_r) = \{x = (x_k) \in \omega : (\Delta_r x_k) \in l_\infty(p)\}, \qquad (r > 0)$$

dizi uzayını tanımladı ve inceledi.

Granaseelan ve Srivastava [39], kompleks olmayan sayıların bir dizisi $u=(u_k)$ için $\lambda(u,\ \Delta)$ uzaylarını tanımladı ve inceledi. Öyle ki;

i) Her bir $k\in\mathbb{N}_1$ için $\frac{|u_k|}{|u_{k+1}|}=1+O(1/k)$

ii) $k^{-1}|u_k|\sum_{i=0}^{k}|u_i^{-1}|=O(1)$

iii) $(k|u_i^{-1}|)$ pozitif sayıların sonsuza monoton artan bir dizisi.

Aynı yıl Malkowsky [40], u üzerinde herhangi bir sınırlama olmaksızın keyfi sabit $u=(u_k)$ dizisi için $\lambda(u,\Delta)$ uzaylarını tanımladı ve $\lambda(u,\Delta)$ dizi uzaylarının

$$||x||=\sup_{k\varepsilon\mathbb{N}}|u_{k-1}(x_{k-1}-x_k)|,\ u_0=x_0=1$$

ile tanımlanan norm ile BK-uzayları olduğunu ispatladı.

Daha sonra Gaur ve Mursaleen [41]; $S_r(\Delta)$ uzayını $S_r(p,\Delta)$ uzayına genişletti. Burada

$$S_r(p,\ \Delta)=\{x=(x_k)\in\omega:(k^r|\Delta x_k|)\ \in\ c_0(p)\},\qquad r\geq 1$$

olup, onlar $(S_r,(p,\ \Delta)\ :\ \ell_\infty)$ ve $(S_r(p,\Delta)\ :\ell_1)$ matris sınıflarını karakterize ettiler.

Malkowsky [42] ve bağımsız olarak Asma ve Çolak [43] $\lambda(u,\Delta)$ uzayını $\lambda(p,u,\Delta)$ uzayına genişletti ve $\lambda=\ell_\infty,\ c$ veya c_0 için bu Köthe-Toeplitz duallerini verdiler. Sonra Malkowsky ve Mursaleen [44], $\lambda=\ell_\infty(p),\ c(\ p),\ c_0(p)$ ve $\mu=\ell_\infty(q)$, $c(q)$, $c_0(q)$ için $(\Delta\lambda:\mu)$ ve $(\Delta\lambda:\ \Delta\mu)$ matris sınıflarını karakterize ettiler.

Son zamanlarda $(x_k-x_{k-1})\in\ell_p$ olan $x=(x_k)$ dizilerini içeren bv_p fark uzayları $0<p<1$ durumunda Altay ve Başar [45], $1\leq p\leq\infty$ durumunda Başar ve Altay [46] ve Çolak ve diğerleri [47] tarafından incelendi.

4. B($\tilde{r}$, $\tilde{s}$) MATRİSİNİN ETKİ ALANI İLE TÜRETİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde; $\lambda \in \{\ell_\infty,\ c,\ c_0, \ell_p\}$ ve $B(\tilde{r},\ \tilde{s})$ dizisel çift band matrisi olmak üzere Candan ın [1] nolu makalesinde tanımladığı λ dizi uzayında $B(\tilde{r},\ \tilde{s})$ matrisinin etki alanında olan $\lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ uzayları verildikten sonra öncelikle λ ile $\lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ uzaylarının lineer olarak izomorfik oldukları ifade ve ispat edildi. Sonrasında $\lambda = \lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ eşitliğinin ve $\lambda \subset \lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ kapsamasının hangi şartlar altında sağlandığının sunulmasına ilaveten yeni uzayların $\gamma-$ ve $\beta-$ dualleri ifade edildi. Literatürde doğruluğu ispatlanmış mevcut teoremler yardımı ile $(c_0)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$, $(\ell_1)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ ve $(l_p)_{B(\tilde{r},\tilde{s})}$ uzaylarının Schauder bazları verilip son olarakta $\tilde{c}_0$, $\tilde{\ell}_1$ ve $p > 1$ iken $\tilde{\ell}_p$ uzaylarının bazı topolojik özelliklerini incelenmiştir.

$\tilde{l}_\infty$, $\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$; $B(\tilde{r},\ \tilde{s})$ dönüşümleri sırasıyla ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p uzaylarında olan bütün dizilerin cümlesini göstersin. Yani;

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}_\infty &= \{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k| < \infty\}, \\
\tilde{c} &= \{x = (x_k) \in \omega :\ \exists \ell \in \mathbb{C}\ \ni\ \lim_{k\to\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k - l| = 0\}, \\
\tilde{c}_0 &= \{x = (x_k) \in \omega :\ \lim_{k\to\infty} |\ s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k| = 0\}, \\
\tilde{\ell}_p &= \{x = (x_k) \in \omega\ :\ \sum_k |s_{k-1}x_{k-1},\ + r_k x_k|^p < \infty\},
\end{aligned}$$

dır. Bu cümlelerin birer vektör uzayı olduğunu göstermek son derece kolaydır. Burada matris etki alanının tanımı kullanılırsa

$$\lambda_{B\langle\tilde{r},\ \tilde{s})} = \{x = (x_k) \in \omega : Bx \in \lambda\}$$

yazılabileceği son derece açıktır. Aynı zamanda $\tilde{\ell}_p, \tilde{c}, \tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$ uzayları

$$\tilde{l}_p := \{\ell_p\}_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}, \quad \tilde{c} := \{c\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}, \quad \tilde{c}_0 := \{c_0\}_{B\langle\tilde{r},\tilde{s})}, \quad \tilde{l}_\infty := \{l_\infty\}_{B\langle\tilde{r},\tilde{s})}$$

olarak tekrardan ifade edilebilir.

Bir $x = (x_k)$ dizisinin $B(\tilde{r},\tilde{s})$ dönüşümü $y = (y_k)$ ise

$$\begin{aligned}
B(\tilde{r},\tilde{s})x &= \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= (r_0x_0, s_0x_0 + r_1x_1, s_1x_1 + r_2x_2\ , ...) \\
&= (s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k)_{k=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

olup (y_k) dizisinin genel terimi

$$y_k := s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Candan ın [4] nolu makalesindeki Teorem 3.1 e benzer olarak aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 4.0.1. *$\lambda \in \{\ell_\infty,\ c,\ c_0, \ell_p\}$ olmak üzere λ ve $\lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})}$ uzayları lineer olarak izomorfiktir. Dolayısıyla $x = (x_k) \in \lambda_{B(\tilde{r}.\tilde{s})} \Longleftrightarrow y = (y_k) \in \lambda$ olmasıdır. Burada $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri (4.1) ilişkisi ile ilişkilendirilmiştir.*

İspat: $\tilde{c} \cong c$ olduğunu gösterelim. Diğerleri benzer olarak gösterilebilir. Bunun için $\tilde{c}$ ve c uzayları arasında bir lineer bijeksiyon olduğunu göstermeliyiz. $\tilde{c}$ dan c ye

$$x \longrightarrow y = T(x) = B(\tilde{r}, \tilde{s})\,x$$

olarak tanımlanan T dönüşümünü göz önüne alındığında T nin lineer olduğu açıktır. Gerçekten her $x, y \in \tilde{c}$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + y) &= B(\tilde{r}, \tilde{s})(\alpha x + y) \\
&= B(\tilde{r}, \tilde{s})(\alpha x) + B(\tilde{r}, \tilde{s})\,y \\
&= s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k + B(\tilde{r}, \tilde{s})\,y \\
&= \alpha(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k) + B(\tilde{r}, \tilde{s})\,y \\
&= \alpha B(\tilde{r}, \tilde{s})\,x + B(\tilde{r}, \tilde{s})\,y \\
&= \alpha T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

dır. Dahası $T(x) = B(\tilde{r}, \tilde{s})\,x = 0$ ise $x = 0$ olduğu da açıktır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
T(x) &= B(\tilde{r}, \tilde{s})\,x \\
&= s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

ise; her $k \in \mathbb{N}$ için $s_k \neq 0$ ve $r_k \neq 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur. Yani $T : 1 - 1$ dir.

Herhangi bir $y=(y_k)\in c$ alındığında ve $B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})$ invers matrisi kullanıldığında her $k\in\mathbb{N}$ için $B(\tilde{r},\tilde{s})x=y$ ise $x=B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})y$ olacağından $x_k=\{B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})y\}_k$ dan

$$\begin{aligned}
x_k =& \frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)y_0+\frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)y_1\\
&+\frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)y_2\\
&+\frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_3}{r_3}\right)y_3\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&+\frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_{k-1}\\
&+\frac{1}{r_k}y_k\\
=&\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{r_k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right).y_{k-j}
\end{aligned}\tag{4.2}$$

bu takdirde

$$\begin{aligned}
s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k =& s_{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+r_k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{r_k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}\\
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}+\prod_{i=h-k}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{h-k}\\
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}\right]+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1}+\prod_{i=k}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_k\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-2}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-2}+\prod_{i=k-1}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1}\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-3}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-3}+\prod_{i=k-2}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-2}\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-4}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-4}+\prod_{i=k-3}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-3}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=0}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0+\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_1+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} y_{k-1} + y_k \\
&\quad + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_{k-2} + \left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right) y_{k-1} \\
&\quad + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right) \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_{k-3} + \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) \left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right) y_{k-2} \\
&\quad + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_{k-4}}{r_{k-4}}\right) \left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right) \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_{k-4} + \left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right) \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) \left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right) y_{k-3} \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \left(\frac{-s_1}{r_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_0 + \left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \left(\frac{-s_1}{r_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right) y_1 \\
&\quad + \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-s_i}{r_i}\right) y_0 \\
&= y_k + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \left(\frac{-s_1}{r_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_0 + \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-s_i}{r_i}\right) y_0 \\
&= y_k + \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}} \left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \left(\frac{-s_1}{r_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right) y_0 + \left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \left(\frac{-s_1}{r_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right) y_0 \\
&= y_k + 0 y_0 \\
&= y_k
\end{aligned}
$$

ifadesine ulaşılır. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} (s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k) = \lim_{k\to\infty} y_k$$

elde edilir ki bu da $x = (x_k) \in \tilde{c}$ demektir. Buradan T örten bir dönüşümdür. Bu adımda ispatı tamamlanmıştır.

