T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ AĞIRLIKLI FARK DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seçkin YALÇIN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat CANDAN

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ AĞIRLIKLI FARK DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seçkin YALÇIN
(36193614079)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat CANDAN

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam sayın Doç. Dr. Murat Candan'a ve her zaman desteklerini gördüğüm İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Çalışmalarımda, tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden hiçbir desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Tezin uygulama aşamasında FYL-2020-2211 numaralı proje ile vermiş oldukları maddi ve manevi destekten dolayı İnönü Üniversitesi BAP birimine teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Fibonacci Ağırlıklı Fark Dizi Uzayı" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Seçkin YALÇIN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Cümlesi,
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi,
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Cümlesi,
F	: Skaler Cisim,
ℓ_p	: p-inci Dereceden Mutlak Yakınsak Seri Olu*s*turan Dizi Uzayı,
$\ell_p(w)$	: Ağırlıklı Dizi Uzayı,
$\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$	: Fibonacci Ağırlıklı Fark Dizi Uzayı,
$\Vert\cdot\Vert$	: Yarı Norm,
ω	: Gerçel Değerli Dizilerin Uzayı,
$\tilde{F}$	: Fibonacci Fark Matrisi,
$\tilde{R}$	: Riesz Matrisinin Transpozu,
$\tilde{C}$	: Cesàro Matrisinin Transpozu,
H	: Hilbert Matris Operatörü.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİBONACCİ AĞIRLIKLI FARK DİZİ UZAYI

SEÇKİN YALÇIN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

68+v sayfa

2022

Danışman: Doç. Dr. Murat CANDAN

Altı bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinde İlkhan'nın [1] nolu makalesi esas alınmış olup üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümde [1] nolu makale detaylı olarak açılarak Türkçe bir kaynak haline getirilmiştir.

Birinci bölümünde dizi uzayları ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında genel bilgiler verildi. Fibonacci sayılarından ve onun bazı özelliklerinden kısaca bahsedildi. Devamında ise, tezin diğer bölümleri hakkında kısa bir özet sunuldu.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel tanım, önerme ve teoremler ifade edildi.

Üçüncü bölümde, Fibonacci fark matrisi verilerek bu matrisin etki alanı yardımıyla $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ Fibonacci ağırlıklı fark dizi uzayı adı verilen bir uzay tanımlandı ve bu uzayın bazı özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde, $p=1$ için $\ell_p(w)$ ağırlıklı dizi uzayının özel bir hali olan $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ Fibonacci ağırlıklı fark dizi uzayının özel bir hali olan $\ell_1\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin yarı normları verildi ve bazı özel matris operatörlerinin yarı normları sunuldu.

Beşinci bölümde, $p\geq 1$ için $\ell_p(w)$ ağırlıklı dizi uzayından $\ell_p\left(w,\tilde{F}\right)$ Fibonacci ağırlıklı fark dizi uzayına tanımlı matris operatörlerinin yarı normları incelendi ve bazı özel matris operatörlerinin yarı normları verildi.

Altıncı bölümde, $p\geq 1$ için $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı bir T operatörü için alt sınır elde edildi ve özel bir matris operatörü olan Hilbert matris operatörü için alt sınır hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Matris operatörleri, Quasi toplanabilir matrisler, Dizi uzayları.

ABSTRACT

Master Thesis

FIBONACCI WEIGHTED DIFFERENCE SEQUENCE SPACE

Seçkin YALÇIN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

68+v pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat CANDAN

In this master's thesis, which consists of six chapters, İlkhan's article [1] was taken as a basis, and in the third, fourth, fifth and sixth chapters, article [1] is opened in detail and turned into a Turkish source.

In the first chapter, general information about the studies on sequence spaces is given. Fibonacci numbers and some of their properties were briefly mentioned. In the continuation, a brief summary of the other chapters of the thesis is presented.

In the second chapter, the basic definitions, propositions and theorems that will be used in the thesis are expressed.

In the third chapter, by giving the Fibonacci difference matrix, a space called Fibonacci weighted difference sequence space $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$ is defined with the help of the domain of this matrix and some properties of this space are examined.

In the fourth chapter, for $p = 1$, the semi norms of the defined matrix operators from $\ell_1(w)$ space, which is a special case of Weighted sequence space $\ell_p(w)$, to $\ell_1(\tilde{w},\tilde{F})$ space, which is a special case of Fibonacci weighted difference sequence space $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$, are given and the semi norms of some special matrix operators are presented.

In the fifth chapter, the semi norms of matrix operators defined for $p \geq 1$ from weighted sequence space $\ell_p(w)$ to Fibonacci weighted difference sequence space $\ell_p(w,\tilde{F})$ are examined and semi norms of some special matrix operators are given.

In the sixth chapter, the lower bound for T operator defined from $\ell_p(w)$ space to $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$ space for $p \geq 1$ is obtained and the lower bound is calculated for the Hilbert matrix operator, which is a special matrix operator.

Keywords: Fibonacci numbers, Matrix operators, Quasi summable matrices, Sequence spaces.

1. GİRİŞ

Genellikle öğrenimleri sırasında insanların ihtiyaç duyduğu sayılar; bir şeyleri saymak için kullanılan $1,2,3,\cdots$ sayılarıdır. Bu sayıların oluşturduğu cümleye doğal sayılar cümlesi denir ve $\mathbb{N}$ sembolü ile gösterilir.

Bir sonsuz dizi düşüncesi o kadar doğal bir kavramdır ki genellikle bir sonsuz dizi için $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ biçiminde bir ifade kullanılır. Bir sonsuz dizinin matematiksel tanımı farklı şekillerde sunulabilir, sonsuz bir dizi ile ilgili en temel nokta her n doğal sayısı için a_n sayısının mevcudiyetidir. Bu şekilde bir eşleştirme ancak fonksiyonlar vasıtası ile yapılır. Buna göre $X \neq \emptyset$ herhangi bir cümle olmak üzere $\mathbb{N}$ den X e tanımlanan her bir fonksiyona bir dizi denir. Eğer $X = \mathbb{R}$ ise diziye bir reel sayı dizisi denir. Bu tezde kullanılan dizilerin tamamı reel terimli dizilerdir. Herhangi bir reel terimli (x_n) dizisinin tüm terimlerinin toplanılması ile seri adı verilen bir kavram elde edilir.

w ile gösterilen reel değerli tüm dizilerin cümlesinin; dizilerin bilinen toplama ve skaler ile çarpma işlemleri altında bir vektör uzayı olduğunu görmek son derece kolaydır. w nın her bir alt uzayına bir dizi uzayı denir. Dizi uzaylarına; klasik dizi uzayları olarak ta bilinen; sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı c_0, yakınsak dizilerin uzayı c, sınırlı dizilerin uzayı ℓ_∞, mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı ℓ_1 ve $p > 0$ ın farklı durumlarına göre mutlak $p-$ toplanabilen dizilerin uzayı ℓ_p örnek olarak verilebilir.

Son zamanlarda yeni bir dizi uzayı inşa etmek ve bu uzayın çeşitli cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerini incelemek yaygın olarak yapılmaktadır. Daha detaylandırmak gerekirse; yeni tanımlanan uzayların kendileri arasında veya bilinen uzaylar ile kapsama ilişkilerini irdelemek, yeni uzayların $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesaplamaya çalışmak, eğer mevcut ise Schauder bazını elde etmek, bilinen uzaylar ile yeni uzaylar arasında matris dönüşümlerinin karakterizasyonunu yapmak, yeni uzayların hangi topolojik veya geometrik özelliklere sahip olup olmadığını incelemek yapılan araştırma konularının bazılarıdır.

Yeni dizi uzayı inşa etmenin birçok tekniği bulunmakla beraber yine son zamanlarda matris etki alanını kullanarak yeni dizi uzayı inşa etmek sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bunlardan bazıları [2–15] nolu kaynakçada verilmiştir. Bu yöntemde kullanılan matrislerden bazıları; fark matrisi [16], terimleri sıfırdan farklı iki sabit dizi kullanarak elde edilen genelleştirilmiş fark matrisi [17], yine terimleri sıfırdan farklı üç sabit dizi ile oluşturulmuş üçlü band matrisi [18], terimleri sıfırdan farklı ve yakınsak iki dizinin kullanıldığı ikili dizisel band matrisi [6], Fibonacci dizileri ile oluşturulmuş farklı band matrisleri [1, 19, 20] bunlardan bir kısmıdır. Dizi uzayları ile ilgili farklı bakış açıları için [21–25] nolu referansları incelenebilir.

Şimdi; tezde ağırlıklı olarak kullanılan Fibonacci sayıları ve bu sayıların ilginç bazı özelliklerinden bahsedelim. $13-$üncü yüzyılın başlarında İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci; Literatürde Fibonacci sayıları veya Fibonacci dizileri olarak bilinen kavramı aşağıdaki tekrarlama bağıntısı ile oluşturdu.

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n > 2)$$

olmak üzere $f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots$ sayılarına Fibonacci sayıları ve bu sayılar ile oluşturulan (f_n) doğal sayı dizisine de Fibonacci dizileri denir. Bu dizinin terimleri incelendiğinde bazı büyüleyici özellikleri göze çarpmaktadır. Bu dizinin gelişigüzel seçilmiş ardışık ilk on teriminin toplamı 11 ile tam bölünebilmektedir, dizini herhangi iki ardışık terimi aralarında asal bir sayı, dizinin keyfi seçilmiş ardışık olan iki teriminin karelerinin toplamı Fibonacci dizisinin yine bir elemanıdır. Bu sayılar aynı zamanda ağaçlardaki dallanmada, dallardaki yaprakların diziliminde görülmesinin yanı sıra bal arılarının soy ağacı gibi yapılarda da görülmektedir. Bu sayıların en ilginç özelliklerinden birisi de ardışık iki Fibonacci sayısının oranının sanatta ve bilimde önemli olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803\cdots$ olarak tanımlanan altın orana çok yakın olmasıdır. Fibonacci sayılarının daha fazla özelliği hakkında bilgi için [26, 27] çalışmaları incelenebilir.

Bu tezin asıl kaynağı Merve İlkhan'nın [1] numaralı kaynakçadaki makalesi olup yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu tez altı bölümden meydana gelmektedir. İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde bu tezde kullanılmış olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Fibonacci fark matrisi tanımlanarak bu matrisin etki alanı ile elde edilen Fibonacci ağırlıklı fark dizi uzayı adının verildiği $\ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ yeni bir dizi uzayı tanımlanmış ve bu uzayın bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili teoremler ifade edilmiş ve bu matris operatörlerinin yarı normları hesaplanmıştır. Ardından bazı özel quasi toplanabilir matrisler tanımlanmış ve bu matris operatörlerinin sınırlılıkları ve yarı normları ile ilgili lemma, önerme, teorem ve sonuçlar sunulmuştur. Beşinci bölümde $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(w, \tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili teoremler ifade edilmiş ve yarı normları hesaplanmıştır. Ardından, dördüncü bölümde tanımlanmış olan $\tilde{R}$ Riezs matrisinin transpozu operatörünün ve H Hilbert matris operatörünün sınırlılığı ve yarı normları ile ilgili teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır. Altıncı bölümde ise $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin alttan sınırlılığı ile ilgili lemma, önerme ve teoremler ifade edilmiş ve H Hilbert matris operatörünün alttan sınırlı bir operatör olduğu kanıtlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölüm; ileride kullanılacak çeşitli temel kavramları ki bu kavramların bazıları mantıksal işlemlerle bunlardan çıkartılabilen ve de tezde ele alınacak konu çerçevesinde bilinmesi gerekli bazı özellikleri kısaca özetleyerek hatırlatmayı amaçlamaktadır. Bir başka ifade ile bu bölüm gereksinim duyulduğu taktirde istenilen bilgiye ulaşılmayı kolaylaştırdığı düşünülerek oluşturulmuştur.

Tanım 2.1.1. *X boştan farklı bir cümle ve F kompleks veya reel sayıların bir cismi olmak üzere*

$$+ : X \times X \to X$$

$$\cdot : F \times X \to X$$

işlemleri her $x,y,z \in X$ ve her $\alpha,\beta \in F$ için aşağıdaki özellikleri gerçekliyor ise X cümlesine F skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı $(lineer\ uzay)$ denir

i) $x+y \in X$

ii) $x+y = y+x$

iii) $(x+y)+z = x+(y+z)$

iv) $x+\theta = x$ *olacak şekilde* $\theta \in X$ *vardır*

v) $x+(-x) = \theta$ *olacak şekilde* $-x \in X$ *vardır*

vi) $\alpha \cdot x \in X$

vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

viii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

ix) $1 \cdot x = x$ *[28].*

Tanım 2.1.2. *X bir vektör uzayı ve $Y \subset X$ olsun. X deki işlemlere göre Y alt cümlesi de bir vektör uzayı ise Y cümlesine bir alt vektör uzayı adı verilir [28].*

Lemma 2.1.1. *Bir $Y \subset X$ alt cümlesinin bir alt uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar*

i) *Her* $x, y \in Y$ *için* $x + y \in Y$

ii) *Her* $\alpha \in F$ *ve her* $x \in Y$ *için* $\alpha x \in Y$

olmasıdır. Bu koşullar her $\alpha, \beta \in F$ *ve her* $x, y \in Y$ *için* $\alpha x + \beta y \in Y$ *olmasına denktir [28].*

Tanım 2.1.3. *Y bir X vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Her bir $x \in X$ için $x + Y$ ötelemesine koset adı verilir.*

$$\begin{aligned} x + Y &= \{x + y : y \in Y\} \\ &= \{m : \text{bazı } y \in Y \text{ için } m = x + y\} \\ &= \{m : \text{bazı } y \in Y \text{ için } m - x = y\} \\ &= \{m : m - x \in Y\} \\ &= \{m : x - m \in Y\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$m \in x + Y \iff x - m \in Y$$

bulunur. Böylece

$$m \in x + Y \iff x \in m + Y$$

dir [29].

Önerme 2.1.1. *Y bir X vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Y nin bütün ötelemelerinin oluşturduğu $\{x + Y : x \in X\}$ cümlesi*

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y$$

ve

$$\alpha (x_1 + Y) = (\alpha x_1) + Y$$

ile verilen vektör uzay işlemleri ile bir vektör uzaydır [29].

Tanım 2.1.4. *Önerme 2.1.1 içinde verilen $\{x + Y : x \in X\}$ uzayına Y alt vektör uzayına göre X in bölüm uzayı adı verilir ve $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$ ile gösterilir [29].*

Tanım 2.1.5. *X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ operatörü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in F$ için*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [30].

Tanım 2.1.6. *$T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin.*

$$KerT=\{x \in X : \; T(x) = \theta\}$$

cümlesine T operatörünün sıfir uzayı veya çekirdeği denir [30].

Tanım 2.1.7. *$T : X \to Y$ lineer operatörü için*

$$GörT=\{y \in Y : \; T(x) = y, \; \forall x \in X \text{ için}\}$$

cümlesine T operatörünün görüntü cümlesi denir [29].

Lemma 2.1.2. *T lineer operatörünün bire-bir olması için gerekli ve yeterli koşul KerT= $\{\theta\}$ olmasıdır [30].*

Tanım 2.1.8. *X ve Y lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ tanımlı bir operatör olsun. Eğer T operatörü; lineer, bire-bir ve örten ise bu T operatörüne bir izomorfizm denir. Bu taktirde X ve Y uzayları lineer olarak izomorfik uzaylar adını alır ve $X \cong Y$ yazılır [31].*

Teorem 2.1.1. *$\big($Birinci İzomorfizma Teoremi$\big)$ X ve Y, F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde $KerT$, X in; Gör T de Y nin bir alt uzayıdır. Bundan başka, $\bar{T}(x + Ker\, T) = T(x)$ ile verilen $\bar{T} : X/Ker\, T \to$ Gör T izomorfizması vardır [32].*

Tanım 2.1.9. *X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in X$ için*

i) $d(x,y) \geq 0$

ii) $x = y \implies d(x,y) = 0$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşulları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir yarı metrik ve (X,d) ikilisine de bir yarı metrik uzay denir. Bu koşullarla birlikte $x \neq y$ iken $d(x,y) > 0$ oluyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay adı verilir [33].

