T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beren Nazar KARATAŞ KILINÇ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sema KAZAN

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beren Nazar KARATAŞ KILINÇ
(36193614065)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sema KAZAN

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sema KAZAN’a,

Çalışmalarımda ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme, eşime ve çocuklarıma,

teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "İstatistiksel Manifoldlar Üzerine " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Beren Nazar KARATAŞ KILINÇ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbf{M}$	:	Manifold
$\mathbf{T_pM}$	:	p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(\mathbf{M})$	:	Vektör alanların kümesi
∇	:	Afin konneksiyon
∇^*	:	Dual konneksiyon
$\widehat{\nabla}$	:	Levi-Civita konneksiyonu
$\mathbf{R}$	:	Riemann eğrilik tensörü
$\mathbf{h}, \mathbf{h}^*$	:	Simetrik, 2-lineer fonksiyonlar
η	:	$1-$form
ϕ	:	$(1,1)-$tipli tensör alanı
ξ	:	Karekteristik vektör alanı
$\mathbf{g}$	:	Metrik tensör
σ	:	İstatistiksel submersiyon
$\mathbf{T}, \mathbf{A}$	:	O'Neill tensörleri
$\mathscr{H}$	:	Yatay vektör alanları uzayı
$\mathscr{V}$	:	Dikey vektör alanları uzayı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR ÜZERİNE

BEREN NAZAR KARATAŞ KILINÇ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

59+vi sayfa

2022

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sema KAZAN

Dört bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümü literatür taraması için girişe ayrılmıştır.

İkinci bölüm diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlardan oluşmaktadır ki bu bölüm Riemann manifoldları ve Riemann submersiyonları adı altında iki alt başlıktan ibarettir. Riemann submersiyonlarında O'Neill tarafından tanımlanan tensörler tanıtılmış, bu tensörlerin özellikleri, geometrik anlamları ve kovaryant türevleri incelenmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölüm tezin ana kısmını oluşturmaktadır:

Üçüncü bölümde istatistiksel manifoldlar tanıtılmış, eğrilikleri ve özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde ise istatistiksel submersiyonlar ve kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonlar verildikten sonra kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonların anti-invaryantlığı incelenmiş, örnekle desteklenmiş ve temel manifold üzerindeki distribüsyonların integrallenebilirlik ve tamamen geodeziklik durumları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yapı, Afin Konneksiyon, Eşlenik Konneksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

ON STATISTICAL MANIFOLDS

Beren Nazar KARATAŞ KILINÇ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

59+vi pages

2022

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sema KAZAN

The first chapter of this master's thesis, which consists of four chapters, has reserved for an introduction to literature review. The second chapter has some basic definitions and theorems for a better understanding of the other chapter, which consists of two subsections called Riemann manifolds and Riemann submersions.Tensors defined by O'Neill in Riemann submersions has been introduced. The properties, geometric meanings and covariant derivatives of these tensors have been studied.

The third and fourth chapters have constituted the main part of the thesis:

In the third chapter, statistical manifolds have introduced, their curvatures and properties have mentioned.

In the fourth chapter, after statistical submersions and cosimplectic-like statistical submersions have given, the anti-invariance of cosymplectic-like statistical submersions has examined, supported by an example, and integrability and totally geodesicness of the distributions on the total space have obtained.

Keywords: Statistical Structure, Affine Connection, Conjugate Connection.

1. GİRİŞ

İstatistiksel manifoldlar teorisi bilgi (enformasyon) geometri olarak isimlendirilir. Genellikle bir istatistiksel manifold üzerinde çeşitli geometrik yapıların çalışmasına bağlı bilgi geometrisi, olasılık distribüsyonlarının bir istatistiksel modelini barındıran geometrik yapıların bir çalışması olarak başlamıştır.

Son zamanlarda bilgi geometrisi, stokastik süreçler, kuantum sistemleri, sinir ağlarının matematiksel teorisi, dinamik sistemler ve zaman serileri gibi önemli uygulama alanlarına sahip olan istatistiksel manifoldlar teorisi (veya enformasyon geometrisi) fikri ilk olarak 1945 yılında C.R. Rao isimli bir bilim adamının yazmış olduğu bir makale ile ortaya atılmıştır [1]. Ardından bilgi geometrisinde istatistiksel manifoldların bazı uygulamaları pek çok çalışmada ele alındı. Örneğin, [2] de yazarlar, sonlu boyutlu Gauss istatistiksel manifoldların bilgi geometrisinin geçici asimptotik hareketlerinin bir analitik hesaplamasını verdiler. Yine [3] de yazar, bilgi geometrisinin elemanlarını kullanarak çalışmalarını sundular.

1985 yılında afin geometride dual (veya konjuge) konneksiyon kavramı tanımlanarak [4], bir Riemannian metrik ve dual afin konneksiyon yardımıyla istatistiksel manifold kavramı tanımlanmıştır. Buna göre $\mathcal{N}$, $(2n+1)$-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, g bir Riemannian metrik ve $\hat{\nabla}$ da g metriği ile uyumlu Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda, eğer ∇ torsiyonsuz ve $\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için Codazzi denklemi denilen

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z)$$

eşitliği sağlanıyorsa, (∇, g) çiftine $\mathcal{N}$ üzerinde bir istatistiksel yapı ve $(\mathcal{N}, \nabla, g)$ ye de bir istatistiksel manifold denir. $\mathcal{N}$ üzerinde bir istatistiksel yapı (∇, g) olmak üzere, ∇ nın g ye göre konjuge (eşlenik) veya dual konneksiyonu ∇^*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$$

eşitliği yardımıyla tanımlanır. Bir (∇, g) istatistiksel yapısı için, $(1,2)$-tipindeki K fark tensör alanı $\forall X,Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için

$$K(X,Y) = \nabla_X Y - \hat{\nabla} XY$$

şeklinde tanımlanır ve fark tensör alanı için $K(X,Y) = K(Y,X)$ ile $g(K(X,Y),Z) = g(Y,K(X,Z))$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca fark tensör alanı için

$$K = \hat{\nabla} - \nabla^* = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^*)$$

dır. Son yıllarda, pek çok manifold türleri üzerinde istatistiksel yapılar düşünülerek farklı çalışmalar yapılmaktadır. Örneğin, 2017 yılında Furuhata ve arkadaşları Sasakiyan istatistiksel manifold kavramını tanımlayarak bu manifold ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [5].

Ayrıca, istatistiksel manifoldlar dokuların renk ve parlaklığıyla ilgili olarak görüntü analizinde kullanılır. Dokuların görüntüleri çok terimli dağılımlar olarak kabul edilir ve aralarındaki uzaklık Riemann geometrisinde jeodezik uzaklığıyla hesaplanır. İstatistiksel manifold kavramı afin diferensiyel geometride eş afin immersiyon kavramıyla örtüşmektedir. Bu immersiyon tarafından tanımlanan eşlenik konneksiyon ve afin konneksiyon yardımıyla istatistiksel yapı kurulur. Bu yapının kurulmasıyla amaç gerçekleşmiş olur.

İstatistiksel manifoldlar ve bilgi geometrisi hakkında daha fazla bilgi almak için ilgili kaynaklara bakılabilir; [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Son zamanlarda pek çok yazar istatistiksel submersiyonları çalışmaya başladı. İstatistiksel manifoldlar arasında istatistiksel submaersiyon kavramı, 2001 de N. Abe ve K. Hasegawa tarafından sunuldu [22]. Burada yazarlar B. O'Neill tarafından verilen Riemann submersiyonları ve geodeziklerle ilgili bazı sonuçların genellemesini verdiler. Daha sonra, K. Takano 2004 te hemen hemen kompleks yapılı istatistiksel manifoldları ve onların submersiyonlarını çalıştı [23]. Ayrıca Takano, istatistiksel submersiyonların örneklerini [24] de verdi ve [25] de hemen hemen kontakt yapılı istatistiksel manifoldların istatistiksel submersiyonlarını takdim etti. İstatistiksel submersiyonlarla ilgili çalışmalarla ilgili kaynaklara bakılabilir; [26], [27], [28], [29].

Bu tezdeki amacımız, istatistiksel yapı kavramını göz önüne alarak istatistiksel manifoldları incelemek ve bu manifoldlar yardımıyla istatistiksel submersiyonları çalışmaktır.

Birinci bölümde, literatür taraması sonucu çalışmanın tarihsel geçmişinden bahsedilmektedir.

İkinci bölümde, tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinin anlaşılması için gerekli olan temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlardan çoğu ispatsız bir şekilde verilmekte fakat gerekli görülenler ispatıyla sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde, istatistiksel submersiyonlarda kullanacağımız istatistiksel manifoldlar incelenmekte ve bazı özellikler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, istatistiksel submersiyonlar tanıtılmaktadır. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, istatistiksel manifoldlardan yine istatistiksel manifoldlara giden istatistiksel submersiyon kavramı ayrıntılı olarak incelenmekte, O'Neill tensörleri dual konneksiyonlarla birlikte verilmektedir. İkinci alt bölümde, kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon kavramı tanıtılmakta ve belirli şartlar altında bazı özellikleri verilmektedir. Üçüncü alt bölümde, kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonların anti-invaryantlığı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ana kısmında gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldlarıve Metrik Konneksiyonlar

Tanım 2.1.1. *E^n de bir $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tV) - f(p)}{t} \quad , \quad V \in E^n$$

limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $s \in E^n$ noktasında ve V yönündeki türevi denir. Bu türev

$$V_s[f] = df(V_s) = \frac{d}{dt}(f(s+tV))|_{t=0}$$

şeklinde gösterilir [30].

Tanım 2.1.2. *$\mathcal{N}$ bir manifold ve $C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R}) = \{f | f : U \to \mathbb{R},\ f \in C^\infty(U)\}$ olsun. $s \in \mathcal{N}$ olmak üzere bir*

$$V_s : C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to V_s[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i|_s \frac{\partial f}{\partial s_i}|_s$$

dönüşümü için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, h \in C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R})$ olmak üzere

1. $V_s(\lambda f + \mu h) = \lambda V_s[f] + \mu V_s[h]$

2. $V_s(fh) = V_s[f]h(s) + f(s)V_s[h]$

şartlarını sağlayan V_s fonksiyonuna $\mathcal{N}$ nin $s \in \mathcal{N}$ deki tanjant vektörü denir [31].

$\mathcal{N}$ manifoldunun bir $s \in \mathcal{N}$ noktasındaki $T_s\mathcal{N} = \{V_s | V_s : C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\}$ tanjant vektörlerinin kümesine,

$$(+) : T_s\mathcal{N} \times T_s\mathcal{N} \to T_s\mathcal{N}$$
$$(V_s, W_s) \to V_s + W_s : C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(V_s + W_s)[f] = V_s[f] + W_s[f]$$

ve

$$(.) : \mathbb{R} \times T_s\mathcal{N} \to T_s\mathcal{N}$$
$$(\lambda, V_s) \to \lambda V_s : C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(\lambda V_s)[f] = \lambda V_s[f], \qquad \forall f \in C^\infty(\mathcal{N},\mathbb{R})$$

işlemleri dikkate alındığında reel sayılarkümesi üzerinde bir tanjant uzayı denir [31].

$V_q = (v_1, ...v_n)|_q \in T_q(E^n)$ verilsin. Bu durumda

$$V_q[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial s_i}|_q =< \nabla f|_q, V_q >$$

dir, burada $s_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonudur.

Tanım 2.1.3. *$\mathcal{N}$ bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall q \in \mathcal{N}$ noktasına $X_q \in T_q\mathcal{N}$ tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme vektör alanı denir. Tanjant demeti*

$$T\mathcal{N} = \bigcup_{q \in \mathcal{N}} T_q\mathcal{N}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$X : \mathcal{N} \to T\mathcal{N}$$

$$q \to X_q$$

dönüşümüne vektör alanı adı verilir. Buna göre bir q noktasındaki tanjant vektör

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \frac{\partial}{\partial s_i}|_q$$

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial s_i}$$

dir. Bu durumda $X : \chi(\mathcal{N}) \to \chi(\mathcal{N})$ bir dönüşümdür. $X(f)$ diferansiyellenebilir ise X vektör alanına da diferansiyellenebilirdir denir [31].

Tanım 2.1.4. *$\mathcal{N}$ bir Hausdorff uzay olsun. $\forall q \in \mathcal{N}$ için $\mathcal{N}$ de $E^n (n \geq 0)$ ye homeomorf olan bir V açık komşuluğu bulunabilirse $\mathcal{N}^n$ ye topolojik manifold denir [32].*

Tanım 2.1.5. *$\mathcal{N}^n$ topolojik manifold ve V, $\mathcal{N}$ nin bir açık alt kümesi olsun. Eğer V bir Ω homeomorfizmi ile E^n nin bir W alt kümesine eşlenebiliyorsa (V, Ω) ikilisine $\mathcal{N}$ de bir koordinat komşuluğu denir [32].*

$q \in V$ için $\Omega(q) = (s_1(q), ..., s_n(q))$ $s_i(q) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ dır. Buna göre $s_i : V \subset \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ i.koordinat fonksiyonu olmak üzere $s_i(q)$ reel sayısına $\Omega(q)$ noktasının i.koordinatı denir.

Koordinat fonksiyonları süreklidir, çünkü Ω fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Ayrıca $q, r \in V$ noktaları için $s_i(q) = s_i(r) \Rightarrow q = r$ durumu $\Omega(q)$ nin birebirliğinden söylenebilir. Bu demektir ki $q \in V$ noktasında $(s_1(q), ..., s_n(q))$ reel sayılarına $q \in V$ noktasının (V, Ω) koordinat komşuluğuna göre lokal koordinatları ve V üzerinde tanımlı olan $(s_1, ..., s_n)$ reel değerli fonksiyon n-lisine de (V, Ω) üzerindeki lokal koordinat sistemi denir [32].

Tanım 2.1.6. *$\mathcal{N}^n$ bir topolojik manifold ve $\mathcal{N}$ nin bir açık örtüsü $\{V_\alpha\}$ olsun. V_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi $\mathcal{U}$ olmak üzere $\{V_\alpha\}$ örtüsü için $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{U}}$ yazalım. E^n de V_α ya homeomorf olan bir açık küme E_α ve $\Omega_\alpha : V_\alpha \to E_\alpha$ olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(V_\alpha,\Omega_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{U}}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) denir [32].*

Tanım 2.1.7. *$\mathcal{N}^n$ bir manifold ve $S = \{(V_\alpha,\Omega_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{U}}$, $\mathcal{N}$ nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^r,$r \geq 1$ sınıfındandır denir. $V_\alpha \bigcap V_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha,\beta \in \mathcal{U}$ için*

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha o \Omega_\beta^{-1} : \Omega_\beta(V_\alpha \bigcap V_\beta) \to \Omega_\alpha(V_\alpha \bigcap V_\beta)$$
$$\Phi_{\beta\alpha} = \Omega_\beta o \Omega_\alpha^{-1} : \Omega_\alpha(V_\alpha \bigcap V_\beta) \to \Omega_\beta(V_\alpha \bigcap V_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası $\mathcal{N}$ üzerinde C^r sınıfından ise S ye C^r sınıfından bir diferansiyel yapı denir [32].

Tanım 2.1.8. *$\mathcal{N}^n$ bir topolojik manifold olsun. $\mathcal{N}$ nin C^r sınıfından atlası S ise $\mathcal{N}$ ye diferansiyellenebilir manifold denir [32].*

Tanım 2.1.9. *$\mathcal{N}^n$ bir manifold olsun. $T_s\mathcal{N}$ tanjant uzayının bir bazına $s \in \mathcal{N}$ noktasında bir çatı denir. Bir (lokal hareketli) çatı $\{X_i\}$ $(i = 1,...,n)$, $\forall s \in \mathcal{N}$ için $T_s\mathcal{N}$ nin bir bazını veren C^∞ vektör alanlarından oluşan bir sistemdir [31].*

Tanım 2.1.10. *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{B}$ manifoldları arasında bir*

$$\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{B}$$

C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\sigma : \chi(\mathcal{N}) \to \chi(\mathcal{B})$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm $\forall s \in \mathcal{N}$ noktasında

$$d\sigma_s : T_s\mathcal{N} \to T_{\sigma(s)}\mathcal{B}$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da σ nin s noktasındaki türev dönüşümü denir [31].

Tanım 2.1.11. *$\mathcal{N}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $\mathcal{N}$ üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları X ve Y olsun. Bir $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ için*

$$[,] : \chi(\mathcal{N}) \times \chi(\mathcal{N}) \longrightarrow \chi(\mathcal{N})$$

$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$

şeklinde tanımlanan $[,]$ *fonksiyonuna X ve Y nin Lie (parantez) operatörü denir. Bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar [33]:*

X,Y,Z $\in \chi(\mathscr{N})$ *ve* $f,h \in C^\infty(\mathscr{N})$ *olmak üzere*

1. $[X,Y] = -[Y,X]$

2. $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$

3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

4. $[fX,hY] = fh[X,Y] + fX(h)Y - hY(f)X$ *dir.*

Tanım 2.1.12. $\mathscr{N}$ *bir diferansiyellenebilir manifold olsun.* $\mathscr{N}$ *üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi* $\chi(\mathscr{N})$ *olmak üzere* $X,Y,Z \in \chi(\mathscr{N})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ve* $g : \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) \longrightarrow C^\infty(\mathscr{N})$ *için,*

1. $g(X,Y) = g(Y,X)$

2. $g(X,X) \geq 0, \forall X$ *için* $g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$

3. Bilineer;

$$g(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda g(X,Y) + \mu g(Y,Z)$$
$$g(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda g(X,Y) + \mu g(X,Z)$$

şartları sağlanıyorsa, g dönüşümüne Riemann metriği(veya metrik tensör) ve $(\mathscr{N}, g)$ *ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir [30].*

Teorem 2.1.1. $\mathscr{N}^n$ *bir Riemann manifoldu olsun. Buna göre* $\mathscr{N}$ *üzerindeki metrik tensörü*

$$<,>= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

veya

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i o \alpha)}{dt} \frac{d(x_j o \alpha)}{dt}$$

dır [31].

Burada $x_1, x_2, ...x_n$ *ile* $\mathscr{N}$ *nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir.*

Tanım 2.1.13. $\mathscr{N}^n$ *bir Riemann manifoldu ve* $X,Y \in \chi(\mathscr{N})$ *olsun. Her* $q \in \mathscr{N}$ *için*

$$X_q = (x_1, ..., x_n)|_q \in T_q\mathscr{N}$$

dır. $y_i \in C^\infty(\mathscr{N}, \mathbb{R})$ *olmak üzere*

$$y_i : \mathscr{N} \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ *sınıfından ise* $Y = (y_1, ..., y_n)|_q$ *vektör alanı* C^∞ *sınıfındandır denir. Böylece,* Y *nin* X *e göre kovaryant türevi*

$$\nabla_X Y = (X_q[y_1], ..., X_q[y_n])$$

ile verilir [30].