Lemma 4.0.2.

$$i)\ A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$$

$$ii)\ A = (a_{nk}) \in (\ell_p, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \mid a_{nk} \mid^q < \infty$$

$$iii)\ A = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{k,n\in\mathbb{N}} \mid a_{nk} \mid < \infty$$

$$iv)\ A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k, \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \lim_{n\to\infty} \sum_k \mid a_{nk} \mid = \sum_k \mid a_k \mid \end{cases}$$

$$v)\ A=(a_{nk})\in(c,c)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k,\ (k\in\mathbb{N})\\ \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_k\mid a_{nk}\mid<\infty\\ \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_k a_{nk}=\alpha\end{cases}$$

$$vi)\ A=(a_{nk})\in(c_0,c)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k\\ \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_k\mid a_{nk}\mid<\infty\end{cases}$$

$$vii)\ A=(a_{nk})\in(\ell_p,c)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k,\ \ (k\in\mathbb{N})\\ \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_k\mid a_{nk}\mid^q<\infty\end{cases}$$

$$viii)\ A=(a_{nk})\in(\ell_1,c)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k,\ \ (k\in\mathbb{N})\\ \\ \sup\limits_{k,n\in\mathbb{N}}\sum\limits_k\mid a_{nk}\mid<\infty\end{cases}$$

[48]

Teorem 4.0.1. $|a_n|\longrightarrow 0\Leftrightarrow a_n\longrightarrow 0$ *dır.*

Şimdi kapsama teoremini ifade ve *ispat edelim.*

Teorem 4.0.2. $\lambda\in\{\ell_p,\ell_\infty,c,c_0\}$ *ve* $B=B(\tilde{r},\tilde{s})$ *olmak üzere;*

i)Eğer $\frac{\sup s_n}{\inf r_n}<1$ *ise* $\lambda=\lambda_B$,

ii)Eğer $\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\geq 1$ *ise* $\lambda\subset\lambda_B$ *kapsaması kesindir [1].*

İspat: $\lambda\in\{\ell_\infty,\ c,\ c_0,\ \ell_1\}$ ve $B=B(\tilde{r},\tilde{s})$ olsun. Bu takdirde $(r_n),(s_n)\in c$ olduğundan aynı zamanda $(r_n),(s_n)\in\ell_\infty$ dur. Bununla birlikte

$$B(\tilde{r},\tilde{s})\ =\begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & s_3 & r_4 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_4 & r_5 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sup_n \sum_k |b_{nk}| &= \sup_n (|b_{n0}|+|b_{n1}|+|b_{n2}|+\cdots) \\
&= \sup_n (|b_{00}|+|b_{01}|+\cdots,|b_{10}|+|b_{11}|+\cdots,|b_{20}|+|b_{21}|+\cdots,\cdots) \\
&= \sup_n (r_0, s_0+r_1, s_1+r_2,\cdots,s_{n-1}+r_n,\cdots) \\
&= \sup_n \{(r_0,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots)+(0,s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},s_n,\cdots)\} \\
&\leq \sup_n (r_0,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots)+\sup_n (0,s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},s_n,\cdots) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$ son derece açıktır.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_k b_{nk} &= \lim_{n\to\infty} (b_{n0}+b_{n1}+b_{n2}+\cdots) \\
&= \lim_{n\to\infty} (b_{00}+b_{01}+\cdots,b_{10}+b_{11}+\cdots,b_{20}+b_{21}+\cdots,\cdots) \\
&= \lim_{n\to\infty} (r_0,s_0+r_1,s_1+r_2,\cdots,s_{n-1}r_n,s_n+r_{n+1},\cdots) \\
&= \lim_{n\to\infty} \{(r_0,r_1,\cdots,r_n,\cdots)+(0,s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},\cdots)\} \\
&= \lim_n r_n + \lim_n s_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k b_{nk} = \lim_{n\to\infty} (r_0,r_1,\cdots,r_n,\cdots)+\lim_{n\to\infty} (0,s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},\cdots)$$

olduğundan mevcuttur ve

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_n |b_{nk}| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} (|b_{0k}|+|b_{1k}|+|b_{2k}|+\cdots) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} (|b_{00}|+|b_{10}|+\cdots,|b_{01}|+|b_{11}|+\cdots,|b_{02}|+|b_{12}|+\cdots,\cdots) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} (r_0+s_0,r_1+s_1,r_2+s_2,\cdots,r_k+s_k,\cdots) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} ((r_0,r_1,\cdots,r_k,\cdots)+(s_0,s_1,\cdots,s_k,\cdots)) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

şartları sağlandığından $B = B(\tilde{r},\tilde{s})$ olmak üzere $B \in (\lambda : \lambda)$ dır. Burada $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_1\}$ dir. Herhangi bir $x \in \lambda$ için $Bx \in \lambda$ olduğundan $x \in \lambda_B$ dir. Bu da $\lambda \subset \lambda_B$ olduğunu gösterir.

Şimdi de $B^{-1} = B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})$ invers matrisi için aşağıdaki incelemeleri yapalım.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_2} & \left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} & \cdots & 0 & \cdots \\ \left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_3} & \left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_3} & \left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\frac{1}{r_3} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{1}{r_n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-s_k}{r_k}\right) & \frac{1}{r_n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{-s_k}{r_k}\right) & \frac{1}{r_n}\prod_{k=2}^{n-1}\left(\frac{-s_k}{r_k}\right) & \cdots & \frac{1}{r_n}\prod_{k=n-1}^{n-1}\left(\frac{-s_k}{r_k}\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k \left|b_{nk}^{-1}\right| &= \sup_n \left(\left|b_{n0}^{-1}\right| + \left|b_{n1}^{-1}\right| + \left|b_{n2}^{-1}\right| + \cdots\right) \\ &= \sup_n \left(|b_{00}| + |b_{01}| + \cdots, |b_{10}| + |b_{11}| + \cdots, |b_{20}| + |b_{21}| + \cdots, \cdots\right) \end{aligned}$$

şimdi parantez içindeki ifadelere baştan başlayarak teker teker sınır bulmaya çalışalım.

$$\frac{1}{r_0} \leq \frac{1}{\inf r_n} \qquad \text{0-ıncı satır}$$

$$\frac{1}{r_1}\left(\frac{s_0}{r_0}+1\right) \leq \frac{1}{\inf r_n}\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}+1\right) \qquad \text{1-inci satır}$$

$$\frac{1}{r_2}\left[\frac{s_0}{r_0}.\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_1}{r_1}+1\right] \leq \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^2+\frac{\sup s_n}{\inf r_n}+1\right) \qquad \text{2-inci satır}$$

$$\frac{1}{r_3}\left[\frac{s_0}{r_0}.\frac{s_1}{r_1}\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_1}{r_1}.\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_2}{r_2}+1\right] \leq \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^3+\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^2+\frac{\sup s_n}{\inf r_n}+1\right) \qquad \text{3-üncü satır}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{i=k}^{n-1}\left(\frac{s_i}{r_i}\right)+1\right] &\leq \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^n+\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)+1\right) \\ &= \frac{1}{\inf r_n}\frac{1-\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}} \end{aligned}$$

olur ve $\left|\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right| = \frac{\sup s_n}{\inf r_n} < 1$ olduğundan hem $\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ hem de $\inf r_n - \sup s_n > 0$ olduğundan aşağıda kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k \left|b_{nk}^{-1}\right| &\leq \frac{1}{\inf r_n}\sum_k \left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^k \\ &\leq \frac{1}{\inf r_n}\frac{1}{1-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}} \\ &\leq \frac{1}{\inf r_n}\frac{\inf r_n}{\inf r_n - \sup s_n} \\ &= \frac{1}{\inf r_n - \sup s_n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\sup_n \sum_k \left|b_{nk}^{-1}\right| \leq \frac{1}{\inf r_n} \sum_k \left|\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right|^k < \infty$$

olur. $B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})$ matrisinin her bir sütununun 0 a yakınsak olduğunu gösterelim. $B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})$ matrisinin her bir sütununu bir dizi olarak düşünürsek bu dizilerin genel terimleri sırasıyla

$$\underbrace{\frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}}_{0-ıncı\ sütun,} \quad \underbrace{\frac{1}{r_n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}}_{1-inci\ sütun,} \quad \underbrace{\frac{1}{r_n}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}}_{2-üncü\ sütun\ ,} \quad \cdots \quad \underbrace{\frac{1}{r_n}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}}_{k-ıncı\ sütun} \quad \cdots$$

olarak ifade edilebilir. Daha açık bir ifade ile

$$b_{n0}^{-1} = \frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}, \quad b_{n1}^{-1} = \frac{1}{r_n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}, \quad b_{n2}^{-1} = \frac{1}{r_n}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}, \cdots, b_{nk}^{-1} = \frac{1}{r_n}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}, \cdots$$

olarak yazılabilir. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} b_{nk}^{-1} = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_{nk}^{-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}\right)\lim_{n\to\infty}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i} \end{aligned}$$

dir. $\left|\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}\right| = \prod_{i=k}^{n-1}\frac{s_i}{r_i}$ olup

$$\begin{aligned} \frac{s_k}{r_k}.\frac{s_{k+1}}{r_{k+1}}.\cdots.\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}} &< \underbrace{\frac{\sup s_n}{\inf r_n}.\frac{\sup s_n}{\inf r_n}.\cdots.\frac{\sup s_n}{\inf r_n}}_{n-k} \\ &= \left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Yine $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} < 1$ iken $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$ olduğu burada kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^{n-k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^n}{\left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Teorem 4.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i} = 0$ olur. (r_n) dizisi sıfırdan farklı bir sayıya yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}$ mevcut olduğundan (4.5) den $\lim_{n\to\infty} b_{nk}^{-1} = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır.