Tanım 2.1.10. *(X,d) bir yarı metrik uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir tane n_0 doğal sayısı vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [33].*

Tanım 2.1.11. *Bir* (X,d) *metrik uzayındaki her Cauchy dizisi* X *içinde yakınsak ise bu* (X,d) *metrik uzayına tam uzay adı verilir [29].*

Tanım 2.1.12. X *bir* F *cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $x, y \in X$ *ve her* $\alpha \in F$ *için*

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *üçgen eşitsizliği*

özelliklerini sağlıyorsa X *üzerinde yarı norm adını alır. Bu özelliklerin yanında her* $x \neq \theta$ *için* $\|x\| > 0$ *oluyorsa bu dönüşüme* X *üzerinde norm denir ve* $(X, \|\cdot\|)$ *ikilisine sırasıyla bir yarı normlu uzay ve bir normlu uzayı adı verilir [33].*

Tanım 2.1.13. $(X, \|\cdot\|_X)$ *bir yarı normlu uzay olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$d(x,y) := \|x-y\|_X$$

ile tanımlanan fonksiyona yarı norm ile üretilen yarı metrik denir [33].

Tanım 2.1.14. $(X, \|\cdot\|_X)$ *ve* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *yarı normlu uzaylar,* $T : X \to Y$ *bir lineer dönüşüm olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ *reel sayısı varsa* T *ye sınırlı lineer operatör denir ve sınırlı lineer operatörlerin cümlesi*

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ lineer ve sınırlı}\}$$

ile gösterilir [33].

Lemma 2.1.3. $(X, \|\cdot\|_X)$ *ve* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *yarı normlu uzaylar,* $T \in .B(X,Y)$ *olsun. O halde*

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, \ \|x\|_X \neq \theta \right\}$$

fonksiyonu $B(X,Y)$ *üzerinde bir yarı normdur ve* $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ *bir yarı normlu uzaydır.* $\|T\|$ *ye* T *operatörünün yarı normu denir. Eğer* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *yarı normlu uzayı bir normlu uzay ise* $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay olur [33].*

Tanım 2.1.15. *Bir normlu uzay, normun ürettiği metriğe göre tam ise Banach uzayı olarak adlandırılır [29].*

Tanım 2.1.16. $F=\mathbb{R}$ *veya* $\mathbb{C}$ *olmak üzere* X *bir vektör uzayı olsun.*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to F$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ye* X *üzerinde bir yarı iç çarpım,* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ikilisine de bir yarı iç çarpım uzayı denir.*

İ1) *Her* $x\in X$ *için* $\langle x,x\rangle \geq 0$,

İ2) *Her* $x,y\in X$ *için* $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

İ3) *Her* $x,y\in X$ *ve* $\alpha\in F$ *için* $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$,

İ4) *Her* $x,y,z\in X$ *için* $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

Bu özelliklerle beraber $\langle x,x\rangle = 0 \implies x=\theta$ *oluyorsa* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ye* X *üzerinde bir iç çarpım,* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir [34].*

Tanım 2.1.17. $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *bir yarı iç çarpım uzayı ve* $x\in X$ *olsun.* x *vektörünün yarı normu*

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} \tag{2.1.1}$$

olarak tanımlanır [34].

Önerme 2.1.2. (*Paralelkenar Kuralı*) $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *bir yarı iç çarpım uzayı olsun. O halde yarı iç çarpım ile üretilen yarı norm her* $x,y\in X$ *için*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

eşitliğini sağlar [34].

Teorem 2.1.2. $(X,\|\cdot\|)$ *yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her* $x,y\in X$ *vektörleri için paralelkenar kuralının sağlanmasıdır [34].*

Tanım 2.1.18. *Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği normdan üretilen metriğe göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı denir [29].*

Teorem 2.1.3. (*Ortalama Değer Teoremi*) *f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ise $[a,b]$ kapalı aralığında*

$$f(m) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olacak biçimde en az bir m sayısı vardır [35].

Önerme 2.1.3. *f hiç birisi $\{z = x+iy : y = 0,\ x > 0\}$ cümlesi üzerine düşmeyen, sonlu sayıdaki kutup yeri dışında $\mathbb{C}$ de analitik bir fonksiyon olsun ve $a > 0$ ise bir tamsayı olmasın. Varsayalım ki, öyle $M_1, M_2, R_1, R_2 > 0$, $b > a$, $0 < d < a$ sayıları vardır ki,*

$$|f(z)| \leq \begin{cases} \frac{M_1}{|z|^b} & , \quad |z| \geq R_1 \\ \frac{M_2}{|z|^d} & , \quad 0 < |z| \leq R_2 \end{cases}$$

olmaktadır. Bu durumda, $z_i \neq 0$ noktaları, $z^{a-1}f(z)$ nin kutup yerleri olmak üzere,

$$\int_0^\infty x^{a-1}f(x)\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi ia}}{\sin a\pi}\sum_i Rez\left(z^{a-1}f(z), z_i\right)$$

dir. Burada $0 < \arg z < 2\pi$ dalı dikkate alınmaktadır ve $z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z}$'dir [36].

Teorem 2.1.4. *$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. Eğer g ve h, z_0 da analitik ve $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 da $1-$inci mertebeden kutuba sahiptir ve $Rez(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ dır [36].*

Tanım 2.1.19. *$X \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{N}$ den X e tanımlanan her bir fonkiyona bir dizi denir ve $x : \mathbb{N} \to X$ dizisi $x = (x_k)$ olarak gösterilir ve diziler X e göre adlandırılır. Eğer $X = \mathbb{R}$ ise diziye reel değerli bir dizi denir. Tüm reel değerli dizilerin cümlesi ω ile gösterilir. Her $(x_k), (y_k) \in \omega$ ve her $\lambda \in IR$ için ω cümlesi*

$$((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k) \text{ ve } (\lambda, (x_k)) \to (\lambda x_k)$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. ω nın her bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir. [37].

Örnek 2.1.1. *Sırası ile sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı, yakınsak dizilerin uzayı ve sınırlı dizilerin uzayı*

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\},$$
$$c = \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcut}\right\},$$
$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\},$$

ile tanımlıdır [33].

Lemma 2.1.4. *$x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ reel terimli herhangi iki dizi olsun. $s_n = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ olmak üzere*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \left(y_i - y_{i+1}\right) + s_n y_n$$

ifadesine Abel kısmi toplamı denir [31].

Lemma 2.1.5. *Her $k\in\mathbb{N}$ için $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ ve $p_k > 0$ olsun. $H = \sup p_k$ ve $C = \max\left\{1, 2^{H-1}\right\}$ olmak üzere*

$$|x_k + y_k|^{p_k} \le C\left\{|x_k|^{p_k} + |y_k|^{p_k}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır [31].

Tanım 2.1.20. *Her $n,k\in\mathbb{N}$ için*

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine 1-inci mertebeden Cesàro ortalaması denir [38].

Tanım 2.1.21. *$p_1 > 0$ olmak üzere $p=(p_k)$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve her $n\in\mathbb{N}$ için*

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

olmak üzere

$$t_n = \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ldots + p_n s_n}{P_n}$$

eşitliği ile verilen $T : \omega \to \omega$ dönüşümüne herhangi bir (s_n) dizisinin Riesz ortalaması denir. Bu ortalamaya karşılık gelen matris her $n,k\in\mathbb{N}$ için

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{P_n} & , \quad 1 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R = (r_{nk})$ matrisidir [39].

Tanım 2.1.22. *(x_k) bir dizi olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + \cdots$$

biçimindeki bir ifadeye bir seri denir [35].

Tanım 2.1.23. *Terimleri $\sum x_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum |x_k|$ serisi yakınsak ise $\sum x_k$ serisine mutlak yakınsak seri adı verilir [35].*

Örnek 2.1.2.

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\},$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \in \ell_\infty \right\},$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \in c \right\},$$

$$cs_0 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \in c_0 \right\}$$

uzaylarına sırasıyla mutlak $p-$toplanabilen dizilerin uzayı veya $p-$inci mertebeden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı, sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı, yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı ve sıfıra yakınsayan seri teşkil eden dizilerin uzayı denir [33].

Tanım 2.1.24. *Her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ serisi; negatif olmayan b_i gerçel sayısına yakınsıyor ve $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ serisi de yakınsak ise o zaman*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

serisine yakınsaktır denir [40].

Teorem 2.1.5. *Eğer $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ serisi yakınsak ise $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ serisi ve $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ serisinin her ikisi de aynı sayıya yakınsaktır ve*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

dir [40].

Önerme 2.1.4. *(Minkowski Esitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için hepsi birden sıfır olmayan x_k, y_k reel sayıları için*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

sağlanır [41].

Önerme 2.1.5. *(Hölder Esitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $x = (x_k) \in \ell_p$, $y = (y_k) \in \ell_q$ olsun. Bu taktirde*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Hölder eşitsizliği olarak bilinir [30].

Tanım 2.1.25. *λ ve μ iki dizi uzayı ve $A=(a_{nk})$ reel sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$ yakınsak ise $Ax=(A_n(x))$ yazılır. Eğer $x=(x_k)\in\lambda$ iken $Ax=(A_n(x))\in\mu$ ise o zaman A ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A:\lambda\to\mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x in $A-$dönüşümüdür denir. (λ,μ) ile $A:\lambda\to\mu$ şeklinde bütün A matrislerinin cümlesi gösterilecektir [42].*

Bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi için yukarıda bahsi geçen $(A_n(x))$ dizisi daha açık hali

$$A_n(x)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nk} & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty}a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.1.26. *$A=(a_{nk})$ reel sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Her $n=1,2,...$ için $A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$ mevcut ve $\lim_{n\to\infty}A_n(x)=I\in\mathbb{C}$ ise $x=(x_n)$ dizisine I sayısına $A-$toplanabilirdir denir. Bu durum x in $A-$limiti I dır diye ifade edilir ve $A-\lim_{n\to\infty}x_n=I$ olarak gösterilir [43].*

Tanım 2.1.27. *λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı olan λ_A cümlesi*

$$\lambda_A=\{x=(x_k)\in\omega : Ax\in\lambda\}$$

olarak tanımlanır [39].

Tanım 2.1.28. *$A=(a_{nk})$ reel sayıların sonsuz bir matrisi, $c\subset c_A$ $(x\in c \text{ iken } Ax\in c)$ ve $lim_{n\to\infty}A_n(x)=lim_{n\to\infty}x_n$ koşullarını sağlıyorsa $A=(a_{nk})$ matrisine regüler matris adı verilir. Regüler matrislerin cümlesi (c,c,p) ile gösterilir [44].*

Teorem 2.1.6. *$A=(a_{nk})$ reel sayıların sonsuz bir matrisi olsun. O zaman, $A=(a_{nk})\in(c,c,p)$ olması için gerekli ve yeterli şartlar*

(1) $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $k \in \mathbb{N}$ sabit

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır [33].

Tanım 2.1.29. *Her $n,k \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $T = (t_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $n,k \in \mathbb{N}$ için $n > k$ olduğunda $t_{nk} = 0$ ve $t_{nn} \neq 0$ ise $T = (t_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisine üst üçgensel matris denir [45].*

Tanım 2.1.30. *Her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$\Delta_{nk}^{(1)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & , \quad n-1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)} = \left(\Delta_{nk}^{(1)}\right)$ matrisine fark matrisi denir [39].

Tanım 2.1.31. *Her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$\Delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} m \\ n-k \end{pmatrix} & , \quad \max\{0, n-m\} \leq k \leq n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < \max\{0, n-m\} \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(m)} = \left(\Delta_{nk}^{(m)}\right)$ matrisine $m-$inci mertebeden fark matrisi denir [39].

Tanım 2.1.32. *Her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$b_{nk}(r,s) = \begin{cases} r & , \quad k = n \\ s & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $B(r,s) = (b_{nk}(r,s))$ matrisine genelleştirilmiş fark matrisi denir [39].

Tanım 2.1.33. *$\tilde{r} = (r_n)$ ve $\tilde{s} = (s_n)$ pozitif reel sayıların yakınsak birer dizisi olsun. Her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$b_{nk}(\tilde{r},\tilde{s}) = \begin{cases} r_n & , \quad k = n \\ s_n & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $B(\tilde{r},\tilde{s}) = (b_{nk}(\tilde{r},\tilde{s}))$ matrisine çift dizisel genelleştirilmiş fark matrisi denir [2].

Tanım 2.1.34. *f_n; $n-$inci Fibonacci sayısı olmak üzere her $n,k \in \mathbb{N}$ için*

$$\hat{f}_{nk} = \begin{cases} -\frac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k = n-1 \\ \frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \text{ ya da } 0 \leq k < n-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\hat{F} = \left(\hat{f}_{nk}\right)$ matrisine Fibonacci fark matrisi denir [46].

3. $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ DİZİ UZAYI

Bu bölümde, Fibonacci sayıları kullanılarak oluşturulmuş sonsuz matrisler vasıtasıyla inşa edilen dizi uzaylarının literatürdeki gelişimi sunulduktan sonra İlkhan [1] tarafından tanımlanan ve Fibonacci ağırlıklı fark dizi uzayı adı verilen $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayı verilmiştir. Sonrasında bu uzayın $\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ yarı normu ile bir yarı normlu uzay olduğu fakat normlu uzay olmadığı, $\ell_p(\tilde{w}) \subset \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ kapsama ilişkisinin kesin olduğu, $K = \left\{x = (x_n) \in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right) : \frac{f_{n+1}}{f_n}x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1} = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)/K \cong \ell_p(\tilde{w})$ izomorfizmasının mevcudiyeti, $\ell_2\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayı ve $p \neq 2$ için $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayı olmadığı ispatına yer verildi.

Kara [46] 2013 de Fibonacci sayılarını kullanarak $\hat{F} = \left(\hat{f}_{nk}\right)$ matrisini

$$\hat{f}_{nk} = \begin{cases} -\frac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k = n-1 \\ \frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

olarak tanımladı ve bu matrisi kullanarak bazı yeni fark dizi uzayları inşa ederek belirli özelliklerini inceledi. 2015 yılında Candan [47] Fibonacci sayılarını kullanarak çift genelleştirilmiş band matrisini $r, s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ olmak üzere

$$\hat{f}_{nk}(r,s) = \begin{cases} s\frac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k = n-1 \\ r\frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

olarak tanımladı ve bu matris vasıtasıyla tanımladığı yeni dizi uzaylarının birçok özelliğini ortaya çıkarttı. Yine Fibonacci sayılarını kullanarak Candan-Kayaduman [20], Candan-Kara [9], Candan-Kılınç [7], Kılınç-Candan [12] yeni dizi uzayları inşa edip bu uzayların bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler.

Fibonacci sayılarının sonsuz regüler matrislere bir uygulaması olarak Kara ve Başarır [19] Fibonacci sayılarını kullanarak bir yeni regüler $F = (f_{nk})$ matrisini

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{f_k^2}{f_n f_{n+1}} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımladılar. Ayrıca, Kara ve Başarır [19] F matrisinin bazı klasik dizi uzaylarındaki etki alanını kullanarak bazı yeni dizi uzaylarını tanımlayıp bir çok özelliğini ortaya çıkarttılar.

2016 yılında Talebi ve Dehghan [48] ; Kara ve Başarır'ın [19] yukarıda tanımladığı $F = (f_{nk})$ matrisini kullanarak Fibonacci ağırlıklı dizi uzayı $F_{w,p}$ yi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımladılar

$$F_{w,p}=\left\{x=(x_n)\in w:\sum_{n=0}^{\infty}w_n\left|\frac{1}{f_nf_{n+1}}\sum_{k=0}^{n}f_k^2x_k\right|^p<\infty\right\}.$$

Burada $w=(w_n)$ dizisi reel sayıların negatif terimli olmayan azalan bir dizisidir. $w=(w_n)$ yine aynı özelliklere sahip bir dizi olmak üzere $\ell_p(w)$ uzayı aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$\ell_p(w)=\left\{x=(x_n)\in w:\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p<\infty\right\}.$$

Burada $1\leq p<\infty$ dur. Daha kesin bir ifade ile $F_{w,p}$ cümlesi $F-$ dönüşümleri $\ell_p(w)$ uzayında olan tüm dizilerin cümlesidir ve aynı zamanda vektör uzayı yapısına sahiptir.

Matris etki alanı kullanılacak olursa $F_{w,p}$ uzayı

$$F_{w,p}=(\ell_p(w))_F$$

olarak yazılabilir.

2018 yılında İlkhan [1]; Kara [46] tarafından yukarıda tanımı verilen $\hat{F}=\left(\hat{f}_{nk}\right)$ matrisine benzer ama farklı yeni bir $\tilde{F}=\left(\tilde{f}_{nk}\right)$ Fibonacci fark matrisini

$$\tilde{f}_{nk}=\begin{cases}-\frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k=n+1\\ \frac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k=n\\ 0 & , \quad 0<k<n \text{ veya } k>n+1\end{cases}$$

olarak tanımladı.