Tanım 2.1.14. $\mathscr{N}$ *bir manifold ve* $\chi(\mathscr{N})$, $\mathscr{N}$ *üzerinde tanımlı vektör alanlarının uzayı olsun. Buna göre,*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) &\longrightarrow \chi(\mathscr{N}) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \,, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(\mathscr{N})$

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

4. $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y \,, \quad \forall f \in C^\infty(\mathscr{N})$

özeliklerini sağlıyorsa ∇ *ya* $\mathscr{N}$ *üzerinde bir afin konneksiyonu denir [33].*

Teorem 2.1.2. $\mathscr{N}$ *Riemann manifoldu olsun. Bu durumda* $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathscr{N})$ *için*

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlayan ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu denir [34].

Tanım 2.1.14 ve Teorem 2.1.2 göz önüne alınırsa $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathscr{N})$ ve $\forall f \in C^\infty(\mathscr{N}, R)$ için

1. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

2. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

3. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

4. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$

5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

6. $Z(<X,Y>) = <\nabla_Z X, Y> + <X, \nabla_Z Y>$

dir [30].

$\mathscr{N}$ bir Riemann manifoldu ve ∇ metrik konneksiyonu olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \chi(\mathscr{N})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

denklemine Koszul Özdeşliği adı verilir [35].

Tanım 2.1.15. *$\mathscr{N}^n$ bir Riemann manifoldu ve $g_{\mathscr{N}}$, $\mathscr{N}$ nin Riemann metriği olsun. $\mathscr{N}$ üzerinde*

$$\begin{aligned} R : \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) &\to \chi(\mathscr{N}) \\ (X,Y,Z) &\to R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z \\ R_{XY}Z = R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Y \end{aligned}$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [35].

Tanım 2.1.16. *$\mathscr{N}$ bir Riemann manifoldu ve $g_{\mathscr{N}}$, $\mathscr{N}$ nin metriği olsun. Buna göre $\forall X,Y,Z,W \in \chi(\mathscr{N})$ için*

$$\begin{aligned} K : \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) &\to C^\infty(\mathscr{N}, \mathbf{R}) \\ (X,Y,Z,W) &\to K(X,Y,Z,W) = <R(X,Y)Z, W> \\ &= g_{\mathscr{N}}(R(X,Y)Z, W) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen 4. mertebeden kovaryant tensöre $\mathscr{N}$ üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [30].

Teorem 2.1.3. *$\mathscr{N}$ bir Riemann manifoldu ve $\mathscr{N}$ üzerindeki metrik konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda,*

1.$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$

2.$K(X,Y,Z,W) = -K(Y,X,Z,W)$

3.$K(X,Y,Z,W) = -K(X,Y,W,Z)$

4.$K(X,Y,Z,W) = K(Z,W,X,Y)$

dir [30].

Tanım 2.1.17. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\bar{\mathscr{N}}, \bar{g}_{\mathscr{N}})$ Riemann manifoldları olsun. Buna göre $\forall p \in \mathscr{N}$ için γ_{*p} birebir ise*

$$\gamma : \mathscr{N} \to \bar{\mathscr{N}}$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne immersiyon denir.

$\gamma^*(\bar{g}_{\mathscr{N}}) = g_{\mathscr{N}}$ şartını sağlayan bir diferansiyellenebilir immersiyonuna da $\mathscr{N}$ nin $\bar{\mathscr{N}}$ içine izometrik immersiyonu denir [34].

Tanım 2.1.18. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\bar{\mathscr{N}}, \bar{g}_{\mathscr{N}})$ Riemann manifoldları olsun. Buna göre $\forall q \in \mathscr{N}$ için γ_{*q} üzerine ise*

$$\gamma : \mathscr{N} \to \bar{\mathscr{N}}$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne submersiyon denir [34].

Tanım 2.1.19. *$(\bar{\mathscr{N}}^m, \bar{g}_{\mathscr{N}})$ bir Riemann manifoldu ve $(\mathscr{N}^n, g_{\mathscr{N}})$, $\mathscr{N}$ ye immersed başka bir Riemann manifoldu olsun. Buna göre $\mathscr{N}$ ye $\bar{\mathscr{N}}$ nin Riemann altmanifoldu denir. $\forall X_p \in T_{\mathscr{N}}(p)$ için*

$$\bar{g}_{\mathscr{N}}|_{f(p)}(f_*X_p, \zeta) = 0$$

ise ζ vektörü $f(p)$ noktasında normaldir denir. Her bir $f(p)$ noktasında $\bar{\mathscr{N}}$ ye normal olan bu cins $\zeta_{f(p)}$ vektörlerinin kümesine $\bar{\mathscr{N}}$ üzerindeki normal vektör alanı denir. $\bar{\mathscr{N}}$ de $\mathscr{N}$ nin birim normal vektörüne normal kesit denir. $\mathscr{N}$ üzerindeki bütün normal vektörlerin vektör demetini $T^{\perp}\mathscr{N}$ ile göstereceğiz. Buna göre $\bar{\mathscr{N}}$ nin $f(\mathscr{N})$ ye kısıtlanmış olan $T\mathscr{N}$ tanjant demeti; $T\mathscr{N}$ tanjant demeti ile $T^{\perp}\mathscr{N}$ normal demetin direkt toplamına izomorfiktir. Böylece $\bar{\mathscr{N}}$ ve $\mathscr{N}$ üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla $\bar{\nabla}, \nabla$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\mathscr{N})$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.1.2}$$

dır, burada ∇ bir metrik konneksiyonudur ve h,

$$h : \chi(\mathscr{N}) \times \chi(\mathscr{N}) \to \chi^{\perp}(\mathscr{N})$$

ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur. (2.1.2) denklemine Gauss formülü ve h ya $\mathcal{N}$ nin ikinci temel formu denir. Şimdi $X \in \chi(\mathcal{N}), V \in \chi^{\perp}(\mathcal{N})$ için $-A_V X, \nabla_X^{\perp} V$ ile $\bar{\nabla}_X V$ nin sırasıyla teğet ve normal kısımlarını gösterirsek

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^{\perp} V \tag{2.1.3}$$

yazabiliriz. Burada A_V lineer operatörüne normal kesite göre Weingarten temel tensörü ve (2.1.3) denklemine de Weingarten formülü denir [32].

Teorem 2.1.4. *$(\bar{\mathcal{N}}, \bar{g}_{\mathcal{N}})$ bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ de onun bir altmanifoldu olsun. $\bar{\mathcal{N}}$ ve $\mathcal{N}$ nin eğrilik tensörleri sırasıyla $\bar{R}$, R ve $\mathcal{N}$ nin ikinci temel formu h olsun. Buna göre $V, W, X, Y \in \chi(\mathcal{N})$ olmak üzere Gauss denklemi*

$$\begin{aligned} < R_{VW}X, Y > =& < \bar{R}_{VW}X, Y > + < h(V,X), h(W,Y) > \\ & - < h(V,Y), h(W,X) > \end{aligned}$$

dir [34].

Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{2.1.4}$$

$$\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\bar{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \tag{2.1.5}$$

dır. Burada (2.1.5) denklemine Codazzi denklemi denir. $\bar{\nabla} h$, $\mathcal{N}$ altmanifoldunun ikinci temel formu h nın kovaryant türevidir ve

$$\left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca $\eta, \zeta \in \chi^{\perp}(\mathcal{N})$ için

$$\tilde{R}(X,Y,\zeta,\eta) = R^{\perp}(X,Y,\zeta,\eta) - g\left(\left[A_{\zeta}, A_{\eta}\right]X, Y\right)$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe Ricci denklemi adı verilir, burada $\left[A_{\zeta}, A_{\eta}\right] = A_{\zeta}, A_{\eta} - A_{\eta}A_{\zeta}$ ve $R^{\perp}$ ise $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür.

2.2 Riemann Submersiyonlar

Riemann submersiyonların geometrisini çalıştığımız bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım, Riemann altmanifoldların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonu tanımlanmakta, örnek verilmekte ve O'Neill tensörü tanımlanarak özellikleri incelenmektedir. İkinci kısım, O'Neill tensörlerinin kovaryant türevleri hesaplanmaktadır.

2.2.1 Distribüsyonlar ve O'Neill Tensörleri

$(\mathscr{N}^m, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}^n, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve $\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ bir submersiyon olsun. Bu durumda, $rank\sigma = boy\mathscr{B} < boy\mathscr{N}$ olur. Herhangi bir $x \in \mathscr{B}$ için $F_X = \sigma^{-1}(x)$ üzerindeki lif, $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ manifoldunun $r = (m-n)$-boyutlu bir altmanifoldudur. $\sigma^{-1}(x)$ altmanifoldlarına, *submersiyonun lifleri* denir [36].

$\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ submersiyonunun $p \in \mathscr{N}$ için $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ deki $\mathscr{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathscr{V}_p = çek\sigma_{*p}$$

ile tanımlanır ve $\mathscr{V}_p$ ye *submersiyonunun dikey distribüsyonu* denir. Dikey distribüsyona dik ve tamamlayan olan

$$\mathscr{H}_p = (\mathscr{V}_p)^{\perp}$$

distribüsyona ise *submersiyonun yatay distribüsyonu* denir [36].

Teorem 2.2.1. *$\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ bir submersiyon ve $\mathscr{N}$ manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathscr{V}$ olsun. Bu durumda, $\sigma(p) = x$ ve $p \in \mathscr{N}$ için her $\mathscr{V}_p$ dikey distribüsyonu $\sigma^{-1}(x)$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile çakışır [36].*

İspat: $T_p\sigma^{-1}(x)$ de bir v vektörü ve

$$\tau(0) = p, \tau'(0) = v$$

olacak şekilde

$$\tau : [0,1] \to \sigma^{-1}(x)$$

eğrisi seçilebilir, bu durumda $(\sigma \circ \tau)(t) = x$, $t \in [0,1]$ için

$$\sigma_*\left(\tau'(0)\right) = (\sigma \circ \tau)_x \frac{d}{dt} = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$v = \tau^{'}(0) \in \mathscr{V}_p$$

dır. O halde $T_p\sigma^{-1}(x)$, $\mathscr{V}_p$ nin $r = (m-n)$-boyutlu altuzayına dönüşür. Boyutların eşitliğinden

$$\mathscr{V}_p = T_p\sigma^{-1}(x)$$

olur.

Böylece, $x \in \mathscr{N}$ noktasında $\mathscr{N}$ Riemann manifoldu

$$T_x\mathscr{N} = \mathscr{V}_x \oplus \mathscr{H}_x = \mathscr{V}_x \oplus \mathscr{V}_x^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Tanım 2.2.1. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları olsun. Eğer*

$$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa σ dönüşümüne Riemann submersiyonu *denir [36].*

(1) *σ dönüşümü maksimal ranka sahiptir.*

(2) *Her $p \in \mathscr{N}$ noktasında, σ_{*p} dönüşümü $X_p \in \Gamma(\mathscr{H}_p)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.*

Tanımdaki birinci şart, dönüşümün bir submersiyon olduğunu garanti etmektedir. İkinci şart ise $p \in \mathscr{N}$ noktasındaki σ_* türev dönüşümünün $\mathscr{H}_p$ yatay uzayından $T_{\sigma(p)}\mathscr{B}$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söylemektedir. Yani,

$$g_{\mathscr{N}p}(u,v) = g_{\mathscr{B}\sigma(p)}(\sigma_{*p}u, \sigma_{*p}v), \quad u,v \in \mathscr{H}_p, \quad p \in \mathscr{N}$$

dır [36].

Şimdi, Riemann submersiyonlarıyla ilgili basit bir örnek verebiliriz:

Örnek 2.2.1. *$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere*

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1\cos\alpha + x_3\sin\alpha, x_2\sin\alpha + x_4\cos\alpha)$$

dönüşümü verilsin. Burada, $\{x_{1,}x_2,x_3,x_4\}$ ile $\mathbb{R}^4$ Öklidyen uzayın bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Direk işlemlerle

$$\sigma_* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla, rank$\sigma_* =$ boy $\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$ dır. Yani, σ bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathscr{V} = \text{çek}\sigma_* = Sp\left\{X_1 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\text{-}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_3}, X_2 = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

ve

$$\mathscr{V}^{\perp} = \mathscr{H} = Sp\left\{X_3 = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_3}, X_4 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sigma_*(X_3) = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \sigma_*(X_4) = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

dır, burada $\{y_{1,}y_2\}$, $\mathbb{R}^2$ Öklidyen uzayının bir koordinat sistemidir. Böylece $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpımlar $g_{\mathbb{R}^4}$ ve $g_{\mathbb{R}^2}$ ile gösterilirse

$$g_{\mathbb{R}^4}(X_3,X_3) = g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_*(X_3), \sigma_*(X_3)) = 1,$$
$$g_{\mathbb{R}^4}(X_4,X_4) = g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_*(X_4), \sigma_*(X_4)) = 1$$

olur. Bu ise σ dönüşümünün, bir Riemann submersiyon olduğunu gösterir [36].

$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $\mathscr{N}$ üzerindeki bir X vektör alanı yatay distibüsyona ait ise yatay vektör alanı olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$ ile gösterilir. $\mathscr{N}$ üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise dikey vektör alanı olarak adlandırılır ve dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ ile gösterilir. Herhangi bir $\Lambda_1 \in \chi(\mathscr{N})$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla $\mathscr{V}\Lambda_1$ ve $\mathscr{H}\Lambda_1$ gösterilir. Eğer X yatay vektör alanı, $\mathscr{B}$ üzerindeki X_* vektör alanına σ-bağlı ise M üzerindeki X vektör alanına *temel vektör alanı* denir. Temel vektör alanlarının uzayı

$$\chi^{\mathscr{C}}(\mathscr{N}) = \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N}) \cap \chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$$

ile gösterilir. Temel vektör alanlarının uzayı ile $\chi(\mathscr{B})$, σ altında birbirine izomorfiktir. $X_* \in \chi(\mathscr{B})$ olmak üzere X_* vektör alanına σ bağlı olan temel vektör alanına X_* vektör alanının yatay gönderileni $(lift)$ denir. Temel vektör alanları yatay distribüsyonu yerel olarak geren vektör alanlarıdır [36].

Bir Riemann submersiyonunun temel özelliklerini veren lemmayı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

Lemma 2.2.1. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$, ∇ ve ∇' Levi-Civita konneksiyonlarına sahip Riemann manifoldları ve*

$$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$$

Riemann submersiyonu olsun. $\mathscr{N}$ üzerindeki X, Y temel vektör alanlarına σ-bağlı vektör alanları X_* ve Y_* olmak üzere

(i) $g_{\mathscr{N}}(X,Y) = g_{\mathscr{B}}(X_*, Y_*) \circ \sigma$

(ii) $\mathscr{H}[X,Y]$ temel vektör alanı, $[X_*, Y_*]$ vektör alanına σ-bağlıdır.

(iii) $\mathscr{H}(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{X_*} Y_*$, σ-bağlıdır.

(iv) Herhangi bir $V \in X^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için, $[X,V]$ dikey vektör alanıdır

şartları sağlanır [36].

İspat: (i) $p \in \mathscr{N}$, $X, Y \in \chi^{\mathscr{C}}(\mathscr{N})$ için

$$g_{\mathscr{N}p}(X,Y) = g_{\mathscr{B}\sigma(p)}(\sigma_{*p}X, \sigma_{*p}Y)$$

dir. Buradan

$$g_{\mathscr{N}}(X,Y) = g_{\mathscr{B}}(X_*, Y_*) \circ \sigma$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \chi^{\mathscr{C}}(\mathscr{N})$ için

$$\sigma_*([X,Y]) = \sigma_* \mathscr{H}([X,Y]) + \sigma_* \mathscr{V}([X,Y])$$

yazılabileceğinden

$$\sigma_*([X,Y]) = \sigma_* \mathscr{H}([X,Y])$$

elde edilir. Böylece,

$$\sigma_* \mathscr{H}([X,Y]) = [\sigma_* X, \sigma_* Y]$$

veya

$$\sigma_* \mathscr{H}([X,Y]) = [X_*, Y_*] \circ \sigma$$

olur. Yani, $\mathscr{H}[X,Y]$ temel vektör alanı σ-bağlıdır.

(iii) σ bir izometri olduğundan $X(g_{\mathscr{N}}(Y,Z)) = X(g_{\mathscr{B}}(Y_*, Z_*)) \circ \sigma$ ve $[X,Y]$ ile $[X_*, Y_*]$ vektör alanları σ bağlı olduğu için Koszul özdeşliğiden X, Y, Z temel vektör alanları X_*, Y_*, Z_*

vektör alanlarının yatay liftleri olmak üzere

$$2g_{\mathcal{N}}(\nabla_X Y,Z) = X_*(g_{\mathcal{B}}(Y_*,Z_*)) + Y_*(g_{\mathcal{B}}(X_*,Z_*)) - Z_*(g_{\mathcal{B}}(X_*,Y_*))$$
$$+ g_{\mathcal{B}}([X_*,Y_*],Z_*) + g_{\mathcal{B}}([Z_*,X_*],Y_*) - g_{\mathcal{B}}([Y_*,Z_*],X_*)$$

elde edilir. Burada, sağ taraf $\mathcal{B}$ manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇' için Koszul özdeşliğidir. Buradan

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_X Y,Z) = g_{\mathcal{B}}\left(\nabla'_{X_*}Y_*,Z_*\right)$$

olur. Böylece (iii) için ispat tamamlanır.

(iv) Herhangi bir $V \in \chi^{\mathcal{V}}(\mathcal{N})$ ve $X \in \chi^{\mathcal{C}}(\mathcal{N})$ için X temel vektör alanı X_* vektör alanına σ-bağlı olsun. Bu durumda,

$$\sigma_*[X,V] = 0$$

elde edilir. Bu ise, $[X,V] \in \Gamma(\mathcal{V})$ demektir.

Bu kısımda, [36] den O'Neill temel tensörlerini tanımlayacak ve özelliklerini inceleyeceğiz ki Reimann submersiyonları üzerinde rol oynayan bu tenörler, Riemann altmanifoldlarında Gauss ve Weingarten formüllerinin oynadığı rolü oynarlar.

$(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ ve $(\mathcal{B},g_{\mathcal{B}})$ Reimann manifoldları ve

$$\sigma : (\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \to (\mathcal{B},g_{\mathcal{B}})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. ∇, $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $(1,2)$ mertebeli T temel tensör alanı

$$T(\Lambda_1,\Lambda_2) = T_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}\Lambda_1}\mathcal{V}\Lambda_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}\Lambda_1}\mathcal{H}\Lambda_2, \;\; \Lambda_1,\Lambda_2 \in \chi(\mathcal{N})$$

ile tanımlanır. Tanımdan aşağıdaki özellikler kolayca görülmektedir. $\Lambda_1 \in \chi(\mathcal{N})$ için T_{Λ_1} lineer operatördür. T_{Λ_1} yatay ve dikey altuzaylarının rolleri değişir. T dikey tensör alanıdır. Yani $\Lambda_1 \in \chi(\mathcal{N})$ için, $T_{\Lambda_1} = T_{\mathcal{V}\Lambda_1}$ dir.