$\lim_{n\to\infty}\sum_k b_{nk}^{-1}$ in mevcudiyetini araştıralım.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k b_{nk}^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left[b_{n0}^{-1}+b_{n1}^{-1}+b_{n2}^{-1}+\cdots+b_{nn}^{-1}+\cdots\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{r_0},}_{\substack{0-\text{ıncı satırdaki}\\ \text{elemanların toplamı}}}\ \underbrace{\frac{-s_0}{r_0}\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1},}_{\substack{1-\text{inci satırdaki}\\ \text{elemanların toplamı}}}\ \underbrace{\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_2}+\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2}}_{\substack{2-\text{inci satır}\\ \text{elemanların toplamı}}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_3}+\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_3}+\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_3}}_{\substack{3-\text{üncü satırdaki}\\ \text{elemanların toplamı}}}$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).\left(\frac{-s_{n-2}}{r_{n-2}}\right).\left(\frac{-s_{n-3}}{r_{n-3}}\right).\cdots.\left(\frac{-s_1}{r_1}\right).\left(\frac{-s_0}{r_0}\right).\frac{1}{r_n}$$
$$+\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).\left(\frac{-s_{n-2}}{r_{n-2}}\right).\left(\frac{-s_{n-3}}{r_{n-3}}\right).\cdots.\left(\frac{-s_1}{r_1}\right).\frac{1}{r_n}$$
$$+\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).\left(\frac{-s_{n-2}}{r_{n-2}}\right).\left(\frac{-s_{n-3}}{r_{n-3}}\right).\cdots.\left(\frac{-s_2}{r_2}\right).\frac{1}{r_n}+$$
$$\vdots$$
$$+\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).\left(\frac{-s_{n-2}}{r_{n-2}}\right).\frac{1}{r_n}$$
$$+\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).\frac{1}{r_n}$$
$$+\frac{1}{r_n}+\cdots\Bigg]$$

$$=\left[\frac{1}{r_0},\frac{-s_0}{r_0}\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1},\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\frac{1}{r_2}+\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2},\cdots,\frac{1}{r_n}\left(\sum_{t=0}^{n-1}\prod_{i=t}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+1\right),\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+\frac{1}{r_n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+\frac{1}{r_n}\prod_{i=2}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+\cdots+\frac{1}{r_n}\prod_{i=n-2}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+\frac{1}{r_n}\prod_{i=n-1}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+\frac{1}{r_n},\cdots$$

$$=\frac{1}{r_n}\left[\sum_{t=0}^{n-1}\prod_{i=t}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i}+1\right]$$

Şimdi de 0-ıncı satırdaki elemanların toplamından başlayarak en son n-inci satırdaki elemanların toplamı için bir sınır bulmaya çalışalım.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r_0} &\le \frac{1}{\inf r_n} \\
\frac{1}{r_1}\left(\frac{-s_0}{r_0}+1\right) &\le \frac{1}{\inf r_n}\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}+1\right) \\
\frac{1}{r_2}\left(\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)+\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)+1\right) &\le \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)^2+\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)+1\right) \\
\frac{1}{r_3}\left(\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)+\cdots+\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)+1\right) &\le \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)+1\right) \\
\frac{1}{r_n}\left(\left(\frac{-s_{n-1}}{r_{n-1}}\right)\cdots\cdot\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)+\cdots+1\right) &\le \frac{1}{\inf r_n}\left(\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)^n+\cdots+\left(-\frac{\inf s_n}{\inf r_n}\right)+1\right) \\
&\vdots \\
&\le \frac{1}{\inf r_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-\inf s_n}{\inf r_n}\right)^k\right] \\
&\le \frac{1}{\inf r_n}\frac{1-\left(\frac{-\inf s_n}{\inf r_n}\right)^n}{1+\frac{-\inf s_n}{\inf r_n}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\inf r_n}\frac{\inf r_n}{\inf r_n+\inf s_n} \\
&= \frac{1}{\inf r_n+\inf s_n}
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{bmatrix}
|b_{00}^{-1}| & |b_{01}^{-1}| & |b_{02}^{-1}| & \cdots & |b_{0,k-1}^{-1}| & |b_{0k}^{-1}| & |b_{0,k+1}^{-1}| & \cdots \\
|b_{10}^{-1}| & |b_{11}^{-1}| & |b_{12}^{-1}| & \cdots & |b_{1,k-1}^{-1}| & |b_{1,k}^{-1}| & |b_{1,k+1}^{-1}| & \cdots \\
|b_{20}^{-1}| & |b_{21}^{-1}| & |b_{22}^{-1}| & \cdots & |b_{2,k-1}^{-1}| & |b_{2,k}^{-1}| & |b_{2,k+1}^{-1}| & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
|b_{k0}^{-1}| & |b_{k1}^{-1}| & |b_{k2}^{-1}| & \cdots & |b_{k,k-1}^{-1}| & |b_{k,k}^{-1}| & |b_{k,k+1}^{-1}| & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
|b_{n0}^{-1}| & |b_{n1}^{-1}| & |b_{n2}^{-1}| & \cdots & |b_{n,k-1}^{-1}| & |b_{n,k}^{-1}| & |b_{n,k+1}^{-1}| & \cdots \\
|b_{n+1,0}^{-1}| & |b_{n+1,1}^{-1}| & |b_{n+1,2}^{-1}| & \cdots & |b_{n+1,k-1}^{-1}| & |b_{n+1,k}^{-1}| & |b_{n+1,k+1}^{-1}| & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

ters matrisin herbir elemanının mutlak değerini alıp kolon toplamını alırsak,

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n0}^{-1}|,\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n1}^{-1}|,\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n2}^{-1}|,\cdots,\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_{n,k-1}^{-1}\right|,\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_{n,k}^{-1}\right|,\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_{n,k+1}^{-1}\right|,\cdots\right)
$$

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n0}^{-1}|,\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n1}^{-1}|,\sum_{n=2}^{\infty}|b_{n2}^{-1}|,\cdots,\sum_{n=k-1}^{\infty}\left|b_{n,k-1}^{-1}\right|,\sum_{n=k}^{\infty}\left|b_{n,k}^{-1}\right|,\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|b_{n,k+1}^{-1}\right|,\cdots\right)
$$

olur. Buradan da

$$\sup_k \sum_n b_{nk} = \sup_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|b_{n0}^{-1}\right|, \sum_{n=1}^{\infty} \left|b_{n1}^{-1}\right|, \sum_{n=2}^{\infty} \left|b_{n2}^{-1}\right|, \cdots, \sum_{n=k-1}^{\infty} \left|b_{n,k-1}^{-1}\right|, \sum_{n=k}^{\infty} \left|b_{n,k}^{-1}\right|, \cdots\right)$$

$$= \sup_k \Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{1}{r_0}}_{b_{00}} + \underbrace{\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_1}}_{b_{10}} + \underbrace{\frac{s_1}{r_1}\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_2}}_{b_{20}} + \underbrace{\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_3}}_{b_{30}} + \underbrace{\frac{s_3}{r_3}\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_4}}_{b_{40}} + \cdots + \underbrace{\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\frac{s_{k-2}}{r_{k-2}}.\cdots.\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_k}}_{b_{k0}} + \cdots + \underbrace{\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}}\frac{s_{n-2}}{r_{n-2}}.\cdots.\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{s_0}{r_0}\frac{1}{r_n}}_{b_{n0}} + \cdots}_{1-inci\ s\ddot{u}tunun\ mutlak\ de\breve{g}erlerinin\ toplamı}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{r_1}}_{b_{11}} + \underbrace{\frac{s_1}{r_1}\frac{1}{r_2}}_{b_{21}} + \underbrace{\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{1}{r_3}}_{b_{31}} + \underbrace{\frac{s_3}{r_3}\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{1}{r_4}}_{b_{41}} + \cdots + \underbrace{\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\frac{s_{k-2}}{r_{k-2}}.\cdots.\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{1}{r_k}}_{b_{k1}} + \underbrace{\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}}\frac{s_{n-2}}{r_{n-2}}.\cdots.\frac{s_2}{r_2}\frac{s_1}{r_1}\frac{1}{r_n}}_{b_{n1}} + \cdots}_{2-inci\ s\ddot{u}tunun\ mutlak\ de\breve{g}erlerinin\ toplamı}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{r_2}}_{b_{22}} + \underbrace{\frac{s_2}{r_2}\frac{1}{r_3}}_{b_{32}} + \underbrace{\frac{s_3}{r_3}\frac{s_2}{r_2}\frac{1}{r_4}}_{b_{42}} + \underbrace{\frac{s_4}{r_4}\frac{s_3}{r_3}\frac{s_2}{r_2}\frac{1}{r_4}}_{b_{52}} + \cdots + \underbrace{\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\frac{s_{k-2}}{r_{k-2}}.\cdots.\frac{s_3}{r_3}\frac{s_2}{r_2}\frac{1}{r_k}}_{b_{k2}} + \underbrace{\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}}\frac{s_{n-2}}{r_{n-2}}.\cdots.\frac{s_2}{r_2}\frac{1}{r_n}}_{b_{n2}} + \cdots}_{3-\ddot{u}nc\ddot{u}\ s\ddot{u}tunun\ mutlak\ de\breve{g}erlerinin\ toplamı}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{r_k}}_{b_{kk}} + \underbrace{\frac{s_k}{r_k}\frac{1}{r_{k+1}}}_{b_{k+1,k}} + \underbrace{\frac{s_{k+1}}{r_{k+1}}\frac{s_k}{r_k}\frac{1}{r_{k+2}}}_{b_{k+2,k}} + \underbrace{\frac{s_{k+2}}{r_{k+2}}\frac{s_{k+1}}{r_{k+1}}\frac{s_k}{r_k}\frac{1}{r_{k+3}}}_{b_{k+3,k}} + \underbrace{\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}}\frac{s_{n-2}}{r_{n-2}}.\cdots.\frac{s_{k+1}}{r_{k+1}}\frac{s_k}{r_k}\frac{1}{r_n}}_{b_{nk}} + \cdots + \cdots \Bigg]}_{k-ıncı\ s\ddot{u}tunun\ mutlak\ de\breve{g}erlerinin\ toplamı}$$

açık olarak yazdığımız bu ifadeleri şimdi indise bağlayarak yazalım.

$$\sup_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{s_i}{r_i}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{s_i}{r_i}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{s_i}{r_i}, \cdots, \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{s_i}{r_i}, \cdots, \frac{1}{r_n}, \cdots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{s_i}{r_i} \right) \\
&= \frac{1}{\inf r_k} + \frac{\sup s_k}{\inf r_k} \frac{1}{\inf r_k} + \left(\frac{\sup s_k}{\inf r_k} \right)^2 \frac{1}{\inf r_k} + \cdots \\
&= \frac{1}{\inf r_k} \sum_n \left(\frac{\sup s_k}{\inf r_k} \right)^n \\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.0.3. İspat: i) $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} < 1$ olsun. B matrisinin tersi olan $B^{-1} = \left(b_{nk}^{-1}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad n < k \\ \frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{n-k} & , \quad n \geq k \end{cases}$ matrisi;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \mid b_{nk}^{-1} \mid \leq \frac{1}{\inf r_n} \sum_k \left(\frac{\sup s_n}{\inf r_n} \right)^k < \infty, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{-s_i}{r_i} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k b_{nk}^{-1} \leq \frac{1}{\inf r_n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-\inf s_n}{\sup r_n} \right)^k \quad mevcut,$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\mathrm{k}} |b_{nk}^{-1}| \leq \frac{1}{\inf r_k} \sum_n \left(\frac{\sup s_k}{\inf r_k} \right)^n < \infty,$$