Yine İlkhan [1]; Talebi ve Dehghan'nın [48] nolu çalışmasındakine benzer olarak $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dizi uzayını $1\leq p<\infty$ ve $\tilde{w}=(\tilde{w}_n)$ reel sayıların negatif olmayan azalan bir dizisi olmak üzere

$$\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)=\left\{x=(x_n)\in\omega:\ \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p<\infty\right\}$$

olarak tanımladı. Burada yine matris etki alanı tanımı düşünüldüğünde

$$\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)=(\ell_p(\tilde{w}))_{\tilde{F}}$$

olarak yazılacağı son derece açıktır.

Lemma 3.0.1. *$1\leq p<\infty$ olmak üzere $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ cümlesi bir dizi uzayıdır [1].*

İspat: 1. Her $x=(x_n),\, y=(y_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ için $x+y\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ mı?

$x=(x_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p<\infty$$

ve $y=(y_n)\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right|^p<\infty$$

dur. O zaman Lemma 2.1.5 den;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(x_n+y_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(x_{n+1}+y_{n+1})\right|^p&=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)+\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\right|^p\\&\le 2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right|^p\right)\\&<\infty\end{aligned}$$

olur. Yani $x+y\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dır.

2. Her $x=(x_n)\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve her $c\in F$ için $cx\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ mı?

Yine $x=(x_n)\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p<\infty$$

dur. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(cx_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(cx_{n+1})\right|^p&=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|c\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)\right|^p\\&=c^p\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p<\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $cx\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dır.

O halde, $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ cümlesi ω vektör uzayının bir alt uzayıdır. Dolayısıyla bir dizi uzayıdır.

Lemma 3.0.2. *$1\le p<\infty$ olmak üzere $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dizi uzayı $\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ yarı normu ile bir yarı normlu uzaydır [1].*

İspat: 1. Her $x=(x_n)\in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ için mutlak değerin tanımı ve $\tilde{w}=(\tilde{w}_n)$ dizisinin pozitif terimli bir dizi olduğu göz önüne alındığında

$$\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge 0$$

olduğu açıktır.

2. $(x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(0,0,\cdots,0,\cdots)$ için

$$\begin{aligned}\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=0\end{aligned}$$

olduğu aşikardır.

3. Her $x=(x_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve her $c\in F$ için

$$\begin{aligned}
\|cx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(cx_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(cx_{n+1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|c\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|c|^p\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= (|c|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |c|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |c|\,\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4. Her $x=(x_n),\ y=(y_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ için üçgen eşitsizliğinin sağlandığı gösterilirken Minkowski eşitsizliğinden yararlanılmıştır.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(x_n+y_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(x_{n+1}+y_{n+1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)+\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}+\|y\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.0.1. $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ *dizi uzayı bir normlu uzay değildir [1].*

İspat: $x\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olmak üzere $\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}=0$ olduğu halde $x\neq\theta$ olacak şekilde bir örnek vermek yeterlidir. $f=(f_n)=(1,1,2,3,5,\cdots,f_n,\cdots)$ dizisi ele alındığında, $f^2=\left(f_n^2\right)=\left(1,1,4,9,25,\cdots,f_n^2,\cdots\right)$ dizisi olur. Görüldüğü üzere $\left(f^2\right)$ dizisi sıfırdan farklı bir dizidir ve $f^2=\left(f_n^2\right)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olup bununla birlikte

$$\begin{aligned}\left\|f^2\right\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}f_n^2-\frac{f_n}{f_{n+1}}f_{n+1}^2\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|f_{n+1}f_n-f_nf_{n+1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n0^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu görülür [1].

Teorem 3.0.2. $1\le p<\infty$ *olmak üzere* $\ell_p(\tilde{w})\subset\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ *kapsaması kesin olarak sağlanır [1].*

İspat: $x=(x_n)\in\ell_p(\tilde{w})$ olsun. Tanımdan $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|x_n|^p<\infty$ olur.

Sırasıyla Lemma 2.1.5 , $1\le\frac{f_{n+1}}{f_n}\le 2$ ve $\frac{1}{2}\le\frac{f_n}{f_{n+1}}\le 1$ eşitsizlikleri ve seri yakınsaklıkları kullanılarak;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p &\le \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n2^{p-1}\left(\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n\right|^p+\left|\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p\right)\\ &\le 2^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(2^p|x_n|^p+|x_{n+1}|^p\right)\\ &\le 2^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(2^p|x_n|^p+2^p|x_{n+1}|^p\right)\\ &= 2^{2p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(|x_n|^p+|x_{n+1}|^p\right)\\ &= 2^{2p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|x_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|x_{n+1}|^p\right)\\ &<\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x=(x_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ sonucuna ulaşılmış olur.

Kapsamanın kesin olarak sağlandığını göstermek için Teorem 3.0.1 in ispatında tanımlanan $x=\left(f_n^2\right)$ dizisi tekrar göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}f_n^2-\frac{f_n}{f_{n+1}}f_{n+1}^2\right|^p\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|f_{n+1}f_n-f_nf_{n+1}\right|^p\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|0|^p\\ &= 0<\infty\end{aligned}$$

olduğundan $x = \left(f_n^2\right) \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ dir. $\tilde{w}_n = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ olarak seçildiğinde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n |x_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \left|f_n^2\right|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \left|f_n^2\right|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{2p} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur. Gerçekten, $p \geq 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n^{2p} \geq \frac{1}{n}$ olur ve bununla birlikte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma kriteri gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{2p}$ serisi ıraksaktır. Buna göre $x = \left(f_n^2\right) \notin \ell_p(\tilde{w})$ elde edilir.

Teorem 3.0.3. *$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $K = \left\{x = (x_n) \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right) : \frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\right\}$ ise $\ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)/K \cong \ell_p(\tilde{w})$ izomorfizması mevcuttur [1].*

İspat: $\ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ uzayından $\ell_p(\tilde{w})$ uzayına bir $T : \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right) \to \ell_p(\tilde{w})$ dönüşümü her $x \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ için $T(x) = \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1}\right)$ olacak şekilde tanımlansın.

1. $x \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ için $T(x) \in \ell_p(\tilde{w})$ olduğunu göstermek için $x = (x_n) \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1}\right|^p < \infty$$

dur. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n |T(x)|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1}\right|^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur. Buradan $T(x) \in \ell_p(\tilde{w})$ dır.

2. T nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için her $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ için $x = y$ olsun. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = y_n$ olsun.

$$T(x) = \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1}\right) = \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1}\right) = T(y)$$

Buradan $T(x) = T(y)$ olur ki dolayısıyla T iyi tanımlıdır.

3. T nin bir Lineer dönüşüm olduğunu göstermek için her $x, y \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ için

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}(x_n+y_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(x_{n+1}+y_{n+1})\right)\\
&= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}+\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\\
&= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)+\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\\
&= T(x)+T(y)
\end{aligned}$$

ve her $x\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve $c\in F$ için

$$\begin{aligned}
T(cx) &= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}(cx_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(cx_{n+1})\right)\\
&= c\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)\\
&= cT(x)
\end{aligned}$$

dir.

4. T nin örten olduğunu görmek için her $y=(y_n)\in\ell_p(\tilde{w})$ alındığında $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|y_n|^p<\infty$ olur. Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f_n^2}{f_kf_{k+1}}y_k$ şeklinde tanımlanmış olsun. Şimdi $x=(x_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve $T(x)=y$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f_n^2}{f_kf_{k+1}}y_k-\frac{f_n}{f_{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_{n+1}^2}{f_kf_{k+1}}y_k\right|^p\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}f_n^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k-\frac{f_n}{f_{n+1}}f_{n+1}^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k\right|^p\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|f_{n+1}f_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k-f_nf_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k\right|^p\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|f_{n+1}f_n\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k\right)\right|^p\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|f_{n+1}f_n\left(\frac{y_n}{f_nf_{n+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{f_kf_{k+1}}y_k\right)\right|^p\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n|y_n|^p<\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(x_n)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dır. Aynı zamanda $T(x)=y$ olduğu görülür.

5. $KerT=K$ olduğunu göstermek için $K\subset KerT$ ve $KerT\subset K$ olduğunun ispatlanması gerekir. $K\subset KerT$ nin ispatı için $x=(x_n)\in K$ olsun. K cümlesinin tanımından

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}=0$$

olduğundan $T(x)=0$ olur. Yani $x=(x_n)\in KerT$ elde edilir.

$KerT\subset K$ olduğunu görmek için $x=(x_n)\in KerT$ olsun. Buna göre $T(x)=0$ olur ve $T(x)$ in tanımından

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}=0$$

elde edilir ki bu $x=(x_n)\in K$ demektir.

Teorem 2.1.1 de verilen $1-inci$ izomorfizma teoremine göre

$$\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)/K\cong\ell_p(\tilde{w})$$

elde edilir.

Yukarıdaki teoremde verilen T dönüşümü bire-bir bir dönüşüm değildir. Çünkü Teorem 3.0.1 de $x=\left(f_n^2\right)\in\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olduğu elde edilmişti. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}(T(x)) &= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}f_n^2-\frac{f_n}{f_{n+1}}f_{n+1}^2\right)\\ &= (f_{n+1}f_n-f_nf_{n+1})\\ &= (0)\\ &= \theta\end{aligned}$$

olduğundan $x=\left(f_n^2\right)\in KerT$ olur. Lemma 2.1.2 den T dönüşümünün bire-bir olmadığını söylemek son derece kolaydır.

Teorem 3.0.4. $1\leq p<\infty$ *olmak üzere* $\ell_2\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ *yarı normlu uzayı bir yarı iç çarpım uzayıdır. Eğer* $p\neq 2$ *ise* $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ *yarı normlu uzayı bir yarı iç çarpım uzayı değildir [1].*

İspat: İlk olarak $\ell_2\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayı olduğunu göstermek için $x=(x_n),\ y=(y_n)\in\ell_2\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(x_n+y_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(x_{n+1}+y_{n+1})\right|^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}(x_n+y_n)-\frac{f_n}{f_{n+1}}(x_{n+1}+y_{n+1})\right)^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left[\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}x_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}x_{n+1}\right)+\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}y_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}y_{n+1}\right)\right]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right)^2 + \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + 2 \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right) \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right) \right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (x_n - y_n) - \frac{f_n}{f_{n+1}} (x_{n+1} - y_{n+1}) \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} (x_n - y_n) - \frac{f_n}{f_{n+1}} (x_{n+1} - y_{n+1}) \right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right) - \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right) \right]^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right)^2 + \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right)^2 \right. \\
&\qquad \left. - 2 \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right) \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right) \right]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da;

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 + \|x-y\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right)^2 \\
&= 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right)^2 \right) \\
&= 2 \left(\|x\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 + \|y\|_{2,\tilde{w},\tilde{F}}^2 \right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Önerme 2.1.2 den Paralelkenar kuralı sağlanır. Teorem 2.1.2 den $\ell_2\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayı olduğu elde edilir.

Son olarak $p \neq 2$ için $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayının bir yarı iç çarpım uzayından elde edilemeyeceğini göstermek için;

$x = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0, \cdots\right) \in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve $y = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0, \cdots\right) \in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ dizileri göz önüne alınırsa, $x+y = (2,0,0,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ve $x-y = (-1,-1,0,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ bulunur. Şimdi, sırasıyla bu dizilerin yarı normları hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (x_n + y_n) - \frac{f_n}{f_{n+1}} (x_{n+1} + y_{n+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| \frac{f_2}{f_1} (x_1 + y_1) - \frac{f_1}{f_2} (x_2 + y_2) \right|^p + \tilde{w}_2 \left| \frac{f_3}{f_2} (x_2 + y_2) - \frac{f_2}{f_3} (x_3 + y_3) \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\tilde{w}_1 \left| 1.2 - 1.0 \right|^p + \tilde{w}_2 \left| 2.0 - \frac{1}{2}.0 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\tilde{w}_1^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (x_n - y_n) - \frac{f_n}{f_{n+1}} (x_{n+1} - y_{n+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| \frac{f_2}{f_1} (x_1 - y_1) - \frac{f_1}{f_2} (x_2 - y_2) \right|^p + \tilde{w}_2 \left| \frac{f_3}{f_2} (x_2 - y_2) - \frac{f_2}{f_3} (x_3 - y_3) \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| 1(-1) - 1(-1) \right|^p + \tilde{w}_2 \left| 2(-1) - \frac{1}{2} 0 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\tilde{w}_2^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

bulunur. x ve y nin yarı normları ise

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} x_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} x_{n+1} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| \frac{f_2}{f_1} x_1 - \frac{f_1}{f_2} x_2 \right|^p + \tilde{w}_2 \left| \frac{f_3}{f_2} x_2 - \frac{f_2}{f_3} x_3 \right|^p + \tilde{w}_3 \left| \frac{f_4}{f_3} x_3 - \frac{f_3}{f_4} x_4 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| 1.\frac{1}{2} - 1.\left(-\frac{1}{2} \right) \right|^p + \tilde{w}_2 \left| 2.\left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}.0 \right|^p + \tilde{w}_3 \left| \frac{3}{2}.0 - \frac{2}{3}.0 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\tilde{w}_1 1 + \tilde{w}_2 1 + \tilde{w}_3 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|y\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} y_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} y_{n+1} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| \frac{f_2}{f_1} y_1 - \frac{f_1}{f_2} y_2 \right|^p + \tilde{w}_2 \left| \frac{f_3}{f_2} y_2 - \frac{f_2}{f_3} y_3 \right|^p + \tilde{w}_3 \left| \frac{f_4}{f_3} y_3 - \frac{f_3}{f_4} y_4 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\tilde{w}_1 \left| 1.\frac{3}{2} - 1.\frac{1}{2} \right|^p + \tilde{w}_2 \left| 2.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.0 \right|^p + \tilde{w}_3 \left| \frac{3}{2}.0 - \frac{2}{3}.0 \right|^p + \cdots \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\tilde{w}_1 1 + \tilde{w}_2 1 + \tilde{w}_3 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\|x+y\|^2_{p,\tilde{w},\tilde{F}} + \|x-y\|^2_{p,\tilde{w},\tilde{F}} = \left(2\tilde{w}_1^{\frac{1}{p}} \right)^2 + \left(2\tilde{w}_2^{\frac{1}{p}} \right)^2
$$

$$= 4\left(\tilde{w}_1^{\frac{2}{p}} + \tilde{w}_2^{\frac{2}{p}}\right) \tag{3.0.1}$$

ve

$$\begin{aligned} 2\left(\|x\|^2_{p,\tilde{w},\tilde{F}} + \|y\|^2_{p,\tilde{w},\tilde{F}}\right) &= 2\left(\left[(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{1}{p}}\right]^2 + \left[(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{1}{p}}\right]^2\right) \\ &= 2\left((\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{2}{p}} + (\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{2}{p}}\right) \\ &= 4\,(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{\frac{2}{p}} \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

eşitlikleri elde edilir. $p \neq 2$ için (3.0.1) ve (3.0.2) denklemleri birbirlerine eşit değillerdir. Paralelkenar kuralından $p \neq 2$ için $\ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ yarı normlu uzayı bir yarı iç çarpım uzayı değildir.

4. $\ell_1(w)$ UZAYINDAN $\ell_1(\tilde{w},\tilde{F})$ UZAYINA MATRİS OPERATÖRLERİNİN YARI NORMU

Bu bölümde, $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1(\tilde{w},\tilde{F})$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili teoremler ifade edilmiş ve bu matris operatörlerinin yarı normları hesaplanmıştır. Ardından bazı özel quasi toplanabilir matrisler tanımlanmış ve bu matris operatörlerinin sınırlılıkları ve yarı normları ile ilgili lemma, önerme, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.0.1. *Eğer $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right|$ olmak üzere $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} < \infty$ ise $T = (t_{nk})$ matris operatörü; $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1(\tilde{w},\tilde{F})$ uzayına sınırlıdır ve $\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} = M$ dir [1].*

İspat: $T : \ell_1(w) \to \ell_1(\tilde{w},\tilde{F})$, $x \to Tx = (Tx)_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ matris dönüşümü için

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (Tx)_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} (Tx)_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k\right) - \frac{f_n}{f_{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{n+1,k}x_k\right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k}x_k \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk}x_k - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k}x_k \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) x_k \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) x_k \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| |x_k| \qquad (4.0.1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| |x_k| \right|$ serisinin yakınsak olduğunu görelim. $(\tilde{w}_n)$ negatif terimli olmayan bir dizi ve hipotezde eşiti verilen s_k kullanılacak olursa;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| |x_k| \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k |x_k| \qquad (4.0.2)
\end{aligned}$$

olur. $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} < \infty$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\frac{s_k}{w_k} \leq M$ dir. Bu eşitsizlik $(4.0.2)$ ifadesinde göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| |x_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} w_k |x_k|$$

$$= M \|x\|_{1,w}$$

$$< \infty$$

bulunur. Yani $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right||x_k|\right|$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla Teorem 2.1.5 den

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right||x_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right||x_k|$$

olur. Bu eşitlik (4.0.1) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right||x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right||x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k |x_k| \\
&\leq M\sum_{k=1}^{\infty} w_k |x_k| \\
&= M\|x\|_{1,w}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T dönüşümünün operatör yarı normu $\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} = \sup_{x\in\ell_1(w)}\frac{\|Tx\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}}}{\|x\|_{1,w}}$ olduğundan,

$$\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} \leq M \tag{4.0.3}$$

olur.