Diğer O'Neill tensör alanı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır. $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ ve $(\mathcal{B},g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve

$$\sigma : (\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \to (\mathcal{B},g_{\mathcal{B}})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli A temel tensör alanı

$$A(\Lambda_1,\Lambda_2) = A_{\Lambda_1}\Lambda_2 = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}\Lambda_1}\mathcal{H}\Lambda_2 + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}\Lambda_1}\mathcal{V}\Lambda_2, \quad \Lambda_1,\Lambda_2 \in \chi(\mathcal{N})$$

ile tanımlanır. Tanımdan A temel tensör alanı için de aşağıdaki özellikler görülmektedir. $\Lambda_1 \in \chi(\mathscr{N})$ için A_{Λ_1} lineer operatördür. $\Lambda_1 \in \chi(\mathscr{N})$ için A_{Λ_1} yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir ve A yatay tensör alanıdır.

Yani, $\Lambda_1 \in \chi(\mathscr{N})$ için, $A_{\Lambda_1} = A_{\mathscr{H}\Lambda_1}$ dir.

Aşağıdaki lemmada A ve T temel tensör alanlarının g metriğine göre anti-simetrik olduğu gösterilmektedir.

Lemma 2.2.2. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve*

$$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in \chi(\mathscr{N})$ için

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_2, \Lambda_3) = -g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) \qquad (2.2.1.1)$$

$$g_{\mathscr{N}}(A_{\Lambda_1}\Lambda_2, \Lambda_3) = -g_{\mathscr{N}}(A_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) \qquad (2.2.1.2)$$

dır, yani A_{Λ_1} ve T_{Λ_1}, $g_{\mathscr{N}}$ metriğine göre anti-simetrik operatörlerdir [36].

İspat: (2.2.1.1) den

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) = g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{V}\Lambda_3, \mathscr{H}\Lambda_2\right) + g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{V}\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{H}\Lambda_3, \mathscr{V}\Lambda_2\right)$$

dır. Buradan

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) = g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{V}\Lambda_3, \mathscr{H}\Lambda_2\right) + g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{H}\Lambda_3, \mathscr{V}\Lambda_2\right)$$

olur. ∇, Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) &= \mathscr{V}\Lambda_1 g_{\mathscr{N}}(\mathscr{V}\Lambda_3, \mathscr{H}\Lambda_2) - g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{V}\Lambda_3, \nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{H}\Lambda_2\right) \\ &\quad + \mathscr{V}\Lambda_1 g_{\mathscr{N}}(\mathscr{H}\Lambda_3, \mathscr{V}\Lambda_2) - g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}\Lambda_3, \nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{V}\Lambda_2\right) \end{aligned}$$

elde edilir, $g_{\mathscr{N}}(\mathscr{V}\Lambda_3, \mathscr{H}\Lambda_2) = 0$ olduğundan

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) = -g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{V}\Lambda_3, \nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{H}\Lambda_2\right) - g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}\Lambda_3, \nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{V}\Lambda_2\right)$$

olur. Bu ise

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) = -\left(g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{V}\Lambda_3, \mathscr{V}\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{H}\Lambda_2\right) + g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}\Lambda_3, \mathscr{H}\nabla_{\mathscr{V}\Lambda_1}\mathscr{V}\Lambda_2\right)\right)$$

demektir. Buradan,

$$g_{\mathscr{N}}(T_{\Lambda_1}\Lambda_3, \Lambda_2) = -g_{\mathscr{N}}(\Lambda_3, T_{\Lambda_1}\Lambda_2)$$

elde edilir. Bu (2.2.1.1) ifadesidir. (2.2.1.2) benzer şekilde gösterilir.

$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ bir Riemann manifoldu ve $p \in \mathscr{N}$ olsun. Kolayca görülür ki, herhangi bir $u, w \in T_P\mathscr{N}$ için $T_{\Lambda_1}\Lambda_2(p)$ ve $A_{\Lambda_1}\Lambda_2(p)$, $\mathscr{N}$ üzerindeki Λ_1, Λ_2 vektör alanlarının seçiminden bağımsızdır. T_u, A_u lineer operatörleri

$$T_u w = (T_{\Lambda_1}\Lambda_2)(p),$$
$$A_u w = (A_{\Lambda_1}\Lambda_2)(p)$$

ile tanımlanır. Burada $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \chi(\mathscr{N})$ ve $\Lambda_1(p) = u$, $\Lambda_2(p) = w$ dir [36].

Yukarıda verilen lemma ve temel tensörlerin özellikleri gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç bu lineer operatörler için tekrar ifade edilebilir.

Önerme 2.2.1. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve*

$$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $p \in \mathscr{N}$, $u \in T_p\mathscr{N}$ için; T_u ve A_u operatörleri $\left(T_p\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}p}\right)$ üzerinde anti-simetrik operatörlerdir ve $p \in \mathscr{N}$ noktasında yatay ve dikey alt uzaylarının rollerini değiştirirler [36].

Önerme 2.2.2. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve*

$$\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere

(i) $U, W \in \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için

$$T_U W = T_W U, \tag{2.2.1.3}$$

(ii) $X, Y \in \chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$ için

$$A_X Y = -A_Y X, \tag{2.2.1.4}$$

(iii) $\mathfrak{v}$ yatay distribüsyon üzerine olan projeksiyon olmak üzere

$$A_X Y = \frac{1}{2}\mathfrak{v}[X, Y]$$

dir [36].

Aşağıda sunulan denklemler Riemann submersiyonların geometrisi çalışılırken sık başvurulan denklemler topluluğudur.

Lemma 2.2.3. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve $\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere, $X, Y \in \chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$ ve $V, W \in \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için*

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \tag{2.2.1.5}$$

$$\nabla_V X = \mathscr{H}\nabla_V X + T_V X, \tag{2.2.1.6}$$

$$\nabla_X V = A_X V + \mathscr{V}\nabla_X V, \tag{2.2.1.7}$$

ve

$$\nabla_X Y = \mathscr{H}\nabla_X Y + A_X Y \tag{2.2.1.8}$$

sağlanır, burada $\hat{\nabla}_V W = \mathscr{V}\nabla_V W$ dır. Liflere ait diğer geometrik nesneler de ˆ sembolü ile gösterilecektir. Ayrıca, X temel tensör alanı ise $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$\mathscr{H}\nabla_V X = \mathscr{H}\nabla_X V = A_X V$$

dır [36].

O'Neill tensörleri altmanifoldun ikinci temel formu ve Weingarten temel tensörüne benzer bir geometrik karşılığı Riemann submersiyonları için sunmaktadır.

Teorem 2.2.2. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları, $\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ bir Riemann submersiyonu ve $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ üzerindeki yatay distribüsyon $\mathscr{H}$ olsun. Bu durumda, $\mathscr{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır [36].*

İspat: Herhangi bir $X, Y \in \chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$ için

$$A_X Y = \mathfrak{v}\nabla_X Y$$

dir. Buradan

$$A_X Y - A_Y X = \mathfrak{v}[X, Y]$$

elde edilir. Burada (2.2.1.4) kullanılırsa

$$2A_X Y = \mathfrak{v}[X, Y]$$

olur. $A_X Y = 0$ ise $\mathscr{H}$ integrallenebilirdir. Tersine $\mathscr{H}$ integrallenebilirse $A_X Y = 0$ olur. Buradan $U \in \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için

$$g(A_X Y, U) = -g(A_X U, Y) = 0$$

olur. Bu ise $A_X U = 0$ demektir. Yani A_X, $\mathscr{N}$ üzerinde sıfırdır. Diğer taraftan $E \in \chi(\mathscr{N})$ için $A_E = A_{\mathscr{H}E}$ olduğundan

$$A_U = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

2.2.2 Temel tensörlerin Kovaryant Türevleri

Bu altbölümde T ve A tensörlerinin kovaryant türevleri hesaplanmakta ve bunların ürettiği geometrik sonuçlar sunulmaktadır.

Lemma 2.2.4. *$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ ve $(\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ Riemann manifoldları ve $\sigma : (\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}) \to (\mathscr{B}, g_{\mathscr{B}})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi^{\mathscr{H}}(\mathscr{N})$ ve $V, W \in \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için*

$$(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}, \tag{2.2.2.1}$$

$$(\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}, \tag{2.2.2.2}$$

$$(\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}, \tag{2.2.2.3}$$

$$(\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y} \tag{2.2.2.4}$$

dır [36].

İspat: $\mathscr{N}$ üzerinde E vektör alanı için

$$(\nabla_V A)_W E = \nabla_V (A_W E) - A_{\nabla_V W}(E) - A_W (\nabla_V E)$$

dır. $A_X = A_{\mathscr{H}X}$ yatay tensör alanı olduğundan, $W \in \chi^{\mathscr{V}}(\mathscr{N})$ için $A_W = A_{\mathscr{H}W} = 0$ dır. Böylece

$$(\nabla_V A)_W E = -A_{\nabla_V W}(E)$$

olur. Burada (2.2.1.5) ve $A_E = A_{\mathscr{H}E}$ tensör alanının yatay değerli olması kullanılırsa,

$$(\nabla_V A)_W E = -A_{T_V W}(E)$$

elde edilir.

Ayrıca, $E \in \chi(\mathscr{N})$ ve $X,Y \in \chi^{\mathscr{C}}(\mathscr{N})$ olmak üzere

$$(\nabla_X T)_Y E = \nabla_X (T_Y E) - T_{\nabla_X Y}(E) - T_Y(\nabla_X E)$$

dır. $T_W = T_{\mathscr{V}W}$ dikey tensör alanı olduğundan $T_Y = T_{\mathscr{V}Y} = 0$ dır. Böylece yukarıdaki ifade

$$(\nabla_X T)_Y E = -T_{\nabla_X Y}(E)$$

olur. (2.2.1.8) kullanılır ve A tensör alanının dikey tensör alanı olduğu gözönüne alınırsa,

$$(\nabla_X T)_Y E = -T_{A_X Y}(E)$$

dır. Bu ise (2.2.2.2) ifadesinin ispatıdır. (2.2.2.3)ve (2.2.2.4) denklemleri benzer olarak gösterilebilir.

3. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Bu bölümde, istatistiksel manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

$\mathcal{N}$, C^∞ sınıfından $(n+k)$-boyutlu bir Riemann manifold ve $\widetilde{\nabla}$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir afin konneksiyonu olsun. $\Gamma(E)$ ile $E \longrightarrow \mathcal{N}$ vektör demetlerinin kümesini gösterelim. Böylece $\mathcal{N}$ üzerinde (p,q) tipindeki tüm tensör alanlarının kümesi $\Gamma(T_{(p,q)}\mathcal{N})$ olarak gösterilir [8].

Eğer $\forall, X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için $\widetilde{\nabla}$ torsiyonsuz ve Codazzi denklemi gerçeklenirse yani,

$$(\widetilde{\nabla}_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}_Y g_{\mathcal{N}})(X,Z)$$

şartı sağlanırsa $(\widetilde{\nabla}, g)$ ikilisine *istatistiksel yapı* ve $(\mathcal{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathcal{N}})$ ye de *istatistiksel manifold* denir. Bu durumda, eğer $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için

$$X g_{\mathcal{N}}(Y,Z) = g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z)$$

ise $\widetilde{\nabla}^*$, $\widetilde{g}$ ye göre $\widetilde{\nabla}$ nın *dual konneksiyonu* olarak adlandırılır [18].

$(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ istatistiksel manifoldu, torsiyonsuz afin konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$,$\widetilde{\nabla}^*$ ile donatılmış $(n+k)$-boyutlu bir Riemann manifolddur [8].

Buna göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.0.1. *$(\mathcal{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathcal{N}})$ manifoldunun bir istatistiksel manifold olması için gerek yeter şart $(\mathcal{N}, \widetilde{\nabla}^*, g_{\mathcal{N}})$ manifoldunun da bir istatistiksel manifold olmasıdır [18].*

İspat: $(\mathcal{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathcal{N}})$ bir istatistiksel manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için

$$X g_{\mathcal{N}}(Y,Z) = g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z)$$

dır. Buradan,

$$(\widetilde{\nabla}_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) = g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z) \tag{3.0.1}$$

yazılabilir. (3.0.1) de X ve Z yi değiştirirsek

$$(\widetilde{\nabla_Z g_{\mathcal{N}}})(Y,X) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}_Z X) = g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}^*_Z X) \tag{3.0.2}$$

elde ederiz. (3.0.1) den (3.0.2) yi çıkarırsak

$$[X,Z] = \widetilde{\nabla}^*_X Z - \widetilde{\nabla}^*_Z X$$

buluruz. Yani, $\widetilde{\nabla}^*$ torsiyonsuzdur. Ayrıca,

$$Xg_{\mathcal{N}}(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}^*_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}^*_X Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(Y,\widetilde{\nabla}^*_X Z)$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(Y,\widetilde{\nabla}^*_X Z) = (\widetilde{\nabla}^*_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}^*_X Y,Z) + g_{\mathcal{N}}(Y,\widetilde{\nabla}^*_X Z) \tag{3.0.3}$$

olur. (3.0.3) denkleminde, X ve Y yi yer değiştirirsek,

$$g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_Y X,Z) = (\widetilde{\nabla}^*_Y g_{\mathcal{N}})(X,Z) + g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}^*_Y X,Z) \tag{3.0.4}$$

elde ederiz. (3.0.3) den (3.0.4) yı çıkarırsak,

$$g_{\mathcal{N}}([X,Y],Z) = (\widetilde{\nabla}^*_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}^*_Y g_{\mathcal{N}})(X,Z) + g_{\mathcal{N}}([X,Y],Z)$$

buluruz. Böylece,

$$(\widetilde{\nabla}^*_X g_{\mathcal{N}})(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}^*_Y g_{\mathcal{N}})(X,Z)$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, $(\mathcal{N},\widetilde{\nabla}^*,g_{\mathcal{N}})$ bir istatistiksel manifolddur. Benzer şekilde, diğer taraf ta ispatlanabilir [18].

Önerme 3.0.2. $\widetilde{\nabla}$ *ve* $\widetilde{\nabla}^*$ *torsiyonsuz afin konneksiyonlar olsun. Bu durumda,*

$$(\widetilde{\nabla} + \widetilde{\nabla}^*)\frac{1}{2} = \widetilde{\nabla}^0$$

dır. Burada $\widetilde{\nabla}^0$*,* $\mathcal{N}$ *üzeride bir Levi-Civita konneksiyondur [8].*

İspat: İspatı yaparken, Riemann konneksiyonun tekliğini kullanacağız. Bu nedenle, başka bir $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu alalım. Kabul edelim ki $(\widetilde{\nabla} + \widetilde{\nabla}^*)\frac{1}{2} = \overline{\nabla}$ olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^*$ torsiyonsuz olduğundan $\overline{\nabla}$ da torsiyonsuzdur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X Y,Z) + g(Y,\overline{\nabla}_X Z) &= \frac{1}{2}g(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) + \frac{1}{2}g(\widetilde{\nabla}^*_X Y,Z) \\ &+ \frac{1}{2}g(Y,\widetilde{\nabla}^*_X Z) + \frac{1}{2}g(Y,\widetilde{\nabla}_X Z) \\ &= Xg(Y,Z) \end{aligned}$$

olur ki bu $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun, Riemann konneksiyonu olduğunu gösterir. Böylece,

$$\overline{\nabla} = \widetilde{\nabla}^0$$

dır.

Tanım 3.0.1. *$(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel manifoldu sabit $c \in \mathbb{R}$ eğrilikli ise $\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathscr{N})$ için,*

$$R^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)Z = c\{g_{\mathscr{N}}(Y,Z)X - g_{\mathscr{N}}(X,Z)Y\}$$

olur, burada $R^{\widetilde{\nabla}}$, $\widetilde{\nabla}$ nin eğrilik tensörüdür.

Eğer $(\widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel yapısının sabit eğriliği 0 ise $(\widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$, Hessian yapı *olarak adlandırılır [18].*

Önerme 3.0.3. *$(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel manifoldunun sabit eğriliğinin c olması için gerek ve yeter şart $(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}^*, g_{\mathscr{N}})$ nin sabit eğriliğinin c olmasıdır [18].*

İspat: $(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel manifoldunun sabit eğriliği c olsun. Buna göre $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(T\mathscr{N})$ için

$$\begin{aligned}
g_{\mathscr{N}}(R^{\widetilde{\nabla}^*}(X,Y)Z,W) &= g_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_X\widetilde{\nabla}^*_Y Z,W) - g_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_Y\widetilde{\nabla}^*_X Z,W) - g_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_{[X,Y]}Z,W) \\
&= Xg_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_Y Z,W) - g_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_Y Z,\widetilde{\nabla}_X W) - Yg_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_X Z,W) \\
&+ g_{\mathscr{N}}(\widetilde{\nabla}^*_X Z,\widetilde{\nabla}_Y W) - [X,Y]g_{\mathscr{N}}(Z,W) + g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}W) \\
&= X\{Yg_{\mathscr{N}}(Z,W) - g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_Y W)\} - Yg_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_X W) \\
&+ g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X W) - Y\{Xg_{\mathscr{N}}(Z,W) - g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_X W)\} \\
&+ Xg_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_Y W) - g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y W) - [X,Y]g_{\mathscr{N}}(Z,W) \\
&+ g_{\mathscr{N}}(Z,\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}W) \\
&= -g_{\mathscr{N}}(Z,R^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)W).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}^*, g_{\mathscr{N}})$ nin de sabit eğriliğinin c olduğu sonucuna varılır [**?**].

$(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel manifoldu için $\widetilde{R}^{(\widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})}(X,Y,Z,W) = g_{\mathscr{N}}(\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}}(Z,W)Y,X)$ dir.

Bundan sonraki kısımlarda, $\widetilde{R}^{(\widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})}$ yı $\widetilde{R}$ ile ve $\widetilde{R}^{(\widetilde{\nabla}^*, g_{\mathscr{N}})}$ yı da $\widetilde{R}^*$ ile göstereceğiz [18].

Lemma 3.0.1. *$(\mathscr{N}, \widetilde{\nabla}, g_{\mathscr{N}})$ istatistiksel manifoldu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir: [18]*

$$\widetilde{R}(X,Y,W,Z) = -\widetilde{R}(X,Y,Z,W), \tag{3.0.5}$$

$$\widetilde{R}^*(X,Y,W,Z) = -\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W), \tag{3.0.6}$$

$$\widetilde{R}(Y,X,W,Z) = -\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W) \tag{3.0.7}$$

ve

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) + \widetilde{R}(X,Z,W,Y) + \widetilde{R}(X,W,Y,Z) = 0, \tag{3.0.8}$$

$$\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W) + \widetilde{R}^*(X,Z,W,Y) + \widetilde{R}^*(X,W,Y,Z) = 0. \tag{3.0.9}$$

İspat: (3.0.5) ve (3.0.6) formülleri doğrudan eğrilik tensör tanımından gelir. (4.1.3) ye göre (3.0.7) anlamına gelen $g_{\mathcal{N}}(\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)Z,W) = -g_{\mathcal{N}}(Z,\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}^*}(X,Y)W)$ yazılabilir. Ayrıca, $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^*$ torsiyonsuz olduklarından I.Bianchi özdeşliği gereğince (3.0.8) ve (3.0.9) elde edilir [18].

Tanım 3.0.2. *$(\mathcal{N},\widetilde{\nabla},g_{\mathcal{N}})$ bir istatistiksel manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(T\widetilde{\mathcal{N}})$ için istatistiksel eğrilik tensör alanı*

$$\widetilde{Q}(X,Y)Z = \frac{1}{2}\{\widetilde{R}(X,Y)Z + \widetilde{R}^*(X,Y)Z\}$$

ile tanımlanır, burada

$$\widetilde{Q}(X,Y,Z,W) = g_{\mathcal{N}}(\widetilde{Q}(X,Y)Z,W)$$

dır [37].

Önerme 3.0.4. *$(\mathcal{N},\widetilde{\nabla},g_{\mathcal{N}})$ bir istatistiksel manifold olsun. $\widetilde{Q} \in \Gamma(T\mathcal{N}^{(0,4)})$ tensör alanı için,*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Q}(X,Y,Z,W) = -\widetilde{Q}(Y,X,Z,W)\\
&\widetilde{Q}(X,Y,Z,W) = -\widetilde{Q}(X,Y,W,Z)\\
&\widetilde{Q}(X,Y,Z,W) + \widetilde{Q}(Y,Z,X,W) + \widetilde{Q}(Z,X,Y,W) = 0\\
&\widetilde{Q}(X,Y,Z,W) = \widetilde{Q}(Z,W,X,Y)
\end{aligned}$$

dir [37].

Tanım 3.0.3. *$(\mathcal{N},\widetilde{\nabla},g_{\mathcal{N}})$ bir istatistiksel manifold olsun. $\mathcal{N}$ nin c kesit eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ olmak üzere*

$$\widetilde{Q}(X,Y)Z = c\{g_{\mathcal{N}}(Y,Z)X - g_{\mathcal{N}}(X,Z)Y\},$$

dır.

$\breve{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Herhangi bir $X,Y \in \Gamma(T\breve{\mathcal{N}})$ için Gauss formülleri,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{3.0.10}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*_X Y + h^*(X,Y) \tag{3.0.11}$$

şeklindedir, burada h ve h^* simetrik ve bilineerdir [8].

(∇,g) ve (∇^*,g), $\breve{\mathcal{N}}$ üzerinde iki istatistiksel yapı olsun, burada g, $\mathcal{N}$ üzerindeki Riemann metriği $g_{\mathcal{N}}$ dan $\Gamma(T\mathcal{N})$ üzerine indirgenen metriktir. $\Gamma(T^{\perp}\breve{\mathcal{N}})$ ile $\breve{\mathcal{N}}$ üzerindeki normal demeti gösterelim. h ve h^* bilineer olduklarından, A_ζ ve A^*_ζ lineer dönüşümleri ele alındığında

$$g(A_\zeta X,Y) = g_{\mathscr{N}}(h(X,Y),\zeta) \tag{3.0.12}$$

$$g(A^*_\zeta X,Y) = g_{\mathscr{N}}(h^*(X,Y),\zeta) \tag{3.0.13}$$

olur, burada $\zeta \in \Gamma(T^\perp \breve{\mathscr{N}})$ ve $X,Y \in \Gamma(T\breve{\mathscr{N}})$. Bu durumda, Weingarten formülleri

$$\widetilde{\nabla}_X \zeta = -A^*_\zeta X + \nabla^\perp_X \zeta \tag{3.0.14}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X \zeta = A_\zeta X + \nabla^{*\perp}_X \zeta \tag{3.0.15}$$

şeklindedir. Bu formüllerdeki $\nabla^\perp_X$ ve $\nabla^{*\perp}_X$ konneksiyonları $\Gamma(T^\perp \breve{\mathscr{N}})$ üzerine indirgenen metriğe göre Riemann dual konneksiyonlarıdır [8].

Şimdi Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri için aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.0.5. $\widetilde{\nabla}$*, $\mathscr{N}$ istatistiksel manifoldu üzerinde bir dual konneksiyon ve* ∇*, $\breve{\mathscr{N}}$ istatistiksel manifolddan indirgenen konneksiyon olsun. $\widetilde{R}$ ve R sırasıyla $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ nın Riemann eğrilik tensörleri olsun. O halde*

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) &= g_{\mathscr{N}}(R(X,Y)Z,W) + g_{\mathscr{N}}(h(X,Z),h^*(Y,W)) \\ &\quad - g_{\mathscr{N}}(h^*(X,W),h(Y,Z)) \end{aligned} \tag{3.0.16}$$

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp &= \nabla^\perp_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \\ &\quad - \{\nabla^\perp_Y h(Y,Z) - h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z)\} \end{aligned} \tag{3.0.17}$$

$$g_{\mathscr{N}}(R^\perp(X,Y)\xi,\eta) = g_{\mathscr{N}}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta) + g_{\mathscr{N}}([A^*_\xi,A_\eta]X,Y) \tag{3.0.18}$$

bulunur, burada $R^\perp$, $\Gamma(T^\perp \breve{\mathscr{N}})$ üzerinde Riemann eğrilik tensörüdür ve $\zeta,\eta \in \Gamma(T^\perp \breve{\mathscr{N}})$ için $[A^*_\zeta,A_\eta] = A^*_\zeta A_\eta - A_\eta A^*_\zeta$ dır [8].

Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri için $\mathscr{N}$ daki $\widetilde{\nabla}^*$dual konneksiyonu ile ilgili olarak da aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.0.6. $\widetilde{\nabla}^*$*, $\mathscr{N}$ üzerinde bir dual konneksiyon ve* ∇^**, $\breve{\mathscr{N}}$ den indirgenen bir konneksiyon olsun. $\widetilde{R}^*$ ve R^* sırasıyla $\widetilde{\nabla}^*$ ve ∇^* ın Riemann eğrilik tensörleri olsun. O halde,*

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}(\widetilde{R}^*(X,Y)Z,W) &= g_{\mathscr{N}}(R^*(X,Y)Z,W) + g_{\mathscr{N}}(h^*(X,Z),h(Y,W)) \\ &\quad - g_{\mathscr{N}}(h(X,W),h^*(Y,Z)) \end{aligned} \tag{3.0.19}$$

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}^*(X,Y)Z)^\perp &= \nabla^{*\perp}_X h^*(Y,Z) - h^*(\nabla^*_X Y,Z) - h^*(Y,\nabla^*_X Z) \\ &\quad - \{\nabla^{*\perp}_Y h^*(Y,Z) - h^*(\nabla^*_Y X,Z) - h^*(X,\nabla^*_Y Z)\} \end{aligned} \tag{3.0.20}$$

$$g_{\mathscr{N}}(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta) = g_{\mathscr{N}}(\widetilde{R}^*(X,Y)\xi,\eta) + g_{\mathscr{N}}([A_\xi,A^*_\eta]X,Y) \tag{3.0.21}$$

bulunur, burada $R^{*\perp}$, $\Gamma(T^{\perp}\breve{\mathcal{N}})$ *üzerinde* $\widetilde{\nabla}^{\perp}$ *ın Riemann eğrilik tensörü* $\zeta,\eta \in \Gamma(T^{\perp}\breve{\mathcal{N}})$ *ve* $[A^{*}_{\zeta}, A_{\eta}] = A_{\zeta}A^{*}_{\eta} - A^{*}_{\eta}A_{\zeta}$ *dır [8].*

4. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARDA SUBMERSİYONLAR

4.1 İstatistiksel Submersiyonlar

Bu bölümde, submersiyon kavramı istatistiksel manifoldlar üzerinde incelenmektedir.

$\sigma : \mathscr{N}^m \to \mathscr{B}^n$ bir semi-Riemann submersiyon olsun. Her bir $x \in \mathscr{B}$ noktası için indirgenmiş $\bar{g}$ metriğinden oluşan $\sigma^{-1}(x)$ semi-Riemann altmanifoldu, lif diye adlandırılır, $\bar{\mathscr{N}_x}$ veya $\bar{\mathscr{N}}$ ile gösterilir. Bu durumda, her bir lifin boyutunun daima $m-n(=r)$ olduğunu söyleyebiliriz. $\mathscr{N}$ üzerindeki bir vektör alanı, liflere teğet ise daima dikeydir ve liflere dik ise daima yataydır. Total $\mathscr{N}$ uzayının $T_p\mathscr{N}$ tanjant uzayındaki dikey ve yatay alt uzaylarını $\forall p \in \mathscr{N}$ noktası için sırasıyla, $\mathscr{V}_p(\mathscr{N})$ ve $\mathscr{H}_p(\mathscr{N})$ ile göstereceğiz. $\mathscr{N}$ nin $T\mathscr{N}$ tanjant demetindeki dikey ve yatay distribüsyonlarını da sırasıyla, $\mathscr{V}(\mathscr{N})$ ve $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ ile göstereceğiz. Bu durumda $T\mathscr{N}$, $\mathscr{V}(\mathscr{N})$ ve $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ nin direk toplamıdır.

Projeksiyon dönüşümleri sırasıyla, $\mathscr{V} : T\mathscr{N} \to \mathscr{V}(\mathscr{N})$ ve $\mathscr{H} : T\mathscr{N} \to \mathscr{H}(\mathscr{N})$ olarak gösterilsin. Eğer $\mathscr{B}$ üzerinde bir X_* vektör alanı varsa, örneğin $\forall p \in \mathscr{N}$ için $\sigma_*(X_p) = X_{*\sigma(p)}$ gibi, $\mathscr{N}$ üzerinde bir X vektör alanı projeksiyonlanabilir diye isimlendirilir ve X ile X_*, σ-bağlantılıdır denir [25].

Lemma 4.1.1. *Eğer X ve Y vektör alanları, $\mathscr{B}$ manifoldu üzerindeki X_* ve Y_* vektör alanları ile σ-bağlantılı baz vektör alanları ise bu durumda [25],*

(1) $g_{\mathscr{N}}(X,Y) = g_{\mathscr{B}}(X_*,Y_*)o\sigma$ *dır, burada* $g_{\mathscr{N}}$, $\mathscr{N}$ *üzerindeki metrik ve* $g_{\mathscr{B}}$, $\mathscr{B}$ *üzerindeki metriktir,*

(2) $\mathscr{H}[X,Y]$ *bazdır ve* $[X_*,Y_*]$ *ile* σ*-bağlantılıdır.*

$(\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}})$ bir istatistiksel manifold ve $\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ bir semi-Riemann submersiyonu olsun. $\mathscr{N}$ nin afin konneksiyonlarını, $\bar{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}^*$ ile göstereceğiz. Belirtebiliriz ki $\mathscr{N}$ üzerindeki $\bar{\nabla}_U V$ ve $\bar{\nabla}^*_U V$ vektör alanları $\mathscr{N}$ üzerindeki U ve V dikey vektör alanları için iyi tanımlı dikey vektör alanlarıdır yani, $\bar{\nabla}_U V = \mathscr{V}\nabla_U V$ ve $\bar{\nabla}^*_U V = \mathscr{V}\nabla^*_U V$ dır. Üstelik, $\bar{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}^*$ torsiyonsuzdur ve $\bar{g}$ ye göre konjuge (eşlenik) dir. $S = \nabla - \nabla^*$ alalım. Bu durumda S simetriktir, yani $\mathscr{N}$ üzerindeki E ve F vektör alanları için $S_E F = S_F E$ dir. $\hat{\nabla}$, $\mathscr{B}$ üzerinde afin konneksiyon olsun. Eğer X, Y ve $p \in \mathscr{N}$ baz vektör alanları için $\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ submersiyonu, $\sigma_*(\nabla_X Y)_p = \left(\hat{\nabla}_{X_*} Y_*\right)_{\sigma(p)}$

şartını sağlıyorsa, $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ submersiyonu, bir istatistiksel submersiyon diye isimlendirilir [25].

Bundan sonra U, V, W harfleri, daima dikey vektör alanlarını ve X, Y, Z harfleri de yatay vektör alanlarını gösterecektir.

T ve A $(1,2)$-tipindeki tensör alanları, $\mathscr{N}$ deki E ve F vektör alanları için

$$T_E F = \mathscr{H}\nabla_{\mathscr{V}E}\mathscr{V}F + \mathscr{V}\nabla_{\mathscr{V}E}\mathscr{H}F, \tag{4.1.1}$$

$$A_E F = \mathscr{H}\nabla_{\mathscr{H}E}\mathscr{V}F + \mathscr{V}\nabla_{\mathscr{H}E}\mathscr{H}F \tag{4.1.2}$$

ile tanımlanır. Yukarıdaki denklemlerde, ∇ için ∇^* değişikliği yapılırsa sırasıyla, T^* ve A^* tensör alanlarını tanımlarız. Bu durumda, $(T^*)^* = T$ ve $(A^*)^* = A$ olur. Dikey vektör alanları için T ve T^* simetri özelliğine sahiptir. $X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $U, V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$, için

$$g_{\mathscr{N}}(T_U V, X) = -g_{\mathscr{N}}(V, T_U^* X), \quad g_{\mathscr{N}}(A_X Y, U) = -g_{\mathscr{N}}(Y, A_X^* U) \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Böylece, T (sırasıyla A) tensör alanının özdeş olarak sıfır olması için gerek ve yeter koşul T^* (sırasıyla A^*) tensör alanının da özdeş olarak sıfır olmasıdır.

A, $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ nin integrallenebilirliğiyle ilişkili olduğundan, A nın yatay vektörler için simetrik olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ nin, ∇ ya göre integrallenebilir olmasıdır. Üstelik, eğer A ve T özdeş olarak sıfır ise bu durumda, total uzay, baz uzayı ve lif uzayının bir çarpım uzayıdır [25].

Teorem 4.1.1. *$\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ semi-Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda, $(\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}})$ manifoldunun bir istatistiksel manifold olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır [25]:*

(1) *$X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için $\mathscr{H}S_V X = A_X V - A_X^* V$, dir,*

(2) *$X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için $\mathscr{V}S_X V = T_V X - T_V^* X$, dir,*

(3) *Her $x \in \mathscr{B}$ için $\left(\mathscr{N}, \bar{\nabla}, \bar{g}\right)$ istatistiksel bir manifolddur,*

(4) *$\left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ istatistiksel bir manifolddur.*

Şimdi, $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ istatistiksel submersiyon için aşağıdaki lemmaları verebiliriz:

Lemma 4.1.2. *Eğer X ve Y yatay vektör alanları ise bu durumda $A_X Y = -A_Y^* X$ dır [25].*

Lemma 4.1.3. *$X,Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $U,V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için*

$$\nabla_U V = T_U V + \bar{\nabla}_U V,$$
$$\nabla_U X = \mathscr{H}\nabla_U X + T_U X,$$
$$\nabla_X U = A_X U + \mathscr{V}\nabla_X U,$$
$$\nabla_X Y = \mathscr{H}\nabla_X Y + A_X Y,$$

ve

$$\nabla^*_U V = T^*_U V + \bar{\nabla}^*_U V,$$
$$\nabla^*_U X = \mathscr{H}\nabla^*_U X + T^*_U X,$$
$$\nabla^*_X U = A^*_X U + \mathscr{V}\bar{\nabla}^*_X U,$$
$$\nabla^*_X Y = \mathscr{H}\nabla^*_X Y + A^*_X U$$

ifadelerine sahip oluruz. Eğer X temel vektör alanı ise bu durumda, $\mathscr{H}\nabla_U X = A_X U$ ve $\mathscr{H}\nabla^*_U X = A^*_X U$ dır [25].

$E,F \in T\mathscr{N}$, $Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için ∇T ve ∇A kovaryant türevlerini

$$(\nabla_E T)_F V = \nabla_E (T_F V) - T_{\nabla_E F} V - T_F (\nabla_E V),$$
$$(\nabla_E A)_F Y = \nabla_E (A_F Y) - A_{\nabla_E F} Y - A_F (\nabla_E Y),$$

şekilde tanımlayalım. ∇ yı ∇^* olarak değiştirirsek, benzer şekilde kovaryant türevleri $\nabla^* T$ ve $\nabla^* A$ ile tanımlayabiliriz. İstatistiksel submersiyon üzerinde eğrilik tensörünü dikkate alalım. $\bar{R}$ ve $\bar{R}^*$, her bir lifin sırasıyla $\bar{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}^*$ indirgenmiş afin konneksiyonlarına göre eğrilik tensörleri olsunlar.

Ayrıca, $\hat{R}(X,Y)Z$ ve $\left(\hat{R}^*(X,Y)Z\right)$ vektör alanları, yatay vektör alanları olsunlar öyle ki her $p \in \mathscr{N}$ için sırasıyla $\sigma_* \left(\hat{R}(X,Y)Z\right) = \hat{R}(\sigma_* X, \sigma_* Y)\sigma_* Z$ ve
$\sigma_* \left(\hat{R}^*(X,Y)Z\right) = \hat{R}^*(\sigma_* X, \sigma_* Y)\sigma_* Z$ dır, burada $\hat{R}$ ve $\hat{R}^*$ vektör alanları, sırasıyla $\hat{\nabla}$ ve $\hat{\nabla}^*$ afin konneksiyonlarının B üzerindeki eğrilik tensörleridirler [25].

Teorem 4.1.2. *$\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X,Y,Z,Z' \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $\forall U,V,W,W' \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için*

$$
\begin{aligned}
g_{\mathscr{N}}\left(R(U,V)W,W'\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\bar{R}(U,V)W,W'\right) + g_{\mathscr{N}}\left(T_U W, T_V^* W'\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_V W, T_U^* W'\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(U,V)W,X\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U T)_V W, X\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_V T)_U W, X\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(U,V)W,W'\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U T)_V X, W\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_V T)_U X, W\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(U,V)W,W'\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U A)_X V, Y\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_V A)_X U, Y\right) + g_{\mathscr{N}}\left(T_U X, T_V^* Y\right)\\
&\quad - g_{\mathscr{N}}\left(T_V X, T_U^* Y\right) - g_{\mathscr{N}}\left(A_X U, A_Y^* V\right) + g_{\mathscr{N}}\left(A_X V, A_Y^* U\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,U)V,W\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\left[V\nabla_X, \bar{\nabla}_U\right]V, W\right) - g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{[X,U]}V, W\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_U V, A_X^* W\right)\\
&\quad + g_{\mathscr{N}}\left(T_U^* W, A_X V\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,U)V,Y\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_U V, Y\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U A)_X V, Y\right) + g_{\mathscr{N}}\left(A_X U, A_Y^* V\right)\\
&\quad - g_{\mathscr{N}}\left(T_U X, T_V^* Y\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,U)Y,V\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_U Y, V\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U A)_X Y, V\right) + g_{\mathscr{N}}\left(T_U X, T_V Y\right)\\
&\quad - g_{\mathscr{N}}\left(A_X U, A_Y V\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,U)Y,Z\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X A)_Y U, Z\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_U X, A_Y^* Z\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_U Y, A_X^* Z\right)\\
&\quad + g_{\mathscr{N}}\left(A_X Y, T_U^* Z\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,Y)U,V\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_U Y, V\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_Y T)_U X, V\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_U Q)_X Y, V\right)\\
&\quad + g_{\mathscr{N}}\left(T_U X, T_V Y\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_V X, T_U Y\right) - g_{\mathscr{N}}\left(A_X U, A_Y V\right)\\
&\quad + g_{\mathscr{N}}\left(A_X V, A_Y U\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,Y)U,Z\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X A)_Y U, Z\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_Y A)_X U, Z\right) + g_{\mathscr{N}}\left(T_U^* Z, Q_X Y\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,Y)Z,U\right) &= g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X A)_Y Z, U\right) - g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_Y A)_X Z, U\right) - g_{\mathscr{N}}\left(T_U Z, Q_X Y\right),\\
g_{\mathscr{N}}\left(R(X,Y)Z,Z'\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\hat{R}(X,Y)Z,Z'\right) - g_{\mathscr{N}}\left(A_Y Z, A_X^* Z'\right) + g_{\mathscr{N}}\left(A_X Z, A_Y^* Z'\right)\\
&\quad - g_{\mathscr{N}}\left(Q_X Y, A_Z^* Z'\right),
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada $Q_X = A_X + A_X^*$ dır [25].

Her bir $p \in \mathscr{N}$ için $T_p\mathscr{N}$, $\mathscr{H}_p(\mathscr{N})$ ve $\mathscr{V}_P(\mathscr{N})$nin ortonormal bazlarını sırasıyla $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ve $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ göstereceğiz öyle ki $E_i = X_i$ $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ ve $E_{n+\alpha} = U_\alpha$ $(\alpha = 1,2,\ldots,s)$ dır. ∇ afin konneksiyonu ve onun ∇^* konjuge konneksiyonunun $\{E_1,\ldots,E_m\}$ bazına göre yerel koordinatları gözönüne alındığında konneksiyon formlarını sırasıyla ω_a^b ve ω_a^{*b} ile göstereceğiz, burada a ve b, $\{1,2,\ldots,m\}$ aralığında değer alır.

E_a nın spacelike veya timelike durumuna göre ε_a sırasıyla $\varepsilon_a = g(E_a, E_a) = +1$ veya -1 olarak alınsın. (4.1.3) denklemine göre

$$\omega_b^{*a} = -\varepsilon_a \varepsilon_b \omega_a^b. \tag{4.1.4}$$

ifadesine sahip oluruz. $\forall X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $E \in T\mathscr{N}$ için

$$g_{\mathscr{N}}(TX, TY) = \sum \varepsilon_a g_{\mathscr{N}}(T_{U_a}X, T_{U_a}Y),$$
$$g_{\mathscr{N}}(TX, SE) = \sum \varepsilon_a g_{\mathscr{N}}(T_{U_a}X, S_{U_a}E),$$

elde edilir. Böylece, ∇ afin konneksiyonuna göre lifin ortalama eğrilik vektörü,

$$N = \sum \varepsilon_a T_{U_a} U_a$$

yatay vektör alanı tarafından verilmektedir [25].

Lemma 4.1.4. *$X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $E \in T\mathscr{N}$ için*

$$\sum \varepsilon_a g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_E T)_{U_a} U_a, X\right) = g_{\mathscr{N}}(\nabla_E N, X) + g_{\mathscr{N}}(T^* X, SE)$$

dır [25].

İspat: (4.1.4) den

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right) &= \sum \varepsilon_\alpha \omega_\alpha^\beta(E)\, g_{\mathscr{N}}\left(U_\beta, T^*_{U_\alpha} X\right) \\ &= -\sum \varepsilon_\beta \omega_\beta^{*\alpha}(E)\, g_{\mathscr{N}}\left(U_\alpha, T^*_{U_\beta} X\right) \\ &= -\sum \varepsilon_\beta g_{\mathscr{N}}\left(\nabla^*_E U_\beta, T^*_{U_\beta} X\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buaradan

$$\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right) = -\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathscr{N}}\left(\nabla^*_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right)$$

olur.

$U, V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için

$$(\nabla_E T)_U V = \nabla_E(T_U V) - T_V(\mathscr{V}\nabla_E U) - T_U(\mathscr{V}\nabla_E V) - T_U(\mathscr{H}\nabla_E V)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left((\nabla_E T)_{U_\alpha} U_\alpha, X\right) &= \sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E\left(T_{U_\alpha} U_\alpha\right), X\right) - 2\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(T_{U_\alpha}\left(\mathcal{V}\nabla_E U_\alpha\right), X\right)\\ &= g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E N, X\right) + 2\sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right)\\ &= g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E N, X\right) + \sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right)\\ &\quad - \sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(\nabla^*_E U_\alpha, T^*_{U_\alpha} X\right)\\ &= g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E N, X\right) + \sum \varepsilon_\alpha g_{\mathcal{N}}\left(T^*_{U_\alpha} X, S_E U_\alpha\right)\\ &= g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_E N, X\right) + g_{\mathcal{N}}\left(T^* X, SE\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 *kb*-İstatistiksel Submersiyonlar

Bu bölümde kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonları inceleyeceğiz. Bunu yaparken kosimplektik-benzeri ifadesini kısaca *kb* olarak kullanacağız.

$(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir semi-Riemann manifoldu olsun. $1 \leq i \leq n$ için $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$, $\{U_1, U_2, ..., U_\alpha\}$ ve $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bazları sırasıyla $\chi(\mathcal{N})$, $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ ve $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ in ortonormal bazlarını göstersin öyle ki $E_i = X_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ ve $E_{n+\alpha} = U_n$ $(\alpha = 1, 2, 3, ..., s)$ dır. ∇ afin konneksiyonu ve onun ∇^* konjuge konneksiyonunun $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ bazına göre yerel koordinatları gözönüne alındığında konneksiyon formlarını sırasıyla ω_a^b ve ω_a^{*b} ile göstereceğiz, burada a ve b, $\{1, 2, ..., m\}$ aralığında değer alır. $X g_{\mathcal{N}}(Y, Z) = g_{\mathcal{N}}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \widetilde{\nabla}^*_X Z)$ denklemi kullanılarak

$$\omega_a^{*b} = -\omega_b^{*a} \tag{4.2.1}$$

elde edilir (bkz [23]). $X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ için [25] den

$$g_{\mathcal{N}}(TX, TY) = \sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathcal{N}}\left(T_{U_\alpha} X, T_{U_\alpha} Y\right)$$

elde edilir. ∇ afin konneksiyonu ve ∇^* eşlenik konneksiyonuna göre lifin ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} T_{U_\alpha} U_\alpha$$

ve

$$H^* = \sum_{\alpha=1}^{s} T_{U_\alpha} U_\alpha$$

yatay vektör alanları tarafından verilir. $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}, J)$ hemen hemen kontak yapılı, tek boyutlu bir semi-Riemann manifoldu olsun. $\mathscr{N}$ üzerinde X ve Y vektör alanı için J hemen hemen kontakt yapısı, $(1,1)$-tipinde bir J^* tensör alanı ile

$$g_{\mathscr{N}}(JX,Y) + g_{\mathscr{N}}(X,J^*Y) = 0 \tag{4.2.2}$$

şartını sağlasın. Bu durumda, $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}, J)$ manifolduna bir *Hermit-benzeri manifold* denir. Kolayca görülebilir ki $(J^*)^* = J$, $(J^*)^2 = -I$ ve $g_{\mathscr{N}}(JX,J^*Y) = g_{\mathscr{N}}(X,Y)$ dir. $J^2 = -I$ olduğu için $g_{\mathscr{N}}$ metriğine göre J simetrik değildir [23].

Ayrıca J, ∇ ya göre paralel ise $(\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}, J)$ manifolduna *Kähler-benzeri istatistiksel manifold* denir. (4.2.2) den

$$g_{\mathscr{N}}((\nabla_X J)Y,Z) + g_{\mathscr{N}}(Y,(\nabla^*_X J^*)Z) = 0$$

elde edilir (bkz [23]). $(\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}, J)$ *Kähler-benzeri* istatistiksel manifoldunun eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathscr{N}}(Y,Z)X - g_{\mathscr{N}}(X,Z)Y - g_{\mathscr{N}}(Y,JZ)JX + g_{\mathscr{N}}(X,JZ)JY \\ +[g_{\mathscr{N}}(X,JY) - g_{\mathscr{N}}(Y,JX)]JZ \end{array}\right\} \tag{4.2.3}$$

dır.

$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}})$ bir (Φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapılı, tek boyutlu bir semi-Riemann manifoldu olsun. $\mathscr{N}$ üzerinde E ve F vektör alanı için Φ hemen hemen kontakt yapısı $(1,1)$-tipinde $\Phi^\star$ tensör alanı ile

$$g_{\mathscr{N}}(\Phi E,F) + g_{\mathscr{N}}(E,\Phi^* F) = 0$$

şartını sağlarsa $(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}, \Phi, \varepsilon, \eta)$ manifolduna, hemen hemen kontakt metrik manifoldunun belirli bir türü denir [25].

Kolayca görülebilir ki

$$\Phi^* E = -E + \eta(E)\xi \tag{4.2.4}$$

ve

$$g_{\mathscr{N}}(\Phi E, \Phi^* F) = g_{\mathscr{N}}(E,F) - \eta(E)\eta(F) \tag{4.2.5}$$

denklemleri sağlanır. Dolayısıyla, Φ simetrik değildir. $\Phi\xi = 0$ ve $\eta(\Phi E) = 0$ denklemleri hemen hemen kontakt manifold üzerinde sağlanır. Böylece hemen hemen kontakt metrik manifoldun belirli bir türü üzerinde $\Phi^*\xi = 0$ ve $\eta(\Phi^* E) = 0$ eşitliklerini elde ederiz [25].

Üstelik $E \in \chi(\mathcal{N})$ vektör alanı için eğer,

$$\nabla_E \xi = 0, \qquad \nabla_E \Phi = 0 \tag{4.2.6}$$

şartları sağlanıyorsa, $(\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ manifolduna *kb-istatistiksel manifold* denir [19].

Lemma 4.2.1. *$(\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ manifoldunun kb-istatistiksel manifold olması için gerek yeter şart $(\mathcal{N}, \nabla^*, g_{\mathcal{N}}, \Phi^*, \xi, \eta)$ manifoldunun da kb-istatistiksel manifold olmasıdır [26].*

Bir *kb*-istatistiksel manifold üzerinde ∇ ya göre R eğrilik tensörü

$$R(E,F)G = \frac{c}{4}\left\{ \begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(F,G)E - g_{\mathcal{N}}(E,G)F + g_{\mathcal{N}}(E,\Phi G)\Phi F - g_{\mathcal{N}}(F,\Phi G)\Phi E + \\ [g_{\mathcal{N}}(E,\Phi F) - g_{\mathcal{N}}(\Phi E,F)]\Phi G + \eta(E)\eta(G)F - \eta(F)\eta(G)E \\ + g_{\mathcal{N}}(E,G)\eta(F)\xi - g_{\mathcal{N}}(F,G)\eta(E)\xi \end{array} \right\} \tag{4.2.7}$$

dır, burada c bir sabittir. (4.2.7) denkleminde Φ yerine Φ^* alırsak eğrilik tensörü R^* olur.

Şimdi aşağıdaki örnekleri verelim:

Örnek 4.2.1. *$\mathbb{R}^4$ Öklid uzayı, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ lokal koordinat sistemi ile verilsin. $\mathbb{R}^4$ üzerinde J kompleks yapısı*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ve Riemann metriği $g_{\mathbb{R}^4} = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2$ alındığında flat afin konneksiyonu $\nabla^{\mathbb{R}^4}$ ile birlikte $\left(\mathbb{R}^4, \nabla^{\mathbb{R}^4}, g_{\mathbb{R}^4}, J\right)$ bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olur (bkz [25]). $\left(\mathbb{R}, \nabla^{\mathbb{R}}, dt^2\right)$ aşikar istatistiksel manifold olmak üzere $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4, \tilde{\nabla}, \ \tilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^4}\right)$ çarpım manifoldu bir kb-istatistiksel manifold olur. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4, \tilde{\nabla}, \ \tilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^4}, \ \Phi, \ \xi, \ \eta$ manifoldunun eğrilik tensör alanı (4.2.7) eşitliğini $c = 0$ için sağlar. Çünkü $\mathbb{R}^4$ üzerindeki afin konneksiyon flat olduğu için $R = 0$ dır. Benzer şekilde $\left(\mathbb{R}, \nabla^{\mathbb{R}}, dt^2\right)$ aşikar istatistiksel manifoldu için de $R = 0$ dır. Φ, ξ ve η aşağıdaki şekildedir:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi = dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve $\eta = \left(\; 1, 0, -x_3, 0, -x_4 \; \right)$. *Bu durumda*

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur [26].

Örnek 4.2.2. $\mathbb{R}^2$ *Öklid uzayı,* $\{x_1, x_2\}$ *lokal koordinat sistemi ile verilsin., J kompleks yapısı*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ve Riemann metriği olarak $g_{\mathbb{R}^2} = \frac{2}{x_2^2} dx^2 + \frac{1}{x_2^2} dx_2^2$ *alındığında* $\nabla^{\mathbb{R}^2}$ *afin konneksiyonu*

$$\nabla_{\partial_{x_1}} \partial_{x_1} = -\nabla_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = \frac{4}{3x_2} \partial_y,$$

ve

$$\nabla_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = -\nabla_{\partial_v} \partial_{x_1} = -\frac{4}{3x_2} \partial_{x_1}$$

şeklinde tanımlanır ise bu yapı ile birlikte $\left(\mathbb{R}^2, \nabla^{\mathbb{R}^2}, g_{\mathbb{R}^2}, J\right)$ *bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olur [25]. Önceki örneğe benzer olarak* $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \tilde{\nabla}, \; \tilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^2}\right)$ *yapısı bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur. .*

Φ *ve* ξ *aşağıdaki şekildedir:*

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \xi = dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ayrıca

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \tilde{\nabla}, \; \tilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^2}, \Phi, \; \xi, \; \eta \;\right)$ *kb- istatistiksel manifoldunun eğrilik tensör alanı (4.2.7) denklemini* $c = -\frac{8}{9}$ *için sağlar [26].*

$(\mathscr{N}, g_{\mathscr{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontakt yapılı metrik manifoldu ve $\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ Riemann submersiyonu olsun. Eğer $\mathscr{N}$ nin her bir lifi Φ-invaryant Riemann altmanifoldu ve ξ vektör alanına teğet ise, bu durumda σ ye *hemen hemen kontakt metrik submersiyon* denir. Eğer X, $\mathscr{N}$ üzerinde temel vektör alanı ise yani, $\mathscr{B}$ üzerinde X_*vektör alanına σ-bağıntılı ise bu durumda ΦX (ve $\Phi^* X$) temel vektör alanıdır ve ΦX_* (ve ΦX_*) vektör alanına σ-bağlantılıdır [23]. $(\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ *kb*-istatistiksel manifold olsun. $\mathcal{N}$ nin her bir lifi Φ invariant Riemann altmanifold ve ξ ye teğet ise

$$\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathcal{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathcal{B}}\right)$$

istatistiksel submersiyonuna *kb*-istatistiksel submersiyonu denir [26].

Şimdi aşağıdaki lemmaları verebiliriz:

Lemma 4.2.2. $\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathcal{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathcal{B}}\right)$ *kb-istatistiksel submersiyon olsun.* $X \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ *ve* $U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ *için*

$$A_X \xi = 0,$$

$$T_U \xi = 0,$$

$$\mathcal{V} \nabla_X \xi = 0$$

ve

$$\bar{\nabla}_U \xi = 0$$

dır [26].

İspat: Her bir lif $\mathcal{N}$ manifoldunun Φ invaryant Riemann altmanifoldu ve ξ vektör alanına teğet olduğundan bir *kb*- istatistiksel manifoldur. Lemma 4.1.3 nin 3. denklemden $U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ için

$$\nabla_X \xi = A_X \xi + \mathcal{V} \nabla_X \xi$$

olur. Buradan,

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_X \xi, U) = g_{\mathcal{N}}(A_X \xi, U) + g_{\mathcal{N}}(\mathcal{V} \nabla_X \xi, U) \tag{4.2.8}$$

olup *kb*-istatistiksel manifold tanımından $\nabla_X \xi = 0$ olduğu için

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_X \xi, U) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $A_X \xi \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ ve $U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ olduğundan

$$g_{\mathcal{N}}(A_X \xi, U) = 0$$

dır. (4.2.8) den

$$g_{\mathcal{N}}(\mathcal{V} \nabla_X \xi, U) = 0$$

olur. Böylece $\forall U \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için

$$\mathscr{V}\nabla_X \xi = 0 \qquad (4.2.9)$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3 nin 3. denklemden $Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ için

$$\nabla_X \xi = A_X \xi + \mathscr{V}\nabla_X \xi$$

dır. Buradan

$$g_{\mathscr{N}}(\nabla_X \xi, Y) = g_{\mathscr{N}}(A_X \xi, Y) + g_{\mathscr{N}}(\mathscr{V}\nabla_X \xi, Y) \qquad (4.2.10)$$

olup *kb*-istatistiksel manifold tanımından $\nabla_X \xi = 0$ olduğu için

$$g_{\mathscr{N}}(\nabla_X \xi, Y) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $\mathscr{V}\nabla_X \xi \in V(\mathscr{N})$ ve $Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ olduğundan

$$g_{\mathscr{N}}(\mathscr{V}\nabla_X \xi, Y) = 0$$

dır. (4.2.10) den

$$g_{\mathscr{N}}(A_X \xi, Y) = 0$$

olup $\forall Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ için

$$A_X \xi = 0 \qquad (4.2.11)$$

dır.

Lemma 4.1.3 nin 1. denklemden $U \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için

$$\nabla_U \xi = T_U \xi + \bar{\nabla}_U \xi$$

dir. Böylece

$$g_{\mathscr{N}}(\nabla_U \xi, U) = g_{\mathscr{N}}(T_U \xi, U) + g_{\mathscr{N}}\left(\bar{\nabla}_U \xi \;, U\right) \qquad (4.2.12)$$

olur. *kb*-istatistiksel manifold tanımından $\nabla_U \xi = 0$ olduğu için

$$g_{\mathscr{N}}(\nabla_U \xi, U) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $T_U \xi \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $U \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ olduğundan

$$g_{\mathscr{N}}(T_U \xi, V) = 0$$

dır. (4.2.8) den

$$g_{\mathcal{N}}\left(\bar{\nabla}_U \xi, U\right) = 0$$

bulunur ki $\forall U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ için

$$\bar{\nabla}_U \xi \ = 0 \tag{4.2.13}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3 nin 1. denklemden $U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ için

$$\nabla_U \xi = T_U \xi + \bar{\nabla}_U \xi$$

dir. Böylece

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_U \xi, U) = g_{\mathcal{N}}(T_U \xi, U) + g_{\mathcal{N}}\left(\bar{\nabla}_U \xi \ , U\right) \tag{4.2.14}$$

olup *kb*-istatistiksel manifold tanımından $\nabla_U \xi = 0$ olduğu için

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_U \xi, U) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2.13) dan

$$g_{\mathcal{N}}\left(\bar{\nabla}_U \xi \ , U\right) = 0$$

dır. Dolayısıyla $\forall U \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ için

$$g_{\mathcal{N}}(T_U \xi, U) = 0$$

olup

$$T_U \xi \ = 0 \tag{4.2.15}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.3. *$\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathcal{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathcal{B}}\right)$ kb-istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda $X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ ve $U, V \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ için*

$$(\mathcal{H}\nabla_X \Phi) Y = 0,$$

$$A_X \Phi Y = \Phi A_X Y,$$

$$\left(\bar{\nabla}_U \Phi\right) V = 0,$$

$$T_U \Phi X = \Phi T_U X,$$

$$A_X \Phi U = \Phi A_X U,$$

$$(\mathscr{V}\nabla_X\Phi)U = 0,$$

ve eğer X temel ise,

$$A_{\Phi X}U = \Phi A_X U$$

dır [26].

İspat: Yatay ve dikey distribüsyonlarda Φ invaryant olduğundan ve Lemma 4.1.3 nin 4.denkleminde $X,Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ için $Y = \Phi Y$ alalım. Bu durumda

$$\nabla_X \Phi Y = \mathscr{H}\nabla_X \Phi Y + A_X \Phi Y \tag{4.2.16}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra Lemma 4.1.3 de 4. denklemin başına Φ uygulanırsa,

$$\Phi\nabla_X Y = \Phi\mathscr{H}\nabla_X Y + \Phi A_X Y \tag{4.2.17}$$

bulunur. (4.2.16) ve (4.2.17) denklemlerinden

$$(\nabla_X\Phi)Y = \mathscr{H}\nabla_X\Phi Y + A_X\Phi Y - \Phi\mathscr{H}\nabla_X Y - \Phi A_X Y \tag{4.2.18}$$

denklemi elde edilir. (4.2.6) denkleminden

$$(\nabla_X\Phi)Y = 0$$

olur. Ayrıca (4.2.18) denkleminden

$$A_X\Phi Y - \Phi A_X Y = 0$$

ve

$$\nabla_X\Phi Y - \Phi\mathscr{H}\nabla_X Y = \mathscr{H}(\nabla_X\Phi)Y$$

olup

$$\mathscr{H}(\nabla_X\Phi)Y = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Lemma 4.1.3 deki 3. denklemde $U = \Phi U$ alalım. Buna göre,

$$\nabla_X\Phi U = A_X\Phi U + \mathscr{V}\nabla_X\Phi U \tag{4.2.19}$$

olur. Lemma 4.1.3 deki 3. denkleme Φ uygulanırsa

$$\Phi\nabla_X U = \Phi A_X U + \Phi(\mathscr{V}\nabla_X U) \tag{4.2.20}$$

olur. (4.2.19) ve (4.2.20) denklemlerinden

$$(\nabla_X \Phi)U = A_X \Phi U - \Phi A_X U + \mathscr{V} \nabla_X \Phi U \ - \Phi(\mathscr{V} \nabla_X U) \tag{4.2.21}$$

elde edilir. (4.2.6) denkleminden

$$(\nabla_X \Phi)U = 0$$

olur. (4.2.27) den

$$A_X \Phi U = \Phi A_X U$$

ve

$$\mathscr{V}(\nabla_X \Phi)U \ - \Phi(\mathscr{V} \nabla_X U) \ = \Phi(\nabla_X \Phi) U$$

olup

$$\Phi(\nabla_X \Phi) U = 0$$

bulunur. Lemma 4.1.3 deki 1. denklemde V yerine ΦV yazılırsa

$$\nabla_U \Phi V = T_U \Phi V + \bar{\nabla}_U \Phi V \tag{4.2.22}$$

olup Lemma 4.1.3 deki 1. denklemine Φ uygulanırsa

$$\Phi \nabla_U V = \Phi T_U V + \Phi \bar{\nabla}_U V \tag{4.2.23}$$

elde edilir. (4.2.22) ve (4.2.23) denklemlerinden

$$(\nabla_U \Phi) V = T_U \Phi V + \bar{\nabla}_U \Phi V - \Phi T_U V - \Phi \bar{\nabla}_U V \tag{4.2.24}$$

olur. (4.2.6) denkleminden

$$(\nabla_U \Phi) V = 0$$

dır. (4.2.21) den

$$T_U \Phi V = \Phi T_U V$$

ve

$$\Phi(\nabla_U \Phi) V = \left(\bar{\nabla}_U \Phi\right) V$$

$$\left(\bar{\nabla}_U \Phi\right) V = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde, Lemma 4.1.3 nin 2. denkleminde $X = \Phi X$ alalım. Buna göre,

$$\nabla_U \Phi X = \mathscr{H} \nabla_U \Phi X + T_U \Phi X \tag{4.2.25}$$

dir. Daha sonra Lemma 4.1.3 de 2. denkleme Φ uygulanırsa,

$$\Phi\nabla_U X = \Phi\mathscr{H}\nabla_U \Phi X + \Phi T_U \Phi X \tag{4.2.26}$$

elde edilir. (4.2.25) ve (4.2.26) denklemlerinden

$$(\nabla_U \Phi) X = \mathscr{H}\nabla_U \Phi X + T_U \Phi X - \Phi\mathscr{H}\nabla_U X - \Phi T_U X \tag{4.2.27}$$

bulunur. (4.2.6) denkleminden

$$(\nabla_U \Phi) X = 0$$

dir. Ayrıca (4.2.27) denkleminden

$$T_U \Phi X = \Phi T_U X$$

ve

$$\mathscr{H}\nabla_U \Phi X = \Phi\mathscr{H}\nabla_U X \tag{4.2.28}$$

olup X temel vektör alanı olduğu için

$$A_{\Phi X} U = \Phi A_X U$$

olur.

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.1. $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *kb-istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda* $\left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold ve* $\left(\bar{\mathscr{N}}, \overline{\nabla}, \overline{g}, \overline{\Phi}, \xi, \eta\right)$ *istatistiksel altmanifoldu bir kb-istatistiksel manifolddur [26].*

İspat: Lemma 4.2.2 ve 4.2.3 den $\overline{\nabla}_U \xi = 0$ ve $(\overline{\nabla}_U \overline{\Phi})V = 0$ olduğundan (4.2.6) eşitliği sağlanmış olur. Bu durumda $\left(\bar{\mathscr{N}}, \overline{\nabla}, \overline{g}, \overline{\Phi}, \xi, \eta\right)$ bir *kb*- istatistiksel manifolddur.

Diğer taraftan X, Y, Z temel vektör alanları, $X_*, Y_*, Z_* \in \mathscr{B}$ vektör alanları ile σ-bağlantılı olsun. Buna göre

$$g_{\mathscr{B}}((\hat{\nabla}_{X_*} J)Y_*, Z_*) = g_{\mathscr{B}}(\hat{\nabla}_{X_*} JY_* - J\hat{\nabla}_{X_*} Y_*, Z_*) \tag{4.2.29}$$

dır. σ bir *kb*-istatistiksel submersiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{B}}(\hat{\nabla}_{X_*} JY_* - J\hat{\nabla}_{X_*} Y_*, Z_*) &= g_{\mathscr{B}}(\hat{\nabla}_{\sigma_* X} \sigma_*(\Phi Y) - J\hat{\nabla}_{\sigma_* X} \sigma_* Y, \sigma_* Z) \\ &= g_{\mathscr{B}}(\sigma_*(\nabla_X \Phi Y) - \sigma_*(\Phi\nabla_X Y), \sigma_* Z)) \\ &= g_{\mathscr{N}}(\nabla_X \Phi Y - \Phi\nabla_X Y, Z) \\ &= g_{\mathscr{N}}((\nabla_X \Phi)Y, Z) \end{aligned}$$

dir. $(\mathscr{N},\nabla,g_{\mathscr{N}})$ bir *kb*-istatistiksel manifold olduğundan $(\nabla_X\Phi)Y=0$ olur ki (4.2.29) dan $(\hat{\nabla}_{X_*}J)Y_*=0$ olur. Böylece $\left(\mathscr{B},\hat{\nabla},g_{\mathscr{B}}\right)$ manifoldunun bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olduğu görülür.

Lemma 4.2.4. *$\sigma:(\mathscr{N},\nabla,g)\to\left(\mathscr{B},\hat{\nabla},\hat{g}\right)$ kb-istatistiksel submersiyon olsun. Eğer boy$\bar{\mathscr{N}}=1$ ise $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ yatay distribüsyonu integrallenebilir [26].*

İspat: Kabul edelim ki $\sigma:(\mathscr{N},\nabla,g_{\mathscr{N}})\to\left(\mathscr{B},\hat{\nabla},g_{\mathscr{B}}\right)$ *kb*-istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda,

$$(\nabla_X\Phi)Y=\nabla_X\Phi Y-\Phi\nabla_XY=0$$

kb-istatistiksel manifold tanımından $(\nabla_X\Phi)Y=0$ dır. Denkleminde $Y=\Phi Y$ alalım.

$$\nabla_X\Phi(\Phi Y)-\Phi\nabla_X\Phi Y=0$$

olup

$$\nabla_X\Phi^2Y-\Phi\nabla_X\Phi Y=0 \tag{4.2.30}$$

elde edilir. Burada

$$\Phi^2Y=-Y+\eta(Y)\ \xi$$

olduğundan (4.2.30) denklemine uygularsak,

$$\nabla_X(-Y+\eta(Y)\ \ \xi)-\Phi\nabla_XY=0$$

elde edilir. Buradan

$$-\nabla_XY+X(\eta(Y)\xi)-\Phi\nabla_X\Phi Y=0$$

olur. Böylece

$$-\nabla_XY+X\eta(Y))\xi+\eta(Y)\nabla_X\xi-\Phi\nabla_X\Phi Y=0 \tag{4.2.31}$$

denklemi elde edilir. (4.2.31) denkleminde $\eta(Y)=g(Y,\xi)$ alınırsa,

$$-\nabla_XY+Xg(Y,\xi)\xi+\eta(Y)\nabla_X\xi-\Phi\nabla_X\Phi Y=0 \tag{4.2.32}$$

(4.1.3) den

$$-\nabla_XY+g_{\mathscr{N}}(\nabla_XY,\xi)\xi+g_{\mathscr{N}}(Y,\nabla^*_X\xi)\xi+\eta(Y)\nabla_X\xi-\Phi\nabla_X\Phi Y=0 \tag{4.2.33}$$

bulunur. Ayrıca, (4.2.6) den $g_{\mathscr{N}}(Y,\nabla^*_X\xi)=0$ ve $\eta(Y)\nabla_X\xi=0$ olduğu biliniyor. Böylece Lemma 4.1.3 deki 4. denklemi (4.2.33) uygulanırsa

$$-A_XY-\mathscr{H}\nabla_XY+g_{\mathscr{N}}(\mathscr{H}\nabla_XY,\xi)\xi+g_{\mathscr{N}}(A_XY,\xi)\xi-\Phi A_X\Phi Y-\Phi\mathscr{H}\nabla_X\Phi Y=0 \tag{4.2.34}$$

olur. (4.2.34) de $Y = \Phi Y$ alınırsa,

$$-A_X Y - \mathscr{H}\nabla_X Y + g_{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}\nabla_X \Phi Y, \xi\right)\xi + g_{\mathscr{N}}(A_X Y, \xi)\xi - \Phi A_X \Phi Y - \Phi \mathscr{H}\nabla_X \Phi Y = 0 \tag{4.2.35}$$

elde edilir ve böylece

$$-A_X Y - \mathscr{H}\nabla_X Y + g_{\mathscr{N}}(A_X Y, \xi)\xi - \Phi A_X \Phi Y - \Phi \mathscr{H}\nabla_X \Phi Y = 0 \tag{4.2.36}$$

denklemine ulaşılır. (4.2.36) denkleminin dikey kısmı alınırsa,

$$-A_X Y + g_{\mathscr{N}}(A_X Y, \xi)\xi - \Phi A_X \Phi Y = 0 \tag{4.2.37}$$

olur. $g_{\mathscr{N}}(A_X Y, \xi) = 0$ olduğundan (4.2.37) dan

$$A_X Y = -\Phi A_X \Phi Y$$

bulunur. $boy\bar{\mathscr{N}} = 1$ olduğu için $A_X \Phi Y = 0$ bulunur. Böylece $\mathscr{H}\left(\mathscr{N}\right)$ üzerinde $A = 0$ olur ki bu $\mathscr{H}\left(\mathscr{N}\right)$ nin integrallenebilir olduğunu gösterir.

Eğer $E = F = A_X Y$ alınırsa $g_{\mathscr{N}}\left(\Phi E, F\right) + g_{\mathscr{N}}\left(E, \Phi^* F\right) = 0$ denkleminden

$$g_{\mathscr{N}}\left(\Phi E, E\right) + g_{\mathscr{N}}\left(E, \Phi^* E\right) = 0$$

olur ki buradan

$$g_{\mathscr{N}}\left(\Phi E + \Phi^* E, E\right) = 0$$

bulunur. $\forall E \in \mathscr{N}$ için $\Phi E + \Phi^* E = 0$ dır. Yani

$$(\Phi + \Phi^*)E = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $E = F = A_X Y$ olduğundan

$$(\Phi + \Phi^*)A_X Y = 0$$

dır.

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.2. *$\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ kb-istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $rank\left(\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*\right) = boy\bar{\mathscr{N}} - 1$ ise bu durumda $\mathscr{H}\left(\mathscr{N}\right)$ integrallenebilirdir [26].*

İspat: Lemma 4.2.3 den $A_X Y = -\overline{\Phi} A_X \Phi Y$ bulunur. $\{U_1, U_2, ..., U_{s-1}, \xi\}$ ortonormal çatı alanı olsun. $rank\left(\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*\right) = boy\bar{\mathscr{N}} - 1$ olduğundan, $(\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*)U_1, (\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*)U_2, ..., (\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*)U_{s-1}$ vektör alanları lineer bağımsızlardır. O halde

$$A_X \Phi Y = \sum_{i=1}^{s-1} g_{\mathscr{N}}\left(A_X \Phi Y, (\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*)U_i\right)(\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^*)U_i + g^s\left(A_X \Phi Y, \xi\right)\xi$$

olur. Böylece

$$A_X \Phi Y = g_{\mathscr{N}}\left(A_X \Phi Y, \xi\right)\xi$$

elde edilir. Her tarafa Φ uygulanırsa

$$\Phi A_X \Phi Y = g_{\mathscr{N}}\left(A_X \Phi Y, \xi\right)\Phi\xi$$

bulunur. Buna göre (4.2.6) den

$$\Phi A_X \Phi Y = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ üzerinde $A = 0$ olur ki bu ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.3 ve denklem (4.2.10) dan bir sonuca sahip oluruz:

Sonuç 4.2.1. $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir kb-istatistiksel submersiyon olsun. Eğer* $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}^*$ *ise* $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ *integrallenebilirdir [26].*

$\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ bir *kb*-istatistiksel submersiyon olsun. Böylece, aşağıdaki eğrilikleri hesaplayabiliriz:

(4.2.7) den, $U, V, W, W' \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için

$$R(U,V)W = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathscr{N}}(V,W)U - g_{\mathscr{N}}(U,W)V + g_{\mathscr{N}}\left(U,\overline{\Phi}W\right)W - g_{\mathscr{N}}\left(V,\overline{\Phi}W\right)\overline{\Phi}U \\ -g_{\mathscr{N}}\left(V,\overline{\Phi}W\right)\overline{\Phi}U + \left[g_{\mathscr{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right) - g_{\mathscr{N}}\left(\overline{\Phi}U,V\right)\right]\overline{\Phi}W \\ +\xi(U)\xi(W)V - \xi(V)\xi(W)U + g_{\mathscr{N}}(U,W)\xi(V)\xi \\ -g_{\mathscr{N}}(V,W)\xi(U)\xi \end{array}\right\}$$

olur. Buna göre

$$g_{\mathscr{N}}\left(R(U,V)W,W'\right) = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathscr{N}}(V,W)g_{\mathscr{N}}(U,W') - g_{\mathscr{N}}(U,W)g_{\mathscr{N}}(V,W') + g_{\mathscr{N}}\left(U,\overline{\Phi}W\right)g_{\mathscr{N}}(\overline{\Phi}V,W') \\ -g_{\mathscr{N}}\left(V,\overline{\Phi}W\right)g_{\mathscr{N}}(\overline{\Phi}U,W') - g_{\mathscr{N}}\left(V,\overline{\Phi}W\right)g_{\mathscr{N}}(\overline{\Phi}U,W') \\ \left[g_{\mathscr{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right) - g_{\mathscr{N}}\left(\overline{\Phi}U,V\right)\right]g_{\mathscr{N}}(\overline{\Phi}W,W') + \xi(U)\xi(W)g_{\mathscr{N}}(V,W') \\ -\xi(V)\xi(W)g_{\mathscr{N}}(U,W') + g_{\mathscr{N}}(U,W)\xi(V)\xi(W') \\ -g_{\mathscr{N}}(V,W)\xi(U)\xi(W') \end{array}\right\} \tag{4.2.38}$$

elde edilir. (4.2.7) den $U, V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ ve $X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ için

$$R(X,U)V = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g(U,V)X - g(X,V)U + g\left(X,\overline{\Phi}V\right)\overline{\Phi}U \\ -g\left(U,\overline{\Phi}V\right)\Phi X + \left[g\left(X,\overline{\Phi}U\right) - g(\Phi X,U)\right]\overline{\Phi}V \\ +\xi(X)\xi(V)U - \xi(U)\xi(V)X + g(X,V)\xi(U)\xi \\ -g(U,V)\xi(X)\xi \end{array}\right\}$$

olur. Böylece

$$g_{\mathcal{N}}(R(X,U)V,Y) = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(U,V)g_{\mathcal{N}}(X,Y) - g_{\mathcal{N}}(X,V)g_{\mathcal{N}}(U,Y) + g_{\mathcal{N}}\left(X,\overline{\Phi}V\right)g_{\mathcal{N}}(\overline{\Phi}U,Y) \\ -g_{\mathcal{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y) - g_{\mathcal{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y) \\ +\left[g_{\mathcal{N}}\left(X,\overline{\Phi}U\right) - g_{\mathcal{N}}(\Phi X,U)\right]g_{\mathcal{N}}(\overline{\Phi}U,Y) + \xi(X)\xi(V)g_{\mathcal{N}}(U,Y) \\ -\xi(U)\xi(V)g_{\mathcal{N}}(X,Y) + g_{\mathcal{N}}(X,V)\xi(U)\xi(Y) - g_{\mathcal{N}}(U,V)\xi(X)\xi(Y) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{c}{4}\left\{\left[g_{\mathcal{N}}(U,V) - \xi(U)\xi(V)\right]g_{\mathcal{N}}(X,Y) - g_{\mathcal{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y)\right\} \tag{4.2.39}$$

olur. (4.2.7) den $U,V \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ ve $X,Y \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ için

$$R(X,U)Y = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g(U,Y)X - g(X,Y)U + g(X,\Phi Y)\overline{\Phi}U \\ -g(U,\Phi Y)\Phi X + \left[g\left(X,\overline{\Phi}U\right) - g(\Phi X,U)\right]\Phi Y \\ +\xi(X)\xi(Y)U - \xi(U)\xi(Y)X + g(X,Y)\xi(U)\xi \\ -g(U,Y)\xi(X)\xi \end{array}\right\}$$

dır. Buna göre

$$g_{\mathcal{N}}(R(X,U)Y,V) = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(U,Y)g_{\mathcal{N}}(X,V) - g_{\mathcal{N}}(X,Y)g_{\mathcal{N}}(U,V) + g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y)g_{\mathcal{N}}(\overline{\Phi}U,V) \\ -g_{\mathcal{N}}(U,\Phi Y)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,V) + \left[g_{\mathcal{N}}\left(X,\overline{\Phi}U\right) - g_{\mathcal{N}}(\Phi X,U)\right]g_{\mathcal{N}}(\Phi Y,V) \\ +\xi(X)\xi(Y)g_{\mathcal{N}}(U,V) - \xi(U)\xi(Y)g_{\mathcal{N}}(X,V) \\ +g_{\mathcal{N}}(X,Y)\xi(U)\xi(V) - g_{\mathcal{N}}(U,Y)\xi(X)\xi(V) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{c}{4}\left\{-g_{\mathcal{N}}(X,Y)g_{\mathcal{N}}(U,V) + g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y)g_{\mathcal{N}}(\overline{\Phi}U,V) + g_{\mathcal{N}}(X,Y)\xi(U)\xi(V)\right\}$$

$$= -\frac{c}{4}\left\{\left[g_{\mathcal{N}}(U,V) - \xi(U)\xi(V)\right]g_{\mathcal{N}}(X,Y) - g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y)g_{\mathcal{N}}(\overline{\Phi}U,V)\right\} \tag{4.2.40}$$

dır. (4.2.7) den, $X,Y,Z,Z' \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ için

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(Y,Z)X - g_{\mathcal{N}}(X,Z)Y + g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Z)\Phi Y \\ -g_{\mathcal{N}}(Y,\Phi Z)\Phi X + \left[g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y) - g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y)\right]\Phi Z \\ +\xi(X)\xi(Z)Y - \xi(Y)\xi(Z)X + g_{\mathcal{N}}(X,Z)\xi(Y)\xi \\ -g_{\mathcal{N}}(Y,Z)\xi(X)\xi \end{array}\right\}$$

olup

$$g_{\mathcal{N}}\left(R(X,Y)Z,Z'\right) = \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(Y,Z)g_{\mathcal{N}}(X,Z') - g_{\mathcal{N}}(X,Z)g_{\mathcal{N}}(Y,Z') + g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Z)g_{\mathcal{N}}(\Phi Y,Z') \\ -g_{\mathcal{N}}(Y,\Phi Z)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Z') + \left[g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y) - g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y)\right]g_{\mathcal{N}}(\Phi Z,Z') \\ +\xi(X)\xi(Z)g_{\mathcal{N}}(Y,Z') - \xi(Y)\xi(Z)g_{\mathcal{N}}(X,Z') \\ +g_{\mathcal{N}}(X,Z)\xi(Y)\xi(Z') - g_{\mathcal{N}}(Y,Z)\xi(X)\xi(Z') \end{array}\right\}$$

$$= \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathcal{N}}(Y,Z)g_{\mathcal{N}}(X,Z') - g_{\mathcal{N}}(X,Z)g_{\mathcal{N}}(Y,Z') + g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Z)g_{\mathcal{N}}(\Phi Y,Z') \\ -g_{\mathcal{N}}(Y,\Phi Z)g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Z')\left[g_{\mathcal{N}}(X,\Phi Y) - g_{\mathcal{N}}(\Phi X,Y)\right]g_{\mathcal{N}}(\Phi Z,Z') \end{array}\right\} \tag{4.2.41}$$

olur.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2.3. $\sigma : (\mathcal{N},\nabla,g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathcal{B},\hat{\nabla},g_{\mathcal{B}}\right)$ *bir kb-istatistiksel submersiyon olsun. Eğer* $\mathcal{H}(\mathcal{N})$*, integrallenebilir ve* $\mathcal{N}$ *nin eğrilik tensörü, (4.2.7) denklemindeki gibi ise bu durumda* $\mathcal{B}$ *nin eğrilik tensörü, (4.2.3) deki gibidir [26].*

İspat: $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. Buna göre $A=0$ dır. Esas (total) uzayın eğrilik tensörü, (4.2.7) denklemini sağladığından (4.2.41) denklemi elde edilir. Dolayısıyla, eğer X,Y,Z vektör alanları temel vektör alanları olarak alınırlarsa ve X_*,Y_*,Z_* vektör alanlarıyla σ-bağlantılı olurlarsa (4.2.41) denkleminden

$$\begin{aligned}\sigma_*\left(\hat{R}(X,Y)Z\right) &= \hat{R}(\sigma_* X,\sigma_* Y)\sigma_* Z \\ &= \frac{c}{4}\left\{\begin{array}{c} g_{\mathscr{B}}(Y_*,Z_*)X_* - g_{\mathscr{B}}(X_*,Z_*)Y_* - g_{\mathscr{B}}(Y_*,JZ_*)JX_* + g_{\mathscr{B}}(X_*,JZ_*)JX_* \\ +\left[g_{\mathscr{B}}(X_*,JY_*) - g_{\mathscr{B}}(JX_*,Y_*)\right]JZ_* \end{array}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.2. $\sigma:(\mathscr{N},\nabla,g_{\mathscr{N}})\to\left(\mathscr{B},\hat{\nabla},g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir kb-istatistiksel submersiyon olsun. Eğer boy*$\bar{\mathscr{N}}=1$ *veya rank*$\left(\overline{\Phi}+\overline{\Phi}^*\right)=$ *boy*$\bar{\mathscr{N}}-1$ *ve* $\mathscr{N}$ *nin eğrilik tensörü (4.2.7) deki gibi ise bu durumda* $\mathscr{B}$ *nin eğrilik tensörü, (4.2.3) denlemindeki gibidir [26].*

$\mathscr{H}(\mathscr{N})$ integrallenebilir ise (4.2.39) denkleminden

$$g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_U V,Y\right)-g_{\mathscr{N}}\left(T_U X,T^*_V Y\right)=\frac{c}{4}\left\{\left[g_{\mathscr{N}}(U,V)-\xi(U)\xi(V)\right]g_{\mathscr{N}}(X,Y)-g_{\mathscr{N}}\left(U,\overline{\Phi}V\right)g_{\mathscr{N}}(\Phi X,Y)\right\}.$$

buluruz. Son denklemde U ve V üzerinde bir kısıtlama yapılırsa:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)-\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left(T_{U_\alpha}X,T^*_{U_\alpha}Y\right)=\frac{c}{4}\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\begin{array}{c}\left[g_{\mathscr{N}}(U_\alpha,U_\alpha)-\eta(U_\alpha)\eta(U_\alpha)\right]g_{\mathscr{N}}(X,Y)\\ -g_{\mathscr{N}}\left(U_\alpha,\overline{\Phi}U_\alpha\right)g_{\mathscr{N}}(\Phi X,Y)\end{array}\right\}$$

olup

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)-\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left(T_{U_\alpha}X,T^*_{U_\alpha}Y\right)=\frac{c}{4}\left\{(s-1)g_{\mathscr{N}}(X,Y)-\left(iz\overline{\Phi}\right)g_{\mathscr{N}}(\Phi X,Y)\right\} \tag{4.2.42}$$

elde edilir. $\mathscr{N}$ üzerinde T simetrik olduğundan (4.1.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right) &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g_{\mathscr{N}}(\nabla_X T_{U_\alpha}U_\alpha,Y)-g_{\mathscr{N}}(T_{U_\alpha}\nabla_X U_\alpha,Y)-g_{\mathscr{N}}(T_{U_\alpha}\nabla_X U_\alpha,Y)\right\} \\ &= g_{\mathscr{N}}(\nabla_X H,Y)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g_{\mathscr{N}}(\nabla_X U_\alpha,{T^*}_{U_\alpha}Y)+g_{\mathscr{N}}(\nabla_X U_\alpha,{T^*}_{U_\alpha}Y)\right\}\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

elde edilir. (4.2.1) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left({T^*}_{U_\alpha}Y,\nabla^*_X U_\alpha\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left({T^*}_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha\right)$$

bulunur. Bu son denklem (4.2.43) de kullanılırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=g_{\mathscr{N}}(\nabla_X H,Y)+\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathscr{N}}\left(T^*_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha-\nabla^*_X U_\alpha\right)$$

olup (4.1.1) den

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathcal{N}}\left((\nabla_X T)_{U_\alpha} U_\alpha, Y\right) = g_{\mathcal{N}}(\nabla_X H, Y)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{s} g_{\mathcal{N}}\left(T^*_{U_\alpha} Y, T_{U_\alpha} X - T^*_{U_\alpha} X\right) \tag{4.2.44}$$

olur. (4.2.42) ve (4.2.44) gözönüne alınırsa

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_X H, Y) - g_{\mathcal{N}}(T^* Y, T^* X) = \frac{c}{4}\left\{(s-1)\, g_{\mathcal{N}}(X,Y) - \left(iz\overline{\Phi}\right) g_{\mathcal{N}}(\Phi X, Y)\right\} \tag{4.2.45}$$

elde edilir. Eğer $\mathscr{H}\nabla_X H = 0$ ise bu durumda,

$$-g_{\mathcal{N}}(T^* Y, T^* X) = \frac{c}{4}\left\{(s-1)\, g_{\mathcal{N}}(X,Y) - \left(iz\overline{\Phi}\right) g_{\mathcal{N}}(\Phi X, Y)\right\} \tag{4.2.46}$$

bulunur.

Böylece, (4.2.46) kullanılarak aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir:

Teorem 4.2.4. $\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir kb-istatistiksel submersiyon ve* $\mathcal{N}$ *nin eğrilik tensör alanı (4.2.7) deki gibi olsun. Kabul edelim ki* $\mathscr{H}(\mathcal{N})$ *integrallenebilir ve keyfi* $X \in \mathscr{H}(\mathcal{N})$ *için* $\mathscr{H}\nabla_X H = 0$ *olmak üzere [26]*

i) Eğer $c = 0$ *ise bu durumda* $\mathcal{N}$ *ve* $\mathscr{B}$ *flattır ve herbir lif* $\mathcal{N}$ *nin bir tamamen geodezik altmanifoldudur,*

ii) $iz\overline{\Phi} = 0$ *ve* $c < 0$ *durumunda boy*$\bar{\mathcal{N}} > 1$ *dir.*

Sonuç 4.2.3. $\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir kb-istatistiksel submersiyon ve* $\mathcal{N}$ *nin eğrilik tensör alanı (4.2.7) deki gibi olsun. Eğer* $\mathscr{H}(\mathcal{N})$ *integrallenebilirse ve H bir sabit vektör alanı ise bu durumda Teorem 4.2.4 nin sonuçları elde edilir [26].*

4.3 Anti-İnvaryant *kb*-İstatistiksel Submersiyonlar

Bu alt bölümde *kb*-istatistiksel submersiyonların anti-invaryantlığı incelendi ve distribüsyonlar için karakterizasyonlar verildi.

Tanım 4.3.1. $(\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ *bir kb-istatistiksel manifold ve* $\left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olsun. Eğer* $\sigma : \mathcal{N} \to \mathscr{B}$ *bir istatistiksel submersiyonu* Φ *ye göre anti-invaryant, yani* $\Phi\mathscr{V}(\mathcal{N}) \subseteq \mathscr{H}(\mathcal{N})$ *ise bu durumda* σ *ye anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon denir.*

$\sigma : \mathscr{N} \to \mathscr{B}$ bir $(\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}, \Phi, \xi, \eta)$ bir *kb*-istatistiksel manifolddan bir $\left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold bir anti-invaryant *kb*-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre Tanım 4.3.1'den $\Phi\mathscr{H}(\mathscr{N}) \cap \mathscr{V}(\mathscr{N}) \neq \{0\}$ dır. $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ de $\Phi(\mathscr{V}(\mathscr{N}))$ distribüsyonuna tamamlayan dik distribüsyon μ ile gösterilirse

$$\mathscr{H}(\mathscr{N}) = \Phi\mathscr{V}(\mathscr{N}) \oplus \mu \tag{4.3.1}$$

ifadesine sahip oluruz. Kolayca görülebilir ki μ, Φ endomorfizmi altında $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ distribüsyonunun bir invaryant distribüsyondur.

Böylece, $X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ için

$$\Phi X = PX + FX \tag{4.3.2}$$

ifadesine sahip oluruz, burada $PX \in \Gamma(\mu)$ ve $FX \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ dır.

Diğer taraftan, $\sigma_*(\mathscr{H}(\mathscr{N})) = T\mathscr{B}$ ve σ, bir istatistiksel submersiyon olduğundan (4.3.2) kullanılarak $g_{\mathscr{B}}(\sigma_*\Phi V, \sigma_* FX) = 0$ elde edilir, $\forall X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $V \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$. Bu ise

$$T\mathscr{B} = \sigma_*(\Phi\mathscr{V}(\mathscr{N})) \oplus \sigma_*(\mu)$$

olduğunu vurgular.

Örnek 4.3.1. *Örnek 4.2.1 de verilen* $\left(IR \times IR^4, \tilde{\nabla}, g = dt^2 + g_{IR^4}\right)$ *kb-istatistiksel manifoldunu alalım. Buna göre* $\sigma : \left(IR \times IR^4, \tilde{\nabla}, \tilde{g}\right) \to \left(IR^4, \nabla^{IR^4}, g_{IR^4}\right)$ *kb-istatistiksel submersiyonu*

$$\sigma(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 + x_4}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

projeksiyon dönüşümü olarak tanımlayalım. Bu durumda direk hesaplamalarla

$$\mathscr{V}(M) = span\{V_1 = \partial x_1 + \partial x_2, V_2 = \partial x_3 - \partial x_4, V_3 = \xi = \partial t\}$$

ve

$$\mathscr{H}(M) = span\{X_1 = \partial x_3 + \partial x_4, X_2 = \partial x_1 - \partial x_2\}$$

bulunur. Ayrıca, $\Phi(V_1) = -X_1$ *ve* $\Phi(V_2) = X_2$ *olup*

$\Phi\mathscr{V}(M) \subset \mathscr{H}(M)$ *dir. Diğer taraftan* $i = 1, 2, 3$ *için*

$$g(x_i, x_i) = g_{IR^4}(\sigma_* x_i, \sigma_* x_i)$$

sağlanır. O halde σ*, bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyondur.*

Lemma 4.3.1. *$\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda,*

$$g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}U\right) = 0 \tag{4.3.3}$$

$$g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{Y}PX, \Phi^{*}U\right) = g_{\mathscr{N}}\left(\nabla^{*}_{Y}PX, \Phi^{*}U\right) = -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}A^{*}_{Y}U\right) \tag{4.3.4}$$

dır.

İspat: $X \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ve $U \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için $\Phi X = PX + FX$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}U\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\Phi X - FX, \Phi^{*}U\right) \\ &= g_{\mathscr{N}}\left(\Phi X, \Phi^{*}U\right) \\ &= g_{\mathscr{N}}\left(X, U\right) - \eta\left(X\right)\eta\left(U\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}U\right) = 0$ denkleminde Y ye göre türev alınırsa,

$$Y g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}U\right) = 0 \Rightarrow g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{Y}PX, \Phi^{*}U\right) = -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \nabla^{*}_{Y}\Phi^{*}U\right)$$

olup *kb*-istatistiksel manifold tanımından

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{Y}PX, \Phi^{*}U\right) &= -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}\left(\nabla^{*}_{Y}U\right)\right) \\ &= -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}A^{*}_{Y}U + \Phi^{*}\left(\mathscr{V}\nabla^{*}_{Y}U\right)\right) \\ &= -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}A^{*}_{Y}U\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}U\right) = g_{\mathscr{N}}\left(\Phi^{*}U, PX\right)$ olduğu gözönüne alınırsa Y ye göre türev alınarak işlemler yapıldığında

$$g_{\mathscr{N}}\left(\nabla^{*}_{Y}PX, \Phi^{*}U\right) = -g_{\mathscr{N}}\left(PX, \Phi^{*}A^{*}_{Y}U\right)$$

bulunur.

Teorem 4.3.1. *$\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\mathscr{H}(\mathscr{N})$ integrallenebilirdir,

ii)

$$g_{\mathscr{N}}\left(\left(\nabla\sigma_*\right)(X,FY)-\left(\nabla\sigma_*\right)(Y,FX),\sigma_*\Phi^*U\right)=g_{\mathscr{N}}\left(PX,\Phi^*A_Y^*U\right)-g_{\mathscr{N}}\left(PY,\Phi^*A_X^*U\right)$$
$$-\left[\eta\left(A_XY\right)-\eta\left(A_YX\right)\right]\eta(U),$$

iii)

$$g_{\mathscr{N}}\left(A_XFY-A_YFX,\Phi^*U\right)=-g_{\mathscr{N}}\left(PX,\Phi^*A_Y^*U\right)+g_{\mathscr{N}}\left(PY,\Phi^*A_X^*U\right)$$
$$+\left[\eta\left(A_XY\right)-\eta\left(A_YX\right)\right]\eta(U),$$

burada $X,Y\in\mathscr{H}(\mathscr{N})$ *ve* $U,\xi\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ *dır.*

İspat: $X,Y\in\mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $U,\xi\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ i çin $\Phi U=tU$, $\Phi^*U=t^*U$ $\Phi X\in\Gamma(\mathscr{H}(\mathscr{N})\oplus\mu)$, $\Phi^*X\in\Gamma(\mathscr{V}(\mathscr{N})\oplus\mu)$ dır.

