T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONSOLİDE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLARIN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ece ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

TEMMUZ 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONSOLİDE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLARIN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ece ŞAHİN
(36193614011)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca bilgi, birikim ve tecrübelerini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr.Yılmaz YILMAZ'a tez yazım sürecime yardım, bilgi ve tecrübeleriyle destek olan sayın Prof. Dr. M. Kemal Özdemir'e ve eğitim hayatım boyunca büyük fedakarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bu zorlu süreçte büyük motivasyon kaynağım olan aileme teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Konsolide Normlu Quasilineer Uzayların Bazı Yeni Özellikleri Üzerine " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ece ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi,
$\Omega_C(E)$	: Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümlelerinin ailesi,
$\Omega(E)$	: Bir E normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümlelerinin ailesi,
$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$	: Reel sayıların kapalı aralıklarının uzayı,
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$	: $[a,b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayı,
$C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$	: $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin regüler alt uzayı,
$C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s$	: $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin singüler alt uzayı,
$D(A,B)$	: A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık,
$boyX$	: X quasilineer uzayının boyutu,
X_{sym}	: X quasilineer uzayının simetrik alt uzayı,
X_r	: X quasilineer uzayının regüler alt uzayı,
X_s	: X quasilineer uzayının singüler alt uzayı
$r-boyX$	: X quasilineer uzayının regüler boyutu,
$s-boyX$	: X quasilineer uzayının singüler boyutu,

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONSOLİDE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLARIN
BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

ECE ŞAHİN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

32+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

"Konsolide Normlu Quasilineer Uzayların Bazı Yeni Özellikleri Üzerine" isimli yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamızla ilgili kısa bir literatür özeti sunuldu.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavram ve tanımlara yer verildi.

Üçüncü bölümde quasilineer uzay, normlu quasilineer uzay, iç çarpım quasilineer uzay, quasilineer bağımlılık-bağımsızlık ve sağlam zeminli quasilineer uzay kavramları tanıtıldı.

Tezin orjinal kısmı olan dördücü bölümde ise farklı bir quasilineer uzayı örneği olan $C\left([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}}\right)$ uzayı tanıtıldı. $C\left([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}}\right)$ uzayı klasik normuyla bir Banach quasilineer uzaydır. Ancak bu uzay üzerine bir iç çarpım inşa edildi ve bu iç çarpımla tam olmayan bir iç çarpım uzayı olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Quasilineer Uzaylar, Normlu Quasilineer Uzaylar, Konsolide Quasilineer Uzaylar

ABSTRACT

Master Thesis

ON SOME NEW PROPERTIES OF CONSOLIDATED NORMED QUASILINEAR SPACES

Ece ŞAHİN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

32+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

The master's thesis named "On Some New Properties of Consolidated Normed Quasilinear Spaces" consists of four chapters. In the first part, a brief summary of the literature about our study was presented.

In the second part, some basic concepts and definitions that will be used in the next chapters are given.

In the third chapter, the concepts of quasilinear space, normed quasilinear space, inner product quasilinear space, quasilinear dependency-independence and solidly grounded quasilinear space are introduced.

In the fourth chapter, which is the original part of the thesis, a different quasilinear space example, $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ space is introduced. The space $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ is a Banach quasilinear space with its classical norm. However, an inner product was built on this space and it was shown that there is an incomplete inner product space with this inner product.

Keywords: Quasilinear Spaces, Normed Spaces, Consolide Quasilinear Spaces

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz alanında oldukça önemli bir yere sahip olan normlu uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzayları lineer uzay yapısı teşkil eder. Lineer uzay yapısı üzerine inşa edilen bu uzayların bir takım özellikleri sayesinde klasik tek değerli fonksiyonlarla oluşturulan diferensiyel denklemlerin birçok doğa problemine modellemesinde etkili olmuşlardır ve bu problemrin açıklanmasında önemli mesafeler kat edilmiştir. Fakat bazı özel doğa problemleri vardır ki bunlar klasik tek değerli fonksiyonlar tarafından modellenemeyebilir. Bunun sonucu olarak küme diferansiyel denklemlerin çözümleri için benzer modellemeleri yapmak zorlaşmış ve küme diferensiyel teorisi ilerletilememiştir. Bunun temel sebebi küme değerli diferensiyel denklemlerin lineer uzay yapısı teşkil etmeyişidir. Bu tarz lineer uzay yapısı teşkil etmeyen uzayları incelemek amacıyla quasilineer uzay yapısı geliştirilmişir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada quasilineer uzay yapısı Aseev'in [1] numaralı çalışmasından yararlanılarak ele alınacaktır. Aseev [1] 'de quasilineer uzay yapısını tanımlamış ve bu yapıyı tanımlarken bir kısmi sıralama bağıntısı kullanmıştır. Gerçekleştiği çalışmalar sonucu olarak "$=$" bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olması nedeniyle her lineer uzayın özel bir çeşit quasilineer uzay olduğunu görmüştür. Quasilineer uzayların en önemli özelliğinin lineer uzaylardan farklı olarak uzaydaki her elemanın tersinin mevcut olmadığıdır. Quasilineer uzayda her elemanın tersi mevcut olursa kısmi sıralama bağıntısının "$=$" bağıntısına dönüştüğünü yani her lineer uzayın aynı zamanda bir quasilineer uzay olduğundan bahsetmiştir. Aseev ayrıca quasilineer uzaylarda norm tanımını kullanırken de kısmi sıralama bağıntısından faydalanmıştır.

Aseev [1] numaralı çalışmasında lineer uzay yapısına sahip olmayan önemli uzaylardan bahsetmiştir. Bilimdeki uygulamalarda quasilineer uzay yapısına sahip olan, en çok karşımıza çıkan ve işlenen quasilineer uzay örneği reel sayıların kapalı aralıklarının uzayı olan $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ uzayıdır. Bu uzayların cebirsel yapısına ilişkin kapsamlı araştırmalar da [2], [3] ve [4] numaralı kaynaklarda incelenmiştir.

Dört bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümünde ileriki bölümlerde kullanacağımız bazı kavram, tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde quasilineer uzay tanımı ele alınmış, quasilineer uzaylarda bağımlılık-bağımsızlık, kavramlarına yer verildi. Yine bu bölümde quasilineer uzayın regüler ve singüler boyutu kavramları tanıtıldı. Ayrıca iç çarpım quasilineer uzaylar ve Hilbert quasilineer uzaylar tanımları [5] den yararlanılarak verildi. Son olarak da dördüncü bölümde sıklıkla bahsettiğimiz konsolide quasilineer uzay yapısını daha iyi anlayabilmek için zemin kavramına ve konsolide quasilineer uzay tanımına bu bölümde yer verildi.

Tezin orjinal bölümü olarak sunulan dördüncü bölümde ise $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ konsolide fonksiyon uzay yapısı ele alındı. Bilindiği gibi klasik analizde önemli bir yer tutan $C[a,b]$ fonksiyon uzayı; $[a,b]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye veya $\mathbb{C}$ ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Biz de bu tanıma benzer şekilde $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayının tanımını verdik. Aynı zamanda bu fonksiyon uzayının tıpkı $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ uzayı gibi regüler, singüler ve simetrik alt uzaylara sahip olduğunu ve konsolide bir quasilineer uzay yapısına sahip olduğunu çalışmamızda gösterdik. Ayrıca $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ üzerinde bir iç çarpım tanımladığı [4] numaralı kaynaktan faydalanılarak gösterilmiştir. $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayı klasik normuyla Banach quasilineer uzaydır. Ancak biz bu uzay üzerine bir iç çarpım koyduk ve bu iç çarpımla $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin tam olmayan bir iç çarpım uzayı olduğunu gösterdik. Yine bu bölümde iki boyutlu intervaller uzayı kavramına yer verdik Bu kümenin özellikleri [6] da gösterilmiştir. İnterval değerli fonksiyonlar arasında diklik kavramının tanımlandığını söyledik ve bunlarla ilgili örneklere yer verdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Temel Kavramlar ve Tanımlar

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyulan bazı temel cebir, topoloji ve fonksiyonel analiz kavramalarına yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. *[7] $(A, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere $u, v \in A$ için*

$$u \preceq v \text{ veya } v \preceq u$$

oluyorsa (u, v) elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar adı verilir.

Tanım 2.1.2. *[8] Kısmi sıralı bir A kümesinin tam sıralı her alt kümesine A da bir zincir denir.*

Tanım 2.1.3. *[7] $(A, \preceq)$ bir kısmi sıralı küme ve $B \subset A$ olsun.*

Bir $z \in B$ için $u \preceq z$ olacak şekilde z den farklı A'nın bir u elemanı bulunamıyorsa z elemanına B kümesinin bir minimal elemanı,

Bir $n \in B$ için $n \preceq t$ olacak şekilde n den farklı A nın bir $t \in B$ bulunamıyorsa n elamanına B kümesinin bir maksimal elemanı,

Her $z \in B$ için $x \preceq z$ olacak şekilde bir $x \in M$ varsa x elemanına B kümesinin en küçük elemanı veya minimumu,

Her $z \in B$ için $z \preceq y$ olacak şekilde bir $y \in B$ varsa y elemanına B kümesinin en büyük elemanı veya maksimumu denir.