Şimdi ise eşitsizliğin ters yönünün doğru olduğunu göstermek için $e^i = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots) \in \ell_1(w)$ dizisi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\|Te^i\right\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)e_k^i\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{n1}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,1}\right)\underbrace{e_1^i}_{=0}\right| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{n2}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,2}\right)\underbrace{e_2^i}_{=0}\right| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{n3}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,3}\right)\underbrace{e_3^i}_{=0}\right|
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{ni}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,i}\right)\underbrace{e_i^i}_{=1}\right|$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{ni}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,i}\right)\underbrace{e_i^i}_{=1}\right| \\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{ni}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,i}\right| \\
&=s_i \qquad (4.0.4)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bununla birlikte

$$\begin{aligned}
\left\|e^i\right\|_{1,w}&=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\left|e_n^i\right| \\
&=w_1\underbrace{\left|e_1^i\right|}_{=0}+w_2\underbrace{\left|e_2^i\right|}_{=0}+\cdots+w_i\underbrace{\left|e_i^i\right|}_{=1}+w_{i+1}\underbrace{\left|e_{i+1}^i\right|}_{=0}+\cdots \\
&=w_i \qquad (4.0.5)
\end{aligned}$$

bulunur. T dönüşümünün operatör yarı normu $\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}=\sup_{x\in\ell_1(w)}\frac{\|Tx\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}}}{\|x\|_{1,w}}$ olduğundan her $x\in\ell_1(w)$ için $\|Tx\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}}\leq\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}\|x\|_{1,w}$ olur. Bu eşitsizlikten

$$\left\|Te^i\right\|_{1,\tilde{w},\tilde{F}}\leq\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}\left\|e^i\right\|_{1,w} \qquad (4.0.6)$$

yazılır. (4.0.4) ve (4.0.5) eşitlikleri (4.0.6) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa, her $i\in\mathbb{N}$ için

$$s_i\leq\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}w_i$$

olduğunu söylemek kolaydır. Yani her $i\in\mathbb{N}$ için $\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}$; $\frac{s_i}{w_i}$ için bir üst sınır olur. Her $i\in\mathbb{N}$ için M; $\frac{s_i}{w_i}$ nin en küçük üst sınırı olduğundan

$$M\leq\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} \qquad (4.0.7)$$

olur. (4.0.3) ve (4.0.7) eşitsizliklerinden $M=\|T\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 4.0.1. *$S=(s_{nk})$ üst üçgensel matrisi her $k\in\mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{k}s_{nk}=1$ eşitliğini sağlıyorsa, $S=(s_{nk})$ matrisine quasi toplanabilir matris adı verilir [1].*

Teorem 4.0.2. *$S=(s_{nk})$ negatif olmayan bir üst üçgensel matris, (w_n) artan bir dizi olmak üzere eğer sabit bir $k\in\mathbb{N}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $s_{nk}\geq s_{n+1,k}$ ve $M'=\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{k}s_{nk}<\infty$ ise S; $\ell_1(w)$*

uzayından $\ell_1\left(w,\tilde{F}\right)$ uzayına bir sınırlı operatördür. Bununla birlikte operatörün yarı normu $\|S\|_{1,w,\tilde{F}} \leq M'$ eşitsizliğini sağlar. Özel olarak S quasi toplanabilir matris ise $\|S\|_{1,w,\tilde{F}} = 1$ dir [1].

İspat: $S = (s_{nk})$ negatif olmayan bir üst üçgensel matris olduğundan

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} w_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| + w_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Hipotezden, (w_n) nin artan bir dizi ve her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $s_{nk} \geq s_{n+1,k}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} w_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| + w_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} w_k \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| + w_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right| \\ &= w_k \left(\sum_{n=1}^{k-1} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right| + \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right| \right) \\ &= w_k \left(\sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} s_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} s_{n+1,k} \right) + \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right) \right) \\ &= w_k \left[\left(\frac{f_2}{f_1} s_{1k} - \frac{f_1}{f_2} s_{2k} \right) + \left(\frac{f_3}{f_2} s_{2k} - \frac{f_2}{f_3} s_{3k} \right) + \left(\frac{f_4}{f_3} s_{3k} - \frac{f_3}{f_4} s_{4k} \right) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{f_k}{f_{k-1}} s_{k-1,k} - \frac{f_{k-1}}{f_k} s_{k,k} \right) + \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} s_{kk} \right) \right] \\ &= w_k \left[s_{1k} \frac{f_2}{f_1} + s_{2k} \left(\frac{f_3}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) + s_{3k} \left(\frac{f_4}{f_3} - \frac{f_2}{f_3} \right) + \cdots + s_{kk} \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} - \frac{f_{k-1}}{f_k} \right) \right] \\ &= w_k \left[s_{1k} + s_{2k} \frac{f_2}{f_2} + s_{3k} \frac{f_3}{f_3} + \cdots + s_{kk} \frac{f_k}{f_k} \right] \\ &= w_k \left(s_{1k} + s_{2k} + s_{3k} + \cdots + s_{kk} \right) \\ &= w_k \sum_{n=1}^{k} s_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{s_k}{w_k} \leq \sum_{n=1}^{k} s_{nk}$$

şeklinde yazılabilir. $M' = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} s_{nk} < \infty$ varsayımından;

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} s_{nk} \\ &= M' < \infty \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.0.1 den S operatörü sınırlıdır ve $\|S\|_{1,w,\tilde{F}} \leq M'$ elde edilir.

Eğer S quasi toplanabilir matris ise tanımdan her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{k} s_{nk} = 1$ dir. Bundan dolayı $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} s_{nk} = 1$ olduğu açıktır. Bu ve hipotezde verilen $M' = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} s_{nk}$ ve aynı zamanda yukarıda elde edilen $\|S\|_{1,w,\tilde{F}} \leq M'$ beraber düşünüldüğünde

$$\|S\|_{1,w,\tilde{F}} \leq 1 \tag{4.0.8}$$

olduğu görülür.

Burada $e^1 = \left(e_n^1\right) = (1,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_1(w)$ dizisinin yarı normu hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\|e^1\|_{1,w} &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|e_n^1\right| \\
&= w_1 \left|e_1^1\right| + w_2 \left|e_2^1\right| + \cdots + w_n \left|e_n^1\right| + \cdots \\
&= w_1 1 + w_2 0 + \cdots + w_n 0 + \cdots \\
&= w_1
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(Se^1\right) = (s_{11},0,0,\cdots)$ dizisidir. Bunu açıkça görmek gerekirse, gerçekten

$$\begin{aligned}
\left[s_{nk}\right]\left[e_n^1\right] &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} & \dots \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ s_{n1} & s_{n1} & \dots & s_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_n^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} & \dots \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & s_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. S nin quasi toplanabilir bir matris olmasından dolayı $s_{11} = 1$ dir. Dolayısıyla $\left(Se^1\right) = (s_{11},0,\cdots,0,\cdots) = (1,0,\cdots,0,\cdots)$ dizisidir. Şimdi bu dizinin yarı normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\|Se^1\|_{1,w,\tilde{F}} &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(Se^1\right)_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}\left(Se^1\right)_{n+1}\right| \\
&= w_1 \left|\frac{f_2}{f_1}\left(Se^1\right)_1 - \frac{f_1}{f_2}\left(Se^1\right)_2\right| + w_2 \left|\frac{f_3}{f_2}\left(Se^1\right)_2 - \frac{f_2}{f_3}\left(Se^1\right)_3\right| + 0 + \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w_1 \left| \frac{f_2}{f_1} s_{11} - \frac{f_1}{f_2} 0 \right| + w_2 \left| \frac{f_3}{f_2} 0 - \frac{f_2}{f_3} 0 \right| + 0 + \cdots \\
&= w_1 \left| 1 s_{11} \right| \\
&= w_1 \left| 1 \cdot 1 \right| \\
&= w_1
\end{aligned}
$$

bulunur. S operatörü sınırlı olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\| S e^1 \right\|_{1,w,\tilde{F}} &\leq \|S\|_{1,w,\tilde{F}} \left\| e^1 \right\|_{1,w} \\
w_1 &\leq \|S\|_{1,w,\tilde{F}} w_1 \\
1 &\leq \|S\|_{1,w,\tilde{F}} \\
\|S\|_{1,w,\tilde{F}} &\geq 1 \qquad (4.0.9)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(4.0.8) ve (4.0.9) eşitsizliklerinden $\|S\|_{1,w,\tilde{F}} = 1$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin sonucu olarak İlkhan [1] makalesinde bazı özel quasi toplanabilir matrislerin yarı normları ile ilgilenmiş bu bağlamda da ilk olarak Riesz matrisinin transpozunu ele almış bulunmaktadır.

Tanım 4.0.2. *$q_1 > 0$ ve (q_n) negatif olmayan bir dizi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $Q_k = q_1 + q_2 + \cdots + q_k$ olmak üzere $\tilde{R} = (\tilde{r}_{nk})$ Riesz matrisinin transpozu;*

$$
\tilde{r}_{nk} = \begin{cases} \frac{q_n}{Q_k} & , \quad n \leq k \\ 0 & , \quad n > k \end{cases}
$$

ile tanımlıdır. Bu matris açık haliyle yazılırsa

$$
\tilde{r}_{nk} = \begin{bmatrix}
q_1/Q_1 & q_1/Q_2 & \dots & q_1/Q_k & \dots \\
0 & q_2/Q_2 & \dots & q_2/Q_k & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
0 & 0 & \dots & q_k/Q_k & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots
\end{bmatrix}
$$

şeklindedir. Dikkat edilirse her bir sütundaki elemanların toplamı 1 dir. Örneğin, $k-$ıncı sütun için

$$
\begin{aligned}
\frac{q_1}{Q_k} + \frac{q_2}{Q_k} + \cdots + \frac{q_k}{Q_k} + 0 + \cdots &= \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_k}{Q_k} \\
&= \frac{Q_k}{Q_k} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla Riesz matrisinin transpozu bir quasi toplanabilir matristir [1].

Tanım 4.0.3. *$\tilde{R} = (\tilde{r}_{nk})$ matrisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = 1$ seçilirse $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ Cesàro matrisinin transpozu elde edilir. Bu matris*

$$\tilde{c}_{nk}=\begin{cases} \frac{1}{k} & , \quad n \leq k \\ 0 & , \quad n > k \end{cases}$$

ile gösterilir [1].

Sonuç 4.0.1. *Eğer (q_n) bir azalan dizi ve (w_n) bir artan dizi ise o zaman $\tilde{R}$ Riesz matrisinin transpozu; $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1\left(w,\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı bir operatördür ve $\left\|\tilde{R}\right\|_{1,w,\tilde{F}} = 1$ dir [1].*

İspat: $\tilde{R}$ Riesz matrisinin transpozu bir quasi toplanabilir matris olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{k} \tilde{r}_{nk} = 1$ dir. Buradan

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \tilde{r}_{nk} = \sup_{k\in\mathbb{N}} 1 = 1 < \infty$$

olur. Bununla birlikte (q_n) bir azalan dizi olmak üzere her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{r}_{nk} = \frac{q_n}{Q_k} \geq \frac{q_{n+1}}{Q_k} = \tilde{r}_{n+1,k}$$

elde edilir. Bu taktirde, Teorem 4.0.2 den $\tilde{R}$ Riesz matrisinin transpozu; $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1\left(w,\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı bir operatör ve $\left\|\tilde{R}\right\|_{1,w,\tilde{F}} = 1$ dir.

Sonuç 4.0.2. *Eğer $\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n}{kw_k} < \infty$ ise $\tilde{C}$ Cesàro matrisinin transpozu $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı bir operatördür ve $\left\|\tilde{C}\right\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n}{kw_k}$ dir [1].*

İspat: Cesàro matrisinin transpozu $\tilde{C}$; bir quasi toplanabilir matris olduğundan

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \tilde{c}_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \tilde{c}_{n+1,k} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \tilde{c}_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \tilde{c}_{n+1,k} \right| + \tilde{w}_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \tilde{c}_{kk} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \frac{1}{k} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \frac{1}{k} \right| + \tilde{w}_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \frac{1}{k} \right| \\
&= \frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \right| + \tilde{w}_k \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right| \right) \\
&= \frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \right) + \tilde{w}_k \frac{f_{k+1}}{f_k} \right) \\
&= \frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \frac{f_{n+1}}{f_n} - \sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \frac{f_n}{f_{n+1}} + \tilde{w}_k \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n \frac{f_{n+1}}{f_n} - \sum_{n=1}^{k-1} \tilde{w}_n \frac{f_n}{f_{n+1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n \frac{f_{n+1}}{f_n}\right) \\
&\leq \frac{2}{k}\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da

$$\frac{s_k}{w_k} \leq \frac{2}{kw_k}\sum_{n=1}^{k} \tilde{w}_n$$

bulunur. Ve varsayımdan

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{kw_k}\tilde{w}_n < \infty$$

elde edilir. Bu taktirde Teorem 4.0.1 den Cesàro matrisinin transpozu $\tilde{C}$ sınırlıdır ve

$$\left\|\tilde{C}\right\|_{1,w,\tilde{w},\tilde{F}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\sum_{n=1}^{k}\tilde{w}_n}{kw_k}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.0.3. *$T = (t_{nk})$ negatif olmayan bir matris ve her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \geq t_{n+1,k}$ ise ve bununla birlikte her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} < \infty$ ve $M'' = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} < \infty$ ise T operatörü; ℓ_1 uzayından $\ell_1\left(\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı operatördür ve $\|T\|_{1,\tilde{F}} = M''$ dür. Özel olarak T operatörü quasi toplanabilir matris ise $\|T\|_{1,\tilde{F}} = 1$ dir [1].*

İspat: (f_n) Fibonacci dizisi ile birlikte $T = (t_{nk})$ negatif olmayan matrisi beraber ele alınırsa;

$$
\begin{aligned}
1 \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 2 \\
t_{nk} \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} \leq 2t_{nk}
\end{aligned}
\tag{4.0.10}
$$

olur ve buradan eşitsizliklerle alakalı temel kurallardan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_{n+1,k} \leq \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \leq t_{n+1,k} \\
-t_{n+1,k} \leq -\frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \leq -\frac{t_{n+1,k}}{2}
\end{aligned}
\tag{4.0.11}
$$

olduğu açıktır. (4.0.10) ve (4.0.11) eşitsizliklerinden

$$t_{nk} - t_{n+1,k} \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \leq 2t_{nk} - \frac{t_{n+1,k}}{2}$$

elde edilir. Buradan, her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \geq t_{n+1,k}$ olduğundan

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \geq t_{nk} - t_{n+1,k} \geq 0 \tag{4.0.12}$$

dır. Şimdi $(4.0.12)$ eşitsizliği ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} < \infty$ hipotezi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) \\
&= \frac{f_2}{f_1} t_{1k} - \frac{f_1}{f_2} t_{2k} \\
&\quad + \frac{f_3}{f_2} t_{2k} - \frac{f_2}{f_3} t_{3k} \\
&\quad + \frac{f_4}{f_3} t_{3k} - \frac{f_3}{f_4} t_{4k} \\
&\qquad \vdots \\
&= \frac{f_2}{f_1} t_{1k} + \left(\frac{f_3}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) t_{2k} + \left(\frac{f_4}{f_3} - \frac{f_2}{f_3} \right) t_{3k} + \cdots \\
&= t_{1k} + t_{2k} + t_{3k} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $M'' < \infty$ varsayımdan

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} = \sup_{k\in\mathbb{N}} s_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} = M'' < \infty$$

bulunur. O halde Teorem 4.0.1 den T operatörü; ℓ_1 uzayından $\ell_1\left(\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı operatördür ve $\|T\|_{1,\tilde{F}} = M''$ dür.

