T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN TANJANT YAPILAR VE TANJANT DEMETLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mert EMEKSİZ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

TEMMUZ 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN TANJANT YAPILAR VE TANJANT DEMETLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mert EMEKSİZ
(36193614050)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr.Müge KARADAĞ hocama ve Sayın Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ hocama ve Sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR hocama ayrıca çalışmalarımda ve tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresincede benden her türlü desteklerini esirgemeyen annem Gülşen EMEKSİZ'e teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans olarak sunduğum " Hemen Hemen Tanjant Yapılar ve Tanjant Demetleri " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mert EMEKSİZ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbf{E}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbf{M}_n$	: n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$\mathbf{M}_{2n}$	: $2n$-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$\mathbf{T}_1^0(M_n)$	: M_n manifoldunun dual vektör alanlarının kümesi
$\mathbf{T}_0^1(M_n)$	: M_n manifoldunun vektör alanlarının kümesi
π, τ_{M_n}	: projeksiyon (fibrasyon) dönüşümü, M_n manifoldunun fibresi
$\mathbf{T}M_n$	: M_n manifoldunun tanjant demeti
ΛM	: M manifoldunun dış cebiri
$\Gamma(TM)$	: M manifoldu üzerinde vektör alanları kümesi
$T_x(M_n)$	: M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı
$T_p^*(M_n)$	: M_n manifoldunun p noktasındaki kotanjant uzayı
$T_p(M_n)$	: M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$[,]$	: Lie Braketi
$\mathbf{G}$	: Lie grubu
$\mathbf{L}_X w$	: Lie türevi
$\mathbf{V}$	: Vektör uzayı
∇	: Afin konneksiyon
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cismi
$\mathscr{F}$	: Herhangi bir cisim
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cismi
$\mathbf{F}M_n$	: Çatı demeti
$\mathbf{B}_G(M_n)$	: M_n manifoldunun G Lie grubundaki asli demet
$\mathbf{J}$	: hemen hemen tanjant yapı
$\mathbf{F}$	: hemen hemen çarpım yapı
$\mathbf{c}ekJ$	: J hemen hemen tanjant yapısının çekirdeği
$\mathbf{I}mJ$	: J hemen hemen tanjant yapısının görüntüsü
$\mathbf{N}_J$	: J nin Nijenhuis tensörü
$Gl(n,\mathbb{R})$	: Genel lineer $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
w ve Ω	: 1-form ve 2-form
^{v}	: Tanjant demette dikey lift dönüşümü
^{c}	: Tanjant demette tamamlayıcı lift dönüşümü
^{H}	: Tanjant demette yatay lift dönüşümü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN TANJANT YAPILAR VE
TANJANT DEMETLERİ

MERT EMEKSİZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

107+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

Beş bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinde,

Birinci bölüm giriş olup tanjant yapılar ve demetler üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde ise temel kavramlar ve teoriler verilmiştir.

Üçüncü bölümde G-yapılar, hemen hemen tanjant yapılar ve hemen hemen tanjant demetler sunulmuştur. Ayrıca, tanjant demet üzerindeki liftler, hemen hemen tanjant yapıların integrallenebilirliği, hemen hemen tanjant konneksiyonlar ve bir fibrasyon tarafından tanımlanan integrallenebilir hemen hemen tanjant yapıları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde ise tanjant demetin özel halleri olan hemen hemen çarpım yapılar, hemen hemen kompleks yapılar ile bir tanjant demet üzerindeki hemen hemen kompleks yapının tamamlayıcı ve yatay liftleri verilmiştir. Ayrıca, hemen hemen Hermityen yapılar, Hermityen yapılar, Kaehler yapılar ve hemen hemen tanjant yapılar üzerindeki $(1,1)$-tipli J tensör alanının tamamlayıcı ve yatay lifti kullanılarak J^c ve J^H tensör alanlarının integrallenebildiği gösterilmiştir.

Beşinci bölüm ise sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, G-yapı, Hemen Hemen Tanjant Yapı, Hemen Hemen Kompleks Yapı, Hemen Hemen Çarpım Yapı, Hermityen Yapı, Kaehler Yapı

ABSTRACT

Master Thesis

ALMOST TANGENT STRUCTURE AND
TANGENT BUNDLES

Mert EMEKSİZ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

107+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

This master's thesis, which consists of five chapters,

The first chapter is the introduction and the studies on tangent structures and bundles are mentioned.

In the second part, basic concepts and theories are given.

In the third chapter, G-structures, almost tangent structures and almost tangent bundles will be presented. Also, lifts on the tangent bundle, integrability of almost tangent structures, almost tangent connections, and integrable almost tangent structures defined by a fibration will be given.

In the fourth chapter, almost product structures, almost complex structures, which are special cases of tangent bundle and complementary and horizontal lifts of almost complex structures on a tangent bundle are given. It has also been shown that J^c and J^H tensor fields can be integrated using the complementary and horizontal lift of the $(1,1)$-type J tensor field on almost Hermitian structures, Hermitian structures, Kaehler structures, and almost tangent structures.

The fifth section is the conclusion section.

Keywords: Tangent Bundle, G-structure, Almost tangent structure, Almost Complex structure, Hermitian Structure, Almost Hermitian Structure, Kähler Structre

1. GİRİŞ

Geometrinin bir kısmı olan Diferensiyel Geometrinin başlangıcı Gauss'un yüzeyler üzerindeki çalışmalarına dayanır. Bu çalışmalar Riemann Manifold kavramına öncülük etmektedir. Yüzeyin içsel incelenmesi kavramı Gauss tarafından ortaya konulmuş olup bu çalışmalar Manifold kavramının temellerini oluşturmuştur. Örneğin; doğru ve çember bir boyutlu, düzlem ve küre yüzeyi iki boyutlu manifoldlardır. Genel bir ifade ile n-boyutlu bir manifoldun her noktasından n-boyutlu Öklid uzayına homeomorfik (topolojik dönüşüm) bir komşuluğu vardır. Her ne kadar seçilen bir nokta yakınında manifoldun yapısı Öklid uzayını akla getirse de küresel olarak manifoldun yapısı çok karmaşık şekilde de olabilir. İki boyutlu uzayda bir kürenin yüzeyinde tanımlı bir nokta etrafındaki dairesel düz bir alana eşlenebilir. Herhangi bir manifoldun diferensiyellenebilir yapısı haritalar topluluğu olan bir atlasla belirlenir. Bu diferensiyellenebilir yapı sayesinde manifoldlar üzerinde diferensiyel ve integral hesabı yapılabilir [1]. Diferensiyel geometrinin gelişmesinde önemli rol oynayan bir başka alan Grup teorisidir. 1872 yılında Felix Klein, Erlang projesinde geometriyi sürekli dönüşümler grubunun invaryantları teorisinde tanımlamıştır. Lie ise bu invaryant dönüşümler grubunun teorisini Lie grubu teorisi olacak hale getirmiştir. 20. yüzyılda Diferensiyel Geometride gelişen metodlardan biride geometride lokal incelemelerden global incelemelere geçiş olmuştur. Bu geçişle ilgili olarak, Topoloji ve Lie grubu teorisinin metodları Diferensiyel Geometride önemli rol oynamıştır. Modern Diferensiyel Geometride, Klasik Diferensiyel Geometrinin esas inceleme konuları olan eğri ve yüzeyler, üzerinde çeşitli geometrik yapıların verildiği n-boyutlu diferensiyellenebilen manifold tarafından ikinci plana atılmaktadır. Diferensiyel Geometride Riemann manifoldda Tanjant Demetlerin Diferensiyel Geometrisinin incelenmesi ilk olarak 1958 yılında Sasaki tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1962 yılında Dombrowski, Tanjant Demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur, ayrıca Dombrowski Tanjant demette liftler hakkında çalışma yapmıştır. 1965 yılında Yano ve Ledger, simetrik uzaylarda Tanjant Demeti tanımlayıp Tanjant Demette Liftler üzerinde çalışmaya başlamışlardır. 1966 yılında da Kandatu, non-lineer konneksiyona sahip bir manifoldda Tanjant Demeti incelemiştir. İlk çalışma 1965 yılında Kobayashi ve Yano tarafından Tanjant Demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tamamlayıcı ve dikey liftleri olmuştur. 1967 yılında Yano ve Ishihara Tanjant demette yatay lift teorisini geliştirmişlerdir. 1967 yılında Morimoto Tanjant Demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur. Her geometrik yapı farklı bileşenler içerir. Bunlardan bazıları Riemannian ve Kompleks yapılardır. Bu yapılar matematiğin alt alanları ile bağlantılıdır. Modern Diferensiyel Geometride önemli rolü Elia Cartan oynamıştır. Elia Cartan tarafından lokal ve özel durumlar için modern anlamda G-yapının bir gösterimi verilmiştir. G-yapı kavramı ilk olarak Oswald Weblen tarafından başlatılan bir geometrik nesne kavramı verilmiştir. Hemen hemen tanjant yapısı ise bu G-yapısının özel bir durumudur. Ayrıca Hemen hemen tanjant yapılar tanjant demetin genelleştirilmiş halidir. Hemen hemen tanjant yapı ve hemen hemen tanjnat demet 1960 larda Eliopoulos, Clark ve Bruckheimer tarafından tanıtıldı ve o zamandan 1970 li yıllara kadar birkaç araştırmacı tarafından araştılmıştır. Bu tez çalışmasında öncelikle tanjant demet üzerindeki yapılan çalışmalara değinilip bu çalışmalardan fonksiyonlar, vektör alanları, 1-formlar ve tensör alanları üzerindeki tanjant demetlerin dikey, yatay ve tamamlayıcı liftleri hakkında yapılan araştırmalardan bahsedildikten sonra G-yapı kavramı tanıtılıp bu G-yapının özel bir hali olan hemen hemen tanjant yapı kavramı tanıtılacaktır.

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun daha iyi kavranabilmesi için temel kavram ve teorilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise tanjant demet üzerindeki yapılar ilk olarak Aysel Turgut Vanlı'nın 1989 yılında "Tanjant Manifold Üzerinde Metrikler, Konneksiyonlar ve Eğriler" [2] adlı yüksek lisans tez çalışmasından bazı kısımlardan esinlenilmiştir. Daha sonra Aydın Gezer' in 2004 "Yatay Lift Teorisi" [3] adlı yüksek lisans tez çalışmasından esinlenilmiştir ve tanjant demetteki yatay, dikey ve tamamlayıcı lift kavramları tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Hemen hemen tanjant yapılar kavramına girmeden önce G-yapılar ve G-manifold kavramları verilmiş ve Hülya Kaya'nın "G-yapıların taşınması" [4] adlı yüksek lisans tez çalışmasından bazı kavramlardan esinlenerek ve G-yapı kavramı ile birlikte bu G-yapının özel halleri olan hemen hemen tanjant yapılar kavramı tanıtılıp ve hemen hemen tanjant yapının özel bir hali olan bir Tanjant Demet Üzerinde Kanonik Hemen Hemen Tanjant Yapısı tanıtılmış ve bunların dikey liftleri hakkında bazı teoriler verilip hemen hemen tanjant yapısının Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla integrallenebilirliği ve Bir fibrasyon tarafından tanımlanan integrallenebilen hemen hemen tanjant yapıları tanıtılmıştır.

Dördücü bölümde ise Tanjant demetin özel halleri olan Hemen Hemen Çarpım Yapılar, Hemen Hemen Kompleks Yapılar, Bir Tanjant demet üzerindeki hemen hemen kompleks yapılar ve bunlara uygulanan tamamlayıcı ve yatay liftler, Hermityen yapılar, Hemen Hemen Hermityen

Yapılar, Kaehler Yapılar ve Hemen Hemen Tanjant Yapıların tamamlayıcı ve yatay liftlerinin integrallenebilmesi gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise yüksek lisans tezinin sonucu verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. *$U \subset E^n$ bir açık olmak üzere bir*

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise f ye C^0 sınıfındandır denir.

$$C^k\ (U,\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfındandır} \right\}$$
$$C\ (U,\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f \in C^k (U,\mathbb{R}),\ \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

*$f \in C\ (U,\mathbb{R})$ ise f **ye diferensiyellenebilirdir** denir [5].*

Tanım 2.0.2. *E^n nin iki açık altkümesi U ve V olsun. Eğer*

$$\psi : U \to V$$

*fonksiyonu birebir ve $\psi \in C^k\,(U,E^n)$ ve $\psi^{-1} \in C^k\ (V,E^n)$ ise ψ ye U ile V arasında C^k sınıfından bir **difeomorfizm'dir** denir [5].*

Tanım 2.0.3. *X bir küme ve τ da X in kuvvet kümesinin bir alt ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa*

i) $X, \varnothing \in \tau$

ii) $\left\{A_j\right\}_{j\in I}$ *(j sonlu indis kümesi) için* $A_j \in \tau$ *ise* $\bigcap\limits_{j\in I} A_j \in \tau$

iii) $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \in \tau$ *ise* $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$

τ ya X üzerinde bir topoloji denir ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [6].

Tanım 2.0.4. *X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p,q \in X$ noktasının X deki açık komşulukları, sırası ile U ve V olsun. Eğer U ile V yi $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde alınırsa X topolojik uzayı bir **Haussdorff uzayıdır** denir [5].*

Tanım 2.0.5. *M_n , $n-$ boyutlu topolojik manifold ve U da M_n 'nin bir açık alt kümesi olsun. $U \subset M_n$ den E^n nin bir W alt kümesine bir ψ homeomorfizmi*

$$\psi : U \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} W \subset E^n$$

mevcutsa (U,ψ) *ikilisine* M *de bir* ***koordinat komşuluğu*** *veya* ***harita*** *denir.* $p \in U$ *için* $\psi(p) \in E^n$ *dir ve*

$$\psi(p) = \left(x^1(p), ..., x^n(p)\right),\ x^i(p) \in \mathbb{R};\ 1 \le i \le n$$

dir.Burada $x^i(p)$ *reel sayısına* $\psi(p)$ *noktasının* $i-$*yinci koordinatı ve*

$$x^i : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna da koordinat fonksiyonu denir [5].

Tanım 2.0.6. M_n, $n-$*boyutlu topolojik manifold ve* M_n *nin bir açık örtüsü* $\{U_\alpha\}$ *olsun.* U_α *açık kümelerinin* α *indislerinin kümesi A olmak üzere,* $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, U_α *dan* E^n *in* E_α *açık alt kümesine homeomorf olan bir* ψ_α *dönüşümü*

$$\psi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha$$

olsun. $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *koordinat komşuluklarının kolleksiyonuna bir* ***atlas*** *veya* ***koordinat komşuluğu sistemi*** *denir [5].*

Tanım 2.0.7. M_n, $n-$*boyutlu topolojik manifold ve* $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, M_n *nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliklere sahipse S ye* C^r, $r \ge 1$ *sınıfındandır denir.* $U_\alpha \cap U_\beta \ne \varnothing$ *olmak üzere her* $\alpha, \beta \in A$ *için*

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

fonksiyonları C^r *sınıfındandır. Burada S atlasına* M_n *üzerinde* C^r ***sınıfından diferensiyellenebilir yapı*** *denir.Ayrıca buradaki* $\phi_{\alpha\beta}$ *ve* $\phi_{\beta\alpha}$ *fonksiyonları birer koordinat fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar her yerde diferensiyellenebilirdir [7].*

Tanım 2.0.8. *M ve N sırasıyla m ve* $n-$ *boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Her* $p \in M$ *için N nin bir V ve M nin de bir U koordinat komşuluğu var ve*

$$U = \{k \in V \mid y_{m+1}(k) = ... = y_m(k) = 0\}$$

ise M ye N nin bir ***alt manifoldu*** *denir. Burada* $\{y_1, ..., y_m\}$ *V nin koordinat sistemi ve* $\left\{x_1 = y_{1\downarrow_U}, ..., x_m = y_{n\downarrow_U}\right\}$ *sistemi U nun bir alt koordinat sistemidir. Bu tanıma göre* $M \subset N$ *ve* $m \le n$ *olur [7].*

Tanım 2.0.9. *M_n bir topolojik manifold ve M_n nin S atlası C^r sınıfından olsun. Bu durumda M_n ye $n-$* ***boyutlu diferensiyellenebilir manifold*** *denir [5].*

Tanım 2.0.10. *M_n, C^∞ sınıfından olan bir manifoldun $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ ve bu uzayların birleşimi de $\bigcup\limits_{p\in M_n} T_p(M_n)$ olsun. Bir*

$$X : M_n \longrightarrow \bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n)$$

dönüüşümü için

$$\pi \circ X = I_{M_n} : M_n \longrightarrow M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi : \bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n) \longrightarrow M_n$$

dönüşümü varsa X 'e M_n üzerinde bir ***vektör alanı*** *denir. Bu vektör alanlarının kümesi $\chi(M_n)$ veya $T_0^1(M_n)$ ile gösterilir [7].*

Tanım 2.0.11. *M_n, $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $p \in M_n$ noktasındaki kotanjant uzay $T_p^*(M_n)$ ve bu uzayların keyfi birleşimleri de $\bigcup\limits_{p\in M_n} T_p^*(M_n)$ olsun.*

$$w : M_n \to \bigcup_{p\in M_n} T_p^*(M_n)$$

dönüşümü için

$$\pi \circ w = I_{M_n} : M_n \to M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi : \bigcup_{p\in M_n} T_p^*(M_n) \to M_n$$

*dönüşümü varsa w dönüşümüne M_n üzerinde $1-$**form** denir [7].*

Tanım 2.0.12. *V, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, yani*

$$[,] : V \times V \to V$$

bilineer dönüşümü her $X,Y,Z \in V$ ve her $a.b \in \mathbb{R}$ için

i)

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \text{ (1.yere göre lineer) ve}$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y] \text{ (2. yere göre lineer)}$$

ii) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anti-simetrik)*

iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *(Jacobi özdeşliği)*

şartlarını sağlarsa V ye $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir **Lie cebiri** denir [8].

Her $X,Y \in V$ ve her $f \in C^\infty$ için

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

şeklinde yazılıp $[,] : V \times V \to V$ dönüşümü bir Lie cebiridir.

Tanım 2.0.13. *M_n, $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve G de bir grup olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa (M_n, G) ikilisine bir **Lie Grubu** denir.*

L_1 : *M_n nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.*

$$L_2 : M_n \times M_n \to M_n$$
$$(a,b) \to ab^{-1}$$

*dönüşümleri her yerde diferensiyellenebilirdir. Burada M_n ifadesine **Lie grubunun esas manifoldu** ve G ye de M_n nin **esas grubu** denir [5].*

Tanım 2.0.14. *M ile N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar olmak üzere $m = boyM \geq n = boyN$ ile$F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer M nin her noktasında $rankF = boyN = n$ oluyorsa F bir submersiyondur denir [9].*

Tanım 2.0.15. *M, $m-$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde rankı n olan bir reel vektör demeti E ise (E,π,M) üçlüsü aşağıdaki şartları sağlarsa bir demettir öyleki bu demet M üzerinde bir **vektör demetidir;***

i) *Herhangi $x \in M$ için E_x, $n-$ boyutlu bir reel vektör uzayı yapısıdır,*

ii) *Lokal aşikardır; Herhangi $x \in M$ için x in bir U komşuluğu var ise*

$$H : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

bir difeomorfizmdir yani herhangi $y \in U$ için $v \to H(y,v)$ dönüşümüne karşılık gelen E_y vektör uzayı ve $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı arasında bir izomorfizm tanımlanır [9].

Tanım 2.0.16. *E, M, F $C^{\infty}-$manifoldlar ve $\pi:\ E \to M$ de bir $C^{\infty}-$dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere eğer*

$$(\pi \circ \psi_{\alpha})(p,y) = p,\ p \in U,\ y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_{\alpha} : U_{\alpha} \times F \to \pi^{-1}(U_{\alpha})$$

difeomorfizminin F ye göre bir $\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ ailesi mevcutsa π ***lokal çarpım özelliğine sahiptir*** *denir ve $A = \{U_{\alpha}, \psi_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ sistemine de, π nin bir* ***lokal ayrışmasıdır*** *denir [10].*

Tanım 2.0.17. *$\pi : E \to M$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\eta = (E,\ \pi,\ M,\ F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lift demeti denir.Bu lift demetinde E manifolduna bir* ***total uzay*** *veya* ***taban manifold****, M manifolduna* ***baz (taban) uzay****, F manifolduna* ***lift modeli****, π dönüşümüne ise bir* ***fibrasyon*** *(veya* ***projeksiyon)*** *denir. Burada ayrıca rankη = boy$F$ dir [11]. Ayrıca (E,π,M) üçlüsüne* ***liftli manifold*** *denir. Lift demeti π diye gösterileceği gibi $\eta = (E,\ \pi,\ M,\ F)$ ile de gösterilir.*

Tanım 2.0.18. *$\pi : E \to M$ bir lift demeti olsun. Her $x \in M$ için*

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \mid \pi(u) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir ***lift*** *denir. Tüm F_x liftlerinin ayrık birleşimleri E total uzayını verir. Yani;*

$$E = \bigcup_{x\in B} F_x$$

dir [11].

Tanım 2.0.19. *(E,π,M) bir liftli manifold olmak üzere boy$M = n$, boy$E = m+n$ olmak üzere $U \subset E$ açık alt kümesi üzerinde bir koordinat sistemi*

$$y : U \to \mathbb{R}^{m+n}$$

olsun.

$$pr_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m}$$

olmak üzere $a, b \in U$ ve

$$\pi(a) = \pi(b) = p \Rightarrow pr_1(y(a)) = pr_1(y(b))$$

önermesi doğru ise, y ye bir ***uyarlanmış (veya adapte edilmiş) koordinat sistemi*** *denir [12].*

Tanım 2.0.20. *M ve F manifoldlar olsun. $\pi : M \times F \to M$ ilk durum üzerinde farklı bir kanonik projeksiyon ise $(M \times F, \pi, M)$ üçlüsü bir demet olup bu demet* ***aşikar demet*** *olarak adlandırılır [9].*

Tanım 2.0.21. *(E, π, M) bir liftli manifold ve F de diferensiyellenebilir manifold olmak üzere ,eğer*

$$t : E \to M \times F$$

dönüşümü

$$pr_1 \circ t = \pi$$

olacak şekilde bir difeomorfizm ise (F, t) ikilisine π nin model lifti denir ve en azından bir trivializasyona sahip (E, π, M) manifolduna da ***aşikar liftli manifold*** *denir [12].*

Tanım 2.0.22. *(E, π, M) bir liftli manifold ve $p \in M$ olsun. F_p diferensiyellenebilir manifold, p nin bir komşuluğu W_p ve*

$$t_p : \pi^{-1}(W_p) \to W_p \times F_p$$

dönüşümü $pr_1 \circ t_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$ şartını sağlayan bir difeomorfizm ise o zaman (W_p, t_p, F_p) üçlüsüne p nin komşuluğunda π nin bir ***lokal trivializasyonu*** *denir ve taban uzayının her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir (E, π, M) liftli manifolduna da* ***lokal aşikar liftli manifold*** *veya* ***demet*** *denir [12].*

Tanım 2.0.23. *M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm$p \in M$ve $V_p \in T_pM$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri*

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_*|_p (V_p) = W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}N$$

tanjant vektörü

$$\varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \to N$$

eğrisine $\varphi(p)$ noktasında teğet olan bir tanjant vektör olmak üzere

$$\varphi_*|_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

ile tanımlanan dönüşüme φ nin $p \in M$ noktasındaki ***türev dönüşümü*** *denir [12].*

Tanım 2.0.24. *M_n, $n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve G de bir Lie grubu olsun. M_n üzerinde bir asli demet, G grubu ile M_n üzerinde bir P fibre manifoldundan oluşan ve*

$$\pi : P \to M_n$$

*bir projeksiyonu var ve π üzerinde G Lie grubunun aşağıdaki şartları sağlanırsa π ye M_n üzerinde bir **asli demet** denir.*

1. Her $u \in P$ ve $a \in G$ için $\pi(ua) = \pi(a)$

2. P lokal aşikardır yani; her bir $x \in M_n$ için x in bir U koordinat komşuluğu var ve

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

dönüşümü bir difeomorfizmdir.Yani

$$\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$$

olacak sekilde bir

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to G$$

dönüşümü vardır öyleki her $u \in \pi^{-1}(U)$ ve $a \in G$ için

$$\varphi(ua) = (\varphi(u))a$$

dönüşümü mevcuttur.Bir asli demet $P(M_n, G, \pi)$ ya da $P(M_n, G)$ olarak veya daha kısaca P ile gösterilir. Burada P ye total uzay veya demet uzayı, M_n ye baz uzayı ve G ye de bir yapı grubu denir.Ayrıca burada $\pi(ua) = \pi(a)$ ifadesi $\{ua \mid a \in G\} \subset \pi^{-1}(\pi(u))$ kümesi şeklindedir. Benzer şekilde $\varphi(ua) = (\varphi(u))a$ ifadesi de $\{ua \mid a \in G\} = \left(\pi^{-1}(\pi(u))\right)$ dir. Belirtelim ki eğer $ua = u$ ise bu durumda $a = e$ dir ki bu da $a = e \in G$ grubunun birim elemanıdır.Eğer bu asli demet bir Lie grubunda ise $B_G(M_n)$ ile belirtilir, yani bu gösterim M_n diferensiyellenebilir manifoldunun G Lie grubu üzerindeki asli demetidir [9].

Tanım 2.0.25. *M_n $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve X tarafindan üretilen lokal dönüşümlerinin bir lokal $1-$ parametreli grubu ϕ_t olsun . X e göre bir w, $p-$formununun $L_X w$ Lie türevi tanımlanır. Böylece M_n deki dönüşümlerin lokal $1-$ parametreli grupları yani basitçe ϕ_t'lerin olduğunu ele alırsak her bir $t \in \mathbb{R}$ için*

$$\phi_t : \wedge M_n \to \wedge M_n$$

bir otomorfizmi $\wedge M_n$ de bir dış cebir tanımlar. Böylelikle $x \in M_n$ için

$$(L_X w)(x) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[w(x) - \left(\phi_{-t}^* w\right)(x)\right]$$

ve $L_X w$, M_n üzerinde bir $p-$formdur. Buradaki $L_X w$ ifadesine Lie türevi denir [9].

Önerme 2.0.1. *M_n üzerinde bir vektör alanı X olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i) Her $f \in M_n$ fonksiyonu için $L_X f = Xf$ dir.

ii) $w \in \wedge^p M_n$, $r \in \wedge^q M_n$ ise

$$L_X(w \wedge r) = L_X w \wedge r + w \wedge L_X r$$

iii) d ile L_X türevini işleme koyarsak

$$L_X d = dL_X$$

olur [9].

İspat:

i) Gerçekten

$$\begin{aligned} L_X f &= \lim_{t\to o} \left(\frac{1}{t}\right) \left[f(x) - f(\phi_{-t}(x))\right] \\ &= -\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[f(\phi_{-t}(x)) - f(x)\right] \end{aligned}$$

olup burada $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ dir. Ayrıca $-X$ tarafından üretilen lokal dönüşümlerin $1-$ parametreli grubu ϕ_{-t} dir. Bu yüzdendir ki

$$L_X f = -(-(X)f) = Xf$$

dir.

ii) $w \in \wedge^p M_n$, $r \in \wedge^q M_n$ olsun. Lie türevin tanımından

$$\begin{aligned} (L_X(w \wedge r))(x) &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[(w \wedge r)(x) - \left(\phi_{-t}^*((w \wedge r))\right)(x)\right] \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[(w \wedge r)(x) - \left(\phi_{-t}^* w\right)(x) \wedge \left(\phi_{-t}^* r\right)(x)\right] \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[(w \wedge r)(x) - \left(\phi_{-t}^* w\right)(x) \wedge r(x) + \left(\phi_{-t}^* w\right)(x) \wedge r(x)\right. \\ &\left. - \left(\phi_{-t}^* w\right)(x) \wedge \left(\phi_{-t}^* r\right)(x)\right] \\ &= \left(\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left[w(x) - \left(\phi_{-t}^* w\right)(x) \wedge r(x)\right]\right) \wedge r(x) \\ &+ \left(\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left(\left(\phi_{-t}^* w\right)(x)\right)\right) \wedge \left(\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \left(r(x) - \left(\phi_{-t}^* r\right)(x)\right)\right) \\ &= L_X w \wedge r + w \wedge L_X r \end{aligned}$$

dir.

iii) $f \in C^{\infty}(M_n)$ olsun. $v \in T_x M_n$ ve $x \in M_n$ için

$$d(L_X f)(x)(v) = v(L_X f) = v(Xf) = v\left(\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)[f - f\circ\phi_{-t}]\right)$$

burada $f\circ\phi_{-t}$ fonksiyonu $\mathbb{R}\times M_n$ manifoldu üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(L_X(df))(x)(v) &= \left(\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)\left[(df)(x) - \left(\phi_{-t}^{*}(df)\right)(x)\right]\right)(v)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)\left[(df)(x)(v) - df(\phi_{-t}(x))\left((d\phi_{-t})(x)\right)(v)\right]\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)\left[vf - v(f\circ\phi_{-t})\right]\end{aligned}$$

dir. Eğer M_n üzerinde bir vektör alanı Y de v ye genişletilirse o zaman $\mathbb{R}\times M_n$ üzerinde Y ve d/dt iki vektör alanı olarak elde edilir ki bu da $[d/dt, Y] = 0$ olduğu sonucunu verir [9].

Tanım 2.0.26. *M_n, C^{∞} sınıfından $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve bu manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M_n)$ olsun. Eğer*

$$TM_n = \bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n)$$

ise TM_n ifadesine M_n nin tanjant demeti denir [13].

TM_n nin herhangi bir $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki TM_n doğal demet yapısını tanımlayan

$$\tau_{M_n} : TM_n \to M_n$$

demet izdüşümü $\tilde{p} \to p$ noktasını karşılık getirir. Yani $\tau_{M_n}(\tilde{p}) = p$ olur. $\tau_{M_n}^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibresi denir. Doğal olarak burada

$$f : M_n \to TM_n$$

bir kesiti bulunur. M_n manifoldunda keyfi bir p noktası için $f(p)$, $T_p(M_n)$ nin sıfır vektörüdür. Buradaki f kesitine veya $f(M_n)$ görüntüsüne sıfır kesit denir. Ayrıca buradaki $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldu TM_n tanjant demette imbedding olmuş altmanifolddur.