Lemma 2.1.1. *[7] A kısmi sıralı bir küme ve A daki her C zinciri bir üst sınıra sahip olması durumunda A kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir.*

2.1.1 Topolojik Uzaylar ve Metrik Uzaylar

Bu bölümde topolojik uzay ve metrik uzay kavramlarının bilindiği kabul edilerek bazı sonuçlar ve örnekler ifade edilmiştir.

Örnek 2.1.1. *$p \geq 1$ olmak üzere;*

$$\ell_p = \left\{ x \in (x_k) \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

kümesi üzerinde

$$d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu metrik tanımlar. Dolayısıyla $(\ell_p,\, d)$ *bir metrik uzaydır.*

Tanım 2.1.4. *[9] Bir* $(X,\, d)$ *bir metrik uzayında A kümesine her* $x\in A$ *için x merkezli bir açık yuvar A da kalabiliyorsa A ya açık küme denir. A nın metrik uzaydaki tümleyeni açık küme ise A ya kapalı küme adı verilir.*

Tanım 2.1.5. *[9] Bir* $x\in A$ *için x merkezli bir yuvar A nın alt kümesi oluyorsa x elemanına A nın bir iç noktası adı verilir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve* $\mathring{A}$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.6. *[9] Metrik uzaydaki bir x elemanı için x merkezli her delik yuvarın (x i içermeyen yuvar) A ile ara kesiti boş kümeden farklı ise x elemanına A' nın bir yığılma noktası denir. A nın bütün yığılma noktalarının kümesi* A' *ile gösterilir. A kümesi ile* A' *kümesinin birleşimine A nın kapanışı denir ve* $\bar{A}$ *ile gösterilir. Yani*

$$\bar{A}=A\cup A'$$

şeklinde ifade edilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi yığılma noktası kümeye ait olmayabilir.

Tanım 2.1.7. *[9] Bir X metrik uzayında* $A\subset X$ *ve* $\bar{A}=X$ *oluyorsa A kümesine X de yoğundur denir. İyi bilinmektedir ki bir metrik uzayda bir A kümesinin içi A'nın kapsadığı en geniş alt kümedir ve* $\bar{A}$ *ise A yı kapsayan en dar kümedir. A nın içi A da yoğundur. Buna örnek olarak* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi alışılmış metrikle* $\mathbb{R}$ *de yoğundur.*

Tanım 2.1.8. *[7] Eğer bir X uzayı X de yoğun olan sayılabilir bir alt kümeye sahip ise X uzayına ayrılabilirdir denir.*

Örnek 2.1.2. $C\,[a,\, b]$ *fonksiyon uzayı ayrılabilirdir. Fakat* ℓ_∞ *dizi uzayı ayrılabilir değildir.*

2.1.2 Lineer Uzaylar ve Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.9. *[7] Bir K cismi üzerinde bir X vektör uzayı x,y,... elemanlarından oluşan ve üzerinde iki cebirsel işlemin tanımlı olduğu boş olmayan bir X kümesidir öyle ki X kümesi toplama adını verdiğimiz ve X üzerinde bir iç işlem olan "+" işlemi ile bir Abel grubu ve dış işlem dediğimiz*

$$\cdot:\mathbb{K}\times X\longrightarrow X,\ (\alpha,x)\longrightarrow\alpha\cdot x$$

skalerle çarpma işlemiyle de bir gruptur.

Örnek 2.1.3. *$C[a,b]$ fonksiyon uzayı $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.*

Tanım 2.1.10. *[7] X bir vektör uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun X ten miras kalan cebirsel işlemlerle Y de bir vektör uzayı oluyorsa Y ye X in bir alt vektör uzayı veya lineer alt uzayı denir.*

Teorem 2.1.1. *[7] Y, X vektör uzayının bir alt uzayıdır. $\Longleftrightarrow \forall\alpha$, β skaleri ve $\forall x$, $y \in Y$ için $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$ dir.*

Örnek 2.1.4. *[8] $\mathbb{R}^2$ de 0 merkezli 1 yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar konveks kümeler iken $\mathbb{R}^2$ de 0 merkezli 1 yarıçaplı çember konveks küme değildir.*

Tanım 2.1.11. *[10] Bir X vektör uzayında $u_1, u_2, ..., u_n$ vektörlerini göz önüne alalım.*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + ... + \alpha_n \cdot u_n$$

şeklinde α_k skalerleri değiştikçe ortaya çıkan vektörlere u_1,u_2, ..., u_n vektörlerinin bir lineer kombinasyonu adı verilir.

Tanım 2.1.12. *[10] $A = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ kümesi bir X vektör uzayının bir alt kümesi olsun. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ skaler olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k = \theta \Leftrightarrow \alpha_k = 0, \ (1 \leq k \leq n)$$

oluyorsa A ya lineer bağımsız küme, aksi halde lineer bağımlı küme adı verilir.

Tanım 2.1.13. *[10] x_1,x_2, ..., x_n vektörlerinin tüm muhtemel lineer kombinasyonlarının oluşturduğu kümeye bu vektörlerin gerdiği uzay denir. Ve $span(x_1,x_2,...,x_n)$ şeklinde gösterilir. Eğer $span(x_1,x_2,...,x_n) = X$ oluyorsa $x_1,x_2,...,x_n$ elemanları X vektör uzayını geriyor tabiri kullanılır.*

Tanım 2.1.14. *[7] V bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Reel değerli $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon her $u, v \in X$ ve her $\lambda \in K$ için*

$$\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0,$$

$$\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \, \|u\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir norm , $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Örnek 2.1.5. *Kompleks terimli ve sınırlı bütün dizilerin kümesi olan*

$$\ell_\infty = \left\{ x \in (x_k) \subset \mathbb{C} : \sup_k \ |x_k| < \infty \right\}$$

dizi uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile bir normlu uzaydır.

Sonuç 2.1.1. *[7] Her normlu uzay*

$$d(x,\, y) = \|x - y\|$$

norm metriği ile bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.6. $x \in C\,[a,b]$ *olmak üzere* $C\,[a,b]$*,*

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.1.7. $p \geq 1$ *olan bir reel sayı olsun.*

$$\ell_p = \left\{ x \in (x_k) \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

lineer uzayı

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile bir normlu uzaydır. Ayrıca ℓ_p

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği bir metriktir. Böylece $(\ell_p,\, d)$ *ikilisi bir metrik uzaydır.*

Örnek 2.1.8. ℓ_∞ *dizi uzayı*

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.1.3 İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzaylar

Tanım 2.1.15. *[11] X bir vektör uzayı ve $\langle \cdot,\cdot \rangle$: $X \times X \to \mathbb{K}$' ya bir fonksiyon olsun. Burada $\mathbb{K}$ X vektör uzayının cismidir. Eğer $\langle \cdot,\cdot \rangle$ işareti ile gösterilen fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa X üzerinde bir iç çarpım adını alır.*

$$\langle x,x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$
$$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle},$$
$$\langle \alpha \cdot x,y \rangle = \alpha \cdot \langle x,y \rangle$$
$$\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$$

Tanım 2.1.16. *[10] H bir iç çarpım uzayı olsun. İç çarpım normu olan*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x \rangle}$$

normuyla H tam ise H'ye bir Hilbert uzay denir.

Örnek 2.1.9. $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{C}^n$ *ve,* $v = (v_1, v_2, ... v_n) \in \mathbb{C}^n$ *olmak üzere;*

$$\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \overline{v_i}$$

iç çarpım altında $\mathbb{C}^n$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.1.17. *[10] Bir X iç çarpım uzayında. x ve y gibi iki elemanı göz önüne alalım.*

$$\langle x,y \rangle = 0$$

oluyorsa, x, y elemanlarına diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. $S \subseteq X$ olsun. Her $x,y \in S$ için $x \perp y$ ise S'ye ortagonaldir denir. Ayrıca S' nin her elemanının normu 1 ise yani $\|x\| = 1$ oluyorsa S'ye ortonormal küme denir.

3. QUASİLİNEER UZAYLAR VE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR

Fonksiyonel analizde birçok önemli uzay çeşidi örneği olan Normlu uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzaylar vektör uzay kavramı üzerine inşa edilmiştir. Quasilineer uzayların vektör uzay yapısına benzediği ancak vektör uzay yapısından ayıran özelliği uzaydaki her elemanın tersinin mevcut olmamasıdır. Eğer bir quasilineer uzayda her elemanın tersi mevcut ise kısmi sıralama bağıntısı "$=$" bağıntısına dönüşür ve uzay bir vektör uzay olur. Aseev quasilineer uzaylarda tanımlanan norm fonksiyonunun da aynı kımi sıralama bağıntısı ile vektör uzaylardaki norm fonksiyonuna dönüştüğünü göstermiştir.

Fonksiyonel analizden biliyoruz ki her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır. Bu bölümde iç çarpım fonksiyonu ile quasilineer uzay üzerinde bir norm oluşturulabileceğini, böylelikle vektör uzaylarda olduğu gibi quasilineer uzaylarda da bir iç çarpım tanımlanabileceği [5] numaralı kaynaktan faydalanılarak gösterilecektir.