Eğer T quasi toplanabilir matris ise $\|T\|_{1,\tilde{F}} = 1$ eşitliği elde edilir.

Tanım 4.0.4. *Her $n,k \in \mathbb{N}$ için $h_{nk} = \frac{1}{n+k}$ ile tanımlanan $H = (h_{nk})$ matrisine Hilbert matris operatörü denir. Bu matrisin açık hali*

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} & \dots \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(1+k) & \dots \\ 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(2+k) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(n+k) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

şeklindedir [1].

Şimdi Hilbert matris operatörünün yarı normunu hesaplamak için ihtiyaç duyulan lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 4.0.1. *$0 < \alpha < 1$ için $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(t+c)} dt = \frac{\pi}{c^{\alpha} \sin \alpha\pi}$ dir [1].*

İspat: $\frac{1}{t^{\alpha}(t+c)}$ fonksiyonu $t=0$ noktasında belirsiz olduğundan bu integral

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}(t+c)}dt=\lim_{m\to 0^+}\int_m^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}(t+c)}dt$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi; değişken değiştirme metodundan $\frac{1}{t}=x$ denilirse $-\frac{1}{t^2}dt=dx$ olur. Buradan da $dt=-\frac{1}{x^2}dx$ elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}\lim_{m\to 0^+}\int_m^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}(t+c)}dt &= \lim_{m\to 0^+}\int_{\frac{1}{m}}^{0}\frac{-x^{\alpha}}{x^2\left(\frac{1}{x}+c\right)}dx\\ &= \lim_{m\to 0^+}\int_{\frac{1}{m}}^{0}\frac{-x^{\alpha}x^{-1}}{x\left(\frac{1}{x}+c\right)}dx\\ &= \lim_{m\to 0^+}\int_{\frac{1}{m}}^{0}\frac{-x^{\alpha-1}}{(1+cx)}dx\\ &= \int_{\infty}^{0}\frac{-x^{\alpha-1}}{1+cx}dx\\ &= \int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+cx}dx\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $f(z)=z^{\alpha-1}\frac{1}{1+zc}$ fonksiyonunun singularitesi tektir ve $z=-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}e^{\pi i}$ noktasıdır.

Şimdi $g(z)=z^{\alpha-1}$ ve $h(z)=1+zc$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}g\left(\frac{1}{c}e^{\pi i}\right) &= \frac{e^{\pi i(\alpha-1)}}{c^{\alpha-1}}\neq 0\\ h\left(\frac{1}{c}e^{\pi i}\right) &= h\left(-\frac{1}{c}\right)=1+\left(-\frac{1}{c}\right)c=0\\ h'\left(\frac{1}{c}e^{\pi i}\right) &= h'\left(-\frac{1}{c}\right)=c\neq 0\end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 2.1.4 den

$$\begin{aligned}Rez\left(z^{\alpha-1}\frac{1}{1+zc},-\frac{1}{c}\right) &= \frac{g\left(\frac{1}{c}e^{\pi i}\right)}{h'\left(\frac{1}{c}e^{\pi i}\right)}\\ &= \frac{\frac{e^{\pi i(\alpha-1)}}{c^{\alpha-1}}}{c}\\ &= \frac{e^{\pi i(\alpha-1)}}{c^{\alpha}}\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.1.3 den

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+cx}dx &= -\frac{\pi e^{-\pi ia}}{\sin a\pi}\sum_i Rez\left(z^{a-1}f(z),z_i\right)\\ &= -\frac{\pi e^{-\pi ia}}{\sin a\pi}Rez\left(z^{\alpha-1}\frac{1}{1+zc},-\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin a\pi} \frac{e^{\pi i(\alpha-1)}}{c^{\alpha}} \\
&= -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin a\pi} \frac{e^{\pi i\alpha} e^{-\pi i}}{c^{\alpha}} \\
&= \frac{\pi}{c^{\alpha} \sin \alpha\pi}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.0.2. $0 < \alpha < 1$ *ve* $j \geq 1$ *için*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}(i+j)} \leq \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt$$

dir [49].

İspat: $g_n(\alpha) = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{\alpha}} dt$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Öncelikle $g_n(\alpha) > \frac{1}{n^{\alpha}}$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
g_n(\alpha) &= \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \\
&= \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{n-1}^{n} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.0.13}
$$

olur. $(4.0.13)$ denkleminden

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = \int_{n-1}^{n} \frac{1-\alpha}{t^{\alpha}} dt \tag{4.0.14}$$

olduğundan $h(t) = \frac{1-\alpha}{t^{\alpha}}$ olarak tanımlanırsa h fonksiyonu $[n-1, n]$ aralığında sürekli olduğundan Ortalama Değer Teoreminden $n-1 < c < n$ olacak şekilde bir c sayısı vardır öyle ki

$$h(c) = \frac{1}{n-(n-1)} \int_{n-1}^{n} \frac{1-\alpha}{t^{\alpha}} dt$$

dir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\alpha}{c^{\alpha}} &= \frac{1}{n-(n-1)} \int_{n-1}^{n} \frac{1-\alpha}{t^{\alpha}} dt \\
&= \int_{n-1}^{n} \frac{1-\alpha}{t^{\alpha}} dt
\end{aligned} \tag{4.0.15}
$$

elde edilir. (4.0.14) ve (4.0.15) eşitliklerinden

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{c^{\alpha}} \tag{4.0.16}$$

bulunur. $c < n$ ve $0 < \alpha < 1$ olduğundan $c^{\alpha} < n^{\alpha}$ ve buradan $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{c^{\alpha}}$ olur. Bu (4.0.16) denkleminde göz önüne alınırsa

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} > \frac{1-\alpha}{n^{\alpha}} \tag{4.0.17}$$

elde edilir. (4.0.17) eşitsizliği (4.0.13) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_n(\alpha) &> \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{n^{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $\frac{1}{n^{\alpha}} < g_n(\alpha)$ dir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}(i+j)} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(\alpha)}{(i+j)} \tag{4.0.18}$$

yazılabilir. Burada $g_i(\alpha)$ tanımı göz önüne alınırsa

$$\frac{g_i(\alpha)}{i+j} = \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^{\alpha}(i+j)} dt \tag{4.0.19}$$

olduğu açıktır. Buradan $i-1 \leq t \leq i$ olduğundan $i-1+j \leq t+j \leq i+j$ dir ve açık olarak $\frac{1}{i+j} \leq \frac{1}{t+j}$ olduğu görülür ki buradan da $\frac{1}{t^{\alpha}(i+j)} \leq \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)}$ elde edilir ve

$$\int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^{\alpha}(i+j)} dt \leq \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt \tag{4.0.20}$$

bulunur. (4.0.20) eşitsizliği (4.0.19) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$\frac{g_i(\alpha)}{(i+j)} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt \tag{4.0.21}$$

olur. (4.0.21) eşitsizliği (4.0.18) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}(i+j)} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt + \int_{2}^{3} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt + \cdots \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(t+j)} dt \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.0.4. *$0 < \alpha < 1$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ ise; H Hilbert matris operatörü; $\ell_1(w)$ uzayından $\ell_1(w, \tilde{F})$ uzayına sınırlı bir operatördür ve $\|H\|_{1,w,\tilde{F}} \leq \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\left(2 - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\right)$ dir [1].*

İspat: Her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n+1+k}$$

olduğundan açık olarak $h_{nk} \geq h_{n+1,k}$ yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} h_{n+1,k} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} h_{n+1,k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \frac{1}{n+1+k} \right) \end{aligned} \tag{4.0.22}$$

elde edilir. Burada $\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}$ ifadesi detaylı incelendiğinde her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n+k} > 0$ ve $\frac{1}{n+k+1} > 0$ olduğu ve daha önce de bahsedildiği üzere (f_n) Fibonacci dizisi için $1 \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 2$ ve $-1 \leq -\frac{f_n}{f_{n+1}} \leq -\frac{1}{2}$ eşitsizliklerinin sağlandığı hatırda tutulursa

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} \frac{1}{n+k} \leq 2 \frac{1}{n+k} \tag{4.0.23}$$

eşitsizliği ve

$$-\frac{1}{n+1+k} \leq -\frac{f_n}{f_{n+1}} \frac{1}{n+1+k} \leq -\frac{1}{2} \frac{1}{n+1+k} \tag{4.0.24}$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Buradan (4.0.23) eşitsizliği ve (4.0.24) eşitsizliğinden

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \frac{1}{n+1+k} \leq 2 \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1+k} \tag{4.0.25}$$

bulunur. (4.0.25) eşitsizliği (4.0.22) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(2 \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1+k} \right)$$

olur. Burada da Lemma 4.0.2 den

$$s_k \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} \left(2 \frac{1}{t+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1+k} \right) dt \tag{4.0.26}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{t^{\alpha}}\left(2\frac{1}{t+k} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1+k}\right)$ fonksiyonunun

$$\frac{1}{t^{\alpha}} \left(2 \frac{1}{t+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1+k} \right) \leq \frac{1}{t^{\alpha}} \left(2 \frac{1}{t+k} \right)$$

olduğu açıktır. Lemma 4.0.1 den $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\left(2\frac{1}{t+k}\right) dt$ integrali yakınsak olduğundan, genelleştirilmiş integraller için karşılaştırma kriterinden $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\left(2\frac{1}{t+k} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1+k}\right) dt$ integrali yakınsak olur.

Bundan dolayı integral toplam üzerine dağılır ve Lemma 4.0.1 den

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\left(2\frac{1}{t+k}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1+k}\right)dt &= 2\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(t+k)}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha((t+1)+k)}dt \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(t+k)}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(t+(k+1))}dt \\
&= \frac{2\pi}{k^\alpha \sin\alpha\pi}-\frac{\pi}{2(k+1)^\alpha \sin\alpha\pi} \\
&= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{2}{k^\alpha}-\frac{1}{2(k+1)^\alpha}\right) \qquad (4.0.27)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.0.27) eşitliği (4.0.26) de kullanılır ve eşitsizliğin her iki tarafı k^α ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
k^\alpha s_k &\le k^\alpha \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{2}{k^\alpha}-\frac{1}{2(k+1)^\alpha}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha\right) \\
&\le \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{\frac{1}{k^\alpha}} \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} k^\alpha s_k \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right)
\end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 4.0.1 den H Hilbert matris operatörü sınırlıdır ve $\|H\|_{1,w,\tilde{F}} \le \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right)$ dir.

5. $\ell_p(w)$ UZAYINDAN $\ell_p\left(w,\tilde{F}\right)$ UZAYINA MATRİS OPERATÖRLERİNİN YARI NORMU

Bu bölümde, $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(w,\tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili teoremler ifade edilmiş ve yarı normları hesaplanmıştır. Ardından bir önceki bölümde tanımlanmış olan $\tilde{R}$ Riezs matrisinin transpozu operatörünün ve H Hilbert matris operatörünün sınırlılıkları ve yarı normları ile ilgili teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır.

Lemma 5.0.1. *$p>1$ ve her $n,k\in\mathbb{N}$ için $s_{nk}\geq 0$ olmak üzere $S=(s_{nk})$ bir matris operatörü ve (u_n) ve (t_k) pozitif terimli dizileri için*

$$u_n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{nk}}{t_k^{1/p}}\leq A \quad (n\in\mathbb{N}\ ve\ A\in\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{t_k^{(1-p)/p}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(1-p)/p}s_{nk}\leq B \quad (k\in\mathbb{N}\ ve\ B\in\mathbb{R})$$

ise

$$\|S\|_p\leq\frac{B^{1/p}}{A^{(1-p)/p}}$$

dir [50].

İspat: $S:\ell_p\to\ell_p$ bir matris operatörü ve $x=(x_k)\in\ell_p$ olsun. Bu taktirde $S(x)=(Sx)_n=\left(\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}x_k\right)\in\ell_p$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}^{(p-1)/p}s_{nk}^{1/p}t_k^{(1-p)/p^2}t_k^{(p-1)/p^2}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{nk}^{1/p}t_k^{(p-1)/p^2}x_k\right)\left(s_{nk}^{(p-1)/p}t_k^{(1-p)/p^2}\right) \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

biçiminde yazılır. (5.0.1) denklemine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{nk}^{1/p}t_k^{(p-1)/p^2}x_k\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{nk}^{(p-1)/p}t_k^{(1-p)/p^2}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}t_k^{(p-1)/p}x_k^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}t_k^{-1/p}\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{nk}}{t_k^{1/p}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}t_k^{(p-1)/p}x_k^p\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{5.0.2}$$

elde edilir. Hipotezden $u_n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{nk}}{t_k^{1/p}}\leq A$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{nk}}{t_k^{1/p}}\leq Au_n^{-1/p}$ dir. Bu ifade (5.0.2) denkleminde göz önüne alınırsa

$$S(x)\leq\left[Au_n^{-1/p}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}t_k^{(p-1)/p}x_k^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{5.0.3}$$

bulunur. Buradan $(5.0.3)$ eşitsizliğinin her iki tarafının $p-$inci kuvveti alınırsa

$$\begin{aligned}
(S(x))^p &\leq \left[Au_n^{-1/p}\right]^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} s_{nk} t_k^{(p-1)/p} x_k^p \\
&= A^{p-1} u_n^{(1-p)/p} \sum_{k=1}^{\infty} s_{nk} t_k^{(p-1)/p} x_k^p
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $\sum_{n=1}^{\infty}$ toplamı alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (S(x))^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} A^{p-1} u_n^{(1-p)/p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(s_{nk} t_k^{(p-1)/p} x_k^p \right) \\
&= A^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_n^{(1-p)/p} s_{nk} t_k^{(p-1)/p} x_k^p \\
&= A^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1-p)/p} s_{nk} t_k^{(p-1)/p} x_k^p \\
&= A^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} t_k^{(p-1)/p} x_k^p \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1-p)/p} s_{nk} \qquad (5.0.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $\frac{1}{t_k^{(1-p)/p}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1-p)/p} s_{nk} \leq B$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1-p)/p} s_{nk} \leq B\ t_k^{(1-p)/p}$ dir. Bu ifade $(5.0.4)$ eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (S(x))^p &\leq A^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} t_k^{(p-1)/p} x_k^p B t_k^{(1-p)/p} \\
&= A^{p-1} B \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p \qquad (5.0.5)
\end{aligned}$$

olur. $(5.0.5)$ eşitsizliğinin her iki tarafının $1/p$-inci kuvveti alınırsa

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} (S(x))^p \right)^{1/p} &\leq \left(A^{p-1} B \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p \right)^{1/p} \\
&= A^{(p-1)/p} B^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

bulunur. Bir başka deyişle

$$\begin{aligned}
\|Sx\|_p &\leq A^{(p-1)/p} B^{1/p} \|x\|_p \\
\frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} &\leq \frac{B^{1/p}}{A^{(1-p)/p}}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\sup_{x \in \ell_p} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} \leq \frac{B^{1/p}}{A^{(1-p)/p}}$$

olur ki operatör normu tanımından

$$\|S\|_p \leq \frac{B^{1/p}}{A^{(1-p)/p}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır [49].

Lemma 5.0.2. *$T=(t_{nk})$ ve $S=(s_{nk})$ matris operatörleri için $s_{nk}=\left(\frac{\tilde{w}_n}{w_k}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)$ bağıntısı geçerli olmak üzere $p\geq 1$ için $\|T\|_{p,w,\tilde{w},\tilde{F}}=\|S\|_p$ dir. Bu durumda T operatörünün; $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul S operatörünün ℓ_p uzayı üzerinde sınırlı olmasıdır [1].*

İspat: $T:\ell_p(w)\to\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ matris operatörü sınırlı olsun. Verilen herhangi bir $x\in\ell_p(w)$ dizisinden faydalanarak her $k\in\mathbb{N}$ için $y=(y_k)$ dizisi $y_k=w_k^{1/p}x_k$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}\|x\|_{p,w}&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|w_k^{\frac{1}{p}}x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|y\|_p\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda $\|x\|_{p,w}<\infty$ olduğundan $\|y\|_p<\infty$ olur ki $y\in\ell_p$ demektir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|T\|_{p,w,\tilde{w},\tilde{F}}^p&=\sup_{x\in\ell_p(w),x\neq0}\frac{\|T(x)\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}^p}{\|x\|_{p,w}^p}\\
&=\sup_{x\in\ell_p(w),x\neq0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}(T(x))_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}(T(x))_{n+1}\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p}\\
&=\sup_{x\in\ell_p(w),x\neq0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}x_k\right)-\frac{f_n}{f_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_{n+1,k}x_k\right)\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p}\\
&=\sup_{x\in\ell_p(w),x\neq0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}(t_{nk}x_k)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}\left(t_{n+1,k}x_k\right)\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p}\\
&=\sup_{x\in\ell_p(w),x\neq0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)x_k\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}w_k|x_k|^p}\\
&=\sup_{y\in\ell_p}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\frac{y_k}{w_k^{1/p}}\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p}\\
&=\sup_{y\in\ell_p}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{w}_n^{1/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\frac{y_k}{w_k^{1/p}}\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p}\\
&=\sup_{y\in\ell_p}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{w}_n^{1/p}}{w_k^{1/p}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)y_k\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{y\in\ell_p} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\tilde{w}_n}{w_k}\right)^{1/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)y_k\right|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p}\\
&= \sup_{y\in\ell_p} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}y_k|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p}\\
&= \sup_{y\in\ell_p} \frac{\|Sy\|_p^p}{\|y\|_p^p}\\
&= \|S\|_p^p
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da $S:\ell_p\to\ell_p$ matris operatörü sınırlıdır.