M_n nin bir U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlar (x^i) olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^i\}$ atlası ile örtülmüş olsun. $\tau_{M_n}^{-1}(U) \subset TM_n$ açık kümesi için

$$\tau_{M_n}^{-1} : U \subset M_n \to U \times \mathbb{R}^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur ve burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerindeki $n-$ boyutlu bir vektör uzayıdır. $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U \subset M_n)$ noktası (p,X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_i\}$, $\left\{\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ doğal bazı olup $\tilde{p}$ nın

$$\left(y^i\right) = \left(x^{\bar{\imath}}\right), \bar{\imath} = n+1, n+2, ..., 2n$$

kartezyen koordinatları ile gösterilir. Ayrıca M_n nin bir U komşuluğunda

$$p = \tau_{M_n}(\tilde{p})$$

nın koordinatları $\left(x^i\right)$, $i = 1, ..., n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası için uygun bir $\left(x^i, x^{\bar{\imath}}\right) \to \tilde{p} \in \tau_{M_n}^{-1}(U)$ dönüşümü verilmiş olur. Öyleyse $\tau_{M_n}^{-1}(U) \subset T_p(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^i, \left(x^{\bar{\imath}}\right)\right)$ lokal koordinat sistemi elde edilir. Bu ifadelerden yola çıkılarak $\left(x^i, x^{\bar{\imath}}\right)$ya $\left(x^i\right)$ den indirgenen $\tau_{M_n}^{-1}(U)$ daki lokal koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \tau_{M_n}(\tilde{p})$ noktasını içeren bir diğer koordinat komşuluğu $\bar{U}$ için $\left\{\bar{U}; x^{\bar{\imath}}\right\}$ atlası verilsin. Bu durumda $\pi^{-1}(\bar{U})$ koordinat komşuluğunda $\tilde{p}$ noktasını içerir. Buna göre $\pi^{-1}(\bar{U})$ ye göre $\tilde{p}$ nın indirgenen koordinatları $\left(x^{\bar{\imath}}, y^{\bar{\imath}}\right)$ dir. Ayrıca

$$\begin{cases} x^{\bar{\imath}} = x^{\bar{\imath}}(x) \\ y^{\bar{\imath}} = \dfrac{\partial x^{\bar{\imath}}}{\partial x^i} y^i \end{cases} \tag{2.0.1}$$

olarak verilip, burada $x^i(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca $x^{\bar{\imath}} = y^i$, $x^{\bar{\imath}'} = y^{i'}$ ile gösterilirse (2.0.1) denklemi

$$x^{\bar{p}} = x^{\bar{p}}(x) \tag{2.0.2}$$

olarak ifade edilir.(2.0.1) denkleminin Jacobiyen matrisi

$$\frac{\partial x^{\bar{p}}}{\partial x^p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^{\bar{\imath}}}{\partial x^i} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{\bar{\imath}}}{\partial x^i \, \partial x^j} & \dfrac{\partial x^{\bar{\imath}}}{\partial x^i} \end{bmatrix} \tag{2.0.3}$$

ile verilir.(2.0.1) in tersi ise

$$\begin{cases} x^i = x^i\left(x'\right) \\ y^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{\imath}}} y^{\bar{\imath}} \end{cases} \tag{2.0.4}$$

veya

$$x^p = x^p\left(x'\right) \tag{2.0.5}$$

olarak yazılır. Buna göre (2.0.4) ün Jacobiyen matrisi

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{\bar{p}}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{\bar{i}'}} & 0\\ \dfrac{\partial^{2}x^{h}}{\partial x^{\bar{i}}\partial x^{\bar{i}'}}y^{\bar{i}'} & \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{\bar{i}'}}\end{bmatrix} \tag{2.0.6}$$

ile verilir. (2.0.3) ve (2.0.6) denklemleri TM_n tanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir [3].

Tanjant demetin bir başka tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.0.27. *(E,π,M_n) bir liftli manifold ve TE ve TM_n sırasıyla E ve M diferensiyellenebilir manifoldların tanjant uzayı olmak üzere*

$$\pi_*: TE \to TM_n$$

π nin türev dönüşümü olsun.

$$\pi_* = (TE,\pi_*,TM)$$

üçlüsü bir demet olup bu demete π_* ın π ye göre tanjant demeti denir [14].

Tanım 2.0.28. *$\mathscr{F}$, $\mathbb{R}$ reel saylar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir cisim olsun. $\mathscr{F}$ üzerinde $r-$tane vektör uzayı $V_1,\ldots,V_r$ olsun. Bir*

$$f: V_1\times V_2\times\ldots\times V_r \to \mathscr{F}$$

dönüşümü $r-$lineer ise f ye $V_1\times V_2\times\ldots\times V_r$ çarpım kümesi üzerinde bir $r-$lineer fonksiyon veya $r-$lineerdir denir. $V_1\times V_2\times\ldots\times V_r$ çarpım cümlesi üzerinde bütün $r-$lineer fonksiyonların kümesi

$$\mathscr{L}(V_1\times V_2\times\ldots\times V_r;\mathscr{F})=\left\{f\,|\, f: V_1\times V_2\times\ldots\times V_r \xrightarrow{r-lineer} \mathscr{F}\right\}$$

ile gösterilsin. Bu cümlede toplama ve skalar ile çarpma işlemleri ile beraber $\mathscr{L}(V_1\times V_2\times\ldots\times V_r;\mathscr{F})$ kümesi $\mathscr{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*,V_2^*,\ldots,V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve

$$\mathscr{L}(V_1\times V_2\times\ldots\times V_r;\mathscr{F})=V_1^*\otimes V_2^*\otimes\ldots\otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^*\otimes V_2^*\otimes\ldots\otimes V_r^*$ vektör uzayının her bir elemanına $r-$mertebeden kovaryant tensör denir [7].

Örneğin; $V^* : V \to \mathbb{R}$ bir 1.mertebeden kovaryant tensördür.

V vektör uzayı üzerinde tanımlanan bir iç çarpım fonksiyonu

$$\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

2.mertebeden kovaryant tensördür.

Tanım 2.0.29. *V vektör uzayı üzerinde bir V^* dual vektör uzayı olmak üzere $(V^*)^* \cong V$ dir. V^* üzerinde $s-$lineer fonksiyonların vektör uzayı elde edilir. Yani*

$$\mathscr{L}^s(V^*) = \mathscr{L}(V^* \times V^* \times ... \times V^*; \mathbb{R}) = V \otimes V \otimes ... \otimes V = \otimes^s V$$

dir. $T^s(V^*) = \otimes^s V$ ile gösterilecektir. Burada $T^0(V^*) = \mathbb{R}$, $T^1(V^*) = V$ olur.

$T^s(V^*)$ çarpımına bir kontravaryant $s-$tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da $s-$mertebeden kontravaryant tensör denir [7].

Tanım 2.0.30. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $n-$boyutlu vektör uzayı V ve bu uzayın dual vektör uzayı V^* olsun. Bir*

$$f : V^r \times V^{*s} \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $(r+s)$ lineer dönüşümlerin kümesi

$$\mathscr{L}(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \left\{ f |\ f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)-lineer} \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde gösterilirse burada tanımlanan toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğu görülür. Bu vektör uzayı V ve V^* vektör uzayları üzerinde $r-$mertebeden kovaryant, $s-$mertebeden kontravaryant tensör uzayı olur ve

$$T^r_s(V) = T^r(V) \otimes T^s(V^*)$$

ile ifade edilir. Eğer $r = s = 0$ alınırsa $T^0_0(V) = \mathbb{R}$ olur ki bu da 0.mertebeden kovaryant, 0.mertebeden kontravaryant tensördür [7].

Örnek olarak bir V vektör uzayının duali olan V^* ın elemanları $(1,0)$ tipindeki tensördür. Eğer V vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanırsa $(2,0)$ tipindeki tensördür. Eğer V vektör uzayı üzerinde bir determinant fonksiyonu tanımlanırsa bu da $(n,0)$ tipindeki bir tensördür.

Tanım 2.0.31. *M_n $n-$boyutlu bir C^∞ manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M_n)$ olmak üzere bu durumda*

$$g : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise yani her $X, Y \in T_0^1(M_n)$ için

- $g(X,Y) = g(Y,X)$,
- $g(X,X) \geq 0$ *ve* $g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ *şartlarını sağlıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği ve (M_n, g) ikilisine Riemann manifoldu denir [15].*

Tanım 2.0.32. *M_n, $n-$ boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M_n üzerinde vektör alanları kümesi $\chi(M_n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkasıda $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$g : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

foınksiyonu,

1. *$2-$lineer*
2. *Simetrik*
3. *$\forall X \in \chi(M_n)$ için $g(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow Y = 0 \in \chi(M_n)$; özelliklerini sağlıyor ise M_n' ye yarı-Riemann metriği, (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann manifoldu denir [7].*

Tanım 2.0.33. *M_n,$n-$boyutlu bir manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M_n)$ olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M_n)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için*

$$\nabla : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n)$$

ile tanımlı ve

i) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_X Y$

iv) $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f\, \nabla_X Y$

özelliklerini sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon denir. Burada $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi denir [5].

Tanım 2.0.34. *M_n bir manifold ve ∇ da bu manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere*

$$\begin{gathered} T : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n) \\ (X,Y) \to T(X,Y) \end{gathered}$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

*ifadesinde T dönüşümüne M_n nin **torsiyon tensörü** denir. Burada T dönüşümü $(1,2)-$ tipli bir tensör alanıdır [11].*

Buradan T anti-simetrik yani $T(X,Y) = -T(Y,X)$ dir. Eğer ∇ simetrik ise T torsiyon tensörü sıfırdır.

Tanım 2.0.35. *$(M_n,\ g)$ n-boyutlu bir Riemann manifold ve ∇ da M_n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Buna göre her $X,Y,Z \in \Gamma(TM_n)$ için*

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$,
2. $X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *şartlarını sağlarsa ∇ ya M_n üzerinde Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir [5].*

Tanım 2.0.36. *M_n bir manifold, bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M_n)$ ve ∇ da M_n üzerindeki lineer konneksiyon olmak üzere*

$$\begin{gathered} R : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n) \\ (X,Y,Z) \to R(X,Y)Z = R(X,Y,Z) \end{gathered}$$

dönüşümü her $X,Y,Z \in \chi(M_n)$ için

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

*ifadesine M_n nin **eğrilik tensörü** denir. Burada R dönüşümü $(1,3)$ tipli bir tensör alanıdır. Eğer $R = 0$ olursa M_n manifoldu flat (ya da düzlemsel) denir. Buradan $R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$ dir. ∇ flat ise R eğrilik tensörü sıfır olur [11].*

Tanım 2.0.37. *M, $m-$boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde bir $k-$boyutlu distribüsyon D ve M de her x için T_xM nin bir $k-$ boyutlu altuzayı $D(x)$ olarak seçelim. Her $x \in M$ için x in bir U koordinat komşuluğu var ve her $y \in U$ için $D(y)$ nin bir bazı formundaki U üzerinde $X_1, \ldots, X_k$,*

$k-$lineer bağımsız C^{∞} vektör alanları ise D nin C^{∞} olduğu söylenir. Bu durumda D nin bir lokal bazı $X_1, ..., X_k$ dır. M üzerinde bir vektör alanı X, her $x \in M$ için $X(x) \in D(x)$ ise X in D ye ait olduğu söylenir. D ye ait olan her X, Y vektör alanları için $[X,Y] \in D$ ise D ye involutive denir [9].

Tanım 2.0.38. *M nin bir immersed(daldırılmış) altmanifodu $\phi : N \to M$ olsun. Bu yüzden her $y \in N$ için*

$$d\phi(y)(T_yN) = D(\phi(y))$$

ise N ,D nin bir integral manifoldudur.Eğer M nin herbir noktası civarında D nin bir integral manifoldu varsa D tamamen integrallenebilirdir. [9].

Teorem 2.0.1 (Frobenius Teoremi)**.** *Bir M manifoldu üzerinde bir D distribüsyonu tamamen integrallenebilirdir gerek ve yeter koşul involute olmasıdır [9].*

Tanım 2.0.39. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve M ile N arasındaki dönüşüm*

$$\phi : M \to N$$

ve $f : N \to \mathbb{R}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman $x \in M$ için

$$(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))$$

ile tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşüme f nin ϕ ye göre pullback dönüşümü denir [8], [16].

Tanım 2.0.40. *$\sigma : \mathbb{R} \to M_n$ bir eğri ve M_n üzerinde bir vektör alanı X olsun.*

$$DX/dt = \nabla_{\dot{\sigma}(t)} X$$

nın σ boyunca X in kovaryant türevi tanımlanır. Eğer $DX/dt = 0$ ise X ,σ boyunca paraleldir denir. Bu durumda $\dot{\sigma}(t)$, σ boyunca paralel ise σ, ∇ nın bir geodeziği olur yani;

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = 0$$

dır ($\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma}$ iyi-tanımlıdır, bu yüzden σ boyunca X in değerlerine DX/dt bağlıdır; bu durumda σ nın bir açık komşuluğu üzerinde bir keyfi vektör alanında $\dot{\sigma}(t)$ gereklidir veya genişletilir). Lokal koordinatlarda

$$DX/dt = \left(\left(dX^k(t)/dt\right) + \Gamma^k_{ij}(t) X^i(t)\left(dx^j/dt\right)\right)\left(\partial/\partial x^k\right)$$

ve

$$\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma}(t) = \left(\left(d^2x^k/dt^2\right) + \Gamma_{ij}^k(t)\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right)\right)\left(\partial/\partial x^k\right)$$

olup burada $\sigma(t) = \left(x^i(t), \dot{\sigma}(t) = \left(dx^i/dt\right)\left(\partial/\partial x^i\right)\right)$ *dir. Bu yüzden,* σ, ∇ *nın bir geodeziğidir gerek ve yeter koşul takip eden lineer diferensiyel eşitlik sisteminin gerekli olmasıdır, yani ;*

$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma_{ij}^k\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right) = 0,\ 1 \leq k \leq m$$

dir [9].

Tanım 2.0.41. *M_{2n}, $2n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde J, $J^2 = 0$ şartını sağlayan ve rank$J = n$ olan $(1,1)-$ tipli tensör alanı olsun. Her $x \in M_{2n}$ için*

$$J_x : T_x(M_{2n}) \to T_x(M_{2n})$$

endomorfizmi $J_x^2 = 0$ olduğundan, $\mathrm{Im}J_x \subset cekJ_x$ şartını sağlarsa M_{2n} bir hemen hemen tanjant manifold olur. Buradaki J ,$(1,1)-$tipli tensör alanına M_{2n} üzerinde hemen hemen tanjant yapısı denir [9].

Tanım 2.0.42. *M_n bir diferensiyellenebilir manifold ve J de $(1,1)-$tipli bir tensör alanı olmak üzere $\forall\ X,Y \in \chi(M_n)$ için*

$$\begin{gathered} N_J : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n) \\ (X,Y) \to N_J(X,Y) \end{gathered}$$

olmak üzere

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] + J^2[X,Y]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)-$ tipli N_J tensör alanına J nin Nijenuis torsiyon tensörü denir [17].

3. G- YAPILARI ve HEMEN HEMEN TANJANT YAPILAR

Burada tezin ana konusu olan hemen hemen tanjant yapılar ve hemen hemen tanjant demet üzerinde durulacaktır. Hemen hemen tanjant demet yapısına girmeden önce $G-$ yapı ve $G-$ manifold kavramları verildikten sonra hemen hemen tanjant yapılar ve bunların daha özel bir hali olan tanjant demet üzerinde kanonik hemen hemen tanjant yapılar kavramı verilmiştir. Ayrıca burada bir tanjant demet üzerindeki $(1,r)$,$r \geq 1$ tipli ve $(0,r)$ $r \geq 1$ tipli tensör alanlarının yatay, dikey ve tamamlayıcı liftleri üzerinde durulmuş ve hemen hemen tanjant demetin integrallenebilirliği tanıtılıp ve hemen hemen tanjant konneksiyonlar gösterilip daha sonra bir fibrasyon tarafından tanımlanan integrallenebilir hemen hemen tanjant yapılar tanıtılmıştır.

3.1 G- Yapıları

Tanım 3.1.1. *M_n ,$n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve G de bir Lie grubu olsun. M_n üzerinde bir asli demet, G grubu ile M_n üzerinde bir P fibre manifoldundan oluşan ve*

$$\pi : P \to M_n$$

*bir projeksiyonu var ve π üzerinde G Lie grubunun aşağıdaki şartları sağlanırsa π ye M_n üzerinde bir **asli demet** denir.*

1. *Her $u \in P$ ve $a \in G$ için $\pi(ua) = \pi(a)$*
2. *P lokal aşikardır yani; her bir $x \in M_n$ için x in bir U koordinat komşuluğu var ve*

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

dönüşümü bir difeomorfizmdir.Yani

$$\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$$

olacak şekilde bir

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to G$$

dönüşümü vardır öyleki her $u \in \pi^{-1}(U)$ ve $a \in G$ için

$$\varphi(ua) = (\varphi(u))a$$

dönüşümü mevcuttur.

Bir asli demet $P(M_n,G,\pi)$ ya da $P(M_n,G)$ olarak veya daha kısaca P ile gösterilir. Burada P ye total uzay veya demet uzayı, M_n ye baz uzayı ve G ye de bir yapı grubu denir.Ayrıca burada $\pi(ua)=\pi(u)$ ifadesi $\{ua \mid a\in G\}\subset \pi^{-1}(\pi(u))$ şeklindedir. Benzer şekilde $\varphi(ua)=(\varphi(u))a$ ifadesi de $\{ua \mid a\in G\}=\left(\pi^{-1}(\pi(u))\right)$ dir. Belirtelim ki eğer $ua=u$ ise bu durumda $a=e$ dir ve $a=e\in G$, grubunun birim elemanıdır.Eğer bu asli demet bir Lie grubunda ise $B_G(M_n)$ ile belirtilir, yani bu gösterim M_n diferensiyellenebilir manifoldunun G Lie grubu üzerindeki asli demetidir [9].

Tanım 3.1.2. *$P(M_n,G,\pi)$ bir asli demet $\{U_\alpha\}$, M_n diferensiyellenebilir manifoldunun bir açık örtüsü olsun. Her bir α,β ve her $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ için*

$$\psi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$$
$$\psi_{\alpha\beta}(x)=\gamma_\alpha(p).[\gamma_\beta(p)]^{-1},\ \left(p\in\pi^{-1}(x)\right)$$

biçiminde tanımlı diferensiyellenebilir $\psi_{\beta\alpha}$ fonksiyonuna P asli demetinin U_α ya karşılık gelen transition (geçiş) dönüşümü denir. Buradaki $\psi_{\beta\alpha}$ dönüşümü her bir $x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ için

$$\psi_{\alpha\beta}(x).\psi_{\beta\gamma}(x)=\psi_{\alpha\gamma}(x)$$

özelliğini sağlar P asli demetinin U_α ve U_β komşuluğundaki lokal trivializasyonları sırasıyla ψ_α ve ψ_β olsun. Bu durumda

$$\psi_\alpha\circ[\psi_\beta]^{-1}:\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\times G\to\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\times G$$

dönüşümü her bir $(x,g)\in\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\times G$ için

$$\psi_\alpha\circ[\psi_\beta]^{-1}(x,g)=\left(x,g_{\alpha\beta}(x).g\right)$$

özelliklerini sağlar. Bunun terside doğrudur. Bu nedenle

$$\psi_\alpha\circ[\psi_\beta]^{-1}(x,\psi)=\left(x,\psi_{\beta\alpha}(x).\psi\right)$$

özeliğini sağlayan $\psi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ dönüşümüne de transition (geçiş) dönüşümü denir. [18].

Teorem 3.1.1 (Varlık teoremi). *M_n bir diferensiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu olsun. M_n de bir U_α açık komşuluğu ve*

$$\psi_{\beta\alpha}(x).\psi_{\beta\gamma}(x)=\psi_{\alpha\gamma}(x)$$

koşulunu sağlayan

$$\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

dönüşümleri verilsin. Bu durumda geçiş fonksiyonları $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ olan bir P asli demeti oluşturulabilir [19], [20].

Tanım 3.1.3. *$P = (M_n, \pi, G)$ ve $P' = \left(M_n', \pi', G'\right)$ iki asli demet, G, G' nün bir Lie alt grubu ve $f : M_n \to M_n'$ bir asli demet homomorfizması olsun. Bu durumda $h : G \to G'$ dönüşümü inclusion (içerme) dönüşümü ise f dönüşümüne bir reduction (indirgeme) denir. Bu durumda P ye göre P' asli demetine indirgenebilir (reducable) bir asli demeti denir [20].*

Tanım 3.1.4. *G bir Lie grubu ve $g \in G$ olsun.*

$$\begin{aligned} L_g &: G \to G \\ &h \to L_g(h) = gh \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_g &: G \to G \\ &h \to R_g(h) = hg \end{aligned}$$

fonksiyonlarına G nin g ye göre sırasıyla sol ve sağ ötelemeleri (invaryantları) denir [8].

Tanım 3.1.5. *G bir Lie grubu ve $X \in \chi(G)$ olsun. Eğer her $g_1, g_2 \in G$ için $(L_{g_1})_*$ fonksiyonu L_{g_1} nin türev dönüşümünü göstermek üzere*

$$(L_{g_1})_* X_{g_2} = X_{g_1 g_2}$$

oluyorsa X vektör alanına G üzerinde sol-invaryant vektör alanı denir [5].

Tanım 3.1.6 ((FM_n) Çatı demetleri)**.** *M_n, $n-$ boyutlu bir manifold olsun. $x \in M_n$ noktasında bir u lineer çatı $T_x(M_n)$ tanjant uzayının düzenli $X_1, ..., X_n$ bazları olmak üzere x in bir u lineer dönüşümünün M_n de FM_n nin dönüşümü π ve M_n nin tüm noktalarındaki bütün lineer çatıların kümesi FM_n olsun. FM_n üzerinde $Gl(n, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun bir etkisi aşağıdaki gibidir. x de bir lineer çatı $u = (X_1, ..., X_n)$ ve $a = \left(a_i^j\right) \in Gl(n, \mathbb{R})$ ise*

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j X_j$$

ile tanımlı x deki lineer çatı $ua = (Y_1, ..., Y_n)$ dır. FM_n nin bir diferensiyellenebilir yapısını tanımlamak için şu ifade kullanılır. M_n nin bir U koordinat komşuluğundaki lokal koordinat sistemi $\left(x^1, ..., x^n\right)$ olsun. Eğer $x \in U$ ise x de bir lineer çatı $\left(\left(\partial/\partial x^1\right)_x, ..., \left(\partial/\partial x^n\right)_x\right)$ dir.

Bundan ötürü x de her u lineer çatısı $\left(X_i^j\right) \in Gl(n,\mathbb{R})$ *ile* $u = (X_1,...,X_n)$ *formunda tek olacak şekilde*

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_i^j \left(\partial/\partial x^j\right)$$

yazılır. Bundan dolayı bir

$$\psi(u) = \left(x, \left(X_i^j\right)\right)$$

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times Gl(n,\mathbb{R})$$

bijektif dönüşümü vardır. $\pi^{-1}(U)$ *da lokal koordinat sistemi gibi* $\left(x^i, X_i^j\right)$ *alınarak bir diferensiyellenebilir manifoldda* FM_n *gösterilebilir ve buradan da*

$$\begin{aligned} FM_n \times Gl(n,\mathbb{R}) &\to FM_n \\ u &\to ua \end{aligned}$$

etkisi C^∞ *dur. Bundan dolayı* $u = (X_1,...,X_n)$ *için* $\phi(u) = \left(X_i^j\right) \in Gl(n,\mathbb{R})$ *kümesi için* π *bir projeksiyon ve* $Gl(n,\mathbb{R})$ *bir yapı grubu ile* FM_n*,* M_n *üzerinde bir asli demettir. Bu asli demete* M_n *nin* ***çatı demeti*** ***(****veya* ***lineer çatıların demeti)*** *adı verilir. Ayrıca şunu not edelim ki* $\mathbb{R}^n$ *de bir kanonik baz* $\{e_1,...,e_n\}$ *ve x de bir lineer çatı* $u = (X_1,...,X_n)$ *ise*

$$u(e_i) = X_i, \ 1 \le i \le n$$

ile tanımlı $u : \mathbb{R}^n \to T_x(M_n)$ *bir lineer izomorfizmidir. Diğer taraftan* $a(e_i) = a_i^j e_j$ *olarak ele alınırsa ve* $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *bir otomorfizm ise* $a \in Gl(n,\mathbb{R})$ *bir non-singüler (singüler olmayan) matristir. Bu yüzden* FM_n *de* $Gl(n,\mathbb{R})$ *nin etkisi* $\mathbb{R}^n \xrightarrow{a} \mathbb{R}^n \xrightarrow{u} T_x(M_n)$ *birleşimi ile gösterilir [9].*

Tanım 3.1.7. *M_n, $n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve G de* $Gl(m,\mathbb{R})$ *nin bir Lie alt grubu olsun. Bu durumda bir manifold üzerinde G-yapısının tanımlanması için gerek ve yeter şart* M_n *nin çatı demeti* FM_n *nin G Lie alt grubuna kısıtlanışıdır. Yani* $B_G(M_n)$ *asli demetinin* M_n *üzerinde bir G-yapı tanımlaması için aşağıdaki şartların var olması gerekmektedir. Yani*

1. $B_G(M_n)$, FM_n *çatı demetin bir alt manifoldudur.*

2. $\pi' : B_G(M_n) \to M_n$ *projeksiyonu (veya fibrasyonu)* $\pi : FM_n \to M_n$ *projeksiyonun bir kısıtlanışıdır.*

3. *Her* $\alpha \in G$ *için* $R'_\alpha : B_G(M_n) \to B_G(M_n)$ *dönüşümü* $R_\alpha : FM_n \to FM_n$ *dönüşümünün bir kısıtlanışıdır [9].*

Önerme 3.1.1. *Eğer $m-$boyutlu bir M manifoldunun bir $G-$ yapısı olması için gerek ve yeter şart M nin bir $\{U_\alpha\}$ atlasına sahip ve $x_\alpha^1, x_\alpha^2, ..., x_\alpha^m$ koordinat fonksiyonlarının olmasıdır.Burada her $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ için bir $\left(\dfrac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \right)(x)$ Jacobiyen matrisine karşılık gelir [9].*

Önerme 3.1.2. *M, $m-$ boyutlu manifold , G de $Gl(m,\mathbb{R})$ nin bir Lie alt grubu ve B de FM nin bir alt kümesi olsun. Bu yüzden aşağıdaki şartlar sağlandığında B, M üzerinde bir $G-$ yapısıdır.Yani,*

1. $\pi(B) = M$,

2. $\left(\frac{\pi}{B}\right)^{-1}(x) = uG = \{ua \mid a \in G\}\,, x \in M\,, \pi(u) = x$,

3. *Her bir $x \in M$ için x nin bir U komşuluğu $s(U) \subset B$ olacak şekilde bir FM üzerinde U nun*

$$s : U \subset M \to FM$$

bir C^∞ kesiti vardır [9].

İspat: $\Longrightarrow$) $G-$ yapıların tanımından B, M üzerinde bir $G-$ yapısıdır. Bu durumda $(1), (2), (3)$ şartları sağlanır.

$\Longleftarrow$) (3) den her U_α için B deki değerleri ele alarak U_α üzerinde FM nin s_α lokal kesiti vardır, öyleki M nin bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsünü seçelim. Burada (2) den dolayı her $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ için $\pi(s_\alpha(x)) = \pi\left(s_\beta(x)\right)$ olduğundan tek bir $\psi_{\beta\alpha}(x) \in G$ elemanı vardır , yani

$$s_\alpha(x) = s_\beta(x)\,\psi_{\beta\alpha}(x)$$

dir. Ayrıca $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(m,\mathbb{R})$ dönüşümü G de bir C^∞ dönüşümdür. $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm G üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı olduğu için C^∞ sınıfındandır. Şimdi bir başka dönüşüm tanımlayarak ve bunun $G-$ yapısı olduğunu göstermeye çalışacağız. Yani her $x \in U_\alpha$, $a \in G$ için

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha : U_\alpha \times G &\to (\pi/B)^{-1}(U_\alpha) \\ (x,a) &\to \Phi_\alpha(x,a) \end{aligned}$$

$$\Phi_\alpha(x,a) = s_\alpha(x)\,a$$

dönüşümü bijektiftir (yani birebir ve örten dönüşümdür). Ayrıca

$$\left(\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha\right)(x,a) = \left(x, \psi_{\beta\alpha}(x)\,a\right) \tag{3.1.1}$$

olup bu denklem açılırsa yani

$$\begin{aligned}\left(\Phi_\beta^{-1}\circ\Phi_\alpha\right)(x,a) &= \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\alpha(x,a)\right)\\ &= \Phi_\beta^{-1}\left(s_\alpha(x)\,a\right)\\ &= \left(x,\psi_{\beta\alpha}(x)\,a\right)\end{aligned}$$

olup

$$\psi_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$$

olduğu ve

$$\psi_\beta = \Phi_\beta^{-1}$$

(3.1.1) de yerine konulursa bu durumda

$$\left(\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\right)(x,a) = \left(x,\psi_{\beta\alpha}(x)\,a\right)$$

olarak yazılacağından B üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı ψ_α olup bunun da bir difeomorfizm olacağı görülür. Buradan da Φ_α ile tanımlanan dönüşüm bir $G-$ yapısı olur.Ayrıca şu ifadeyi belirtelim ki

$$\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to G$$

dönüşümü $\{U_\alpha\}$ açık örtüsüne karşılık gelen B nin geçiş fonksiyonları tam olarak mevcuttur [9].

Tanım 3.1.8. *$B_G(M_n)$ diferensiyellenebilir $n-$ boyutlu manifoldu üzerinde bir $G-$ yapı M_n olsun. $B_G(M_n)$ ye ait olan $x\in M_n$ noktasında bir lineer u çatısına x de bir adapte edilmiş (veya uyarlanmış) çatı denir. $B_G(M_n)$ de değer alan FM_n bir s lokal kesitine uyarlanmış çatı alanı denir [9].*

Sonuç 3.1.1. *M_n bir $G-$ yapısıdır gerek ve yeter şart U_α üzerinde s_α lokal çatı alanı ve M nin bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsünün var olmasıdır öyleki her $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ için*

$$s_\alpha(x) = s_\beta(x)\,\psi_{\beta\alpha}(x)$$

dir. Burada $\psi_{\beta\alpha}(x)\in G$ dir. $s_\alpha(x) = \left(X_1^\alpha(x), X_2^\alpha(x),\ldots,X_m^\alpha(x)\right)$ olarak ele alalım ve U_α üzerinde m, $1-$ formlarını θ_α^i ile gösterirsek bu durumda

$$\theta_\alpha^i(x)\left(X_j^\alpha(x)\right) = \delta_i^j$$

dir. Buradaki δ_i^j kronecker deltasıdır, yani

$$\delta_i^j = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

dir. Ayrıca burada $\{\theta_\alpha^1, \theta_\alpha^2, ..., \theta_\alpha^m\}$, $\{X_1^\alpha, X_2^\alpha, ..., X_m^\alpha\}$ *nın adapte dual eşçatı alanı olarak adlandırılır [9].*

Tanım 3.1.9. *M_n bir $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu olsun. Eğer aşağıdaki ifadeleri sağlayan bir*

$$G \times M_n \to M_n$$
$$(g, p) \to g.p$$

dönüşümü varsa bu dönüşümde M_n ye bir $G-$ manifold ve bu fonksiyona da G nin M_n üzerindeki diferensiyellenebilir etkisi denir.

1. *Her $g_1, g_2 \in G$ ve her $p \in M_n$ için*

$$(g_1 g_2)(p) = g_1.(g_2.p)$$

   dir.

2. *Her $p \in M_n$ ve G nin birim elemanı e olmak üzere*

$$e.p = p$$

   dir [8].

Tanım 3.1.10. *M_n bir $G-$ manifold olsun. Bu durumda her $p \in M_n$ için G nin bir*

$$G_p = \{g \in G \mid g.p = p\}$$

*olacak şekilde bir alt grubu varsa bu alt gruba p **deki izotropi alt grubu** denir [8].*

Tanım 3.1.11. *M bir $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda her bir $x \in M$ için $\{X_1(x), ..., X_n(x)\}$ kümesi T_xM nin bir bazı olacak şekilde $X_1, ..., X_n$ vektör alanları var ise M manifolduna **paralelleştirilebilir diferensiyellenebilir manifold** denir [20].*

Teorem 3.1.2. *Bir M diferensiyellenebilir manifoldunun paralelleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart Mdiferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir $\{e\}-$yapı olmasıdır [20].*

İspat: $Gl(n, \mathbb{R})$ Lie grubunun birim elemanı e olmak üzere M diferensiyellenebilir manifoldu bir $\{e\}-$ yapı olsun. Bu durumda M üzerinde bir $\{e\}-$ yapı B olmak üzere bir $f : B \to FM$ indirgeme dönüşümü vardır. M nin bir açık örtüsü U_α olmak üzere $\left(\pi'\right)^{-1}(U_\alpha)$ ile U_α difeomorftur. f bir indirgeme (reduction) dönüşümü olduğundan

$$f : B \to f(B)$$

dönüşümü bir difeomorfizmdir. Bu durumda her bir $x \in M$ için $\{X_1(x), ..., X_n(x)\}$ kümesi T_xM nin bir bazı olacak şekilde $u = (X_1, ..., X_n)$ lineer çatısı vardır. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu parallelleştirilebilirdir. Bunun tersi de doğrudur, yani M diferensiyellenebilir manifoldu paralelleştirilebilir ise M diferensiyellenebilir manifoldu $\{e\}-$ yapı manifolddur [4].