Bu bölümde Aseev'in [1] numaralı çalışması temel alınarak quasilineer uzaylar, normlu quasilineer uzaylar, quasilineer uzaylarda lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları tanıtılacaktır. Yine bu bölümde iç çarpım quasilineer uzaylar ve Hilbert quasilineer uzayların tanımları [5] dan yararlanılarak verilecektir. Son olarak da tezin dördüncü bölümünde sıkça kullandığımız zemin kavramı ve konsolide quasilineer uzay yapısını bu bölümde tanımladık.

3.0.1 Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.0.1. *[1]* $(X,\preceq)$ *bir kısmi sıralı küme olsun. Her* $x, y, z, v \in X$ *için ve her* α, β *skalerleri için cebirsel toplama ve skalerle çarpma*

$$+ \; : \; X \times X \to X$$

$$\cdot \; : \; X \times \mathbb{K} \to X$$

işlemleri $\preceq$ bağıntısına uyumlu bir şekilde aşağıdaki şartları sağlıyorsa X kümesine bir quasilineer uzay adı verilir

$$x \preceq x \tag{3.0.1}$$

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq z \text{ olduğunda } x \preceq z \tag{3.0.2}$$

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq x \text{ olduğunda } x = y \tag{3.0.3}$$

$$x + y = y + x \tag{3.0.4}$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \tag{3.0.5}$$

$$x+\theta = \theta + x = x \text{ olacak şekilde } X\text{'in sıfır elemanı denilen bir } \theta \in X \text{ vardır,} \tag{3.0.6}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \tag{3.0.7}$$

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \tag{3.0.8}$$

$$1 \cdot x = x \tag{3.0.9}$$

$$0 \cdot x = 0 \tag{3.0.10}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \tag{3.0.11}$$

$$x \preceq y,\ z \preceq v \Longrightarrow x+z \preceq y+v \tag{3.0.12}$$

$$x \preceq y \Longrightarrow \alpha \cdot x \preceq \alpha \cdot y \tag{3.0.13}$$

Önerme 3.0.1. *[1] Lineer uzaylar "=" kısmi sıralama bağıntısıyla quasilineer uzaylardır. Ancak her quasilineer uzayın lineer uzay olduğunu söyleyemeyiz.*

Önerme 3.0.2. *[1] Her quasilineer uzaydaki sıfır elemanı yani θ minimaldir.*

Tanım 3.0.2. *[12] Bir X quasilineer uzayında x elemanının toplamaya göre tersi varsa x elemanına regüler eleman, yoksa x elemanına singüler eleman denir. Tüm regüler elemanların kümesi X_r ile gösterilir. Tüm singüler elemanların kümesi de 0 elemanını da dahil ederek gösterdiğimiz küme ise X_s kümesidir.*

Önerme 3.0.3. *[12] Quasilineer uzaylarda regüler elemanlar minimaldir.*

3.0.2 Quasilineer Uzaylar Üzerinde Norm Kavramı

Tanım 3.0.3. *[1] X bir quasilineer uzaydan reel sayılara tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu şu özelliklere sahip ise X üzerinde bir norm adını alır. Her u, v vektörü ve her α skaleri için*

$$u = \theta \Leftrightarrow \|u\| = 0$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\| ,(\alpha \text{ skaler})$$

$$u \preceq v \text{ olduğunda } \|u\| \leq \|v\|$$

$$\text{Her } \delta > 0 \text{ için } u \preceq v + u_\delta \text{ ve } \|u_\delta\| \leq \delta \text{ olacak şekilde en az bir } u_\delta \in X \text{ var ise } u \preceq v \text{ olur.}$$

Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu quasilineer uzay denir. Kısaca (NQLS) yazarak göstereceğiz.

3.0.3 Quasilineer Uzaylar Üzerinde İç Çarpım Kavramı

Bu bölümde vektör uzayları ile ilgili olarak lineer cebirde bildiğimiz iç çarpım kavramının quasilineer uzaylar için verilen genelleştirmesini ifade edeceğiz.Bu tanım verilirken [5] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır.

Tanım 3.0.4. *[5] Bir X quasilineer uzayında her x, y, z, u, $v \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \Omega(\mathbb{R})$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu X'e bu iç çarpım ile birlikte quasilineer iç çarpım uzayı denir:*

$$x, y \in X_r \text{ olduğunda } \langle x, y \rangle \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}, \tag{3.0.14}$$

$$\langle x+y, z \rangle \subseteq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \tag{3.0.15}$$

$$\langle \alpha \cdot x,y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle, \tag{3.0.16}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \tag{3.0.17}$$

$$x \in X_r \text{ için } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = \{0\} \Longleftrightarrow x = \{0\}, \tag{3.0.18}$$

$$\|\langle x, y \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{ \|\langle t, s \rangle\| : t \in F_x, s \in F_y \right\}, \tag{3.0.19}$$

$$x \preceq y \text{ ve } u \preceq v \text{ olduğunda } \langle x, u \rangle \subseteq \langle y, v \rangle \tag{3.0.20}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için bir } x_\varepsilon \in X \text{ vardır öyle ki}$$

$$x \preceq y + x_\varepsilon \text{ ve } \langle x_\varepsilon, x_\varepsilon \rangle \subseteq S_\varepsilon(\theta) \text{ ise } x \preceq y \tag{3.0.21}$$

dir. Burada $S_\varepsilon(\theta)$ kümesi $\Omega(\mathbb{R})$'nin sıfır merkezli ε-yarıçaplı küresidir.

3.0.4 Quasilineer Uzaylarda Quasilineer Bağımlılık-Bağımsızlık

Tanım 3.0.5. *[3] X bir quasilineer uzay olsun. $\{u_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + ... + \alpha_n \cdot u_n = u$$

olacak şekilde u elemanına $\{u_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir lineer kombinasyonu

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + ... + \alpha_n \cdot u_n \preceq u$$

olacak şekilde u elemanına ise $\{u_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir quasilineer kombinasyonu (kısaca ql-kombinasyonu) denir.

Tanım 3.0.6. *[3] X bir quasilineer uzay olsun ve A, X in herhangi bir alt kümesi kabul edilsin.*

$$QspA = \left\{ u \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k \preceq u,\ u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n\ \in A,\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Diğer taraftan A nın gerdiği uzay ise SpA şeklinde tanımlanır.

$$SpA = \left\{ u \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k = u,\ u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n\ \in A,\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

dır. $SpA \subseteq QspA$ dır. Eğer X bir vektör uzayı ise $SpA = QspA$ olur.

Örnek 3.0.1. *[3] $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}, \subseteq)$ intervaller uzayında $B = \left\{ \left\{ \sqrt{2} \right\} \right\}$ kümesinin quasigerdiği küme*

$$QspB = Qsp\left\{ \left\{ \sqrt{2} \right\} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}} : \beta \cdot \left\{ \sqrt{2} \right\} \subseteq x,\ \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$$

dır. $\forall x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için

$$\beta \cdot \left\{ \sqrt{2} \right\} \subseteq x$$

şartını sağlayan bir $\beta \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $SpB = (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ dir.

Sonuç 3.0.1. *[3] Dejenere aralık tek nokta kümesinden oluşur ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ kümesi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ yi quasi gerer.*

Tanım 3.0.7. *[3] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay $\{u_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olsun.*

$$\theta_u \preceq \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + ... + \lambda_n \cdot u_n$$

olması durumu sadece $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ olduğunda mevcut ise $\{u_k\}_{k=1}^n$ kümesine quasilineer bağımsız diyeceğiz ve bu durumu kısaca (ql- bağımsız) şeklinde yazacağız. Bu şart sağlanmıyorsa quasilineer bağımlı kısaca (ql-bağımlı) diyeceğiz.

Örnek 3.0.2. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ *quasilineer uzayında* $\{[1,3]\}$ *tek nokta kümesini göz önüne alalım. Bu küme için*

$$\{0\} \subseteq \alpha \cdot [1,3]$$

şartını sağlayacak tek α *skaleri* 0 *dır. Öyleyse bu tek nokta kümesi quasilineer bağımsızdır.*

Örnek 3.0.3. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ *quasilineer uzayında* $\{[1,3],\ \{[-3,-1]\}\}$ *kümesi verilsin.* $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ *için*

$$\{0\} \subseteq \alpha_1 \cdot [1,3] + \alpha_2 \cdot [-3,-1] = [-4,4]$$

sağlanacağından $\{[1,3],\ \{[-3,-1]\}\}$ *kümesi* $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ *de ql-bağımlıdır.*

Şimdi göstereceğimiz bazı tek nokta kümeleri ql-bağımlı olabiliyor. Lineer cebirde böyle bir durum asla olmazdı. Çünkü 0 hariç tek nokta kümeleri lineer bağımsızdır.

Örnek 3.0.4. $\{[-2,3]\}$ *kümesi* $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$*' de ql-bağımlıdır. Bunun sebebi şudur:* $\{0\} \subseteq \alpha \cdot [-2,3]$ *yazdığımızda birçok* α *reel sayısı için bu bağıntının sağlandığını görürüz. Söz gelimi* $\alpha = \frac{1}{2}$ *veya* $\alpha = -2$ *için bu bağıntı sağlanmaktadır. Bu nedenle tek nokta kümesi olan* $\{[-2,3]\}$ *ql bağımlıdır.*

Tezin dördünce bölümünde $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ nin konsolide quasilineer uzay olduğunu söyledik. Şimdi ise bu kavramı daha iyi anlayabilmek için konsolide quasilineer uzay tanımını vereceğiz. Konsolide quasilineer uzaylar üzerinde bir iç çarpım tanımlandığı için oldukça önemli bir uzay çeşididir. Konsolide quasilineer uzay tanımını vermeden önce zemin kavramından bahsedeceğiz.