Yeter şartın ispatı ise $S:\ell_p\to\ell_p$ ye sınırlı operatör ve $x\in\ell_p(w)$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $y_k=w_k^{1/p}x_k$ olmak üzere gerek şartın ispatında olduğu gibi

$$\|S\|_p^p=\|T\|_{p,w,\tilde{w},\tilde{F}}^p$$

olmasından dolayı $T:\ell_p(w)\to\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ ya sınırlı bir operatördür.

Teorem 5.0.1. *$\tilde{R}$ matrisi $\tilde{r}_{nk}=\begin{cases}\frac{q_n}{Q_k} &, \quad n\le k\\ 0 &, \quad n>k\end{cases}$ olarak tanımlanan bir matris operatörü, (q_n) dizisi $q_1=q_2=2$ olmak üzere azalan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty}Q_n=\infty$ ve bununla birlikte $p>1$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $w_n=\left(\frac{2Q_{n-1}}{q_n}\right)^p$ ve $Q_0=1$ ise $\tilde{R}$; $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(\tilde{F}\right)$ uzayına sınırlı operatördür ve $\left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}}=1$ dir [1].*

İspat: Lemma 5.0.2 de T matrisi yerine $\tilde{R}$ matrisi alınırsa, S matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır

$$
\begin{aligned}
s_{nk} &= \begin{cases}
\left(\frac{1}{\left(\frac{2Q_{k-1}}{q_k}\right)^p}\right)^{1/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{q_n}{Q_k}-\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{q_{n+1}}{Q_k}\right) &, \quad n<k\\
\left(\frac{1}{\left(\frac{2Q_{k-1}}{q_k}\right)^p}\right)^{1/p}\left(\frac{f_{k+1}}{f_k}\frac{q_k}{Q_k}\right) &, \quad n=k\\
0 &, \quad n>k
\end{cases}\\
&= \begin{cases}
\frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}q_{n+1}\right) &, \quad n<k\\
\frac{1}{2}\frac{f_{k+1}}{f_k}\frac{q_k^2}{Q_{k-1}Q_k} &, \quad n=k\\
0 &, \quad n>k
\end{cases}
\end{aligned}
$$

ve Lemma 5.0.2 den $\left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}}=\|S\|_p$ olur. Lemma 5.0.2 deki $\tilde{w}$ dizisi her $n\in\mathbb{N}$ için $\tilde{w}_n=1$ olarak tanımlanan dizidir.

Burada her $n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}$ serisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}=\sum_{k=1}^{n-1}s_{nk}+s_{nn}+\sum_{k=n+1}^{\infty}s_{nk}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{2}\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{q_n^2}{Q_{n-1}Q_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}q_{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n\frac{q_n}{Q_{n-1}Q_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}q_{n+1}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q_k}{Q_{k-1}Q_k} \qquad (5.0.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q_k}{Q_{k-1}Q_k}$ serisi ele alınır ve bu serinin $t-$inci kısmi toplamlar dizisi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{t}\frac{q_k}{Q_{k-1}Q_k} &= \sum_{k=n+1}^{t}\left(\frac{1}{Q_{k-1}} - \frac{1}{Q_k}\right)\\
&= \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n+1}}\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{Q_{n+1}} - \frac{1}{Q_{n+2}}\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{Q_{n+2}} - \frac{1}{Q_{n+3}}\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{Q_{n+3}} - \frac{1}{Q_{n+4}}\right)\\
&\quad\quad \vdots\\
&\quad + \left(\frac{1}{Q_{t-1}} - \frac{1}{Q_t}\right)\\
&= \frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_t}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $t \to \infty$ iken limite geçilir ve hipotezden $\lim_{t\to\infty} Q_t = \infty$ olduğu da akılda tutulursa bu kısmi toplamlar dizinin limiti $\frac{1}{Q_n}$ bulunur. O halde serinin toplamı $\frac{1}{Q_n}$ olur. Bu sonuç, $(5.0.6)$ da yerine yazılır ve aynı zamanda (q_n) nin azalan bir dizi olduğu hipotezi de göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} s_{nk} &= \frac{1}{2}\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n\left(\frac{1}{Q_{n-1}} - \frac{1}{Q_n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}q_{n+1}\right)\frac{1}{Q_n}\\
&= \frac{1}{2}\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n\frac{1}{Q_{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{f_n}{f_{n+1}}q_{n+1}\frac{1}{Q_n}\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{f_{n+1}}{f_n}q_n\frac{1}{Q_{n-1}}\\
&\leq \frac{1}{2}2q_n\frac{1}{Q_{n-1}}\\
&= \frac{q_n}{Q_{n-1}}\\
&= \frac{q_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{n-1}}\\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

olur.

Şimdi de her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} s_{nk}$ serisi ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} s_{nk} &= \sum_{n=1}^{k-1} s_{nk} + s_{kk} + \sum_{n=k+1}^{\infty} s_{nk} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} q_{n+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{f_{k+1}}{f_k} \frac{q_k^2}{Q_{k-1}Q_k} + 0 \\
&= \frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k} \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} q_{n+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{f_{k+1}}{f_k} \frac{q_k^2}{Q_{k-1}Q_k} \\
&= \frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k} \left[\sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} q_{n+1} \right) + \frac{f_{k+1}}{f_k} q_k \right] \qquad (5.0.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} q_{n+1} \right) + \frac{f_{k+1}}{f_k} q_k$ toplamı incelenirse

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} q_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} q_{n+1} \right) + \frac{f_{k+1}}{f_k} q_k &= \left(\frac{f_2}{f_1} q_1 - \frac{f_1}{f_2} q_2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{f_3}{f_2} q_2 - \frac{f_2}{f_3} q_3 \right) \\
&\quad + \left(\frac{f_4}{f_3} q_3 - \frac{f_3}{f_4} q_4 \right) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \left(\frac{f_k}{f_{k-1}} q_{k-1} - \frac{f_{k-1}}{f_k} q_k \right) \\
&\quad + \frac{f_{k+1}}{f_k} q_k \\
&= \frac{f_2}{f_1} q_1 + \left(\frac{f_3}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) q_2 + \cdots + \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} - \frac{f_{k-1}}{f_k} \right) q_k \\
&= \frac{f_2}{f_1} q_1 + \left(\frac{f_3 - f_1}{f_2} \right) q_2 + \cdots + \left(\frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{f_k} \right) q_k \\
&= \frac{1}{1} q_1 + \frac{f_2}{f_2} q_2 + \cdots + \frac{f_k}{f_k} q_k \\
&= q_1 + q_2 + \cdots + q_k \\
&= \sum_{n=1}^{k} q_n \qquad (5.0.8)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.0.8) eşitliği (5.0.7) denkleminde yerine yazılır ve (q_n) nin azalan bir dizi olduğu hipotezi tekrar göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} s_{nk} &= \frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k} \sum_{n=1}^{k} q_n \\
&= \frac{q_k}{2Q_{k-1}Q_k} Q_k \\
&= \frac{q_k}{2Q_{k-1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{q_k}{q_1+q_2+\cdots+q_{k-1}} \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

olur.

Lemma 5.0.1 de her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = t_n = 1$ seçilirse $A = 1$, $B = 1$ ve $\|S\|_p \leq 1$ elde edilir. Ayrıca $\|\tilde{R}\|_{p,w,\tilde{F}} = \|S\|_p$ olduğundan

$$
\|\tilde{R}\|_{p,w,\tilde{F}} \leq 1 \tag{5.0.9}
$$

bulunur.

Şimdi $e^1 = (e_n^1) = (1,0,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_p(w)$ dizisinin yarı normu hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\|e^1\|_{p,w} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|e_n^1\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(w_1\left|e_1^1\right|^p + w_2\left|e_2^1\right|^p + w_3\left|e_3^1\right|^p + \cdots + w_n\left|e_n^1\right|^p + \cdots\right)^{1/p} \\
&= (w_1 1^p + w_2 0^p + w_3 0^p + \cdots + w_n 0^p + \cdots)^{1/p} \\
&= w_1^{1/p} \\
&= \left(\left(\frac{2Q_0}{q_1}\right)^p\right)^{1/p} \\
&= \frac{2Q_0}{q_1} \\
&= \frac{2\cdot 1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(\tilde{R}e^1) = (q_1/Q_1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ dizisidir. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
[\tilde{R}]\,[e_n^1] &= \begin{bmatrix}
\tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} & \cdots & \tilde{r}_{1n} & \cdots \\
\tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} & \cdots & \tilde{r}_{2n} & \cdots \\
\tilde{r}_{31} & \tilde{r}_{32} & \tilde{r}_{33} & \cdots & \tilde{r}_{3n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
\tilde{r}_{n1} & \tilde{r}_{n2} & \tilde{r}_{n3} & \cdots & \tilde{r}_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ e_3^1 \\ \vdots \\ e_n^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
q_1/Q_1 & q_1/Q_2 & q_1/Q_3 & \cdots & q_1/Q_n & \cdots \\
0 & q_2/Q_2 & q_2/Q_3 & \cdots & q_2/Q_n & \cdots \\
0 & 0 & q_3/Q_3 & \cdots & q_3/Q_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & q_n/Q_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} q_1/Q_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi bu dizinin yarı normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{R}e^1\right\|_{p,\tilde{F}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(\tilde{R}e^1\right)_n - \frac{f_n}{f_{n+1}}\left(\tilde{R}e^1\right)_{n+1}\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\left|\frac{f_2}{f_1}\left(\tilde{R}e^1\right)_1 - \frac{f_1}{f_2}\left(\tilde{R}e^1\right)_2\right|^p + \left|\frac{f_3}{f_2}\left(\tilde{R}e^1\right)_2 - \frac{f_2}{f_3}\left(\tilde{R}e^1\right)_3\right|^p + 0 + \cdots\right)^{1/p} \\
&= \left(\left|\frac{f_2}{f_1}\frac{q_1}{Q_1} - \frac{f_1}{f_2}0\right|^p + \left|\frac{f_3}{f_2}0 - \frac{f_2}{f_3}0\right|^p + 0^p + \cdots\right)^{1/p} \\
&= \left(\left|1\frac{q_1}{Q_1}\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left|1.\frac{2}{2}\right| \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Operatörün yarı normu tanımından

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{R}e^1\right\|_{p,\tilde{F}} &\leq \left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}} \left\|e^1\right\|_{p,w} \\
1 &\leq \left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}} 1 \\
1 &\leq \left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}} \\
\left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}} &\geq 1 \qquad (5.0.10)
\end{aligned}$$

olur.

(5.0.9) ve (5.0.10) eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde $\left\|\tilde{R}\right\|_{p,w,\tilde{F}} = 1$ olduğu açıkça görülür.

Teorem 5.0.2. $1-p < \alpha < 1$ *ve* $p > 1$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$ *ise* H *Hilbert matris operatörü* $\ell_p(w)$ *uzayından* $\ell_p\left(w,\tilde{F}\right)$ *uzayına tanımlı bir sınırlı operatördür ve* $\beta = \frac{1-\alpha}{p}$, $\gamma = \frac{p-1+\alpha}{p}$ *olmak üzere* $\|H\|_{p,w,\tilde{F}} \leq \max\left\{\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right), \frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)\right\}$ *dir [1].*

İspat: Lemma 5.0.2 de T matrisi yerine H Hilbert matrisi alınırsa her $n,k \in \mathbb{N}$ için S matrisi

$$s_{nk} = \left(\frac{w_n}{w_k}\right)^{1/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{k^{\alpha}}}\right)^{1/p} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right)$$
$$= \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha/p} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right)$$

şekline dönüşür ve Lemma 5.0.2 den açıkça $\|H\|_{p,w,\tilde{F}} = \|S\|_p$ yazılır.

Lemma 5.0.1 de her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = t_n = n$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
u_n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k^{1/p}}s_{nk} &= n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}s_{nk} \\
&= n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\
&= \frac{n^{1/p}}{n^{\alpha/p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}k^{\alpha/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\
&= n^{(1-\alpha)/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{(1-\alpha)/p}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\
&= n^{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \qquad (5.0.11)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $1 \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 2$ olduğundan

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} \leq 2\frac{1}{n+k} \qquad (5.0.12)$$

ve $\frac{1}{2} \leq \frac{f_n}{f_{n+1}} \leq 1$ olduğundan açık olarak $-\frac{1}{2} \geq -\frac{f_n}{f_{n+1}} \geq -1$ dir ve buradan $-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1+k} \geq -\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k} \geq -1\frac{1}{n+1+k}$ eşitsizliği veya aynı şey demek olan

$$-1\frac{1}{n+1+k} \leq -\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k} \leq -\frac{1}{2}\frac{1}{n+1+k} \qquad (5.0.13)$$

olduğu görülür. Buradan (5.0.12) ve (5.0.13) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k} \leq 2\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1+k} \qquad (5.0.14)$$

elde edilir. (5.0.14) eşitsizliği (5.0.11) ifadesinde göz önüne alınırsa ve Lemma 4.0.1 den

$$\begin{aligned}
n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}s_{nk} &\leq n^{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}\left(2\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)+k}\right) \\
&\leq n^{\beta}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\beta}}\left(2\frac{1}{n+t} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)+t}\right)dt \\
&= n^{\beta}\left(\frac{2\pi}{n^{\beta}\sin\beta\pi} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{(n+1)^{\beta}\sin\beta\pi}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta}\right) \qquad (5.0.15)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\alpha < 1$ olduğundan $-\alpha > -1$ ve $1-\alpha > 0$ dır. Aynı zamanda $p > 1$ olduğundan $\frac{1-\alpha}{p} > 0$ dır. Yani $\beta > 0$ dır. Bununla birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ olduğundan $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$ ve $-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$ve nihayetinde $2-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} \leq 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$ olduğu görülür. Bu ifade (5.0.15) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}s_{nk} &\leq \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right) \end{aligned}$$

olur. Yani $n^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p}}s_{nk} \leq \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)$ dir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k^{(1-p)/p}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(1-p)/p}s_{nk} &= \frac{1}{k^{(1-p)/p}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)/p}s_{nk} \\ &= \frac{1}{k^{(1-p)/p}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)/p}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k}-\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\ &= \frac{k^{\alpha/p}}{k^{(1-p)/p}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)/p}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/p}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k}-\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\ &= k^{(p-1+\alpha)/p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(p-1+\alpha)/p}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k}-\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\ &= k^{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\frac{1}{n+k}-\frac{f_n}{f_{n+1}}\frac{1}{n+1+k}\right) \\ &\leq k^{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}\left(2\frac{1}{n+k}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)+k}\right) \\ &\leq k^{\gamma}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\gamma}}\left(2\frac{1}{t+k}-\frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)+k}\right)dt \\ &= k^{\gamma}\left(\frac{2\pi}{k^{\gamma}\sin\gamma\pi}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{(k+1)^{\gamma}\sin\gamma\pi}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\gamma}\right) \\ &\leq \frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 5.0.1 den

$$\|S\|_p \leq \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\right)^{\frac{(1-p)}{p}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}-1}} \\
&= \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\right)^{-1}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\left(\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)}{\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\|H\|_{p,w,\tilde{F}} = \|S\|_p$ olduğundan

$$
\|H\|_{p,w,\tilde{F}} \leq \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right)}{\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}
$$

olur. Kolaylık açısından $\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\beta+1}}\right) = \lambda$ ve $\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left(2-\frac{1}{2^{\gamma+1}}\right) = \mu$ denilirse eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin $\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}$ olduğu görülür. Eğer $\lambda \leq \mu$ ise o zaman $\lambda^{1-\frac{1}{p}} \leq \mu^{1-\frac{1}{p}}$ dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} &= \lambda\frac{\mu^{\frac{1}{p}}}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \\
&= \lambda\lambda^{-\frac{1}{p}}\mu^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda^{1-\frac{1}{p}}\mu^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu^{1-\frac{1}{p}}\mu^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}} \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

dır. Ancak $\mu \leq \lambda$ ise $\mu^{\frac{1}{p}} \leq \lambda^{\frac{1}{p}}$ olup

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} &= \lambda\frac{\mu^{\frac{1}{p}}}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \\
&= \lambda\lambda^{-\frac{1}{p}}\mu^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda^{1-\frac{1}{p}}\mu^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \lambda^{1-\frac{1}{p}}\lambda^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$= \lambda^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}}$$

$$= \lambda$$

elde edilir. Bu iki durum beraber düşünüldüğünde ise

$$\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \max \{\lambda,\ \mu\}$$

olduğunu söylemek son derece kolaydır. Bu bilgi ışığında

$$\|H\|_{p,w,\tilde{F}} \leq \max \left\{ \frac{\pi}{\sin \beta \pi} \left(2 - \frac{1}{2^{\beta+1}} \right), \frac{\pi}{\sin \gamma \pi} \left(2 - \frac{1}{2^{\gamma+1}} \right) \right\}$$

olduğu açıktır.