şartlarını sağladığından $B^{-1} \in (\lambda : \lambda)$ dır. Yani $x \in \lambda_B$ ise $y = Bx \in \lambda$ ve buradan $x = B^{-1}y \in \lambda$ olur. O halde $\lambda \subset \lambda_B$ kapsaması ispatlanmış olur. Bu da (i) nin ispatını tamamlar.

ii) $u^1 := \left\{ \frac{1}{r_n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{-s_i}{r_i} \right\}$, $u^2 := \{(-1)^n (n+1)\}$ *ve* $u^3 := \{[1 + (-1)^n]/2\}$ dizileri göz önüne alınırsa

Eğer $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} > 1$ ise

$$Bu^1 = \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} \\ \frac{1}{r_1}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right) \\ \frac{1}{r_2}\left(\frac{s_0}{r_0}.\frac{s_1}{r_1}\right) \\ \frac{1}{r_3}\left(-\frac{s_0}{r_0}.\frac{s_1}{r_1}.\frac{s_2}{r_2}\right) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \left(r_{0.}\frac{1}{r_0}, \frac{s_0}{r_0} + r_1 \frac{1}{r_1}\left(-\frac{s_0}{r_0}\right), s_1 \frac{1}{r_1}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right) + r_2 \frac{1}{r_2}\left(\frac{s_0}{r_0}.\frac{s_1}{r_1}\right), ... \right)$$

$$= (1,0,0,0,...,0,...) = e^{(0)} \in \lambda' dır.$$

$Bu^1 = (1,0,0,0,...,0,...) = e^{(0)} \in \lambda \;\; dır.$Fakat $u^1 \notin \ell_\infty$ dur. Gerçektende her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf r_n \leq r_n \leq \sup r_n$ olup

$$\frac{1}{\sup r_n} \leq \frac{1}{r_n} \leq \frac{1}{\inf r_n}$$

yazılabilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq \sup s_n$ olduğundan

$$\frac{s_n}{r_n} \leq \frac{s_n}{\inf r_n} \leq \frac{\sup s_n}{\inf r_n}$$

olur. Böylece

$$-\frac{s_n}{r_n} \geq -\frac{\sup s_n}{\inf r_n}$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizlikten faydalanılarak u^1 dizisinin sınırlı olmayan bir dizi olduğu aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{s_i}{r_i}\right) &\geq \frac{1}{\sup s_n}\left(-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)\left(-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)\cdot \dots \cdot\left(-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right) \\ &= \frac{1}{\sup s_n}\left(-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^n \end{aligned}$$

olup $\left|-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right| = \frac{\sup s_n}{\inf r_n} > 1$ olduğundan $\left(-\frac{\sup s_n}{\inf r_n}\right)^n$ dizisi ıraksaktır dolayısıyla $u^1 \notin \ell_\infty$ dur. Buna göre $u^1 \notin \lambda$ dır. Bu nedenle $u^1 \in \lambda_B \backslash \lambda$ dır.

Şimdi $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} = 1$ olduğunu kabul edelim.

a) $\lambda = c_0, \ell_p$ olsun. Eğer $(s_n) = (r_n)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = r_n$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} u^1 &= \left\{\frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1} -\frac{s_i}{r_i}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{r_n}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)\right\} \\ &= \left\{\frac{(-1)^n}{r_n}\right\} \\ &= \frac{1}{\inf r_n}\{(-1)^n\} \notin c_0 \end{aligned}$$

dır. Burada $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} = 1$ ve aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = r_n$ olarak alındığından $\frac{\sup s_n}{\inf r_n} = 1$ den $\sup r_n = \inf r_n$ olur her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\inf r_n \leq r_n \leq \sup r_n = \inf r_n$$

den $r_n = \inf r_n \, (veya \;\; \sup r_n)$ bulunur.

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{r_n}\right|^p = \sum_n \frac{1}{(r_n)^p} = \sum_n \frac{1}{(\inf r_n)^p}$$

ve $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{(\inf r_n)^p} \neq 0$ olduğundan $u^1 \notin \ell_p$ dir. Dolayısıyla $u^1 \in \lambda_B \backslash \lambda$ dır.

b) $\lambda = \ell_\infty,\ c$ olsun. Eğer $(s_n) = (r_{n+1})$ ise

$$\begin{aligned}
Bu^2 &= \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= (r_0,\ s_0 - 2r_1,\ -2s_1 + 3r_2,\ 3s_2 - 4r_3, ...) \\
&= (r_{0,}\ -r_1,\ r_2,\ -r_3, ...) \\
&= \{(-1)^n r_n\}
\end{aligned}$$

olup $\sup_n |(-1)^n (r_n)| = \sup_n |r_n| = \sup_n r_n < \infty$ olduğundan $Bu^2 \in \ell_\infty$ dur ancak $u^2 \notin \ell_\infty$ dur. Yani $u^2 \in \{\ell_\infty\}_B \backslash \ell_\infty$ dur.

Şimdi de $Bu^3 = (r_n) \in c$ olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$\begin{aligned}
Bu^3 &= \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= (r_0,\ s_0,\ r_2,\ s_2, ...) \\
&= (r_0,\ r_1,\ r_2, r_3, ...) \\
&= \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c
\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda $u^3 \notin c$ olduğundan $u^3 \in c_B \backslash c$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.0.3. *λ ve μ iki uzay ve $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olsun. Eğer $\lambda \subset \mu$ ise $\mu^\xi \subset \lambda^\xi$dir [48].*

Şimdi Stieglitz ve Tietz [48] in elde ettiği şu sonuçları verelim.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\ a_{nk}\ |^q < \infty \tag{4.4}$$

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|\ < \infty \tag{4.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk}|\ = \sum_k |a_k| \tag{4.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \alpha \tag{4.8}$$

olduğu bilinmektedir.

$\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, \ell_1\}$ ve $\mu \in \{\ell_\infty, c\}$ olmak üzere $(\lambda;\mu)$ sınıfının karakterizasyonu Tablo-2 de verilmiştir.

$Tablo - 2$

Uzayından	ℓ_∞	c	c_0	ℓ_p	ℓ_1
Uzayına					
ℓ_∞	1	1	1	2	3
c	4	5	6	7	8

Lemma 4.0.4. *$\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_1, \ell_p\}$ ve $\mu \in \{\ell_\infty, c\}$ olmak üzere $A \in (\lambda : \mu)$ için gerekli ve yeterli şartlar Tablo-2 kullanılarak şu şekilde verilebilir:*

1. $q = 1$ için (4.4)	2. (4.4)
3. (4.5)	4. (4.6) ve (4.7)
5. $q = 1$ için (4.4) , (4.6) , (4.8)	6. $q = 1$ için (4.4) ve (4.6)
7. (4.4) ve (4.6)	8. (4.5) ve (4.6)

Lemma 4.0.5. *Her $k,n \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi; bir $U = (u_{nk})$ üçgen matrisinin tersi $V = (v_{nk})$ olmak üzere bir $a = (a_k) \in \omega$ dizisi aracalığı ile $C = (c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk} := \begin{cases} \sum\limits_{j=k}^{n} a_j v_{jk}, & (k \leq n), \\ 0 & , \quad k > n \quad , \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\{\lambda_U\}^\gamma := \{a = (a_k) \in \omega : C \in (\lambda : \ell_\infty)\},$$

$$\{\lambda_U\}^\beta := \{a = (a_k) \in \omega \ : \ C \in (\lambda : c)\}$$

[25].□

Lemma 4.0.4 ile Lemma 4.0.5 birleştirilirse Sonuç 4.0.1 elde edilir.

Sonuç 4.0.1. *$d_1(\tilde{r}, \tilde{s}), d_2(\tilde{r}, \tilde{s}), d_3(\tilde{r}, \tilde{s}), d_4(\tilde{r}, \tilde{s})$ ve $d_5(\tilde{r}, \tilde{s})$ cümleleri aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$d_1(\tilde{r}, \tilde{s}) := \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_j \right|^q < \infty \right\},$$

$$d_2(\tilde{r}, \tilde{s}) := \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_j \quad mevcut \right\},$$

$$d_3(\tilde{r}, \tilde{s}) := \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_j \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_j \right| \right\},$$

$$d_4(\tilde{r},\ \tilde{s}) := \left\{ a=(a_k)\in\omega\ :\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\frac{-s_i}{r_i}a_j\ \ mevcut \right\},$$

$$d_5(\tilde{r},\ \tilde{s}) := \left\{ a=(a_k)\in\omega :\ \sup_{k,n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\frac{-s_i}{r_i}a_j\right| < \infty \right\}.$$

Bu takdirde

$$i)\ \{\tilde{\ell}_\infty\}^\gamma := \{\tilde{c}\}^\gamma := \{\tilde{c}_0\}^\gamma := d_1(\tilde{r},\tilde{s}) \qquad (q=1\ \ için)\ ,$$

$$ii)\ \{\tilde{\ell}_p\}^\gamma := d_1(\tilde{r},\tilde{s})\ ,$$

$$iii)\ \{\tilde{\ell}_1\}^\gamma := d_5(\tilde{r},\tilde{s}),$$

$$iv)\ \{\tilde{\ell}_\infty\}^\beta := d_2(\tilde{r},\tilde{s})\ \cap\ d_2(\tilde{r},\tilde{s}),$$

$$v)\ \{\tilde{c}\}^\beta\ := d_1(\tilde{r},\tilde{s})\ \cap\ d_2(\tilde{r},\tilde{s})\cap\ d_4(\tilde{r},\tilde{s}) \qquad (q=1\ için),$$

$$vi)\ \{\tilde{c}_0\}^\beta := d_1(\tilde{r},\tilde{s})\ \cap\ d_2(\tilde{r},\tilde{s}) \qquad (q=1\ \ için),$$

$$vii)\ \{\tilde{\ell}_p\}^\beta := d_1(\tilde{r},\tilde{s})\ \cap\ d_2(\tilde{r},\tilde{s}),$$

$$viii)\ \{\tilde{\ell}_1\}^\beta := d_2(\tilde{r},\tilde{s})\ \cap\ d_5(\tilde{r},\tilde{s}).$$

İspat: Lemma 4.0.5 kullanılarak sonuç aşağıdaki gibi ispatlanabilir. Lemma 4.0.5 de $U = (u_{nk}) = B(\tilde{r},\tilde{s})$ üçgen matrisi olarak alınırsa bu matrsin tersinin

$$v_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{r_n}\prod\limits_{i=k}^{n-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right), & k\le n \\ 0\qquad\quad, & k>n \end{cases}$$

olduğu biliniyor. Bunların ışığında $C=(c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum\limits_{j=k}^{n} a_j\frac{1}{r_j}\prod\limits_{i=k}^{j-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right) & ,\ \ k\le n \\ 0 & ,\ \ k>n \end{cases}$$

olmak üzere

$i)\quad C\in(\ell_\infty:\ell_\infty),\ C\in(c:\ell_\infty)\quad ve\quad C\in(c_0:\ell_\infty)\Longleftrightarrow \sup_n\sum_k|c_{nk}|<\infty.$

Burada $\tilde{\ell}_\infty$ nın γ duali hesaplanırken aynı zamanda $\tilde{c}$ ve $\tilde{c}_0$ nın da γ dualleri elde edilmiş olur. Bu doğrular bir arada göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\left\{\tilde{\ell}_\infty\right\}^\gamma &= \left\{\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}\right\}^\gamma \\
&= \{a=(a_k)\in\omega\ :\ C\in(\ell_\infty,\ell_\infty)\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}|c_{nk}|<\infty\right\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}^{n}|c_{nk}|<\infty\right\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}a_jv_{jk}\right|<\infty\right\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}a_j\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)\right|<\infty\right\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)a_j\right|<\infty\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ki $d_1(\tilde{r},\tilde{s})$ nın tanımlanışına bakılacak olursa $q=1$ olmak üzere

$$\left\{\tilde{\ell}_\infty\right\}^\gamma := \{\tilde{c}\}^\gamma := \{\tilde{c}_0\}^\gamma := d_1(r,s)$$

olduğu görülür.