Tanım 3.0.8. *X bir quasilineer uzay ve $u \in X$ olsun. u dan önce gelen tüm regüler elemanların kümesine u nun zemini denir. u nun zemini $\mathbb{F}_u$ ile gösterilir ve daha formal olarak*

$$\mathbb{F}_u = \{x \in X_r : x \preceq u\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada X_r daha önce de belirttiğimiz gibi X quasilineer uzayının regüler alt uzayını göstermektedir.

Biliyoruz ki X quasilineer uzayının zemini X_r regüler alt uzayıdır. Ayrıca X bir lineer uzay ise X in zemini kendisidir. Yani $\mathbb{F}_X = X$ dir. Bu yüzden lineer uzaylar yani vektör uzayları için zemin kavramı gereksizdir.

Tanım 3.0.9. *(Konsolide Quasilineer Uzay) X bir quasilineer uzay olsun. Eğer X in her elemanı zemininin supremumu oluyorsa X uzayına sağlam zeminli veya daha pratik olarak konsolide uzay adı verilir. Daha detaylı olarak X in her u elemanı için*

$$u = \sup_{\preceq} \mathbb{F}_u = \sup_{\preceq} \{x \in X_r : x \preceq u\}$$

oluyorsa X e konsolide uzay adı verilir. Burada supremum X quasilineer uzayı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı olan $\preceq$ bağıntısı üzerinden alınmaktadır.

4. $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ KONSOLİDE QUASİLİNEER UZAYI ve İKİ BOYUTLU İNTERVALLER UZAYI

Bilimdeki uygulamalarda quasilineer uzaylarla ilgili en çok karşımıza çıkan ve işlenen quasilineer uzay örneği reel sayıların kapalı aralıklarının uzayı olan $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ uzayıdır. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin bir quasilineer uzay olduğu Aseev'in [1] numaralı çalışmasında gösterilmiştir. Bu uzayların cebirsel yapısına ilişkin kapsamlı araştırmalar da [2], [3] ve [4] numaralı kaynaklarda incelenmiştir. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ uzayının önemli bir özelliği de konsolide bir quasilineer uzay olmasıdır. Bu özellik bize uzaydaki herbir elemanın, uzayın hamel bazı olan bir tek nokta kümesi yardımıyla elde edilebilceğini göstermiştir. Bunun için $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin "$\subseteq$" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğunu göstermemiz ve bu bağıntıya göre ise supremumu kullanmamız gerekiyor. Söz gelimi $[1,3] = \sup\limits_{\subseteq}\{\lambda\cdot\{1\};\ \lambda\in[1,3]\}$ şeklinde tek türlü gösterebiliriz. Burada supremum, $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ yi quasilineer uzay yapan "$\subseteq$" bağıntısı üzerinden alınmaktadır. Her $[a,b]\in\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için bu temsil mevcuttur ve supremumu bulmak mümkündür. Bunun temel sebebi de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin konsolide uzay olmasından kaynaklanır. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin önemli alt uzayları ise $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$, $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s$ ve $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ dir. Bu uzaylar sırasıyla $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin singüler, regüler ve simetrik alt uzaylarıdır. Bu bölümde $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayının bir quasilineer uzay örneği teşkil ettiğini gösterdik. Bilindiği gibi klasik analizde önemli bir yer tutan $C[a,b]$ fonksiyon uzayı; $[a,b]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye veya $\mathbb{C}$ ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Biz de bu tanıma benzer şekilde $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayının tanımını verdik. Aynı zamanda bu fonksiyon uzayının tıpkı $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ uzayı gibi regüler, singüler ve simetrik alt uzaylara sahip olduğunu ve konsolide bir quasilineer uzay yapısına sahip olduğunu çalışmamızda gösterdik. $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayının bir iç çarpım quasilineer uzay olduğunu gösterdik. Yine bu bölümde iki boyutlu intervaller uzayı kavramına yer verdik. Bu kümenin özellikleri [6] da gösterilmiştir. İnterval değerli fonksiyonlar arasında diklik kavramının tanımlandığını söyledik ve bunlarla ilgili örneklere yer verdik. Son olarak da bu bölümde iç çarpım kullanılarak sinyal işleme alanında bazı non-deterministik sinyallerin enerjilerini tahmin etme ile ilgili bir uygulama da verilmiştir.

Tanım 4.0.1. *$C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayı*

$$f\in C([a,b],I_{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow f:[a,b]\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$$

şeklinde yani $[a,b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Burada süreklilik için $[a,b]$ üzerindeki metrik ile bilinen mutlak değer metriği iken $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerindeki metrik *Hausdorff metriğidir.* Hausdorff metriği ve bu metriğe ilişkin bilgiler

İkinci bölümde yer alan $\mathbb{R}^n$ deki metrikte $n = 1$ hali için anlatılmıştır. Oradaki bilgilerde $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için verilen metrik $n = 1$ hali için yani $\Omega_C(\mathbb{R}) = \mathbb{I}_\mathbb{R}$ dir. Bu metrik ise $A, B \in \mathbb{I}_\mathbb{R}$ için

$$D(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|\,,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu metrikle $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ nin tam metrik uzay olduğunu biliyoruz. Ayrıca bu metrik uzay sayılabilir ve yoğun olan bir alt kümeye sahip ise bu metrik uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Bir f fonksiyonunun sürekli olmasını şu şekilde karakterize edebiliriz: (x_n), $[a,b]$ aralığında bir dizi ise $x_n \to x \in [a,b]$ olması halinde $f(\,x_n) \to f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna süreklidir denir. Uzayların metriklerini kullanarak

$$f : [a,b] \to \mathbb{I}_\mathbb{R} \text{ fonksiyonu süreklidir} \Leftrightarrow |x_n - x| \to 0 \text{ ise } D(f(x_n), f(x)) \to 0$$

dır. Yani bu şart şağlandığında $f \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ deriz.

Şimdi $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ ye örnekler verelim:

Örnek 4.0.1. *Öncelikle $\mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ içerisinde bir kopya olduğundan $[a,b] \to \mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonlar $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$' nin bir elemanıdır. Yani $C[a,b] \subseteq C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ dir.*

Örnek 4.0.2. *$f : [0,1] \to \mathbb{I}_\mathbb{R}$ $f(x) = [0,x]$ fonksiyonunu düşünelim. $f \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ olduğunu yani f' nin sürekli olduğunu gösterelim. $x_n \to x$ yani $|x_n - x| \to 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $D(f(x_n), f(x)) \to 0$ olduğunu göstermeliyiz. $D(f(x_n), f(x)) = D([0,x_n], [0,x])$'dir. Şimdi D'nin tanımını dikkate alarak şu değerlere bakalım.*

$$\sup_{a\in[0,x_n]}\left\{\inf_{b\in[0,x]}|a-b|\right\} = |x_n - x|$$

ve

$$\sup_{b\in[0,x]}\left\{\inf_{a\in[0,x_n]}|a-b|\right\} = |x - x_n|$$

dir. Ayrıca $|x_n - x| = |x - x_n|$ olduğunu da dikkate alırsak

$$D([0,x_n],[0,x]) = \max\{|x_n - x|, |x - x_n|\} = |x_n - x|$$

dir. Kabulümüzden $|x_n - x| \to 0$ olduğunu görmüş oluruz.

Diğer taraftan;

$$g(x) = \left\{\begin{array}{c} [0,x]\,,\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ [x^2,1]\,,\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{array}\right\}$$

sürekli olmayan bir fonksiyon örneğidir. Yani $g(x) \notin C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ dir.

Teorem 4.0.1. *f_1, $f_2 : [a,b] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ kümesi*

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ ve}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

cebirsel işlemleri ve

$$f_1(x) \preceq f_2(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \text{ için } f_1(x) \subseteq f_2(x)$$

kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır.

İspat: "$\subseteq$" içerme bağıntısının $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu göz önüne alınırsa;

$$f \preceq g$$

$$f \preceq g \text{ ve } g \leq f \text{ ise } f = g$$

ve

$$f \preceq g \text{ ve } g \preceq h \text{ ise } f \preceq h$$

özellikleri sağlandığından "$\preceq$" bağıntısı $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca

$$f + g = g + f,$$

$$f + (g + h) = (f + g) + h,$$

θ sıfır fonksiyonu olmak üzere

$$f + \theta = f,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$$

$$\alpha(f + g) = af + ag$$

$$1f = f$$

$$0f = \theta$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. $x \in [a,b]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$((\alpha + \beta)f(x) = (\alpha + \beta)f(x) \subseteq \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$$

olduğundan

$$(\alpha+\beta)f \preceq \alpha f+\beta f$$

dir. $f_1 \preceq f_2$ ve $g_1 \preceq g_2$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için

$$f_1(x) \subseteq f_2(x) \text{ ve } g_1(x) \subseteq g_2(x) \text{ olup } f_1(x)+f_2(x) \subseteq g_1(x)+g_2(x)$$

dir. O halde;

$$f_1+g_1 \preceq f_2+g_2$$

dir. Ayrıca $f \preceq g$ ise her $x \in [a,b]$ için $f(x) \subseteq g(x)$ olacağından $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f(x) \subseteq \alpha g(x)$ olur. Böylece her $x \in [a,b]$ için $(\alpha f)(x) \subseteq (\alpha g)(x)$ olacağından

$$\alpha f \preceq \alpha g$$

dir. Böylece $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ kümesi bir quasilineer uzaydır.

Şimdi $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayı üzerinde bir norm tanımlayacağız. Tanımlayacağımız bu normun norm şartlarını sağladığını göstereceğiz.

Lemma 4.0.1. *$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayı*

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$$

eşitliğiyle tanımlı norm ile bir normlu quasilineer uzaydır.

İspat: f sürekli bir fonksiyon olduğundan ve metrik uzaylar arasında tanımlı sürekli fonksiyonlar kompakt kümeleri kompakt kümelere dönüştürdüğünden dolayı

$$\max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$$

değeri mevcut olmak zorundadır. Bu nedenle $\|f\|_{\infty}$ normu iyi tanımlıdır.

$$\max_{x\in[a,b]} \|f_1(x)+f_2(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \leq \max_{x\in[a,b]} \|f_1(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \max_{x\in[a,b]} \|f_2(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$$

bu bize

$$\|f_1+f_2\|_{\infty} \leq \|f_1\|_{\infty}+\|f_2\|_{\infty}$$

ve

$$\|\alpha.f\|_{\infty} = |\alpha|\,.\,\|f\|_{\infty}$$

olduğunu gösterir.

$$x \neq \theta \text{ olmak üzere } \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} > 0$$

olup $\|f\|_\infty > 0$ dir.

$$\max_{x\in[a,b]} \|f_1(x)+f_2(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} \leq \max_{x\in[a,b]} \|f_1(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} + \max_{x\in[a,b]} \|f_2(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}}$$

dır.

$$\max_{x\in[a,b]} \|\alpha.f(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} = |\alpha|\,.\max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}}$$

dir.

$f_1 \preceq f_2$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ dir. $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ üzerindeki normun son şartına dayanarak $\|f_1(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} \leq \|f_2(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}}$ olur. O halde

$$\max_{x\in[a,b]} \|f_1(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} \leq \max_{x\in[a,b]} \|f_2(x)\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}}$$

olup

$$\|f_1\|_\infty \leq \|f_2\|_\infty$$

’dir.

Şimdi kabul edelim ki her $\varepsilon > 0$ için $f \preceq g + f_\varepsilon$ ve $\|f_\varepsilon\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \|f_\varepsilon\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $f_\varepsilon \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ elemanı mevcut olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) \subseteq g(x) + f_\varepsilon(x)$$

ve $\|f_\varepsilon\|_{\mathbb{I}_\mathbb{R}} < \varepsilon$ olur. Bu durumda $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ üzerindeki normun şartından her $x \in [a,b]$ için $f(x) \subseteq g(x)$ elde edilir. $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ uzayı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı tanımından

$$f \preceq g$$

sonucuna ulaşılır.

Lemma 4.0.2. *$C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ bir konsolide quasilineer uzaydır.*

İspat: Her $f \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ için

$$\mathbb{F}_f = \sup_{“\preceq”}\{g \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})_r : g \preceq f\}$$

olduğunu göstereceğiz. Yani,

$$\mathbb{F}_f = \{g : [a,b] \to (\mathbb{I}_\mathbb{R})_r \ : g(x) \subseteq f(x) \text{ her } x \in [a,b] \text{ için}\}$$

olmak üzere $f = \sup_{“\preceq”}\mathbb{F}_f$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\mathbb{F}_f$ kümesinin üstten üstten sınırlı olduğu açıktır. f, $\mathbf{F}_f$ kümesi için bir üst sınırdır. Şimdi bir $h \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ elemanının $\mathbf{F}_f$ kümesi için başka bir üst sınır olduğunu kabul edelim. $f \preceq h$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Kabul edelim ki $f \npreceq h$ olsun. Bu durumda bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır öyleki $f(x_0) \nsubseteq h(x_0)$ dır. O halde $z_0 \in f(x_0)$ iken $z_0 \notin h(x_0)$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ vardır. Buradan $\{z_0\} \nsubseteq f(x_0)$ iken $\{z_0\} \notin h(x_0)$ olduğunu söyleriz. Şimdi $g : [a,b] \to (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$, $g(x) = \{z_0\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $g \in \mathbb{F}_f$ olduğu açıktır. Ancak $\{z_0\} \nsubseteq h(x_0)$ olduğundan $g \npreceq h$ dir. Bu durum h nin $\mathbf{F}_f$ kümesi için bir üst sınır olması ile çelişir. O halde $f \preceq h$ dir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.0.1. *$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ quasilineer uzayı $C([a,b], \mathbb{R})$ fonksiyon uzayı ile izometrik izomorfiktir.*

İspat: $f : [a,b] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $f(x) - f(x) = 0$ yani $f \in C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ olsun. Bu durumda bir $g \in \mathbb{F}_f$ için $g(x) = \{h(x)\}$ şeklinde yazılabilir. Öyleki $h : [a,b]$ den $\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyondur.

Bu şekilde yazılabilmesinin sebebi g nin $[a,b]$ den $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ ye sürekli bir fonksiyon olmasıdır. $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ nin de $\mathbb{R}$ ye izometrik izomorfik olduğunu bildiğimizden teoremin ispatı verilmiş olur.

Önerme 4.0.2. *$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s$ quasilineer uzayı $C([a,b], (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s)$ ye denktir.*

Önerme 4.0.3. *$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ quasilineer uzayı $C([a,b], (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym})$ ye denktir.*

İspat: $f : [a,b] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ öyleki f simetrik yani $f = -f$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için $f(x) = -f(x)$ dir. Yani her $x \in [a,b]$ için $f(x) \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ dir. Bu da bize $f \in C([a,b], (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym})$ olduğunu gösterir. Tersine $f \in C([a,b], (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym})$ ise $f : [a,b] \to (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ sürekli olup her $x \in [a,b]$ için $f(x) \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ yani $f(x) = -f(x)$'dir. Bu bilgiler bize $f \in C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ olduğunu söyler.

Teorem 4.0.2. *$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayı üzerinde*

$$\|f\| : \left(\int_a^b \|f(x)\|^2_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği bir norm tanımlar. Yani;

$$\|f\| : \left(\int_a^b (\sup_{t \in f(x)} |t|)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ üzerinde başka bir normdur.

İspat: Aseev [1] numaralı çalışmasında göstermiştir ki S bir kompakt topolojik uzay olmak üzere ve X de tam bir Ω uzayı olmak üzere $C(S(X))$ de bir quasilineer uzaydır. Diğer taraftan aynı çalışmadan biliyoruz ki $(L_p[a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$

$$\|f\| : \left(\int_a^b (\sup_{t \in f(x)} |t|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tam normlu quasilineer uzaydır. Yani $t = 2$ için $L_2([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ bir tam normlu quasilineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm da teoremde ifade edilen normdur. Şimdi biliyoruz ki $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ uzayı $L_2([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ normlu uzayının bir alt uzayıdır. Öyleyse $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ de yukarıdaki norm ile bir normlu quasilineer uzaydır. Bunu şu şekilde kolayca görebiliriz. Biliyoruz ki $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})_r$ regüler alt uzayı $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ nin bir alt uzayıdır. Ayrıca $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})_r$'nin $C[a,b]$ ye denk olduğunu söylemiştik. Dolayısıyla bu uzay üzerindeki yukarıda tanımladığımız norm şu hali alır:

$$\|f\|_2 : \left(\int_a^b \|f(x)\|_\mathbb{R}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bu normla $C[a,b]$ nin tam olmadığını klasik fonksiyonel analizden biliyoruz. Denklikten dolayı $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})_r$ regüler alt uzayı da bu normla tam olamaz. Buradan görüyoruz ki $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ nin bir parçası olan daha doğrusu regüler alt uzayı tam değildir. Öyleyse $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ quasilineer uzayı da $\|\cdot\|_2$ normuyla tam olmayan bir normlu quasilineer uzaydır.

Şimdi $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlayacağız. Bunu tanımlarken "Aumann" integralinden faydalanacağız. $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlandığını göstermek için [4] numaralı tezdeki metodu kullanacağız.

Teorem 4.0.3. *f, $g \in C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ için*

$$\langle f,g \rangle = \int_{[a,b]}^{(A)} f(t), g(t) dt = \int_a^b \left[\underline{f(t)}, \overline{f(t)} \right] \cdot \left[\underline{g(t)}, \overline{g(t)} \right] dt$$

eşitliği $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar ve böylece $C([a,b], \mathbb{I}_\mathbb{R})$ quasilineer iç çarpım uzayıdır.

İspat: İspatı [4] numaralı tezdeki metoda benzer şekilde yapılır.