Buna göre,

$$\begin{aligned}g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_YX,U\right)&=g_{\mathscr{N}}\left(\Phi\nabla_YX,\Phi^*U\right)-\eta\left(\nabla_YX\right)\eta(U)\\&=g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_Y\Phi X,\Phi^*U\right)-\eta\left(\nabla_YX\right)\eta(U)\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

olur. Böylece (4.3.5) ten,

$$\begin{aligned}g_{\mathscr{N}}\left([X,Y],U\right)&=g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_xY-\nabla_YX,U\right)\\&=g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X\Phi Y,\Phi^*U\right)-\eta\left(\nabla_XY\right)\eta(U)\\&+g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_Y\Phi X,\Phi^*U\right)+\eta\left(\nabla_YX\right)\eta(U)\\&=g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X(PY+FY),\Phi^*U\right)-\eta\left(H\nabla_XY+A_XY\right)\eta(U)\\&-g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_Y(PX+FX),\Phi^*U\right)+\eta\left(H\nabla_YX+A_YX\right)\eta(U)\end{aligned}$$

olup (4.3.4) ten,

$$g_{\mathscr{N}}\left([X,Y],U\right)=-g_{\mathscr{N}}\left(PY,\Phi^*A_X^*U\right)+g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_XFY,\Phi^*U\right)-\eta\left(A_XY\right)\eta(U)$$
$$+g_{\mathscr{N}}\left(PX,\Phi^*A_Y^*U\right)-g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_YFX,\Phi^*U\right)+\eta\left(A_YX\right)\eta(U)$$

σ bir *kb*-istatistiksel submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{N}}([X,Y],U) &= g_{\mathcal{B}}(\sigma_*\nabla_x FY, \sigma_*\Phi^*U) - g_{\mathcal{N}}(PY, \Phi^*A_X^*U) - \eta(A_XY)\eta(U) \\
&- g_{\mathcal{B}}(\sigma_*\nabla_Y FX, \sigma_*\Phi^*U) + g_{\mathcal{N}}(PX, \Phi^*A_Y^*U) + \eta(A_YX)\eta(U) \\
&= g_{\mathcal{B}}(-(\nabla\sigma_*)(X,FY) + (\nabla\sigma_*)(Y,FX), \sigma_*\Phi^*U) \\
&- g_{\mathcal{N}}(PY, \Phi^*A_X^*U) + g_{\mathcal{N}}(PX, \Phi^*A_Y^*U) \\
&- [\eta(A_XY) - \eta(A_YX)]\eta(U)
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

elde edilir.

Böylece (4.3.6) dan *(i)* ⇔*(ii)* olduğu görülür.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
(\nabla\sigma_*)(Y,FX) - (\nabla\sigma_*)(X,FY) &= -\sigma_*(\nabla_Y FX - \nabla_X FY) \\
&= -\sigma_*(A_Y FX - A_X FY)
\end{aligned}$$

olduğundan *(ii)* ⇔*(iii)* ispatlanmış olur.

Benzer bir sonuç ∇^*için de verilebilir:

Sonuç 4.3.1. $\sigma : (\mathcal{N}, \nabla, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathcal{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathcal{B}}\right)$ *bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ *integrallenebilirdir,*

ii)

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{B}}((\nabla^*\sigma_*)(X,FY) - (\nabla^*\sigma_*)(Y,FX), \sigma_*\Phi^*U) &= g_{\mathcal{N}}(Px, \Phi^*A_Y^*U) - g_{\mathcal{N}}(PY, \Phi^*A_X^*U) \\
&+ [\eta(A_X^*Y) - \eta(A_Y^*X)]\eta(U),
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{N}}(A_X^*FY - A_Y^*FX, \Phi^*U) &= -g_{\mathcal{N}}(pX, \Phi^*A_Y^*U) + g_{\mathcal{N}}(PY, \Phi^*A_X^*U) \\
&[\eta(A_X^*Y) + \eta(A_Y^*X)]\eta(U),
\end{aligned}$$

burada $X,Y \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$ *ve* $U,\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$*dır.*

Şimdi foliasyonların tamamen geodezikliğini verebilir:

Teorem 4.3.2. $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\mathscr{H}(\mathscr{N})$, $\mathscr{N}$ *üzerinde bir tamamen geodezik foliasyon tanımlar,*

ii)

$$g_{\mathscr{N}}\left(A_X FY, \Phi^* U\right) = g_{\mathscr{N}}\left(PY, \Phi^* A_X^* U\right) + \eta\left(A_X Y\right)\eta\left(U\right),$$

iii)

$$g_{\mathscr{B}}\left(-\left(\nabla\sigma_*\right)\left(X, FY\right), \sigma_*\Phi^* U\right) = g_{\mathscr{B}}\left(PY, \Phi^* A_X^* U\right) + \eta\left(A_X Y\right)\eta\left(U\right),$$

burada $X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ *ve* $U \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ *dır.*

İspat: $X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $U, \xi \in \mathscr{V}(\mathscr{N})$ için (4.3.5) den

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X Y, U\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X \Phi Y, \Phi^* U\right) - \eta\left(\nabla_X Y\right)\eta\left(U\right) \\ &= g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X\left(PY + FY\right), \Phi^* U\right) - \eta\left(\nabla_X Y\right)\eta\left(U\right) \end{aligned}$$

olur (4.3.4) ten,

$$g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X Y, U\right) = -g_{\mathscr{N}}\left(PY, \Phi^* A_X^* U\right) + g_{\mathscr{N}}\left(A_X FY, \Phi^* U\right) - \eta\left(A_X Y\right)\eta\left(U\right) \tag{4.3.7}$$

olur. (4.3.7)dan *(i)* $\Leftrightarrow$*(ii)* sağlanır. $\nabla_X U = A_X U + \mathscr{V}\nabla_X U$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g_{\mathscr{N}}\left(A_X FY, \Phi^* U\right) &= g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X FY - \mathscr{V}\nabla_X FY, \Phi^* U\right) \\ &= g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_X FY, \Phi^* U\right) \\ &= g_{\mathscr{B}}\left(\sigma_*\nabla_X FY, \sigma_*\Phi^* U\right) \\ &= g_{\mathscr{B}}\left(-\left(\nabla\sigma_*\right)\left(X, FY\right), \sigma_*\Phi^* U\right) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

bulunur ki *(ii)* $\Leftrightarrow$*(iii)* olması için yeterlidir.

Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2. $\sigma : (\mathscr{N}, \nabla, g_{\mathscr{N}}) \to \left(\mathscr{B}, \hat{\nabla}, g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\mathscr{H}(\mathscr{N})$, $\mathscr{N}$ *üzerinde bir tamamen geodezik foliasyon tanımlar,*

ii)

$$g_{\mathscr{N}}\left(A_X^* FY, \Phi^* U\right) = g_{\mathscr{N}}\left(PY, \Phi^* A_X^* U\right) + \eta\left(A_X Y\right)\eta\left(U\right),$$

iii)

$$g_{\mathscr{B}}\left(-\left(\nabla^{*}\sigma_{*}\right)(x,FY),\sigma_{*}\Phi^{*}U\right)=g_{\mathscr{N}}\left(PY,\Phi^{*}A_{X}^{*}U\right)+\eta\left(A_{X}^{*}Y\right)\eta\left(U\right),$$

burada $X,Y\in\mathscr{H}(\mathscr{N})$*ve* $U,\xi\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ *dır.*

Teorem 4.3.3. $\sigma:(\mathscr{N},\nabla,g_{\mathscr{N}})\to\left(\mathscr{B},\hat{\nabla},g_{\mathscr{B}}\right)$ *bir anti-invaryant kb-istatistiksel submersiyon olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\mathscr{V}(\mathscr{N})$, $\mathscr{N}$ *üzerinde bir tamamen geodezik foliasyon tanımlar,*

ii)

$$g_{\mathscr{B}}\left(\left(\nabla^{*}\sigma_{*}\right)\left(U\Phi_{X}^{*}\right),\sigma_{*}\Phi V\right)=0,$$

iii)

$$T_{U}^{*}FX+A_{P^{*}X}^{*}U\in\Gamma(\mu),$$

burada $X\in\mathscr{H}(\mathscr{N})$ *ve* $V,U,\xi\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ *dır.*

İspat: $X\in\mathscr{H}(\mathscr{N})$ ve $V,U,\xi\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ olsun.

$$\begin{aligned}g_{\mathscr{N}}\left(\nabla_{U}V,X\right)&=g_{\mathscr{N}}\left(\Phi\nabla_{U}V,\Phi^{*}X\right)\\&=Ug_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\Phi^{*}X\right)-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\nabla_{U}^{*}\Phi^{*}X\right)\\&=-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\nabla_{U}^{*}\Phi^{*}X\right)\\&=-g_{\mathscr{B}}\left(\sigma_{*}\Phi V,\sigma_{*}\nabla_{U}^{*}\Phi^{*}X\right)\\&=g_{\mathscr{B}}\left(\sigma_{*}\Phi V,\left(\nabla^{*}\sigma_{*}\right)\left(U,\Phi^{*}X\right)\right)\end{aligned}$$

olur ki bu *(i)* ⇔*(ii)* olmasını sağlar.

Ayrıca

$$\begin{aligned}g_{\mathscr{B}}\left(\sigma_{*}\Phi V,\left(\nabla^{*}\sigma_{*}\right)\left(U,\Phi^{*}X\right)\right)&=-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\nabla_{U}^{*}\Phi^{*}X\right)\\&=-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\nabla_{U}^{*}\left(P^{*}X+F^{*}X\right)\right)\\&=-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,\nabla_{U}^{*}F^{*}X+[U,P^{*}X]+\nabla_{P^{*}X}^{*}U\right)\end{aligned}$$

olup $[U,P^{*}X]\in\mathscr{V}(\mathscr{N})$ olduğundan,

$$\begin{aligned}g_{\mathscr{B}}\left(\sigma_{*}\Phi V,\left(\nabla^{*}\sigma_{*}\right)\left(U,\Phi^{*}X\right)\right)=&-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,T_{U}^{*}F^{*}X+\mathscr{V}\nabla_{U}^{*}F^{*}X\right)\\&-g_{\mathscr{N}}\left(\Phi V,A_{P^{*}X}^{*}U+\mathscr{V}\nabla_{P^{*}X}^{*}U\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece *(ii)* ⇔*(iii)* ispatlanmış olur.

5. SONUÇ

Riemann submersiyonlarının Klauza-Klein teorisinde ve robotik teorisinde uygulamaları olduğunu biliyoruz. Gerçekten, Klauza-Klein teorisinde yeni bir modelin genel çözümü, Einstein denklemlerini sağlayan harmonik dönüşümler cinsinden ifade edilebilir. Üstelik, yüksek boyutlu uzaydan skaler alanların değer aldığı uzaya Riemann submersiyonlar tarafından çok genel bir çözüm sınıfı verilir (bkz. [38], bölüm 9). Öte yandan Altafini [6], yedekli robotlarda Riemann submersiyon yöntemini kullanmıştır. Ayrıca robotikte ters kinematik ile Riemann submersiyonlardaki vektör alanlarının yatay liftleri arasında yakın bir ilişki olduğunu göstermiştir.

Riemann submersiyonları ile ilgili daha fazla bilgi için [36], [39], [40], [41], [42], [43], [44] kaynaklarına bakılabilir.

İstatistiksel geometri ve diferansiyel geometri arasında derin bir ilişki olduğu iyi bilinmektedir. Bu bağlamda ilk adım, istatistiksel çıkarım, bilgi kaybı ve tahmin problemlerini tartışmak için genel bir çalışma alanı sağlayan ve bir Riemann metriğini olasılık dağılımların uzayında kullanan C.R. Rao [1] tarafından atılmıştır. Bu bağlamdaki en doğal kavram, istatistiksel bir manifold kavramıdır. İstatistiksel manifoldlar doğal olarak bir afin-metrik geometri ailesiyle ilişkilidir ve kendine paralel eğrilerle bağıl entropi ile ilgili ilginç özellikler elde edilebilir. Son zamanlarda H.V. Lê [16], herhangi bir diferansiyellenebilir istatistiksel manifoldun, sonlu bir küme üzerinde olasılık ölçüleri uzayına yerleştirilebileceğini ispatladı ve S. Amari ve S.L. Lauritzen'in açık bir problemine olumlu bir cevap verdi [4].

Bu tezde, yukarıdaki bilgiler ışığında, istatistiksel submersiyonlarla ilgili bazı sonuçlar verdik. Öncelikle Riemann submersiyonu ve ardından istatistiksel submersiyonu tanıdık. Daha sonra kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonu inceleyerek anti-invaryant kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonu elde ettik ve distribüsyanların (dağılımların) karakterizasyonları üzerine çalıştık.

Bu çalışmalar doğrultusunda pek çok çalışma yapılabilir ve farklı karakterizasyonlar verilebir.

KAYNAKLAR

[1] **Rao, C.R.** (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Reson. J. Sci. Educ*, *20*, 78–90.

[2] **Ali, S.**, **Cafaro, C.**, **Kim, D.H. ve Mancini, S.** (2010). The effect of microscopic correlations on the information geometric complexity of Gaussian statistical models, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *389*(16), 3117–3127.

[3] **Gomez, I.S.** (2017). Notions of the ergodic hierarchy for curved statistical manifolds, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *484*, 117–131.

[4] **Amari, S.i.** (1985). Lecture notes in statistics, *Differential-Geometrical methods in Statistics*.

[5] **Furuhata, H.**, **Hasegawa, I.**, **Okuyama, Y.**, **Sato, K. ve Shahid, M.H.** (2017). Sasakian statistical manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, *117*, 179–186.

[6] **Altafini, C.** (2004). Redundant robotic chains on Riemannian submersions, *IEEE transactions on robotics and automation*, *20*(2), 335–340.

[7] **Ay, N. ve Tuschmann, W.** (2002). Dually flat manifolds and global information geometry, *Open Systems & Information Dynamics*, *9*(2), 195–200.

[8] **Aydin, M.E.**, **Mihai, A. ve Mihai, I.** (2015). Some inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature, *Filomat*, *29*(3), 465–477.

[9] **Blaga, A.M.** (2014). Subtangent-like statistical manifolds, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, *83*(1), 147–156.

[10] **Blaga, A.M. ve Crasmareanu, M.** (2016). Golden-statistical structures, *Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, *69*(9).

[11] **Calin, O. ve Udrişte, C.** (2014). *Geometric modeling in probability and statistics*, cilt121, Springer.

[12] **Furuhata, H.** (2009). Hypersurfaces in statistical manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, *27*(3), 420–429.

[13] **Kazan, A.** (2019). Conformally-projectively flat trans-Sasakian statistical manifolds, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *535*, 122441.

[14] **Kazan, A. ve Kazan, S.** (2018). Sasakian statistical manifolds with semi-symmetric metric connection, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, *1*(4), 226–232.

[15] **Kurose, T.** (1990). Dual connections and affine geometry, *Mathematische Zeitschrift*, *203*(1), 115–121.

[16] **Lê, H.V.** (2006). Statistical manifolds are statistical models, *Journal of Geometry*, *84*(1), 83–93.

[17] **Matsuzoe, H.**, **Takeuchi, J.i. ve Amari, S.i.** (2006). Equiaffine structures on statistical manifolds and Bayesian statistics, *Differential Geometry and its Applications*, *24*(6), 567–578.

[18] **Milijević, M.** (2015). *CR submanifolds in holomorphic statistical manifolds* (Doktora Tezi).

[19] **Murathan, C. ve Şahin, B.** (2018). A study of Wintgen like inequality for submanifolds in statistical warped product manifolds, *Journal of Geometry*, *109*(2), 1–18.

[20] **Noguchi, M.** (1992). Geometry of statistical manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, *2*(3), 197–222.

[21] **Zhang, J.** (2007). A note on curvature of α-connections of a statistical manifold, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, *59*(1), 161–170.

[22] **Abe, N. ve Hasegawa, K.** (2001). An affine submersion with horizontal distribution and its applications, *Differential Geometry and its Applications*, *14*(3), 235–250.

[23] **Takano, K.** (2004). Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions, *Tensor. New series*, *65*(2), 128–142.

[24] **Takano, K.** (2004). Examples of the statistical submersion on the statistical model, *Tensor. New series*, *65*(2), 170–178.

[25] **Takano, K.** (2006). Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions, *Journal of Geometry*, *85*(1), 171–187.

[26] **Aytimur, H. ve Özgür, C.** (2019). On cosymplectic-like statistical submersions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, *16*(3), 1–14.

[27] **Siddiqui, A.N.**, **Chen, B.Y. ve Siddiqi, M.D.** (2021). Chen inequalities for statistical submersions between statistical manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *18*(04), 2150049.

[28] **Vîlcu, A.D. ve Vîlcu, G.E.** (2015). Statistical manifolds with almost quaternionic structures and quaternionic Kähler-like statistical submersions, *Entropy*, *17*(9), 6213–6228.

[29] **Vîlcu, G.E.** (2021). Almost product structures on statistical manifolds and para-Kähler-like statistical submersions, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, *171*, 103018.

[30] **Hacısalihoğlu, H.H.** (2003). *Diferensiyel geometri*, Hacısalihoğlu Eğtim Hizmetleri Firması.

[31] **Gündüzalp, Y.** (2007). *Riemann submersiyonlarının geometrisi üzerine* (Yüksek Lisans Tezi). Fen Bilimleri Enstitüsü.

[32] **Sahin, B.** (1996). *CR-Altmanifoldların Geometrisi* (Doktora Tezi). Yüksek Lisans Tezi, Inönü Universitesi, Fen-Bilimleri Enstitüsü Malatya, Türkiye.

[33] **Do Carmo, M.P. ve Flaherty Francis, J.** (1992). *Riemannian geometry*, cilt 6, Springer.

[34] **O'neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press.

[35] **Boothby, W.M. ve Boothby, W.M.** (2003). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Revised*, cilt120, Gulf Professional Publishing.

[36] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların diferensiyel geometrisi*, Nobel Yayın.

[37] **Singh, A.P.** (2018). Survey on Geometry of Statistical Submanifolds, *International Journal of Mathematical Sciences*, *17*(3-4), 171–189.

[38] **Pastore, A.M.**, **Falcitelli, M. ve Ianus, S.** (2004). *Riemannian submersions and related topics*, World Scientific.

[39] **Akyol, M.A. ve ŞAHİN, B.** (2016). Conformal anti-invariant submersions from almost Hermitian manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, *40*(1), 43–70.

[40] **O'Neill, B.** (1966). The fundamental equations of a submersion., *Michigan Mathematical Journal*, *13*(4), 459–469.

[41] **O'Neill, B.** (1967). Submersions and geodesics, *Duke Mathematical Journal*, *34*(2), 363–373.

[42] **Sahin, B.** (2013). Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Taiwanese Journal of Mathematics*, *17*(2), 629–659.

[43] **Sahin, B.** (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications*, Academic Press.

[44] **Watson, B.** (1976). Almost hermitian submersions, *Journal of Differential Geometry*, *11*(1), 147–165.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Beren Nazar KARATAŞ KILINÇ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültsie, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2012-2014 Ankara Butik Dershanesinde çalıştı (Kızılay).
- 2012-2014 Avsallar Cemal Karataş Dershanesinde çalıştı (Alanya).
- 2014-2015 Sınav Dershanesinde çalıştı (Çankaya).
- 2015-2018 Tatvan Atatürk Meslek ve Teknik Anadolu Lisesinde çalıştı (Bitlis).
- 2015-2018 Tatvan Hüseyin Çelik Anadolu Lisesinde çalıştı (Bitlis).
- 2018-halen Pütürge Çok Programlı Anadolu Lisesinde çalışmaktadır. (Malatya).

YÜKSEK LİSANS VEYA DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Karatas Kılınc, B.N., Kazan, S. (2022, May).** Anti-invariant cosymplectic-like statistical submersions, Ist-International Congress on Modern Sciences, Taşkent Kimya-Teknoloji Enstitüsü,10-11 Mayıs 2022.