$ii)\ C\in(\ell_p:\ell_\infty)\Longleftrightarrow \sup_n\sum_k|a_{nk}|^q<\infty$ olması gerçeğinin ışığında (i) şıkkı da düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
\left\{\tilde{\ell}_p\right\}^\gamma &= \left\{\{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}\right\}^\gamma \\
&= \{a=(a_k)\in\omega\ :\ C\in(\ell_p,\ell_\infty)\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}|c_{nk}|^q<\infty\right\} \\
&= \left\{a=(a_k)\in\omega\ :\ \sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)a_j\right|^q<\infty\right\}
\end{aligned}$$

olur yani $\left\{\tilde{\ell}_p\right\}^\gamma := d_1(r,s)$ dir.

$iii)\ C\in(\ell_1:\ell_\infty)\Longleftrightarrow \sup_{n,k\in\mathbb{N}}|c_{nk}|<\infty$ olmasıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left\{\tilde{\ell}_1\right\}^\gamma &= \left\{\{\ell_1\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}\right\}^\gamma \\
&= \{a=(a_k)\in\omega\ :\ C\in(\ell_1,\ell_\infty)\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \ \sup_{n,k \in \mathbb{N}} |c_{nk}| < \infty \right\}$$
$$= \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \ \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} a_j v_{jk} \right| < \infty \right\}$$
$$= \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \ \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) \right| < \infty \right\}$$
$$= \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \ \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) a_j \right| < \infty \right\}$$

olur yani $\left\{ \tilde{\ell}_1 \right\}^{\gamma} := d_5(\tilde{r}, \tilde{s})$ dır.

$iv)$ $C \in (\ell_\infty : c) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} c_{nk} = \alpha_k \\ \lim_{n\to\infty} \sum_k |c_{nk}| = \sum_k |\alpha_k| \end{cases}$ olmasıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_{nk} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} a_j v_{jk} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) a_j \end{aligned}$$

mevcut ve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_k |c_{nk}| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} a_j v_{jk} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) a_j \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) a_j \right| \end{aligned}$$

olduğundan $\left\{ \tilde{\ell}_\infty \right\}^{\beta} = d_2(\tilde{r}, \tilde{s}) \cap d_2(\tilde{r}, \tilde{s})$ dır.

$v)$ $C \in (c : c) \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |c_{nk}| < \infty$, $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \alpha_k$ ve $\lim_{n\to\infty} \sum_k c_{nk} = \alpha$ olmasıdır. İlk iki şarta bakıldığı zaman $q = 1$ olmak üzere $d_1 = (\tilde{r}, \tilde{s})$ ve $d_2 = (\tilde{r}, \tilde{s})$ nın arakesiti olduğu kolaylıkla görülüyor. Son şart için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_k c_{nk} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} a_j v_{jk} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i} \right) a_j$$

yazılabilir. Bunların doğrultusunda $q = 1$ olmak üzere $\{\tilde{c}\}^{\beta} := d_1(\tilde{r},\tilde{s}) \cap d_2(\tilde{r},\tilde{s}) \cap d_4(\tilde{r},\tilde{s})$ dır.

vi) $C \in (c_0 : c) \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$ *ve* $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k$ olduğundan

$$\begin{aligned} \{\tilde{c}_0\}^{\beta} &= \left\{ \{c_0\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} \right\}^{\beta} \\ &= \{a = (a_k) \in \omega \, : \, C \in (c_0 : c)\} \end{aligned}$$

olduğundan (i) ve (ii) nin ispatına benzer olarak $q = 1$ olmak üzere

$$\{\tilde{c}_0\}^{\beta} := d_1(\tilde{r},\tilde{s}) \cap d_2(\tilde{r},\tilde{s})$$

olur.

vii) $C \in (\ell_p : c) \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |c_{nk}|^q < \infty$ *ve* $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \alpha_k$ olmasıdır.

Bu şartlarla birlikte tanımdan

$$\begin{aligned} \{\tilde{\ell}_p\}^{\beta} &= \left\{ \{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} \right\}^{\beta} \\ &= \{a = (a_k) \in \omega \, : \, C \in (\ell_p : c)\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\{\tilde{\ell}_p\}^{\beta} = d_1(\tilde{r},\tilde{s}) \cap d_2(\tilde{r},\tilde{s})$$

dır.

viii) $C \in (\ell_1 : c) \Leftrightarrow \sup_{n,k\in\mathbb{N}} |c_{nk}| < \infty$ *ve* $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \alpha_k$ olduğundan ve

$$\begin{aligned} \{\tilde{\ell}_1\}^{\beta} &= \left\{ \{\ell_1\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} \right\}^{\beta} \\ &= \{a = (a_k) \in \omega \, : \, C \in (\ell_1 : c)\} \end{aligned}$$

olmasından dolayı

$$\{\tilde{\ell}_1\}^{\beta} := d_2(\tilde{r},\tilde{s}) \cap d_5(\tilde{r},\tilde{s})$$

bulunur.

Tanım 4.0.1. *λ lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için λ dan $\mathbb{C}$ ye $p_i(x) = x_i$ olarak tanımlanan p_i dönüşümleri sürekli ise λ dizi uzayına bir K-uzayı denir [20].*

Tanım 4.0.2. *Bir $K-$ uzayı olan λ ya; tam lineer metrik uzay olması durumunda bir $FK-$uzayı denir [20].*

Tanım 4.0.3. *Bir $FK-$ uzayının topolojisi normlanabilir ise λ ya bir $BK-$ uzayı denir [20].*

Tanım 4.0.4. *Eğer bir (b_n) dizisini içeren λ normlu dizi uzayı her $x \in \lambda$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \|x-(\alpha_0 b_0+\alpha_1 b_1+...+\alpha_n b_n)\| = 0$$

olacak şekilde bir (α_n) skalerlerin dizisi mevcut ise (b_n) dizisine λ için bir ***Schauder bazı*** *veya kısaca bazı denir. Toplamı x olan $\sum_k b_k$ serisine (b_n) e göre x in açılımı denir ve $x = \sum \alpha_k b_k$ olarak yazılır [20].*

Lemma 4.0.6. *$A = (a_{nk})$ bir üçgen matris olmak üzere bir normlu dizi uzayı λ nın λ_A matis etki alanının bir baza sahip olması için gerek ve yeter şart λ nın bir baza sahip olmasıdır [49].*

Sonuç 4.0.2. *$z = (z_n)$ ve her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $b^k(\tilde{r},\tilde{s}) : \left\{b_n^{(k)}(\tilde{r},\tilde{s})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri;*

$$z_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r_k} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{-s_i}{r_i} \quad ve \quad b_n^{(k)}(\tilde{r},\tilde{s}) := \begin{cases} 0 & , \quad n<k \\ \frac{1}{r_n}\prod_{i=k}^{n-1}\frac{-s_i}{r_i} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ise

a) $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$ uzayları için $\left\{b_n^{(k)}(\tilde{r},\tilde{s})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir bazdır ve $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$ daki herhangi bir x için

$$x := \sum_{k=0} \alpha_k(r)\, b^{(k)}(\tilde{r},\tilde{s}),$$

tek olarak belirlenir. Burada her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(r) := \{B(\tilde{r},\tilde{s})x\}_k$ dır.

b) $\tilde{c}$ uzayı için $\left\{z, b^k(\tilde{r},\tilde{s})\right\}$ cümlesi bir bazdır, $\tilde{c}$ daki herhangi bir x için

$$x := \ell_z + \sum_k [\alpha_k(r) - \ell]\, b^k(\tilde{r},\tilde{s}),$$

dır. Burada $\ell := \lim_{k\to\infty}\{B(\tilde{r},\tilde{s})x\}_k$ dır [1].

μ ve λ dizi uzayları için $\lambda\mu$ ile

$$\lambda\mu := \{z=(z_k) \in \omega : \ z_k = x_k y_k \ \forall k \in \mathbb{N},\ x=(x_k) \in \lambda,\ y=(y_k) \in \mu\}$$

ümlesi kastedilmektedir.

Sonuç 4.0.3. *$\lambda \supset \phi$ bir BK uzayı verildiğinde bir $x = (x_k) \in \lambda$ dizisinin n.kısmı $x^{[n]} := \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$ olmak üzere x için*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x - x^{[n]}\right\|_\lambda = 0 \ oluyorsa\ AK\ (abschnittskonvergenz)$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|x^{[n]}\right\|_\lambda < \infty \ oluyorsa\ AB\ (abschnittsbeschr\ddot{a}nktheit)$$

$$x \in \bar{\phi} \ \ (\phi \text{ nin kapanışı} \subset \lambda) \text{ oluyorsa } AD \ (abschnittsdichte)$$

$$\left\{x_k e^{(k)}\right\}; \lambda \text{ da sınırlı ise } KB \ (koordinatenweise\ beschränkt)$$

özelliğine sahiptir denir. Bu özelliklerden her biri her $x \in \lambda$ için sağlanıyorsa bu takdirde λ uzayının o özelliğe sahip olduğu söylenir [50]. AK özelliğinin sağlaması durumunda AD özelliği sağlanır ve AK özelliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart AB ve AD özelliklerinin sağlanmasıdır. Örneğin c_0 ve ℓ_p uzayları AK uzaylarıdır ve c ve ℓ_∞ AD uzayı değildir [20].

Tanım 4.0.5. $\mathbb{N}$ *(doğal sayılar) nin bir J dizisi ve bir λ dizi uzayı için λ_j yi*

$$\lambda_j := \{x = (x_k) : \forall n_i \in J \ \text{ için } \ x_i = y_{n_i} \ \ni \ y = (y_i) \in \lambda\}$$

olarak tanımlarsak λ_j ye $J-$inci basamak uzayı ve λ nın J kesit alt uzayı denir [20].

Tanım 4.0.6. *$x_j \in \lambda_j$ ise $\bar{x}_j$ dizisi x_j dizisinin kanonik resmi olsun. Burada $\bar{x}_j$ dizisi J deki indisleri üzerinde x_j dizisiyle aynı ve diğer yerlerde sıfir olan dizidir. λ uzayı bütün basamak alt uzayların kanonik görüntülerini ihtiva ediyorsa bu durumda λ uzayı monotondur denir [20].*

Lemma 4.0.7. *λ ve μ; $BK-$ uzayları $U = (u_{nk})$ bir üçgen matris ve $\alpha = (\alpha_k) \in \mu$ dizisi vasıtasıyla her $k, n \in \mathbb{N}$ için $C_\mu^U = (c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk} := \sum_{j=k}^{n} \alpha_j u_{nj} v_{jk}$$

olarak tanımlanırsa; λ dizi uzayında U matrisinin etki alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir

i) $KB \iff C_{\ell_1}^U \in (\lambda : \lambda)$

ii) $AB \iff C_{bv_0}^U \in (\lambda : \lambda)$

iii) $Monoton \iff C_{m_0}^U \in (\lambda : \lambda)$

iv) $Solid \iff C_{\ell_\infty}^U \in (\lambda : \lambda)$

[25].

Lemma 4.0.7 den şu sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.0.4. *Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = r_n$ ise $\tilde{\ell}_1$ dizi uzayı $KB-$ ve $AB-$ özelliklerine sahiptir [1].*

Lemma 4.0.8. *λ, $AK-$ özelliğine sahip bir $BK-$ uzayı, U bir üçgen matris ve $\lambda_U \supset \phi$ olsun. Burada λ_U dizi uzayı AD özelliğine sahiptir ancak ve ancak "$t \in \lambda^\beta$ için $tU = \theta$ ise $t = \theta$" dır [25].*

c_0 ve ℓ_p, AK özelliğine sahip olduğundan $U = B(\tilde{r}, \tilde{s})$ matrisi için Lemma 4.0.8 kullanılabilir. O halde;

Sonuç 4.0.5. *$\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_p$ $(p > 1)$ nin $AD-$ özelliğine sahiptir ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq r_n$ dir [1].*

5. $\tilde{\ell}_\infty$, $\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{\ell}_1$ DİZİ UZAYLARI İLE İLİŞKİLİ BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde bir üçgensel matrisin etki alanından herhangi bir dizi uzayına matris dönüşümlerini karekterize eden bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Yeni dizi uzayları ile ilgili sonsuz matrislerin bazı sınıfları karakterize edilmiştir.

Teorem 5.0.1. *λ bir $FK-$ uzayı, U üçgensel bir matris, V matrisi de U matrisinin tersi ve μ, ω dizi uzayının herhangi bir alt uzayı olmak üzere $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U : \mu)$ olması için gerek ve yeter şart;*

$$C^{(n)} = \left(c^{(n)}_{mk}\right) \in (\lambda : c) \qquad (\textit{her bir } n \in \mathbb{N} \textit{ için}) \tag{5.1}$$

ve

$$C = (c_{nk}) \in (\lambda : \mu) \tag{5.2}$$

olmasıdır. Burada $k, m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$c^{(n)}_{mk} := \begin{cases} \sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk} & , \quad (0 \le k \le m) \\ 0 & , \quad (k > m) \end{cases} \qquad ve \qquad c_{nk} := \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} v_{jk}$$

eşitlikleriyle tanımlanmaktadır [1].

İspat: $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U : \mu)$ ve $x \in \lambda_U$ olsun. Bu durumda, bütün $m, n \in \mathbb{N}$ ler için;

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \left(\sum_{j=0}^{k} v_{kj} y_j \right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk} \right) y_k = \sum_{k=0}^{m} c^{(n)}_{nk} y_k \tag{5.3}$$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \left(\sum_{j=0}^{k} v_{kj} y_j \right) \\ &= a_{n0} \left(\sum_{j=0}^{0} v_{0j} y_j \right) + a_{n1} \left(\sum_{j=0}^{1} v_{1j} y_j \right) + a_{n2} \left(\sum_{j=0}^{2} v_{2j} y_j \right) \\ &\quad + \cdots + a_{n,m-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} v_{m-1,j} y_j \right) + a_{nm} \left(\sum_{j=0}^{m} v_{mj} y_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{n0} v_{00} y_0 \\ &\quad a_{n1} v_{10} y_0 + a_{n1} v_{11} y_1 \\ &\quad a_{n2} v_{20} y_0 + a_{n2} v_{21} y_1 + a_{n2} v_{22} y_2 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\quad a_{n,m-1} v_{m-1,0} y_0 + a_{n,m-1} v_{m-1,1} y_1 + a_{n,m-1} v_{m-1,2} y_2 + \cdots + a_{n,m-1} v_{m-1,m-1} y_{m-1} \\ &\quad a_{n,m} v_{m,0} y_0 + a_{n,m} v_{m,1} y_1 + a_{n,m} v_{m,2} y_2 + \cdots + a_{n,m} v_{m,m-1} y_{m-1} + a_{n,m} v_{m,m} y_m \end{aligned}$$

olur ki burada sırası ile $y_0, y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y_m$ parantezlerine alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k &= \left(\sum_{j=0}^{m} a_{nj}v_{j0}\right) y_0 + \cdots + \left(\sum_{j=m-1}^{m} a_{nj}v_{j,m-1}\right) y_{m-1} + \left(\sum_{j=m}^{m} a_{nj}v_{jm}\right) y_m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=k}^{m} a_{nj}v_{jk}\right)}_{c_{mk}^{(n)}} y_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} c_{mk}^{(n)} y_k\end{aligned}$$

olur. $A \in (\lambda_U : \mu)$ ise her $x \in \lambda_U$ için Ax mevcut ve $Ax \in \mu$ dür.

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m} c_{mk}^{(n)} y_k$$

olup

$$Ax = C^{(n)}y \in c$$

ise $C^{(n)} \in (\lambda : c)$ dir. (5.3) eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alındığında $Ax = Cy$ elde edilir. $Ax \in \mu$ olduğunda $Cy \in \mu$ olur. Yani $C \in (\lambda : \mu)$ dür.

Tersine önceki iki şartları (5.1) ve (5.2) sağlansın ve $x \in \lambda_U$ olsun. Bu takdirde $(c_{nk}) \in \lambda^{\beta}$ olur. Çünkü $C \in (\lambda : \mu)$ ise her $y \in \lambda$ için Cy mevcut ve $Cy \in \mu$ dür.

$$\lambda^{\beta} = \left\{ (c_{nk}) : \sum_{k} c_{nk}y_k \quad \text{yakınsak} \right\}$$

dır.

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m} c_{mk}^{(n)} y_k$$

olduğundan ve (5.1) eşitliğinde $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \lambda_U^{\beta}$ olur. O halde Ax mevcuttur. (5.3) eşitliğinde $m \to \infty$ giderken $Ax = Cy$ ($x \in \lambda_U$ ve $Ax \in \mu$) olur ki bu da bize $A \in (\lambda_U : \mu)$ olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi aşağıdaki listeyi verelim.

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_{nj} \right|^q < \infty, \tag{5.4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_{nj} = c_{nk}, \tag{5.5}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \frac{-s_i}{r_i} a_{nj} \right| = \sum_{k} |c_{nk}| \;, \text{ her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için}, \tag{5.6}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=k}^{m}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\frac{-s_i}{r_i}a_{nj}=\alpha_n,\ \text{ her bir } n\in\mathbb{N} \text{ için,} \tag{5.7}$$

$$\sup_{k,m\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=k}^{m}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\frac{-s_i}{r_i}a_{nj}\right|<\infty, \tag{5.8}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |c_{nk}|^q<\infty, \tag{5.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}c_{nk}=\beta_k, \tag{5.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k |c_{nk}|=\sum_k|\beta_k|, \tag{5.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k c_{nk}=\beta, \tag{5.12}$$

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}}|c_{nk}|<\infty, \tag{5.13}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |c_{nk}|<\infty, \tag{5.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k c_{nk}=0, \tag{5.15}$$

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}}\left|\sum_{n\in N}\sum_{k\in K}c_{nk}\right|<\infty, \tag{5.16}$$

$$\sup_{N\in\mathcal{F}}\sum_k\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}c_{nk}\right|^q<\infty, \tag{5.17}$$

burada $\mathcal{F}$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt cümlelerinin koleksiyonunu göstermektedir.

$\lambda\in\{\ell_\infty,\ c,\ c_0,\ \ell_p,\ \ell_1\}$ ve $\mu\in\{\ell_\infty,\ c,\ c_0,\ \ell_1\}$ olmak üzere $\left(\tilde{\lambda}:\mu\right)$ sınıfının karekterizasyonu Tablo-3'de verilmiştir.

$Tablo-3$

Uzayından	$\tilde{\ell}_\infty$	$\tilde{c}$	$\tilde{c}_0$	$\tilde{\ell}_p$	$\tilde{\ell}_1$
Uzayına					
ℓ_∞	1	2	3	4	5
c	6	7	8	9	10
c_0	11	12	13	14	15
ℓ_1	16	17	18	19	20

Teorem 5.0.1 den Sonuç 5.0.1 verebiliriz.

Sonuç 5.0.1. $\lambda\in\left\{\tilde{\ell}_\infty,\ \tilde{c},\ \tilde{c}_0,\ \tilde{\ell}_p,\ \tilde{\ell}_1\right\}$ *ve* $\mu\in\{\ell_\infty,\ c,\ c_0,\ \ell_1\}$ *olmak üzere* $A\in(\lambda:\mu)$ *olması için gerek ve yeter şart Tablo-3 okunarak elde edilebilir. Burada;*

1. $(5.5),(5.6)$ *ve* $q=1$ *ile* (5.4).

İspat: $A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şartları bulmaya çalışalım. Yukarıdaki teorem gereğince

$$A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_\infty\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c_{nk}^{(n)}\right) \in (\ell_\infty : c) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : \ell_\infty) \end{cases}$$

olmalıdır. Buradan da

$$c^{(n)} = \left(c_{mk}^{(n)}\right) \in (\ell_\infty : c) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{m\to\infty} c_{mk} = \alpha_k \quad (k \in \mathbb{N}) & (5.5) \\ \lim_{m\to\infty} \sum_k |c_{mk}| = \sum_k \alpha_k & (5.6) \end{cases}$$

olmasıdır.

$$\lim_{m\to\infty} c_{mk} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i}\right) a_{nj} = c_{nk} \tag{5.5}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k |c_{mk}| = \lim_{m\to\infty} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk} \right| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r_j} \prod_{i=k}^{j-1} \left(\frac{-s_i}{r_i}\right) a_{nj} \right| = \sum_k |c_{nk}| \tag{5.6}$$

$c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : \ell_\infty)$ olmasından da $\sup_n \sum_k |c_{nk}| < \infty$ (5.9) olur.

2. $(5.5), (5.7)$ ve $q = 1$ ile $(5.4), (5.9)$.

İspat: $A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : c\right)$ olması için gerek ve yeter şartları bulalım.

$$A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : c\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c_{mk}^{(n)}\right) \in (\ell_\infty : c) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : c) \end{cases}$$

olmasıdır. $c_{mk}^{(n)} \in (\ell_\infty : c)$ olması durumu 1. maddedeki ile aynı olduğundan (5.5) ve (5.6) sağlanır.

$$C = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : c) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} c_{mk} = \beta_k \quad (k \in \mathbb{N}) & (5.10) \\ \lim_{n\to\infty} \sum_k |c_{nk}| = \sum_k |\beta_k \quad | & (5.11) \end{cases}$$

3. $(5.5), (5.4)$ ve $q = 1$ ile (5.9).

İspat: $A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : c_0\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c_{mk}^{(n)} \in (\ell_\infty : c) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : c_0) \end{cases}$ olmasıdır. 1. maddenin ispatından (5.5) ve (5.6) sağlanır.

4. $(5.4), (5.5)$ ve (5.9).

$$A \in \left(\{c\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_\infty\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c_{mk}^{(n)} \in (c : c) \\ c = (c_{nk}) \in (c : \ell_\infty) \end{cases}$$

$$c_{mk}^{(n)} \in (c : c) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_k |c_{mk}| < \infty \\ \lim_{m\to\infty} c_{mk} \\ \lim_{m\to\infty} \sum_k c_{mk} \end{cases}$$

ve $c=(c_{nk})\in(c:\ell_\infty)\Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{nk}|<\infty$ olmasıdır.

$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{nk}|<\infty$ şartı $(5.9)'$un $q=1$ olması halidir.

$\lim_{m\to\infty}c_{mk}$ ise 1. madde de hesaplanmıştır. Şimdi

$$\lim_{m\to\infty}\sum_k c_{mk}=\lim_{m\to\infty}\sum_k\sum_{j=k}^{m}a_{nj}v_{jk}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=k}^{m}(-1)^{j+k}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{s_i}{r_i}\right)a_{nj} \tag{5.7}$$

Buna göre $A\in\left(\{c\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:\ell_\infty\right)\Longleftrightarrow \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{mk}|$ olduğundan, $\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{mk}|$ ifadesini hesaplayalım.

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{mk}|=\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}v_{jk}\right|=\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^{j+k}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{s_i}{r_i}\right)a_{nj}\right| \tag{5.4}$$

O halde sağlanması gerekli şartlar $(5.5),(5.7)$ ve $q=1$ ile (5.4) ve (5.9) sağlanmıştır.

5. $(5.5),(5.8)$ ve (5.13).

İspat: $A\in\left(\{c\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:c\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}c^{(n)}=c^{(n)}_{mk}\in(c:c)\\ c=(c_{nk})\in(c:\ell_\infty)\end{cases}$

$$c^{(n)}_{mk}\in(c:c)\Longleftrightarrow\begin{cases}\sup_m\sum_k|c_{mk}|<\infty\\ \lim_{m\to\infty}c_{mk}\\ \lim_m\sum_k c_{mk}\end{cases}\qquad \text{olmalı}$$

Bir önceki ispattan dolayı $(5.4),(5.5)$ ve (5.7) sağlanmalı

$$c=(c_{nk})\in(c:c)\Longleftrightarrow\begin{cases}\sup_n\sum_k|c_{nk}|<\infty\\ \lim_{n\to\infty}c_{nk}=\beta_k\\ \lim_{n\to\infty}\sum_k c_{nk}=\beta\end{cases}$$

ilk şart 4. maddenin ispatından (5.9) *u* ikinci ve üçüncü şartlar ise (5.10) ve (5.12) *de* zaten var. Buradan $A\in\left(\{c\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:c\right)$ olması için gerek ve yeter şartlar $(5.5),(5.7),(5.10),(5.12)$ ve $q=1$ ile $(5.4),(5.9)$ un sağlanmasıdır.

6. $(5.5),(5.6),(5.10)$ ve (5.11).

İspat: $A\in\left(\{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:\ell_\infty\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}c^{(n)}=c^{(n)}_{mk}\in(\ell_p:c)\\ c=(c_{nk})\in(\ell_p:\ell_\infty)\end{cases}$

$$c^{(n)}_{mk}\in(\ell_p:c)\Longleftrightarrow\begin{cases}\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_m|c_{mk}|^q<\infty\\ \lim_{m\to\infty}c_{mk}\end{cases}$$

$$C=(c_{nk})\in(\ell_p:\ell_\infty)\iff\left\{\sup_n\sum_k|c_{nk}|^q<\infty \quad \text{olmalı}\right.$$

$\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_m|c_{mk}|^q$ 4. maddenin ispatından (5.4) olacak 1. maddenin ispatından (5.5) olacak, $\sup_n\sum_k|c_{nk}|^q<\infty$ ise (5.9) şartının ta kendisidir.

7. $(5.5),(5.7),(5.10),(5.12)$ ve $q=1$ ile $(5.4),(5.9)$.

İspat: $A\in\left(\{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:c\right)\iff\begin{cases}c^{(n)}=\left(c^{(n)}_{mk}\right)\in(\ell_p:c) & (5.4),(5.5)\\ c=(c_{nk})\in(\ell_p:c)\end{cases}$

$$c^{(n)}=c^{(n)}_{mk}\in(\ell_p:c)\iff\begin{cases}\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_k|c_{mk}|^q<\infty\\ \lim_{m\to\infty}c_{mk}\end{cases}$$

$$C=(c_{nk})\in(\ell_p:c)\iff\begin{cases}\sup_n\sum_k|c_{nk}|^q<\infty\\ \lim_{n\to\infty}c_{nk}=\beta_k\end{cases}$$

önceki şartlara bakarsak $(5.4),(5.5),(5.9)$ *ve* (5.10) sağlanmalıdır.

8. $(5.5),(5.10)$ ve $q=1$ ile $(5.4),(5.9)$.

İspat: $A\in\left(\{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:\ell_\infty\right)\iff\begin{cases}c^{(n)}=\left(c^{(n)}_{mk}\right)\in(\ell_1:c)\\ c=(c_{nk})\in(\ell_1:\ell_\infty)\end{cases}$

$$\left(c^{(n)}_{mk}\right)\in(\ell_1:c)\iff\begin{cases}\sup_{m,k\in\mathbb{N}}|c_{mk}|<\infty & (5.8)\\ \lim_{m\to\infty}c_{mk} & (5.5)\end{cases}$$

$$C=(c_{nk})\in(\ell_1:\ell_\infty)\iff\left\{\sup_{n,k\in\mathbb{N}}|c_{nk}|<\infty \quad (5.13)\right.$$

$$\sup_{m,k}|c_{mk}|=\sup_{m,k}\left|\sum_{j=k}^{m}a_{nj}v_{jk}\right|=\sup_{m,k}\left|\sum_{j=k}^{m}(-1)^{j+k}\frac{1}{r_j}\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{s_i}{r_i}\right)a_{nj}\right|<\infty \quad (5.8)$$

yani $(5.5),(5,8)$ *ve* (5.13) sağlanmalıdır.

9. $(5.4),(5.5),(5.9)$ ve (5.10).

İspat: $A\in\left(\{\ell_1\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})}:c\right)\iff\begin{cases}c^{(n)}=\left(c^{(n)}_{mk}\right)\in(\ell_1:c) & (5.5),(5.8)\\ c=(c_{nk})\in(\ell_1:c)\end{cases}$

$$C=(c_{nk})\in(\ell_1:c)\iff\begin{cases}\sup_{n,k\in\mathbb{N}}|c_{nk}|<\infty & (5.13)\\ \lim_{n\to\infty}c_{nk}=\beta_k & (5.10)\end{cases}$$

yani $(5.5),(5.8),(5.10)$ ve (5.13) sağlanmalıdır.

10. $(5.5), (5.8), (5.10)$ ve (5.13).

İspat: $A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : c_0\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c^{(n)}_{mk}\right) \in (\ell_\infty : c) & (5.5), (5.6) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : c_0) & (5.15) \end{cases}$

$$C = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : c_0) \Longleftrightarrow \lim_n \sum_k |c_{nk}| = 0$$

11. $(5.5), (5.6)$ ve (5.15).

İspat: $A \in \left(\{\ell_1\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_1\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c^{(n)}_{mk}\right) \in (\ell_1 : c) & (5.5), (5.8) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_1 : \ell_1) & \end{cases}$

$$C = (c_{nk}) \in (\ell_1 : \ell_1) \Longleftrightarrow \sup_k \sum_n |c_{nk}| < \infty \qquad (5.14)$$

12. $(5.5), (5.7)$, $\beta_k = 0$ ile (5.10) ve $\beta = 0$ ile (5.12) ve (5.4), $q = 1$ için (5.9).

İspat: $A \in \left(\{\ell_\infty\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_1\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c^{(n)}_{mk}\right) \in (\ell_\infty : c) & (5.5), (5.6) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : \ell_1) & \end{cases}$

$$C = (c_{nk}) \in (\ell_\infty : \ell_1) \Longleftrightarrow \sup_{N,K} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} c_{nk} \right| < \infty \qquad (5.16)$$

13. (5.5), $\beta_k = 0$ ile (5.10) ve (5.4), $q = 1$ için (5.9).

İspat: $A \in \left(\{\ell_p\}_{B(\tilde{r},\tilde{s})} : \ell_1\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{(n)} = \left(c^{(n)}_{mk}\right) \in (\ell_p : c) & (5.5), (5.6) \\ c = (c_{nk}) \in (\ell_p : \ell_1) & \end{cases}$

$$C = (c_{nk}) \in (\ell_p : \ell_1) \Longleftrightarrow \sup_N \sum_k \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{nk} \right|^q < \infty \qquad (5.17)$$

14. $(5.4), (5.5), (5.9)$ ve $\beta_k = 0$ ile (5.10).

15. $(5.5), (5.8)$, $\beta_k = 0$ ile (5.10) ve (5.13).

16. $(5.5), (5.6)$ ve (5.16).

17. $q = 1$ için $(5.4), (5.5), (5.7)$ ve (5.16).

18. $q = 1$ için $(5.4), (5.5)$ ve (5.16).

19. $(5.4), (5.5)$ ve (5.17).

20. $(5.5), (5.8)$ *ve* (5.14).

---

[1]

Şimdi Sonuç 5.1.1 den bazı yeni matris sınıflarının karekterizasyonunu elde etmede faydalı olan Başar ve Altay [46] tarafından verilen lemmayı verebiliriz.

Lemma 5.0.1. *μ ve λ iki dizi uzayı, A bir sonsuz matris ve U bir üçgen matris olmak üzere; $A \in (\lambda : \mu_U) \Longleftrightarrow UA \in (\lambda : \mu)$ dür.*

Son olarak belirtilmelidir ki; Sonuç 5.1.1 de her $k, n \in \mathbb{N}$ için a_{nk} yerine $r_n a_{nk} + s_{n-1} a_{n-1,k}$ yazılırsa $U = B(\tilde{r}, \tilde{s})$ ile birlikte Lemma 5.1.1 den $\left(\tilde{\lambda} : \tilde{\mu}\right)$ sınıfının karekterizasyonu elde edilebilir.

6. SONUÇ

Yakın zamanda Kirişçi ve Başar [31] l_1, c, c_0 ve l_p klasik dizi uzaylarında genelleştirilmiş fark matrisi $B(r,s)$ nin etki alanı üzerine çalışmalarda bulundular. Daha sonra Sönmez [51] bu sonuçları üçlü band matrisi $B(r,s,t)$ yi kullanarak genelleştirmiştir. Genelleştirilmiş fark matrisi $B(r,s)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n = r$ ve $s_n = s$ alındığında $B(\tilde{r},\tilde{s})$ dizisel çift band matrisinin özel bir durumu olduğu için Kirişçi ve Başar [31] tarafından elde edilen sonuçlardan daha genel sonuçları Candan [1] nolu çalışmasında elde etmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Candan, M.** (2012). Domain of the double sequential band matrix in the classical sequence spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012:281, 15.

[2] **Candan, M.** (2012). Some new sequence spaces defined by a modulus function and an infinite matrix in a seminormed space, *Journal of Mathematical Analysis*, *3*(2), 1–9.

[3] **Candan, M.** (2014). Domain of the double sequential band matrix in the spaces of convergent and null sequences, *Advances in Difference Equations*, 2014:163, 18.

[4] **Candan, M.** (2014). Almost convergence and double sequential band matrix, *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, *34*(2), 354–366.

[5] **Candan, M.** (2014). A new sequence space isomorphic to the space l(p) and compact operators, *J. Math. Comput. Sci.*, *4*(2), 306–334.

[6] **Candan, M. ve Kılınç, G.** (2015). A different look for paranormed Riesz sequence space derived by Fibonacci matrix, *Konuralp Journal of Mathematics*, *3*(2), 62–76.

[7] **Candan, M. ve Güneş, A.** (2015). Paranormed sequence space of non-absolute type founded using generalized difference matrix, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India. Section A. Physical Sciences*, *85*(2), 269–276.

[8] **Candan, M. ve Kara, E.E.** (2015). A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces, *Gulf Journal of Mathematics*, *3*(4), 67–84.

[9] **Candan, M.** (2015). A new perspective on paranormed Riesz sequence space of non-absolute type, *Global Journal of Math. Anal.*, *3*(4), 150–163.

[10] **Candan, M. ve Kılınç, G.** (2017). A different approach for almost sequence spaces defined by a generalized weighted means, *Saü. J. S.*, *21*(6), 1529–1536.

[11] **Kılınç, G. ve Candan, M.** (2017). Some generalized Fibonacci difference spaces defined by a sequence of modules functions, *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics*, *32*(1), 95–116.

[12] **Candan, M.** (2018). A new outlook for almost convergent sequence spaces, *Cumhuriyet Sci. J.*, *39*(1), 34–46.

[13] **Candan, M.** (2022). Some characteristics of matrix operators on generalized Fibonacci weighted difference sequence space, *Symmetry*, *1283*, 14.

[14] **Candan, M.** (2022). A new aspect for some sequence spaces derived using the domain of the matrix B, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, *5*, 51–62.

[15] **Erwin, K.** (1978). Introductory functional analysis with application, *John Wiley Sons*.

[16] **Boos, J.** (2000). *Classical and modern methods in summability*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, assisted by Peter Cass, Oxford Science Publications.

[17] **Maddox, I.J.** (1970). *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, London-New York.

[18] **Kamthan, P.K. ve Gupta, M.** (1981). *Sequence spaces and series*, cilt 65 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, Inc., New York.

[19] **Peterson, G.** (1966). Regular matrix transformation, *McGraw-Hill Publishing*.

[20] **Başar, F.** (2012). *Summability theory and its applications*, Bentham Science Publishers, Ltd., Oak Park, IL, with a foreword by M. Mursaleen, Edited by Rifat Çolak.

[21] **Wang, C.S.** (1978). On Nörlund sequence spaces, *Tamkang Journal of Mathematics*, *9*(2), 269–274.

[22] **Ng, P.N. ve Lee, P.Y.** (1977/1978). Cesàro sequence spaces of non-absolute type, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria I. Commentationes Mathematicae. Prace Matematyczne*, *20*(2), 429–433.

[23] **Malkowsky, E.** (1997). Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, *Mat.Vesnik*, *57*(1), 1–17.

[24] **Altay, B. ve Başar, F.** (2005). Some Euler sequence spaces of non-absolute type, *Ukrainian Math. J.*, *57*(1), 3–17.

[25] **Altay, B. ve Başar, F.** (2007). Certain topological properties and duals of the domain of a triangle matrix in a sequence space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *336*(1), 632–645.

[26] **Malkowsky, E. ve Savaş, E.** (2004). Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means, *Applied Mathematics and Computation*, *147*(2), 333–345.

[27] **Başarır, M.** (1995). On some new sequence spaces and related matrix transformations, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *26*(10), 1003–1010.

[28] **Aydın, C. ve Başar, F.** (2006). Some generalizations of the sequence space a_p^r, *Iranian Journal of Science and Technology. Transaction A. Science*, *30*(2), 175–190.

[29] **Şengönül, M. ve Başar, F.** (2005). Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, *Soochow Journal of Mathematics*, *31*(1), 107–119.

[30] **Malkowsky, E.**, **Mursaleen, M. ve Suantai, S.** (2007). The dual spaces of sets of difference sequences of order m and matrix transformations, *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, *23*(3), 521–532.

[31] **Kirişçi, M. ve Başar, F.** (2010). Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix, *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, *60*(5), 1299–1309.

[32] **Kızmaz, H.** (1981). On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, *24*(2), 169–176.

[33] **Sarıgöl, M.A.** (1987). On difference sequence spaces, *Journal of Karadeniz Technical University. Faculty of Arts and Sciences. Series of Mathematics-Physics*, *10*, 63–71.

[34] **Ahmad, Z.U. ve Mursaleen, M.** (1987). Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps, *Institut Mathématique. Publications. Nouvelle Série*, *42(56)*, 57–61.

[35] **Malkowsky, E.** (1989). Absolute and ordinary Köthe-Toeplitz duals of some sets of sequences and matrix transformations, *Institut Mathématique. Publications. Nouvelle Série*, *46(60)*, 97–103.

[36] **Choudhary, B. ve Mishra, S.K.** (1993). A note on certain sequence spaces, *The Journal of Analysis*, *1*, 139–148.

[37] **Mishra, S.K.** (1993). Matrix maps involving certain sequence spaces, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *24*(2), 125–132.

[38] **Mursaleen, M.**, **Gaur, A.K. ve Saifi, A.H.** (1996). Some new sequence spaces: their duals and matrix transformations, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, *88*(3), 207–212.

[39] **Gnanaseelan, C. ve Srivastava, P.D.** (1996). The α-, β-, γ- duals of some generalised difference sequence spaces, *Indian Journal of Mathematics*, *38*(2), 111–120.

[40] **Malkowsky, E.** (1996). A note on the Köthe-Toeplitz duals of generalized sets of bounded and convergent difference sequences, *The Journal of Analysis*, *4*, 81–91.

[41] **Gaur, A.K. ve Mursaleen, M.** (1998). Difference sequence spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *21*(4), 701–706.

[42] **Malkowsky, E. ve Mursaleen, M.**, (1999). Generalized sets of difference sequences, their duals and matrix transformations, Sequence spaces and applications, Narosa, New Delhi, s.68–83.

[43] **Asma, C. ve Çolak, R.** (2000). On the Köthe-Toeplitz duals of some generalized sets of difference sequences, *Demonstratio Mathematica*, *33*(4), 797–803.

[44] **Malkowsky, E. ve Mursaleen, M.** (2001). Some matrix transformations between the difference sequence spaces $\Delta c_0(p)$, $\Delta c(p)$ and $\Delta l_\infty(p)$, *Filomat*, (15), 353–363.

[45] **Altay, B. ve Başar, F.** (2007). The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator Δ on the sequence space, *Communications in Mathematical Analysis*, *2*(2), 1–11.

[46] **Başar, F. ve Altay, B.** (2003). On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, *Ukrainian Institut Matematiki*, *55*(1), 108–118.

[47] **Çolak, R.**, **Et, M. ve Malkowsky, E.** (2004). Some topics of sequence spaces in lecture notes in mathematics, *Fırat Univ. Press*, (1-63).

[48] **Stieglitz, M. ve Tietz, H.** (1977). Matrix transformationen von Folgenräumen. Eine Ergebnisübersicht, *Mathematische Zeitschrift*, *154*(1), 1–16.

[49] **Al-Jarrah, A.M. ve Malkowsky, E.** (1998). BK spaces, bases and linear operators, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996)*, 52, Vol. I, s.177–191.

[50] **Grosse-Erdmann, K.G.** (2001). On l^1-invariant sequence spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *262*(1), 112–132.

[51] **Sönmez, A.** (2011). Some new sequence spaces derived by the domain of the triple band matrix, *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, *62*(2), 641–650.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Merve AKDOĞAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2015, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- (2016-devam ediyor) MEB'de Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.