Burada $f : [a,b] \to \mathbb{I}_\mathbb{R}$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{I}_\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonlar olduğunu söylemiştik. Aumann integrali kullanılarak daha önce verdiğimiz iç çarpım tanımı bu tanımla aynıdır ve bu tanım daha kullanışlıdır. Buna göre interval değerli fonksiyonlar arasında diklik kavramı da tanımlanır. Burada biliyoruz ki $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ intervaller üzerindeki iç çarpım aralıklar arasındaki bu çarpma ile ilgili bilgiler ve özellikleri [6] kaynağında detaylı bir şekilde belirtilmiştir. Fakat bunun Quasilineer uzaylar üzerinde tanımlanan iç çarpım anlamında bir iç çarpım olduğu bilinmemekteydi. Kolayca gösterilebilir ki [5] de ortaya atılan iç çarpım özelliklerini $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerinde bilinen çarpma işlemi sağlar.

Uyarı 4.0.1. *$C[a,b]$ uzayının $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayının bir alt uzayı olduğunu söylemiştik. Ayrıca $C[a,b]$' nin aslında bu uzayın regüler alt uzayı olduğunu da söyledik. Eğer yukarıdaki iç çarpım da f ve g fonksiyonlarını $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ den yani regüler alt uzaylardan seçersek f ve g dejenere interval değerli olur ki bu f ve g' nin reel değerli fonksiyonlar olması haline denk gelir. Bu durumda*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t).g(t)dt = \int_a^b \left[\underline{f(t)}, \overline{f(t)}\right]\cdot\left[\underline{g(t)}, \overline{g(t)}\right]dt$$

iç çarpımı reel sayılar cismi üzerinde tanımlı $C[a,b]$ vektör uzayı üzerindeki aynı sembollerle tanımlanan iç çarpım olur. $C[a,b]$ üzerinde bu iç çarpımdan doğan norm,

$$\|f\| : \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı normdur. Bu norm ile $C[a,b]$ nin tam olmadığını yani bir Hilbert uzayı olmadığını biliyoruz. Bu nedenle $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t).g(t)dt = \int_a^b \left[\underline{f(t)}, \overline{f(t)}\right]\cdot\left[\underline{g(t)}, \overline{g(t)}\right]dt$ iç çarpımıyla $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayı da bir Hilbert quasilineer uzay değildir.

Şimdi bu iç uzayında iki elemanın birbirine dik olması tanımını verelim. Bu tanım daha önceki iç çarpım quasilineer uzayları ile ilgili tanımlardan elde edilmiştir.

Tanım 4.0.2. *X bir iç çarpım qls ve $x, y \in X$ olsun. $\langle x, y\rangle = \{0\}$ oluyorsa x ve y elemanlarına diktir denir. $A \subset X$ ve her $x, y \in A$ için $\langle x, y\rangle = \{0\}$ oluyorsa A kümesine dik küme adı verilir.*

Örnek 4.0.3. *$f : [0, \pi] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $f(t) = \sin t$ ve $g : [0, \pi] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $g(t) = \cos t$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu dejenere interval değerli fonksiyonların $C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}}, \langle,\rangle)$ iç çarpım uzayında birbirine dik olduğunu söyleyeceğiz.*

$$\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t).g(t)dt$$

Bu fonksiyonlar aslında $C[a,b]$ fonksiyon uzayındaki reel değerli $\sin t$ ve $\cos t$ fonksiyonlarıdır ve süreklidirler. Tabiki bu fonksiyonlara denk olan dejenere interval değerli yukarıdaki f ve g *fonksiyonları da sürekli fonksiyonlardır. Yani $f \in C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ dir.*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_0^{\pi} f(t).g(t)dt = \int_0^{\pi}[\sin t,\ \sin t]\cdot[\cos t,\ \cos t]\,dt\\ &= \int_0^{\pi}[\sin t\cdot\cos t,\ \sin t\cdot\cos t]\,dt\\ &\approxeq \int_0^{\pi}\sin t\cdot\cos t\ dt = 0\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Yani bu iki dejenere interval birbirine diktir.

Örnek 4.0.4. *$f:[0,\pi]\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $f(t)=\begin{cases}[0,\ \cos t],\ t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\\ [\cos t,\ 0],\ t\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases}$ ve $g:[0,\pi]\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $g(t)=[0,\ \sin t]$ şeklinde tanımlanan interval-değerli fonksiyonlar süreklidir bu nedenle $C([a,b],\ \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin elemanıdır. Fakat ortogonal değildirler.*

$g(t)=[0,\ \sin t]$ nin sürekli olduğunu görmek kolaydır. $f:[0,\pi]\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$f(t)=\begin{cases}[0,\cos t]\,,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ [\cos t,0]\,,\ t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$$

fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. Bu nokta dışında $[0,\pi]$ aralığının diğer noktalarında f nin sürekliliğini ispatlamak kolaydır. Kabul gereği $\left(t_n\to\frac{\pi}{2}, n\in[0,\pi]\right)$ olduğundan $\left|t_n-\frac{\pi}{2}\right|\to 0$ yazılır. $D\left(f(t_n),\left(f(\frac{\pi}{2})\right)\right)\to 0$ mıdır?

Burdan $t_n\to\frac{\pi}{2}^{+}, t_n\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ise

$$\begin{aligned}D\left(f(t_n),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) &= D([\cos t_n,0],\{0\})\\ &= \|[\cos t_n,0]\|\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

Şimdi $t_n\to\frac{\pi}{2}$ kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}D\left(f(t_n),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) &= D([0,\cos t_n],\{0\})\\ &= \|[0,\cos t_n]\|\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

Bu durum bize f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 4.0.3. *$f:\mathbb{I}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $[a,b]\subset[c,d]$ için inclusion izotonik $f([a,b])\subset f([c,d])$ oluyorsa f fonksiyonuna inclusion izotonik adı verilir. Eğer f nin tanım kümesi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ aralığı yerine $\mathbb{R}$ alınırsa f'nin inclusion izotonik olmasının tanımı şu olur:*

$a=b$ olduğunda, (a ve b reel sayılar) $f(a)=f(b)$ şekline dönüşür.

Şimdi böylece $f([a,b])\to\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon inclusion izotoniktir.

Lemma 4.0.3. *$f([a,b]) \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \left[\int_{[a,b]} \underline{f(t)}dt,\ \int_{[a,b]} \overline{f(t)}\,dt\right]$$

olur. Burada $\underline{f(t)}$ ve $\overline{f(t)}$ $[a,b] \to \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye tanımlı alt sınır ve üst sınır fonksiyonlarıdır. Ve

$$f(t) = \left[\underline{f(t)}, \overline{f(t)}\right]$$

dır.

Bu lemma interval değerli fonksiyonların integrallerinin bulunmasında önemli bir sonuçtur ve [6] dan alınmıştır ve sayfa 131 de sunulmuştur. Bu sonuç ile birlikte f ve g fonksiyonları sürekli olduğunda yani $f,\, g \in C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ olduğunda

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f(t).g(t)dt = \int_a^b \left[\underline{f(t)}, \overline{f(t)}\right] \cdot \left[\underline{g(t)}, \overline{g(t)}\right] dt \\ &= \int_a^b \left[\underline{S(t)}, \overline{S(t)}\right] dt \\ &= \left[\int_a^b \underline{S(t)}\,dt,\ \int_a^b \overline{S(t)}\,dt\right]\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}\underline{S(t)} &= \min\left\{\underline{f(t)}\cdot\underline{g(t)},\, \underline{f(t)}\cdot\overline{g(t)},\, \overline{f(t)}\cdot\underline{g(t)},\, \underline{f(t)}\cdot\overline{g(t)}\right\} \\ \overline{S(t)} &= \max\left\{\underline{f(t)}\cdot\underline{g(t)},\, \underline{f(t)}\cdot\overline{g(t)},\, \overline{f(t)}\cdot\underline{g(t)},\, \underline{f(t)}\cdot\overline{g(t)}\right\}\end{aligned}$$

$C([a,b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ üzerindeki bu iç çarpım vasıtasıyla interval değerli bazı sürekli zamanlı sinyallerin enerjilerini hesaplayabiliyoruz. Bu hesabı iç çarpım quasilineer uzaylar üzerindeki normun karesi ile verebiliyoruz. Böylece non-deterministik yani deterministik olmayan sinyallerin enerjilerini yaklaşık olarak tahmin edebiliyoruz. Tahmin ne kadar yakın elde edilirse o kadar avantajlıdır. Zaten belirli kısıtlamaları olmayan yani hiçbir bilgiye sahip olduğunu bilmediğimiz bir sinyalin enerjisini tahmin bile edemeyiz. Fakat sinyal değerlerinin belli aralıkta olduğunu biliyorsak veya başka bir deterministik sinyale belli derecede benzediğini biliyorsak sinyal enerjisine dair bilgi edinebilmek kolaylaşabilir. Böyle bir durumda non-deterministik sinyalimize eksik bilgiye sahip sinyal adı verilir.

Şimdi sinyal işlemeye dair kısa bilgiler verelim. Sinyal işleme teorisi elektiriğin icadından sonra gelişmeye başlamış bir alandır. Doğadan gelen analog sinyalleri değiştirebilmek, istenilen formata sokabilmek, parazitten arındırabilmek, genliklerini düşürebilmek veya başka diğer filtreleme işlemleri yapabilme olayına sinyal işleme adını veriyoruz. Bu işlemi yapabilmek için öncelikle çeşitli sinyalleri matematiksel olarak tanımlamak gerekir. Sinyal işlemede ilk olarak karşımıza çıkan sinyaller zaman sinyalleriydi. Buna göre sinyalin matematiksel tanımı şöyle verilmişti.

Tanım 4.0.4. *Reel sayılardan kompleks sayılara tanımlı herhangi bir fonksiyona bir zaman sinyali diyoruz.*

Zamanı en iyi modelleyen matematiksel obje reel sayılardır. Birçok durumda reel sayıların $[a,b]$ aralığı f sinyalinin tanım kümesi seçilir ve böyle bir kısıtlamaya gidilir. Sinyal enerjisi birçok durumda hesaplanması gereken önemli bir kavramdır. Bunun için özel bir Hilbert uzayı seçilir ve onun üzerindeki norma bakılır. Özellikle de klasik sinyallerin enerjileri hesaplanırken $L_2\mathbb{R}$ veya $L_2[a,b]$ Hilbert uzayları ve onun üzerindeki norma bakılır.Bu normun karesi ordaki sinyalin enerjisini verecektir. Bu nedenle $L_2\mathbb{R}$ veya $L_2[a,b]$ Hilbert uzaylarına sonlu enerjili, diğer bir deyişle enerjisi hesaplanabilen sinyallerin uzayı adı verilir. Böylece $L_2\mathbb{R}$ nin herbir elemanı sürekli-zamanlı sonlu enerjili sinyallerdir. Analog zaman sinyalleri de bu tip sinyaller kapsamına girer. Şimdi interval-değerli sinyallerin tanımını verelim.

Tanım 4.0.5. *Reel sayılardan $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ kompleks interval değerli fonksiyonlara tanımlı herbir fonksiyona sürekli zamanlı kompleks interval değerli sinyal adı verilir. Eğer bu fonksiyon $\mathbb{R}$'nin bir alt aralığından veya $\mathbb{R}$'den $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$' ye tanımlı ise sürekli zamanlı interval değerli sinyal adını alır.*

Birazdan vereceğimiz problemde sürekli zamanlı interval değerli sinyal kavramı kullanılacaktır. İnterval değerli sinyallerin enerjilerini hesaplayabilmek için de $L_2(\mathbb{R},\mathbb{I}_{\mathbb{C}})$, $L_2([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ iç çarpım quasilineer uzayları kullanılır. $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayı $L_2([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayının bir alt quasilineer uzayı olup bu uzay üzerindeki norm ile $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ uzayının bir iç çarpım uzayı olduğunu yukarıda söyledik. Bu nedenle buradan $C([a,b],\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$' deki sinyallerin de enerjilerini bu normla hesaplayabilmek mümkündür.

Şimdi bu bilgileri kullanarak eksik bilgiye sahip zaman sinyalinin enerjisini yaklaşık olarak nasıl hesaplayacağız, bunu gösteren bir örnek problem verelim.

Problem 4.0.1. *Eksik bilgiye sahip deterministik olmayan bir v sinyalinin $[0,1]$ aralığındaki değerlerini e^{-2t}, e^{-t} dalgaları (sinyalleri) arasında olduğu gözlemlenmiştir. Bu eksik bilgiye sahip sinyalin enerjisi ne olabilir veya hangi reel sayılar arasında bulunur bunun için bir tahmin veriniz.*

Lemma 4.0.4. *Yukarıdaki $G(t) = \left[e^{-2t},\, e^{-t}\right]$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.*

İspat: G'nin her $t \in [0,1]$ noktasında dizisel sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $t_0 \in [0,1]$ olsun. Ve $[0,1]$' de $t_n \to t_0$ yani $|t_n - t_0| \to 0$ $(n \to \infty)$ kabul edelim. $G\left((t_n), G(t_0)\right)$ olduğunu göstermeliyiz. $G(t_n)$ $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$' de olduğundan $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$' deki metrik D' ye göre $D(G(t_n), G(t_0)) \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğunu kanıtlamalıyız.

$$\begin{aligned} D(G(t_n), G(t_0)) &= D(\left[e^{-2t}, e^{-t}\right],\ \left[e^{-2t_0}, e^{-t_0}\right]) \\ &= \max\left\{\left|e^{-2t_n} - e^{-2t_0}\right|,\ \left|e^{-t_n} - e^{-t_0}\right|\right\} \end{aligned}$$

olur. Klasik analizden biliyoruz ki e^{-2t} ve e^{-t} fonksiyonları sürekli olduğundan dizisel süreklidir. Ordaki metrik yani $\mathbb{R}$'deki metrik $|\cdot|$ olup $t_n \to t_0$ olduğunda $e^{-2t_n} \to e^{-2t_0}$ ve $e^{-t_n} \to e^{-t_0}$ olacaktır. Yani $n \to \infty$ için $\left|e^{-2t_n} - e^{-2t_0}\right| \to 0$ ve $\left|e^{-t_n} - e^{-t_0}\right| \to 0$ olacak demektir. Tabiki bunların maksimumu da $n \to \infty$ için sıfıra gidecektir. Böylece tanımladığımız interval değerli G fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi yukarıdaki probleme tekrar dönelim. G' nin sürekli olması bize yukarıdaki teoremi kullanma hakkı verecektir. G'nin integralle tanımlanan normunun karesini kolayca hesaplayabileceğiz. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle G, G\rangle &= \int_0^1 \langle G(t).G(t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^1 \left[\underline{G(t)}, \overline{G(t)}\right] \cdot \left[\underline{G(t)}, \overline{G(t)}\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[e^{-2t}, e^{-t}\right] \cdot \left[e^{-2t}, e^{-t}\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[e^{-4t}, e^{-2t}\right] dt \\ &= \left[\int_0^1 e^{-4t}, \int_0^1 e^{-2t} dt\right] \\ &= \left[-\frac{1}{4e^4} + \frac{1}{4},\ -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right] \end{aligned}$$

olur. Bu bize $\langle G, G\rangle$'nin normu enerjiyi ifade edeceğinden, problemdeki v non-deterministik sinyalinin (fonksiyonunun) enerjisinin $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$ değerinden fazla olamayacağını görürüz. Ayrıca v' nin enerjisinin $\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^4}$ değerinden de küçük olmayacağını görmüş oluyoruz. Bu durum sinyal enerjisinin ne olduğunu bilmesek bile enerji düzeyi hakkında önemli bir tahmin olacaktır.

4.0.1 İki Boyutlu İntervaller Uzayı

Reel sayıların kapalı aralıklarının kümesi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere iki boyutlu kapalı intervallerin oluşturduğu küme $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ olarak gösterilecektir. Bu kümenin özellikleri [6] da gösterilmiştir. Şimdi bu uzayın bir elemanı $\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right)$ şeklinde reel kapalı interval ikililerinden oluşmaktadır. Bu kümenin $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ nin elemanları arasında toplama olarak adlandırılan işlem,

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) + \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right) \\
&= \left(\left[\underline{x_1} + \underline{y_1}, \overline{x_1} + \overline{y_1}\right], \left[\underline{x_2} + \underline{y_2}, \overline{x_2} + \overline{y_2}\right]\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) = \left(\alpha\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \alpha\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right)$$

şeklinde skalerle çarpma işlemi tanımlanır. Ayrıca

$$\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \subseteq \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right) \Longleftrightarrow \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right]$$

ve $\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]$ olmak üzere iki boyutlu intervaller arasında $\subseteq$ ile gösterilen kısmi sıralama bağıntısı tanımlanır. Bu işlemler ve bu bağıntıyla $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ bir quasilineer uzaydır ve qls olduğu gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right), \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{2} \left[\underline{x_k}, \overline{x_k}\right] \cdot \left[\underline{y_k}, \overline{y_k}\right]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı iç çarpımla bir iç çarpım uzayıdır. Bu bilgiler [5], [13] , [3] ve [14] kaynaklarından elde edilir. Şimdi buna göre birbirine dik iki boyutlu interval çifti örneği vereceğiz.

Örnek 4.0.5. $([1, 2], [0, 0]) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *ve* $([0, 0], [1, 5]) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *olmak üzere bu iki eleman* $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *iç çarpım uzayında birbirine ortogonaldir. Bunu gösterelim.*

$$\begin{aligned}
&\langle([1, 2], [0, 0]), ([0, 0], [1, 5])\rangle \\
&= [1, 2] \cdot [0, 0] + [0, 0] \cdot [1, 5] = \{0\}
\end{aligned}$$

olduğundan bu iki eleman $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$*' de birbirine ortogonaldir.*

$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ de yukarıda iç çarpımdan doğan norm

$$\left\| \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right) \right\| = \sqrt{\left\| \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right\|}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.0.6. $([-1,\ 3],\ [2,\ 4]) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *ve* $([1,\ 2],\ [-2,\ 1]) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *olmak üzere bu iki eleman* $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *iç çarpım uzayında birbirine ortogonal değildir. Bunu gösterelim.*

$$\begin{aligned}
\langle([-1,\ 3]\cdot[2,\ 4]),([1,\ 2],\ [-2,\ 1])\rangle &= [-1,\ 3]\cdot[1,\ 2]+[2,\ 4]\cdot[-2,\ 1] \\
&= [-2,\ 6]+[-8,\ 4] \\
&= [-10,\ 10]
\end{aligned}$$

olduğundan bu elemanlar ortogonal değildir.

Teorem 4.0.4. *İki boyutlu intervaller uzayı* $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *bir quasilineer uzaydır.*

İspat: $x = \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right)$ ve $\left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \right)$ elemanları $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$' nin keyfi iki elemanı olsun ve yukarıda tanımlanan işlemler ve iki boyutlu intervallerin alt küme olma bağıntısının quasilineer uzay şartlarını sağladığını göstereceğiz. Şimdi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$' nin quasilineer uzay olma şartlarını sağlayalım.

1) $x \subseteq x$ olduğunu $\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right) \subseteq \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right)$ ancak ve ancak $\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right]$ ve $\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]$ olduğundan kolayca göstermiş oluruz.

2) $x \subseteq y$ ve $y \subseteq z$ kabul edelim. Bu durumda

$$\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \right) \subseteq \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \right)$$

ve

$$\left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right], \ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \right) \subseteq \left(\left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right], \ \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right] \right)$$

olur buradan

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \ \textit{ve} \ \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \subseteq \left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right]$$

buluruz. ve aynı zamanda

$$\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \ \textit{ve} \ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \subseteq \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right]$$

yazarız. Böylece alt küme bağıntısının özelliğinden

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right] \ \text{ve} \ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right]$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise $x \subseteq z$ olduğunu gösterir.

3) $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$ kabul edelim. Bu durumda

$$\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right],\ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \subseteq \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right],\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right)$$

ve

$$\left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right],\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right) \subseteq \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right],\ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right)$$

olur. Bu durumda interval ikililerinin eşitliği kavramını hatırlayacak olursak Buradan da

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \ ve\ \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \subseteq \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right]$$
$$\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \ ve\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \subseteq \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]$$

olur.

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] = \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \ ve\ \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] = \left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right]$$
$$\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] = \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] ve\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] = \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right]$$

yazılabileceğinden bu durum 3' ü ispatlar.

4) $x + y = y + x$ olduğunu göstermek kolaydır.

5) $x + (y + z) = (x + y) + z$ özelliğini göstermek kolaydır.

6) $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde X'in sıfır elemanı denilen θ elemanı vardır. Şimdi bunu gösterelim.

$\theta = ([0, 0],\ [0, 0]) \in \mathbb{I}^2_{\mathbb{R}}$ dir. ve her $x = \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right],\ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \in \mathbb{I}^2_{\mathbb{R}}$ için $\theta + x = x + \theta$'dır.

Böylece θ $\mathbb{I}^2_{\mathbb{R}}$' nin etkisiz elemanıdır. Yani sıfırıdır.

7, 8, 9 ve 10. özellikleri göstermek rutin ve kolay bir iştir..

11)

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)x &= (\alpha+\beta)\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right],\ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \\
&= \left((\alpha+\beta)\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], (\alpha+\beta)\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \\
&\subseteq \left(\alpha\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \beta\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \alpha\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] + \beta\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \\
&= \left(\alpha\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \alpha\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) + \left(\beta\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \beta\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \\
&= \alpha x + \beta x.
\end{aligned}$$

12) $x \subseteq y$ ve $z \subseteq v$ ise $x+z \subseteq y+v$şartını göstereceğiz $x \subseteq y$ ve $z \subseteq v$ kabul edilsin. Burada $z = \left(\left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right], \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right]\right) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ ve $v = \left(\left[\underline{v_1}, \overline{v_1}\right], \left[\underline{v_2}, \overline{v_2}\right]\right) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$'dir.

$$\left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right],\ \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right]\right) \subseteq \left(\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right],\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]\right) \text{ ve}$$
$$\left(\left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right], \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right]\right) \subseteq \left(\left[\underline{v_1}, \overline{v_1}\right], \left[\underline{v_2}, \overline{v_2}\right]\right)$$

olduğundan

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \text{ ve } \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]$$
$$\left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right], \subseteq \left[\underline{v_1}, \overline{v_1}\right] \text{ ve } \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right] \subseteq \left[\underline{v_2}, \overline{v_2}\right]$$

olur

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \left[\underline{z_1}, \overline{z_1}\right] \subseteq \left[\underline{v_1}, \overline{v_1}\right] + \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \text{ ve}$$
$$\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] + \left[\underline{z_2}, \overline{z_2}\right] \subseteq \left[\underline{v_2}, \overline{v_2}\right] + \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]$$

elde ederiz. $x+z \subseteq y+v$ olduğunu söyler.

13) $x \subseteq y$ ise $\alpha \cdot x \subseteq \alpha \cdot y$ şartını göstereceğiz. Hipotezden $x \subseteq y$ ise

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \text{ ve } \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]$$

olur. α skaleri için

$$\alpha\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \subseteq \alpha\left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \text{ ve } \alpha\left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \subseteq \alpha\left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right]$$

yazabiliriz. Böylece $\alpha \cdot x \subseteq \alpha \cdot y$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.0.2. *$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ nin regüler alt uzayı $x = ([x_1, x_1],\ [x_2, x_2])$ şeklindeki dejenere aralık çiftleridir. Yani $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_r$ bu şekilde aralık çiftlerinden oluşmaktadır. Ayrıca $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_r$ alt uzayı $\mathbb{R}^2$ vektör uzayına denk olup bu uzay lineer uzay olan bir quasilineer uzaydır.*

$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ nin singüler alt uzayı yani $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_s$ dejenere olmayan has aralık çiftlerinden oluşur ve bu alt uzay vektör uzayı olmayan bir quasilineer uzaydır. Örneğin $([1, 2],\ [-3, 4]) \in \left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_s$ iken $([1, 1],\ [3, 3]) \notin \left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_s$ $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ nin diğer bir önemli alt uzayı da $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_{sym}$ uzayıdır. Bu uzay $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)$ nin de bir alt uzayı olup tabiki vektör uzayı olmayan bir quasilineer uzaydır. $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_{sym}$ nin elemanlarına simetrik interval çiftleri adını veriyoruz.

Örnek 4.0.7. $([-2, 2],\ [-5, 5]) \in \left(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2\right)_{sym}$ *dir.*

Teorem 4.0.5. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ *bir konsolide quasilineer uzaydır.*

İspat: $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$' nin herbir elemanının birinci ve ikinci koordinatlarının birer reel interval olduğunu hatırlayalım. Ayrıca $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin konsolide quasilineer uzay olduğunu biliyoruz. Bu nedenle her bir $y \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$

$$y = \sup_{\subseteq} \{x : x \subseteq y, x \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r\} \equiv \sup_{\subseteq} \{x : x \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde yazılabilir. Öyleyse herbir $y = \left([\underline{y_1}, \overline{y_1}],\ [\underline{y_2}, \overline{y_2}]\right) \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^2$ için de

$$y = \left([\underline{y_1}, \overline{y_1}],\ [\underline{y_2}, \overline{y_2}]\right) = \left(\sup_{\subseteq} \left\{ \underset{x \text{ regüler}}{x : x \subseteq [\underline{y_1}, \overline{y_1}]} \right\}, \sup_{\subseteq} \left\{ \underset{x \text{ regüler}}{x : x \subseteq [\underline{y_2}, \overline{y_2}]} \right\}\right)$$

yazabiliriz. Bu ise ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] **Aseev, S.** (1986). Quasilineer Operators and Their Application in the Theory of Multivalued Mappings, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 23–52.

[2] **Çakan, S. ve Yılmaz, Y.** (2015). Normed Proper Quasilinear Spaces, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 816–836.

[3] **Yılmaz, Y.**, **Bozkurt, H. ve Çakan, S.** (2016). An Orthonormal Sets in Inner Product Quasilinear Spaces,, *Creative Mathematics and Informatics*, 25,(2),237–247.

[4] **Levent, H.** (2019). *The Operators on the Set Valued Functıon Spaces and Some Applications* (Doktora Tezi). Inonu University, Malatya.

[5] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.** (2016). New Inner Product Quasilinear Spaces on Interval Numbers,, *Journal of Function Spaces*, 1–9.

[6] **Moore, R.E.**, **Kearfott, R.B. ve Cloud, M.J.** (2009). *Introduction to Interval Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[7] **Kreyszing, E.** (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John WileySons Inc.New York.

[8] **Wilansky, A.** (1978). *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, Book Comp.

[9] **Soykan, Y.** (2012). *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık.

[10] **Debnath, L. ve Mikusinski, P.** (2005). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press,USA.

[11] **Musayev, B.** (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.

[12] **Yılmaz, Y.**, **Çakan, S. ve Aytekin, c.** (2012). Topological Quasilinear Spaces, *Abstract and Applied Analysis*.

[13] **Bozkurt, H.** (2016). *Quasilinear İnner Product Spaces and Some Generalizations* (Doktora Tezi). Inonu University, Malatya.

[14] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.** (2016). Some New Results on İnner Product Quasilinear Spaces, *Cogents Math*.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Ece ŞAHİN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2020-Halen Korkut Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde çalışmaktadır.