6. $\ell_p(w)$ UZAYINDAN $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$ UZAYINA MATRİS OPERATÖRLERİNİN ALT SINIRLARI

Bu bölümde; $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p(\tilde{w},\tilde{F})$ uzayına tanımlı matris operatörlerinin alttan sınırlılığı ile ilgili lemma, önerme ve teoremler ifade edilmiş ve H Hilbert matris operatörünün alttan sınırlı bir operatör olduğu ispatlanmıştır.

Lemma 6.0.1. *$a, b, c \geq 0$ ve $a \geq b$ olsun. Eğer $p \geq 1$ ise*

$$(a+c)^p - a^p \geq (b+c)^p - b^p$$

dir [51].

İspat: $f(x) = (x+c)^p - x^p$ şeklinde tanımlı bir fonksiyonu olsun. Buradan

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x+c)^{p-1} - px^{p-1} \\ &= p\left((x+c)^{p-1} - x^{p-1}\right) \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

olur. $x+c \geq x$ olduğundan $(x+c)^{p-1} \geq x^{p-1}$ dir ve buradan

$$(x+c)^{p-1} - x^{p-1} \geq 0 \tag{6.0.2}$$

dır. $(6.0.2)$ eşitsizliği $(6.0.1)$ eşitliğinde göz önüne alınırsa $f'(x) \geq 0$ elde edilir. Yani f fonksiyonu artandır. $a \geq b$ ve f fonksiyonu artan olduğundan $f(a) \geq f(b)$ olur. Buradan da $(a+c)^p - a^p \geq (b+c)^p - b^p$ olduğu görülür.

Şimdi verilecek olan Lemma, bu bölümdeki ana sonuçları ispatlamak için gereklidir.

Lemma 6.0.2. *(q_n), (x_n) negatif olmayan diziler ve (x_n) dizisi; $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ koşulunu sağlayan azalan bir dizi, $Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i$, $Q_0 = 0$ ve $R_n = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$ olmak üzere; $p \geq 1$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n^p - R_{n-1}^p \geq \left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p$ dir.*
2. *Eğer $\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i < \infty$ serisi yakınsak ise*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right)$$

dir [50].

İspat: 1-inci koşulun doğru olduğunu göstermek için (x_n) dizisinin azalan olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \cdots + q_{n-1}x_{n-1} \\ &\geq q_1x_n + q_2x_n + q_3x_n + \cdots + q_{n-1}x_n \\ &= (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{n-1})\, x_n \\ &= Q_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{6.0.3}$$

olur. Aynı zamanda

$$R_n = R_{n-1} + q_nx_n \tag{6.0.4}$$

$$Q_nx_n = Q_{n-1}x_n + q_nx_n \tag{6.0.5}$$

eşitlikleri vardır. (q_n) ve (x_n) negatif terimli olmayan diziler olduğundan dolayı $R_{n-1} \geq 0$, $q_nx_n \geq 0$ ve $Q_{n-1}x_n \geq 0$ dır. Burada; $a = R_{n-1}$, $b = Q_{n-1}x_n$ ve $c = q_nx_n$ olarak alınırsa $a, b, c \geq 0$ ve (6.0.3) eşitsizliğinden de $a \geq b$ elde edilir. O halde Lemma 6.0.1 in koşulları sağlandığından,

$$(R_{n-1} + q_nx_n)^p - R_{n-1}^p \geq (Q_{n-1}x_n + q_nx_n)^p - (Q_{n-1}x_n)^p \tag{6.0.6}$$

kolayca yazılır. Sırasıyla (6.0.4) ve (6.0.5) eşitlikleri (6.0.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R_n^p - R_{n-1}^p &\geq (Q_nx_n)^p - (Q_{n-1}x_n)^p \\ &= \left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2-inci koşulun doğru olduğu göstermek için 1-inci koşulda elde edilen her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n^p - R_{n-1}^p \geq \left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p$ eşitsizliği kullanılırsa $2 \leq n \leq N$ için

$$\sum_{n=2}^{N} \left(R_n^p - R_{n-1}^p\right) \geq \sum_{n=2}^{N} \left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p \tag{6.0.7}$$

kolayca yazılır. (6.0.7) eşitsizliğinin sol tarafı açık bir şekilde yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} \left(R_n^p - R_{n-1}^p\right) = R_2^p - R_1^p& \\ + R_3^p - R_2^p& \\ + R_4^p - R_3^p& \\ \vdots\quad& \\ + R_N^p - R_{N-1}^p& \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= R_N^p - R_1^p \\
&= R_N^p - q_1^p x_1^p \qquad (6.0.8)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. (6.0.8) eşitliğinde $N \to \infty$ için limit alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\left(R_n^p - R_{n-1}^p\right) &= \lim_{N\to\infty}\left(R_N^p - q_1^p x_1^p\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} q_i x_i\right)^p - q_1^p x_1^p\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p - q_1^p x_1^p
\end{aligned}
$$

elde edilir. Hipotezden $\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i < \infty$ olduğundan

$$
\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p - q_1^p x_1^p < \infty \qquad (6.0.9)
$$

olur. Yani $N \to \infty$ iken (6.0.7) eşitsizliğinin sol tarafı yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $N \to \infty$ iken (6.0.7) eşitsizliğinin sağ tarafı da yakınsak olur ve

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p < \infty \qquad (6.0.10)
$$

yazılır.

Sonuç olarak (6.0.7) eşitsizliğinde $N \to \infty$ iken (6.0.9) ve (6.0.10) ifadeleri göz önüne alındığında

$$
\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p - q_1^p x_1^p \geq \sum_{n=2}^{\infty}\left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p \qquad (6.0.11)
$$

olur. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p$ serisi açık şekilde yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\left(Q_n^p - Q_{n-1}^p\right) x_n^p &= \left(Q_2^p - Q_1^p\right) x_2^p \\
&\quad + \left(Q_3^p - Q_2^p\right) x_3^p \\
&\quad + \left(Q_4^p - Q_3^p\right) x_4^p \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \left(Q_{N-1}^p - Q_{N-2}^p\right) x_{N-1}^p \\
&\quad + \left(Q_N^p - Q_{N-1}^p\right) x_N^p \\
&\qquad \vdots \\
&= -Q_1^p x_2^p + Q_2^p\left(x_2^p - x_3^p\right) + Q_3^p\left(x_3^p - x_4^p\right) + \cdots + Q_{N-1}^p\left(x_{N-1}^p - x_N^p\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) - Q_1^p x_2^p \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) - Q_1^p x_2^p + Q_1^p x_1^p - Q_1^p x_1^p \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) + Q_1^p \left(x_1^p - x_2^p\right) - Q_1^p x_1^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) - Q_1^p x_1^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) - q_1^p x_1^p \qquad (6.0.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (6.0.12) eşitliği (6.0.11) eşitsizliğinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$
\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p - q_1^p x_1^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right) - q_1^p x_1^p
$$

$$
\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\right)^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p \left(x_n^p - x_{n+1}^p\right)
$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 6.0.1. *Eğer (x_n) azalan ve terimleri negatif olmayan bir dizi ve $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ve $p \geq 1$ ise o zaman her bir n için*

$$
X_n^p - X_{n-1}^p \geq \left[n^p - (n-1)^p\right] x_n^p
$$

dir [50].

İspat: Lemma 6.0.2 de $(q_n) = (1)$ olarak alınırsa,

$$
\begin{aligned}
Q_n &= \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \\
Q_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} q_i = \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n-1 \\
R_n &= \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 x_i = X_n \\
R_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} 1 x_i = X_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunurlar. Bu taktirde Lemma 6.0.2 nin 1-inci koşulundan açık olarak

$$
X_n^p - X_{n-1}^p \geq \left[n^p - (n-1)^p\right] x_n^p
$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Tanım 6.0.1. *Bir $T : X \to Y$ mattris operatörü için*

$$\|Tx\|_Y \geq L\|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan L değerine T operatörünün bir alt sınırı denir [1].

Teorem 6.0.1. *$p \geq 1$ olmak üzere $T = (t_{nk})$; $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p(\tilde{w}, \tilde{F})$ uzayına tanımlı negatif olmayan bir matris operatörü olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ ve her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \geq t_{n+1,k}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ ise bu taktirde $x_k \geq 0$ olmak üzere her $x = (x_k)$ azalan dizisi için*

$$\|Tx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} \geq L\|x\|_{p,w}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $L^p = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{W_n}$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$, $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} t_{ik} - \frac{f_i}{f_{i+1}} t_{i+1,k}\right)\right)^p$ dir [1].

İspat: $T : \ell_p(w) \to \ell_p(\tilde{w}, \tilde{F})$ bir matris dönüşümü, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$, $(x_n) \in \ell_p(w)$ ve $p \geq 1$ olsun. $(x_n) \in \ell_p(w)$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^p < \infty$ ve buradan $\|x\|_{p,w} = (\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ olur. Burada $p = 1$ için

$$\|x\|_{1,w} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n| < \infty$$

olacağı açıktır. (x_k) dizisi negatif terimli olmadığından

$$\|x\|_{1,w} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n < \infty$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisinin azalan bir dizi olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \\
&= w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n \\
&\geq w_1x_n + w_2x_n + w_3x_n + \cdots + w_nx_n \\
&= x_n(w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n) \\
&= x_n \sum_{k=1}^{n} w_k
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$x_n \sum_{k=1}^{n} w_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k x_k$$

kolayca yazılabilir. Burada $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n \sum_{k=1}^{n} w_k &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n < \infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \sum_{k=1}^{n} w_k < \infty \tag{6.0.13}$$

elde edilir. Aynı zamanda $x = (x_n)$ dizisi azalan bir dizi ve $x_n \geq 0$ olduğundan alttan sınırlı bir dizidir. Her monoton azalan ve alttan sınırlı dizi yakınsak olduğundan $x = (x_n)$ dizisi yakınsaktır.

Bu bilgiler ışığında $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğunu göstermek için aksi kabul edilerek bir an için $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ olsun. Bununla birlikte varsayımdan $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ olduğu beraber düşünülürse $\lim_{n\to\infty} x_n \sum_{k=1}^{n} w_k = \infty$ elde edilirki bu (6.0.13) ile bir çelişki ortaya çıkarır. Bundan dolayı $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır. Böylece Lemma 6.0.2 nin $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olma koşulu sağlanmış olur.

İspatın bu aşamasında her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) x_k$ serisinin yakınsak olduğunu göstermek için aksini kabul ederek en az bir $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{m+1}}{f_m} t_{mk} - \frac{f_m}{f_{m+1}} t_{m+1,k} \right) x_k = \infty$ olduğunu kabul edelim. $(x_n) \in \ell_p(w)$ olduğundan $(T(x))_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k\right)_n \in \ell_p\left(\tilde{w}, \tilde{F}\right)$ dır. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (T(x))_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} (T(x))_{n+1} \right|^p < \infty$ dur. Hipotezden $t_{nk} \geq t_{n+1,k}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} (T(x))_n - \frac{f_n}{f_{n+1}} (T(x))_{n+1} \right|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k - \frac{f_n}{f_{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} t_{n+1,k} x_k \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} (t_{nk} x_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} (t_{n+1,k} x_k) \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} (t_{nk} x_k) - \frac{f_n}{f_{n+1}} (t_{n+1,k} x_k) \right) \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) x_k \right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) x_k \right)^p \\
&= \tilde{w}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_2}{f_1} t_{1k} - \frac{f_1}{f_2} t_{2,k} \right) x_k \right)^p \\
&\quad + \tilde{w}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_3}{f_2} t_{2k} - \frac{f_2}{f_3} t_{3,k} \right) x_k \right)^p \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \underbrace{\tilde{w}_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{m+1}}{f_m} t_{mk} - \frac{f_m}{f_{m+1}} t_{m+1,k} \right) x_k \right)^p}_{=\infty} \\
&\qquad \vdots \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)x_k<\infty$ dur. Böylece Lemma 6.0.2 nin 2-inci koşulunun doğruluğu gösterilmiş oldu.

Lemma 6.0.2 den;

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}^{p} &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(T\left(x\right)\right)_n-\frac{f_n}{f_{n+1}}\left(T\left(x\right)\right)_{n+1}\right|^{p}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}x_k-\frac{f_n}{f_{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}t_{n+1,k}x_k\right|^{p}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(t_{nk}x_k\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}\left(t_{n+1,k}x_k\right)\right|^{p}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(t_{nk}x_k\right)-\frac{f_n}{f_{n+1}}\left(t_{n+1,k}x_k\right)\right)\right|^{p}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)x_k\right|^{p}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)x_k\right)^{p}\\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\sum_{i=1}^{\infty}Q_i^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right) \qquad (6.0.14)
\end{aligned}$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)$ serisinde mutlak değerin içi pozitif olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)$$

olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)\leq\|Tx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}}^{p}<\infty$$

olduğundan yakınsaktır. Teorem 2.1.5 den

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}t_{nk}-\frac{f_n}{f_{n+1}}t_{n+1,k}\right)\right)^{p}\left(x_i^{p}-x_{i+1}^{p}\right) \qquad (6.0.15)
\end{aligned}$$

dir. (6.0.15) eşitliği (6.0.14) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^p_{p,\tilde{w},\tilde{F}} &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\sum_{k=1}^{i} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right) \right)^p}_{=S_i} \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} S_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) \qquad (6.0.16)
\end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $L^p = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{W_n}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{S_n}{W_n} \geq L^p$ dir. Bu eşitsizlik (6.0.16) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} S_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} L^p W_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) \\
&= L^p \sum_{i=1}^{\infty} W_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) \qquad (6.0.17)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{i=1}^{\infty} W_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right)$ serisinin açık hali yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} W_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) = W_1 &\left(x_1^p - x_2^p \right) \\
+ W_2 &\left(x_2^p - x_3^p \right) \\
+ W_3 &\left(x_3^p - x_4^p \right) \\
&\vdots \\
+ W_n &\left(x_n^p - x_{n+1}^p \right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. Abel kısmi toplamından

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} W_i \left(x_i^p - x_{i+1}^p \right) = &\, x_1^p W_1 \\
&+ x_2^p \left(W_2 - W_1 \right) \\
&+ x_3^p \left(W_3 - W_2 \right) \\
&\vdots \\
&+ x_n^p \left(W_n - W_{n-1} \right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n - W_{n-1}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
W_n - W_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} w_k - \sum_{k=1}^{n-1} w_k \\
&= \left(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} + w_n \right) - \left(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} \right) \\
&= w_n
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} W_i\left(x_i^p - x_{i+1}^p\right) &= x_1^p w_1 + x_2^p\left(w_2\right) + \cdots + x_n^p\left(w_n\right) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} w_i x_i^p \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} w_i \left|x_i\right|^p \\ &= \|x\|_{p,w}^p\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen ifade (6.0.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$L^p \sum_{i=1}^{\infty} W_i\left(x_i^p - x_{i+1}^p\right) = L^p \|x\|_{p,w}^p$$

bulunur. Yani $\|Tx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} \geq L\|x\|_{p,w}$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 6.0.3. *$T = (t_{nk})$; $p \geq 1$ için $\ell_p(w)$ uzayından $\ell_p\left(\tilde{w},\tilde{F}\right)$ uzayına tanımlı bir matris operatörü ve aynı zamanda her $k,n \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \geq 0$ olmak üzere eğer her $k \in \mathbb{N}$ ve her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $t_{nk} \geq t_{n+1,k}$ ve*

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \geq \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{n,k+1} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k+1} \tag{6.0.18}$$

eşitsizliği sağlanır ve $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ ise bu taktirde

$$L^p \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left[n^p - (n-1)^p\right] \frac{t_n}{w_n}$$

dır. Burada $L^p = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{W_n}$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$, $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_{i+1}}{f_i} t_{ik} - \frac{f_i}{f_{i+1}} t_{i+1,k}\right)\right)^p$, $t_n = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} t_{in} - \frac{f_i}{f_{i+1}} t_{i+1,n}\right)^p$ dir [1].