Örnek 3.1.1 ($O(m)-$yapılar)**.** $\mathbb{R}^n$ *de* $\{e_1, ..., e_n\}$ *kanonik ortonormal bazı ile verilen bir doğal iç çarpım* $<,>$ *olsun. Bu durumda* $O(m)$ *ortogonal grubu*

$$O(m) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid \, < A\xi, A\eta > = < \xi, \eta >, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır [9].

İspat: Varsayalım ki $M, B_{O(m)}(M)$, $O(m)$-yapıya sahip olsun. Bu durumda M üzerindeki g Riemann metriği aşağıdaki şartları sağlar:Her bir $x \in M$ için

$$g_x(X,Y) = \, < u^{-1}X, u^{-1}Y >, \ \forall X, Y \in T_XM$$

olup burada u, x de bir lineer çatı ve $u \in B_{O(m)}(M)$ (burada $u : \mathbb{R}^n \to T_xM$ bir lineer çatı olarak düşünülmüştür) dir. $u \in B_{O(m)}(M)$ nun seçiminden bağımsız olan $g_x(X,Y)$, $O(m)$ tarafından $<,>$ invaryantıdır. g nin C^∞ olduğunu gösterebilmek için $B_{O(m)}(M)$ nin lokal kesitlerinin ele alınması gerekir.Tersine, M bir Riemann manifold ile g Riemann metriği olsun.

$$O(M) = \{u \in FM \mid \ < \xi, \eta > = g_X(u\xi, u\eta), \ x = \pi(u), \ \xi, \eta \in \mathbb{R}^m\}$$

kümesini düşünelim. Ayrıca not edelim ki $u = (X_1, ..., X_n)$, $O(M)$ ye ait x de bir lineer çatıdır gerek ve yeter şart g_x e göre T_xM nin bir ortonormal bazı $\{X_1, ..., X_n\}$ dir. Buradan da görülür ki, $x = \pi(u)$, $x \in M$, $\pi(O(M)) = M$ ve $(\pi/O(M))^{-1}(x) = uO(m)$ olduğudur. Ayrıca her hangi $x \in M$ için x in bir U komşuluğu ve U üzerinde bir $s = (X_1, ..., X_n)$ çatı alanı seçilirse her $y \in U$ için T_yM nin bir ortonormal bazı $\{X_1(y), ..., X_n(y)\}$ dir. Gerçekten x in bir W komşuluğunda keyfi bir $\{Y_1, ..., Y_n\}$ çatı alanı ile işleme başlayıp Gram-Schimdt argümanı kullanılarak $U \subset W$ için U üzerinde bir $\{X_1, ..., X_n\}$ çatı alanı elde edilir. Bu ifade de $O(M)$ nin M üzerinde bir $O(m)$-yapı sonucunu doğurur. Buradan da $O(M)$,M nin ortonormal çatı alanı ve $u \in O(M)$ elemanına da bir ortonormal çatı denir. Böylece M üzerinde verilen $O(m)$-çatısı, M üzerinde bir Riemann metrik ile aynı metriğe sahiptir [9].

Tanım 3.1.12. $f : M \to M'$ *bir lokal difeomorfizm olsun. Bu durumda* Ff *,*

$$Ff : FM \to FM'$$

dönüşümü f de aşağıdaki şekilde inidirgenir, yani;

$x \in M$ de bir lineer çatı $u = (X_1, ..., X_n)$ olacak şekilde boy$M$ = boy$M^{'} = n$ ise $Ff(u)$ tarafindan verilen

$$Ff(u) = (df(x)X_1, ..., \ df(x)X_n)$$

$f(x) \in M^{'}$ de bir lineer çatıdır. Ff ye f nin doğal lifti denir. Buradan Ff bir asli demet homomorfizması olarak görülür [9].

Tanım 3.1.13. *$B_G(M)$ ve $B_G\left(M^{'}\right)$, sırasıyla M ve $M^{'}$ üzerinde G-yapılar ve $f : M \to M^{'}$ bir difeomorfizm olsun. Bu durumda $(Ff)(B_G(M)) = B_G\left(M^{'}\right)$ ise f, $B_G(M)$ den $B_G(M')$ ne giden bir izomorfizmdir denir. Eğer $M = M^{'}$ ve $B_G(M) = B_G\left(M^{'}\right)$ ise f ye $B_G(M)$ nin bir otomorfizmidir denir [9].*

Tanım 3.1.14. *$B_G(M)$ ve $B_G\left(M^{'}\right)$, sırasıyla M ve $M^{'}$üzerinde bir G-yapı olsun. Eğer her bir $\left(x, x^{'}\right) \in M \times M^{'}$ nokta ikilisi için x in U ve $x^{'}$ nin de bir $U^{'}$ açık komşulukları ve $f : U \to U^{'}$ lokal difeomorfizmi vardır öyleki $(Ff)\left(\frac{B_G(M)}{U}\right) = \frac{B_G\left(M^{'}\right)}{U^{'}}$ ise $B_G(M)$ ve $B_G\left(M^{'}\right)$ ne lokal izomorfiktir denir. Bu durumda f, $B_G(M)$ den $B_G\left(M^{'}\right)$ ye bir lokal izomorfizm olarak adlandırılır. Eğer $M = M^{'}$ ve $B_G(M) = B_G\left(M^{'}\right)$ ise f lokal otomorfizmdir [9].*

Şimdi ise $G-$yapıların özel halleri olan Tanjant demet, Tanjant demette liftler, Hemen Hemen Tanjant Yapı, Tanjant demet üzerinde Kanonik Hemen Hemen Tanjant Demet, Hemen Hemen Tanjant Yapının İntegrallenebilirliği, Bir fibrasyon tarafından tanımlanan integrallenebilir hemen hemen tanjant yapı gibi kavramlara tanıtılacaktır.

3.2 Hemen Hemen Tanjant Yapı ve Hemen Hemen Tanjant Demet

Tanım 3.2.1. *M_{2n}, $2n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M_{2n} üzerinde bir J, $J^2 = 0$ şartını sağlayan ve rank$J = n$ olan bir $(1,1)-$tensör alanı olsun. Her $x \in M_{2n}$ için*

$$J_x : T_x(M_{2n}) \longrightarrow T_x(M_{2n})$$

endomorfizmi $J_x^2 = 0$ olduğunda $\mathrm{Im}J_x \subset cekJ_x$ şartı sağlarsa M_{2n} bir hemen hemen tanjant manifold olur [9]. Ayrıca rank$J_x = n$ ve $\mathrm{Im}J_x = cekJ_x$ olur ki bu da J_x in tanımı gereğidir. Eğer

$$\mathrm{Im}J = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Im}J_x \quad , cekJ = \bigcup_{x \in M} cekJ_x$$

ise $rankJ_x = n$ olan TM_{2n} tanjant demetin bir vektör alt demetidir. $cekJ_x$ in TM_{2n} deki tümleyeni H_x olsun. Bu durumda

$$J_x : H_x \to cekJ_x = \operatorname{Im} J_x$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir (Yani birebir ve örtendir). H_x in bir bazı $\{e_i\}$ ve TM_{2n} nin de bir bazı $\{e_i, \overline{e_i} = Je_i\}$ yani x de bir lineer çatı , J nin $\{e_i, \bar{e}_i\}$ çatısı bir adapte edilmiş çatıdır. Ayrıca $cekJ_x$ in TM_{2n} deki bir başka tümleyeni $H_x^{'}$ ve $H_x^{'}$ in de bir bazı $\{e_i^{'}\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_i^{'} &= A_i^j e_j + B_i^j J e_j \\ \overline{e_i^{'}} &= Je_i^{'} = A_i^j \left(Je_j\right) = A_i^j \bar{e}_j \end{aligned}$$

olup burada A ve B nin $(n \times n)-$tipindeki matris ve A da singüler olmayan(non-singüler) matristir. Daha sonra çift adapte edilmiş $(2n \times 2n)-$tipindeki bağlantılı çatı matrisi

$$\left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ B & A \end{array}\right]$$

olup burada $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ dir. G yukarıdaki şartları sağlayan bir matris ve $Gl(2n, \mathbb{R})$ nin bir kapalı alt grubu ve Lie alt grubudur.

$$B_G = \{M_{2n} \text{ nin bütün noktalarındaki adapte edilmiş çatılar}\}$$

kümesini ele alalım. Şimdi ispatlayacağız ki M_{2n} üzerinde B_G bir $G-$yapı tanımlar. Bunu göstermek için her $x \in M_{2n}$, B_G asli demeti tanımlanabilir. Yani her bir $x \in M_{2n}$ $\sigma(U) \subset B_G$ olacak şekilde x in bir U komşuluğu üzerinde TM_{2n} nin bir

$$\sigma : U \to TM_{2n}$$

lokal kesitini bulmak yeterlidir. $cekJ$ ve TM_{2n} nin lokal aşikarlığından x in bir U komşuluğu ve U üzerinde bir lokal $\{X^1, ..., X^n, \overline{X^1}, ..., \overline{X^n}\}$ lokal çatısı mevcut olup $\{X^i(y), \overline{X^i}(y) = J_y X^i(y)\}$, $y \in U$ noktasında uyarlanmış çatı olup yani;

$$\overline{X^i}(y) = J_y X^i(y)$$

dir. Eğer σ, TM_{2n} de bir lokal kesit olup $y \in U$ için

$$\sigma(y) = \{X^i(y), \overline{X^i}(y) = J_y X^i(y)\}$$

dir. Başka bir ifadeyle bir adapte edilmiş çatı ile J tarafından belirtilen matris

$$J_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{array}\right]$$

olup burada I_n, $(n \times n)-$ tipindeki birim matristir.

Gerçekten G grubu J_0 ile ifade edilen matrisin invaryant grubu G grubu olarak tanımlanabilir, $\alpha \in G$ için gerek ve yeter koşul $\alpha J_0 \alpha^{-1} = J_0$ olmasıdır [9].

Bu ifadeyi göstermek için M_{2n} üzerinde verilen B_G kümesinin bir G-yapısı olduğunu kabul edelim. M_{2n} üzerinde $(1,1)-$tipli bir J tensör alanı tanımlanırsa her $x \in M_{2n}$, $X \in T_x(M_{2n})$ ve $p \in B_G$ için

$$J_x(X) = p\left(J_0\left(p^{-1}(x)\right)\right)$$

olur ki bu da x de bir lineer çatıdır. G nin tanımından $J_x(X)$, p nin seçiminden bağımsızdır. Başka bir deyişle x de B_G ile tanımlanan lineer çatılardan birisine göre J_0 matrisi ile temsil edilen $T_x(M_{2n})$ nin bir lineer endomorfizmi olarak tanımlanır. Açıktır ki $rank J = n$ ve $J^2 = 0$ olduğundan J, M_{2n} de bir hemen hemen tanjant yapısıdır [9].

Önerme 3.2.1. *M_{2n} üzerinde bir $G-$yapısı her zaman bir hemen hemen tanjant yapısıdır [9].*

M_{2n} üzerinde bir Riemann metrik g olsun. Her bir $T_x(M_{2n})$ tanjant uzayı üzerinde g_x iç çarpımı tanımlar. H_x de g_x ile $cekJ_x$ in $T_x(M_{2n})$ deki bir ortogonal tümleyeni olsun. Eğer H_x in bir ortonormal bazı $\{e_i\}$ ise $T_x(M_{2n})$ nin de bir ortonormal bazı $\{e_i, \overline{e_i} = J_x e_i\}$ dir. Yani x de bir ortonormal çatı olmak üzere

$$J_x : H_x \to cekJ_x$$

dönüşümü bir izometridir (yani uzaklığı koruyan dönüşümdür). Eğer $\{e_i^{'}, \overline{e}_i^{'}\}$, H_x in x noktasında farklı bir $\{e_1^{'}\}$ ortonormal bazından elde edilen diğer bir ortonormal çatı ise bu durumda $(2n \times 2n)-$tipindeki matris olarak şöyle ifade edilebilir.Yani;

$$e_i^{'} = A_i^j e_j, \; A \in O(n)$$

olup

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

şeklindedir (burada $O(n)$ =Riemann yapısıdır). $B = \{M_{2n}$ nin tüm noktalarındaki ortonormal çatılar$\}$kümesi olsun. Bu takdirde B, M_{2n} üzerinde bir $(O(n) \times O(n))$-yapısı tanımlar. Gerçekten $x \in M_{2n}$ deki noktaların komşulukları üzerinde bir lokal çatı alanı ile verilen ve Gram-Schmidt bağıntısı kullanılarak B de TM_{2n} nin bir lokal kesiti bulunur. Buradan da B nin bir $G-$yapısı olduğu söylenir. Tersine, M_{2n} üzerinde B tarafından bir $(O(n) \times O(n))$-yapısı ifade edilirse, $(O(n) \times O(n)) \subset G$ olduğundan B, M_{2n} üzerinde bir hemen hemen tanjant yapısıdır [9].

Önerme 3.2.2. *M_{2n} üzerinde bir $(O(n) \times O(n))-$yapısı hemen hemen tanjant yapısı verildiğinde*

$$(O(n) \times O(n)) \subset SO(n)$$

dir ($SO(n)$ =simetrik ortogonal $(n \times n)-$tipindeki matris) [9].

Önerme 3.2.3. *Her hemen hemen tanjant manifold yönlendirilebilirdir [9].*

3.2.1 Tanjant Demetin Kanonik Hemen Hemen Tanjant yapısı ve Bir Manifold Üzerindeki Vektör Alanının Dikey Lifti

Tanım 3.2.2. *M_n, $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve TM_n de bu manifoldun tanjant demeti olsun. Bu durumda TM_n den M_n ye bir kanonik projeksiyon*

$$\tau_{M_n} : TM_n \to M_n$$

tanımlanır. Her bir $y \in T_x(M_n)$ için

$$V_y = cek \left\{ d\tau_{M_n}(y) : T_y(TM_n) \to T_y(M_n) \right\}$$

olmak üzere $T_y(TM_n)$ nin $n-$boyutlu bir alt vektör uzayı V_y , rankı n olan ve

$$V = \bigcup_{y \in TM} V_y$$

*TM_n tanjant demetinin bir vektör demeti olduğu görülür (aslında, $\tau_{\tau_{M_n}} : TTM_n \to TM_n$ nin bir vektör alt demetidir). V (bazen $V(TM_n)$ ile gösterilir) ye **dikey (vertical) demet** denir [9].*

X, TM_n üzerinde bir vektör alanı olsun. Her $y \in TM_n$ için $X(y) \in V_y$ olacak şekilde TM_n üzerinde bir X vektör alanıdır (yani X, V nin bir kesitidir). Hatırlatalım ki tanjant dikey vektörler τ_{M_n} projeksiyonunun liftlerine teğettir. Dikey tanjant vektörler τ_{M_n} nin dikeylerine teğettir. $x \in M_n$, $y \in T_x(M_n)$ olsun. Eğer

$$T_x(M_n) \to V_y$$

lineer dönüşümü $u \in T_x(M_n)$ için $t \to (y + tv)$ eğrisinin $t = 0$ daki tanjant vektörü y de TM_n nin bir u^v dikey lifti olarak tanımlanır. Eğer $\left\{X^i\right\}$ lokal koordinatlı U koordinat komşuluğunda $X = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ ile lokal olarak seçilirse bu durumda X^v de TU üzerinde indirgenen $\left(x^i, v^i\right)$ koordinatlarına göre lokal olarak

$$X^v = X^i \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)$$

ile verilir.Ayrıca M_n üzerinde bir vektör alanı X ise TM_n üzerinde X^v vektör alanı olmak üzere

$$X^v(y) = \left(X\left(\tau_{M_n}(y)\right)\right)^v$$

ifadesi bir dikey lifttir. X ,$\left(x^i\right)$ lokal koordinatları ve X nin bir U koordinat komşuluklarındaki lokal koordinatlar ile yazılır. Şimdi TM_n üzerinde

$$J_y\left(\overline{X}\right) = \left(\left(\tau_{M_n}\right)_{\bigstar}\overline{X}\right)^v, \overline{X} \in T_y(TM),\ y \in TM_n$$

ile TM_n üzerinde $(1,1)$ tipli bir J tensör alanı tanımlanırsa bu durumda J de lokal olarak

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i},$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0$$

veya denk olarak

$$J = \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \otimes \left(dx^i\right)$$

ile ifade edilir. Buradan da şu sonucuna

$$rankJ = n,$$
$$J^2 = 0$$

ulaşılır. Böylece J, TM_n üzerinde **kanonik hemen hemen tanjant yapı** olarak adlandırılır. Yani

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}$$
$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \otimes \left(dx^i\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \otimes \left(dx^i\right)}_{I}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)$$

elde edilir, benzer şekilde

$$J\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0$$
$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \otimes \left(dx^i\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) \otimes \left(dx^i\right)}_{0}$$
$$= 0$$

olarak bulunur. Aslında

$$cekJ = \operatorname{Im} J = V$$

olduğu görülebilir.

3.2.2 Tanjant demet üzerindeki dikey liftler

Tanım 3.2.3. *f , M_n üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. TM_n tanjant demet üzerindeki f^v fonksiyonu $f : M_n \to \mathbb{R}$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere*

$$f^v = f \circ \pi$$

*olsun. $f^v : T(M_n) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f **fonksiyonunun dikey lifti** denir. Burada $\left(x^i, y^i\right)$ lokal kordinatlarda $\bar{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasında f^v fonksiyonu*

$$f^v(\bar{p}) = f^v(x,y) = f \circ \pi(\bar{p}) = f(p) = f(x)$$

olup $f^v(\bar{p})$ değeri fibre boyunca sabittir ve $f(p)$ değerine eşittir [13].

Tanım 3.2.4. *$\tilde{X} \in T_0^1(M_n)$ olsun. $\forall\ f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için $\tilde{X} f^v = 0$ ise buradaki $\tilde{X}$ 'e dikey vektör alanı denir.$\tilde{X}$ ' nin lokal koordinatlardaki bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olsun.*

$$\tilde{X} f^v = \tilde{X}^i \partial_i f + \tilde{X}^{\bar{\imath}} \partial_{\bar{\imath}} f = 0 \text{ ;} 1 \le i \le n,\ n+1 \le \bar{\imath} \le 2n \text{ için}$$

olup buradan da

$$\tilde{X}^i = 0,\ \ \tilde{X}^{\bar{\imath}} \neq 0$$

bulunur. M_n bir manifold ve M_n de lokal koordinatlar fonksiyonları $\left(x^i\right), \{1 \le i \le n\}$ ve TM_n de indirgenen koordinatlara göre lokal koordinat fonksiyonları $\left(x^i, y^i\right)$ olsun. M_n üzerinde 1-formların modülü

$$\begin{gathered} \imath : T_1^0(M_n) \to C^\infty(M_n, \mathbb{R}) \\ w = w_i dx^i \to \imath w = (w_i)^v y^i \end{gathered}$$

olarak tanımlanır. X, M_n de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$ de $\imath w = (w_i)^v y^i$ olmak üzere

$$X^v(\imath w) = (w(X))^v$$

ile X^v bir vektör alanıdır. Bu X^v vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir.Bu dikey liftin bileşenlerini ;

$$X^v(\imath w) = (w(X))^v$$

olduğunu elde edelim.

$$\begin{aligned} X^v(\imath w) &= (w(X))^v \\ \tilde{X}^j\left(\partial_j w_j\right) + \tilde{X}^{\bar{j}} w_j &= w_i X^i \\ \left(\tilde{X}^j \partial_j + \tilde{X}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}}\right)\left(w_i dx^i\right) &= \tilde{X}^j w_i \partial_j \otimes dx^j + \tilde{X}^{\bar{j}} w_i \partial_{\bar{j}} \otimes dx^i \\ &\quad + \tilde{X}^j \partial_j w_i dx^i + \tilde{X}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} w_i dx^i \\ &= w_i dx^i \end{aligned}$$

$$\tilde{X}^{\bar{j}} = \tilde{X}^{j}$$

olur. Bu durumda

$$X^{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

şeklindedir [13].

Tanım 3.2.5. *$\tilde{w} \in T_1^0(T(M_n))$ verilsin. $\forall X \in T_0^1(M_n), \tilde{w}(X^v) = 0$ eşitliğini sağlayan $\tilde{w}$ $1-$ formuna $T(M_n)$ de dikey $1-$ form denir. $\tilde{w}$ nin lokal koordinatları $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_{\bar{\imath}})$ olsun. Bu durumda $\tilde{w}(X^v) = 0$ eşitliğinden*

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i X^i + \tilde{w}_{\bar{\imath}} X^{\bar{\imath}} &= 0 \\ \tilde{w}_{\bar{\imath}} X^i &= 0 \\ \tilde{w}_{\bar{\imath}} &= 0 \\ (\tilde{w}_i, \tilde{w}_{\bar{\imath}}) &= (\tilde{w}_i, 0) \end{aligned}$$

olur. $w \in T_1^0(M_n)$ $1-$ formunun w^v dikey liftini gösterelim.

$$w^v = (w_i)^v \left(dx^i\right)^v = w_i dx^i \tag{3.2.2}$$

$$w^v = \tilde{w}_i^v \left(dx^i\right)^v + \tilde{w}_{\bar{\imath}}^v \left(dx^{\bar{\imath}}\right)^v \tag{3.2.3}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) den

$$\tilde{w}_i^v \left(dx^i\right)^v + \tilde{w}_{\bar{\imath}}^v \left(dx^{\bar{\imath}}\right)^v = w_i dx^i$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \left(\tilde{w}_i^v - w_i\right) \left(dx^i\right)^v + \tilde{w}_{\bar{\imath}}^v \left(dx^{\bar{\imath}}\right)^v &= 0 \\ \tilde{w}_i^v = w_i, \quad \tilde{w}_{\bar{\imath}}^v &= 0 \\ w^v &= (w_i, 0) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir.Sonuç olarak

$$w^v(X^v) = 0$$

olur [13].

Tanım 3.2.6. *∇, M_n de bir afin konneksiyon ve ∇_X de $X \in T_0^1(M_n)$ vektör alanına göre kovaryant türev olsun. M_n nin X deki lokal koordinatlara göre bileşenleri*

$$\nabla_X = \left(X^h, X^j \Gamma_{ji}^h\right)$$

şeklindedir. $(\nabla_X)^v$ *nin* TM_n *deki indirgenen koordinatlara göre bileşenleri de*

$$(\nabla_X)^v = \begin{bmatrix} 0 \\ X^h \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

dir [13].

Tanım 3.2.7. M_n *bir manifold ve* TM_n *de bunun tanjant demeti olmak üzere*

$$^v : T_0^0(M_n) \to T_0^0(TM_n)$$
$$(af+bg)^v = af^v + bg^v$$
$$(fg)^v = f^v g^v$$

işlemleri ile bir izomorfizmadır. Ayrıca

$$^v : T_0^1(M_n) \to T_0^1(TM_n)$$
$$(aX+bY)^v = aX^v + bY^v$$
$$(fY)^v = f^v Y^v$$

ve

$$^v : T_1^0(M_n) \to T_1^0(TM_n)$$
$$(aw_1+bw_2)^v = aw_1^v + bw_2^v$$
$$(fw)^v = f^v w^v$$

işlemleri ile bir izomorfizmadır. Bu durumda $TM_n = \sum\limits_{p,q=0}^{n} T_q^p(M_n)$ *olmak üzere* TM_n *bir cebir oluşturur. Bu durumda*

$$^v : TM_n \to T(TM_n)$$

izomorfizmasını araştıralım. Yani $P, Q \in TM_n$

$$(P \otimes Q)^v = P^v \otimes Q^v$$
$$(aP+bQ)^v = aP^v + bQ^v$$

işlemleriyle bir dikey lift tanımlanır. $(1,1)$ *-tipli tensör alanının dikey liftini araştıralım.*

$$\begin{aligned}
F^v &= \left(F_j^i \partial_i \otimes dx^j\right)^v \\
F^v &= \left(F_j^i\right)^v (\partial_i)^v \otimes \left(dx^j\right)^v + \left(F_j^{\bar{i}}\right)^v (\partial_{\bar{i}})^v \otimes \left(dx^j\right)^v \\
&\quad + \left(F_{\bar{j}}^i\right)^v (\partial_i)^v \otimes \left(dx^{\bar{j}}\right)^v + \left(F_{\bar{j}}^{\bar{i}}\right)^v (\partial_{\bar{i}})^v \otimes \left(dx^{\bar{j}}\right)^v \\
&= F_j^i \partial_{\bar{i}} \otimes dx^j
\end{aligned}$$

dir. Buradan F^v ın matris formunda yazılırsa

$$F^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_j^i & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan da $F^v X^v = 0$ olduğu söylenebilir.Benzer şekilde $G \in T_2^0(M_n)$ tensör alanının

$$\begin{aligned} G^v &= \left(G_{ji} dx^j \otimes dx^i\right)^v \\ &= \left(G_{ji}\right)^v \left(dx^j\right)^v \otimes \left(dx^i\right)^v + \left(G_{\bar{j}i}\right)^v \left(dx^{\bar{j}}\right)^v \otimes \left(dx^i\right)^v \\ &+ \left(G_{j\bar{i}}\right) \left(dx^j\right)^v \otimes \left(dx^{\bar{i}}\right)^v + \left(G_{\bar{j}\bar{i}}\right)^v \left(dx^{\bar{j}}\right)^v \otimes \left(dx^{\bar{i}}\right)^v \\ &= G_{ji} dx^j \otimes dx^i \end{aligned}$$

olup G^v dikey liftinin TM_n deki lokal koordinatlara göre bileşenleri

$$G^v = \begin{bmatrix} G_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $H \in T_0^2(M_n)$ tensör alanının

$$\begin{aligned} H^v &= \left(H^{th} \partial_t \otimes \partial_h\right)^v \\ &= \left(H^{th}\right)^v (\partial_t)^v \otimes (\partial_h)^v + \left(H^{\bar{t}h}\right)^v (\partial_{\bar{t}})^v \otimes (\partial_h)^v \\ &+ \left(H^{t\bar{h}}\right)^v (\partial_t)^v \otimes (\partial_{\bar{h}})^v + \left(H^{\bar{t}\bar{h}}\right)^v (\partial_{\bar{t}})^v \otimes (\partial_{\bar{h}})^v \\ &= H^{th} \partial_{\bar{t}} \otimes \partial_{\bar{h}} \end{aligned}$$

olup H^v dikey liftinin TM_n deki lokal koordinatlara göre bileşenleri

$$H^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{th} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [13].Herhangi bir $S \in T_{q+1}^p(M_n)$ tensörünü ele alalım.Yani,

$$S = S_{l,\, j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^l \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

olarak tanımlayalım.TM_n nin bir $\pi^{-1}(U)$ ($\pi : TM_n \to M_n$) komşuluğunda $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre $\gamma_X S$ ve γS tensör alanları sırasıyla

$$\gamma_X S = X^l S_{l,j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \partial_{\bar{i}_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\bar{i}_q} \otimes dx^l \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \tag{3.2.6}$$

ve

$$\gamma S = y^l S_{l,j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \partial_{\bar{i}_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\bar{i}_p} \otimes dx^l \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q} \tag{3.2.7}$$

ile tanımlanır [13]. Eğer S bir fonksiyon ise $\gamma_X S$ ve γS sıfır olur.Keyfi $X \in T_0^1(M_n)$ ve $S \in T_s^0(M_n)$ veya $S \in T_s^1(M_n)$ için (3.2.6)

$$\gamma_X S = (S_X)^v$$

elde edilir. Burada $S_X \in T_{s-1}^0(M_n)$ veya $S_X \in T_{s-1}^1(M_n)$ olup

$$S_X(X_{s-1},...,X_1) = S(X, X_{s-1},...,X_1)$$

ile tanımlanmıştır [13]. (3.2.6) ve (3.2.7) dan $X \in T_0^1(M_n)$ ve $F \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere lokal koordinatlarda

$$\gamma_X F = \begin{bmatrix} 0 \\ x^i F_i^h \end{bmatrix}, \ \gamma F = \begin{bmatrix} 0 \\ y^l F_t^h \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

şeklindedir.

3.2.3 Tanjant Demet Üzerindeki Tamamlayıcı Liftler

Tanım 3.2.8. *M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon $f : M_n \to \mathbb{R}$ verilsin. Bu durumda TM_n de*

$$f^c = \iota(df)$$

tanımlanan f^c fonksiyonuna f fonksiyonunun tamamlayıcı lifti denir. $T(M_n)$ tanjant demetteki adapte edilmiş koordinatlara göre ∂f ifadesi $y^i \partial_i f$ ile gösterilirse f fonksiyonunun tamamlayıcı lifti olan f^c fonksiyonunun lokal koordinatlardaki gösterimi

$$f^c = y^i \partial_i f = \partial f$$

şeklindedir [13].

Tanım 3.2.9. *$X \in T_0^1(M_n)$ olsun. f de M_n manifoldunda keyfi bir fonksiyon olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetteki bir X^c vektör alanını*

$$X^c f^c = (Xf)^c$$

şeklinde tanımlanır ve X^c ye X vektör alanının $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki tamamlayıcı lifti denir. TM_n üzerindeki adapte edilmiş lokal koordinatlara göre vektör alanının tamamlayıcı lifti X^c nin M_n manifoldu üzerindeki X^h bileşenleri

$$X^c = \begin{pmatrix} (X^h)^c \\ \left(X^{\bar{h}}\right)^c \end{pmatrix}$$

yi bulmaya çalışalım. Bunun için bir fonksiyonun tamamlayıcı liftini kullanacağız. Yani

$$X^c f^c = \left(X^h\right)^c (\partial_h)^c f^c + \left(X^{\bar{h}}\right)^c (\partial_{\bar{h}})^c f^c = y^i \partial_i \left(X^h \partial_h f\right)$$

$$\left(X^h\right)^c (\partial_h)^c \left(y^i\partial_i f\right) + \left(X^{\bar{h}}\right)^c (\partial_{\bar{h}})^c \left(y^i\partial_i f\right) = y^i \left(\partial_i X^h\right)\partial_h f + y^i X^h \partial_h \partial_i f$$

$$\left(X^h\right)^c = X^h, \quad \left(X^{\bar{h}}\right)^c = y^i\partial_i X^h$$

olup buradan TM_n deki lokal koordinatlara göre

$$X^c = \begin{bmatrix} X^h \\ y^i\partial_i X^h \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [13].

Tanım 3.2.10. ∇, *M_n de bir afin konneksiyon ve ∇_X de $X \in T_0^1(M_n)$ de M_n ye göre kovaryant türev olsun. M_n nin X deki lokal koordinatlara göre bileşenleri*

$$\nabla_X = \left(X^h, X^j\Gamma_{ji}^h\right)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. $(\nabla_X)^c$ nin TM_n deki indirgenen koordinatlara göre bileşenleri

$$(\nabla_X)^c = \begin{bmatrix} X^h \\ -X^jY^i\Gamma_{ji}^h \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

dir [13].

Tanım 3.2.11. *$w \in T_1^0(M_n)$ olsun. X, M_n manifoldundaki keyfi bir vektör alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki w^c $1-$ formu*

$$w^cX^c = (wX)^c$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki w^c ye w , $1-$ formunun tamamlayıcı lifti denir. Şimdi $w^c \in T_1^0(TM_n)$ 1-formunun bileşenlerini bulmaya çalışalım. Bunun için vektör alanının tamamlayıcı liftlerinden yola çıkarak

$$w^cX^c = (wX)^c$$

ifadesini kullanarak bulacağız.

$$(w_i)^c \left(X^i\right)^c + (w_{\bar{i}})^c \left(X^{\bar{i}}\right)^c = \left(w_iX^i\right)^c = y^s\partial_s\left(w_iX^i\right)$$

$$(w_i)^c X^i + (w_{\bar{i}})^c y^s\partial_s X^i = y^s\partial_s w_i X^i + y^s w_i \partial_s X^i$$

$$(w_i)^c = v^s\partial_s w_i \ , \quad (w_{\bar{i}})^c = w_i$$

olup tanjant demetteki adapte edilmiş lokal koordinatlara göre w $1-$ formunun tamamlayıcı lifti olan w^c nin M_n manifoldundaki lokal bileşenleri

$$w^c = (v^s\partial_s w_i, w_i)$$

şeklindedir [13].

Tanım 3.2.12. *$P \in T_q^p(M_n)$ keyfi tipli tensör olsun. Buna göre*

$$\forall\, f,g \in T_0^0(M_n) \text{ için}$$
$$(f+g)^c = f^c + g^c,\ (fg)^c = f^v g^c + g^v f^c$$
$$\forall\, X,Y \in T_0^1(M_n) \text{ için}$$
$$(X+Y)^c = X^c + Y^c,\ (fX)^c = f^c X^v + f^v X^c$$
$$\forall w_1, w_2 \in T_1^0(M_n) \text{ için}$$
$$(w_1+w_2)^c = w_1^c + w_2^c,\ (fw)^c = f^c w^v + f^v w^c$$

$$^c : T_0^0(M_n) \to T_0^0(TM_n)$$
$$^c : T_0^1(M_n) \to T_0^1(TM_n)$$
$$^c : T_1^0(M_n) \to T_1^0(TM_n)$$

dönüşümlerinin her biri birer izomorfizmadır. $\forall\ P,Q \in T_q^p(M_n)$ için tamamlayıcı liftlerini irdeleyeceğiz.

$$(P+Q)^c = P^c + Q^c,$$
$$(P \otimes Q)^c = P^c \otimes Q^v + P^v \otimes Q^c$$

**şartları sağlandığından dolayı bir izomorfizm olur. Bu da bize keyfi (p,q)-tipli tensör alanlarının tam lifti gösterilir [13].

Tanım 3.2.13. *$F \in T_1^1(M_n)$ afinorun tam liftinin lokal koordinatlardaki gösterimlerini inceleyelim.*

$$\begin{aligned}
F^c &= \left(F_i^j \partial_j \otimes dx^i\right)^c \\
&= \left(F_i^j\right)^c (\partial_j)^v \otimes \left(dx^i\right)^v + \left(F_i^j\right)^v (\partial_j)^c \otimes \left(dx^i\right)^v + \left(F_i^j\right)^v (\partial_j)^v \otimes \left(dx^i\right)^c \\
&= \left(F_i^j\right)^c \partial_{\bar{j}} \otimes dx^i + \left(F_i^j\right)^v \partial_j \otimes dx^i + \left(F_i^j\right)^v \partial_{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}} \\
&= y^s \partial_s F_i^j \partial_{\bar{j}} \otimes dx^i + F_i^j \partial_j \otimes dx^i + F_i^j \partial_{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}} \\
&= F_i^j \partial_j \otimes dx^i + y^s \partial_s F_i^j \partial_{\bar{j}} \otimes dx^i + F_i^j \partial_{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}}
\end{aligned}$$

olup buradan da TM_n de $(1,1)-$ tipli tensör alanının tamamlayıcı lifti

$$F^c = \begin{bmatrix} F_i^j & 0 \\ y^s \partial_s F_i^j & F_i^j \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi ise $G \in T_2^0(M_n)$ tensörünün tam lifti ;

$$\begin{aligned} G^c &= \left(G_{ji} dx^i \otimes dx^j\right)^c \\ &= \left(G_{ji}\right)^c \left(dx^i\right)^v \otimes \left(dx^j\right)^v + \left(G_{ji}\right)^v \left(dx^i\right)^c \otimes \left(dx^j\right)^v \\ &+ \left(G_{ji}\right)^v \left(dx^i\right)^v \otimes \left(dx^j\right)^c \\ &= y^s \partial_s G_{ji} dx^i \otimes dx^j + G_{ji} dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + G_{ji} dx^i \otimes dx^{\bar{j}} \end{aligned}$$

şeklinde olup G^c nin matrisel gösterimi

$$G^c = \begin{bmatrix} y^s \partial_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

dir ve $H \in T_0^2(M_n)$ tensörünün tam liftinin lokal koordinatları

$$\begin{aligned} H^c &= \left(H^{th} \partial_t \otimes \partial_h\right)^c \\ &= \left(H^{th}\right)^c (\partial_t)^v \otimes (\partial_h)^v + \left(H^{th}\right)^v (\partial_t)^c \otimes (\partial_h)^v \\ &+ \left(H^{th}\right)^v (\partial_t)^v \otimes (\partial_h)^c \\ &= y^s \partial_s H^{th} \partial_{\bar{t}} \otimes \partial_{\bar{h}} + H^{th} \partial_t \otimes \partial_{\bar{h}} + H^{th} \partial_{\bar{t}} \otimes \partial_h \end{aligned}$$

şeklinde olup H^c nin matrisel gösterimi

$$H^c = \begin{bmatrix} 0 & H^{th} \\ H^{th} & y^s \partial_s H^{th} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [13].

3.2.4 Tanjant Demetteki Yatay Liftler

Tanım 3.2.14. *f ,M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon ve ∇ da M_n üzerinde bir afin konneksiyon ise f nin gradienti ∇f şeklinde yazılabilir. Bu durumda*

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

eşitliği sağlanır. $f \in T_0^0(M_n)$ fonksiyonun yatay lifti,

$$f^H = f^c - \gamma(\nabla f)$$

olarak tanımlanır [13].

Burada $f^c = \iota(df) = y^i \partial_i f$ olduğundan

$$\begin{aligned} f^H &= y^i \partial_i f - y^i \partial_i f \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur .

Tanım 3.2.15. *$X \in T_0^1(M_n)$ için TM_n de X in X^H yatay lifti*

$$X^H = X^c - \gamma(\nabla X)$$

şeklinde tanımlanır. X in M_n deki lokal koordinatları X^h ve ∇ nın M_n deki lokal koordinatları Γ_{ij}^k olduğuna göre X^c ve $\nabla_\gamma X$ in TM_n deki indirgenen koordinatlara göre lokal koordinatları

$$\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X) = \begin{bmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{bmatrix}$$
$$X^c = \begin{bmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradaki $\nabla_s X^h$ ifadesi X^h nın kovaryant türevi olup

$$\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{is}^h X^s$$

şeklindedir. Buradan da X^H nın lokal koordinatlardaki gösterimi

$$\begin{aligned} X^H &= X^c - \gamma(\nabla X) \\ &= \begin{bmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{bmatrix} \\ X^H &= \begin{bmatrix} \left(X^h\right)^H \\ \left(X^{\bar{h}}\right)^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \nabla_s X^h \end{bmatrix} \\ X^H &= \begin{bmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \partial_s X^h - y^s \Gamma_{is}^h X^s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{is}^h X^s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur ve buradan da

$$X^H = \begin{bmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{is}^h X^s \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

şeklindedir. X vektör alanının yatay lifti bir projectable (izdüşürülebilir) vektör alanıdır [13].

Tanım 3.2.16. *Bir $\tilde{X} \in T_0^1(TM_n)$ için $\tilde{X} - X^c$ dikey vektör alanı olacak şekilde bir $X \in T_0^1(M_n)$ vektör alanı mevcutsa $\tilde{X}$ vektör alanına izdüşürülebilirdir denir ve X vektör alanına ise $\tilde{X}$ nın izdüşümü denir, $\pi_\bigstar\left(\tilde{X}\right) = X$ yazılır [2], [13].*

Örnek 3.2.1. *$\tilde{X} \in T_0^1(M_n)$ vektör alanı ve her $f \in T_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}(f^v) \in T_0^0(M_n)$ ise $\tilde{X}$ bir izdüşürülebilir vektör alanıdır. $p \in TM_n$ noktasında X^H nın değeri yalnızca $p = \pi^{-1}(\tilde{p}) \in M_n$ noktasında X vektör alanının değeri verilerek bulunabilir. (3.2.5) ve (3.2.9) ile (3.2.10) karşılaştırılırsa $X \in T_0^1(M_n)$ için*

$$X^H = \left(\hat{\nabla}_X\right)^c \tag{3.2.11}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca buradaki $\left(\hat{\nabla}_X\right)^c$ *ifadesi* $\hat{\nabla}_X$ *in tam liftidir ve her* $X,Y \in T_0^1(M_n)$ *için*

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$$

şeklinde tanımlıdır [2].

3.2.5 Tanjant demetteki Tensör alanlarının dikey ve tamamlayıcı liftleri

Bu bölümde bir M_n manifoldu üzerindeki TM_n tanjant demetteki $(1,r)$ $r \geq 1$ tipindeki tensör alanlarının dikey ve tamamlayıcı liftleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.2.17. *M_n üzerinde F , $(1,r), r \geq 1$ tipli bir tensör alanı olsun. Buradan M_n nin tanjant demeti TM_n üzerindeki $(1,r)-$tipindeki tensör alanları her $\overline{X}_1,\overline{X}_2,...,\overline{X}_r \in T_y(TM_n)$, $y \in T_xM_n$, $x \in M_n$ için*

$$F_y^v\left(\overline{X}_1,\overline{X}_2,...,\overline{X}_r\right) = \left(\left(F_x\left((\tau_{M_n})_\star\overline{X}_1,(\tau_{M_n})_\star\overline{X}_2,...,(\tau_{M_n})_\star\overline{X}_r\right)\right)\right)^v$$

ile tanımlanır. TM deki lokal koordinatlar $\left(x^i,v^i\right)$ olmak üzere

$$F = F^j_{i_1,i_2,...,i_r}\left(\partial/\partial x^j\right)\otimes\left(dx^{i_1}\right)\otimes...\otimes\left(dx^{i_r}\right)$$

yazılırsa

$$F^v = \left(F^j_{i_1,i_2,...,i_r}\right)^v\left(\partial/\partial x^j\right)^v\otimes\left(dx^{i_1}\right)^v\otimes...\otimes\left(dx^{i_r}\right)^v$$

$$F^v = F^j_{i_1,i_2,...,i_r}\left(\partial/\partial v^j\right)\otimes\left(dx^{i_1}\right)\otimes...\otimes\left(dx^{i_r}\right) \tag{3.2.12}$$

bulunur. Her bir $X_1,...,X_r \in T_0^1(M_n)$ için

$$F^v\left(X_1^v,...,X_r^v\right) = 0$$

olduğu görülür. Üstelik M_n üzerinde özdeşlik tensörü I ise $J = I^n$ de TM_n üzerinde kanonik hemen hemen tanjant yapısıdır [9].

Tanım 3.2.18. *M_n üzerinde $(0,r), r \geq 1$ tipli bir tensör alanı G olsun. G nin dikey liftinden TM_n ye, TM_n de $(0,r)$, $r \geq 1$ tipinde bir tensör alanı*

$$G_y^v\left(\overline{X}_1,\overline{X}_2,...,\overline{X}_r\right) = \left(\left(G_x\left((\tau_{M_n})_\star\overline{X}_1,(\tau_{M_n})_\star\overline{X}_2,...,(\tau_{M_n})_\star\overline{X}_r\right)\right)\right)^v$$

ile tanımlanır. Burada $\overline{X}_1,\overline{X}_2,...,\overline{X}_r \in T_y(TM_n)$, $y \in T_x(M_n)$, $x \in M_n$ dir, ve

$$f^v = f \circ \tau_{M_n}$$

$f \in C^{\infty}(M_n)$ *fonksiyonunun* TM_n *dikey liftini gösterir.Eğer*

$$G = G_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\left(dx^{i_1}\right) \otimes \ldots \otimes \left(dx^{i_r}\right)$$

ise

$$G^v = \left(G_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\right)^v \left(dx^{i_1}\right)^v \otimes \ldots \otimes \left(dx^{i_r}\right)^v$$

$$G^v = G_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\left(dx^{i_1}\right) \otimes \ldots \otimes \left(dx^{i_r}\right) \tag{3.2.13}$$

olarak yazılır. Her bir $X_1,\ldots,X_r \in T_0^1(M_n)$ *için*

$$G^v\left(X_1^v,..,X_r^v\right) = 0$$

olduğu gösterilirse G de sıfir olur. Yani

$$\begin{aligned}
&\left(G_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\left(dx^{i_1}\right) \otimes \ldots \otimes \left(dx^{i_r}\right)\right)\left(X_1(\partial x_1)^v, \ldots, X_r(\partial x_r)^v\right) \\
&= G_{i_1,i_2,\ldots,i_r} X_1(\partial v_1) \otimes \left(dx^{i_1}\right) \otimes \ldots . X_r(\partial v_r) \otimes \left(dx^{i_r}\right) \\
&= 0 \text{ (} (\partial v_1) \otimes \left(dx^{i_1}\right) = 0 \text{ olduğundan dolayı)}
\end{aligned}$$

olur.Üstelik M_n *üzerinde bir* $1-$*form* $\alpha = \alpha^i\left(dx^i\right)$ *ise* $\alpha^v = \alpha^i\left(dx^i\right)$ *dir. Bu yüzden* TM_n *deki* α

nın pullback dönüşümü tam olarak

$$\alpha^v = \left(\tau_{M_n}\right)^{\star} \alpha$$

dır [9].

Tanım 3.2.19. f *,*M_n *üzerinde bir fonksiyon olsun. Her* $y \in T_x(M_n)$ *ve* $x \in M_n$ *için*

$$f^c(y) = df(x)(y)$$

olmak üzere f^c *ye* TM_n *üzerinde tanımlanan tanjant demetteki tamamlayıcı lift denir. Bu lift*

$$f^c = y^i\left(\partial f / \partial x^i\right) \tag{3.2.14}$$

ile tanımlanır. M_n *üzerinde bir vektör alanı X olsun.* M_n *üzerinde X ; bir lokal* $1-$ *parametreli dönüşümlerin grubu* ϕ_t *yi üretsin.*ϕ_t *tarafindan tanımlanan* TM_n *nin* $1-$ *parametreli lokal dönüşümlerinin grubu* $T\phi_t$ *olsun.* X^c *tarafindan belirtilen ve* TM_n *de X in tamamlayıcı lifti olarak tanımlanan* $T\phi_t$ *nin sonsuz küçük elemanları vardır. Eğer*

$$X = X^i\left(\partial / \partial x^i\right)$$

ise

$$X^c = X^i \left(\partial/\partial x^i\right) + v^j \left(\partial X^i/\partial x^j\right) \left(\partial/\partial v^i\right) \tag{3.2.15}$$

ile gösterilir. Buradan da

$$\left(\partial/\partial x^i\right)^c = \partial/\partial x^i$$

yazılırsa (3.2.12),(3.2.13),(3.2.14) dan her $X_1, X_2, ..., X_r \in T_0^1(M_n)$ *ve* M_n *üzerinde* $(1,r)$ *(veya* $(0,r)$*) tipli tensör alanı F (veya G) olmak üzere*

$$F^v(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c) = (F(X_1, X_2, ..., X_r))^v$$

$$(\text{veya } G^v(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^v)) = (G(X_1, X_2, ..., X_r))^v$$

dir [9].

Önerme 3.2.4. *Her bir* $X \in T_0^1(M_n)$ *ve* $f \in C^\infty(M_n)$ *için*

$$X^v f^v = 0, \;\; X^v f^c = X^c f^v = (Xf)^v, \; X^c f^c = (Xf)^c$$

dir [9].

İspat:

$$\begin{aligned}
X^v f^v &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial v_i}\right) f^v = X^i \frac{\partial f^v}{\partial v^i} = X^i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \\
X^v f^c &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial v_i}\right) \left(v^i \left(\partial f/\partial x^i\right)\right) \\
&= X^i \frac{\partial v_i}{\partial v_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i v^i \frac{\partial^2 f}{\partial v^i \partial x^i} \\
&= X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i v^i \frac{\partial^2 f}{\partial v^i \partial x^i} \\
&= X^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial^2 f}{\partial v^i \partial x^i}\right) \\
&= (Xf)^v \\
X^c f^c &= \left(X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + v^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)\right) \left(v^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) \\
&= X^i \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i v^i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} + v^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial v^i}{\partial v^i} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\
&+ v^j v^i \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^i \partial x^i} \\
&= (Xf)^c
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.2.5. *Her bir* $X,Y \in T_0^1(M_n)$ *için*

$$[X^v,Y^v]=0, \quad [X^v,Y^c]=[X,Y]^v, \quad [X^c,Y^c]=[X,Y]^c$$

dir [9].

İspat: w, M_n de bir $1-$form olsun. Bunun için $\imath w=(w_i)^v y^i$ yi kullanarak $[X^v,Y^v]=0$ olduğu göstrerilecektir. Yani

$$\begin{aligned}
[X^v,Y^v](\imath w) &= X^v(Y^v(\imath w))-Y^v(X^v(\imath w)) \\
&= X^v(w(Y))^v - Y^v(w(X))^v \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci olarak $[X^c,Y^c]=[X,Y]^c$ ifadesini göstermek için bir fonksiyonun tamamlayıcı liftini kullanacağız. Yani

$$\begin{aligned}
[X^c,Y^c](f^c) &= X^c(Y^c(f^c))-Y^c(X^c(f^c)) \\
&= X^c(Yf)^c - Y^c(Xf)^c \\
&= (XYf)^c-(YXf)^c \\
&= ([X,Y]f)^c \\
&= [X,Y]^c f^c
\end{aligned}$$

olur her f^c için doğru olduğundan

$$[X^c,Y^c]=[X,Y]^c$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $[X^v,Y^c]=[X,Y]^v$ ifadesini göstermek için bir fonksiyonun dikey lifti kullanılarak ispatı yapılabilir. Yani

$$\begin{aligned}
[X^v,Y^c]f^c &= X^vY^cf^c - Y^cX^vf^c \\
&= X^v(Yf)^c - Y^c(Xf)^v \\
&= (XYf)^v-(YXf)^v \\
&= ([X,Y]f)^v \\
&= [X,Y]^v f^c
\end{aligned}$$

olur ki bu da

$$[X^v,Y^c]=[X,Y]^v$$

dir [13].

Önerme 3.2.6. *TM_n üzerinde $(1,r)$ (veya $(0,r)$) tipli tensör alanları $\overline{F}$ ve $\overline{F'}$ (veya $\overline{G}, \overline{G'}$) olup her bir $X_1, X_2, ...X_r \in T_0^1(M_n)$ için*

$$\overline{F}\left(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c\right) = \overline{F'}\left(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c\right),$$

$$\text{(veya } \overline{G}\left(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c\right) = \overline{G'}\left(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c\right) \text{)}$$

dir. Bu yüzden $\overline{F} = \overline{F'}$ (veya $\overline{G} = \overline{G'}$) olarak bulunur [9].

İspat: Sadece $(1,1)$ tipindeki durum için ispatı yapılacaktır. M_n üzerinde herbir X vektör alanı için $\overline{F}(X^c) = 0$ ise $\overline{F} = 0$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Yani

$$\overline{F} = A_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dx^i\right) + B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dv^i\right) + C_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dx^i\right) + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dv^i\right)$$

olsun. Eğer $X = \partial/\partial x^k$ ise

$$\overline{F}\left(\left(\partial/\partial x^k\right)^c\right) = \overline{F}\left(\partial/\partial x^k\right) = A_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) + C_i^j\left(\partial/\partial v^j\right)$$

$A_i^j = C_i^j = 0$ olduğu görülür ki buradan da;

$$\overline{F} = B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dv^j\right) + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dv^i\right)$$

bulunur. $X = X^k\left(\partial/\partial x^k\right)$ olsun.

$$X^c = X^k\left(\partial/\partial x^k\right) + v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)$$

oluduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(X^k\left(\partial/\partial x^k\right) + v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)\right) &= \{B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dv^j\right) + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dv^i\right)\}[X^k\left(\partial/\partial x^k\right) \\
&\quad + v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)] \\
&= B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dv^j\right)[X^k\left(\partial/\partial x^k\right) + v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)] \\
&\quad + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dv^i\right)[X^k\left(\partial/\partial x^k\right) + v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)] \\
&= B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right)\left(X^k\left(\partial/\partial x^k\right)\right) \otimes \left(dv^j\right) \\
&\quad + B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right)\left(v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)\right) \otimes \left(dv^j\right) \\
&\quad + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right)\left(X^k\left(\partial/\partial x^k\right)\right) \otimes \left(dv^i\right) \\
&\quad + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right)\left(v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right) \otimes \left(\partial/\partial v^i\right)\right) \otimes \left(dv^i\right) \\
&= v^s\left(\partial X^i/\partial x^s\right)\left(B_i^j\left(\partial/\partial x^j\right) + D_i^j\left(\partial/\partial v^j\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca X^i ve v^k ların keyfi olduğu düşünüldüğünde

$$B_i^j = D_i^j = 0$$

bulunur. Bu yüzden

$$\overline{F} = 0$$

dır [9].

Tanım 3.2.20. *M_n üzerinde $(1,r)$ tipli tensör alanı F ve $(0,r)$-tipli tensör alanı G olmak üzere F nin TM_n deki tamamlayıcı lifti her bir $X_1, X_2, ..., X_r \in T_0^1(M_n)$ için*

$$F^c(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c) = (F(X_1, X_2, ..., X_r))^c,$$
$$G^c(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c) = (G(X_1^c, X_2^c, ..., X_r^c))^c$$

tarafindan tanımlanan $(1,r)$(veya $(0,r)$) tipli F^c (veya G^c) tensör alanlarıdır (Eğer M_n üzerindeki birim tensörü I ile gösteririlirse TM_n üzerindeki tensörü de I^c dir) [9].

Eğer M_n üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanının lokal gösterimi

$$F = F_i^j (\partial/\partial x^j) \otimes (dx^i)$$

$$\begin{aligned} F^c &= \left(F_i^j\right)^c (\partial/\partial x^j)^v \otimes (dx^i)^v + \left(F_i^j\right)^v (\partial/\partial x^j)^c \otimes (dx^i)^v + \left(F_i^j\right)^v (\partial/\partial x^j)^v \otimes (dx^i)^c \\ &= v^k \left(\partial F_i^j/\partial x^k\right) (\partial/\partial v^j) \otimes (dx^i) + F_i^j (\partial/\partial x^j) \otimes (dx^i) + F_i^j (\partial/\partial v^j) \otimes (dv^i) \end{aligned}$$

ise

$$F^c = F_i^j (\partial/\partial x^j) \otimes (dx^i) + v^k \left(\partial F_i^j/\partial x^k\right) (\partial/\partial v^j) \otimes (dx^i) + F_i^j (\partial/\partial v^j) \otimes (dv^i) \quad (3.2.16)$$

ile ifade edilir.

Ayrıca bir $1-$form $\alpha = \alpha^i dx^i$ için

$$\begin{aligned} \alpha^c &= (\alpha^i dx^i)^c \\ &= (\alpha^i)^c (dx^i)^v + (\alpha^i)^v (dx^i)^c \\ &= v^k (\partial \alpha^i/\partial x^i) dx^i + \alpha^i dv^i \end{aligned}$$

olup

$$\alpha^c = v^k \left(\partial \alpha^i/\partial x^k\right) (dx^i) + \alpha^i (dv^i) \quad (3.2.17)$$

dir.

G , $(0,2)-$tipindeki bir tensör alanı için

$$G = G_{ij}\left(dx^i\right)\otimes\left(dx^j\right)$$
$$G^c = \left(G_{ij}\right)^c\left(dx^i\right)^v\otimes\left(dx^j\right)^v + \left(G_{ij}\right)^v\left(dx^i\right)^c\otimes\left(dx^j\right)^v + \left(G_{ij}\right)^v\left(dx^i\right)^v\otimes\left(dx^j\right)^c$$

olup buradan da

$$G^c = v^k\left(\partial G_{ij}/\partial x^k\right)\left(dx^i\right)\otimes\left(dx^j\right) + G_{ij}\left(dx^i\right)\otimes\left(dv^j\right) + G_{ij}\left(dv^i\right)\otimes\left(dx^j\right) \tag{3.2.18}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.7. *Her bir $X,Y\in T_0^1(M_n)$ için*

$$F^c = (F(X))^v,$$
$$\alpha^c(X^v) = (\alpha(X))^v,$$
$$G^c(X^v,Y^v) = G^c(X^c,Y^v) = (G(X,Y))^v,$$
$$G^c(X^v,Y^v) = 0$$

dır [9].

Şimdi ise $(1,1)$ ve $(0,2)$ tipli tensör alanları için özel durumlar irdelenecektir.

3.2.6 $(1,1)$ -tipli tensör alanlarının tamamlayıcı liftleri

Önerme 3.2.8. *M_n üzerinde $(1,1)-$ tipli tensör alanı F olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. M_n üzerinde F , $(1,1)-$tipli tensör alanının rankı r ise (yani $rankF = r$ ise) F^c nin rankı $2r$ dir($rankF^c = 2r$).
2. M_n üzerinde F ve G $(1,1)$ tipli iki tensör alanı ise $(FG)^c = F^cG^c$ dir [9].

İspat: 1. $F = F_i^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}\otimes dx^i$ olup (3.2.16) nin direkt bir sonucudur.

2. Her $X\in T_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned}((FG)(X))^c &= (F(G(X)))^c = F^c((GX)^c)\\ &= F^c(G^c(X^c)) = (F^cG^c)(X^c)\end{aligned}$$

her X için doğru olduğundan

$$(FG)^c = F^c G^c$$

bulunur [9].

Sonuç 3.2.1. *$P(t)$,t değişkenine bağlı polinom ise M_n üzerinde her bir F ,$(1,1)-$tipli tensör alanı için*

$$P(F^c) = (P(F))^c$$

dir [9].

3.2.7 $(0,2)$ -tipli tensör alanlarının tamamlayıcı liftleri

Önerme 3.2.9. *M üzerinde $(0,2)-$ tipli tensör alanı G olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. *G nin rankı r ($rankG = r$) ise G^c nin rankı $2r$ ($rankG^c = 2r$) dir.*

2. *G simetrik (ya da anti-simetrik) ise G^c de simetriktir (ya da anti-simetriktir) [9].*

İspat:

1. $G = G_{ij}\left(dx^i\right)\otimes\left(dx^j\right)$ olup (3.2.18) nin direkt bir sonucudur.

2. G^c nin tanımı uygulandığında simetrikliği gösterililir. Yani

$$\begin{aligned} G = G_{ij}dx^i\otimes dx^j \Rightarrow G^c &= \left(G_{ij}dx^i\otimes dx^j\right)^c \\ G^c &= v_k\left(\partial G_{ij}/\partial x^k\right)\otimes\left(dx^j\right)+G_{ij}\left(dx^i\right)\otimes\left(dv^j\right)+G_{ij}\left(dv^i\right)\otimes\left(dx^j\right) \\ &= \partial G_{ij}\otimes dx^i + G_{ij}\left(dx^i\right)\otimes\left(dv^j\right)+G_{ij}\left(dv^i\right)\otimes\left(dx^j\right) \end{aligned}$$

olduğundan $G = G^c$ olur ki bu da aslında G^c nin simetrik olmasıdır [9].

Sonuç 3.2.2. *M_n üzerinde bir $2-$form Ω ise Ω^c de TM_n üzerinde bir $2-$form ve*

$$d\Omega^c = (d\Omega)^c$$

dir [9].

Sonuç 3.2.3. *M_n üzerinde $k-$boyutlu distribüsyon D olsun. D de keyfi X, X^c ve X^v vektör alanları tarafindan gerilen D^c $2k-$boyutlu distribüsyonunda D nin TM_n deki tamamlayıcı lifti tanımlanır. Yani D $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ tarafindan lokal olarak gerilirse D^c de TM_n de $\left\{X_1^v, X_2^v, ..., X_k^v, X_1^c, X_2^c, ..., X_k^c\right\}$ da lokal olarak gerilir [9].*

3.2.8 Tanjant Demette Lineer Konneksiyonların Tamamlayıcı Liftleri

Tanım 3.2.21. *M_n bir $n-$boyutlu manifold ile ∇ bir lineer konneksiyon olsun. TM_n de ∇ nın tamamlayıcı lifti TM_n üzerinde tek bir lineer konneksiyon ∇^c ile ifade edilen her bir $X,Y \in T_0^1(M_n)$ için*

$$\nabla^c_{X^c} Y^c = (\nabla_X Y)^c$$

dir [9].

Bu ifadeyi göstermek için Christofel sembolleri kullanılacaktır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j = \Gamma^j_{ij}\left(\partial/\partial x^k\right) + v^l\left(\partial\Gamma^k_{ij}/\partial x^l\right)\left(\partial/\partial v^k\right),\\
&\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial v^j = \Gamma^k_{ij}\left(\partial/\partial v^k\right),\\
&\nabla_{\partial/\partial v^i} \partial/\partial x^j = \Gamma^k_{ij}\left(\partial/\partial v^k\right),\\
&\nabla_{\partial/\partial v^i} \partial/\partial v^j = 0
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

olup burada

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j = \Gamma^k_{ij}\left(\partial/\partial x^k\right)$$

dır.Eğer (3.2.19) ve (3.2.21) kullanılır ve M_n de $\left(x^h\right)$ lokal koordinatlarla ∇ 'nın koordinatları Γ^k_{ij} , TM_n de $\left(x^h, v^h\right)$ lokal koordinatlarda ∇^c 'nin koordinatları $\left(\Gamma^k_{ij}\right)^c$ olarak

$$\begin{aligned}
X^c &= \begin{bmatrix} X^h \\ v^i \partial_i X^h \end{bmatrix},\\
Y^c &= \begin{bmatrix} Y^h \\ v^i \partial_i Y^h \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

not edilirse

$$\nabla^c_{X^c} Y^c = \nabla^c_{\left(X^h \partial_h + X^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}}\right)^c} \left(Y^j \partial_j + Y^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}}\right)^c$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla^c_{\left(\left(X^h\right)^c (\partial_h)^v + \left(X^h\right)^v (\partial_h)^c + \left(X^{\bar{h}}\right)^c \left(\partial_{\bar{h}}\right)^v + \left(X^{\bar{h}}\right)^v \left(\partial_{\bar{h}}\right)^c\right)} \left(\left(Y^j\right)^c \left(\partial_j\right)^v + \left(Y^j\right)^v \left(\partial_j\right)^c + \left(Y^{\bar{j}}\right)^c \left(\partial_{\bar{j}}\right)^v + \left(Y^{\bar{j}}\right)^v \left(\partial_{\bar{j}}\right)^c\right) \\
&= \nabla^c_{\left(X^h \partial_{\bar{h}} + X^h \partial_h + y^i \partial_i X^h \partial_h + X^h \partial_{\bar{h}}\right)} \left(Y^j \partial_{\bar{j}} + Y^j \partial_j + v^k \partial_k Y^j \partial_j + Y^j \partial_{\bar{j}}\right) \\
&= \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) \\
&+ \nabla^c_{X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_h} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{y^i \partial_i X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{y^i \partial_i X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_j\right) \\
&+ \nabla^c_{y^i \partial_i X^h \partial_h} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{y^i \partial_i X^h \partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) \\
&+ \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{X^h \partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) \\
&= X^h \{\nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right)\} \\
&+ X^h \{\nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right)\} \\
&+ y^i \partial_i X^h \left\{\nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(v^k \partial_k Y^j \partial_j\right) + \nabla^c_{\partial_h} \left(Y^j \partial_{\bar{j}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^h Y^j \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \partial_{\bar{j}} + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j + X^h Y^j \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \partial_j + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_j + X^h v^k \partial_k Y^j \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \partial_j \\
&+ X^h \frac{\partial \left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i} \partial_{\bar{j}} + X^h Y^j \nabla^c_{\partial_{\bar{h}}} \partial_{\bar{j}} + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_j + X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \partial_{\bar{j}} + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j \\
&+ X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \partial_j + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_{\bar{j}} + X^h v^k \partial_k Y^j \nabla^c_{\partial_h} \partial_j + X^h \frac{\partial \left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_{\bar{j}} \\
&+ X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \partial_{\bar{j}} + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j + y^i \partial_i X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \partial_{\bar{j}} + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j \\
&+ y^i \partial_i X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \left(\partial_j\right) + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{\bar{j}} + y^i \partial_i X^h v^k \partial_k Y^j \nabla^c_{\partial_h} \left(\partial_j\right) \\
&+ y^i \partial_i X^h \frac{\partial \left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i} \partial_j + y^i \partial_i X^h Y^j \nabla^c_{\partial_h} \left(\partial_{\bar{j}}\right) + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j \\
&= X^h Y^j \left(\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{h}\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j + X^h Y^j \left(\Gamma^k_{\bar{h}j} \partial_k\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_j + X^h v^k \partial_k Y^j \left(\Gamma^k_{\bar{h}j} \partial_k\right)^c \\
&+ X^h \frac{\partial \left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i} \partial_{\bar{j}} + X^h Y^j \left(\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{h}\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{i}}} \partial_j + X^h Y^j \left(\Gamma^{\bar{k}}_{h\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c \\
&+ X^h Y^j \left(\Gamma^{\bar{k}}_{h\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j + y^i \partial_i X^h Y^{jj} \left(\Gamma^{\bar{k}}_{h\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j \\
&+ y^i \partial_i X^h Y^j \left(\Gamma^k_{hj} \partial_k\right)^c + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{\bar{j}} + y^i \partial_i X^h v^k \partial_k Y^j \left(\Gamma^k_{hj} \partial_k\right)^c \\
&+ y^i \partial_i X^h \frac{\partial \left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i} \partial_{\bar{j}} + y^i \partial_i X^h Y^j \left(\Gamma^{\bar{k}}_{h\bar{j}} \partial_{\bar{k}}\right)^c + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X^h Y^j \left(\Gamma_{\bar{h}\bar{j}}^{\bar{k}}(\partial_{\bar{k}})\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j + X^h Y^j \left(\Gamma_{\bar{h}j}^{k}(\partial_k)\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{\imath}}}\partial_j \\
&+ X^h v^k \partial_k Y^j \left(\Gamma_{\bar{h}j}^{k}(\partial_k)\right)^c + X^h \frac{\partial\left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i}\partial_{\bar{j}} + X^h Y^j \left(\Gamma_{\bar{h}\bar{j}}^{\bar{k}}(\partial_{\bar{k}})\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j \\
&+ X^h Y^j \left(\Gamma_{hj}^{k}\partial_k\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{\imath}}}\partial_{\bar{j}} + X^h v^k \partial_k Y^j \left(\Gamma_{hj}^{k}\partial_k\right)^c + X^h \frac{\partial\left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^{\bar{\imath}}}\partial_{\bar{j}} \\
&+ X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j + X^h Y^j \left(\Gamma_{\bar{h}\bar{j}}^{k}(\partial_k)\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j + X^h Y^j \left(\Gamma_{hj}^{k}(\partial_k)\right)^c + X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\bar{\imath}}}\partial_{\bar{j}} \\
&+ y^i \partial_i X^h Y^j \left(\Gamma_{hj}^{k}(\partial_k)\right)^c + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j + y^i \partial_i X^h v^k \partial_k Y^j \left(\Gamma_{hj}^{k}(\partial_k)\right)^c \\
&+ y^i \partial_i X^h \frac{\partial\left(v^k \partial_k Y^j\right)}{\partial x^i}\partial_{\bar{j}} + y^i \partial_i X^h Y^j \left(\Gamma_{h\,\bar{j}}^{k}(\partial_k)\right)^c + y^i \partial_i X^h \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j
\end{aligned}
$$

olup buradan da

$$
\begin{aligned}
\nabla^c_{\partial/\partial x^i}\partial/\partial x^j &= \overline{\Gamma}_{ij}^{k}\left(\partial/\partial x^k\right) + \overline{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}}\left(\partial/\partial v^k\right), \\
\nabla^c_{\partial/\partial x^i}\partial/\partial v^j &= \overline{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k}\left(\partial/\partial x^k\right) + \overline{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}}\left(\partial/\partial v^k\right), \\
\nabla^c_{\partial/\partial v^i}\partial/\partial x^j &= \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}j}^{k}\left(\partial/\partial x^k\right) + \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}j}^{\bar{k}}\left(\partial/\partial v^k\right), \\
\nabla^c_{\partial/\partial v^i}\partial/\partial v^j &= \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{j}}^{k}\left(\partial/\partial x^k\right) + \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{j}}^{\bar{k}}\left(\partial/\partial v^k\right)
\end{aligned}
$$

ile

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, \\
&\overline{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k} = \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}j}^{k} = \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{j}}^{k} = \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{j}}^{\bar{k}} = 0, \\
&\overline{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}} = v^l\left(\partial\Gamma_{ij}^{k}/\partial x^l\right), \\
&\overline{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \overline{\Gamma}_{\bar{\imath}j}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}
\end{aligned}
\tag{3.2.20}
$$

şeklindedir [9]. (3.2.20) den TM_n üzerinde bir lineer konneksiyon ∇^c tanımlanır.

Teorem 3.2.1. ∇*,* M_n *üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda her* $X, Y \in T_0^1(M_n)$ *için,*

i) $\nabla^c_{X^v} Y^v = 0$

ii) $\nabla^c_{X^v} Y^c = \nabla^c_{X^c} Y^v = (\nabla_X Y)^v$

iii) $\nabla^c_{X^c} Y^c = (\nabla_X Y)^c$ *şartları sağlanır. Bu şartlar sağlandığından dolayı* ∇^c*,* TM_n *üzerinde bir lineer konneksiyon olur. Bu lineer konneksiyona* ∇^c *nin* ∇ *lineer konneksiyonuna göre tam lifti denir [9].*

İspat: M_n deki lokal koordinatlara göre X ve Y nin bileşenleri X^h ve Y^h olsun. Bu yüzden TM_n deki $\left(x^h, v^h\right)$ indirgenen koordinatlara göre X ve Y nin bileşenleri sırasıyla

$$X^v = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix},$$
$$Y^v = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^h \end{pmatrix},$$
$$X^c = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix},$$
$$Y^c = \begin{pmatrix} Y^h \\ \partial Y^h \end{pmatrix}$$

olarak yazılırsa bu durumda

i) $\nabla^c_{X^v} Y^v$ nin ilk n bileşeni

$$X^j \left(\bar{\Gamma}^h_{\bar{j}\,\bar{i}} Y^i\right) = 0$$

ve $\nabla^c_{X^v} Y^v$ nin son n bileşeni (3.2.20) den

$$X^j \left(\partial_{\bar{j}} Y^h + \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\,\bar{i}} Y^i\right) = 0$$

bulunur. Bu da bize $\nabla^c_{X^v} Y^v = 0$ sonucunu verir.

ii) $\nabla^c_{X^v} Y^c$ nin ilk n bileşeni

$$X^j \left(\partial_{\bar{j}} Y^h + \bar{\Gamma}^h_{\bar{j}i} Y^i + \bar{\Gamma}^h_{\bar{j}\,\bar{i}} \partial Y^i\right) = 0$$

ve $\nabla^c_{X^v} Y^c$ nin son n bileşeni (3.2.20) den

$$X^j \left(\partial_{\bar{j}} \partial Y^h + \bar{\Gamma}^h_{\bar{j}i} Y^i + \bar{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\,\bar{i}} \partial Y^i\right) = X^j \left(\partial_j Y^h + \Gamma^h_{ji} Y^i\right)$$

bulunur. Bu da bize $\nabla^c_{X^v} Y^c = (\nabla_X Y)^v$ sonucunu verir [13].Benzer şekilde $\nabla^c_{X^c} Y^v = (\nabla_X Y)^v$ da gösterilir.

Önerme 3.2.10. *∇ nın eğrilik ve torsiyon tensörleri sırasıyla T ve R ise, ∇^c nin de eğrilik ve torsiyon tensörleri sırasıyla T^c ve R^c dir [9].*

İspat: Her bir $X, Y \in T^1_0(M_n)$ için

$$\begin{aligned} T^c(X^c, Y^c) &= \nabla^c_{X^c} Y^c - \nabla^c_{Y^c} X^c - [X^c, Y^c] \\ &= (\nabla_X Y)^c - (\nabla_Y X)^c - ([X, Y])^c \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])^c \\ &= (T(X, Y))^c = T^c(X^c, Y^c) \end{aligned}$$

dir. Benzer olarak her bir $X,Y,Z \in T_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned} R^c(X^c,Y^c,Z^c) &= \nabla^c_{X^c}\nabla^c_{Y^c}Z^c - \nabla^c_{Y^c}\nabla^c_{X^c}Z^c - \nabla^c_{[X^c,Y^c]}Z^c \\ &= \nabla^c_{X^c}(\nabla_Y Z)^c - \nabla^c_{Y^c}(\nabla_X Z)^c - \left(\nabla_{[X,Y]^c}Z\right)^c \\ &= (\nabla_X(\nabla_Y Z))^c - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^c - \left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^c \\ &= \left(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z\right)^c \\ &= R(X,Y,Z)^c \end{aligned}$$

olup buradan da

$$R^c(X^c,Y^c,Z^c) = R(X,Y,Z)^c$$

dir.

Sonuç 3.2.4. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. *∇ simetriktir gerek ve yeter şart ∇^c de simetriktir.*
2. *∇ flattır gerek ve yeter şart ∇^c de flattır [9].*

İspat:

1. ∇ nın simetrikliğini göstermek için her $X,Y \in T_0^1(M_n)$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X$$

olmak zorundadır. Bunu göstermek için torsiyon tensöründen faydalanılacaktır.

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

olup $T = 0$ olur ve $[X,Y] = 0$ olarak düşünülürse

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X$$

olur ki bu da ∇ nın simetrik olduğunu göstermiş olur.Burada ∇^c nin simetrik olduğu gösterilecektir. Bunun için (3.2.1) deki ifadeler kullanılarak yani

$$\begin{aligned} T^c(X^c,Y^c) &= \nabla^c_{X^c}Y^c - \nabla^c_{Y^c}X^c - [X^c,Y^c] \\ &= (\nabla_X Y)^c - (\nabla_Y X)^c - ([X,Y])^c \end{aligned}$$

$$[X^c, Y^c] = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^c$$
$$[X^c, Y^c] = 0$$

olursa

$$\nabla^c_{X^c} Y^c = \nabla^c_{Y^c} X^c$$

dir.Buradan da ∇^c nin simetrikliği gösterilmiş olur.

2. ∇ nın flat olması demek $R(X, Y, Z) = 0$ olması anlamındadır. Bu durumda

$$R^c(X^c, Y^c, Z^c) = (R(X, Y, Z))^c = 0$$

olduğu gösterilmek zorundadır. Yani her $X, Y, Z \in T^1_0(M_n)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z) &= 0 \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0 \\ \nabla_{[X,Y]} Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} R^c(X^c, Y^c, Z^c) &= \nabla^c_{X^c} \nabla^c_{Y^c} Z^c - \nabla^c_{Y^c} \nabla^c_{X^c} Z^c - \nabla^c_{[X^c, Y^c]} Z^c \\ &= \nabla^c_{X^c} (\nabla_Y Z)^c - \nabla^c_{Y^c} (\nabla_X Z)^c - \nabla^c_{[X,Y]^c} Z^c \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z)^c - (\nabla_Y \nabla_X Z)^c - \left(\nabla_{[X,Y]} Z\right)^c \\ \left(\nabla_{[X,Y]} Z\right)^c &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z)^c \end{aligned}$$

olması demektir ve bu da aslında R^c nin sıfır olduğunun yani ∇^c nin flat olduğunun göstergesidir.

Önerme 3.2.11. *M_n üzerinde $(1, r)$ veya $(0, r)$ tipli bir tensör alanı S için*

$$\nabla^c S^v = (\nabla S)^v,$$
$$\nabla^c S^c = (\nabla S)^c$$

dir [9].

İspat: $(1,1)$ tipli tensör alanı için ispatını yapacağız. M_n üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F olsun. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
(\nabla^c F^v)(Y^c,X^c) &= (\nabla^c_{X^c} F^v)(Y^c) \\
&= \nabla^c_{X^c}(F^v Y^c) - F^v(\nabla^c_{X^c} Y^c) \\
&= (\nabla^c_{X^c})(FY)^v - F^v(\nabla_X Y)^c \\
&= (\nabla_X(FY))^v - (F(\nabla_X Y))^v \\
&= (\nabla_X(FY) - F(\nabla_X Y))^v \\
&= (\nabla_F(Y,X))^v \\
&= (\nabla F)^v(X^c,Y^c)
\end{aligned}$$

olup buradan da $(\nabla^c F^v) = (\nabla F)^v$ dir. Benzer olarak $(\nabla^c F^c) = (\nabla F)^c$ nin ispatı yapılabilir.Yani

$$\begin{aligned}
(\nabla^c F^c)(Y^c,X^c) &= (\nabla^c_{X^c} F^c)(Y^c) \\
&= \nabla^c_{X^c}(F^c Y^c) - F^c(\nabla^c_{X^c} Y^c) \\
&= \nabla^c_{X^c}(FY)^c - F^c(\nabla_X Y)^c \\
&= (\nabla_X(FY))^c - (F\nabla_X Y)^c \\
&= (\nabla_X(FY) - F\nabla_X Y)^c \\
&= (\nabla_F(Y,X))^c \\
&= (\nabla F)^c(X^c,Y^c)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.5. *J , TM_n üzerinde kanonik hemen hemen tanjant yapısı olsun . Bu yüzden ∇^c bir hemen hemen tanjant konneksiyondur [9].*

Önerme 3.2.12. *σ , M de bir eğri ve $\dot{\sigma}$ da TM de kanonik lift olsun. σ , ∇ nın bir geodezikliği ise $\dot{\sigma}$ de , ∇^c nin bir geodezikliği olur [9].*

İspat: σ , ∇ nın bir geodeziği olsun. Bu yüzden σ diferansiyel eşitlik ile tanımlanan

$$\left(d^2x^k/dt^2\right) + \Gamma^k_{ij}\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right) = 0 \tag{3.2.21}$$

olup bu yüzden (3.2.20) deki direkt bir hesaplama ile

$$\dot{\sigma}(t) = \left(x^i(t), \left(dx^i/dt\right)\right)$$

bulunur ve bu da $\dot{\sigma}$ nın ∇^c de bir geodezik olduğu sonucunu verir.

TM_n de bir eğri $\bar{\sigma}$ olsun. Böylece $\bar{\sigma}$, σ boyunca M_n üzerinde bir $X(t)$ vektör alanını tanımlar $X(t)$ lokal olarak

$$X(t) = v^i(t)\left(\partial/\partial x^i\right)$$

ile verilir.

$$\bar{\sigma}(t) = \left(x^i(t), y^i(t)\right)$$

$\sigma = \tau_N \circ \bar{\sigma}$ olup, bu durumda σ, M_n de bir eğri ve her bir t için $\bar{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}M_n$ dir.

Önerme 3.2.13. *∇^c ye göre TM_n de $\bar{\sigma}$ bir geodezik olsun. Bu durumda $\bar{\sigma}$ nın M_n üzerinde izdüşümü olan σ eğrisi ∇ ya göre bir geodeziktir ve $X(t)$, σ boyunca bir Jacobi vektör alanıdır [9].*

İspat: $\bar{\sigma}$, ∇^c ile TM_n de bir geodezik olsun. (3.2.20) den

$$\left(d^2x^k/dt^2\right) + \Gamma^k_{ij}\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right) = 0,$$

$$\left(d^2v^k/dt^2\right) + \left(\partial\Gamma^k_{ij}/\partial x^s\right)v^s\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right) + 2\Gamma^k_{ij}\left(dv^j/dt\right)\left(dx^j/dt\right) = 0 \qquad (3.2.22)$$

olarak bulunur. Bu da (3.2.22) den

$$\left(\delta^2v^k/dt^2\right) + R^k_{sij}v^s\left(dx^i/dt\right)\left(dx^j/dt\right) = 0 \qquad (3.2.23)$$

olup burada R^k_{sij}, ∇ nın eğrilik tensörünün bileşenleridir. Ayrıca (3.2.22) den σ nın bir geodezik olduğu ve (3.2.23) den de σ boyunca $X(t)$ nin bir Jacobi vektör alanı olduğu anlaşılır [9].

3.3 Konneksiyonlar ve Tensör Alanlarının Yatay Liftleri

Tanım 3.3.1. *M_n üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ile Γ^k_{ij} lokal bileşenler olsun. R eğrilik tensörünün ve T torsiyon tensörünün lokal bileşenleri sırasıyla R^k_{ijl} ve T^k_{ij} olmak üzere , ∇ nın karşıt konneksiyonu $\hat{\nabla}$ ise her bir $X, Y \in T^1_0(M_n)$ için*

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

ile tanımlanır. Bu ifadeyi biraz açarsak

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_X Y &= \nabla_Y X + [X, Y] \\ &= \nabla_Y X + \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ &= \nabla_X Y\end{aligned}$$

olup buradan da (3.2.9) deki bağıntılar kullanılarak

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$$

elde edilir ve her bir $X, Y \in T_0^1(M_n)$ için doğru olduğundan $\hat{\nabla}$ simetriktir, yani $\hat{\nabla} = \nabla$ dir.

M_n de her $\left(U, x^i\right)$ lokal koordinat sistemi için $\left(x^i, v^i\right)$,TU da indirgenen koordinatlar için

$$D_i = \partial/\partial x^i - v^j \Gamma_{ji}^k \left(\partial/\partial v^k\right) \quad , 1 \leq i \leq n = boy\, M_n$$

alalım. Bu durumda $\{D_i\}$, TM_n üzerinde lokal vektör alanlarının kümesidir. Burada $\left(x^i, v^i\right)$, TU dan indirgenen koordinatlardır. $\{D_i(y)\}$ ler tarafından gerilen $T_y(TM_n)$ nin alt vektör uzayı olarak $y \in T_y(TM_n)$ ve H_y yatay alt uzay tanımlanır. Böylece;

$$y \in TM_n \to H_y \subset T_y(TM_n)$$

tarafından TM_n üzerinde bir H, $n-$boyutlu distribüsyonu belirtilirse bu durumda V dikey distribüsyonun bir tamamlayıcı distribüsyonu H ise

$$T_y(TM_n) = H_y \oplus V_y$$

yazılır ve her $y \in TM_n$ için doğru olduğundan

$$TTM_n = H \oplus V$$

dir.

H ya ∇ tarafından tanımlanan yatay distribüsyon adı verilir. Buradan H_y de kısıtlanan $d\tau_{M_n}$ nin $V_y = cekd\tau_M(y)$ bir lineer izomorfizmi her $y \in TM_n$ için

$$d\tau_{M_n}(y) : H_y \to T_x(M_n)\,;\; x = \tau_{M_n}(y)$$

dir. Sonuç olarak X, M_n üzerinde bir vektör alanı ise, TM_n üzerinde X^H vektör alanı olması için TM_n nin X yatay lifti

$$d\tau_{M_n}(y)\left(X^H(y)\right) = X(x)\,;\; X \in \tau_{M_n}(y)$$

olacak şekilde tanımlanır, burada her $y \in TM_n$ ve $x = p_M(y)$ için

$$d\tau_M(y)\left(X^H(y)\right) = (X(x))$$

dir. Buradan aşikardır,

$$\left(\partial/\partial x^i\right)^H = D_i \tag{3.3.1}$$

ve

$$X^H = X^i\left(\partial/\partial x^i\right) - v^j X^i \Gamma^k_{ji}\left(\partial/\partial v^k\right) \tag{3.3.2}$$

olup burada $X = X^i\left(\partial/\partial x^i\right)$ dir. (3.3.2) i düzenlersek

$$\begin{aligned}
X^H &= X^i\left(\partial/\partial x^i\right) - v^j X^i \Gamma^k_{ji}\left(\partial/\partial v^k\right)\\
\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - v^j X^i \Gamma^k_{ji}\left(\partial/\partial v^k\right)\\
X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - v^j X^i \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= X^i \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - v^j \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)}_{D_i}\\
X^H &= X^i D_i
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.3.1) ve (3.3.2) dan

$$\begin{aligned}
X^H &= X^i D_i \\
&= X^i\left(\partial/\partial x^i - v^j \Gamma^k_{ji} \partial/\partial v^k\right)\\
&= X^i\left(\partial/\partial x^i\right) - v^j X^i \Gamma^k_{ji} \partial/\partial v^k
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

olarak yazılır. Ayrıca M_n üzerinde her bir f fonksiyonu için

$$X^H f^v = (Xf)^v$$

dir. Lokal vektör alanlarının $\{D_i,\, V_i = \partial/\partial v_i\}$ kümesine ∇ için uyarlanmış çatısı denir.

$$\begin{aligned}
\theta^i &= dx^i\\
\eta^i &= v^j \Gamma^i_{jk} dx^k + dv^i
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

tarafından $\left\{\theta^i, \eta^i\right\}$ ikilisi ∇ için bir uyarlanmış eş çatıdır. Eğer her $y \in TM_n$ için

$$\bar{X}(y) \in H_y$$

ise $\bar{X}$, TM_n üzerinde yatay vektör alanıdır denir.

Tanım 3.3.2. *M_n üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F olsun. TM_n üzerinde bir dikey vektör alanı γF ise her $y \in TM_n$ için*

$$(\gamma F)(y) = (F(y))^v_y$$

ile tanımlanır. $F = F_i^j\left(\partial/\partial x^j\right)\otimes\left(dx^i\right)$ *ise*

$$\gamma F = v^i F_i^j\left(\partial/\partial v^j\right) \tag{3.3.5}$$

dir. (3.2.15) ve (3.3.5) den

$$X^c - X^H = \gamma(\nabla X) \tag{3.3.6}$$

ayrıca

$$(\nabla X)(Y) = \nabla_Y X$$

olup burada ∇X *,* $(1,1)$ *tipli tensör alanıdır. (3.3.6) i açacak olursak*

$$\begin{aligned} X^c &= X^i\left(\partial/\partial x^i\right) + v^j\left(\partial X^i/\partial x^j\right)\left(\partial/\partial v^i\right), \\ X^H &= X^i\left(\partial/\partial x^i\right) - X^i v^j\left(\partial x^i/\partial v^j\right) \\ X^c - X^H &= X^i v^j\left(\partial x^i/\partial v^j\right) + v^j\left(\partial X^i/\partial x^j\right)\left(\partial/\partial v^i\right) \\ &= v^j\left(X^i\left(\partial x^i/\partial v^j\right) + \left(\partial X^i/\partial x^j\right)\left(\partial/\partial v^i\right)\right) \\ &= \gamma(\nabla X) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.3.1. *Her* $X,Y,Z \in T_0^1(M_n)$ *için aşağıdakiler doğrudur*

$$\begin{aligned} \left[X^v, Y^H\right] &= [X,Y]^v - (\nabla_X Y)^v = -\left(\hat{\nabla}_Y X\right)^v, \\ \left[X^H, Y^H\right] &= [X,Y]^H - \gamma\hat{R}(X,Y) \end{aligned}$$

dir. Burada $\hat{R}$, $\hat{\nabla}$ *nın eğrilik tensörü ve* $\hat{R}(X,Y)$ *tarafından tanımlanan* $\hat{R}(X;Y)Z = \hat{R}(X,Y,Z)$ *dir.*

İspat: İspata başlamadan önce M_n manifoldunun lineer konneksiyonu ∇ ve ∇ nın karşıt konneksiyonu $\hat{\nabla}$ için

$$\hat{\nabla}_Y X = [X,Y] + \nabla_X Y$$

dir, ayrıca herhangi bir $X \in M_n$ için

$$X^H = X^c - \gamma\,(\nabla X)$$

olarak yazılacağından

$$\begin{aligned} \left[X^v, Y^H\right] &= \left[X^v, Y^c - \gamma(\nabla Y)\right] \\ &= \left[X^v, Y^c\right] - \left[X^v, \gamma(\nabla Y)\right] \\ &= [X,Y]^v - (\nabla_X Y)^v \\ &= -\left(\hat{\nabla}_Y X\right)^v \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$[X^H, Y^H] = [X,Y]^H - \gamma\,\hat{R}(X,Y)$ ifadesini göstermek için (3.2.11) kullanılarak yani

$$X^H = \left(\hat{\nabla}_X\right)^c$$
$$Y^H = \left(\hat{\nabla}_Y\right)^c$$

için

$$\begin{aligned}[X^H, Y^H] &= [\left(\hat{\nabla}_X\right)^c, \left(\hat{\nabla}_Y\right)^c] \\ &= \left(\hat{\nabla}_{[X,Y]}\right)^c - \gamma\hat{R}(X,Y) \\ &= [X,Y]^H - \gamma\hat{R}(X,Y)\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.3.3. *M_n üzerinde bir $1-$form w olsun. TM_n deki w nın w^H yatay lifti her $X \in \chi(M)$ için*

$$w^H\left(X^H\right) = 0,$$
$$w^H(X^v) = (w(X))^v$$

ile tanımlanır. $w = w^i dx^i$ ise

$$w^H = v^j \Gamma_{ji}^k w^k + w^i dv^i$$

elde edilir, bu yüzden

$$\left(dx^i\right)^H = v^j \Gamma_{ji}^k dx^k + dv^i$$

dir. $\left\{\theta^i, \eta^i\right\}$ adapte eşçatı ile

$$w^H = w^i \theta^i \tag{3.3.7}$$

dir [9].

Tanım 3.3.4. *F, M_n üzerinde F_i^j lokal bileşenleri ile verilen bir tensör alanı olsun. TM_n üzerinde ∇ ya göre F nin yatay lifti TM_n üzerinde $(1,1)$ tipli bir F^H tensör alanı olacak*

$$\begin{aligned}F^H X^H &= (FX)^H \\ F^H X^v &= (FX)^v\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

şekilde tanımlanır. Burada X, M_n üzerinde bir vektör alanıdır. Böylece;

$$F^H = F_i^j \left(\partial/\partial x^j\right) \otimes \left(dx^i\right) + v^s \left(\Gamma_{si}^r F_t^k - \Gamma_{sr}^k F_i^r\right) \left(\partial/\partial v^k\right) \otimes \left(dx^i\right) + F_i^j \left(\partial/\partial v^j\right) \otimes \left(dv^i\right)$$

elde edilir. (3.3.4) den F^H ifadesini adapte çatı alanlarına göre bu ifade

$$F^H = F_i^j D_j \otimes \theta^i + F_i^j V_j \otimes \eta^i$$

diye yazılır [9].

Önerme 3.3.2. *M_n üzerinde $(1,1)$ tipli tensör alanları F ve G olsun. Bu yüzden aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. $(FG)^H = F^H G^H$
2. $(I)^H = I$

Burada $I =$ birim (özdeşlik) tensörüdür [9].

İspat: Her $X \in M_n$ için

$$\begin{aligned}(FG)^H X^H &= ((FG)X)^H = (F(GX))^H \\ &= F^H (GX)^H = F^H \left(G^H X^H\right) \\ &= \left(F^H G^H\right) X^H\end{aligned}$$

olup her X^H için doğru olduğundan

$$(FG)^H = F^H G^H$$

dır.

Benzer şekilde

$$I^H X^H = (IX)^H = X^H$$

olarak elde edilir.

Önerme 3.3.3. *Eğer t değişkenine bağlı bir polinom $P(t)$ ise*

$$(P(F))^H = P\left(F^H\right)$$

dır. Üstelik, F sabit $r-$rankına sahip ise F^H da sabit $2r$ -ranka sahiptir [9].

Tanım 3.3.5. *M_n üzerinde $(1,s)$, $s \geq 2$ tipindeki tensör alanı S olsun. TM_n de S nin yatay lifti ve TM_n üzerinde keyfi tipli tensör alanı S^H olmak üzere*

$$\begin{aligned} S^H\left(X_1^v, ..., X_s^v\right) &= 0, \\ S^H\left(X_1^H, ..., X_{i-1}^H, X_i^v, X_{i+1}, ..., X_s^H\right) &= \left(S\left(X_1, ..., X_r\right)\right)^v, \\ S^H\left(X_1^H, ..., X_s^H\right) &= \left(S\left(X_1, ..., X_r\right)\right)^H \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde $(0,2)$ *tipindeki tensör alanını tanjant demetteki yatay lifti gösterilebilir. Yani,* M_n *üzerinde* $(0,2)$ *tipindeki bir tensör alanı* G *ve* G *nin* TM_n *üzerindeki yatay lifti* G^H *olmak üzere* G^H *tensör alanı*

$$\begin{aligned} G^H(X^v,Y^v) &= 0, \\ G^H\left(X^v,Y^H\right) &= G^H\left(X^H,Y^v\right) = (G(X,Y))^v, \\ G^H\left(X^H,Y^H\right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer $G = G_{ij}\left(dx^i\right) \otimes \left(dx^j\right)$ *ise o zaman adapte coframe alanı*

$$G^H = G_{ij}\theta^i \otimes \eta^j + G_{ij}\eta^i \otimes \theta^j \tag{3.3.9}$$

dir [9].

Önerme 3.3.4. *M_n üzerinde bir distribüsyon D olsun. M_n üzerinde keyfi bir vektör alanı X olmak üzere, X^v ve X^H tarafindan gerilen TM_n üzerindeki D distribüsyonunun yatay lifti D^H dır. Eğer D distribüsyonu $\{X_1,...,X_k\}$ tarafindan lokal olarak gerilirse , D^H distribüsyonu da $\left\{X_1^v,...,X_k^v,X_1^H,...,X_k^H\right\}$ tarafindan lokal olarak gerilir ve boyutu 2k dır [9].*

Tanım 3.3.6. *M_n üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ , TM_n üzerindeki lineer konneksiyon ∇^H olsun. TM_n de ∇ nın yatay lifti*

$$\begin{aligned} \nabla^H_{X^v}Y^v &= 0, \\ \nabla^H_{X^v}Y^H &= 0, \\ \nabla^H_{X^H}Y^v &= (\nabla_X Y)^v, \\ \nabla^H_{X^H}Y^H &= (\nabla_X Y)^H \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

ile tanımlanır. (3.3.10) den ∇^H ın lokal bileşenleri

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^k_{ij} &= \Gamma^k_{ij}, \\ \bar{\Gamma}^k_{i\bar{j}} &= \bar{\Gamma}^k_{\bar{i}j} = \bar{\Gamma}^k_{\bar{i}\bar{j}} = \bar{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0, \\ \bar{\Gamma}^{\bar{k}}_{ij} &= v^l\left(\left(\partial\Gamma^k_{ij}/\partial x^l\right) - R^k_{lij}\right), \\ \bar{\Gamma}^{\bar{k}}_{i\bar{j}} &= \Gamma^k_{ij}, \\ \bar{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}j} &= \Gamma^k_{ij} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

ile gösterilir.(3.3.10) veya (3.3.11) den

$$\nabla^H_{X^c}Y^c = (\nabla_X Y)^c - \mu\left(R(,X,Y)\right) \tag{3.3.12}$$

olup burada $R(,X,Y)$, M_n *üzerinde* $(1,1)$ *tipli bir tensör alanı olur ve her* $Z \in T_0^1(M_n)$ *için*

$$R(,X,Y)Z = R(Z,X,Y)$$

dir [9].

Önerme 3.3.5. ∇^c *ve* ∇^H *çakışır gerek ve yeter şart* ∇ *flattır ,yani* $R = 0$ *dır [9].*

3.4 Hemen Hemen Tanjant Yapılarının İntegrallenebilirliği

Burada hemen hemen tanjant yapısının Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla integrallenebilirliği ve bu yapıların nasıl kurulduğu gösterilecektir.

Tanım 3.4.1. *J bir* $2n-$*boyutlu M manifoldunun hemen hemen tanjant yapı olsun.* N_J *Nijenhuis tensörü her* $X,Y \in T_0^1(M)$ *için*

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

ile tanımlanan $(1,2)-$*tipindeki bir tensör alanıdır [9].*

J_0, $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde standart hemen hemen tanjant yapısı olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^{2n}$ de J_0 üzerindeki kanonik koordinatlar (x^i, v^i) $1 \leq i \leq n$ için

$$J_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{3.4.1}$$

$$J_0\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0 \tag{3.4.2}$$

ile verilir.Eğer J integrallenebilirse bu durumda M nin herhangi bir noktasındaki U açık komşulukları üzerinde (x^i, v^i) lokal koordinatları vardır öyleki J, (3.4.2) ile verilir. Bu nedenle eğer J integrallenebilirse N_J Nijenhuis tensörü sıfır olur.

Şimdi $N_J = 0$ olsun. Bu yüzden

$$[JX,JY] = J[JX,Y] + J[X,JY]$$

olur. Bu yüzden $V = cekJ = \mathrm{Im}J$ distribüsyonu integrallenebilirdir. Frebenious teoreminden M_n nin her noktasının bir komşuluğu üzerindeki (x^i, z^i) lokal koordinatları bulunabilir yani x^i, $(1 \leq i \leq n)$ ler sabit olup bir fibrasyona karşılık gelen liftlerdir. Bu durumda V nin bir bazı

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^i},\ 1 \leq i \leq n\right\}$$

dır ve bu nedenle

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^j\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) \quad \text{ve}$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$$

biliyoruz ki J nin rankı n olan ve $\left(A_i^j\right)$ non-singüler matrislerin elemanlarıdır. H, TM de V nin bir tamamlayıcı distribüsyonu olsun, yani

$$TM = H \oplus V \ \ \text{(Whitney toplamı)}$$

ve $J : H \to V$ bir vektör demet izomorfizmasıdır. Böylece H nın bir $\left\{\overline{Z}_i \,; 1 \leq i \leq n\right\}$ lokal bazı vardır öyleki

$$J\,\overline{Z}_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$$

dir. Yani

$$\overline{Z}_i = \alpha_i^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \beta_i^j\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)$$

düşünülürse ve

$$Z_i = \alpha_i^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

olduğundan

$$\overline{Z}_i = Z_i + \beta_i^j\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)$$

elde edilir. Bu durumda M üzerinde bir lineer bağımsız lokal vektör alanlarının kümesi $\{Z_i \,; 1 \leq i \leq n\}$ dir öyleki

$$JZ_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$$

dir. Bu da

$$JZ_i = \alpha_i^k J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \alpha_i^k A_k^j \frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{\partial}{\partial z^i}$$

olduğundan

$$\alpha_i^k A_i^k = \delta_i^j$$

dir. Burada $\left(A_i^j\right)$ nin ters matrisi $\left(\alpha_i^j\right)$ dir. Çünkü $N_J = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 = N_J\left(Z_i,\, Z_J\right) &= -J[\frac{\partial}{\partial z^i},\, Z_j] - J[Z_i,\, \frac{\partial}{\partial z^i}] \\
&= -J\left(\left(\frac{\partial \alpha_j^k}{\partial z^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - J\left(-\left(\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial z^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial z^j}\right) - \left(\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial z^i}\right)\right) A_k^l\left(\frac{\partial}{\partial z^l}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki $\left(A_k^l\right)$ tekil olmayan (non-singüler) bir matris olup

$$\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial z^j} = \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial z^i} \tag{3.4.3}$$

dir. (3.4.3) için uyumlu olma şartları bulmak $f_k = f_k\left(x^i,\ z^i\right)$ fonksiyonlarına ihtiyaç vardır öyleki

$$\alpha_i^k = \frac{\partial f_k}{\partial z^i}$$

ile belirtilir. Şimdi burada

$$x^i = x^j$$
$$y^i = f^i\left(x^j\ , z^j\right),\ 1 \le i \le n$$

koordinat dönüşümleri yapılarak

$$\partial/\partial x^i = \partial/\partial x^j + \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\left(\partial/\partial y^j\right)$$
$$\partial/\partial z^j = \left(\frac{\partial f^j}{\partial z^j}\right)\left(\partial/\partial y^j\right) = \alpha_i^j\left(\partial/\partial y^j\right)$$

olarak bulunur. Daha ayrıntılı olarak J nin integrallenebildiğini bu dönüşümler yardımıyla gösterecek olursak

$$J\left(\partial/\partial x^i\right) = \partial/\partial y^i$$
$$J\left(\partial/\partial y^i\right) = 0$$

dir. Bu yüzden J integrallenebilirdir .

Teorem 3.4.1. *Bir J hemen hemen tanjant yapısı integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul N_J Nijenhuis tensörünün benzer olarak sıfır olmasıdır [9].*

Sonuç 3.4.1. *Herhangi bir M_n manifoldunun TM_n tanjant manifoldu üzerindeki kanonik hemen hemen tanjant yapısı integrallenebilirdir [9].*

Sonuç 3.4.2. $2-$*boyutlu bir M manifodu üzerindeki her hemen hemen tanjant yapısı integrallenebilirdir [9].*

İspat: M üzerinde herhangi bir Riemann metriğine göre V nin ortogonal tümleyeni H olsun. $x \in H$ ile $\{X,\ JX\}$ bir adapte edilmiş lokal çatı alanı olsun. Bu yüzden

$$N_J\left(X,\ JX\right) = 0\ ,\left(J^2 = 0 \text{ olduğundan}\right)$$
$$[JX, J^2X] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] = 0$$

olup $N_J = 0$ olur.

3.5 Hemen Hemen Tanjant Konneksiyonlar

Tanım 3.5.1. *J , M_{2n} üzerinde bir hemen hemen tanjant yapısı olsun. M_{2n} üzerinde bir ∇ konneksiyonu eğer $\nabla J = 0$ ise M_{2n} üzerinde bir hemen hemen tanjant konneksiyon adını alır. Yani her $X,Y \in T_0^1(M_{2n})$ için*

$$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y)$$

dir [9].

Önerme 3.5.1. *Her bir hemen hemen tanjant manifoldu üzerinde bir hemen hemen tanjant konneksiyonu vardır [9].*

İspat: M_{2n} üzerinde herhangi bir simetrik konneksiyon ∇ olsun. $V = cekJ = \mathrm{Im}J$ nin TM_{2n} deki bir ortogonal tümleyeni H olarak alınırsa; M_{2n} üzerinde $(1,2)-$ tipli bir Q tensör alanını her $X,Y \in H$ için

$$\begin{aligned} Q(X,\, Y) &= 0 \\ Q(JX,\, Y) &= (\nabla_Y J)(X) \\ Q(X,\, JY) &= (\nabla_X J)(Y), \\ Q(JX,\, ,JY) &= (\nabla_{JX} J)(Y) + (J(\nabla_Y J)(X)) \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

biçiminde tanımlansın. M_{2n} üzerinde bir başka lineer konneksiyon $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\overline{\nabla} = \nabla - Q$ olarak yazılırsa $\overline{\nabla} J = 0$ olup $\overline{\nabla}$ bir hemen hemen tanjant konneksiyondur. Bu ifadeyi ispatlamak için öncelikle yukarıda verilen M_{2n} üzerinde bir H ortogonal tümleyeninde her $X,Y \in H$ için $\bar{\nabla} = 0$ olduğunu gösterirsek ifadeyi ispatlamış oluruz. Yani

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{JX}(JY) &= (\nabla - Q)(JX,JY) \\ &= \nabla_{JX}(JY) - Q(JX,JY) \\ &= J(\nabla_X(JY)) - ((\nabla_{JX} J)Y + (J(\nabla_Y J)(X))) \\ &= J(\nabla_X(JY)) - J(\nabla_X(JY)) - (J(\nabla_Y J)(X)) \\ &= -(J(\nabla_Y J)(X)) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\bar{\nabla}_{JX}(JY) = -\nabla_{JY}(JX)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde J hemen hemen tanjant yapısının N_J Nijenhuis tensörü

$$\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= [JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]\\
&= \nabla_{JX}(JY)-\nabla_{JY}(JX)-J(\nabla_{JX}Y-\nabla_Y(JX))\\
&\quad -J(\nabla_X(JY)-\nabla_{JY}X)\\
&= J\nabla_X(JY)-J\nabla_Y(JX)-J^2\nabla_XY+J\nabla_Y(JX)\\
&\quad -J\nabla_X(JY)+J^2\nabla_YX\\
&= JQ(X,JY)-JQ(JX,Y)+JQ(X,JY)-JQ(JX,Y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunup bir hemen hemen tanjant yapının aslında hemen hemen tanjant konneksiyonlar yardımıyla Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfıra eşit olduğu ve ∇ nın torsiyonsuz ve metrik uyumlu olduğundan $\bar{\nabla}=\nabla-Q$ olarak yazılabileceği gösterilmiştir.

J hemen hemen tanjant yapısı ile M bir hemen hemen tanjant manifoldu üzerinde bir simetrik konneksiyon ∇ olsun.

$$[X,\ Y]=\nabla_XY-\nabla_YX$$

olduğunda ∇ simetriktir. J nin N_J Nijenhuis tensörünü yazarsak

$$\begin{aligned}
N_J(X,\ Y) &= [JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]+J^2[X,Y]\ (J^2=0 \text{ olduğundan})\\
&= (\nabla_{JX}(JY))-(\nabla_{JY}(JX))-J\{(\nabla_{JX}Y)-(\nabla_Y(JX))\}-J[\nabla_X(JY)-\nabla_{JY}X]\\
&= (\nabla_{JX}(JY))-(\nabla_{JY}(JX))-J(\nabla_{JX}Y)+J(\nabla_Y(JX))-J(\nabla_XJY)+J(\nabla_{JY}X)\\
&= J(\nabla_{JX}Y)+J(\nabla_{JY}X)-J(\nabla_{JX}Y)+J(\nabla_Y(JX))-J(\nabla_XJY)+J(\nabla_{JY}X)\\
&= J(\nabla_{JY}X)-J(\nabla_{JX}Y)-J(\nabla_{JX}Y)+J^2(\nabla_YX)-J^2(\nabla_XY)+J(\nabla_{JY}X)\\
&= \nabla_{JY}(JX)-J(\nabla_{JX}Y)+J(\nabla_{JY}X)-\nabla_{JX}(JY)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.5.2. *M_n üzerinde bir simetrik hemen hemen tanjant konneksiyon ∇ ise J integrallenebilirdir (yani $\nabla J=0$ dır) [9].*

İspat: Kabul edelim ki ∇ M_n üzerinde simetrik hemen hemen tanjant konneksiyon olsun. Ayrıca şunları not edersek

$$\nabla_XJY=(\nabla_XJ)Y+J\nabla_XY$$

ve $\nabla J = 0$ olması demek her $X, Y \in M_n$ için

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y$$
$$(\nabla_X J)Y = 0$$

olmasıdır. Bu durumda

$$\nabla J = 0$$
$$N_J(X,Y) = 0 => [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0$$

ve ayrıca

$$N_J(X,Y) = 0$$
$$[JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0$$
$$\nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY}X)$$
$$=> J\nabla_{JX}Y - J\nabla_{JY}X - J\nabla_{JX}Y + J\nabla_Y JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY}X$$
$$= J^2(\nabla_Y X - \nabla_X Y) \ (J^2 = 0 \text{ olduğundan})$$
$$= 0$$

olarak bulunur. Bu durumda N_J Nijenhuis tensörü sıfır olup J integrallenebilirdir.

Önerme 3.5.3. *J integrallenebilirse M üzerinde simetrik bir hemen hemen tanjant konneksiyonu vardır [9].*

İspat: (3.5.2) den M üzerinde bir lineer konneksion $\overline{\nabla}$ tanıtılmıştı. Bundan dolayı ∇ simetrik ve J integrallenebilirdir, yani

$$0 = N_J(X,\ Y) = (\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J((\nabla_Y J)(X)) - J((\nabla_X J)(Y))$$

dir. Buradan da sonuç olarak Q (3.5.1) nun simetrik olduğu görülür. Ayrıca $\overline{\nabla}$ nin torsiyon tensörü $\overline{T}$ olarak ifade edilirse

$$\overline{T}(X,\ Y) = T(X,\ Y) - Q(X,Y) + Q(Y,X)$$
$$= -Q(X,Y) + Q(Y,X) = 0$$

olup Q simetrik olduğundan

$$T(X,Y) = \overline{T}(X,Y)$$

olarak bulunup buradan da $\nabla = \overline{\nabla}$ bulunur [9].

3.5.1 Fibrasyonları Tanımlanan İntegrallenebilir Hemen Hemen Tanjant Yapılar

M_{2n}, $2n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve bu manifold üzerinde bir integrallenebilir hemen hemen tanjant yapısı J olsun. M üzerinde bir fibrasyon tanımlayabilmemiz için

$$V = cekJ = \mathrm{Im}J$$

distibüsyonunun integrallenebilmesidir. Bu ifadede yani N_J Nijenhuis tensörünün sıfır olması gerekmektedir. Yani her $X,Y \in T_0^1(M_{2n})$ için $N_J(X,Y) = 0$ olmasıdır.

Tanım 3.5.2. *Bir denklik bağıntısı tarafından tanımlanan M_n nin bölüm kümeleri bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip ise J bir fibrasyon tanımlar [9].*

Liflerin uzayı N_m bir $m-$ boyutlu manifold olup $\pi : M_n \to N_m$ kanonik projeksiyonu olmak üzere bir subjektif submersiyondur (yani N_m, M_n nin bir bölüm manifoldudur). Bu durumda $\pi : M_n \to N_m$ bir fibre manifolddur ve her $y \in M_n$ için

$$V_y = T_y\left(\pi^{-1}(x)\right),\ x = \pi(y)$$

dir. Böylece tanjant demetin kanonik hemen hemen tanjant yapısı bölümünden M_n üzerinde tanjant vektörlerin dikey liftleri tanımlanabilir. Eğer $u \in T_x(N_m)$ ve $y \in \pi^{-1}(x)$ ise $u^v \in T_y(M_n)$ için

$$u^v = J_y(\bar{u})$$

olarak tanımlanır. Burada $\bar{u} \in T_y(M_n)$ ve $\pi_\bigstar(u) = u$ dur. Böylece

$$V_y = cek\left\{\pi_\bigstar : T_y(M_n) \to T_x(N_m)\right\}$$

ve

$$J_y V_y = 0$$

ve u^v iyi tanımlıdır. Üstelik $u^v \in V_y$ dir ve $u \to u^v$ dönüşümü V_y ile $T_x(N_m)$ de bir lineer izomorfizmasıdır.

Tanım 3.5.3. *Eğer X , N_m üzerinde bir vektör alanı ise bu durumda onun M_n üzerine dikey lifti*

$$X^v = J\,\bar{X}$$

ile tanımlanır. Burada $\bar{X}$, M_n üzerinde X e $\pi-$bağlantılı vektör alanıdır ve $X^v \in V$ dir [9].

Önerme 3.5.4. *N_m üzerinde iki vektör alanları X ve Y olsun. Bu yüzden aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. $[X^v, Y^v] = 0,$

2. $L_{X^v} J = 0$

dır [9].

İspat:

1. M_n üzerinde $\pi-$bağlantılı iki vektör alanı $\bar{X}, \bar{Y}$ olsun. Böylece $X^v = J\,\bar{X}$ ve $Y^v = J\,\bar{Y}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
[X^v, Y^v] &= [J\,\bar{X}, J\,\bar{Y}] \\
&= J[J\,\bar{X}, \bar{Y}] + J[\bar{X}, J\,\bar{Y}] (\text{Nijenhuis tensörü sıfır olduğundan, yani } N_J(X,Y) = 0) \\
&= J[X^v, \bar{Y}] + J[\bar{X}, Y^v]
\end{aligned}$$

dir. Fakat $T_\pi[X^v, \bar{Y}] = [(T_\pi)X^v, (T_\pi)\bar{Y}] = 0$, olup X^v ve $\bar{Y}$ sırasıyla 0 ve Y ye $\pi-$bağlantılı vektör alanlarıdır.Benzer şekilde $(T_\pi)[\bar{X}, Y^v] = 0$ olup $\bar{X}$ ve Y^v nin sırasıyla X ve 0 da $\pi-$bağlantılı vektör alanı olduğu söylenir. Böylece $[X^v, \bar{Y}], [\bar{X}, Y^v]$ her ikiside dikeydir ve böylece

$$J[X^v, \bar{Y}] = J[\bar{X}, Y^v] = 0$$

dir. Bu yüzdendir ki *cekJ* nin içinde olup bu da $[X^v, Y^v] = 0$ olmasıdır.

2. $\bar{Z}$, M_n üzerinde Z ye $\pi-$ bağlantılı bir vektör alanıdır. Her $\bar{Z} \in M_n$ için

$$\begin{aligned}
(L_{X^v} J)(\bar{Z}) &= 0,\ Z^v = J\,\bar{Z} \text{ olduğundan} \\
(L_{X^v} J)(\bar{Z}) &= [X^v, J\,\bar{Z}] - J[X^v, \bar{Z}] \\
&= [X^v, Z^v] - J[J\,\bar{X}, \bar{Z}] \\
&= 0 - J^2[\bar{X}, \bar{Z}] \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir [21].

Önerme 3.5.5. *J integrallenebilir olduğunda $\nabla J = 0$ olacak şekilde M_n üzerinde bir simetrik konneksiyon ∇ vardır. Buradan J integrallenebilirdir [21].*

İspat: M_n üzerinde herhangi bir lineer konneksiyon $\bar{\nabla}$ olsun. $\bar{\nabla}$ sıfır torsiyonlu oluşundan ve $J^2 = 0$ olduğundan

$$N_J(X,Y) = \left(\bar{\nabla}_{JX}J\right)Y - \left(\bar{\nabla}_{JY}J\right)X + J\left(\bar{\nabla}_Y J\right)X - J\left(\bar{\nabla}_X J\right)Y = 0$$

yazılabilir ve

$$J\bar{\nabla}_X J + \left(\bar{\nabla}_X J\right)J = 0$$

dır. Eğer Q herhangi $(1,2)$ tipli tensör alanı ise kovaryant indislerde simetriktir, ayrıca $\nabla = \bar{\nabla} - Q$ bir simetrik konneksiyon ve

$$(\nabla_X J)Y = \left(\bar{\nabla}_X J\right)Y - Q(X,JY) + QJ(X,Y)$$

dir. $\nabla J = 0$ olacak şekilde bir simetrik ∇ konneksiyonunu bulmak için bir Q tensör alanını

$$Q(X,JY) - QJ(X,Y) = \left(\bar{\nabla}_X J\right)Y$$

şeklinde inşa etmek mümkündür. N_m üzerinde bir $m-$ boyutlu distribüsyon D ve $cekQ$ de tamamlayıcı distribüsyon olarak seçelim . Böylece N_m üzerinde J integrallenebilir olduğunda D ye ait her V,W vektör alanı çifti için

$$\begin{aligned}
Q(V,W) &= 0 \\
Q(JV,W) &= \left(\bar{\nabla}_W J\right)V \\
Q(V,JW) &= \left(\bar{\nabla}_V J\right)W \\
Q(JV,JW) &= \left(\bar{\nabla}_{JV} J\right)W + J\left(\bar{\nabla}_W J\right)V
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan Q simetriktir ve $\nabla = \bar{\nabla} - Q$, $\nabla Q = 0$ özelliğine sahiptir. Bu durumda simetrik konneksiyonun varlığı sonucunu verir [21].

Önerme 3.5.6. *M_n üzerinde bir simetrik hemen hemen tanjant lineer konneksiyonu ∇ olsun. Bu yüzden en az bir V lifti üzerinde bir konneksiyon tarafından sınırlanan konneksiyon flattır. Bu durumda V nin herhangi bir lifti üzerinde kısıtlanmış bir konneksiyon yardımıyla indirgenen $\bar{\nabla}$ konneksiyonu flattır [21].*

İspat: Gerçekten Y ye $\pi-$ bağlantılı M_n üzerinde herhangi bir vektör alanı $\bar{Y}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_{X^v} Y^v &= \nabla_{X^v}\left(J\,\bar{Y}\right) = J\left(\nabla_{X^v}\bar{Y}\right) \ (\nabla J = 0 \text{ olduğundan}) \\
&= J\left(\nabla_{\bar{Y}} X^v + [X^v, \bar{Y}]\right) \ (\nabla \text{ simetrik olduğundan}) \\
&= J\left(\nabla_{\bar{Y}} X^v\right) + J[X^v, \bar{Y}] \\
&= \nabla_{\bar{Y}}\left(JX^v\right) + J[X^v, \bar{Y}] \\
&= \nabla_{\bar{Y}}\left(JX^v\right) + J\left(\nabla_{X^v}\bar{Y} - \nabla_{\bar{Y}} X^v\right) \\
&= \nabla_{\bar{Y}}\left(JX^v\right) + J\nabla_{X^v}\bar{Y} - J\nabla_{\bar{Y}} X^v \\
&= \nabla_{\bar{Y}}\left(JX^v\right) + \nabla_{X^v}\left(J\bar{Y}\right) - \nabla_{\bar{Y}}\left(JX^v\right) \\
&= \nabla_{X^v}\left(J\bar{Y}\right) \ (J\bar{Y} = Y^v) \\
&= \nabla_{X^v} Y^v \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir [21].

4. BAZI ÖZEL TANJANT DEMETLER

Burada $G-$yapıların diğer örnekleri olan Hemen Hemen Çarpım Yapı, Hemen Hemen Kompleks Yapı ,Hemen Hemen Hermityen Yapılar ve Kaehler Yapılar üzerinde durulup bunların bazı önemli teorileri hakkında bilgiler verilip bu bilgilerdeki bazı önerilerin ispatları yapılacaktır.

4.1 Hemen Hemen Çarpım Yapılar

Tanım 4.1.1 (Hemen Hemen Çarpım yapısı)**.** *M_m, $m-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_m üzerinde $(1,1)-$tipli bir tensör alanı F olmak üzere $F^2 = I$ şartını sağlayan bir tensör alanı varsa (M_m, F) ikilisine hemen hemen çarpım manifold ve M_m ye de bir hemen hemen çarpım yapısı denir. M_m nin bir hemen hemen çarpım yapısı olması için gerek ve yeter şart F, $(1,1)$ tipli tensör alanının bir hemen hemen çarpım manifold olmasıdır [9].*

Eğer M_m üzerinde (P,Q) $(1,1)$-tipli tensör alanı çifti var ve bu tensör alanı çifti

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)(I+F)$$
$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)(I-F)$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} P^2 &= P \\ PQ &= QP = 0 \\ Q^2 &= Q \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

şeklinde belirtilirse. Buradan (4.1.1) sağlanırsa

$$F = P - Q$$

olup F, M_m üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Bu ifadeyi göstermek için M_m üzerinde iki tane

$$\mathbf{P} = \operatorname{Im} P$$
$$\mathbf{Q} = \operatorname{Im} Q$$

distribüsyon seçilirse M_m nin bir tanjant uzayı her $x \in M_m$ için $T_x(M_m)$ için

$$T_x(M_m) = \mathbf{P}_x \oplus \mathbf{Q}_x$$

dir. Eğer P nin rankı sabit ve $rankP = p$ ve Q nun rankı sabit ve $rankQ = q$ olup M_m üzerindeki distribüsyonlar sırasıyla bir $q-$boyutlu distribüsyon **Q** ve bir $p-$ boyutlu distribüsyon **P** olmak üzere M_m nin tanjant uzayı $T_x(M_m)$ $p+q=m-$boyutlu bir distribüsyondur. Tersine, eğer M_m üzerinde **P** ve **Q** şeklinde iki tamamlayıcı distribüsyon var olsun o zaman P ve Q ya karşılık gelen dönüşümler her $x \in M_m$ için

$$P_x : T_x(M_m) \to \mathbf{P}_x$$
$$Q_x : T_x(M_m) \to \mathbf{Q}_x$$

dir.

$x \in M_m$ için $\mathbf{P}_x$ in bir bazı $e_1, e_2, ..., e_p$ ve $\mathbf{Q}_x$ in bir bazı ise $e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_m$ olsun.

Bundan dolayı $\{e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_m\}$, x de bir adapte çatı olarak adlandırılan $T_x(M_m)$ nin bir bazıdır. Yani $T_x(M_m)$ nin çatısı $\mathbf{P}_x$ in bazı ile $\mathbf{Q}_x$ in bazının birleştirilmiş halidir. x de adapte edilen iki çatı $\{e_1, ..., e_m\}$ ve $\{\acute{e}_1, ..., \acute{e}_m\}$ olsun. Bu durumda $A \in Gl(p, \mathbb{R})$ ve $B \in Gl(q, \mathbb{R})$ için

$$\acute{e}_i = A_i^j e_j; \;\; 1 \leq i, j \leq p$$
$$\acute{e}_i = B_i^j e_j; \; p+1 \leq i, j \leq m$$

dir. Bu yüzden $\{e_i, \; 1 \leq i \leq m\}$ ve $\{\acute{e}_i, \; 1 \leq i \leq m\}$ için $(m \times m)$-tipindeki matrisi

$$\alpha = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in Gl(m, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir. Buradan açıkça görülür ki $\alpha \in Gl(p, \mathbb{R}) \times Gl(q, \mathbb{R})$ olup $Gl(p, \mathbb{R}) \times Gl(q, \mathbb{R})$ de tanımlanan $Gl(m, \mathbb{R})$ nin bir G Lie altgrubu

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \; |A \in Gl(p, \mathbb{R}), \; B \in Gl(q, \mathbb{R}) \right\}$$

tanımlanır. Ayrıca P, Q ve F nin bir adapte çatısının matrisel gösterimleri sırasıyla

$$P_0 = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix},$$
$$F_0 = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

dir.

$B = \{M_m$ nin tüm noktalarındaki adapte çatılar$\}$ kümesini ele alalım. Buradan kolaylıkla B nin M_m üzerinde bir $(Gl(p, \mathbb{R}) \times Gl(q, \mathbb{R}))-$yapısı olduğu görülür. Çünkü B kümesi hemen

hemen çarpım yapılardaki adapte edilen çatı matrislerinin bir grubu olarak adlandırılır, bu da aslında B nin $(Gl(p,\mathbb{R})\times Gl(q,\mathbb{R}))-$yapısındaki bir asli demet olarak görülür. Tersine B, M_m üzerinde bir $(Gl(p,\mathbb{R})\times Gl(q,\mathbb{R}))-$ yapısı ise her bir $x\in M_m$ için x de B nin bir çatısı ile P_0 ve Q_0 ın matrisel gösterimi M_m deki $(1,1)-$ tipli tensör alanları P ve Q tensör alanı olarak tanımlanabilmesidir.

Önerme 4.1.1. *Bir hemen hemen çarpım yapısı bir $(Gl(p,\mathbb{R})\times Gl(q,\mathbb{R}))-$yapısıdır [9].*

M_m nin bir U koordinat komşuluğu var olsun. Bu durumda her $x\in U$ için B nin bir

$$\sigma : x\in U \to \sigma(x)=\left(\left(\partial/\partial x^1\right)_x,\dots,\left(\partial/\partial x^m\right)_x\right)$$

kesiti lokal çatı alanı ve M_m nin her noktasında $\left(U,x^1,\dots,x^m\right)$ var ise F bir hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilirdir, yani $\sigma(x)$, x de bir adapte çatı olarak adlandırılır.

Önerme 4.1.2. *F integrallenebilirdir gerek ve yeter şart* **P** *ve* **Q** *tamamlayıcı distribüsyonlarının integrallenebilmesidir [9].*

Bir hemen hemen çarpım yapıların integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartın hemen hemen çarpım yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır.

Bunun için önce aşağıdaki önermeyi ispat edersek yukarıdaki ifadeyi ispat etmiş oluruz.

Önerme 4.1.3. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1. *Hemen hemen çarpım yapısı F integrallenebilirdir.*

2. $N_F=0$.

3. $N_P=0$.

4. $N_Q=0$ *[9].*

İspat: İspata başlamadan önce şunları not edelim.

$$\begin{aligned} P^2 = P,\ Q^2 &= Q,\ PQ = QP = 0 \\ P &= \left(\frac{1}{2}\right)(I+F) \\ Q &= \left(\frac{1}{2}\right)(I-F) \\ F &= P-Q \\ N_P &= \left(\frac{1}{2}\right)N_F \\ N_Q &= -\left(\frac{1}{2}\right)N_F \\ N_P - N_Q &= N_F \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden (2), (3) ve (4) eşitlikleri sağlanır. Aslında biz N_P ve N_Q ifadelerinin sıfıra eşit olduğunu gösterirsek N_F nin sıfır olduğu gösterilmiş olacaktır. Buradan da F hemen hemen tanjant yapısı integrallenebilir olacaktır.

Her $X,Y \in T_0^1(M_m)$ için

$$\begin{aligned} N_P(X,Y) &= [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY] + P[X,Y] = 0 \\ N_Q(X,Y) &= [QX,QY] - Q[QX,Y] - Q[X,QY] + Q[X,Y] = 0 \end{aligned}$$

(buradaki N_P ve N_Q ifadeleri hemen çarpım yapısının Nijenhuis tensörüdür). F integrallenebilirse **P** ve **Q** da integrallenebilirdir. Ayrıca M_m üzerinde keyfi bir vektör alanı $Z = PZ + QZ$ şeklinde X ve Y vektör alanlarını N_P ve N_Q da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} N_P(X,Y) &= [PX,PY] - P[PX,PY+QY] - P[PX+QX,PY] \\ &\quad + P[PX+QX,PY+QY] \\ &= [PX,PY] - P[PX,PY] - P[PX,QY] \\ &\quad - P[PX,PY] - P[QX,PY] + P[PX,PY] \\ &\quad + P[PX,QY] + P[QX,PY] + P[QX,QY] \end{aligned}$$

ve buradan bunların açılımını yaparsak

$$
\begin{aligned}
N_P(X,Y) &= [PX,PY] - P[PX,PY] + P[QX,QY] \\
&= (\nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX)) - P(\nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX)) \\
&+ P[QX,QY] \\
&= P\nabla_X(PY) - P\nabla_Y(PX) - P^2\nabla_X(PY) + P^2\nabla_Y(PX) \\
&+ P[QX,QY] \\
(P^2 &= P \text{ olduğundan}) \\
&= P\nabla_X(PY) - P\nabla_Y(PX) - P\nabla_X(PY) \\
&+ P\nabla_Y(PX) + P[QX,QY]
\end{aligned}
$$

$$N_P(X,Y) = P[QX,QY]$$

olup benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
N_Q(X,Y) &= [QX,QY] - Q[QX,PY+QY] - Q[PX+QX,QY] \\
&+ Q[PX+QX,PY+QY] \\
&= [QX,QY] - Q[QX,PY] - Q[QX,QY] - Q[PX,QY] \\
&- Q[QX,QY] + Q[PX,PY] \\
&+ Q[PX,QY] + Q[QX,PY] + Q[QX,QY]
\end{aligned}
$$

olup buradan bunlar açılırsa

$$
\begin{aligned}
N_Q(X,Y) &= [QX,QY] - Q[PX,QY] + Q[PX,PY] \\
&= (\nabla_{QX}(QY) - \nabla_{QY}(QX)) \\
&- Q(\nabla_{PX}(QY) - \nabla_{QY}(PX)) + Q[PX,PY] \\
&= Q\nabla_X(QY) - Q\nabla_Y(QX) - Q^2\nabla_X(QY) \\
&+ Q^2\nabla_Y(PX) + P[PX,PY] \\
(Q^2 &= Q \text{ olduğundan}) \\
&= Q\nabla_X(PY) - Q\nabla_Y(PX) - Q\nabla_X(PY) \\
&+ Q\nabla_Y(PX) + Q[PX,PY]
\end{aligned}
$$

$$N_Q(X,Y) = Q[PX,PY]$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$N_P(X,Y)+N_Q(X,Y)=0$$
$$P[QX,QY]+Q[PX,PY]=0$$

olduğundan $N_F = 0$ olarak bulunur. Burada $[PX,PY] \in \mathbf{P}$ ve $[QX,QY] \in \mathbf{Q}$ olup $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ integrallenebilirdir, bu yüzden de $N_P = N_Q = 0$ olup sonuç olarak $N_F = 0$ olarak bulunur. Tersine $N_F = 0$ olsun. Bu durumda $N_P = N_Q = 0$ olduğu aşikardır ve

$$[PX,PY] \in \mathbf{P}$$
$$[QX,QY] \in \mathbf{Q}$$

dir. Buradan da sonuç olarak $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ integrallenebilirdir gerek ve yeter şart F nin integrallenebilmesidir. Yani bu durumda ispat tamamlanmış olur [9].

M_m üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun.

$$\nabla F = 2(\nabla P) = 2(\nabla Q)$$

olarak bulunur. Eğer $\nabla F = 0$ ise bir hemen hemen çarpım konneksiyonu olur.

Önerme 4.1.4. *M_m üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ve F, P ve Q $(1,1)$-tipli tensör alanları olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur*

1. $\nabla F = 0$,

2. $\nabla P = 0$,

3. $\nabla Q = 0$ *[9].*

İspat: M_m üzerinde X,Y vektör alanları için

$$N_P(X,Y) = [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY] + P[X,Y] = 0,$$
$$N_Q(X,Y) = [QX,QY] - Q[QX,Y] - Q[X,QY] + Q[X,Y] = 0,$$
$$N_P = \left(\frac{1}{2}\right) N_F,$$
$$N_Q = -\left(\frac{1}{2}\right) N_F$$

olduğu göz önüne alınıp bu denklemler açılırsa o zaman

$$\begin{aligned}
N_P(X,Y) &= \nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX) - P(\nabla_{PX}Y - \nabla_Y(PX)) - P(\nabla_X(PY) - \nabla_{PY}X) + P(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX) - P\nabla_{PX}Y + P\nabla_Y(PX) - P\nabla_X(PY) + P\nabla_{PY}X + P\nabla_X Y - P\nabla_Y X \\
&= P\nabla_{PX}Y + (\nabla_{PX}P)Y - P\nabla_{PY}X - (\nabla_{PY}P)X - P\nabla_{PX}Y + P^2\nabla_Y X + P(\nabla_Y P)X \\
&- P^2\nabla_X Y - P(\nabla_X P)Y + P\nabla_{PY}X + P\nabla_X Y - P\nabla_Y X \\
&= (\nabla_{PX}P)Y - P(\nabla_X P)Y - (\nabla_{PY}P)X + P(\nabla_Y P)X \\
&= P(\nabla_X P)Y - P(\nabla_X P)Y - P(\nabla_Y P)X + P(\nabla_Y P)X \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla $N_P(X,Y) = 0$ dır. $\nabla P = 0$ olması demek aslında

$$P(\nabla_X P)Y + (\nabla_{PX}P)Y = P(\nabla_{PY}P)X + (\nabla_{PY}P)X$$

olmasıdır. Benzer şekilde $N_Q(X,Y) = 0$ için benzer olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
N_Q(X,Y) &= [QX,QY] - Q[QX,Y] - Q[X,QY] + Q[X,Y] \\
&= \nabla_{QX}(QY) - \nabla_{QY}(QX) - Q(\nabla_{QX}Y - \nabla_Y(QX)) - Q(\nabla_X(QY) - \nabla_{QY}X) + Q(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= Q\nabla_{QX}Y + (\nabla_{QX}Q)Y - Q\nabla_{QY}X - (\nabla_{QY}Q)X - Q\nabla_{QX}Y + Q^2\nabla_Y X + Q(\nabla_Y Q)X \\
&- Q^2\nabla_X Y - Q(\nabla_X Q)Y + Q\nabla_{QY}X + Q\nabla_X Y - Q\nabla_Y X \\
&= (\nabla_{QX}Q)Y - (\nabla_{QY}Q)X - (Q(\nabla_X Q))Y + (Q(\nabla_Y Q))X \\
&= Q(\nabla_X Q)Y - Q(\nabla_X Q)Y - Q(\nabla_Y Q)X + Q(\nabla_Y Q)X \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $\nabla Q = 0$ olması demek

$$Q(\nabla_X Q)Y + (\nabla_{QX}Q)Y = Q(\nabla_{QY}Q)X + (\nabla_{QY}Q)X$$

dir. $N_P(X,Y) - N_Q(X,Y) = N_F(X,Y)$ olduğundan dolayı $\nabla F = 0$ olması demek

$$(\nabla_{FX}F)Y + (F(\nabla_Y F))X = (\nabla_{FY}F)X + (F(\nabla_X F))Y$$

dir N_P ve N_Q sıfıra eşit olduğundan $N_F = 0$ olarak bulunur. Buradan da ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.2. *M_m üzerinde tanımlı F hemen hemen çarpım yapısı ve lineer konneksiyon ∇ olsun. Eğer $\nabla F = 0$ ise ∇ ya M_m nin bir hemen hemen çarpım konneksiyonu denir [9].*

Önerme 4.1.5. *Her hemen hemen çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım konneksiyonu vardır [9].*

İspat: M_m üzerinde keyfi bir konneksiyon $\bar{\nabla}$ olsun. M_m üzerinde $(1,2)$-tipli bir tensör alanı

$$S(X,Y) = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\bar{\nabla}_{FY}F\right)X + F\left(\bar{\nabla}_{Y}F\right)X - F\left(\left(\bar{\nabla}_{X}F\right)Y\right)\right\}$$

olarak verilsin. Bu yüzden M_m üzerinde $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - S(X,Y)$ direkt bir hesaplama ile

$$\left(\bar{\nabla}_X F\right)F = -F\left(\bar{\nabla}_X F\right)$$

elde edilir. Ayrıca M_m üzerinde $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - S(X,Y)$ şeklinde tanımlanan $\bar{\nabla}$ konneksiyonu bir hemen hemen çarpım konneksiyondur [9].

M_m üzerinde bir simetrik lineer konneksiyon ∇ olsun. Buna göre her $X,Y \in T_0^1(M_m)$ için

$$\begin{aligned}
N_P(X,Y) &= (\nabla_{PX}P)Y - (\nabla_{PY}P)X - (P(\nabla_X P))Y + (P(\nabla_Y P))X, \\
N_Q(X,Y) &= (\nabla_{QX}Q)Y - (\nabla_{QY}Q)X - (Q(\nabla_X Q))Y + (Q(\nabla_Y Q))X, \qquad (4.1.2)\\
N_F(X,Y) &= (\nabla_{FX}F)Y - (\nabla_{FY}F)X - (F(\nabla_X F))Y + (F(\nabla_Y F))X
\end{aligned}$$

olup (4.1.2) den ispatı kolaylıkla $N_F(X,Y)$ nin bir lineer konneksiyon ile yazılışı kolaylıkla görülebilir.

4.2 Hemen Hemen Kompleks Yapılar ve Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Tanım 4.2.1. *M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerinde J, $(1,1)-$ tipli bir tensör alanı olmak üzere $J^2 = -I$ olacak şeklide bir J tensör alanı varsa M_{2n} ye bir hemen hemen kompleks yapı ve (M_{2n},J) ikilisine hemen hemen kompleks manifold denir [9].*

M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J olsun. $x \in M_{2n}$ için $T_x(M_{2n})$ tanjant uzayının bir $J_x : T_x(M_{2n}) \to T_x(M_{2n})$ endomorfizmi için $J_x^2 = -I$ olur. Bu yüzdendir ki $T_x(M_{2n})$ bir kompleks vektör uzayı tarafından kompleks sayıların skalar çarpımı ile tanımlanan kompleks vektör uzayının dönüşümü elde edilir, yani her $X \in T_x(M_{2n})$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$\left(a + \sqrt{-1}b\right)X = aX + b(JX), \; (J^2 = -I \text{ olduğundan})$$

dir. Ayrıca $T_x(M_{2n})$ uzayının reel boyutu $2n$ dir. Yani $2n-$ boyutlu her hemen hemen kompleks manifoldu M_{2n} dir.

$T_x(M_{2n})$ kompleks vektör uzayının bir bazı $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ olsun. Eğer $T_x(M_{2n})$ reel vektör uzayının bir bazı $\{X_1, X_2, ..., X_n, JX_1, JX_2, ..., JX_n\}$ olur. Aslında lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi $\{X_1, X_2, ..., X_n, JX_1, JX_2, ..., JX_n\}$ ise

$$\sum_i \left(a^i X_i + b^i (JX_i)\right) = 0,$$

olup buradan aslında $1 \leq i \leq n$ için $a^i + \sqrt{-1}b^i = a^i + b^i(J) = 0$ olduğu görülür, yani

$$0 = \sum_i \left(a^i X_i + b^i (JX_i)\right) = \sum_i \left(a^i + \sqrt{-1}b^i\right) X_i \text{ (Burada } X^i \text{ ler lineer bağımsız vektörlerdir)}$$

dir. Bu yüzden, $1 \leq i \leq n$ için $a^i = b^i = 0$ dir. Ayrıca $X \in T_x(M_{2n})$ ise

$$X = \sum_i \left(a^i + \sqrt{-1}b^i\right) X_i = \sum_i a^i X^i + \sum_i b^i (JX_i)$$

olur. Buradan da $\{X_i, JX_i\}$, $T_x(M_{2n})$ uzayını gerer. Bu baz x de bir adapte (veya kompleks) çatı olarak adlandırılır. ,

$\{X_i, JX_i\}$ ve $\{\acute{X}_i, J\acute{X}_i\}$ iki baz olsun. Ayrıca

$$\acute{X}_i = \left(A_i^j + \sqrt{-1}B_i^j\right) X_j = A_i^j X_j + B_i^j (JX_j),$$

ve sonuç olarak ifadenin her iki yanını soldan J ile çarparsak

$$J\acute{X}_i = A_i^j (JX_j) + B_i^j (J^2 X_j) = -B_i^j X_j + A_i^j (JX_j) \text{ } (J^2 = -I \text{ olduğundan})$$

ulaşılır ve burada A ve B $(n \times n)$ $-$tipindeki matrislerdir. Bu yüzden $(2n \times 2n)$ $-$tipindeki matrisi ile bağlantılı iki kompleks çatı matrisi

$$\alpha = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = [\acute{X}_i; J\acute{X}_i]$$

olup $\alpha \in Gl(2n, \mathbb{R})$ dir.

$Gl(2n, \mathbb{R})$ nin kapalı bir alt grubu G , $Gl(2n, \mathbb{R})$ nin bir Lie alt grubu da G ve G de bazı matrislerin kümesi G olsun. $Gl(n, \mathbb{C})$ kompleks genel lineer grup ise

$$\rho : Gl(n, \mathbb{C}) \to Gl(2n, \mathbb{R})$$

tarafından $Gl(2n, \mathbb{R})$ nin içinde $Gl(n, \mathbb{C})$ genel bir gösterimi olup yani

$$\alpha = A + \sqrt{-1}B \to \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten de ρ bir Lie grup monomorfizmasıdır. Bu yüzden $\rho\left(Gl\left(n,\mathbb{C}\right)\right) = G$ ile ifade edilmektedir. Bir kompleks çatı ile J hemen hemen kompleks yapısı ile ifade edilen matrıs

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup I_n, $(n \times n)-$tipindeki birim(özdeşlik) matrisidir. $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)$ ifadesinin ispatı kolaylıkla görülür, burada J_0 matrisinin invaryant grubunu $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)$ ile gösterirsek yani

$$Gl\left(n,\mathbb{C}\right) = \left\{\alpha \in Gl\left(2n,\mathbb{R}\right) \mid \alpha J_0 = J_0\alpha \right\}$$

olarak yazılır.

$CM_{2n} = \{M_{2n}$ nin tüm noktalarındaki kompleks çatıları$\}$ kümesi tanımlansın. Ayrıca şunları not edelim CM_{2n}, M_{2n} üzerinde bir $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)$ yapısıdır, diğer taraftan TM_{2n} olan tanjant demeti rankı n olan bir kompleks vektör demetidir. Her bir $x \in M_{2n}$ için x in bir U komşuluğu üzerinde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n-tane lokal vektör alanları vardır öyleki her bir $y \in U$ için bir kompleks vektör uzayı $T_y\left(M_{2n}\right)$ için bir baz $\left\{X_1\left(y\right), X_2\left(y\right), \ldots, X_n\left(y\right)\right\}$ dır. Ayrıca U üzerinde FM_{2n} nin bir lokal kesiti σ yı tanımlayabiliriz, yani

$$\sigma\left(y\right) = \left(X_1\left(y\right), X_2\left(y\right), \ldots, X_n\left(y\right)\right)$$

ve $\sigma\left(U\right) \subset CM_{2n}$ dir. Bu yüzden CM_{2n}, M_{2n} üzerinde bir $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)$-yapısıdır.

Tersine M_{2n} üzerinde bir $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)-$yapısı B olsun. M_{2n} üzerinde $(1,1)-$tipli bir tensör alanı tanımlanırsa, yani $x \in M_{2n}$, $p \in CM_{2n}$ ve $X \in T_x\left(M_{2n}\right)$ için

$$J_x\left(X\right) = p\left(J_0\left(p^{-1}\left(X\right)\right)\right)$$

dönüşümü x de bir lineer çatıdır. Buradan $J_x^2 = -I$ ve burada J_x, p nin seçiminden bağımsızdır. Bu yüzden de J, M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı olarak tanımlanır.

Önerme 4.2.1. *M_{2n} üzerinde bir $Gl\left(n,\mathbb{C}\right)$-yapısı aslında bir hemen hemen bir kompleks yapısıdır [9].*

Tanım 4.2.2. *M bir topolojik uzay ve M nin bir U açık komşuluğundaki bir alt kümesinde C^n nin bir homeomorfizmi var olsun. M nin bir açık kümesi U ve ϕ de C^n nin $\phi\left(U\right)$ açık kümesinde bir homeomorfizm ise her $\left(U,\phi\right)$ çifti $x \in U$ da $\phi\left(x\right) \in C^n$ nin $z^1\left(x\right), z^2\left(x\right), \ldots, z^n\left(x\right)$,$n-$kompleks koordinatlarına bağlı olarak bir koordinat komşuluğu olarak adlandırılır.$\left(U,\phi\right)$ ve $\left(V,\psi\right)$ iki koordinat komşulukları için $\phi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \phi^{-1}$ dönüşümlerinde holomorfik iseler $\left(U,\phi\right)$ ve $\left(V,\psi\right)$ koordinat komşulukları ile bağdaşabilirdir. M de bir kompleks yapısı M nin bir $U = \left\{\left(U_\alpha,\phi_\alpha\right)\right\}$ koordinat komşuluklarının aşağıdaki durumlar söz konusu ise*

1. M ,U_α yı kaplar,

2. Her bir α,β için (U_α,ϕ_α) ve $\left(U_\beta,\phi_\beta\right)$ komşulukları bağdaşabilir,

3. U maksimaldir,

M bir kompleks yapı ailesi içindedir [9].

M kompleks bir yapıya sahip, $n-$kompleks boyutlu bir kompleks manifold olarak adlandırılır. M, $n-$ kompleks boyutlu bir kompleks manifold olsun. Yani M aslında bir $2n-$ reel boyutlu bir $C^\infty-$ manifolddur. Gerçekten M nin her bir U koordinat komşuluğu $x^1,x^2,...,x^n,y^1,y^2,...,y^n$ için reel koordinatları ile $z^1,z^2,...,z^n$ kompleks koordinatları tarafından

$$z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i,\ \ 1 \le i \le n$$

ifade edilir.

Önerme 4.2.2. *Her kompleks manifold aynı zamanda bir hemen hemen kompleks yapıdır [9].*

U üzerinde bir kompleks lokal koordinat sistem $\left(z^1,...,z^n\right)$ olsun. Her $x \in U$ için

$$J_x : T_xM \to T_xM$$

ve

$$J_x\left(\partial/\partial x^i\right) = \partial/\partial y^i$$
$$J_x\left(\partial/\partial y^i\right) = -\left(\partial/\partial x^i\right)$$

bir endomorfizmi tanımlanır. J nin tanımı kompleks lokal koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır. V komşuluğu üzerinde diğer kompleks lokal koordinat sistemi $\left(w^1,w^2,...,w^n\right)$ ise $U \cap V \neq \varnothing$ ve

$$w^i = u^i + \sqrt{-1}v^i,\ 1 \le i \le n$$

şeklinde tanımlanan $w^i = w^i\left(z^j\right)$ koordinatların değişimi bir holomorfik fonksiyondur. Bu yüzden Cauchy-Riemann şartları

$$\left(\partial u^k/\partial x^i\right) = \left(\partial v^k/\partial y^i\right) \tag{4.2.1}$$
$$\left(\partial u^k/\partial y^i\right) = -\left(\partial v^k/\partial x^i\right)$$

sağlanmaktadır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \partial/\partial x^i &= \left(\partial u^k/\partial x^i\right)\left(\partial/\partial u^k\right) + \left(\partial v^k/\partial x^i\right)\left(\partial/\partial v^k\right) \\ \partial/\partial y^i &= \left(\partial u^k/\partial y^i\right)\left(\partial/\partial u^k\right) + \left(\partial v^k/\partial x^i\right)\left(\partial/\partial v^k\right) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dir. $x \in U \cap V$ için $\acute{J}_x : T_xM \to T_xM$ şeklinde tanımlanan ve (4.2.2) den

$$\begin{aligned} \acute{J}_x\left(\partial/\partial u^i\right) &= \left(\partial u^k/\partial x^i\right)\acute{J}_x\left(\partial/\partial u^k\right) + \left(\partial v^k/\partial x^i\right)\acute{J}_x\left(\partial/\partial v^k\right) \\ &= \left(\partial u^k/\partial x^i\right)\left(\partial/\partial v^k\right) - \left(\partial v^k/\partial x^i\right)\left(\partial/\partial u^k\right) \\ &= \left(\partial u^k/\partial y^i\right)\left(\partial/\partial v^k\right) + \left(\partial v^k/\partial y^i\right)\left(\partial/\partial v^k\right) \\ &\text{(4.2.1 den)} \\ &= \partial/\partial y^i \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\acute{J}_x\left(\partial/\partial y^i\right) = -\left(\partial/\partial x^i\right)$$

olduğu görülmektedir. Bu yüzdendir ki $\acute{J}_x = J_x$ dir.

Şimdi bir hemen hemen kompleks yapının integrallenebilmesinin bir karakterizasyonu gösterilecektir.

Tanım 4.2.3. *M_{2n},$2n-$ boyutlu manifold üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J olmak üzere $Gl(n,\mathbb{C})-$ yapısı integrallenebilir ise J hemen hemen kompleks yapısı da integrallenebilirdir [9],.*

Yani, her bir $x \in M_{2n}$ için J integrallenebilir ise $T(M_{2n})$ de bir $\left(x^1,x^2,...,x^n,y^1,y^2,...,y^n\right)$ lokal koordinat sistemi mevcuttur öyleki, $1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} J\left(\partial/\partial x^i\right) &= \partial/\partial y^i \\ J\left(\partial/\partial y^i\right) &= -\left(\partial/\partial x^i\right) \end{aligned}$$

dir. Gerçekten de CM_{2n} deki değerlerin FM_{2n} nin bir lokal kesitinin

$$\sigma : y \to \left(\left(\partial/\partial x^i\right)_v, \left(\partial/\partial y^i\right)_v\right)$$

olmasıdır. J integrallenebilirse M_{2n} de bir kompleks manifold olduğunda kompleks lokal koordinatlar olarak $1 \leq i \leq n$ için

$$z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$$

olması yeterli olacaktır. Bu yüzden J integrallenebilir hemen hemen kompleks yapısı aslında bir kompleks yapıdır. $C^n = \mathbb{R}^{2n}$ üzerindeki kanonik kompleks yapısı J_0 tarafından belirtilen hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart J_0 ın da lokal olarak izomorfik olan $Gl(n,\mathbb{C})$-yapısına karşılık gelir.

Tanım 4.2.4 (Kanonik kompleks yapısı). $J_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *dönüşümü verilsin. Eğer*

$$J_0\left(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n\right) = \left(y^1,...,y^n,-x^1,...,-x^n\right)$$

ifadesi varsa bu ifade $\mathbb{R}^{2n}$ *de bir kompleks yapısı olur. Bu kompleks yapıya* $\mathbb{R}^{2n}$ *de bir kanonik kompleks yapısı denir [4].*

Tanım 4.2.5. *M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde $(1,2)-$ tipli J nin N_J Nijenhuis tensörü her $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]$$

şeklinde tanımlanır [9].

Ayrıca J nin integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartın N_J Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olmasıdır.

4.2.1 Hemen Hemen Kompleks Konneksiyonlar

Tanım 4.2.6. *M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J ve M_{2n} üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere $\nabla J = 0$ olması durumunda ∇ ya M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks konneksiyon denir [9].*

Lemma 4.2.1. *M_{2n} üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. Her $X,Y \in T_0^1(M_{2n})$ için*

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X - (\nabla_X J)Y) \tag{4.2.3}$$

dir [9].

İspat: ∇ simetrik olduğundan

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

yazılabilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y] \\
&= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX)) \\
&\quad -J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \nabla_{JX}(JY) - J(\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}(JX) - J(\nabla_{JY}X)) + J(\nabla_Y(JX)) \\
&\quad +\nabla_Y X - J(\nabla_X(JY)) - \nabla_X Y \\
&= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X) - J((\nabla_X J)Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir [9].

Önerme 4.2.3. *$\bar{M}_{2n}$ üzerinde bir lineer konneksiyon $\bar{\nabla}$ vardır öyleki $\bar{M}_{2n}$ manifoldu üzerindeki $\bar{T}$ torsiyon tensörü olmak üzere*

$$\bar{T} = \left(\frac{1}{4}\right) N_J$$

burada N_J, J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis torsiyon tensörüdür [9].

İspat: M_{2n} üzerinde keyfi bir lineer konneksiyon ∇ olsun. $X,Y \in T_0^1(M_{2n})$ için bir Q, $(1,2)$-tipli tensör alanı tanımlanabilir, yani

$$Q(X,Y) = \left(\frac{1}{4}\right)\{(\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_Y J)X + 2J((\nabla_X J)Y)\}$$

dir. Bu yüzden $\hat{\nabla}$ lineer konneksiyonunu

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - Q(X,Y)$$

ile tanımlanır ve buradan ilk olarak $\hat{\nabla}$ konneksiyonunun bir hemen hemen kompleks konneksiyon olduğunu gösterilecektir. Bunun için

$$
\begin{aligned}
Q(X,JY) &= \left(\frac{1}{4}\right)\{-(\nabla_Y J)X + J((\nabla_{JY}J)X) + 2J((\nabla_X J)(JY))\}, \\
J(Q(X,Y)) &= \left(\frac{1}{4}\right)\{J(\nabla_{JY}J)X - (\nabla_Y J)X + 2(\nabla_X J)Y\}
\end{aligned}
$$

bağıntıları kullanılarak ve diğer taraftan

$$(\nabla_X J)J = -J(\nabla_X J)$$

şartı sağlandığından

$$J((\nabla_X J)(JY)) = -(\nabla_X J)\left(J^2 Y\right) = (\nabla_X J)Y$$

dir. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
Q(X,JY)-J(Q(X,Y)) &= \left(\frac{1}{2}\right)J\left(\left(\nabla_X J\right)(JY)\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\nabla_X J\right)Y \\
&= \left(\nabla_X J\right)Y
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
\hat{\nabla}_X(JY) &= \nabla_X(JY)-Q(X,JY) \\
&= (\nabla_X J)Y+J(\nabla_X Y)-Q(X,JY) \\
&= (\nabla_X J)Y+J(\nabla_X Y)-JQ(X,Y)-(\nabla_X J)Y \\
&= J(\nabla_X Y)-JQ(X,Y) \\
&= J((\nabla_X Y)-Q(X,Y)) \\
& J\left(\hat{\nabla}_X Y\right)
\end{aligned}
$$

ve $\hat{\nabla}J=0$ olacaktır.

$\hat{\nabla}$ nin torsiyonu $\hat{T}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(X,Y) &= \hat{\nabla}_X Y-\hat{\nabla}_Y X-[X,Y] \\
&= \nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]-Q(X,Y)+Q(Y,X) \\
&= -Q(X,Y)+Q(Y,X)
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$
T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0
$$

dır. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(X,Y) &= -Q(X,Y)+Q(Y,X) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\{-(\nabla_{JY}J)X-J((\nabla_X J)Y)-2J((\nabla_X J)Y)+(\nabla_X J)Y \\
&+J((\nabla_X J)Y)+2J((\nabla_Y J)X)\} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\{(\nabla_{JX}J)Y-(\nabla_{JY}J)X+J((\nabla_Y J)X-(\nabla_X J)Y)\} \\
&= 4N_J(X,Y)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur [9].

Sonuç 4.2.1. *M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J integrallenebilirdir gerek ve yeter koşul M_{2n} nin bir simetrik hemen hemen kompleks lineer konneksiyon olmasıdır [9].*

İspat: Eğer J integrallenebilir ise yukarıdaki önermeden $\hat{\nabla}$ konneksiyonunun $\hat{T}$ torsiyon tensörü sıfır olacaktır. Tersine M_{2n} üzerinde bir ∇ simetrik hemen hemen kompleks lineer konneksiyon var olduğunu kabul edelim. $\nabla J = 0$ olduğundan $Q = 0$ olacaktır. Bu yüzden $\hat{\nabla} = \nabla$ ve $N_J = 4\hat{T} = 0$ olup ayrıca M_{2n} üzerinde bir simetrik hemen hemen kompleks lineer konneksiyon vardır [9].

Önerme 4.2.4. *M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J ve ∇ da M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks konneksiyon olsun. Bu durumda M_{2n} nin eğrilik tensörü R ve torsiyon tensörü T olmak üzere*

1. $T(JX,JY) = -J(T(JX,Y)) - J(T(X,JY)) - T(X,Y) = -N_J(X,Y),$

2. $R(X,Y)J = JR(X,Y)$

şartları sağlanmaktadır [9].

İspat:

1.

$$\begin{aligned} T(JX,JY) &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - [JX,JY], \\ T(JX,Y) &= \nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX) - [JX,Y], \\ T(X,JY) &= \nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X - [X,JY] \\ T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

olacağından ve bu yüzden

$$\begin{aligned} & T(JX,JY) - J(T(JX,Y)) - J(T(X,JY)) - T(X,Y) \\ &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - [JX,JY] - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX) - [JX,Y]) \\ &- J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X - [X,JY]) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \\ &= \nabla_{JX}(JY) - J(\nabla_{JX}Y) - \nabla_{JY}(JX) + J(\nabla_{JY}X) + J(\nabla_Y(JX)) + \nabla_Y X \\ &- J(\nabla_X(JY)) - \nabla_X Y - [JX,JY] + J[JX,Y] + J[X,JY] + [X,Y] \\ &= \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X - (\nabla_Y J)(JX) - (\nabla_X J)(JY) - N_J(X,Y) \\ &= -N_J(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden de

$$\nabla J = 0$$

elde edilir.

2.

$$
\begin{aligned}
R(JX,JY,JZ) &= \nabla_{JX}\nabla_{JY}(JZ)-\nabla_{JY}\nabla_{JX}(JZ)-\nabla_{[JX,JY]}(JZ)\\
&= \nabla_{JX}J(\nabla_Y(JZ))-\nabla_{JY}J(\nabla_X(JZ))-[JX,JY](JZ)\\
&= J(\nabla_X J(\nabla_Y(JZ)))-J(\nabla_Y J(\nabla_X(JZ)))\\
&\quad -\{(\nabla_{JX}(JY)(JZ))-(\nabla_{JY}(JX)(JZ))\}\\
&= J(\nabla_X J(\nabla_Y(JZ)))-J(\nabla_Y J(\nabla_X(JZ)))\\
&\quad -J\nabla_X\left(J^2YZ\right)+J\left(\nabla_Y\left(J^2XZ\right)\right)\\
&\quad (J \text{ hemen hemen kompleks yapı}\\
&\quad \text{olduğundan dolayı } J^2=-I \text{ dir})\\
&= J(\nabla_X J(\nabla_Y(JZ)))-J(\nabla_Y J(\nabla_X(JZ)))+J(\nabla_X(YZ))-J(\nabla_Y(XZ))\\
&= J(\nabla_X J(\nabla_Y(JZ))-\nabla_Y J(\nabla_X(JZ))+\nabla_X(YZ)-\nabla_Y(XZ))\\
&= JR(JX,JY,JZ)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

4.2.2 Tanjant Demet Üzerindeki Hemen Hemen Kompleks Yapılar

M_{2n} bir hemen hemen kompleks manifold ve bu manifold üzerindeki tanjant demet $T(M_{2n})$ olmak üzere burada $T(M_{2n})$ üzerindeki tamamlayıcı ve yatay liftler üzerinde durulacaktır.

4.2.3 Tanjant Demet Üzerindeki Hemen Hemen Kompleks Yapıların Tamamlayıcı Liftleri

Tanım 4.2.7. *M_{2n} bir hemen hemen kompleks manifold ve J de bu manifold üzerindeki hemen hemen kompleks yapısı olsun. Buna göre M_{2n} üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısının $T(M_{2n})$ üzerindeki tamamlayıcı lifti J^c olacağından M_{2n} de her X vektör alanı için $J^cX^c = (JX)^c$ dir. Ayrıca $(J^c)^2 = -I$ olarak yazılır. Bu yüzden de J^c, $T(M_{2n})$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı olarak adlandırılır [9].*

Eğer J^c nin Nijenhuis tensörü N ise

$$
\begin{aligned}
N_{J^c}(X^c,Y^c) &= [J^cX^c,J^cY^c]-J^c[J^cX^c,Y^c]-J^c[X^c,J^cY^c]-[X^c,Y^c]\\
&= ([JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]-[X,Y])^c\\
&= (N_J(X,Y))^c
\end{aligned}
$$

olarak yazılır ve burada N_J, J nin Nijenhuis torsiyon tensörüdür. Ayrıca

$$N = (N_J)^c$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 4.2.5. *J^c integrallenebilirdir gerek ve yeter şart J nin integrallenebilmesidir [9].*

İspat: Burada J nin integrallenebilmnesi için gerek ve yeter şartın J nin Nijenhuis tensörü N_J nin sıfıra eşit olmasıdır. Burada ise J^c nin Nijenhuis tensörünün sıfır olduğunu gösterirsek ve $(J^c)^2 = -I$ olduğundan $N_{J^c}(X^c, Y^c) = 0$ dır. Yani bu ifadeyi gösterecek olursak

$$N_J(X,Y) = [JX, FY] - J[JX, Y] - F[X, JY] - [X, Y]$$

(4.2.3) deki lemma dan şu sonuca varmıştık.

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X - (\nabla_X J)Y)$$

ifadesi sıfıra eşitlenirse

$$N_J(X,Y) = 0$$
$$(\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X = J((\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)$$

elde edilir. Benzer olarak

$$N_{J^c}(X^c, Y^c) = 0$$

olduğunda

$$\left(\nabla_{(JX)^c}J^c\right)Y^c - \left(\nabla_{(JY)^c}J^c\right)X^c = J^c(\nabla_{X^c}J^c)Y^c - J^c(\nabla_{Y^c}J^c)X^c$$

olup yani

$$((\nabla_{JX}J))^c Y^c - (\nabla_{JY}J)^c X^c = (J(\nabla_X J)Y)^c - (J(\nabla_Y J)X)^c$$
$$N_{J^c}(X^c, Y^c) = (N_J(X,Y))^c$$

olarak elde edilir.

4.2.4 Tanjant Demet Üzerindeki Hemen Hemen Kompleks Yapıların Yatay Liftleri

Tanım 4.2.8. *M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M_{2n} üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ile $T(M_{2n})$ de J nin yatay lifti J^H olsun. $\hat{R}$,$\hat{\nabla}$ nin eğrilik tensörü ve $\hat{\nabla}$ de ∇ nın karşıt konneksiyonu olmak üzere*

$$\left(J^H\right)^2 = -I$$

olup ve J^H, $T(M_{2n})$ de bir hemen hemen kompleks yapısı olarak adlandırılır [9].

J^H ın Nijenhuis tensörü N olsun. Bu durumda direkt bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
&N(X^v, Y^v) = 0, \\
&N\left(X^v, Y^H\right) = \left(N_J(X,Y) - ((\nabla_{JX}J)Y + (\nabla_X J)(JY))\right)^v, \\
&N\left(X^H, Y^H\right) = (N_J(X,Y))^H - \gamma\left(\hat{R}(JX,JY) - J\hat{R}(JX,Y) - J\hat{R}(X,JY) - \hat{R}(X,Y)\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadeleri tek tek gösterecek olursak yani;

$$\begin{aligned}
N(X^v, Y^v) &= 0 \\
[J^H X^v, J^H Y^v] - J^H[J^H X^v, Y^v] - J^H[X^v, J^H Y^v] + \left(J^H\right)^2 [X^v, Y^v] &= 0 \\
[(JX)^v, (JY)^v] - J^H[(JX)^v, Y^v] - J^H[X^v, (JY)^v] - [X^v, Y^v] &= 0
\end{aligned}$$

olup burada $[X^v, Y^v] = 0$ olduğundan ve $(JX)^v = Z^v$, $(JY)^v = T^v$ olarak düşünülürse o zaman göstermek istediğimiz sonuca ulaşmış oluruz. Şimdi ikinci eşitliği gösterelim yani;

$$\begin{aligned}
N\left(X^v, Y^H\right) &= \left(N_J(X,Y) - ((\nabla_{JX}J)Y + (\nabla_X J)(JY))\right)^v \\
&= [J^H X^v, J^H Y^H] - J^H[J^H X^v, Y^H] - J^H[X^v, J^H Y^H] - [X^v, Y^H]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_Y X &= [X,Y] + \nabla_X Y \\
X^H &= X^c - \gamma(\nabla X)
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$
\begin{aligned}
&[J^H X^v, J^H Y^H] - J^H[J^H X^v, Y^H] - J^H[X^v, J^H Y^H] - [X^v, Y^H] \\
&= [(JX)^v, (JY)^H] - J^H[(JX)^v, Y^c - \gamma(\nabla Y)] - J^H[X^v, (JY)^H] - [X^v, Y^c - \gamma(\nabla Y)] \\
&= [Z^v, T^c - \gamma(\nabla T)] - J^H[Z^v, Y^c - \gamma(\nabla Y)] - J^H[X^v, T^c - \gamma(\nabla T)] - [X^v, Y^c - \gamma(\nabla Y)] \\
&= [Z^v, T^c] - [Z^v, \gamma(\nabla T)] - J^H\left([Z^v, Y^c] - [Z^v, \gamma(\nabla Y)]\right) - J^H\left([X^v, T^c] - [X^v, \gamma(\nabla T)]\right) \\
&- [X^v, Y^c] + [X^v, \gamma(\nabla Y)] \\
&= [Z,T]^v - (\nabla_Z T)^v - J^H\left([Z,Y]^v - (\nabla_Z Y)^v\right) - J^H\left([X,T]^v - (\nabla_X T)^v\right) - [X,Y]^v + (\nabla_X Y)^v \\
&= [Z,T]^v - (\nabla_Z T)^v - J^H[Z,Y]^v + J^H(\nabla_Z Y)^v - J^H[X,T]^v + J^H(\nabla_X T)^v - [X,Y]^v + (\nabla_X Y)^v \\
&= [JX,JY]^v - (\nabla_{JX}(JY))^v - J^H[JX,Y]^v + J^H(\nabla_{JX} Y)^v - J^H[X,JY]^v + J^H(\nabla_X(JY))^v \\
&- [X,Y]^v + (\nabla_X Y)^v \\
&= \left(N_J(X,Y) - ((\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_X J)(JY))\right)^v
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. üçüncü eşitliği göstermek istersek yani

$$
N\left(X^H, Y^H\right) = (N_J(X,Y))^H - \gamma\left(\hat{R}(JX,JY) - J\hat{R}(JX,Y) - J\hat{R}(X,JY) - \hat{R}(X,Y)\right)
$$

dir. Bu ifadeyi göstermek için 3.bölümde yer alan bir vektör alanının yatay lifti ve Lie braketinden yola çıkarak işleme başlayacağız. Bunun için şunları not edelim

$$
\begin{aligned}
[X^H, Y^H] &= [X,Y]^H - \gamma\hat{R}(X,Y), \\
X^H = \left(\hat{\nabla}_X\right)^c, &Y^H = \left(\hat{\nabla}_Y\right)^c.
\end{aligned}
$$

Şimdi göstermek istediğimiz ifadeyi yazarsak

$$
\begin{aligned}
N\left(X^H, Y^H\right) &= [J^H X^H, J^H Y^H] - J^H[J^H X^H, Y^H] - J^H[X^H, J^H Y^H] - [X^H, Y^H] \\
&= [(JX)^H, (JY)^H] - J^H[(JX)^H, Y^H] - J^H[X^H, (JY)^H] - [X^H, Y^H] \\
&= [JX,JY]^H - \gamma\hat{R}(JX,JY) - J^H\left([JX,Y]^H - \gamma\hat{R}(JX,Y)\right) \\
&- J^H\left([X,JY]^H - \gamma\hat{R}(X,JY)\right) - \left([X,Y]^H - \gamma\hat{R}(X,Y)\right) \\
&= [JX,JY]^H - J^H[JX,Y]^H - J^H[X,JY]^H - [X,Y]^H \\
&- \gamma\left(\hat{R}(JX,JY) + J^H\hat{R}(JX,Y) + J^H\hat{R}(X,JY) + \hat{R}(X,Y)\right) \\
&= (N_J(X,Y))^H - \gamma\left(\hat{R}(JX,JY) + J\hat{R}(JX,Y) + J\hat{R}(X,JY) + \hat{R}(X,Y)\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Önerme 4.2.6. *J^H integrallenebilir ise J integrallenebilirdir. Tersine ,∇ bir hemen hemen kompleks konneksiyon olduğunu kabul edelim (yani $\nabla J = 0$), bu yüzden J integrallenebilir ve $\hat{\nabla}$ sıfir eğrilik ise J^H integrallenebilirdir. Ayrıca, M_{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J ve ∇ da bir simetrik hemen hemen kompleks konneksiyon olsun, bu yüzden ∇ sıfir eğrilik ise J^H integrallenebilirdir [9].*

4.2.5 Bir Riemann Manifoldunun Tanjant Demeti Üzerindeki Hemen Hemen Kompleks Yapısı

Tanım 4.2.9. *M bir diferensiyellenebilir manifold ile M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. T ve R, ∇ nın sırasıyla torsiyon ve eğrilik tensörleri olsun. ∇ nın zıt (karşıt) konneksiyonu $\hat{\nabla}$ olmak üzere $\hat{R}$ eğrilik tensörü $\hat{\nabla}$ konneksiyonu ile tanımlansın. M üzerinde herhangi bir X vektör alanı için TM de $(1,1)-$ tipli bir tensör alanı J olmak üzere*

$$\begin{aligned} JX^H &= -X^v \\ JX^v &= X^H \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

tanımlanır. (4.2.4) den $J^2 = -I$ ve J de TM üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısıdır. Ayrıca TM üzerinde bir adapte çatı

$$\begin{aligned} JD_i &= -V_i \\ JV_i &= D_i \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} - v^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ V_i &= \frac{\partial}{\partial v^i} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca J nin Nijenhuis tensörü N olmak üzere M üzerinde her bir X,Y vektör alanları için

$$\begin{aligned} N(X^v, Y^v) &= (T(X,Y))^H - \gamma\hat{R}(X,Y), \\ N\left(X^v, Y^H\right) &= (T(X,Y))^v + J\gamma\hat{R}(X,Y), \\ N\left(X^H, Y^H\right) &= (T(X,Y))^H - \gamma\hat{R}(X,Y) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olarak yazılır.

Önerme 4.2.7. *J integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $T = 0$ ve $R = 0$ dır [9].*

İspat: Kabul edelim ki J integrallenebilir olduğunu kabul edelim. (4.2.5) dan $T = 0$ ve $\hat{R} = 0$ olduğu görülmektedir. Bu yüzden $T = 0$, ∇ simetrik ve $\hat{\nabla} = \nabla$ dır. Ayrıca $\hat{R} = R$ dır. Tersine, kabul edelim ki $T = 0$ ve $R = 0$ olsun. Ayrıca $\hat{\nabla} = \nabla$ olduğundan $\hat{R} = R = 0$ olacaktır. Sonuç olarak, $N = 0$ olup J integrallenebilirdir [9].

(M, g) bir Riemann manifold ve ∇ da g tarafından tanımlı bir Riemann konneksiyon olduğunu düşünelim. ∇ sıfır torsiyon olduğundan ve (4.2.4) a göre J , ∇ tarafından iyi tanımlı olup (4.2.5) u

$$\begin{aligned} N_J\left(X^v, Y^v\right) &= \gamma\hat{R}(X, Y), \\ N_J\left(X^v, Y^H\right) &= F\gamma\hat{R}(X, Y), \\ N_J\left(X^H, Y^H\right) &= -\gamma\hat{R}(X, Y) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

şeklinde yazılır.

Önerme 4.2.8. *F integrallenebilirdir gerek ve yeter şart (M, g) flattır, ya da $R = 0$ dır [9].*

4.3 Kaehler Manifoldlar

Kaehler manifoldlarını tanımlamadan önce Hermityen yapı ve Hemen Hemen Hermityen Yapı kavramlarına değinilip daha sonra Kaehler yapı ve Kaehler manifold kavramına değinilmiştir.

Tanım 4.3.1. *M_{2n} bir hemen hemen kompleks manifold ve bu manifold üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı olsun. M_{2n} üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere her $X, Y \in T_0^1(M_{2n})$ için*

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise g dönüşümüne bir Hermityen metrik denir [9].

Tanım 4.3.2. *M_{2n} hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer g Hermityen metriği tanımlı ise M_{2n} ye hemen hemen Hermityen manifold denir. M_n bir kompleks manifold ve M_n üzerinde bir g Hermityen metriği tanımlı ise M_n ye Hermityen manifold denir [9].*

Her bir $x \in M_{2n}$ için $T_x(M_{2n})$ üzerinde bir g_x Hermit iç çarpımı tanımlanır ve bu tanımlanan iç çarpımda J_x bir kompleks vektör uzayının yapısı ve g de bir Riemann metriği olmak üzere

$$J_x : T_x(M_{2n}) \rightarrow T_x(M_{2n})$$

dönüşümü izometri olup her $X,Y \in T_x(M_{2n})$ için

$$g_x(J_xX,J_xY) = g_x(X,Y)$$

dir.

M_{2n} bir hemen hemen kompleks manifold ile bir Hermityen metrik tanımlı ise bir hemen hemen Hermityen manifold olarak adlandırılır. M_n bir kompleks manifold ise M_n bir Hermityen manifold olarak adlandırılır.

Önerme 4.3.1. *Her M_{2n} hemen hemen kompleks manifoldu bir Hermityen metriktir [9].*

İspat: M_{2n} üzerinde keyfi bir Riemann metrik h olsun. g bir Riemann metrik olacak şekilde bir

$$g(X,Y) = h(X,Y) + h(JX,JY)$$

ifadesi yazılabilir.

Aslında bir Riemann metriği üzerinde bir keyfi bir Riemann metriği alınarak burada Hermityen metriğinin toplamları şeklinde yazılabildiğinden dolayı

$$g(X,Y) = h(X,Y) + h(JX,JY)$$

(Burada h ,M_{2n} üzerinde keyfi bir Riemann metrik ve

$h(JX,JY) = h(X,Y)$ yazılabildiğinden dolayı)

$$g(X,Y) = 2h(X,Y)$$

olarak elde edilmiş olur [9].

M_{2n}, $2n-$ boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ile g Hermit metriği ve J bir hemen hemen kompleks yapısı olsun. Bu durumda (M_{2n},J,g) üçlüsü bir hemen hemen Hermityen yapısı olarak adlandırılır.

Lemma 4.3.1. *V bir $2n-$ boyutlu reel vektör uzayı ile J kompleks yapısı (bu da, J, V nin bir lineer endomorfizmi olduğu ve $J^2 = -I$) ve bir Hermit iç çarpımı $\langle , \rangle$ (yani, $X,Y \in V$ için $\langle JX,JY \rangle = \langle X,Y \rangle$ dir) olsun. Bu durumda V üzerinde $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$ bir ortonormal bazı vardır [9].*

İspat: *boyV* de tümevarım yöntemini kullanarak ulaşmak istediğimiz sonuca ulaşırız. X_1 bir birim vektör olsun. Bu durumda $\{X_1,JX_1\}$ ortonormaldir, yani;

$$\langle X_1,JX_1 \rangle = \left\langle JX_1,J^2X_1 \right\rangle = -\langle JX_1,X_1 \rangle = -\langle X_1,JX_1 \rangle$$
$$\langle JX_1,JX_1 \rangle = \langle X_1,X_1 \rangle = 1$$

dir.

$\{X_1, JX_1\}$ tarafından gerilen altuzay W ise W nın bir ortonormal tümleyeni $W^{\perp}$ vardır, öyleki $V = W \oplus W^{\perp}$ olarak yazılır. $W^{\perp}$ altuzayı J de bağımsızdır. Yani, $X \in W^{\perp}$ için

$$\langle X_1, JX \rangle = -\langle JX_1, X \rangle = 0,$$
$$\langle JX_1, JX \rangle = \langle X_1, X \rangle = 0$$

ve $JX \in W^{\perp}$ dir. $W^{\perp}$ de bir ortonormal bazı $\{X_2, ..., X_n, JX_2, ..., JX_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{X_1, X_2, ..., X_n, JX_1, JX_2, ..., JX_n\}$ bazı $W \oplus W^{\perp}$ içermektedir [9].

(M_{2n}, J, g) bir Hermityen yapısı olsun. Her bir $x \in M_{2n}$ Lemma tarafından $T_x(M_{2n})$ nin bir ortonormal bazı $\{X_1, X_2, ..., X_n, JX_1, JX_2, ..., JX_n\}$ vardır. Bu baz x de bir adapte çatı (veya üniter) olarak adlandırılır. x de iki üniter çatı $1 \leq i \leq n$ için $\{X_i, JX_i\}$ ve $\{\acute{X}_i, J\acute{X}_i\}$ olsun. $A, B \in Gl(n, \mathbb{R})$ için

$$\acute{X}_i = A_i^j X_j + B_i^j (JX_j),$$
$$J\acute{X}_i = -B_i^j X_j + A_i^j (JX_j)$$

şeklinde yazılır. $Gl(2n, \mathbb{R})$ nin altgrupları $Gl(n, \mathbb{C})$ ve $O(2n)$ olmak üzere $Gl(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$ matrisi

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $U(n) = Gl(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$ olup $O(2n)$ nin reel gösterimi (ρ tarafından) $Gl(n, \mathbb{C})$ nin elemanlarının $U(n)$ den meydana geldiği bilinmektedir.

$$UM = \{M \text{ nin tüm noktalarındaki üniter çatılar}\}$$

kümesi M üzerinde bir $U(n)-$ yapısıdır. Bir hemen hemen Hermityen yapısı benzer olarak bir $U(n)-$ yapısıdır. (M_{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermityen yapısı olsun. M_{2n} üzerinde her bir X, Y vektör alanları için

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

ile M_{2n} üzerinde bir Ω, $2-$ formu tanımlanır. Ω, $2-$ formuna (M_{2n}, J, g) nin bir Kaehler formu ya da aslı (esası) denir.

Önerme 4.3.2. *Ω ,J tarafindan invaryanttır, yani*

$$\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y)$$

dir [9].

İspat: Gerçekten

$$\Omega(JX,JY) = g\left(JX,J^2Y\right) = -g(JX,Y) = g(X,JY) = \Omega(X,Y)$$

dir [9].

Önerme 4.3.3. *M_{2n} üzerinde her bir X,Y ve Z vektör alanları için*

$$2g((\nabla_X J)Y,Z) = 3d\Omega(X,JY,JZ) - 3d\Omega(X,Y,Z) + g(N_J(Y,Z),JX)$$

dir [9].

İspat:

$$\begin{aligned} g((\nabla_X J)Y,Z) &= g(\nabla_X(JY),Z) - g(J(\nabla_X Y),Z) \\ &= g(\nabla_X(JY),Z) + g(\nabla_X Y,JZ) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,JZ) &= X_g(Y,JZ) + Yg(X,JZ) - (JZ)g(X,Y) + g([X,Y],JZ) \\ &\quad + g([JZ,X],Y) + g(X,[JZ,Y]), \\ 2g(\nabla_X(JY),Z) &= Xg(JY,Z) + (JY)g(X,Z) - Zg(X,JY) + g([X,JY],Z) \\ &\quad + g([Z,X],JY) + g(X,[Z,JY]), \\ 3d\Omega(X,Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) + Y\Omega(X,Z) + Z\Omega(X,Y) - \Omega([X,Y],Z) \\ &\quad - \Omega([Z,X],Y) - \Omega([Y,Z],X), \\ 3d\Omega(X,JY,JZ) &= X\Omega(JY,JZ) + (JY)\Omega(X,JZ) + (JZ)\Omega(X,JY) \\ &\quad - \Omega([X,JY],JZ) - \Omega([JZ,X],JY) - \Omega([JY,JZ],X), \end{aligned}$$

ve bu ifadeler yukarıdaki önermede yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$N_J(Y,Z) = [JY,JZ] - J[JY,Z] - J[Y,JZ] - [Y,Z]$$

ifadesi kullanılırsa önerme tamamen ispatlanmış olur [9].

Sonuç 4.3.1. *(M_{2n},J,g) bir hemen hemen Hermityen yapısı olsun. Bu yüzden aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

1. *g tarafından tanımlanan ∇ Riemann konneksiyonu bir hemen hemen kompleks konneksiyondur.*

2. $N_J = 0$ *ve* Ω *Kaehler formu kapalıdır, ya da* $d\Omega = 0$ *dır [9].*

İspat: $N_J = 0$ ve $d\Omega = 0$ ise yukarıdaki önermeden $\nabla J = 0$ olur. Tersine, kabul edelim ki $\nabla J = 0$ olsun. ∇ simetrik olduğundan dolayı J integrallenebilirdir. Ayrıca $\nabla J = 0$ ve $\nabla g = 0$ olduğundan $\nabla\Omega = 0$ dır ve dolayısıyla $d\Omega = 0$ olarak bulunur [9].

Sonuç 4.3.2. *M_n bir Hermityen manifold ise aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. ∇ *bir hemen hemen kompleks konneksiyondur.*

2. Ω *kapalıdır [9].*

İspat: Yukarıdaki sonucun direkt olarak sonucu olduğundan $N_J = 0$ dır [9].

Tanım 4.3.3. *Bir Ω Kaehler formu kapalı ise bir hemen hemen Hermityen manifold hemen hemen Kaehler olarak adlandırılır. Eğer, M_n Hermityen ise M_n bir Kaehler manifolddur.*

4.4 Hemen Hemen Tanjant Yapıların Yatay ve Tamamlayıcı Liftlerinin İntegrallenebilirliği

Burada M_{2n} üzerinde bir J hemen hemen tanjant yapısının N_J Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla integrallenebilirliğinden bahsedilmişti. Şimdi ise J ,$(1,1)-$ tipli tensör alanının yatay ve tamamlayıcı liftlerinin N_{J^H} ve N_{J^c} Nijenhuis torsiyon tensör yardımıyla inetgrallenebilirliğinden bahsedilecektir.

Tanım 4.4.1. *M_{2n} üzerinde bir hemen hemen tanjant yapısı J olsun. J, $(1,1)$-tipli tensör alanı olmak üzere M_{2n} üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ile TM_{2n} de J nin yatay lifti J^H olsun. $\hat{R}$, $\hat{\nabla}$ nin eğrilik tensörü ve $\hat{\nabla}$ da ∇ nın zıt (karşıt) konneksiyonu olmak üzere yani*

$$\hat{\nabla}_Y X = \nabla_X Y - [X,Y]$$

olup

$$\left(J^H\right)^2 = 0$$

dır ve J^H, TM_{2n} de bir hemen hemen tanjant yapısıdır.. J^H nın Nijenhuis tensörü N_{J^H} olmak üzere $X,Y \in M_{2n}$ için $X^v,Y^v,X^H,Y^H \in TM_{2n}$ için

$$N_{J^H}\left(X^v,Y^v\right) = 0$$
$$N_{J^H}\left(X^v,Y^H\right) = 0$$
$$N_{J^H}\left(X^H,Y^H\right) = 0$$

olarak yazılır. Yani bu ifadeleri açacak olursak

$$
\begin{aligned}
N_{J^H}(X^v,Y^v) &= [J^H X^v, J^H Y^v] - J^H[J^H X^v, Y^v] - J^H[X^v, J^H Y^v] \\
&= [(JX)^v,(JY)^v] - J^H[(JX)^v,Y^v] - J^H[X^v,(JY)^v] \\
&= [JX,JY]^v - J^H[JX,Y]^v - J^H[X,JY]^v \\
&= [JX,JY]^v - (J[JX,Y])^v - (J[X,JY])^v \\
&= ([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY])^v \\
&= (\nabla_{JX}(JY))^v - (\nabla_{JY}(JX))^v - J^v((\nabla_{JX}Y)^v - (\nabla_Y (JX)^v)) \\
&- J^v((\nabla_X(JY))^v - (\nabla_{JY}X)^v) \\
&= J^H \nabla_{X^v}\left(J^H Y^v\right) - J^H \nabla_{Y^v}\left(J^H X^v\right) - J^H \nabla_{J^H X^v} Y^v \\
&+ J^H \nabla_{Y^v}\left(J^H X^v\right) - J^H \nabla_{X^v}\left(J^H Y^v\right) + J^H \nabla_{J^H Y^v} X^v \\
&= J^H(-\nabla_{J^H X^v} Y^v + \nabla_{J^H Y^v} X^v) \\
&= J^H(J^H(-\nabla_{X^v} Y^v + \nabla_{Y^v} X^v)) \\
&= \left(J^H\right)^2(-\nabla_{X^v} Y^v + \nabla_{Y^v} X^v) \ \left(\left(J^H\right)^2 = 0 \text{ olduğundan}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
N_{J^H}\left(X^v,Y^H\right) &= [J^H X^v, J^H Y^H] - J^H[J^H X^v, Y^H] - J^H[X^v, J^H Y^H] \\
&= \nabla_{J^H X^v}\left(J^H Y^H\right) - \nabla_{J^H Y^H}\left(J^H X^v\right) - J^H\left(\nabla_{J^H X^v} Y^H - \nabla_{Y^H}\left(J^H X^v\right)\right) \\
&- J^H\left(\nabla_{X^v}\left(J^H Y^H\right) - \nabla_{J^H Y^H} X^v\right) \\
&= J^H \nabla_{J^H X^v} Y^H - J^H \nabla_{J^H Y^H} X^v - J^H \nabla_{J^H X^v} Y^H + J^H \nabla_{Y^H}\left(J^H X^v\right) \\
&- J^H \nabla_{X^v}\left(J^H Y^H\right) + J^H \nabla_{J^H Y^H} X^v \\
&= J^H \nabla_{J^H X^v} Y^H - J^H \nabla_{J^H Y^H} X^v - J^H \nabla_{J^H X^v} Y^H + \left(J^H\right)^2 \nabla_{Y^H} X^v \\
&- \left(J^H\right)^2 \nabla_{X^v} Y^H + J^H \nabla_{J^H Y^H} X^v \\
\left(\left(J^H\right)^2\right. &= 0 \text{ olduğundan dolayı}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan da en son maddeyi gösterirsek yani

$$\begin{aligned}
N_{J^H}\left(X^H,Y^H\right) &= [J^H X^H, J^H Y^H] - J^H[J^H X^H, Y^H] - J^H[X^H, J^H Y^H] \\
&= \nabla_{J^H X^H}\left(J^H Y^H\right) - \nabla_{J^H Y^H}\left(J^H X^H\right) - J^H\left(\nabla_{J^H X^H} Y^H - \nabla_{Y^H}\left(J^H X^H\right)\right) \\
&- J^H\left(\nabla_{X^H}\left(J^H Y^H\right) - \nabla_{J^H Y^H} X^H\right) \\
&= J^H \nabla_{J^H X^H} Y^H - J^H \nabla_{J^H X^H} X^H - J^H \nabla_{J^H X^H} Y^H + \left(J^H\right)^2 \nabla_{Y^H} X^H \\
&- \left(J^H\right)^2 \nabla_{X^H} Y^H + J^H \nabla_{J^H Y^H} X^H \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeden J^H nın integrallenebildiği gösterilmiştir. Yani bir hemen hemen tanjant yapının yatay liftinin Nijenhuis tensörü yardımıyla integrallenebildiği gösterilmiştir. Şimdi ise hemen hemen tanjant yapının tamamlayıcı liftinin Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla integrallenebildiği gösterilecektir.

Tanım 4.4.2. *M_{2n} bir hemen hemen tanjant manifold ve J de bu manifold üzerindeki hemen hemen tanjant yapısı olsun. Buna göre M_{2n} üzerindeki bir J hemen hemen tanjant yapısının TM_{2n} üzerindeki tamamlayıcı lifti J^c olacağından M_{2n} de her X vektör alanı için*

$$J^c X^c = (JX)^c$$

dir. Ayrıca

$$(J^c)^2 = 0$$

olacağından J^c, TM_{2n} üzerinde bir hemen hemen tanjant yapısı olarak adlandırılır.

Eğer J^c nin Nijenhuis tensörü N ise

$$\begin{aligned}
N_{J^c}(X^c,Y^c) &= [J^cX^c,J^cY^c]-J^c[J^cX^c,Y^c]-J^c[X^c,J^cY^c] \\
&= \nabla_{J^cX^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}(J^cX^c)-J^c(\nabla_{J^cX^c}Y^c-\nabla_{Y^c}(J^cX^c)) \\
&-J^c(\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}X^c) \\
&= J^c(\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{Y^c}(J^cX^c))-J^c(\nabla_{J^cX^c}Y^c-\nabla_{Y^c}(J^cX^c)) \\
&-J^c(\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}X^c) \\
&= \begin{array}{c} J^c[(\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{Y^c}(J^cX^c))-((\nabla_{J^cX^c}Y^c-\nabla_{Y^c}(J^cX^c)))] \\ -J^c[((\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}X^c)) \end{array} \\
&= \left[J\left(\begin{array}{c} \nabla_X(JY)-\nabla_Y(JX)-J(\nabla_{JX}Y-\nabla_Y(JX)) \\ -J(\nabla_X(JY)-\nabla_{JY}X) \end{array}\right)\right]^c \\
&= ([\nabla_{JX}JY-\nabla_{JY}JX]-J[JX,Y]-J[X,JY])^c \\
&= ([JX,JY]-[JX,Y]-[X,JY])^c \\
&= (N_J(X,Y))^c
\end{aligned}$$

olarak yazılır bu da aslında

$$N=(N_J)^c$$

olmasıdır. Burada N_J , J nin Nijenhuis tensörüdür.

Önerme 4.4.1. *J^c integrallenebilirdir gerek ve yeter şart J nin integrallenebilmesidir.*

İspat: J^c nin integrallenebildiğini göstermek için J^c nin N_{J^c} Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfıra eşit olması gerekmektedir. Yani her $X,Y\in M_{2n}$ ve $X^c,Y^c\in TM_{2n}$ için

$$N_{J^c}(X^c,Y^c)=0$$

olduğu gösterilirse J^c integrallenebilirdir. Bu ifadeyi genel anlamda yazarsak

$$\begin{aligned}
N_{J^c}(X^c,Y^c) &= [J^cX^c,J^cY^c]-J^c[J^cX^c,Y^c]-J^c[X^c,J^cY^c] \\
&= \nabla_{J^cX^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}(J^cX^c)-J^c(\nabla_{J^cX^c}Y^c-\nabla_{Y^c}(J^cX^c)) \\
&-J^c(\nabla_{X^c}(J^cY^c)-\nabla_{J^cY^c}X^c) \\
&= J^c\nabla_{J^cX^c}Y^c-J^c\nabla_{J^cY^c}X^c-J^c\nabla_{J^cX^c}Y^c+(J^c)^2\nabla_{Y^c}X^c \\
&-(J^c)^2\nabla_{X^c}Y^c+J^c\nabla_{J^cY^c}X^c \\
((J^c)^2 &= 0 \text{ olduğundan}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da aslında J^c nin integrallenebilmesidir. Tersine J integrallenebilir olsun. Yani $N_J = 0$ olsun. Bu durumda $N_{J^c} = (N_J)^c$ olduğundan $N_J = 0$ dır. Bu durumda $N_{J^c} = 0$ olup J^c integrallenebilirdir.

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde bir hemen hemen tanjant yapısının integrallenebildiği ve bu integrallenebilmenin Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olması gerektiği gösterilip tanjant demet üzerindeki tensör alanlarının dikey, yatay ve tamamlayıcı liftleri belirtilip araştırma bulgusu olarak Tanjant demet üzerindeki bir hemen hemen tanjant yapının tamamlayıcı ve yatay liftinin Nijenhuis tensörü yardımıyla integrallenebilmesi ve bu Nijenhuis tensörünün ise $(1,1)-$ tipli tensör alanı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Ayrıca hemen hemen tanjant yapılar üzerindeki $(1,1)-$ tipli bir J tensör alanının tamamlayıcı ve yatay liftleri gösterilip, bu liftlerin Nijenhuis tensörü yardımıyla integrallenebildiği gösterilmiştir.

Ayrıca bu yüksek lisans tezi olarak sunduğum Hemen Hemen Tanjant Yapılar ve Tanjant Demetleri tezi optik ve dinamik alanında yeni çalışma alanları sunmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **KASAP, Z.** (2014). *Weyl Manifoldlar Üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton Hareket Denklemlerinin Analizi* (Doktora Tezi). On Sekiz Mart Üniversitesi, Çanakkale.

[2] **Aysel, T.V.** (1989). *Tanjant manifold üzerinde metrikler, konneksiyonlar ve eğriler* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi.

[3] **Gezer, A.** (2004). *Yatay Lift Teorisi* (Yüksek Lisans Tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[4] **KAYA, H.** (2006). *G-Yapılarının Tanjant Demete Taşınması* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi.

[5] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*.

[6] **Aslım, G.** (1988). *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi.

[7] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1993). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniv. Fen Fakültesi.

[8] **O'Neil, B.** (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, Inc., New York, 468 p.

[9] **de Leon, M. ve Rodrigues, P.** (1989). *Methods of Differential Geometry in Analytic Mechanics*, Elsevier Sc. Pub. Com., Inc.

[10] **Greub, W.**, **Halperin, S. ve Vanstone, R.** (1972). *Connection,Curvature and Cohomology*, cilt1-2, Academic Press, New York.

[11] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi.

[12] **Aycan, C.** (2003). *The Lifts of Euler-Lagrange and Hamiltion Equations on the Extended Jet Bundles* (Doktora Tezi). Osmangazi Üniv. ,Eskişehir.

[13] **Yano, K. ve Ishiara, S.** (1973). *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker, Inc.. New York.

[14] **Dağlı, S.** (2012). *Minkowski 4-Uzayında Jet Yapılar ve Mekanik Sistemler* (Yüksek Lisans Tezi). Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

[15] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963). *Foundations of Differential Geometry*, cilt 1, INTERSCIENCE PUBLISHERS.

[16] **Beri, A.** (2016). *Hemen Hemen Değme Manifoldlardan Riemann Manifoldlar Üzerine Riemann Submersiyonlar* (Yüksek Lisans Tezi). Uludağ Üniversitesi, Bursa.

[17] **Yano, K. ve Kon, M.** (1984). *Structure on Manifolds*, cilt 3, Springer.

[18] **Okubo, T.** (1987). *Differential Geometry 1*, Marcel Dekker, New York and Basel.

[19] **Steenrod, N.** (1951). *The Topology Of Fibre Bundles*, cilt 1, New Jersey.

[20] **Sternberg, S.** (1964). *Lectures On Differential Geometry*, cilt 1, Prentice Hall, İnc.Englewood Cliffs, New Jersey,228-231, 294-339.

[21] **Crampin, M. ve G.Thompson** (1984). Affine bundles and integrable almost tangent structures, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1985), 98, 61 61Printed in Great Britain*.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Mert EMEKSİZ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2018, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2022, İnönü Üniversitesi, Matematik, Geometri