İspat: Hipotezden (6.0.18) eşitsizliği sağlandığından (x_k)=$\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k}\right)_{k=1}^{\infty}$ dizisi azalan ve negatif olmayan bir dizidir. Sonuç 6.0.1 den her bir k için

$$\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j}\right)\right]^p - \left[\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j}\right)\right]^p \geq \left[k^p - (k-1)^p\right]\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k}\right)^p$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j}\right)\right]^p - \left[\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j}\right)\right]^p\right) \\ &\qquad \geq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[k^p - (k-1)^p\right]\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k}\right)^p\end{aligned} \tag{6.0.19}$$

olur. Şimdi $T : \ell_p(w) \to \ell_p(\tilde{w}, \tilde{F})$ ve $e_1 = (1,0,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_p(w)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0,\cdots) \in \ell_p(w)$, $\cdots$, $e_k = (0,0,\cdots,1,\cdots) \in \ell_p(w)$, $\cdots$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $(T(e_k)) = (t_{nk})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\tilde{w}, \tilde{F})$ olur. $\ell_p(\tilde{w}, \tilde{F})$ dizi uzayının tanımı göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right|^p < \infty$$

olduğu açıktır ve indisler hipotezde verilen t_n tanımına uygun olarak değiştirilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} t_{in} - \frac{f_i}{f_{i+1}} t_{i+1,n} \right)^p < \infty$$

bulunur. Örneğin, $n = 1$ için $t_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} t_{i1} - \frac{f_i}{f_{i+1}} t_{i+1,1} \right)^p < \infty$ dur. Şimdi ise (6.0.18) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j} \right) \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{n1} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,1} \right. \\ &\qquad + \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{n2} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,2} \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad \left. + \frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right]^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[k \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{n1} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,1} \right) \right]^p \\ &= k^p \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{n1} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,1} \right]^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $k \in \mathbb{N}$ için $S_k < \infty$ olur. O zaman (6.0.19) ifadesindeki seri toplama dağılır ve

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j} \right) \right]^p - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left[\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nj} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,j} \right) \right]^p \\ &\qquad \geq [k^p - (k-1)^p] \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} t_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}} t_{n+1,k} \right)^p \end{aligned}$$

olur. Buradan hipotezdeki S_k ve t_k tanımları göz önüne alınırsa

$$S_k - S_{k-1} \geq [k^p - (k-1)^p] t_k$$

yazılır. Burada $S_k - S_{k-1} = s_k$ denilirse her k için

$$s_k \geq [k^p - (k-1)^p] t_k$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $1/w_k$ ile çarpılırsa her k için

$$\frac{s_k}{w_k} \geq \left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k} \tag{6.0.20}$$

bulunur. (6.0.20) denkleminde her k için $\left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k} > 0$ olduğundan 0 sayısı $\left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k}$ için bir alt sınırdır. $\mathbb{R}$ nin boştan farklı alttan sınırlı her alt cümlesinin bir infimumu var olduğundan $\left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k}$ nın infimumu vardır. Bundan dolayı

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k} = M$$

diyebiliriz. Buradan M sayısı (6.0.20) denklemindeki $\frac{s_k}{w_k}$ için bir alt sınır olur. O halde $\frac{s_k}{w_k}$ nin infimumu vardır, bu infimum N ile gösterilecek olursa

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} = N$$

dir. Açık olarak $N \geq M$ olduğundan

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} \geq \inf_{k \in \mathbb{N}} \left[k^p - (k-1)^p\right] \frac{t_k}{w_k} \tag{6.0.21}$$

dir. $S_k - S_{k-1} = s_k$ olduğundan kolay bir şekilde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$\begin{gathered}
S_k - S_{k-1} = s_k \\
S_{k-1} - S_{k-2} = s_{k-1} \\
S_{k-2} - S_{k-3} = s_{k-2} \\
\vdots \\
S_3 - S_2 = s_3 \\
S_2 - S_1 = s_2 \\
S_1 - S_0 = s_1
\end{gathered}$$

ve bu eşitlikler taraf tarafa toplanacak olursa

$$S_k = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_k \tag{6.0.22}$$

olduğu görülür. (6.0.22) eşitliğinde eşitliğin her iki tarafı $W_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ ya bölünürse

$$\frac{S_k}{W_k} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_k}{W_k} \tag{6.0.23}$$

olur. Ayrıca $\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} = N$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\frac{s_k}{w_k} \geq N$ dir ve buradan da $s_k \geq Nw_k$ dir. Bu eşitsizlik (6.0.23) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{S_k}{W_k} &\geq \frac{Nw_1+Nw_2+\cdots+Nw_k}{W_k}\\ &= \frac{N(w_1+w_2+\cdots+w_k)}{W_k}\\ &= \frac{N(W_k)}{W_k}\\ &= N\\ &= \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k}\end{aligned}$$

olur, böylece

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{S_k}{W_k} \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} \tag{6.0.24}$$

bulunur. Hipotezde L^P nin tanımı ve (6.0.24) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$L^P = \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{S_k}{W_k} \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{s_k}{w_k} \tag{6.0.25}$$

yazılır. Nihayetinde (6.0.21) ve (6.0.25) eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde

$$L^P \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} [k^p-(k-1)^p]\frac{t_k}{w_k}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da teoremi ispatlar.

Teorem 6.0.2. *$p \geq 1$, $0 \leq p+\alpha \leq 1$, her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = \frac{1}{n^{p+\alpha}}$ ve $\tilde{w}_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \geq 0$ olmak üzere her azalan $x = (x_k)$ dizisi için*

$$\|Hx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} \geq L\|x\|_{p,w}$$

dir. Burada $H = (h_{nk})$ Hilbert matris operatörü ve $L^p \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha(i+1)^p(i+2)^p}$ dir [1].

İspat: $H = (h_{nk})$ Hilbert matris operatörü olduğundan her $n,k \in \mathbb{N}$ için $h_{nk} = \frac{1}{n+k}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$h_{nk} = \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{(n+1)+k} = h_{n+1,k}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $p+\alpha \leq 1$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\alpha}} = \infty$$

harmonik serisi ıraksaktır. O zaman Teorem 6.0.1 den $\|Hx\|_{p,\tilde{w},\tilde{F}} \geq L\|x\|_{p,w}$ olur.

Her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k} \geq \frac{f_{n+1}}{f_n}h_{n,k+1} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k+1}$$

olduğunu göstermek için bu eşitsizliğin tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k} < \frac{f_{n+1}}{f_n}h_{n,k+1} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k+1}$$

olsun. Buradan $\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(h_{nk} - h_{n,k+1}\right) < \frac{f_n}{f_{n+1}}\left(h_{n+1,k} - h_{n+1,k+1}\right)$ olduğu açıktır. $H = (h_{nk})$ Hilbert matris operatörü olduğundan yine açık bir şekilde $\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+(k+1)}\right) < \frac{f_n}{f_{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)+k} - \frac{1}{(n+1)+(k+1)}\right)$ yazılabilir ve buradan da öncelikle $\frac{f_{n+1}}{f_n}\left(\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}\right) < \frac{f_n}{f_{n+1}}\left(\frac{1}{(n+k+1)(n+k+2)}\right)$ ve sonrasında $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^2 < \frac{n+k}{n+k+2}$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^2$ olduğundan yine açık olarak $1 < \frac{n+k}{n+k+2}$ yazılabilir ki buradan da $1 + \frac{2}{n+k} < 1$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla kabul yanlış ve iddia doğrudur. Yani

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}h_{nk} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k} \geq \frac{f_{n+1}}{f_n}h_{n,k+1} - \frac{f_n}{f_{n+1}}h_{n+1,k+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Lemma 6.0.3 ün hipotez koşulları sağlanmış olur. Bundan dolayı Lemma 6.0.3 den

$$\begin{aligned}
L^p &\geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left[n^p - (n-1)^p\right] \frac{t_n}{w_n} \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \left[n^{p-1} n^{p+\alpha}\right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\frac{1}{i+n} - \frac{f_i}{f_{i+1}}\frac{1}{i+1+n}\right)^p \\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{N}} n 2^{p+\alpha-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \left(\frac{1}{i+n} - \frac{1}{i+1+n}\right)^p
\end{aligned}$$

yazılır. İspatın geri kalan kısmı Foroutannia ve Roopaei [52] nin Teorem 4.3 ispatındaki aynı teknik ile elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **İlkhan, M.** (2019). Norms and lower bounds of some matrix operators on Fibonacci weighted difference sequence space, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *42*(16), 5143–5153.

[2] **Candan, M.** (2012). Domain of the double sequential band matrix in the classical sequence spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012:281, 15.

[3] **Candan, M.** (2012). Some new sequence spaces defined by a modulus function and an infinite matrix in a seminormed space, *Journal of Mathematical Analysis*, *3*(2), 1–9.

[4] **Candan, M.** (2014). A new sequence space isomorphic to the space ℓ_p and compact operators, *J. Math. Comput. Sci.*, *4*(2), 306–334.

[5] **Candan, M.** (2014). Almost convergence and double sequential band matrix, *Acta Mathematica Scientia*, *34*(2), 354–366.

[6] **Candan, M.** (2014). Domain of the double sequential band matrix in the spaces of convergent and null sequences, *Advances in Difference Equations*, *2014*(1).

[7] **Candan, M. ve Kılınç, G.** (2015). A different look for paranormed Riesz sequence space derived by Fibonacci matrix, *Konuralp Journal of Mathematics*, *3*(2), 62–76.

[8] **Candan, M.** (2015). A new perspective on paranormed Riesz sequence space of non-absolute type, *Global Journal of Mathematical Analysis*, *3*(4), 150.

[9] **Candan, M. ve Kara, E.E.** (2015). A study of topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces C, *Gulf Journal of Mathematics*, *3*(4), 67–84.

[10] **Candan, M. ve Güneş, A.** (2015). Paranormed sequence space of non-absolute type founded using generalized difference matrix, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India. Section A. Physical Sciences*, *85*(2), 269–276.

[11] **Kılınç, G. ve Candan, M.** (2017). A different approach for almost sequence spaces defined by a generalized weighted means, *Sakarya University Journal of Science*, *21*(6), 1–1.

[12] **Kılınç, G. ve Candan, M.** (2017). Some generalized Fibonacci difference spaces defined by a sequence of modulus functions, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 095.

[13] **Candan, M.** (2018). A new outlook for almost convergent sequence spaces, *Cumhuriyet Science Journal*, *39*(1), 34–46.

[14] **Candan, M.** (2022). A new aspect for some sequence spaces derived using the domain of the matrix B, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*.

[15] **Candan, M.** (2022). Some characteristics of matrix operators on generalized Fibonacci weighted difference sequence space, *Symmetry*, *14*(7), 1283.

[16] **Kızmaz, H.** (1981). On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin*, *24*(2), 169–176.

[17] **Kirişçi, M. ve Başar, F.** (2010). Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix, *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, *60*(5), 1299–1309.

[18] **Sönmez, A.** (2011). Some new sequence spaces derived by the domain of the triple band matrix, *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, *62*(2), 641–650.

[19] **Kara, E.E. ve Başarır, M.** (2012). An application of Fibonacci numbers into infinite Toeplitz matrices, *Caspian J Math Sci (CJMS)*, *1*(1), 43–47.

[20] **Candan, M. ve Kayaduman, K.** (2015). Almost convergent sequence space derived by generalized Fibonacci matrix and Fibonacci core, *British J. Math. Comput. Sci*, *7*(2), 150–167.

[21] **Yılmaz, Y.**, **Özdemir, M.K.**, **Solak, I. ve Candan, M.** (2005). Operators on some vector-valued Orlicz sequence spaces, *Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, *17*(1), 59–71.

[22] **Candan, M. ve Solak, I.** (2006). On new difference sequence spaces generated by infinite matrices, *International Journal of Science & Technology*, *1*(1), 15–17.

[23] **Candan, M.** (2014). Vector-valued FK-spaces defined by a modulus function and an infinite matrix, *Thai Journal of Mathematics*, *12*(1), 155–165.

[24] **Candan, M.** (2015). Vector valued Orlicz sequence space generilazed with an infinite matrix and some of its specific characteristics, *Gen. Math. Notes*, *29*(2), 1–16.

[25] **Candan, M. ve Solak, I.** (2018). A novel generalized difference spaces constructed by the modulus function, *Konuralp Journal of Mathematics*, *6*(1), 17–25.

[26] **Kalman, D. ve Mena, R.** (2003). The Fibonacci numbers-exposed, *Mathematics Magazine*, *76*(3), 167–181.

[27] **Vajda, S.** (1989). *Fibonacci & Lucas Numbers, and The Golden Section*, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, theory and applications, With chapter XII by B. W. Conolly.

[28] **Şuhubi, E.** (2001). Fonksiyonel Analiz, *İTÜ Vakfi, İstanbul.*

[29] **Soykan, Y.** (2016). *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

[30] **Kreyszig, E.** (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney.

[31] **Maddox, I.J.** (1988). Elements of Functional Analiysis, *CambridgeUniversity Press, Camridge, UK, 2nd dedition*.

[32] **Wadsley, S.** (2015). *Linear Algebra*, Lecture 6, page 14.

[33] **Boos, J.** (2000). *Classical and Modern Methods In Summability*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, assisted by Peter Cass, Oxford Science Publications.

[34] **Bilim etiği**, (t.y.), Erişim: 29 Haziran 2022, https://faculty.etsu.edu/gardnerr/Func/notes/4-2.pdf.

[35] **Balcı, M.** (2000). *Genel Matematik*, Balcı Yayınları, Ankara.

[36] **Başkan, T.** (2012). *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Dora Yayıncılık.

[37] **Balcı, M.** (1999). *Matematik Analiz 1*, Balcı Yayınları, 6.Basım, Ankara.

[38] **Ng, P.N. ve Lee, P.Y.** (1977/78). Cesàro sequence spaces of non-absolute type, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria I. Commentationes Mathematicae. Prace Matematyczne*, *20*(2), 429–433.

[39] **Başar, F.** (2012). *Summability Theory and Its Applications*, Bentham Science Publishers, Ltd., Oak Park, IL, with a foreword by M. Mursaleen, Edited by Rifat Çolak.

[40] **Bilim etiği**, (t.y.), Erişim: 29 Haziran 2022, https://bit.ly/3OwV7vy.

[41] **Musayev, B. ve Alp, M.** (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.

[42] **Nanda, S.** (1983). *Matrix Transformations and Sequence Spaces*, International Centre for Therotical Physics.

[43] **Malkowsky, E.** (2001). FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, *Seminar, Van*.

[44] **Mursaleen, M. ve Noman, A.K.** (2010). On the spaces of λ-convergent and bounded sequences, *Thai Journal of Mathematics*, *8*(2), 311–329.

[45] **Cooke, R.G.** (1950). *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, Macmillan & Co., Ltd., London.

[46] **Kara, E.E.** (2013). Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013:38, 15.

[47] **Candan, M.** (2015). A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences, *Math Aeterna*, *5*(1), 191–210.

[48] **Talebi, G. ve Dehghan, M.A.** (2016). Approximation of upper bound for matrix operators on the Fibonacci weighted sequence spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, *64*(2), 196–207.

[49] **Jameson, G.J.O. ve Lashkaripour, R.** (2002). Norms of certain operators on weighted Ip spaces and Lorentz sequence spaces, *J Inequalities Pure Appl Math.*, *3*(1), 1–17.

[50] **Jameson, G.J.O. ve Lashkaripour, R.** (2000). Lower bounds of operators on weighted l_p spaces and Lorentz sequence spaces, *Glasgow Math J.*, *42*(2), 211–223.

[51] **Bennett, G.** (1986). Lower bounds for matrices, *Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1986*, 81–98.

[52] **Foroutannia, D. ve Roopaei, H.** (2017). The norms and the lower bounds for matrix operators on weighted difference sequence spaces, *“Politehnica” University of Bucharest. Scientific Bulletin. Series A. Applied Mathematics and Physics*, *79*(2), 151–160.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Seçkin YALÇIN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2016, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- (2020 -), İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakülesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi.