T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT YAPILI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan ARIKAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT YAPILI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan ARIKAN
(36183614051)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ
Eş Danışman: Doç. Dr. Ahmet KAZAN

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tezin oluşmasında emeği geçen, tecrübeleriyle beni yönlendiren, bilgi ve düşüncelerinden yararlandığım ve tez yazımında bana yol gösteren saygı değer danışmanlarım Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ ve Doç. Dr. Ahmet KAZAN'a ve ayrıca aileme teşekkürü bir borç bilip, şükranlarımı sunarım.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kontakt Yapılı İstatistiksel Manifoldların Geometrisi ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gökhan ARIKAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbf{M}$	:	Manifold
$\mathbf{T_pM}$	:	p noktasındaki tanjant uzayı
$\mathbf{T_p^*M}$	:	p noktasındaki kotanjant uzayı
$\chi(\mathbf{M})$	:	Vektör alanların kümesi
∇	:	Afin konneksiyon
∇^*	:	Dual konneksiyon
$\widehat{\nabla}$	:	Levi-Civita konneksiyonu
$\mathbf{R}$	:	Riemann eğrilik tensörü
$\wedge$	:	Dış çarpım
η	:	$1-$form
ϕ	:	$(1,1)-$tipli tensör alanı
ξ	:	Karekteristik vektör alanı
$\mathbf{g}$	:	Metrik tensör
$\mathbf{D}$	:	Kontakt distribüsyon
$\mathbf{L}$	:	Lie türevi
$\mathbf{J}$	:	Kompleks yapı
$\mathbf{N_j}, \mathbf{N}_\phi$	:	Nijenhuis torsiyon tensörleri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONTAKT YAPILI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

GÖKHAN ARIKAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

89+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Sasakian manifoldlar başlığı altında kontakt manifoldlar, hemen hemen kontakt manifoldlar, hemen hemen kontakt metrik manifoldlar, kontakt manifoldlarda temel 2-form, hemen hemen kontakt manifoldların torsiyon tensörü, K-kontakt manifoldlar ve Sasakian manifoldlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, istatistiksel manifoldlar ele alınmıştır.

Beşinci ve son bölümde ise kontakt istatistiksel manifoldlar başlığı altında hemen hemen kontakt metrik istatistiksel manifoldlar ve bunların bazı sınıfları ile ilgili kavramlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontakt Manifold, Hemen Hemen Kontakt Manifold, K-Kontakt Manifold, Sasakian Manifold, İstatistiksel Manifold, Kontakt Metrik İstatistiksel Manifold, K-Kontakt İstatistiksel Manifold.

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRY OF STATISTICAL MANIFOLDS WITH CONTACT STRUCTURES

Gökhan ARIKAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

89+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ

The first chapter is the introcdution and this chapter mentions previous work in the subject.

In the second chapter, some basic concepts that will be used in other parts are given.

In the third chapter, under the title of Sasakian manifolds, contact manifolds, almost contact manifolds, almost contact metric manifolds, basic 2-form in contact manifolds, torsion tensor of almost contact manifolds, K-contact manifolds and Sasakian manifolds are given.

In the fourth chapter, statistical manifolds are discussed.

In the fifth and last chapter, the concepts related to almost contact metric statistical manifolds and some of their classes are given under the title of contact statistical manifolds.

Keywords: Contact Manifold, Almost Contact Manifold, K-Contact Manifold, Sasakian Manifold, Statistical Manifold, Contact Metric Statistical Manifold, K-Contact Statistical Manifold.

1. GİRİŞ

Modern diferensiyel geometrinin en önemli ve en geniş teorilerinden biri olan manifoldlar teorisinin önemli alt başlıklarından birisi de kontakt geometridir. Kontakt geometrinin uygulamaları termodinamik, mekanik ve optik gibi farklı alanlarda kendine yer bulmaktadır. Kontakt geometri 1815'lerde Hamilton, Huygens ve Jacobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur. Kontakt geometrinin yapı taşlarını kontakt manifoldlar oluşturmaktadır.

Kontakt manifold, $(2n+1)-$boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldu üzerinde η $1-$form ile verilen

$$\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlayan bir manifolddur [1].

1960'larda Sasaki, $(2n+1)-$boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde η bir 1-form, ξ bir vektör alanı ve ϕ de $(1,1)-$tipli bir tensör alanı olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

şartlarını sağlayan (ϕ, ξ, η) üçlüsünün hemen hemen kontakt yapı ve bu yapıyla birlikte verilen (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsünün ise hemen hemen kontakt manifold olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca M manifoldu üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \text{ ve } g(X,\xi) = \eta(X)$$

denklemlerini sağlayan bir g metriği tanımlayarak hemen hemen kontakt metrik manifold kavramını tanımlamıştır [2].

Bilgi geometrisi olarak adlandırılan istatistiksel manifoldlar teorisi, ilk 1945'te C. R. Rao'nun bir makalesiyle başlamıştır [3]. Sonrasında istatistiksel manifoldlar üzerinde çeşitli geometrik yapılar incelenmeye çalışılmıştır. 1980'lerde istatistiksel yapı kavramı tanıtılmış ve bu da bilgi geometrisinde yeni araştırmalara zemin hazırlamıştır. 1985 yılında, afin geometride dual konneksiyon (eşlenik konneksiyon) kavramı ilk kez Amari tarafından istatistiklere aktarılmıştır.

(M,g) Riemann manifoldu üzerinde ∇ torsiyonsuz bir afin konneksiyon olmak üzere

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z)$$

koşulu sağlanıyorsa (∇,g) ikilisi bir istatistiksel yapı ve (M,∇,g) üçlüsü de bir istatistiksel manifold olarak adlandırılır. Ayrıca M üzerinde

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla^*_Z Y)$$

şeklinde tanımlanan M nin ∇^* afin konneksiyonuna ∇ nın dual konneksiyonu (eşlenik konneksiyon) denir [4], [5].

Amari tarafından verilen eşlenik (dual) konneksiyon kavramından sonra U. Simon da dual konneksiyon ile ilgili mükemmel bir araştırma yapmıştır [6].

Bu kavramlara göre istatistiksel manifoldların diferansiyel geometrisi, farklı geometrik yapılar eklenerek geometriciler tarafından incelenmektedir. T. Kurose afin uzayda istatistiksel manifoldların afin inversiyonlarını çalışmış ve afin geometri ile istatistiksel manifoldların geometrisi arasında yakın bir ilişki olduğunu görmüştür. Son yıllarda H. Furuhuta belli bir konneksiyon ile bir Kaehler manifoldunu göz önüne alarak holomorfik istatistiksel manifoldu tanımlamıştır. Diğer yandan K. Takano istatistiksel manifoldlar üzerinde uygun kompleks ve uygun kontakt yapılar göz önüne alarak Kaehler-like ve Sasaki-like istatistiksel manifoldları tanımlamıştır. C. Murathan da Takano'nun verdiği bu çalışmaları hemen hemen kosimplektik istatistiksel manifoldlara genişletmiştir ([7], [8], [9], [10]).

Yüksek Lisans Tezi olarak oluşturulan bu çalışmada, önce kontakt yapılı manifold ardından hemen hemen kontakt yapı ile hemen hemen kontakt manifold ve Sasakian yapı ile Sasakian manifold kavramları verilerek bazı karakterizasyonlar incelendi. Daha sonra istatistiksel yapı ve istatistiksel manifold kavramı verildi. Kontakt yapı yardımıyla kontakt istatistiksel manifold ve Sasakian istatistiksel manifold kavramları ifade edilerek bunların geometrisi incelendi. Bazı karekterizasyon ve sonuçlar verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bize yardımcı olacak, ileriki bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.0.1. *M bir Hausdorff uzay olsun. M de her bir açık alt küme, $n-$boyutlu bir $\mathbb{R}$ uzayına ya da bu uzayda bir açık alt kümeye homeomorf oluyorsa bu durumda M ye bir topolojik manifold adı verilir [11].*

Tanım 2.0.2. *$n-$boyutlu bir M topolojik manifoldunun U açık alt kümesi ψ homeomorfizmi ile $n-$boyutlu bir $\mathbb{R}$ uzayının V açık alt kümesine eşlenebilirse, şöyle ki*

$$\psi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

ise bu durumda (U,ψ) ye M de bir harita (koordinat komşuluğu) adı verilir [11].

Tanım 2.0.3. *$n-$boyutlu bir topolojik manifold M olsun. B bir indis kümesi ve $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ de M manifoldunun bir açık örtüsü olarak verilsin. Her $\beta \in B$ için ψ_β homeomorfizmi altında, yani*

$$\psi_\beta : U_\beta \longrightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

şeklinde U_β ya homeomorf olabilecek $\mathbb{R}^n$ uzayında bir V_β açık alt kümesi var olup, meydana gelen (U_β,ψ_β) haritalarının $\{(U_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ ailesine M manifoldunun bir atlası (koordinat komşuluğu sistemi) denir [11].

Tanım 2.0.4. *$n-$boyutlu M topolojik manifoldunda bir $S = \{(U_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ atlası verilmiş olsun. Şayet S de $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ve her $\alpha,\beta \in B$ için $\phi_{\beta\alpha}$ ile $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^k-sınıfından diferansiyellenebilir ise S atlasına C^k-sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. Eğer M de S atlası C^k-sınıfından ise bu durumda S ye C^k-sınıfından diferansiyellenebilir yapı adı verilir [11].*

Tanım 2.0.5. *Üzerinde C^k-sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı barındıran $n-$boyutlu bir topolojik M manifolduna C^k-sınıfından diferansiyellenebilir manifold adı verilir. M deki diferansiyellenebilir fonksiyonlar kümesi $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ile ifade edilir [11].*

Tanım 2.0.6. *M bir diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I,\alpha)\}$ koordinat komşuluğu ile verilmiş C^k-sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \overrightarrow{V}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}|_p\, v_i = \frac{d(f\circ\alpha)}{dx_i}|_t \end{aligned}$$

olarak tanımlı $\overrightarrow{V}_p$ fonksiyonuna $\alpha(I)$ eğrisinin p deki tanjant vektörü adı verilir [12].

Tanım 2.0.7. *Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun bir noktası olan p deki tanjant vektörlerinin kümesine tanjant uzayı adı verilir ve T_pM şeklinde gösterilir [13].*

Tanım 2.0.8. *Diferansiyellenebilir bir M manifoldunda her p noktasına bir X_p tanjant vektörü karşılık geliyorsa yani,*

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p\in M} T_pM$$
$$p \to X_p$$

şeklindeki dönüşüme M de bir vektör alanı adı verilir. Tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile ifade edilir [11].

Tanım 2.0.9. *Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun p deki tanjant uzayı olan T_pM nin dualine kotanjant uzayı adı verilir ve bu uzay T_p^*M şeklinde ifade edilir. Ayrıca T_p^*M nin her bir elemanına da kotanjant vektör denir [13].*

Tanım 2.0.10. *$n-$boyutlu bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde her bir kotanjant vektöre $1-$form veya diferansiyel $1-$form denir [13].*

Tanım 2.0.11. *M manifoldu diferansiyellenebilir ve $n-$boyutlu olsun. $\chi(M)$ de bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesini göstersin. Şayet*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

şeklinde tanımlı olan dönüşüm,

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ ii)\ \nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y\ + g\nabla_Z Y \\ iii)\ \nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y \\ iv)\ \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \end{array}\right\} \tag{2.0.1}$$

koşullarını sağlıyorsa M üzerinde ∇_X e X yönündeki kovaryant türev ve ∇ ya da bir afin konneksiyon adı verilir [14].

Tanım 2.0.12. *M diferansiyellenebilir bir manifoldu ve $\chi(M)$ de bu manifold üzerindeki vektör alanların kümesini göstersin. Şayet g dönüşümü*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

aşağıdaki koşulları sağlıyorsa g ye bir Riemann metriği (metrik tensör) denir.

$i)$ g bilineerdir.

$ii)$ g simetriktir.

$iii)$ g pozitif tanımlıdır [13].

Tanım 2.0.13. *Üzerinde bir Riemann metriği tanımlanmış olan manifolda Riemann manifoldu adı verilir [14].*

Tanım 2.0.14. *Diferansiyellenebilir M manifoldu üzerindeki vektör alanların kümesi $\chi(M)$ ve afin konneksiyon da ∇ olsun.*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlı T ye torsiyon tensörü adı verilir.

Şayet $T = 0$ olması durumunda yani,

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{2.0.2}$$

ise M üzerinde ∇ ya bir sıfır torsiyonlu konneksiyon adı verilir [14].

Tanım 2.0.15. *$n-$boyutlu bir M Riemann manifoldunda ∇ bir afin konneksiyonu ve $\chi(M)$ de bu manifold üzerindeki vektör alanların kümesini göstersin. Şayet ∇ dönüşümü*

$$\left.\begin{array}{l} i)\ [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ ii)\ Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{array}\right\} \tag{2.0.3}$$

koşullarını sağlıyorsa ∇ ya bir Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) adı verilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{2.0.4}$$

ifadesi Kozsul formülü olarak bilinir [14].

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece ∇ ile gösterdiğimiz Riemann (Levi-Civita) konneksiyonunu $\widehat{\nabla}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.16. *M bir Riemann manifoldu, M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve Riemann konneksiyonu da $\widehat{\nabla}$ olarak verilsin.*

$$\widehat{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y,Z) \longrightarrow \widehat{R}(X,Y)Z = \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{2.0.5}$$

ile tanımlanmış tensör alanına Riemann eğrilik tensörü adı verilir [14].

Tanım 2.0.17. *M bir Riemann manifoldu, bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve Riemann konneksiyonu da $\widehat{\nabla}$ olarak verilsin. M üzerinde*

$$\begin{aligned} \widehat{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y,Z,W) &\longrightarrow \widehat{R}(X,Y,Z,W) = g(\widehat{R}(X,Y)Z,W) \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

biçiminde tanımlanmış tensöre bir Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir [15].

Teorem 2.0.1. *M $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu, bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve Riemann konneksiyonu da $\widehat{\nabla}$ olarak verilsin. O zaman*

1) $\widehat{R}(X,Y,Z,W) = -\widehat{R}(Y,X,Z,W)$

2) $\widehat{R}(X,Y)Z + \widehat{R}(Z,X)Y + \widehat{R}(Y,Z)X = 0$

3) $\widehat{R}(X,Y,Z,W) = \widehat{R}(Z,W,X,Y)$

4) $\widehat{R}(X,Y,Z,W) = -\widehat{R}(X,Y,W,Z)$

ifadeleri sağlanır [11].

Tanım 2.0.18. *$n-$boyutlu bir M Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı $\widehat{R}$ olmak üzere,*

$$\widehat{Ric} = S = iz\{\widehat{R} \longrightarrow \widehat{R}(.,X)Y\}$$

ifadesine $\widehat{\nabla}$ konneksiyonuna göre M manifoldunun Ricci eğriliği adı verilir.

$S = \widehat{Ric}$, $(0,2)-$tipli bir tensör alanı olup, T_pM tanjant uzayının bir $\{e_i\}$ ortonormal bazı için

$$\widehat{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(\widehat{R}(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.0.7}$$

dir [16].

Tanım 2.0.19. *M diferansiyellenebilir manifoldunda X bir vektör alanı, K bir tensör alanı ve ϕ_t de $1-$parametreli grup olsun. O zaman K nın X e göre Lie türevi*

$$\begin{aligned} (L_X K)_x &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[K_x - (\phi_t K)_x\right] \\ L_X K &= [X,K] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Önerme 2.0.1. *X vektör alanı yönünde L_X ile gösterilen Lie türevi için aşağıdaki özellikler sağlanır. $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve H, K, K' herhangi tensör alanları olmak üzere,*

$$i)\ L_X Y = [X,Y]$$

$$ii)\ L_X f = X[f] = df(X)$$

$$iii)\ L_X(gY) = X(g)Y + gL_X Y$$

$$iv)\ L_X(K \otimes K') = (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K')$$

$$v)\ L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X$$

$$vi)\ (L_X H)(Y) = X(H(Y)) - H([X,Y])$$

$$vii)\ (L_X g)(Z,Y) = X(g(Z,Y)) - g([X,Z],Y) - g(Z,[X,Y])$$

[13].

Teorem 2.0.2. *M Riemann manifoldunun p noktasındaki non-dejenere tanjant düzlemi Π olsun. Π düzleminin bir bazını $\{U,V\}$ olarak verelim. Bu durumda*

$$K(U,V) = \frac{\widehat{R}(U,V,U,V)}{g(U,U)\,g(V,V) - [g(U,V)]^2} \tag{2.0.8}$$

değerine Π düzleminin kesitsel eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [14].

3. SASAKİAN MANİFOLDLAR

Bu bölümde öncelikle kontakt geometriyi oluşturan kontakt manifoldlar üzerinde durulup, ardından hemen hemen kontakt manifoldlar, K-kontakt manifoldlar, Sasakian manifoldlar ve bunların yapıları ile ilgili kavramlara yer verilecektir.

3.1 Kontakt Manifoldlar

Tanım 3.1.1. *M manifoldu diferansiyellenebilir ve $(2n+1)-$boyutlu olarak verilsin. Şayet M nin her noktasında η diferansiyel $1-$formu mevcut ve*

$$\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0 \tag{3.1.1}$$

şartı sağlanıyorsa M ye kontakt yapıya sahip bir manifold veya kısaca kontakt manifold adı verilir. η $1-$formuna ise bir kontakt form adı verilir. $(d\eta)^n$ ifadesi

$$(d\eta)^n = d\eta\Lambda d\eta\Lambda...\Lambda d\eta$$

şeklinde olup, n defa dış çarpımı belirtir. η bir $1-$form ve $d\eta$ da bir $2-$form olduğundan $\eta\Lambda(d\eta)^n$ çarpımı da $(2n+1)$ formdur. Bu yüzden kontakt manifoldlar $(2n+1)-$boyutlu manifoldlardır [1].

Teorem 3.1.1. *(Darboux) w, $n-$boyutlu bir M diferansiyellenebilir manifoldunda bir $1-$form olarak verilsin. M üzerinde*

$$(dw)^{p+1} = 0 \text{ ve } w\Lambda(dw)^p \neq 0$$

ifadeleri sağlansın. Buna göre M de

$$w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$$

olacak biçimde her bir nokta civarında $\left(x^1,...,x^p,y^1,...,y^{n-p}\right)$ şeklinde bir koordinat sistemi vardır.

O halde Darboux teoreminden $(2n+1)-$boyutlu olan M kontakt manifoldun her bir noktasında

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i \quad ; \; i = 1,2,...,n$$

şeklinde bir $\left(x^i,y^i,z\right)$ koordinat sistemi vardır [1].

Örnek 3.1.1. *Diferansiyellenebilir* $(2n+1)-$*boyutlu olarak verilmiş bir M manifoldunda diferansiyel* η $1-$*formu*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olmak üzere, $n=1$ *için* M^3 *de* $\eta \Lambda d\eta \neq 0$ *dır. Gerçekten*

$$\eta = dz - y^1 dx^1$$

olmak üzere,

$$d\eta = d(dz) - dy^1 \Lambda dx^1 - y^1 d\left(dx^1\right)$$

dir. Burada $d(dz) = d^2 z = 0$ *ve* $d(dx^1) = d^2 x^1 = 0$ *olduğu için*

$$\begin{aligned} d\eta &= -dy^1 \Lambda dx^1 \\ &= dx^1 \Lambda dy^1 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \eta \Lambda d\eta &= \left(dz - y^1 dx^1\right) \Lambda \left(dx^1 \Lambda dy^1\right) \\ &= \left[dz \Lambda \left(dx^1 \Lambda dy^1\right)\right] - \left[y^1 dx^1 \Lambda \left(dx^1 \Lambda dy^1\right)\right] \\ &= dx^1 \Lambda dy^1 \Lambda dz \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $3-$*boyutlu M manifoldu bir kontakt manifolddur. Şimdi [18] de verilen örneğin farklı bir versiyonunu verelim.*

Örnek 3.1.2. M^3 *diferansiyellenebilir manifoldunun her bir* (x,y,z) *noktası civarındaki diferansiyel* η $1-$*formu*

$$\eta = \sin z dx + \cos z dy$$

olarak verilsin. O zaman $\eta \Lambda d\eta \neq 0$ *olup,* M^3 *bir kontakt manifolddur. Gerçekten*

$$\begin{aligned} d\eta &= \cos z dz \Lambda dx + \sin z d(dx) - \sin z dz \Lambda dy + \cos z d(dy) \\ &= \cos z dz \Lambda dx - \sin z dz \Lambda dy \end{aligned}$$

olduğundan, buna göre

$$\begin{aligned} \eta \Lambda d\eta &= (\sin z dx + \cos z dy) \Lambda (\cos z dz \Lambda dx - \sin z dz \Lambda dy) \\ &= -\sin^2 z dx \Lambda dz \Lambda dy + \cos^2 z dy \Lambda dz \Lambda dx \end{aligned}$$

$$= \sin^2 z dx \Lambda dy \Lambda dz + \cos^2 z dx \Lambda dy \Lambda dz$$
$$= \left(\cos^2 z + \sin^2 z\right)(dx \Lambda dy \Lambda dz)$$
$$= (dx \Lambda dy \Lambda dz)$$
$$\neq 0$$

dır. Böylece $3-$*boyutlu M manifoldu bir kontakt manifolddur.*

Tanım 3.1.2. *M kontakt* $(2n+1)-$*boyutlu manifoldu* η *kontakt* $1-$*formu ile verilsin. O zaman*

$$D = \{X \in \chi(M) \mid \eta(X) = 0\}$$

olarak tanımlı D kümesine M nin kontakt distribüsyonu adı verilir [1].

Örnek 3.1.3. $\mathbb{R}^3$ *de* $\left(x^1, y^1, z\right)$ *kartezyen koordinatlar olsun.* η *diferansiyel* $1-$*formu*

$$\eta = dz - y^1 dx^1$$

$\mathbb{R}^3$ *üzerinde bir kontakt yapıdır. Burada D kontakt distribüsyonu*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}$$

ve

$$X_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad ; \; i = 1, 2, ..., n$$

tarafindan gerilir. Örnek (3.1.1) *de* $\eta \Lambda d\eta \neq 0$ *olduğunu göstermiştik. Şimdi D kontakt distribüsyon kümesini elde edelim.*

$$\begin{aligned} \eta(X_1) &= dz(X_1) - y^1 dx^1(X_1) \\ &= dz\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right) - y^1 dx^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= y^1 - y^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(X_{n+i}) &= dz(X_{n+i}) - y^1 dx^1(X_{n+i}) \\ &= dz\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) - y^1 dx^1\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla kontakt distribüsyon

$$D = \{X_1, X_{n+i} \in \chi(M) \mid \eta(X_1) = 0 \; ve \; \eta(X_{n+i}) = 0\}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.3. *Diferansiyellenebilir M kontakt* $(2n+1)-$*boyutlu manifoldu* η *kontakt* $1-$*formu ile verilsin. Şayet*

$$i)\ \eta(\xi) = 1$$
$$ii)\ d\eta(\xi, X) = 0$$

koşullarını sağlayacak ξ *ile gösterilen bir global vektör alanı mevcutsa* ξ *ye kontakt yapının karekteristik vektör alanı denir [1].*

Örnek 3.1.4. $3-$*boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldunun her bir* (x^1, y^1, z) *noktasında*

$$\eta = \sin z dx^1 + \cos z dy^1$$

diferansiyel $1-$*formu için*

$$\xi = \sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1} \in \chi(M)$$

ifadesi karekteristik vektör alanı şartlarını sağlayan tek vektör alanıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= \left(\sin z dx^1 + \cos z dy^1\right)(\sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1}) \\
&= \sin^2 z dx^1 (\frac{\partial}{\partial x^1}) + \sin z \cos z dx^1 (\frac{\partial}{\partial y^1}) \\
&\quad + \cos z \sin z dy^1 (\frac{\partial}{\partial x^1}) + \cos^2 z dy^1 (\frac{\partial}{\partial y^1}) \\
&= \sin^2 z + \cos^2 z \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$d\eta = -\cos z dx^1 \Lambda dz - \sin z dz \Lambda dy^1$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d\eta(\xi, X) &= \left[-\cos z dx^1 \Lambda dz - \sin z dz \Lambda dy^1\right](\xi, X) \\
&= -\cos z \left[dx^1(\xi) dz(X) - dx^1(X) dz(\xi)\right] \\
&\quad - \sin z \left[dz(\xi) dy^1(X) - dz(X) dy^1(\xi)\right] \\
&= -\cos z[dx^1(\sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1}) dz(X) - dx^1(X) dz(\sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1})] \\
&\quad - \sin z[dz(\sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1}) dy^1(X) - dz(X) dy^1(\sin z \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos z \frac{\partial}{\partial y^1})] \\
&= -\cos z \sin z dx^1 (\frac{\partial}{\partial x^1}) dz(X) - \cos^2 z dx^1 (\frac{\partial}{\partial y^1}) dz(X) \\
&\quad + \cos z \sin z dx^1(X) dz(\frac{\partial}{\partial x^1}) + \cos^2 z dx^1(X) dz(\frac{\partial}{\partial y^1})
\end{aligned}$$

$$-\sin^2 z dz(\frac{\partial}{\partial x^1})dy^1(X) - \sin z \cos z dz(\frac{\partial}{\partial y^1})dy^1(X)$$
$$+\sin^2 z dz(X)dy^1(\frac{\partial}{\partial x^1}) + \sin z \cos z dz(X)dy^1(\frac{\partial}{\partial y^1})$$

dir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$d\eta(\xi, X) = 0$$

olarak bulunur. Dolayısı ile ξ, η kontakt yapısının karekteristik vektör alanı olur.

Sonuç 3.1.1. *M kontakt manifolduyla birlikte verilmiş η kontakt formunun çekirdeği Çek η olmak üzere,*

$$i)\ \text{Çek}\ \eta = \{0\}$$
$$ii)\ \text{Çek}\ \eta = D$$

dir [18].

3.2 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

Tanım 3.2.1. *M diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunda sırası ile $(1,1)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ tipindeki ϕ, ξ, η tensör alanları verilsin. Şayet ϕ, ξ, η için*

$$i)\ \eta(\xi) = 1 \tag{3.2.1}$$
$$ii)\ \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{3.2.2}$$

şartları sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M nin sahip olduğu hemen hemen (h.h.) kontakt yapı ve bu yapıyla beraber verilmiş (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüyle gösterilen M nin kendisine ise h.h. kontakt manifold adı verilir. M de

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$
$$\xi : M \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \chi(M)$$
$$\eta : \chi(M) \xrightarrow[dif.bilir]{lineer} C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklindedir [1].

Örnek 3.2.1. (x,y,z) *üçlüsü* $\mathbb{R}^3$ *de kartezyen koordinatlar olsun.*

$\phi : \chi\left(\mathbb{R}^3\right) \longrightarrow \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$ *lineer bir dönüşüm olmak üzere, bu dönüşüme karşılık gelen* ϕ *matrisi*

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, η *kontakt formu ve* ξ *karekteristik vektör alanı da*

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$
$$\xi = 2(\frac{\partial}{\partial z}) \in \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$$

olarak verilsin. O zaman $\left(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta\right)$ *dörtlüsü* $(3.2.1)$ *ve* $(3.2.2)$ *koşullarını sağlayan h.h. kontakt manifolddur. Gerçekten*

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2}(dz - ydx)\,2(\frac{\partial}{\partial z}) = dz(\frac{\partial}{\partial z}) - ydx(\frac{\partial}{\partial z}) = 1$$

olur. $X \in \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$ *için*

$$X = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{1}{2}[a_1 dz\frac{\partial}{\partial x} + a_2 dz\frac{\partial}{\partial y} + a_3 dz\frac{\partial}{\partial z}] \\ &- \frac{1}{2}[ya_1 dx\frac{\partial}{\partial x} + ya_2 dx\frac{\partial}{\partial y} + ya_3 dx\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= \frac{1}{2}(a_3 - ya_1) \end{aligned}$$

olur.

Burada X *vektör alanının matris formu* $X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *ve* ξ *karekteristik vektör alanına karşılık gelen matris de* $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *şeklindedir.*

Buna göre

$$\phi^2 X = \phi(\phi X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
&= -I_3(X) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ya_1 + a_3 \end{bmatrix} \\
&= -X + (-ya_1 + a_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -X + \frac{1}{2}(a_3 - ya_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= -X + \eta(X)\xi
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta\right)$ *h.h. kontakt manifolddur.*

Önerme 3.2.1. *M*, $(2n+1)-$*boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı* (ϕ, ξ, η) *üçlüsüyle verilmiş olsun. M üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$i)\ \phi\xi = 0 \tag{3.2.3}$$

$$ii)\ \eta(\phi X) = 0, \quad (\eta \circ \phi = 0) \tag{3.2.4}$$

$$iii)\ rank\ \phi = 2n \tag{3.2.5}$$

[13].

İspat: $i)$ (3.2.2) eşitliğinde X yerine ξ yazılırsa

$$\phi^2\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi$$

olur. (3.2.1) den

$$\phi^2\xi = 0 \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Burada $\phi\xi = 0$ olduğunu görebilmek için Olmayana Ergi yöntemini uygulayalım.

Kabul edelim ki (3.2.6) eşitliği için $\phi\xi \neq 0$ olsun. (3.2.6) eşitliğinde ξ vektör alanı yerine $\phi\xi$ yazılırsa

$$\phi^2(\phi\xi) = 0$$

olup, (3.2.2) eşitliğinden

$$\eta(\phi\xi)\xi = \phi\xi \tag{3.2.7}$$

bağıntısı bulunur. Burada iki durum söz konusudur; $\eta(\phi\xi) = 0$ veya $\eta(\phi\xi) \neq 0$ dır. Şayet $\eta(\phi\xi)$ sıfır ise $\phi\xi$ de sıfırdır. Bu da kabulümüze göre çelişmektedir. O halde $\phi\xi = 0$ olmalıdır. Şayet $\eta(\phi\xi)$ sıfırdan farklı ise (3.2.7) eşitliğine sol taraftan ϕ uygulanırsa

$$0 = \phi^2\xi = \eta(\phi\xi)\,\phi\xi$$

olup, buradan $\phi\xi$ nin sıfır olduğu görülür. Bu da kabulümüze göre çelişmektedir. O halde $\phi\xi = 0$ olmalıdır. Böylece her iki durumdan da $\phi\xi = 0$ dır.

ii) (3.2.2) eşitliğinde X yerine ϕX yazılırsa

$$\phi^3X = -\phi X + \eta(\phi X)\,\xi \tag{3.2.8}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\phi^3X = \phi\left(\phi^2X\right)$$

ifadesinde (3.2.2) eşitliği kullanılırsa, ϕ lineer olduğundan

$$\phi^3X = -\phi X + \eta(X)\,\phi\xi$$

olur. (3.2.3) eşitliğinden

$$\phi^3X = -\phi X \tag{3.2.9}$$

olur. (3.2.8) ve (3.2.9) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$\eta(\phi X)\,\xi = 0$$

elde edilir. O halde $\xi \neq 0$ olduğundan

$$\eta(\phi X) = 0$$

dır.

iii) Ç$ek\ \phi$, ϕ lineer dönüşümünün çekirdeği olsun. Çekirdeğin tanımına göre, $\forall X \in$ Ç$ek\ \phi$ için $\phi X = 0$ ifadesinin her iki yanına ϕ uygulanıp, (3.2.2) kullanılırsa

$$\phi(\phi X) = \phi(0)$$
$$\phi^2X = 0$$

olup, buradan

$$X = \eta(X)\,\xi$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\forall X \in$ Çek ϕ için $X \in Sp\{\xi\}$ dir. Bu ise

$$\text{Çek } \phi \subset Sp\{\xi\} \tag{3.2.10}$$

olması demektir. $\forall X \in Sp\{\xi\}$ için

$$X = \lambda\xi$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki yanına ϕ uygulanırsa

$$\phi X = \lambda\phi\xi$$

olup, (3.2.3) eşitliğinden

$$\phi X = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\forall X \in Sp\{\xi\}$ için $X \in$ Çek ϕ dir. Yani

$$Sp\{\xi\} \subset \text{Çek } \phi \tag{3.2.11}$$

olması demektir. O halde (3.2.10) ve (3.2.11) den Çek $\phi = Sp\{\xi\}$ dir.

$$rank\ \phi + sıfırlık\ \phi = boy\ \chi(M) = 2n+1$$

olmak üzere, boy (Çek ϕ) $= sıfırlık\ \phi = 1$ olduğu için

$$rank\ \phi = 2n$$

olur.

3.3 Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar

Tanım 3.3.1. (ϕ, ξ, η) *üçlüsü M diferansiyellenebilir* $(2n+1)$*−boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapısını oluştursun. M manifoldunun bir p noktasındaki g Riemann metriği*

$$g : T_pM \times T_pM \underset{simetrik-poz.\ tanımlı}{\overset{bilineer}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$$

olmak üzere, M manifoldu üzerinde

$$i)\ g(X,\xi) = \eta(X) \tag{3.3.1}$$

$$ii)\ g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.3.2}$$

koşulları sağlanıyorsa g ye bir bağdaşık metrik veya h.h. kontakt metrik, (ϕ, ξ, η, g) *dörtlüsüne M nin sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapı ve bu yapıyla birlikte verilen* (M, ϕ, ξ, η, g) *beşlisiyle gösterilen M nin kendisine ise h.h. kontakt metrik manifold adı verilir [13].*

Buradaki $(3.3.1)$ *denklemi* $(3.3.2)$ *eşitliğinden elde edilebilir. Gerçekten* $(3.3.2)$ *de* Y *vektör alanı yerine* ξ *yazılırsa*

$$g(\phi X, \phi \xi) = g(X, \xi) - \eta(X)\eta(\xi)$$

olarak bulunur. $(3.2.1)$ *ve* $(3.2.3)$ *ifadelerinden*

$$g(X, \xi) = \eta(X)$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.1. *Daha önce Örnek* $(3.2.1)$ *de verdiğimiz* $\left(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta\right)$ *h.h. kontakt manifoldunda bir g metriği şöyle tanımlansın.*

$$g = \frac{1}{4}\left(\left(1+y^2\right)dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2ydxdz\right)$$

ve g nin matris yazılımı

$$g = e_{11}dx^2 + e_{22}dy^2 + e_{33}dz^2 + 2e_{12}dxdy + 2e_{13}dxdz + 2e_{23}dydz$$

olmak üzere, g metriğine karşılık gelen matris simetrik olduğundan bu metriğe göre g matrisi

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. O zaman $\left(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta, g\right)$ *beşli yapısı* $(3.3.1)$ *ve* $(3.3.2)$ *eşitliklerini sağlayan bir hemen hemen kontakt metrik manifolddur. Gerçekten*

$X = (a_1, a_2, a_3) \in \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$ için

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= [a_1 \ a_2 \ a_3]\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}[a_1 \ a_2 \ a_3]\begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(a_3 - ya_1) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= \frac{1}{2}(a_3 - ya_1) \\ \eta(X) &= \frac{1}{2}(a_3 - ya_1) \end{aligned}$$

olduğu için

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

olup, (3.3.1) eşitliği sağlanır. Şimdi de (3.3.2) eşitliğininin sağlandığını gösterelim.

$$\phi X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ ya_2 \end{bmatrix}$$
$$\phi Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ yb_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta(X) = \frac{1}{2}(a_3 - ya_1)$$
$$\eta(Y) = \frac{1}{2}(b_3 - yb_1)$$

dir. Biliyoruz ki

$$g(\phi X, \phi Y) = (\phi X)^T g(\phi Y)$$

olduğundan, buna göre

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= [a_2 \ \ -a_1 \ \ ya_2]\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ yb_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}[a_2 \ \ -a_1 \ \ ya_2] \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(a_2 b_2 + a_1 b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{2}(a_3 - ya_1)\frac{1}{2}(b_3 - yb_1) \\ &= \frac{1}{4}\left(a_3 b_3 - ya_3 b_1 - ya_1 b_3 + y^2 a_1 b_1\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(1+y^2\right) a_1 b_1 - ya_1 b_3 + a_2 b_2 - ya_3 b_1 + a_3 b_3\right) \\ &= \frac{1}{4}(a_1 b_1 + a_2 b_2) + \frac{1}{4}\left(a_3 b_3 + y^2 a_1 b_1 - ya_1 b_3 - ya_3 b_1\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadelerden $(3.3.2)$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

Önerme 3.3.1. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilsin. M manifoldunda bir Riemann metrik her zaman mevcuttur. Öyle ki* $(3.3.2)$ *eşitliği sağlanır [1].*

İspat: Her manifold için bir Riemann metriği tanımlanabilir. Kabul edelim ki $h^{'}$, M manifoldu üzerinde tanımlanmış bir herhangi Riemann metrik ve h da

$$h(X,Y) = h^{'}\left(\phi^2 X, \phi^2 Y\right) + \eta(X)\eta(Y)$$

olarak verilmiş bir metrik olsun. Öncelikle bu metriğin bir Riemann metrik olduğunu görelim.

$i)$ h metriğinin simetrik olduğu aşikārdır. Gerçekten $h^{'}$ Riemann metriği simetrik olduğundan

$$h^{'}\left(\phi^2 Y, \phi^2 X\right) + \eta(Y)\eta(X) = h(Y,X)$$

olup, buradan

$$h(X,Y) = h(Y,X)$$

elde edilir. Bu ise h nın simetrik olduğunu gösterir.

$ii)$ h metriği bilineerdir.

$h^{'}$, ϕ ve η nın lineerliğinden $\forall\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ ile X, Y ve Z vektör alanları için

$$\begin{aligned}
h(\lambda X+\mu Y,Z) &= h^{'}\left(\phi^2(\lambda X+\mu Y),\phi^2 Z) + \eta(\lambda X+\mu Y)\eta(Z)\right) \\
&= h^{'}\left[\lambda\phi^2 X+\mu\phi^2 Y,\phi^2 Z\right] + \lambda\eta(X)\eta(Z) \\
&+ \mu\eta(Y)\eta(Z) \\
&= \lambda h^{'}\left(\phi^2 X,\phi^2 Z\right) + \mu h^{'}\left(\phi^2 Y,\phi^2 Z\right) \\
&+ \lambda\eta(X)\eta(Z) + \mu\eta(Y)\eta(Z) \\
&= \lambda[h^{'}\left(\phi^2 X,\phi^2 Z\right) + \eta(X)\eta(Z)] \\
&+ \mu[h^{'}\left(\phi^2 Y,\phi^2 Z\right) + \eta(Y)\eta(Z)] \\
&= \lambda h(X,Z) + \mu h(Y,Z)
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$h(X,\lambda Y+\mu Z) = \lambda h(X,Y) + \mu h(X,Z)$$

dir. Dolayısıyla h metriği bilineerdir.

iii) h metriği pozitif tanımlıdır.

Tanımladığımız h metriğinde Y yerine X alınırsa

$$h(X,X) = h^{'}\left(\phi^2 X, \phi^2 X\right) + \eta^2(X)$$

olur. Kabulümüze göre $h^{'}$ bir Riemann metrik olduğundan $h^{'}\left(\phi^2 X, \phi^2 X\right)$ ifadesi $X \neq 0$ için pozitifdir. Ayrıca $\eta^2(X)$ ifadesi de pozitif olduğu için $h(X,X) > 0$ dır. Diğer yandan $h(X,X) = 0$ ise $h^{'}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan $h^{'}\left(\phi^2 X, \phi^2 X\right) = 0$ olup,

$$\eta(X) = 0$$

olur. Bu durumda $\eta(X) = g(X,\xi) = 0$ olduğundan $X = 0$ dır. Böylece h nın bir Riemann metrik olduğu görülür. Şimdi de g metriğini tanımlayıp, g nin de bir Riemann metrik olduğunu görelim. Şöyle ki

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}\left[h(\phi X, \phi Y) + h(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)\right] \tag{3.3.3}$$

ile tanımlansın. Bu durumda g metriği simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır. Gerçekten

i) g metriğinin simetrik olduğu aşikârdır. h Riemann metriği simetrik olduğundan (3.3.3) de eşitliğin sağ tarafı

$$\frac{1}{2}\left[h(\phi Y, \phi X) + h(Y,X) + \eta(Y)\eta(X)\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

olduğu görülür. Bu da g nin simetrik olduğunu gösterir.

ii) g metriği bilineerdir.

h, ϕ ve η nın lineerliğinden, $\forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
g(\lambda X + \mu Y, Z) &= \frac{1}{2}[h(\phi(\lambda X + \mu Y), \phi Z) + h(\lambda X + \mu Y, Z) \\
&\quad + \eta(\lambda X + \mu Y)\eta(Z)] \\
&= \frac{1}{2}[h(\lambda \phi X + \mu \phi Y, \phi Z) + \lambda h(X,Z) + \mu h(Y,Z) \\
&\quad + \lambda \eta(X)\eta(Z) + \mu \eta(Y)\eta(Z)] \\
&= \lambda\{\frac{1}{2}[h(\phi X, \phi Z) + h(X,Z) + \eta(X)\eta(Z)]\} \\
&\quad + \mu\{\frac{1}{2}[h(\phi Y, \phi Z) + h(Y,Z) + \eta(Y)\eta(Z)]\} \\
&= \lambda g(X,Z) + \mu g(Y,Z)
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Diğer yandan

$$g(X,\lambda Y+\mu Z)=\lambda g(X,Y)+\mu g(X,Z)$$

dir.

iii) g metriği pozitif tanımlıdır.

Tanımladığımız (3.3.3) ifadesinde Y yerine X alınırsa

$$g(X,X)=\frac{1}{2}\left[h(\phi X,\phi X)+h(X,X)+\eta^2(X)\right]$$

olur. Şayet $g(X,X)=0$ ise h Riemann metriği pozitif tanımlı olduğu için

$$\eta(X)=0$$

olduğu açıktır. Bu durumda $\eta(X)=g(X,\xi)=0$ olduğundan $X=0$ olur. Diğer taraftan $X\neq 0$ için h bir Riemann metrik olduğundan $h(\phi X,\phi X)$ ve $h(X,X)$ ifadeleri pozitifdir. Ayrıca $\eta^2(X)$ de pozitif olduğundan $g(X,X)>0$ dır. Böylece g metriği de bir Riemann metriği olur.

Tanımladığımız (3.3.3) ifadesinde X yerine ϕX ve Y yerine de ϕY yazılıp, $(3.2.2)$, (3.2.4) ve $(3.3.1)$ eşitlikleri kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}g(\phi X,\phi Y)=&\frac{1}{2}[h(X,Y)+h(\phi X,\phi Y)-\eta(X)\eta(Y)+2\eta(X)\eta(Y)]\\&-\eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.3.1. (ϕ,ξ,η,g) *dörtlüsü* M *diferansiyellenebilir* $(2n+1)-$*boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapı olsun.* ϕ, g *metriğine göre anti-simetrik tensör alanıdır. Öyle ki*

$$g(X,\phi Y)=-g(\phi X,Y)$$

dir [13].

İspat: $(3.3.2)$ de Y nin yerine ϕY yazılırsa

$$g\left(\phi X,\phi^2 Y\right)=g(X,\phi Y)-\eta(X)\eta(\phi Y)$$

$(3.2.2)$, $(3.2.4)$ ve $(3.3.1)$ eşitliklerinden

$$-g(\phi X,Y)+\eta(Y)\eta(\phi X)=g(X,\phi Y)$$

olur. Burada $(3.2.4)$ eşitliği kullanılırsa

$$g(X,\phi Y)=-g(\phi X,Y)$$

bulunur. Buradan görebiliriz ki ϕ, g metriğine göre anti-simetrik tensör alanıdır.

Sonuç 3.3.2. *Her X, $Y\in\chi(M)$ için M de bir g metriği*

$$\begin{aligned} g:\chi(M)\ \times\ \chi(M)\ &\longrightarrow\ \mathbb{R} \\ (X,Y)\ &\longrightarrow\ g(X,Y)=X^TVY \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olsun. Burada V, g ye karşılık gelen matris olmak üzere, ϕ lineer dönüşümü de

$$\phi:\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

$$X\longrightarrow\phi X=UX$$

$$Y\longrightarrow\phi Y=UY$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$U^TV=-VU$$

dir [18].

İspat: ϕ, g metriğine göre anti-simetrik bir tensör alanıdır. O zaman

$$g(UX,Y)=-g(X,UY)$$

$$(UX)^T VY=-X^TV(UY)$$

$$X^TU^TVY=-X^TVUY$$

dir. Bu denklem soldan $\left(X^T\right)^{-1}$, sağdan Y^{-1} ile çarpılırsa

$$U^TV=-VU$$

elde edilir. Özel olarak $V=I$ için

$$U^T=-U$$

olur. Bu da ϕ ye karşılık gelen matrisin anti-simetrik olduğunu gösterir.

3.4 Kontakt Manifoldlarda Temel 2-Form

Tanım 3.4.1. *Diferansiyellenebilir* $(2n+1)-$*boyutlu M manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapı* (ϕ,ξ,η,g) *dörtlüsüyle verilsin. M de*

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y) \tag{3.4.1}$$

olarak tanımlanan Φ *global formuna h.h. kontakt metrik yapısında bir temel* $2-$*form adı verilir. Kontaktlık tanımına göre* Φ *temel* $2-$*formu için* $\eta\Lambda(\Phi)^n \neq 0$ *dır. Eğer M de*

$$d\eta(X,Y) = g(X,\phi Y) = \Phi(X,Y) \tag{3.4.2}$$

ifadesi sağlanırsa (ϕ,ξ,η,g) *dörtlü yapısına M nin sahip olduğu kontakt metrik yapı ve bu yapıyla birlikte verilmiş* (M,ϕ,ξ,η,g) *beşlisiyle gösterilen M nin kendisine ise kontakt metrik manifold adı verilir [13].*

Örnek 3.4.1. *Örnek* (3.3.1) *de gösterdiğimiz* $\mathbb{R}^3$ *üzerindeki h.h. kontakt metrik manifoldun şimdi de temel* $2-$*formunu bulalım.*

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}(dz - ydx)\\ d\eta &= \frac{1}{2}[d(dz) - dy\Lambda dx - yd(dx)]\\ &= \frac{1}{2}(dx\Lambda dy)\end{aligned}$$

dir. O halde (3.4.1) *eşitliğinden*

$$\Phi = \frac{1}{2}(dx\Lambda dy)$$

ifadesinin $\left(\mathbb{R}^3,\phi,\xi,\eta,g\right)$ *beşlisinde temel* $2-$*form olduğunu söyleyebiliriz.*

Sonuç 3.4.1. *M üzerinde tanımlı her kontakt metrik manifold aynı zamanda bir kontakt manifoldtur. Ayrıca* $\Phi = d\eta$ *koşulunu sağlayan h.h. kontakt metrik yapısı da bir kontakt metrik yapıdır [13].*

Önerme 3.4.1. *M üzerinde bir* η *diferansiyel* $k-$*formu verilsin.* $X_0,X_1,...,X_k \in \chi(M)$ *vektör alanları için*

$$\begin{aligned}d\eta(X_0,...,X_k) &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\eta(X_0,...,X_i,...,X_k))\\ &+ \frac{1}{k+1}\sum_{0\le i\le j\le k}(-1)^{i+j}\eta\left(\left[X_i,X_j\right],X_0,...,X_i,...,X_j,...,X_k\right)\end{aligned}$$

formülü sağlanır. Her $X,Y \in \chi(M)$ için şayet η bir $1-$form ise bu durumda

$$2d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]) \tag{3.4.3}$$

olur [13]. M h.h. kontakt metrik manifoldu için (3.4.3) *eşitliğinde* (3.3.1) *kullanılırsa*

$$2d\eta(X,Y) = Xg(Y,\xi) - Yg(X,\xi) - g([X,Y],\xi) \tag{3.4.4}$$

olur. Ayrıca (2.0.3) *ve* (3.4.2) *eşitlikleri yardımıyla*

$$2\Phi(X,Y) = g(Y,\widehat{\nabla}_X\xi) - g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi)$$

olduğu açıktır.

Önerme 3.4.2. (ϕ,ξ,η,g) *kontakt metrik yapıyla verilen M diferansiyellenebilir* $(2n+1)-$*boyutlu manifoldunda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

$$i)\ d\eta(X,\phi Y) + d\eta(\phi X,Y) = 0 \tag{3.4.5}$$

$$ii)\ d\eta(X,\xi) = 0 \tag{3.4.6}$$

[13].

İspat: *i*) (3.4.2) ifadesinde X gördüğümüz yere ϕX yazılırsa

$$d\eta(\phi X,Y) = g(\phi X,\phi Y) \tag{3.4.7}$$

olur. Benzer şekilde Y nin yerine de ϕY yazılıp, ϕ nin anti-simetrikliği kullanılırsa

$$d\eta(X,\phi Y) = -g(\phi X,\phi Y) \tag{3.4.8}$$

(3.4.7) ve (3.4.8) eşitliklerinden

$$d\eta(X,\phi Y) + d\eta(\phi X,Y) = 0$$

olarak bulunur.

ii) (3.4.2) de Y nin yerine ξ yazılırsa

$$d\eta(X,\xi) = g(X,\phi\xi)$$

olup, (3.2.3) eşitliğinden

$$d\eta(X,\xi) = 0$$

elde edilir.

3.5 Hemen Hemen Kontakt Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 3.5.1. *Reel $n-$boyutlu bir vektör uzayı V olsun. $J : V \overset{lineer}{\longrightarrow} V$ endomorfizmi,*

$$J^2 = -I$$

özelliğini sağlarsa J ye V de bir kompleks yapı denir [13].

Tanım 3.5.2. *M nin sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle verilsin. $(2n+1)-$boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldunda $\mathbb{R}$ Reel doğrusu bir manifold olduğundan $M \times \mathbb{R}$ de bir manifolddur. $M \times \mathbb{R}$ deki vektör alanını $(X, f\frac{d}{dt})$ olarak verirsek, buradaki X, M manifoldunun teğet olduğu bir vektör alanını, $f\frac{d}{dt}$ bir fonksiyonu ve t de $\mathbb{R}$ nin bir koordinatını temsil eder. O halde $M \times \mathbb{R}$ manifoldunun tanjant uzayında bir lineer J dönüşümü*

$$\begin{aligned} J :\ & \chi\,(M \times \mathbb{R}) \overset{lineer}{\longrightarrow} \chi\,(M \times \mathbb{R}) \\ & (X, f\frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta\,(X)\,\frac{d}{dt}) \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

olarak tanımlanır [13].

Teorem 3.5.1. *Yukarıda tanımlanan J dönüşümü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

$i)$ J Lineerdir.

$ii)$ $J^2 = -I$ dır [13].

İspat: $i)$ $\forall\ (X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt}) \in\ \chi\,(M \times \mathbb{R})$ ve λ, $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & J(\lambda(X, f\frac{d}{dt}) + \mu(Y, g\frac{d}{dt})) \\ & = J(\lambda X + \mu Y, (\lambda f + \mu g)\,\frac{d}{dt}) \\ & = (\phi\,(\lambda X + \mu Y) - (\lambda f + \mu g)\,\xi, \eta\,(\lambda X + \mu Y)\,\frac{d}{dt}) \\ & = (\lambda\phi X + \mu\phi Y - \lambda f\xi - \mu g\xi, \lambda\eta\,(X)\,\frac{d}{dt} + \mu\eta\,(Y)\,\frac{d}{dt}) \\ & = (\lambda\phi X - \lambda f\xi, \lambda\eta\,(X)\,\frac{d}{dt}) + (\mu\phi Y - \mu g\xi, \mu\eta\,(Y)\,\frac{d}{dt}) \\ & = \lambda(\phi X - f\xi, \eta\,(X)\,\frac{d}{dt}) + \mu(\phi Y - g\xi, \eta\,(Y)\,\frac{d}{dt}) \\ & = \lambda J(X, f\frac{d}{dt}) + \mu J(Y, g\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

olduğundan J dönüşümü lineerdir.

ii) $\forall\,(X,f\frac{d}{dt})\in\ \chi\,(M\times\mathbb{R})$ için

$$J^2(X,f\frac{d}{dt})=J(J(X,f\frac{d}{dt}))$$

olduğundan, burada $(3.5.1)$ eşitliği iki kez kullanılırsa

$$J^2(X,f\frac{d}{dt})=(\phi\,(\phi X-f\xi)-\eta\,(X)\,\xi,\eta\,(\phi X-f\xi)\,\frac{d}{dt})$$

olur. η ve ϕ lineer olduğundan

$$J^2(X,f\frac{d}{dt})=(\phi^2X-f\phi\xi-\eta\,(X)\,\xi,(\eta\,(\phi X)-f\eta\,(\xi))\frac{d}{dt})$$

dir. $(3.2.1)$, $(3.2.2)$, $(3.2.3)$ ve $(3.2.4)$ eşitliklerinden

$$J^2(X,f\frac{d}{dt})=-I(X,f\frac{d}{dt})$$

olarak bulunur. $\forall(X,f\frac{d}{dt})\in\chi\,(M\times\mathbb{R})$ için bu eşitlik sağlandığından

$$J^2=-I$$

olur. Burada I bir özdeşlik fonksiyonudur. Lineer J dönüşümüne $M\times\mathbb{R}$ manifoldunda bir h.h. kompleks yapı adı verilir.

Tanım 3.5.3. (ϕ,ξ,η,g) *dörtlüsü M diferansiyellenebilir* $(2n+1)-$*boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapısını oluştursun. Öyle ki* $M\times\mathbb{R}$ *üzerinde*

$$\begin{aligned}
&[,]:\chi(M\times\mathbb{R})\times\chi(M\times\mathbb{R})\longrightarrow\chi(M\times\mathbb{R})\\
&((X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt}))\rightarrow\left[(X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\right]\\
&\qquad\qquad=([X,Y],(X\,(g)-Y\,(f))\,\frac{d}{dt})
\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

biçiminde tanımlı operatöre Braket operatörü denir [19].

Tanım 3.5.4. $(2n+1)-$*boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu bir J h.h. kompleks yapısıyla verilmiş olsun. O zaman* $(1,2)-$*tipinde verilen*

$$\begin{aligned}
&N_J:\chi\,(M)\times\chi\,(M)\longrightarrow\chi\,(M)\\
&(X,Y)\longrightarrow N_J\,(X,Y)=J^2\,([X,Y])+[JX,JY]\\
&\qquad\qquad-J\,([JX,Y])-J\,([X,JY])
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı N_J tensör alanı J nin Nijenhuis torsiyon tensörü olarak adlandırılır. $J^2 = -I$ olduğundan

$$N_J(X,Y) = -([X,Y]) + [JX,JY] - J([JX,Y]) - J([X,JY]) \tag{3.5.3}$$

dir. Özel olarak J yerine ϕ alınırsa

$$\begin{aligned} N_\phi(X,Y) &= \phi^2([X,Y]) + [\phi X,\phi Y] - \phi([\phi X,Y]) - \phi([X,\phi Y]) \\ &= -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\phi X,\phi Y] - \phi([\phi X,Y]) \\ &- \phi([X,\phi Y]) \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

biçiminde tanımlı N_ϕ, ϕ tensörünün Nijenhuis torsiyon tensörü olarak adlandırılır [13].

Tanım 3.5.5. *$M \times \mathbb{R}$ üzerinde J h.h. kompleks yapısı verilsin. Şayet N_J Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise yani, $N_J \equiv 0$ oluyorsa J ye integrallenebilirdir denir. Şayet J kompleks yapısı integrallenebilir ise o zaman (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilen h.h. kontakt yapı normaldir diye adlandırılır [13].*

Lemma 3.5.1. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilsin. M de Lie türevine göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$\left(L_\xi \phi\right)(Y) = [\xi,\phi Y] - \phi([\xi,Y]) \tag{3.5.5}$$

$$\left(L_\xi \eta\right)(Y) = \xi(\eta(Y)) - \eta([\xi,Y]) \tag{3.5.6}$$

$$\left(L_{\phi Y} \eta\right)(X) = \phi Y \eta(X) - \eta([\phi Y,X]) \tag{3.5.7}$$

[20].

Teorem 3.5.2. *(ϕ,ξ,η,g) dörtlüsü M diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapısını oluştursun. Bu durumda*

$$\left(L_{\phi Y}\eta\right)(X) = \left(L_{\phi X}\eta\right)(Y)$$

dir [13].

İspat: (3.4.3) de Y yerine ϕY ve benzer olarak X yerine de ϕX alınıp, iki farklı denklem şeklinde taraf tarafa toplanıp, (3.2.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\{d\eta(X,\phi Y) + d\eta(\phi X,Y)\} &= -\phi Y \eta(X) - \eta([X,\phi Y]) \\ &+ \phi X \eta(Y) - \eta([\phi X,Y]) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.4.5) eşitliğinden

$$\phi Y \eta (X) + \eta ([X, \phi Y]) = \phi X \eta (Y) - \eta ([\phi X, Y])$$

olarak bulunur. Buradan (3.5.7) eşitliği yardımıyla

$$\left(L_{\phi Y} \eta\right)(X) = \left(L_{\phi X} \eta\right)(Y)$$

bulunur.

Lemma 3.5.2. *(ϕ, ξ, η) üçlüsü M diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapısını oluştursun. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ için*

$N^{(1)}$ tensörü

$$N^{(1)}(X,Y) = N_{\phi}(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, \tag{3.5.8}$$

$N^{(2)}$ tensörü

$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\phi X}\eta)(Y) - (L_{\phi Y}\eta)(X), \tag{3.5.9}$$

$N^{(3)}$ tensörü

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi}\phi)(X), \tag{3.5.10}$$

$N^{(4)}$ tensörü

$$N^{(4)}(X) = (L_{\xi}\eta)(X) \tag{3.5.11}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Teorem 3.5.3. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle verilsin. Bu durumda*

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (N^{(1)}(X,Y), N^{(2)}(X,Y)\frac{d}{dt}) \tag{3.5.12}$$

ve

$$N_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = (N^{(3)}(X), N^{(4)}(X)\frac{d}{dt}) \tag{3.5.13}$$

dir [19].

İspat: İlk olarak (3.5.12) deki N_j torsiyon tensörünü hesaplayalım. N_j tensörü (3.5.3) eşitliğine göre açılıp, (3.5.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &N_j((X,0),(Y,0)) \\ &= -[(X,0),(Y,0)] + [(\phi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (\phi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})] \\ &\quad - J([(X,0),(\phi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})]) - J([(\phi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (Y,0)]) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında önce (3.5.2) ardından (3.5.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y],(\phi X\eta(Y) - \phi Y\eta(X))\frac{d}{dt}) \\ &\quad -(\phi([X,\phi Y]) - X\eta(Y)\xi,\eta([X,\phi Y])\frac{d}{dt}) \\ &\quad -(\phi([\phi X,Y]) + Y\eta(X)\xi,\eta([\phi X,Y]\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &N_j((X,0),(Y,0)) \\ &= \begin{pmatrix} -[X,Y]+[\phi X,\phi Y]-\phi([X,\phi Y])-\phi([\phi X,Y]) \\ +(X\eta(Y)-Y\eta(X))\xi+\eta[X,Y]\xi-\eta[X,Y]\xi, \\ \begin{pmatrix} \phi X\eta(Y)-\phi Y\eta(X) \\ -\eta([X,\phi Y])-\eta([\phi X,Y]) \end{pmatrix}\frac{d}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.4.3), (3.5.4), (3.5.7), (3.5.8) ve (3.5.9) ifadeleri (3.5.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (N^{(1)}(X,Y),N^{(2)}(X,Y)\frac{d}{dt})$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.5.13) deki N_j torsiyon tensörünü de hesaplayalım. (3.5.1) ve (3.5.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &N_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &= -[(X,0),(0,\frac{d}{dt})] + [(\phi X,\eta(X)\frac{d}{dt}),(-\xi,0)] \\ &\quad -J([(\phi X,\eta(X)\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt})]) - J([(X,0),(-\xi,0)]) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada önce (3.5.2) ardından (3.5.1) eşitliği kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$N_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = (\phi([X,\xi]) - [\phi X,\xi],(\eta([X,\xi]) + \xi\eta(X))\frac{d}{dt}) \tag{3.5.15}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (3.5.5), (3.5.6), (3.5.10) ve (3.5.11) eşitlikleri (3.5.15) de kullanılırsa

$$N_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = (N^{(3)}(X),N^{(4)}(X)\frac{d}{dt})$$

elde edilir.

Teorem 3.5.4. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilsin. (ϕ,ξ,η) üçlü yapısı normaldir ancak ve ancak $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörleri sıfırdır [13].*

İspat: $(\Rightarrow)$: M nin sahip olduğu h.h. kontakt yapısını normal kabul edelim. Bu durumda herhangi $h,k \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ fonksiyonları için

$$N_j((X,h\frac{d}{dt}),(Y,k\frac{d}{dt})) = N_j((X,0)+(0,h\frac{d}{dt}),(Y,0)+(0,k\frac{d}{dt}))$$

ifadesinde J kompleks yapısının lineer oluşu, N_j torsiyon tensörünün de bilineer ve anti-simetrikliği kullanırsa

$$\begin{aligned} & N_j((X,h\frac{d}{dt}),(Y,k\frac{d}{dt})) \\ & \quad = N_j((X,0),(Y,0)) + kN_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ & \qquad - hN_j((Y,0),(0,\frac{d}{dt})) + hkN_j((0,\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt})) \end{aligned}$$

olur. Burada $N_j\left(\left(0,\frac{d}{dt}\right),\ \left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) = 0$ olup, (3.5.12) ve (3.5.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & N_j((X,h\frac{d}{dt}),(Y,k\frac{d}{dt})) \\ & \quad = (N^{(1)}(X,Y), N^{(2)}(X,Y)\frac{d}{dt}) + k(N^{(3)}(X), N^{(4)}(X)\frac{d}{dt}) \\ & \quad - h(N^{(3)}(Y), N^{(4)}(Y)\frac{d}{dt}) \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

olarak bulunur. Eğer N_j torsiyon tensörü sıfır ise

$$N^{(1)}(X,Y) + kN^{(3)}(X) - hN^{(3)}(Y) = 0 \tag{3.5.17}$$

ve

$$N^{(2)}(X,Y) + kN^{(4)}(X) - hN^{(4)}(Y) = 0 \tag{3.5.18}$$

dır. N_{ϕ}, $d\eta$, $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ nin anti-simetrik olduğu kolayca gösterilebilir. (3.5.17) de Y nin yerine X alınırsa $(h \neq k)$

$$N^{(1)}(X,X) = (h-k)N^{(3)}(X)$$

olarak bulunur. Burada $N^{(1)}$ tensörü anti-simetrik olduğu için

$$N^{(1)}(X,X) = 0$$

dır. Buna göre

$$(h-k)N^{(3)}(X) = 0$$

olur. Burada $h \neq k$ olduğundan ve bu eşitlik her X vektör alanı için sağlandığından

$$N^{(3)} = 0$$

dır. Benzer şekilde $(3.5.18)$ eşitliğinde Y yerine X alınırsa $(h \neq k)$

$$N^{(2)}(X,X) = (h-k)N^{(4)}(X)$$

olur. Burada $N^{(2)}$ tensörü anti-simetrik olduğu için

$$N^{(2)}(X,X) = 0$$

dır. Buna göre

$$(h-k)N^{(4)}(X) = 0$$

olur. Burada $h \neq k$ olduğundan ve bu eşitlik her X vektör alanı için sağlandığından

$$N^{(4)} = 0$$

dır. Hatırlatalım ki ispat yapılırken $(h \neq k)$ kabul edilmişti. Şimdi de $(h = k)$ için inceleyelim. $(3.5.17)$ eşitliğinde Y yerine $-X$ alınırsa

$$N^{(1)}(X,-X) + hN^{(3)}(X) - hN^{(3)}(-X) = 0$$

olarak bulunur. Burada $N^{(1)}$ tensörü anti-simetrik olduğu için

$$N^{(1)}(X,X) = 0$$

dır. Buna göre

$$2hN^{(3)}(X) = 0$$

olur. $h \neq 0$ için

$$N^{(3)}(X) = 0$$

olup, bu eşitlik her X vektör alanı için sağlandığından

$$N^{(3)} = 0$$

dır. Benzer şekilde $h = k$ için $(3.5.18)$ eşitliğinde Y yerine $-X$ alınırsa

$$N^{(2)}(X,-X) + hN^{(4)}(X) - hN^{(4)}(-X) = 0$$

elde edilir. Burada $N^{(2)}$ tensörü anti-simetrik olup,

$$N^{(2)}(X,X) = 0$$

dır. Buna göre

$$2hN^{(4)}(X) = 0$$

olur. $h \neq 0$ için

$$N^{(4)}(X) = 0$$

olup, bu eşitlik her X vektör alanı için sağlandığından

$$N^{(4)} = 0$$

dır.

$(\Leftarrow)$: Aksine $N^{(1)}$ den $N^{(4)}$ e kadar olan tensörleri sıfır kabul edelim. Bu durumda (3.5.16) dan

$$N_j((X, h\frac{d}{dt}), (Y, k\frac{d}{dt})) = (0,0)$$

olur. Burada N_j torsiyon tensörü $\forall (X, h\frac{d}{dt}), (Y, k\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$ için sağlandığından

$$N_j \equiv 0$$

olur. Dolayısı ile (ϕ, ξ, η) h.h. kontakt yapısının normal olduğu görülür.

Teorem 3.5.5. *(ϕ, ξ, η) üçlü yapıya sahip $(2n+1)-$boyutlu M h.h. kontakt manifoldunda $N^{(1)}$ sıfıra eşit kabul edilirse $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ de sıfırdır [13].*

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için (3.5.8) de Y nin yerine ξ yazılıp, (3.4.3) ve (3.5.4) eşitlikleri yardımıyla ifade açılıp, hipotez gereğince $N^{(1)} = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$[\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - (\xi\eta(X))\xi = 0 \tag{3.5.19}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin her iki tarafına η uygulayıp, (3.2.1) ve (3.2.4) kullanılırsa

$$\eta[\xi, X] - \xi\eta(X) = 0 \tag{3.5.20}$$

olup, (3.5.6) ve (3.5.11) eşitlikleri yardımıyla, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left(L_\xi \eta\right)(X) = 0$$
$$N^{(4)}(X) = 0$$
$$N^{(4)} = 0$$

elde edilir. (3.5.20) eşitliğinde $X = \phi X$ alınırsa

$$\eta[\xi, \phi X] = 0 \tag{3.5.21}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $(3.5.19)$ un her iki yanına ϕ uygulanırsa, böylece $(3.2.2)$, $(3.2.3)$ ve $(3.5.21)$ eşitliklerinden

$$\phi\,[\xi,X]-[\xi,\phi X]=0$$

dır. Burada $(3.5.5)$ ve $(3.5.10)$ eşitlikleri kullanılırsa, $\forall X\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\left(L_{\xi}\phi\right)(X)&=0\\ N^{(3)}(X)&=0\\ N^{(3)}&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik $N^{(1)}=0$ ise $(3.5.8)$ eşitliğinden

$$0=2d\eta\,(\phi X,Y)\,\xi+N_{\phi}\,(\phi X,Y)$$

olur. Burada $(3.4.3)$ ve $(3.5.4)$ eşitlikleri yardımıyla ifade açılıp, $(3.2.2)$ ve $(3.2.4)$ yardımıyla

$$\begin{aligned}0=&\ \phi X\eta\,(Y)\,\xi+\eta\,(X)\,[\xi,\phi Y]-\phi Y\eta\,(X)\,\xi-[\phi X,Y]-[X,\phi Y]\\ &-\phi\,[\phi X,\phi Y]-\phi\,[-X+\eta\,(X)\,\xi,Y]\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu son eşitliğin her iki tarafında η uygulanıp, $(3.2.1)$, $(3.2.4)$ ve $(3.5.21)$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\phi X\eta\,(Y)-\phi Y\eta\,(X)+\eta\,[\phi Y,X]-\eta\,[\phi X,Y]=0 \qquad (3.5.22)$$

elde edilir. Böylece $(3.5.7)$ ve $(3.5.9)$ eşitliklerinden $N^{(2)}(X,Y)=0$ olur.

Sonuç 3.5.1. *Diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu M manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilsin. $N^{(2)}$ tensörü sıfır ise*

$$d\eta\,(\phi X,\phi Y)=d\eta\,(X,Y)$$

olup, (ϕ,ξ,η) kontakt yapısı $d\eta$ yı ϕ altında invaryant bırakır [1].

İspat: Teorem $(3.5.2)$ ispatından biliyoruz ki

$$2d\eta\,(\phi X,Y)+2d\eta\,(X,\phi Y)=\left(L_{\phi X}\eta\right)(Y)-\left(L_{\phi Y}\eta\right)(X)$$

olup, $(3.5.9)$ eşitliğinden

$$2d\eta\,(\phi X,Y)+2d\eta\,(X,\phi Y)=N^{(2)}(X,Y) \qquad (3.5.23)$$

dir. $N^{(1)} = 0$ iken $N^{(2)} = 0$ olduğu için (3.5.23) de $Y = \phi Y$ alınıp, (3.2.2) kullanılırsa

$$d\eta(\phi X, \phi Y) - d\eta(X,Y) + \eta(Y)\, d\eta(X,\xi) = 0$$

olup, (3.4.6) eşitliğinden

$$d\eta(\phi X, \phi Y) = d\eta(X,Y) \tag{3.5.24}$$

olarak bulunur. Böylece $N^2 = 0$ olması durumunda (ϕ,ξ,η) h.h. kontakt yapısı $d\eta$ $2-$formunu ϕ altında invaryant bırakır.

Sonuç 3.5.2. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt yapı (ϕ,ξ,η) üçlüsüyle verilmiş olsun. Bu yapının normal olması için ancak ve ancak $N^{(1)}$ tensörü sıfır olmalıdır [13].*

Lemma 3.5.3. *(ϕ,ξ,η,g) kontakt metrik yapıyla verilen M diferansiyellenebilir manifoldda*

$$\begin{aligned} g((\widehat{\nabla}_Z\phi)Y,W) = {} & \frac{1}{2} g(N^{(1)}(Y,W), \phi Z) + d\eta(\phi Y, Z)\,\eta(W) \\ & - d\eta(\phi W, Z)\,\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.5.25}$$

olup, herhangi bir kontakt metrik yapı için

$$\widehat{\nabla}_\xi \phi = 0$$

dır [13].

Gerçekten (3.5.25) de $Z = \xi$ alınıp, (3.2.3) ve (3.4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$g((\widehat{\nabla}_\xi\phi)Y,W) = g(\phi Y, \phi\xi)\,\eta(W) - g(\phi W, \phi\xi)\,\eta(Y)$$

bulunur. Burada (3.2.3) eşitliğinden

$$g((\widehat{\nabla}_\xi\phi)Y,W) = 0$$

olur. O zaman $\forall W \in \chi(M)$ için

$$\widehat{\nabla}_\xi \phi = 0$$

dır.

Sonuç 3.5.3. *Kontakt metrik yapıya sahip M manifoldunda ξ vektör alanının integral eğrisi geodeziktir [13].*

İspat: Biliyoruz ki

$$g(\xi,\xi)=1$$

dir. $X\in\chi(M)$ için

$$Xg(\xi,\xi)=0$$
$$\Rightarrow g(\widehat{\nabla}_X\xi,\xi)=0$$

dır. Diğer taraftan ξ nin ortogonal olduğu herhangi X vektör alanı için biliyoruz ki

$$g(\xi,X)=0$$

dır. Her ξ karekteristik vektör alanı için

$$\xi g(\xi,X)=0$$
$$\Rightarrow g(\widehat{\nabla}_\xi\xi,X)+g(\widehat{\nabla}_\xi X,\xi)=0$$

dir. Buradan

$$g(\widehat{\nabla}_\xi\xi,X)=-g(\xi,[\xi,X]+\widehat{\nabla}_X\xi)=-g(\xi,[\xi,X])-g(\xi,\widehat{\nabla}_X\xi)$$

olup, dolayısı ile

$$\begin{aligned} g(\widehat{\nabla}_\xi\xi,X)&=-\eta([\xi,X])\\ &=2d\eta(\xi,X) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan görülebilir ki karekteristik vektör alanı tanımına göre $d\eta(\xi,X)=0$ olduğundan $g(\widehat{\nabla}_\xi\xi,X)=0$ dır ve $\forall X\in\chi(M)$ için bu ifade sağlandığından

$$\widehat{\nabla}_\xi\xi=0$$

olur.

3.6 K-Kontakt Manifoldlar

Tanım 3.6.1. *M bir Riemann manifold ve g de bir Riemann metrik olsun. Şayet M üzerinde $X \in \chi(M)$ için*

$$L_X g = 0$$

oluyorsa bu durumda X vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı olarak adlandırılır. Şayet X bir Killing vektör alanıysa o zaman

$$(L_X g)(Y,Z) = g(\widehat{\nabla}_Y X, Z) + g(Y, \widehat{\nabla}_Z X) = 0$$

sağlanır [17].

Tanım 3.6.2. *(ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü ile verilen $(2n+1)-$boyutlu M kontakt metrik manifoldunda ξ karekteristik vektör alanı g metriğine göre bir Killing vektör alanıysa M deki kontakt metrik yapısına $K-$kontakt yapı, M nin kendisine ise $K-$kontakt manifold adı verilir [1].*

Teorem 3.6.1. *(ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu M manifoldunun sahip olduğu kontakt metrik yapısını oluştursun. M de aşağıdaki önermeler birbirine denk olup sağlanır.*

$$i)\ M \text{ manifoldu bir } K-\text{kontakt manifoldtur.}$$

$$ii)\ g(\widehat{\nabla}_X \xi, Y) + g(X, \widehat{\nabla}_Y \xi) = 0 \tag{3.6.1}$$

$$iii)\ \widehat{\nabla}_X \xi = -\phi X \tag{3.6.2}$$

[20].

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$: M yi $K-$kontakt olan bir manifold olarak kabul edelim. O zaman ξ de bir Killing vektör alanı olur. Dolayısıyla

$$L_\xi g = 0 \tag{3.6.3}$$

dir. Lie türevine göre

$$\left(L_\xi g\right)(X,Y) = \xi g(X,Y) - g([\xi, X],\ Y) - g(X, [\xi, Y])$$

olduğundan, burada (2.0.2) ve (2.0.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}\left(L_\xi g\right)(X,Y) &= g(\widehat{\nabla}_\xi X, Y) + g(X, \widehat{\nabla}_\xi Y) - g(\widehat{\nabla}_\xi X, Y) \\ &\quad + g(\widehat{\nabla}_X \xi, Y) - g(X, \widehat{\nabla}_\xi Y) + g(X, \widehat{\nabla}_Y \xi)\end{aligned}$$

olup, gerekli sadeleştirmeler ile

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,Y) = g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) + g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi) \tag{3.6.4}$$

olarak bulunur. Böylece (3.6.3) den

$$g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) + g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi) = 0$$

olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: (3.6.1) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) = -g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi) \tag{3.6.5}$$

olur. Diğer taraftan (3.4.4) eşitliğinde (2.0.3) kullanılırsa biliyoruz ki

$$2d\eta\,(X,Y) = g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) - g(\widehat{\nabla}_Y\xi,X) \tag{3.6.6}$$

dır. Burada (3.6.5) ifadesi ile (3.6.6) eşitliği karşılaştırılırsa

$$d\eta\,(X,Y) = g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y)$$

olup, M bir kontakt metrik manifold olduğu için (3.4.2) eşitliğinden

$$d\eta\,(X,Y) = g\,(X,\phi Y)$$

olarak bulunur. Burada ϕ tensör alanının anti-simetrikliğinden

$$g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) = -g\,(\phi X,Y) \tag{3.6.7}$$

olup, bu eşitlik her Y vektör alanı için sağlandığından

$$\widehat{\nabla}_X\xi = -\phi X$$

dir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Kabul edelim ki (3.6.2) eşitliği sağlansın. O halde (3.6.4) de (3.6.2) eşitliği kullanılırsa

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,Y) = g\,(-\phi X,Y) + g\,(X,-\phi Y)$$

olur. Burada ϕ tensör alanı anti-simetrik olduğu için

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,Y) = 0$$

dır. Her X ve Y vektör alanları için bu ifade sağlandığından

$$L_{\xi}g = 0$$

olur. Dolayısı ile ξ bir Killing vektör alanı ve M de bir $K-$kontakt manifoldtur.

Lemma 3.6.1. (ϕ,ξ,η,g) *kontakt metrik yapıyla verilen* $(2n+1)-$*boyutlu* M *kontakt metrik manifoldda* N^2 *ve* N^4 *tensörleri sıfırdır. Diğer taraftan* N^3 *tensörünün sıfır olması için ancak ve ancak* ξ *bir Killing vektör alanı olmalıdır [13].*

İspat: M bir kontakt metrik yapıya sahip olduğundan, (3.5.23) eşitliğinde (3.4.2) kullanılırsa

$$N^2(X,Y) = 2g(\phi X,\phi Y) + 2g\left(X,\phi^2 Y\right)$$

olur. ϕ nin anti-simetrikliğinden

$$N^2(X,Y) = 0$$

dır. Bu eşitlik her X ve Y vektör alanları için sağlandığından

$$N^2 = 0$$

olduğu görülür. (3.4.3) de Y yerine ξ yazılıp, (3.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$d\eta(X,\xi) = \frac{1}{2}\{-\xi\eta(X) - \eta([X,\xi])\}$$

bulunur. Üstelik (3.4.2) eşitliğine göre biliyoruz ki

$$\begin{aligned} d\eta(X,\xi) &= g(X,\phi\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, (3.5.6) ve (3.5.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,\xi) &= -\left(L_\xi\eta\right)(X) \\ &= -N^{(4)}(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ve her X vektör alanı için bu eşitlik sağlandığından

$$N^{(4)} = 0$$

olarak bulunur. Üstelik (3.3.1) eşitliğinden $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left(L_\xi g\right)(X,\xi) = \xi\eta(X) - \eta([\xi,X])$$

dir. Burada (3.5.6) kullanılıp, $N^{(4)} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(L_\xi g\right)(X,\xi) = 0$$

olarak bulunur. η ile $d\eta$, ξ nin $1-$parametreli dönüşüm grubu altında invaryant olduğundan Lie türevleri sıfırdır. Yani $L_{\xi}d\eta=0$ dır. Böylece

$$\left(L_{\xi}d\eta\right)(X,Y)=0$$

dır. Lie türevinin açılımı ve (3.4.2) eşitliğinden

$$\xi g(X,\phi Y)-g(\phi Y,[\xi,X])-g(X,\phi\,[\xi,Y])=0 \tag{3.6.8}$$

ifadesi bulunur. Diğer yandan

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,\phi Y)=\xi g\,(X,\phi Y)-g\,(\phi Y,[\xi,X])-g\,(X,[\xi,\phi Y])$$

ve

$$g\left(X,\left(L_{\xi}\phi\right)(Y)\right)=g\,(X,[\xi,\phi Y])-g\,(X,\phi\,[\xi,Y])$$

ifadeleri toplanıp, (3.6.8) kullanılırsa

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,\phi Y)+g\left(X,\left(L_{\xi}\phi\right)(Y)\right)=0$$

eşitliği elde edilir.

($\Rightarrow$) : Kabul edelim ki $N^{(3)}=0$ olsun. O zaman

$$\left(L_{\xi}g\right)(X,\phi Y)=0$$

olur. Bu ifade $X,Y\in\chi\,(M)$ için sağlanıp,

$$L_{\xi}g=0$$

olur. Böylece ξ, g ye göre bir Killing vektör alanıdır.

($\Leftarrow$) : Tersine kabul edelim ki ξ, g metriğine göre bir Killing vektör alanı olsun. Bu durumda $L_{\xi}g=0$ olduğundan

$$g\left(X,\left(L_{\xi}\phi\right)(Y)\right)=0$$

dır. Her X vektör alanı için bu ifade sağlanıp,

$$N^{(3)}=0$$

olur.

Lemma 3.6.2. *M, diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu kontakt metrik yapı (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüyle verilsin. M de bir h operatörü*

$$h:\chi(M)\overset{lineer}{\longrightarrow}\chi(M)$$
$$X\longrightarrow h(X)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi}\phi\right)(X)$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıda verilen koşullar h tensör alanı için sağlanır.

$i)$ Simetriktir. Yani

$$g(hX,Y)=g(X,hY)$$

dir.

$ii)$ $h\xi=0$ dır.

$iii)$ $X\in\chi(M)$ için

$$\widehat{\nabla}_X\xi=-\phi X-\phi hX \tag{3.6.9}$$

dir.

$iv)$ ϕ ile anti-komutatif yani,

$$\phi h=-h\phi \tag{3.6.10}$$

dir.

$v)$ $izh=0$ dır [19].

İspat: $i)$ (3.5.5) eşitliğinden

$$g\left(\left(L_{\xi}\phi\right)X,Y\right)=g\left([\xi,\phi X]-\phi[\xi,X],Y\right)$$

olup, (2.0.2) eşitliği yardımıyla gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g\left(\left(L_{\xi}\phi\right)X,Y\right)=g((\widehat{\nabla}_{\xi}\phi)(X)+\phi\widehat{\nabla}_X\xi-\widehat{\nabla}_{\phi X}\xi,Y)$$

olur. Bir kontakt metrik manifoldda biliyoruz ki $\widehat{\nabla}_{\xi}\xi=0$ ve $\widehat{\nabla}_{\xi}\phi=0$ dır. O halde

$$g\left(\left(L_{\xi}\phi\right)X,Y\right)=g(\phi\widehat{\nabla}_X\xi-\widehat{\nabla}_{\phi X}\xi,Y)$$

olur. Bu eşitlikte X ve Y yerine ξ alınırsa ifade sıfır olur. (3.5.22) eşitliği ξ nin ortogonal olduğu X ve Y için

$$\eta([X,\phi Y])+\eta([\phi X,Y])=0 \tag{3.6.11}$$

olup, diğer yandan (2.0.3) eşitliğinden

$$-g(\widehat{\nabla}_X \xi, \phi Y) - g(\widehat{\nabla}_{\phi X} \xi, Y) = g(\widehat{\nabla}_X \phi Y, \xi) + g(\widehat{\nabla}_{\phi X} Y, \xi)$$

dir. O zaman (3.5.5) ve (3.6.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(hX, Y) &= g\left(\left(L_\xi \phi\right) X, Y\right) \\ &= g(\widehat{\nabla}_X \phi Y, \xi) + g(\widehat{\nabla}_{\phi X} Y, \xi) \\ &= \eta(\widehat{\nabla}_X \phi Y) + \eta(\widehat{\nabla}_{\phi X} Y) \\ &= \eta(\widehat{\nabla}_{\phi Y} X) + \eta(\widehat{\nabla}_Y \phi X) \\ &= g\left(\left(L_\xi \phi\right) Y, X\right) \\ &= g(X, hY) \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla h nın simetrik bir tensör alanı olduğu görülür.

ii) Lie türevi açılımı ve h nın tanımına göre

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \frac{1}{2}\left(L_\xi \phi\right)(\xi) \\ &= \frac{1}{2}\{[\xi, \phi\xi] - \phi([\xi, \xi])\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

iii) (3.5.25) eşitliğinde Z yerine X, Y yerine ξ yazılıp, (3.2.3), (3.5.4) ve (3.5.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$g((\widehat{\nabla}_X \phi)\xi, W) = \frac{1}{2} g\left(\phi^2[\xi, W] - \phi[\xi, \phi W], \phi X\right) - d\eta(\phi W, X)$$

olarak bulunur. Burada (3.4.2), (3.5.5) ve ϕ nin anti-simetrikliğinden

$$g((\widehat{\nabla}_X \phi)\xi, W) = \frac{1}{2} g\left(\phi^2\left(\left(L_\xi \phi\right) W\right), X\right) + g\left(W, \phi^2 X\right)$$

elde edilir. (3.2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & g((\widehat{\nabla}_X \phi)\xi, W) \\ &= \frac{1}{2} g\left(-\left(L_\xi \phi\right) W + \eta\left(\left(L_\xi \phi\right) W\right) \xi, X\right) + g(W, -X + \eta(X)\xi) \\ &= -\frac{1}{2} g\left(\left(L_\xi \phi\right) W, X\right) + \frac{1}{2} \eta\left(\left(L_\xi \phi\right) W\right) \eta(X) - g(W, X) + \eta(W)\eta(X) \end{aligned}$$

olur. Burada $L_\xi\phi$ nin simetrikliği kullanılırsa

$$g((\widehat{\nabla}_X\phi)\xi,W)=-\frac{1}{2}g\left(\left(L_\xi\phi\right)X,W\right)+\frac{1}{2}g\left(W,h\xi\right)\eta\left(X\right)-g\left(W,X\right)+g\left(W,\eta\left(X\right)\xi\right)$$

olur. $h=\frac{1}{2}L_\xi\phi$ ve $h\xi=0$ eşitlikleri göz önüne alınıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\widehat{\nabla}_X\phi\xi-\phi\widehat{\nabla}_X\xi,W)=-\frac{1}{2}g\left(\left(L_\xi\phi\right)X+\eta\left(X\right)\xi-X,W\right)$$

olur. $\forall W\in\chi\left(M\right)$ için ifade sağlandığından

$$-\phi\widehat{\nabla}_X\xi=-\frac{1}{2}\left(L_\xi\phi\right)X+\eta\left(X\right)\xi-X$$

dir. Burada eşitliğin her iki tarafına ϕ uygulayıp, (3.2.2) ve (3.2.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\widehat{\nabla}_X\xi=-\frac{1}{2}\phi\left(L_\xi\phi\right)X-\phi X \tag{3.6.12}$$

olur. h operatörü tanımından biliyoruz ki

$$h=\frac{1}{2}\left(L_\xi\phi\right)=\frac{1}{2}N^{(3)}$$

olduğundan, (3.6.12) eşitliği

$$\widehat{\nabla}_X\xi=-\phi X-\phi hX$$

olarak elde edilir.

iv) Biliyoruz ki (3.6.6) eşitliğinde (3.4.2) kullanılırsa

$$2g\left(X,\phi Y\right)=g(Y,\widehat{\nabla}_X\xi)-g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi)$$

yazılabilir. Burada (3.6.9) eşitliği yardımıyla, ϕ nin anti-simetrikliği ve h nın da simetrikliği kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g\left(\left(\phi h+h\phi\right)X,Y\right)=0$$

olup, $\forall Y\in\chi\left(M\right)$ için eşitlik sağlandığından

$$\phi h+h\phi=0$$

olur. Bu ise h nın anti-komutatif olduğunu gösterir.

v) $\{e_i, \phi e_i, \xi\}$ bir $\phi-$bazı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
izh &= \sum_{i=1}^{n} [g(he_i, e_i) + g(h\phi e_i, \phi e_i) + g(h\xi, \xi)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [g(he_i, e_i) - g(\phi he_i, \phi e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[g(he_i, e_i) + g\left(\phi^2 he_i, e_i\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [g(he_i, e_i) - g(he_i, e_i) + \eta(he_i)\eta(e_i)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

Önerme 3.6.1. *$(2n+1)-$boyutlu bir M kontakt metrik manifoldunda*

$$(\widehat{\nabla}_\xi h)X = \phi X - h^2\phi X - \phi \widehat{R}(X,\xi)\xi, \tag{3.6.13}$$

$$\frac{1}{2}(\widehat{R}(\xi,X)\xi - \phi\widehat{R}(\xi,\phi X)\xi) = h^2X + \phi^2X \tag{3.6.14}$$

dir [19].

İspat: Bir kontakt metrik manifoldda $\widehat{\nabla}_\xi \xi = 0$ olduğu için (3.6.9) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(\xi,X)\xi &= \widehat{\nabla}_\xi \widehat{\nabla}_X \xi - \widehat{\nabla}_{[\xi,X]}\xi \\
&= \widehat{\nabla}_\xi(-\phi X - \phi hX) + \phi[\xi,X] + \phi h[\xi,X]
\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(\xi,X)\xi = &-((\widehat{\nabla}_\xi\phi)X + \phi\widehat{\nabla}_\xi X) - ((\widehat{\nabla}_\xi\phi)hX + \phi\widehat{\nabla}_\xi hX) + \phi\widehat{\nabla}_\xi X - \phi\widehat{\nabla}_X\xi \\
&+ \phi h\widehat{\nabla}_\xi X - \phi h\widehat{\nabla}_X\xi
\end{aligned}$$

olur. Burada $\widehat{\nabla}_\xi\phi = 0$ olduğu göz önüne alınıp, eşitliğin sağ tarafında gerekli sadeleştirmeler yapılarak, (3.6.9) ve (3.6.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= -\phi(-\phi X - \phi hX) - \phi h(-\phi X - \phi hX) - \phi\widehat{\nabla}_\xi hX + \phi h\widehat{\nabla}_\xi X \\
&= \phi^2X - \phi^2h^2X - \phi(\widehat{\nabla}_\xi h)X \\
&= \phi^2X + h^2X - \eta\left(h^2X\right)\xi - \phi(\widehat{\nabla}_\xi h)X
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\widehat{R}(\xi,X)\xi = \phi^2X + h^2X - \phi(\widehat{\nabla}_\xi h)X \tag{3.6.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.6.15) ifadesinin her iki tarafına ϕ uygulanırsa

$$\phi\widehat{R}(\xi,X)\,\xi=-\phi^2\widehat{\nabla}_{\xi}\,(X+hX)+\phi^2\,[\xi,X]+\phi^2 h\,[\xi,X]$$

olur. Burada (3.2.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi\widehat{R}(\xi,X)\,\xi=&\ \widehat{\nabla}_{\xi}X+\widehat{\nabla}_{\xi}hX-\eta(\widehat{\nabla}_{\xi}X)\xi-\eta(\widehat{\nabla}_{\xi}hX)\xi-\widehat{\nabla}_{\xi}X\\&+\widehat{\nabla}_{X}\xi+\eta(\widehat{\nabla}_{\xi}X)\xi-\eta(\widehat{\nabla}_{X}\xi)\xi-h\widehat{\nabla}_{\xi}X+h\widehat{\nabla}_{X}\xi\\&+\eta(h\widehat{\nabla}_{\xi}X)\xi-\eta(h\widehat{\nabla}_{X}\xi)\xi\end{aligned}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\phi\widehat{R}(\xi,X)\,\xi=(\widehat{\nabla}_{\xi}h)X+\widehat{\nabla}_{X}\xi+h\widehat{\nabla}_{X}\xi$$

olur. Dolayısıyla (3.6.9) ve (3.6.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\phi\widehat{R}(\xi,X)\,\xi&=(\widehat{\nabla}_{\xi}h)X-\phi X-\phi hX+\phi hX+h^2\phi X\\&=(\widehat{\nabla}_{\xi}h)X-\phi X+h^2\phi X\end{aligned}\tag{3.6.17}$$

elde edilir. Bu ise bize (3.6.13) denklemini verir. (3.6.17) eşitliğinde X yerine ϕX alınırsa

$$\phi\widehat{R}(\xi,\phi X)\,\xi=(\widehat{\nabla}_{\xi}h)\phi X-\phi^2X+h^2\phi^2X$$

olur. Ayrıca (3.6.10) eşitliği ile beraber $\widehat{\nabla}_{\xi}\phi=0$ ve $h\xi=0$ denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi\widehat{R}(\xi,\phi X)\,\xi&=-\phi(\widehat{\nabla}_{\xi}h)X-\phi^2X+h^2\phi^2X\\&=-h^2X-\phi^2X-\phi(\widehat{\nabla}_{\xi}h)X\end{aligned}\tag{3.6.18}$$

elde edilir. O halde (3.6.16) eşitliğinden (3.6.18) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{1}{2}(\widehat{R}(\xi,X)\,\xi-\phi\widehat{R}(\xi,\phi X)\,\xi)=h^2X+\phi^2X$$

(3.6.14) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.6.1. *Diferansiyellenebilir bir M kontakt metrik $(2n+1)-$boyutlu manifoldun ξ doğrultusundaki Ricci eğriliği $\widehat{Ric}(\xi)$ olmak üzere,*

$$\widehat{Ric}(\xi)=2n-izh^2\tag{3.6.19}$$

dir [19].

İspat: $\{e_i, \phi e_i, \xi\}$ bir ortonormal $\phi-$ bazı olsun. O halde bu baza göre (2.0.7) de X ve Y yerine ξ yazılısa

$$\widehat{Ric}(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\left\{g(\widehat{R}(e_i,\xi)\xi,e_i) + g(\widehat{R}(\phi e_i,\xi)\xi,\phi e_i) + g(\widehat{R}(\xi,\xi)\xi,\xi)\right\}$$

eşitliği elde edilir. $\forall X \in \chi(M)$ için (3.6.14) eşitliğinde Riemann eğrilik tensörü özelliği ve ϕ nin anti-simetrikliği kullanılırsa

$$g(\widehat{R}(X,\xi)\xi,X) + g(\widehat{R}(\phi X,\xi)\xi,\phi X) = -2g\left(\phi^2 X + h^2 X, X\right) \tag{3.6.20}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan ϕ bazına göre h^2 nin izi

$$\begin{aligned}
izh^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(g\left(h^2 e_i, e_i\right) + g\left(h^2 \phi e_i, \phi e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(g\left(h^2 e_i, e_i\right) - g\left(\phi h^2 \phi e_i, e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(g\left(h^2 e_i, e_i\right) + g\left(\phi^2 h^2 e_i, e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(g\left(h^2 e_i, e_i\right) - g\left(h^2 \phi^2 e_i, e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(g\left(h^2 e_i, e_i\right) + g\left(h^2 e_i, e_i\right)\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g\left(h^2 e_i, e_i\right)
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.6.20) eşitliğinin *izi*

$$\begin{aligned}
\widehat{Ric}(\xi) = \widehat{Ric}(\xi,\xi) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{g(\widehat{R}(e_i,\xi)\xi,e_i) + g(\widehat{R}(\phi e_i,\xi)\xi,\phi e_i)\right\} \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} g\left(\left(\phi^2 e_i + h^2 e_i\right), e_i\right) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(\phi^2 e_i, e_i\right) + g\left(h^2 e_i, e_i\right)\right) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\left(-g\left(e_i, e_i\right) + g\left(h^2 e_i, e_i\right)\right) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}(-1) - 2\left(\frac{1}{2} izh^2\right) \\
&= 2n - izh^2
\end{aligned}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

3.7 Sasakian Manifoldlar

Tanım 3.7.1. *M diferansiyellenebilir $(2n+1)-$boyutlu manifoldunun sahip olduğu kontakt metrik yapı (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüyle verilmiş olsun. Şayet M manifoldunun kontakt metrik yapısı normalse o zaman (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüne Sasakian yapı ve bu yapıyla birlikte verilmiş (M,ϕ,ξ,η,g) beşlisiyle gösterilen M ye de Sasakian manifold adı verilir [13].*

Teorem 3.7.1. *$(2n+1)-$boyutlu h.h. kontakt metrik yapıyla birlikte verilmiş M manifoldunda (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsü bir Sasakian yapısıdır $\Leftrightarrow$*

$$(\widehat{\nabla}_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{3.7.1}$$

dir. Burada

$$(\widehat{\nabla}_X\phi)Y = \widehat{\nabla}_X\phi Y - \phi\widehat{\nabla}_X Y \tag{3.7.2}$$

dır [13].

İspat: $(\Rightarrow)$: (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsünün bir Sasakian yapı olduğunu kabul edelim. O zaman M manifoldunun kontakt metrik yapısı normal yapı olup, $N^{(1)} = 0$ ve $d\eta = \Phi$ dir. $(3.5.25)$ denkleminde $Z = X$ için $N^{(1)} = 0$ alınıp, $(3.3.1)$ ve $(3.4.2)$ eşitlikleri kullanılırsa

$$g((\widehat{\nabla}_X\phi)Y,W) = g(\phi Y,\phi X)g(\xi,W) - g(\phi W,\phi X)\eta(Y)$$

ifadesi bulunur. $(3.3.2)$ eşitliği yardımıyla her W vektör alanı için bu ifade sağlandığından

$$(\widehat{\nabla}_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

olur.

$(\Leftarrow)$: Aksine $Y = \xi$ için $(3.7.1)$ ifadesi sağlansın. Bu durumda $(3.2.1)$, $(3.2.3)$ ve $(3.7.2)$ eşitlikleri yardımıyla

$$-\phi\widehat{\nabla}_X\xi = \eta(X)\xi - X$$

olmak üzere, burada önce ϕ uygulanıp ardından $(3.2.2)$ kullanılırsa

$$-\phi^2\widehat{\nabla}_X\xi = \eta(X)\phi\xi - \phi X$$

$$\widehat{\nabla}_X\xi = -\phi X \tag{3.7.3}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan ϕ nin anti-simetrikliğinden biliyoruz ki

$$-g(\phi X,Y) - g(X,\phi Y) = 0$$

dır. Burada (3.7.3) den

$$g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y)+g(X,\widehat{\nabla}_Y\xi)=0 \tag{3.7.4}$$

olur ki bu da

$$\left(L_\xi g\right)(X,Y)=0$$

olması demektir. Dolayısıyla buradan ξ nin bir Killing vektör alanı olduğu görülür. Ayrıca bildiğimiz üzere (3.6.6) eşitliğinde önce (3.7.4) ardından (3.7.3) kullanılıp, (3.4.2) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$d\eta\,(X,Y)=\Phi\,(X,Y)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsü M de bir kontakt metrik yapı olur. Şimdi bu yapının normal olduğunu görelim. Buna göre (3.5.4) eşitliğinde (2.0.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} N_\phi\,(X,Y) &= \phi^2\widehat{\nabla}_XY-\phi^2\widehat{\nabla}_YX+\widehat{\nabla}_{\phi X}\phi Y-\widehat{\nabla}_{\phi Y}\phi X \\ &\quad -\phi\widehat{\nabla}_{\phi X}Y+\phi\widehat{\nabla}_Y\phi X-\phi\widehat{\nabla}_X\phi Y+\phi\widehat{\nabla}_{\phi Y}X \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada önce (3.7.2) adından aksine kabulümüz olan (3.7.1) kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılıp, ϕ nin anti-simetrikliği kullanılırsa

$$N_\phi\,(X,Y)=2g\,(\phi X,Y)\,\xi$$

olur. (3.4.2) eşitliğinden

$$N_\phi\,(X,Y)=-2d\eta\,(X,Y)\,\xi$$

bulunur. Buradan

$$N_\phi\,(X,Y)+2d\eta\,(X,Y)\,\xi=0$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsünün Sasakian yapı olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 3.7.1. *M bir Sasakian manifold ve $\widehat{R}$ da Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman*

$$\widehat{R}(X,Y)\,\xi=\eta\,(Y)\,X-\eta\,(X)\,Y \tag{3.7.5}$$

dır [19].

İspat: (2.0.5) eşitliğinde $Z=\xi$ için (3.7.3) eşitliği kullanılırsa

$$\widehat{R}\,(X,Y)\,\xi=-\widehat{\nabla}_X\phi Y+\widehat{\nabla}_Y\phi X+\phi\widehat{\nabla}_XY-\phi\widehat{\nabla}_YX$$

olur. Burada (3.7.2) yardımıyla eşitliğin sağ tarafı

$$=(\widehat{\nabla}_Y\phi)X-(\widehat{\nabla}_X\phi)Y$$

olup, (3.7.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\widehat{R}(X,Y)\xi &= g(Y,X)\xi - \eta(X)Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \\ &= \eta(Y)X - \eta(X)Y\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Lemma 3.7.1. *Bir Sasakian manifoldda, X birim vektör alanı ξ ye ortogonal olsun. O zaman*

$$\widehat{R}(X,\xi)X = -\xi$$

dir [19].

İspat: Teorem (2.0.1) deki Riemann eğrilik tensörü özellikleri yardımıyla (3.3.1), (3.7.1), (3.7.2) ve (3.7.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(\widehat{R}(X,\xi)X,Y) &= -g(\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y\xi - \widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X\xi - \widehat{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\ X) \\ &= -g(-\widehat{\nabla}_X\phi Y + \widehat{\nabla}_Y\phi X + \phi\widehat{\nabla}_X Y - \phi\widehat{\nabla}_Y X, X) \\ &= g(g(Y,X)\xi - \eta(Y)X - g(Y,X)\xi + g(\xi,X)Y, X)\end{aligned}$$

bulunur. Burada X vektör alanı ξ ye ortogonal olduğu için

$$g(\widehat{R}(X,\xi)X,Y) = g(-\xi,Y)$$

olup, $\forall Y \in \chi(M)$ için bu eşitlik sağlandığından

$$\widehat{R}(X,\xi)X = -\xi$$

dir.

Teorem 3.7.2. *M diferansiyellenebilir Riemann $(2n+1)-$boyutlu manifoldunda bir ξ Killing birim vektör alanı mevcut olsun. O zaman M bir Sasakian manifoldtur $\Leftrightarrow$*

$$\widehat{R}(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{3.7.6}$$

dir [13].

İspat: $(\Rightarrow)$: M yi Sasakian manifoldu olarak kabul edelim. Her $X,Y \in \chi(M)$ için ξ bir Killing birim vektör alanı olduğu için Riemann eğrilik tensörü

$$\widehat{R}(X,\xi)Y = \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y\xi - \widehat{\nabla}_{\widehat{\nabla}_X Y}\xi$$

olarak yazılabilir. Burada $(3.7.2)$ ve $(3.7.3)$ yardımıyla eşitliğin sağ tarafı

$$= -(\widehat{\nabla}_X \phi)Y$$

olup, $(3.7.1)$ eşitliğinden

$$\widehat{R}(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$: Aksine $(3.7.6)$ sağlansın. Bu durumda $(3.7.1)$ eşitliği gereğince M bir Sasakian manifoldtur.

4. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Bu bölümde istatistiksel manifoldlar ile ilgili kavramlara yer verilecektir.

Tanım 4.0.1. *(M,g) ikilisi bir Riemann manifold olsun. ∇ da bu manifold üzerindeki torsiyonsuz bir afin konneksiyonu göstersin. Şayet M üzerinde*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z)$$

eşitliği sağlanırsa (∇, g) ikilisine bir istatistiksel yapı ve (M,∇,g) üçlüsüne de bir istatistiksel manifold adı verilir. Burada

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z)$$

ve

$$(\nabla_Y g)(X,Z) = Yg(X,Z) - g(\nabla_Y X,Z) - g(X,\nabla_Y Z)$$

dir [21].

Tanım 4.0.2. *Bir (∇, g) istatistiksel yapısı için*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla^*_X Z) \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlanan M nin ∇^* afin konneksiyonuna g ye göre ∇ nın dual $(konjuge)$ konneksiyonu denir. (∇^*, g) çifti de M üzerinde bir istatistiksel yapı olup,

$$2\widehat{\nabla} = \nabla + \nabla^* \tag{4.1.2}$$

şeklindedir. Gerçekten M üzerinde α ile indislenen torsiyonsuz konneksiyonların bir parametrik ailesi

$$\nabla^\alpha = \frac{1+\alpha}{2}\nabla + \frac{1-\alpha}{2}\nabla^*$$

olmak üzere, $\alpha = 0$ için

$$\nabla^0 = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*) = \widehat{\nabla}$$

dır. Burada $\widehat{\nabla}$, *M* üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur [21].

Önerme 4.0.1. *(M,∇,∇^*,g) bir istatistiksel manifold olsun. ∇ ve ∇^* torsiyonsuz konneksiyonları için*

$$[X,Y] = [X,Y]^* \tag{4.1.3}$$

dir [22].

Uyarı 4.0.1. *Bir* (M,∇,g) *istatistiksel manifoldunda* $(1,2)-$*tipindeki K tensör alanı*

$$K(X,Y) = \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y \tag{4.1.4}$$

olarak tanımlı olup, (4.1.2) *ve* (4.1.4) *eşitliklerinden*

$$K = \widehat{\nabla} - \nabla^* = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^*) \tag{4.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca K tensörü aşağıdaki koşulları sağlar [21].

$$\begin{aligned} &i)\ K(X,Y) = K(Y,X) \\ &ii)\ g(K(X,Y),Z) = g(Y,K(X,Z)) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Gerçekten ∇, ∇^* *ve* $\widehat{\nabla}$ *torsiyonsuz konneksiyonlar olduğundan* (4.1.3) *eşitliğine göre*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X = \widehat{\nabla}_X Y - \widehat{\nabla}_Y X$$

yazılabilir. Buradan

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X + \widehat{\nabla}_Y X$$

ifadesi (4.1.4) *eşitliğinde yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_X Y + \nabla_Y X - \widehat{\nabla}_Y X \\ &= \nabla_Y X - \widehat{\nabla}_Y X \\ &= K(Y,X) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.1.4) *den*

$$g(K(X,Y),Z) = g(\nabla_X Y,Z) - g(\widehat{\nabla}_X Y,Z)$$

dir. (4.1.1) *ve* (4.1.2) *eşitliklerinden*

$$\begin{aligned} g(K(X,Y),Z) &= Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla^*_X Z) - \frac{1}{2}g(\nabla_X Y,Z) - \frac{1}{2}g(\nabla^*_X Y,Z) \\ &= Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla^*_X Z) - \frac{1}{2}[Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla^*_X Z)] \\ &- \frac{1}{2}[Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z)] \end{aligned}$$

olup, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(K(X,Y),Z) = \frac{1}{2}g(Y,\nabla_X Z - \nabla^*_X Z)$$

olur. (4.1.2) *eşitliğindeki* $\nabla^* = 2\widehat{\nabla} - \nabla$ *ifadesi bu son denklemde yerine yazılırsa*

$$g(K(X,Y),Z) = g(Y,\nabla_X Z - \widehat{\nabla}_X Z) = g(Y,K(X,Z))$$

olduğu görülür.

Uyarı 4.0.2. *Eğer bir g Riemann metriği için verilen K tensör alanı* $(4.1.6)$ *şartını sağlarsa, bu durumda* $(\nabla := \widehat{\nabla} + K, g)$ *M üzerinde bir istatistiksel yapıdır [21].*

Önerme 4.0.2. (M, ∇, g) *bir istatistiksel manifold, R ve* R^* *da Riemann eğrilik tensörleri olsun. O zaman* X_1, X_2, X_3, $X_4 \in \chi(M)$ *için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$i)\ g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R(X_2,X_1)X_3,X_4) \tag{4.1.7}$$

$$ii)\ g(R^*(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R^*(X_2,X_1)X_3,X_4) \tag{4.1.8}$$

$$iii)\ g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R^*(X_1,X_2)X_4,X_3) \tag{4.1.9}$$

[7].

İspat: $i)$ ∇ afin konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = g\left(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3 - \nabla_{[X_1,X_2]}X_3, X_4\right)$$

dir. Eşitliğin sağ tarafı $(-)$ parantezine alınırsa

$$= g\left(-\left(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{[X_2,X_1]}X_3\right), X_4\right)$$

olur. O halde buradan görülebilir ki

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R(X_2,X_1)X_3,X_4)$$

dir.

∇^* dual konneksiyonunun R^* Riemann eğrilik tensörüne göre de ispatı benzer şekildedir.

$iii)$ $[X_1,X_2] = 0$ olduğunu kabul edelim. $(4.1.1)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} X_1\left(X_2 g\left(X_3,X_4\right)\right) &= X_1 g\left(\nabla_{X_2}X_3,X_4\right) + X_1 g\left(X_3,\nabla^*_{X_2}X_4\right) \\ &= g\left(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3,X_4\right) + g\left(\nabla_{X_2}X_3,\nabla^*_{X_1}X_4\right) \\ &\quad + g\left(\nabla_{X_1}X_3,\nabla^*_{X_2}X_4\right) + g\left(X_3,\nabla^*_{X_1}\nabla^*_{X_2}X_4\right) \end{aligned}$$

olup, benzer şekilde

$$\begin{aligned} X_2\left(X_1 g\left(X_3,X_4\right)\right) &= g\left(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3,X_4\right) + g\left(\nabla_{X_1}X_3,\nabla^*_{X_2}X_4\right) \\ &\quad + g\left(\nabla_{X_2}X_3,\nabla^*_{X_1}X_4\right) + g\left(X_3,\nabla^*_{X_2}\nabla^*_{X_1}X_4\right) \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
0=[X_1,X_2]\,g(X_3,X_4) &= X_1\left(X_2 g(X_3,X_4)\right)-X_2\left(X_1 g(X_3,X_4)\right)\\
&= g\left(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3,X_4\right)\\
&\quad +g\left(\nabla^*_{X_1}\nabla^*_{X_2}X_4-\nabla^*_{X_2}\nabla^*_{X_1}X_4,X_3\right)\\
&= g\left(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3,X_4\right)\\
&\quad +g(\nabla^*_{X_1}\nabla^*_{X_2}X_4-\nabla^*_{X_2}\nabla^*_{X_1}X_4-\nabla^*_{[X_1,X_2]}X_4,X_3)\\
&= g\left(R(X_1,X_2)X_3,X_4\right)+g\left(R^*(X_1,X_2)X_4,X_3\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tanım 4.0.3. *Bir (M,∇,g) istatistiksel manifoldunda*

$$S(X,Y)Z=\frac{1}{2}\{R(X,Y)Z+R^*(X,Y)Z\} \tag{4.1.10}$$

ifadesine istatistiksel eğrilik tensör alanı denir [7].

Uyarı 4.0.3. *Bir (∇,g) istatistiksel yapısı için $\widehat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensör alanı $\widehat{R}$ olsun. O zaman*

$$\widehat{R}(X,Y)Z=S(X,Y)Z-[K_X,K_Y]Z \tag{4.1.11}$$

denklemi sağlanır [21].

İspat: (2.0.5) ifadesinde (4.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\widehat{R}(X,Y)Z &= \widehat{\nabla}_X\left(\frac{1}{2}(\nabla_Y Z+\nabla^*_Y Z)\right)-\widehat{\nabla}_Y\left(\frac{1}{2}(\nabla_X Z+\nabla^*_X Z)\right)\\
&\qquad -\frac{1}{2}(\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla^*_{[X,Y]}Z)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\widehat{\nabla}_X\nabla_Y Z+\widehat{\nabla}_X\nabla^*_Y Z-\widehat{\nabla}_Y\nabla_X Z-\widehat{\nabla}_Y\nabla^*_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla^*_{[X,Y]}Z\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}(\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla^*_X\nabla_Y Z)+\frac{1}{2}(\nabla_X\nabla^*_Y Z+\nabla^*_X\nabla^*_Y Z)\\ -\frac{1}{2}(\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla^*_Y\nabla_X Z)-\frac{1}{2}(\nabla_Y\nabla^*_X Z+\nabla^*_Y\nabla^*_X Z)\\ -\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla^*_{[X,Y]}Z\end{array}\right\}\\
&= \frac{1}{4}\{R(X,Y)Z+R^*(X,Y)Z\}\\
&\quad +\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c}\nabla^*_X\nabla_Y Z+\nabla_X\nabla^*_Y Z-\nabla^*_Y\nabla_X Z\\ -\nabla_Y\nabla^*_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla^*_{[X,Y]}Z\end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{4.1.12}
$$

olur. Şimdi (4.1.12) eşitliğininin ikinci parantezindeki

$$\nabla^*_X\nabla_Y Z+\nabla_X\nabla^*_Y Z-\nabla^*_Y\nabla_X Z-\nabla_Y\nabla^*_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla^*_{[X,Y]}Z \tag{4.1.13}$$

ifadesini hesaplayalım. (4.1.4) ve (4.1.5) eşitliklerinden

$$\nabla = K + \widehat{\nabla} \text{ ve } \nabla^* = \widehat{\nabla} - K$$

ifadeleri (4.1.13) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= \nabla^*_X(K(Y,Z) + \widehat{\nabla}_Y Z) + \nabla_X(\widehat{\nabla}_Y Z - K(Y,Z)) \\
&- \nabla^*_Y(K(X,Z) + \widehat{\nabla}_X Z) - \nabla_Y(\widehat{\nabla}_X Z - K(X,Z)) \\
&- (K([X,Y],Z) + \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z) - (\widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - K([X,Y],Z)) \\
&= \nabla^*_X K(Y,Z) + \nabla^*_X \widehat{\nabla}_Y Z + \nabla_X \widehat{\nabla}_Y Z - \nabla_X K(Y,Z) - \nabla^*_Y K(X,Z) \\
&- \nabla^*_Y \widehat{\nabla}_X Z - \nabla_Y \widehat{\nabla}_X Z + \nabla_Y K(X,Z) - 2\widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \widehat{\nabla}_X K(Y,Z) - K(X,K(Y,Z)) + \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z - K(X,\widehat{\nabla}_Y Z) \\
&+ K(X,\widehat{\nabla}_Y Z) + \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z - K(X,K(Y,Z)) - \widehat{\nabla}_X K(Y,Z) \\
&- \widehat{\nabla}_Y K(X,Z) + K(Y,K(X,Z)) - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z + K(Y,\widehat{\nabla}_X Z) \\
&- K(Y,\widehat{\nabla}_X Z) - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z + K(Y,K(X,Z)) + \widehat{\nabla}_Y K(X,Z) - 2\widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= 2\widehat{R}(X,Y)Z - 2K(X,K(Y,Z)) + 2K(Y,K(X,Z))
\end{aligned}$$

olur. Böylece bulduğumuz bu son ifade (4.1.12) de ikinci parantezde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(X,Y)Z = \frac{1}{4}&\{R(X,Y)Z + R^*(X,Y)Z\} \\
&+ \frac{1}{4}\left\{2\widehat{R}(X,Y)Z - 2K(X,K(Y,Z)) + 2K(Y,K(X,Z))\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılıp, (4.1.10) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\widehat{R}(X,Y)Z = S(X,Y)Z - [K_X, K_Y]Z$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.0.3. *(M,∇,g) bir istatistiksel manifold olsun. Bu durumda S tensör alanı aşağıdaki şartları sağlar.*

$$i)\ S(X,Y)Z + S(Y,Z)X + S(Z,X)Y = 0$$

$$ii)\ g(S(X,Y)Z,W) = -g(S(Y,X)Z,W)$$

$$iii)\ g(S(X,Y)Z,W) = -g(S(X,Y)W,Z)$$

$$iv)\ g(S(X,Y)Z,W) = g(S(Z,W)X,Y)$$

[7].

Tanım 4.0.4. *Bir* (M,∇,g) *istatistiksel manifoldunda*

$$S(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

ise M manifolduna $c \in \mathbb{R}$ *sabit istatistiksel eğriliklidir adı verilir [21].*

Şimdi vereceğimiz Lemma $h = \phi$ için ileride inceleyeceğimiz h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldların yapı taşını oluşturur.

Lemma 4.0.1. (∇,g) *bir istatistiksel yapı olsun. M manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapı* (ϕ,ξ,η,g) *ve bu yapıyla birlikte verilmiş tensör alanı da h olmak üzere,*

$$\nabla_X hY - h\nabla^*_X Y = (\widehat{\nabla}_X h)Y + K(X,hY) + hK(X,Y)$$

dir [23].

İspat: $(3.7.2)$, $(4.1.4)$ ve $(4.1.5)$ eşitlikleri kullanırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X hY - h\nabla^*_X Y &= \widehat{\nabla}_X hY + K(X,hY) - h(\widehat{\nabla}_X Y - K(X,Y)) \\ &= (\widehat{\nabla}_X h)Y + K(X,hY) + hK(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

$K-$kontakt yapısı, ξ nin Killing vektör alanı ve h nın da sıfır olduğu kabul edilen bir kontakt metrik yapıdır. Şimdi kontakt olup, $K-$kontakt olmayan bir örnek verelim.

Örnek 4.0.1. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, X_3 \neq 0\}$ *olsun.* $\mathbb{R}^3$ *de standart koordinatlar* (x_1,x_2,x_3) *ve* e_1, e_2, e_3 *vektör alanları*

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ e_2 = \frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_3},\ e_3 = -x_3^2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

olmak üzere, g Riemann metriği $i,j \in \{1,2,3\}$ *için* $g(e_i,e_j) = \delta_{ij}$, η $1-$*formu* $\eta(U) = g(e_1,U)$ *ve* $(1,1)-$*tipindeki* ϕ *tensör alanı da*

$$\phi e_1 = 0,\ \ \phi e_2 = e_3,\ \ \phi e_3 = -e_2$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\eta(e_1) = 1$, $U \in \chi(M)$ *için* $\phi^2 U = -U + \eta(U)e_1$ *ve* $g(\phi U,\phi V) = g(U,V) - \eta(U)\eta(V)$ *dir. Buna göre* $e_1 = \xi$ *olup,* (ϕ,ξ,η,g) *dörtlüsünün M de h.h. kontakt metrik yapısı olduğu görülür. Şimdi* $K-$*kontaktlık durumunu inceleyelim.*

Öncelikle $[e_1,e_2]$, $[e_1,e_3]$ *ve* $[e_2,e_3]$ *ifadelerini hesaplayalım.*

$$
\begin{aligned}
[e_1,e_2] &= e_1(e_2) - e_2(e_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&- \left(\frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&= \left(\frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_1x_3^3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right) \\
&- \left(\frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2x_1x_3^3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right) \\
&= 2x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= -2x_3e_3, \\
[e_1,e_3] &= e_1(e_3) - e_3(e_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-x_3^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + x_3^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&= 0, \\
[e_2,e_3] &= e_2(e_3) - e_3(e_2) \\
&= \frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-x_3^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&+ x_3^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_3^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(-2x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1x_3^5\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{x_3}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right) \\
&+ \left(2\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + 2x_1x_3^5\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right) \\
&= -\frac{2}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + 2\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= 2e_1 + \frac{2}{x_3^4}e_3
\end{aligned}
$$

olur.

Koszul formülünden

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\nabla}_{e_1}e_1 = 0,\ \ \widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -(1+x_3)e_3,\ \ \widehat{\nabla}_{e_1}e_3 = (1+x_3)e_2, \\
&\widehat{\nabla}_{e_2}e_1 = (-1+x_3)e_3,\ \ \widehat{\nabla}_{e_2}e_2 = 0,\ \ \widehat{\nabla}_{e_2}e_3 = (1-x_3)e_1, \\
&\widehat{\nabla}_{e_3}e_1 = (1+x_3)e_2,\ \ \widehat{\nabla}_{e_3}e_2 = -(1+x_3)e_1 - \frac{2}{x_3^4}e_3,\ \ \widehat{\nabla}_{e_3}e_3 = \frac{2}{x_3^4}e_2.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Örneğin $\widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -(1+x_3)e_3$ *eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Gerçekten*

$$\begin{aligned}
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2, e_1) &= e_1 g(e_2,e_1) + e_2 g(e_1,e_1) - e_1 g(e_1,e_2) + g([e_1,e_2],e_1) \\
&\quad + g([e_1,e_1],e_2) - g([e_2,e_1],e_1) \\
&= 0, \\
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2, e_2) &= e_1 g(e_2,e_2) + e_2 g(e_1,e_2) - e_2 g(e_1,e_2) + g([e_1,e_2],e_2) \\
&\quad + g([e_2,e_1],e_2) - g([e_2,e_2],e_1) \\
&= 0, \\
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2, e_3) &= e_1 g(e_2,e_3) + e_2 g(e_1,e_3) - e_3 g(e_1,e_2) + g([e_1,e_2],e_3) \\
&\quad + g([e_3,e_1],e_2) - g([e_2,e_3],e_1) \\
&= -2(1+x_3)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -(1+x_3)e_3.$$

olur. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir. Buradan da görebiliriz ki

$$d\eta(e_1,e_2) = 0 = g(e_1,\phi e_2), \quad d\eta(e_1,e_3) = 0 = g(e_1,\phi e_3)$$

ve

$$d\eta(e_2,e_3) = \frac{1}{2}\left\{g(\widehat{\nabla}_{e_2}e_1,e_3) - g(\widehat{\nabla}_{e_3}e_1,e_2)\right\} = -1 = g(e_2,\phi e_3)$$

dir. Böylece $d\eta = \Phi$ *olup, M kontakt metrik manifoldtur. Diğer taraftan*

$X = e_2$ *ve* $\phi X = \phi e_2 = e_3$ *olduğundan ve* (3.6.9) *eşitliğinden*

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_X \xi &= -\phi X + h\phi X \\
&= -\phi e_2 + h\phi e_2 \\
&= -e_3 + he_3 \\
&= (h-1)e_3
\end{aligned}$$

$h \neq 0$ *dır. O halde kontakt metrik manifold* $K-$*kontakt değildir.*

Şimdi bilinen bazı temel ifadelerden yararlanıp, daha sonraki kontakt istatistiksel manifoldlar bölümünde kullanacağımız bazı eşitlikleri elde edelim.

$$\left(L_\xi g\right)(X,Y) = 0 \quad ; X,Y \in \chi(M) \tag{4.1.14}$$

iken $(M, \widehat{\nabla}, g)$ Riemann manifoldunda ξ nin bir Killing vektör alanı olduğunu hatırlayalım. Ayrıca

$$\left(L_{\xi} g\right)(X,Y) = g(\widehat{\nabla}_X \xi, Y) + g(\widehat{\nabla}_Y \xi, X)$$

dir. Burada bir (M, ∇, g) istatistiksel manifolduna göre (4.1.4) eşitliğinden

$$\left(L_{\xi} g\right)(X,Y) = g\left(\nabla_X \xi - K\left(X,\xi\right), Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi - K\left(Y,\xi\right), X\right)$$

olup, g nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}\left(L_{\xi} g\right)(X,Y) &= g\left(\nabla_X \xi, Y\right) - g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi, X\right) \\ &\quad - g\left(K\left(Y,\xi\right), X\right)\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

bulunur. Şayet ξ, istatistiksel manifold üzerinde bir Killing vektör alanıysa (4.1.14) ve (4.1.15) eşitliklerinden

$$g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi, X\right) = g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) + g\left(K\left(Y,\xi\right), X\right)$$

olur. Burada (4.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi, X\right) = 2g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) = 2g\left(K\left(Y,\xi\right), X\right) \tag{4.1.16}$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.1.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\left(L_{\xi} g\right)(X,Y) &= g\left(K\left(X,\xi\right) + \nabla^*_X \xi, Y\right) + g\left(K\left(Y,\xi\right) + \nabla^*_Y \xi, X\right) \\ &= g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) + g\left(\nabla^*_X \xi, Y\right) + g\left(K\left(Y,\xi\right), X\right) \\ &\quad + g\left(\nabla^*_Y \xi, X\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. ξ bir Killing vektör alanı olduğu için (4.1.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}g\left(\nabla^*_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla^*_Y \xi, X\right) &= -g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) - g\left(K\left(\xi,Y\right), X\right) \\ &= -g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) - g\left(Y, K\left(\xi,X\right)\right)\end{aligned}$$

olup, buradan

$$g\left(\nabla^*_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla^*_Y \xi, X\right) = -2g\left(K\left(X,\xi\right), Y\right) = -2g\left(K\left(Y,\xi\right), X\right) \tag{4.1.17}$$

elde edilir.

5. KONTAKT İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Bu bölümde h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldlar ve bunların bazı sınıfları ile ilgili kavramlara yer verilecektir.

5.1 Hemen Hemen Kontakt Metrik İstatistiksel Manifoldlar

Bu kısımda h.h. kontakt metrik manifold üzerinde bir istatistiksel manifold tanımlayacağız. Ardından da h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.1.1. *(∇, g) ikilisi bir istatistiksel yapı olsun. (g, ϕ, ξ) üçlüsü de M diferansiyellenebilir manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapısını oluştursun. O zaman*

$$\nabla_X \phi Y - \phi \nabla^*_X Y = (\widehat{\nabla}_X \phi)Y + K(X, \phi Y) + \phi K(X,Y)$$

dir [21].

Tanım 5.1.1. *M manifoldu üzerinde (∇, g, ϕ, ξ) dörtlüsüne bir Sasakian istatistiksel yapı denir, eğer (∇, g) bir istatistiksel yapı, (g, ϕ, ξ) üçlüsü M de bir Sasakian yapı ve*

$$K(X, \phi Y) + \phi K(X,Y) = 0 \quad ; X,\ Y \in \chi(M)$$

ise [21].

Örnek 5.1.1. *(g, ϕ, ξ) üçlüsü M de bir Sasakian yapı olarak verilsin. O zaman*

$$K(X,Y) = g(X,\xi)\, g(Y,\xi)\, \xi \quad ; X,\ Y \in \chi(M)$$

olarak tanımlı K tensörü M üzerinde bir Sasakian istatistiksel yapı oluşturur. Gerçekten

(4.1.6) *eşitliğinden*

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= g(X,\xi)\, g(Y,\xi)\, \xi \\ &= g(Y,\xi)\, g(X,\xi)\, \xi \\ &= K(Y,X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(K(X,Y),Z) &= g(g(X,\xi)\, g(Y,\xi)\, \xi, Z) \\ &= g(Y,\xi)\, g(X,\xi)\, g(\xi, Z) \\ &= g(Y, g(X,\xi)\, g(\xi,Z)\, \xi) \\ & g(Y, K(X,Z)) \end{aligned}$$

dir. O halde Uyarı (4.0.2) *den* $(\nabla := \widehat{\nabla} + K, g)$, *M üzerinde bir istatistiksel yapıdır. Diğer yandan*

$$K(X, \phi Y) + \phi K(X, Y) = g(X, \xi)\, g(\phi Y, \xi)\, \xi + \phi\left(g(X, \xi)\, g(Y, \xi)\, \xi\right)$$

olup, $\phi\xi = 0$ *ve* ϕ *anti-simetrik olduğu için*

$$K(X, \phi Y) + \phi K(X, Y) = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\lambda \in c^{\infty}(M)$ *için* $(\nabla^{\lambda} := \widehat{\nabla} + \lambda K, g, \phi, \xi)$, *M üzerinde bir Sasakian istatistiksel yapıdır.*

Tanım 5.1.2. (∇, g) *bir istatistiksel yapı ve M de* (g, ϕ, ξ, η) *dörtlüsü de h.h. kontakt metrik yapı olsun. Şayet*

$$K(X, \phi Y) + \phi K(X, Y) = 0 \tag{5.1.1}$$

ifadesi ve buna denk olarak

$$\nabla_X \phi Y - \phi \nabla^*_X Y = (\widehat{\nabla}_X \phi) Y \tag{5.1.2}$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $(M, \nabla, g, \phi, \xi, \eta)$ *altılısı ile gösterilen M manifoldun kendisine h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold adı verilir [23].*

Belirtelim ki M h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldu ∇^* dual konneksiyonu için de $(M, \nabla^*, g, \phi, \xi, \eta)$ ile gösterilir [23].

Şimdi de h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold örneği verelim.

Örnek 5.1.2. (x, y, z) *üçlüsü* $\mathbb{R}^3$ *de kartezyen koordinatlar ve* $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$ *manifoldunun her bir noktasında lineer bağımsız* e_1, e_2, e_3 *vektör alanları*

$$e_1 = \partial x, \;\; e_2 = \partial y - x\partial z, \; e_3 = \partial z$$

olmak üzere, g Riemann metriği $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *için* $g\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}$, η $1-$*formu* $\eta(U) = g(e_3, U)$ *ve* $(1,1)-$*tipindeki* ϕ *tensör alanı da*

$$\phi e_1 = -e_2, \;\; \phi e_2 = e_1, \;\; \phi e_3 = 0$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\eta(e_3) = 1$, $U \in \chi(M)$ *için* $\phi^2 U = -U + \eta(U) e_3$ *ve* $g(\phi U, \phi V) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V)$ *dir. Buna göre* $e_3 = \xi$ *olup,* (ϕ, ξ, η, g) *dörtlüsünün M de h.h. kontakt metrik yapısı olduğu görülür. Şimdi istatistiksellik durumunu inceleyelim.*

Öncelikle $[e_1,e_2]$, $[e_1,e_3]$ *ve* $[e_2,e_3]$ *ifadelerini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}
[e_1,e_2] &= e_1(e_2)-e_2(e_1)\\
&= \partial x(\partial y - x\partial z)-\partial y + x\partial z(\partial x)\\
&= \partial^2 xy - \partial z - x\partial^2 xz - \partial^2 yx + x\partial^2 zx\\
&= -e_3,\\
[e_1,e_3] &= e_1(e_3)-e_3(e_1)\\
&= \partial x(\partial z)-\partial z(\partial x)\\
&= 0,\\
[e_2,e_3] &= e_2(e_3)-e_3(e_2)\\
&= \partial y - x\partial z(\partial z)-\partial z(\partial y - x\partial z)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

olur. Koszul formülünden aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

$$\widehat{\nabla}_{e_1}e_1 = \widehat{\nabla}_{e_2}e_2 = \widehat{\nabla}_{e_3}e_3 = 0,\ \widehat{\nabla}_{e_2}e_1 = -\widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3,$$
$$\widehat{\nabla}_{e_3}e_1 = \widehat{\nabla}_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_2,\ \ \widehat{\nabla}_{e_3}e_2 = \widehat{\nabla}_{e_2}e_3 = -\frac{1}{2}e_1.$$

dir. Örneğin $\widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -\frac{1}{2}e_3$ *olduğunu gösterelim.*

$$\begin{aligned}
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2,e_1) &= e_1g(e_2,e_1)+e_2g(e_1,e_1)-e_1g(e_1,e_2)+g([e_1,e_2],e_1)\\
&\quad + g([e_1,e_1],e_2)-g([e_2,e_1],e_1)\\
&= 0,\\
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2,e_2) &= e_1g(e_2,e_2)+e_2g(e_1,e_2)-e_2g(e_1,e_2)+g([e_1,e_2],e_2)\\
&\quad + g([e_2,e_1],e_2)-g([e_2,e_2],e_1)\\
&= 0,\\
2g(\widehat{\nabla}_{e_1}e_2,e_3) &= e_1g(e_2,e_3)+e_2g(e_1,e_3)-e_3g(e_1,e_2)+g([e_1,e_2],e_3)\\
&\quad + g([e_3,e_1],e_2)-g([e_2,e_3],e_1)\\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -\frac{1}{2}e_3$$

olur. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir. Şimdi torsiyonsuz afin konneksiyonları aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_2}e_2 = \frac{1}{2}e_1,\ \nabla_{e_3}e_1 = \nabla_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_2,\ \nabla_{e_3}e_2 = \nabla_{e_2}e_3 = -\frac{1}{2}e_1,$$
$$\nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3,\ \nabla_{e_1}e_2 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3,\ \nabla_{e_3}e_3 = 0.$$

Ayrıca (4.1.2) *eşitliğinden* ∇ *nın duali olan* ∇^*,

$$\nabla^*_{e_1}e_1 = -\nabla^*_{e_2}e_2 = -\frac{1}{2}e_1,\ \nabla^*_{e_3}e_1 = \nabla^*_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_2,\ \nabla^*_{e_3}e_2 = \nabla^*_{e_2}e_3 = -\frac{1}{2}e_1,$$
$$\nabla^*_{e_2}e_1 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3,\ \nabla^*_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3,\ \nabla^*_{e_3}e_3 = 0$$

olarak bulunur. $\forall i, j, k \in \{1,2,3\}$ *için*

$$(\nabla_{e_i}g)\left(e_j, e_k\right) = \left(\nabla_{e_j}g\right)(e_i, e_k)$$

olduğu görülür. Örneğin bu denklem $i = 1,\ j = 2$ *ve* $k = 3$ *değerleri için korunur. Gerçekten*

$$\begin{gathered}(\nabla_{e_1}g)(e_2,e_3) = (\nabla_{e_2}g)(e_1,e_3)\\
e_1g(e_2,e_3) - g(\nabla_{e_1}e_2,e_3) - g(e_2,\nabla_{e_1}e_3) = e_2g(e_1,e_3) - g(\nabla_{e_2}e_1,e_3) - g(e_1,\nabla_{e_2}e_3)\\
-g(-\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3, e_3) - g(e_2,\frac{1}{2}e_2) = -g(-\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, e_3) - g(e_1, -\frac{1}{2}e_1)\\
\frac{1}{2}g(e_2,e_3) + \frac{1}{2}g(e_3,e_3) - \frac{1}{2}g(e_2,e_2) = \frac{1}{2}g(e_2,e_3) - \frac{1}{2}g(e_3,e_3) + \frac{1}{2}g(e_1,e_1)\\
0 = 0\end{gathered}$$

olur. O halde (∇, g), *M üzerinde bir istatistiksel yapıdır. Ayrıca* (5.1.1) *ve* (5.1.2) *den*

$$\nabla_{e_i}\phi e_j - \phi\nabla^*_{e_i}e_j = (\widehat{\nabla}_{e_i}\phi)e_j$$

ve

$$K\left(e_i, \phi e_j\right) + \phi K\left(e_i, e_j\right) = 0$$

bağıntıları denk olup $\forall i, j \in \{1,2,3\}$ *için korunurlar.*

Örneğin $i = 1,\ j = 2$ *olsun.* $\phi e_1 = -e_2,\ \phi e_2 = e_1$ *ve* $\phi e_3 = 0$ *olduğu göz önüne alınırsa*

$$\begin{gathered}\nabla_{e_1}\phi e_2 - \phi\nabla^*_{e_1}e_2 = (\widehat{\nabla}_{e_1}\phi)e_2\\
\nabla_{e_1}e_1 - \phi(\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3) = \widehat{\nabla}_{e_1}\phi e_2 - \phi\widehat{\nabla}_{e_1}e_2\\
\nabla_{e_1}e_1 - \frac{1}{2}\phi e_2 + \frac{1}{2}\phi e_3 = \widehat{\nabla}_{e_1}e_1 - \phi\widehat{\nabla}_{e_1}e_2\\
\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_1 = -\frac{1}{2}\phi e_3\\
0 = 0\end{gathered}$$

dır. $K = \widehat{\nabla} - \nabla^*$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
K(e_1, \phi e_2) + \phi K(e_1, e_2) &= K(e_1, e_1) + \phi(\widehat{\nabla}_{e_1} e_2 - \nabla^*_{e_1} e_2) \\
&= \widehat{\nabla}_{e_1} e_1 - \nabla^*_{e_1} e_1 + \phi \widehat{\nabla}_{e_1} e_2 - \phi \nabla^*_{e_1} e_2 \\
&= \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} \phi e_3 - \frac{1}{2} \phi e_2 + \frac{1}{2} \phi e_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur ve her iki denklem sağlanır. Böylece $(M, \nabla, g, \phi, \xi, \eta)$ *altılısı h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldtur.*

Belirtelim ki $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ *için*

$$(\widehat{\nabla}_{e_i} \phi) e_j = \frac{1}{2} \{ g(e_j, e_i) \xi - \eta(e_j) e_i \}$$

olup, M bir $\frac{1}{2}-$*Sasakian istatistiksel manifoldtur. Hatırlatalım ki eğer*

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) Y = \alpha \{ g(X, Y) \xi - \eta(Y) X \}$$

oluyorsa M bir $\alpha-$*Sasakian manifoldtur. Örneğin* $i = 1,\ j = 2$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}
(\widehat{\nabla}_{e_1} \phi) e_2 &= \frac{1}{2} \{ g(e_2, e_1) \xi - \eta(e_2) e_1 \} \quad ; \xi = e_3 \\
\widehat{\nabla}_{e_1} \phi e_2 - \phi \widehat{\nabla}_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} \{ g(e_2, e_3) e_1 \} \\
\widehat{\nabla}_{e_1} e_1 + \frac{1}{2} \phi e_3 &= \frac{1}{2} g(e_2, e_3) e_1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

Şimdi h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold için daha genel bir örnek verelim.

Örnek 5.1.3. (g, ϕ, ξ, η) *dörtlüsü M manifoldunun sahip olduğu h.h. kontakt metrik yapısını oluştursun. W herhangi bir vektör alanı ve* $W \perp \xi$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
K(X, Y) = &\{ g(W, X) g(W, \phi Y) + g(W, \phi X) g(W, Y) \} \phi W \\
&+ \{ g(W, X) g(W, Y) - g(W, \phi X) g(W, \phi Y) \} W
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı K tensörü (4.1.6) *ve* (5.1.1) *eşitliklerini sağlar. Gerçekten*

$$
\begin{aligned}
K(X,Y) &= \{g(W,X)g(W,\phi Y)+g(W,\phi X)g(W,Y)\}\phi W \\
&+\{g(W,X)g(W,Y)-g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}W \\
&= \{g(W,Y)g(W,\phi X)+g(W,\phi Y)g(W,X)\}\phi W \\
&+\{g(W,Y)g(W,X)-g(W,\phi Y)g(W,\phi X)\}W \\
&= K(Y,X)
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca ϕ tensör alanının anti-simetrikliğinden

$$
\begin{aligned}
g(K(X,Y),Z) &= g\left(\begin{array}{c}\{g(W,X)g(W,\phi Y)+g(W,\phi X)g(W,Y)\}\phi W \\ +\{g(W,X)g(W,Y)-g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}W,Z\end{array}\right) \\
&= g(g(W,X)g(W,\phi Y)\phi W,Z)+g(g(W,\phi X)g(W,Y)\phi W,Z) \\
&+g(g(W,X)g(W,Y)W,Z)-g(g(W,\phi X)g(W,\phi Y)W,Z) \\
&= g(W,X)g(W,\phi Y)g(\phi W,Z)+g(W,\phi X)g(W,Y)g(\phi W,Z) \\
&+g(W,X)g(W,Y)g(W,Z)-g(W,\phi X)g(W,\phi Y)g(W,Z) \\
&= g(W,X)g(\phi W,Y)g(W,\phi Z)-g(W,\phi X)g(W,Y)g(W,\phi Z) \\
&+g(W,X)g(W,Y)g(W,Z)+g(W,\phi X)g(\phi W,Y)g(W,Z) \\
&= g(Y,g(W,X)g(W,\phi Z)\phi W)+g(Y,g(W,\phi X)g(W,Z)\phi W) \\
&+g(Y,g(W,X)g(W,Z)W)-g(Y,g(W,\phi X)g(W,\phi Z)W) \\
&= g\left(\begin{array}{c}Y,\{g(W,X)g(W,\phi Z)+g(W,\phi X)g(W,Z)\}\phi W \\ +\{g(W,X)g(W,Z)-g(W,\phi X)g(W,\phi Z)\}W\end{array}\right) \\
&= (Y,K(X,Z))
\end{aligned}
$$

olur. O halde Uyarı (4.0.2) *den* $(\nabla := \widehat{\nabla}+K,g)$, *M üzerinde bir istatistiksel yapıdır. Diğer taraftan* (3.2.2) *eşitliği yardımıyla*

$$
\begin{aligned}
&K(X,\phi Y)+\phi K(X,Y) \\
&= \left[\begin{array}{c}\{g(W,X)g\left(W,\phi^2 Y\right)+g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}\phi W \\ +\{g(W,X)g(W,\phi Y)-g(W,\phi X)g\left(W,\phi^2 Y\right)\}W\end{array}\right] \\
&+\left[\phi\left(\begin{array}{c}\{g(W,X)g(W,\phi Y)+g(W,\phi X)g(W,Y)\}\phi W \\ +\{g(W,X)g(W,Y)-g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}W\end{array}\right)\right] \\
&= \left[\begin{array}{c}\{g(W,X)g\left(W,\phi^2 Y\right)+g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}\phi W \\ +\{g(W,X)g(W,\phi Y)-g(W,\phi X)g\left(W,\phi^2 Y\right)\}W\end{array}\right] \\
&+\left[\begin{array}{c}\{g(W,X)g(W,\phi Y)+g(W,\phi X)g(W,Y)\}\phi^2 W \\ +\{g(W,X)g(W,Y)-g(W,\phi X)g(W,\phi Y)\}\phi W\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g(W,X)\,g\left(W,\phi^2 Y\right)\phi W + g(W,\phi X)\,g(W,\phi Y)\,\phi W \\
&\quad + g(W,X)\,g(W,\phi Y)\,W - g(W,\phi X)\,g\left(W,\phi^2 Y\right)W \\
&\quad + g(W,X)\,g(W,\phi Y)\,\phi^2 W + g(W,\phi X)\,g(W,Y)\,\phi^2 W \\
&\quad + g(W,X)\,g(W,Y)\,\phi W - g(W,\phi X)\,g(W,\phi Y)\,\phi W \\
&= -g(W,X)\,g(W,Y)\,\phi W + g(W,X)\,g(W,\phi Y)\,W \\
&\quad + g(W,\phi X)\,g(W,Y)\,W - g(W,X)\,g(W,\phi Y)\,W \\
&\quad - g(W,\phi X)\,g(W,Y)\,W + g(W,X)\,g(W,Y)\,\phi W
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K(X,\phi Y) + \phi K(X,Y) = 0$$

olduğu görülür. Böylece M h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldtur.

5.2 Hemen Hemen Kontakt Metrik İstatistiksel Manifoldların Bazı Sınıfları

Öncelikle bu kısımda bize yardımcı olacak bazı temel eşitliklerden yararlanıp, daha sonra kullanacağımız denklemleri elde edeceğiz. Sonra kontakt metrik ve $K-$kontakt istatistiksel manifoldları tanımlayacağız. Ardından kontakt metrik istatistiksel manifoldlarda karşılık gelen sonuçları verip, kontakt metrik istatistiksel manifoldların $K-$kontakt istatistiksel manifoldu olması için gerek ve yeter şartları sunacağız. Ayrıca tek boyutlu bir istatistiksel manifoldun bir $K-$kontakt istatistiksel manifold olabileceği durumları da inceleyeceğiz.

Eğer bir M manifoldu h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold ise o zaman (5.1.2) eşitliğinde Y nin yerine ξ yazılırsa

$$\nabla_X \phi\xi - \phi\nabla^*_X\xi = (\widehat{\nabla}_X\phi)\xi$$

(3.7.2) den

$$\phi\nabla^*_X\xi = \phi\widehat{\nabla}_X\xi$$

olup, bu eşitliğe ϕ uygulanırsa

$$\phi^2\nabla^*_X\xi = \phi^2\widehat{\nabla}_X\xi$$

olur. (3.2.2) eşitliği ve $g(\widehat{\nabla}_X\xi,\xi)\xi = 0$ dan

$$\nabla^*_X\xi = \widehat{\nabla}_X\xi + g(\nabla^*_X\xi,\xi)\,\xi \tag{5.2.1}$$

elde edilir. Burada (4.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$2\widehat{\nabla}_X\xi - \nabla_X\xi = \widehat{\nabla}_X\xi + 2g(\widehat{\nabla}_X\xi,\xi)\xi - g(\nabla_X\xi,\xi)\xi$$

olur. Buradan

$$\nabla_X\xi = \widehat{\nabla}_X\xi + g(\nabla_X\xi,\xi)\xi \tag{5.2.2}$$

olarak bulunur. (4.1.4), (4.1.5) ve (5.2.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} K(X,\xi) &= \widehat{\nabla}_X\xi - \nabla^*_X\xi \\ &= -g(\nabla^*_X\xi,\xi)\xi \\ &= \nabla_X\xi - \widehat{\nabla}_X\xi \end{aligned}$$

olup, (5.2.2) yardımıyla

$$K(X,\xi) = -g(\nabla^*_X\xi,\xi)\xi = g(\nabla_X\xi,\xi)\xi \tag{5.2.3}$$

olduğu görülür. Üstelik

$$hK(X,\xi) = 0 \tag{5.2.4}$$

dır. Gerçekten $h\xi = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} hK(X,\xi) &= g(\nabla_X\xi,\xi)h\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan torsiyonsuz ∇^* konneksiyonuna göre (2.0.2) ve (3.3.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta\left([X,Y]^*\right) \\ &= Xg(\xi,Y) - Yg(\xi,X) - g(\nabla^*_XY,\xi) + g(\nabla^*_YX,\xi) \end{aligned}$$

olup, (4.1.1) eşitliği yardımıyla gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$2d\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi,Y) - g(X,\nabla_Y\xi) \tag{5.2.5}$$

ifadesi bulunur. Üstelik (5.2.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) &= g(\widehat{\nabla}_X\xi,Y) + g(\nabla_X\xi,\xi)\eta(Y) \\ &\quad - g(\widehat{\nabla}_Y\xi,X) - g(\nabla_Y\xi,\xi)\eta(X) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

olur. Ayrıca $\widehat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre elde ettiğimiz (3.6.6) ile (5.2.6) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$g(\nabla_X \xi, \xi)\, \eta(Y) = g(\nabla_Y \xi, \xi)\, \eta(X) \tag{5.2.7}$$

bulunur.

Şimdi bir h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldda

$$[K_X, K_Y]\, \xi = K(X, K(Y, \xi)) - K(Y, K(X, \xi))$$

eşitliğini hesaplayalım. (5.2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} [K_X, K_Y]\, \xi &= K(X, g(\nabla_Y \xi, \xi)\, \xi) - K(Y, g(\nabla_X \xi, \xi)\, \xi) \\ &= g(\nabla_Y \xi, \xi)\, K(X, \xi) - g(\nabla_X \xi, \xi)\, K(Y, \xi) \\ &= g(\nabla_Y \xi, \xi)\, g(\nabla_X \xi, \xi)\, \xi - g(\nabla_X \xi, \xi)\, g(\nabla_Y \xi, \xi)\, \xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.11) eşitliğinde Z yerine ξ yazılıp, $[K_X, K_Y]\, \xi = 0$ ifadesi kullanılırsa

$$S(X, Y)\, \xi = \widehat{R}(X, Y)\, \xi \tag{5.2.8}$$

olarak bulunur.

Tanım 5.2.1. *M h.h. kontak metrik istatistiksel manifoldu $(M, \nabla, g, \phi, \xi, \eta)$ altılısıyla verilsin. M üzerinde $d\eta = \Phi$ ise M ye bir kontakt metrik istatistiksel manifold, eğer $d\eta = \Phi$ ve ξ de Killing vektör alanı ise o zaman M ye bir $K-$kontakt istatistiksel manifold adı verilir [23].*

Önerme 5.2.1. *Bir M kontakt metrik istatistiksel $(2n+1)-$boyutlu manifoldunda*

$$\nabla^*_\xi hX - h\nabla_\xi X = \phi R(\xi, X)\, \xi + \phi X - h^2 \phi X + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\, \xi + hX), \tag{5.2.9}$$

$$R(\xi, X)\, \xi - \phi R^*(\xi, \phi X)\, \xi = 2\phi^2 X + 2h^2 X + 2\eta\left(\nabla_\xi \xi\right) \phi hX + g(R(\xi, X)\, \xi, \xi)\, \xi \tag{5.2.10}$$

dir [23].

İspat: Öncelikle (5.2.2) eşitliğinde (3.6.9) ifadesi yerine yazılırsa

$$\nabla_X \xi = -\phi X - \phi hX + g(\nabla_X \xi, \xi)\, \xi$$

olur. Bu ifade Riemann eğrilik tensöründe yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi,X)\xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi \\ &= \nabla_\xi \left(-\phi X - \phi hX + g(\nabla_X \xi,\xi)\xi\right) \\ &- \nabla_X \left(-\phi \xi - \phi h\xi + g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi\right) \\ &- \left(-\phi[\xi,X] - \phi h[\xi,X] + g\left(\nabla_{[\xi,X]}\xi,\xi\right)\xi\right) \end{aligned}$$

olup, $\phi\xi = 0$ ve $h\xi = 0$ dan

$$\begin{aligned} R(\xi,X)\xi = &-\nabla_\xi \phi X - \nabla_\xi \phi hX + \nabla_\xi g(\nabla_X \xi,\xi)\xi - \nabla_X g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi \\ &+ \phi[\xi,X] + \phi h[\xi,X] - g\left(\nabla_{[\xi,X]}\xi,\xi\right)\xi \end{aligned}$$

olur. Burada ifadenin her iki tarafına ϕ uygularsak

$$\begin{aligned} \phi R(\xi,X)\xi = &-\phi\nabla_\xi \phi X - \phi\nabla_\xi \phi hX + \phi\nabla_\xi g(\nabla_X \xi,\xi)\xi \\ &- \phi\nabla_X g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi + \phi^2[\xi,X] + \phi^2 h[\xi,X] - g\left(\nabla_{[\xi,X]}\xi,\xi\right)\phi\xi \end{aligned}$$

$(2.0.1)$, $(3.2.2)$ ve $(5.2.2)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &= \phi\{g(\nabla_X \xi,\xi)(\widehat{\nabla}_\xi \xi + g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi) + (\xi g(\nabla_X \xi,\xi)\xi)\} \\ &- \phi\nabla_\xi \phi X - \phi\nabla_\xi \phi hX - \phi\nabla_X g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi - [\xi,X] \\ &+ \eta([\xi,X])\xi - h[\xi,X] + \eta(h[\xi,X])\xi \end{aligned}$$

$\widehat{\nabla}_\xi \xi = 0$, $\phi\xi = 0$ ve $h\xi = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \phi R(\xi,X)\xi = &-\phi\nabla_\xi \phi X - \phi\nabla_\xi \phi hX - \phi\nabla_X g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right)\xi - [\xi,X] \\ &+ g([\xi,X],\xi)\xi - h[\xi,X] \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

olarak bulunur. Şimdi de elde ettiğimiz $(5.2.11)$ in ilk üç terimini hesaplayalım.

$(5.1.2)$ eşitliğinin duali alınarak, X yerine ξ ve Y yerine ϕX yazılırsa

$$\nabla^*_\xi \phi^2 X - \phi\nabla_\xi \phi X = (\widehat{\nabla}_\xi \phi)\phi X$$

olur. Burada $\widehat{\nabla}_\xi \phi = 0$ olduğundan $(2.0.1)$ ve $(3.2.2)$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla^*_\xi \phi^2 X - \phi\nabla_\xi \phi X &= 0 \\ -\nabla^*_\xi X + \xi(\eta(X))\xi + \eta(X)\nabla^*_\xi \xi - \phi\nabla_\xi \phi X &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi \nabla_{\xi} \phi X = -\nabla^{*}_{\xi} X + \xi \left(\eta \left(X\right)\right) \xi + \eta \left(X\right) \nabla^{*}_{\xi} \xi \tag{5.2.12}$$

dir. $(5.2.12)$ de X yerine hX yazılırsa

$$\phi \nabla_{\xi} \phi hX = -\nabla^{*}_{\xi} hX + \xi \left(\eta \left(hX\right)\right) \xi + \eta \left(hX\right) \nabla^{*}_{\xi} \xi$$

olur. h simetrik olduğundan

$$\phi \nabla_{\xi} \phi hX = -\nabla^{*}_{\xi} hX + \xi \left(g \left(X, h\xi\right)\right) \xi + g \left(X, h\xi\right) \nabla^{*}_{\xi} \xi$$

$$\Rightarrow \phi \nabla_{\xi} \phi hX = -\nabla^{*}_{\xi} hX \tag{5.2.13}$$

dir. $(2.0.1)$, (3.6.9) ve (5.2.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\phi \nabla_{X} g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \xi &= \phi \left[g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \nabla_{X}\xi + Xg\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right)\xi\right] \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \phi \nabla_{X}\xi + Xg\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \phi\xi \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \phi (\widehat{\nabla}_{X}\xi + g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right)\xi) \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \phi \widehat{\nabla}_{X}\xi + g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right) \phi\xi \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \phi \left(-\phi X - \phi hX\right) \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \left(-\phi^{2} X - \phi^{2} hX\right) \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right) \left(X - \eta\left(X\right)\xi + hX\right) \qquad (5.2.14)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $(5.2.12)$, $(5.2.13)$ ve $(5.2.14)$ eşitlikleri $(5.2.11)$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\phi R\left(\xi, X\right)\xi = \; & \nabla^{*}_{\xi} X - \xi\left(\eta\left(X\right)\right)\xi - \eta\left(X\right)\nabla^{*}_{\xi}\xi + \nabla^{*}_{\xi} hX \\
& - g\left(\nabla_{\xi}\xi, \xi\right)\left(X - \eta\left(X\right)\xi + hX\right) - \nabla_{\xi}X + \nabla_{X}\xi \\
& + g\left(\nabla_{\xi}X, \xi\right)\xi - g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right)\xi - h\nabla_{\xi}X + h\nabla_{X}\xi \\
= & -\left(\nabla_{\xi}X - \nabla^{*}_{\xi}X\right) - \left(\xi g\left(X, \xi\right)\right)\xi - \eta\left(X\right)\nabla^{*}_{\xi}\xi + \nabla^{*}_{\xi} hX \\
& - \eta\left(\nabla_{\xi}\xi\right)\left(X - \eta\left(X\right)\xi + hX\right) - \phi X - \phi hX \\
& + g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right)\xi + g\left(\nabla_{\xi}X, \xi\right)\xi - g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right)\xi \\
& - h\nabla_{\xi}X + h\left(-\phi X - \phi hX + g\left(\nabla_{X}\xi, \xi\right)\xi\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2K(\xi,X) - g(\nabla_\xi X,\xi)\,\xi - g\left(X,\nabla^*_\xi \xi\right)\xi - \eta(X)\,\nabla^*_\xi \xi \\
&+ \nabla^*_\xi hX - \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX) - \phi X - \phi hX \\
&+ g(\nabla_X \xi,\xi)\,\xi + g\left(\nabla_\xi X,\xi\right)\xi - g(\nabla_X \xi,\xi)\,\xi - h\nabla_\xi X \\
&- h\phi X - h\phi hX + g(\nabla_X \xi,\xi)\,h\xi \\
&= -2K(\xi,X) - g\left(X,\nabla^*_\xi \xi\right) - \eta(X)\,\nabla^*_\xi \xi + \nabla^*_\xi hX \\
&- \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX) - \phi X - \phi hX \\
&- h\nabla_\xi X - h\phi X - h\phi hX
\end{aligned}
$$

olur. (5.2.1) eşitliğinden

$$
\nabla^*_\xi \xi = \eta\left(\nabla^*_\xi \xi\right)\xi
$$

denklemi ve (3.6.10) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla^*_\xi hX - h\nabla_\xi X = {} & \phi R(\xi,X)\,\xi + \phi X - h^2\phi X + 2K(\xi,X) + 2\eta\left(\nabla^*_\xi \xi\right)\eta(X)\,\xi \\
& + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX)
\end{aligned}
$$

olur. $(4.1.6), (5.2.3)$ ve (5.2.7) eşitliğinin dualinden

$$
\begin{aligned}
\nabla^*_\xi hX - h\nabla_\xi X &= \phi R(\xi,X)\,\xi + \phi X - h^2\phi X - 2g(\nabla^*_X \xi,\xi)\,\xi + 2g(\nabla^*_X \xi,\xi)\,\xi \\
&\quad + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX) \\
&= \phi R(\xi,X)\,\xi + \phi X - h^2\phi X + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX)
\end{aligned}
$$

(5.2.9) elde edilir.

(5.2.9) eşitliğinin her iki yanına ϕ uygularsak

$$
\phi\nabla^*_\xi hX - \phi h\nabla_\xi X = \phi^2 R(\xi,X)\,\xi + \phi^2 X - \phi h^2\phi X + \phi\eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(X - \eta(X)\,\xi + hX)
$$

olur. $(3.2.2)$, (3.6.10) ve ϕ nin lineerliğinden

$$
\begin{aligned}
\phi\nabla^*_\xi hX - \phi h\nabla_\xi X = {} & -R(\xi,X)\,\xi + \eta\left(R(\xi,X)\,\xi\right)\xi + \phi^2 X - h^2\phi^2 X \\
& + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(\phi X - \eta(X)\,\phi\xi + \phi hX)
\end{aligned}
$$

olup, buradan (3.2.2) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\phi\nabla^*_\xi hX - \phi h\nabla_\xi X \\
&\quad = -R(\xi,X)\,\xi + g\left(R(\xi,X)\,\xi,\xi\right)\xi + \phi^2 X + h^2 X \\
&\qquad + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)(\phi X + \phi hX)
\end{aligned}
\tag{5.2.15}
$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (5.2.9) eşitliğinin duali

$$\nabla_{\xi} hX - h\nabla^{*}_{\xi} X = \phi R^{*}(\xi, X)\xi + \phi X - h^{2}\phi X + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(X - \eta(X)\xi + hX) \tag{5.2.16}$$

dir. (5.2.16) eşitliğinde $X = \phi X$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\xi} h\phi X - h\nabla^{*}_{\xi}\phi X \\
&\quad = \phi R^{*}(\xi, \phi X)\xi + \phi^{2}X - h^{2}\phi^{2}X + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(\phi X - \eta(\phi X)\xi + h\phi X) \\
&\quad = \phi R^{*}(\xi, \phi X)\xi + \phi^{2}X - h^{2}(-X + \eta(X)\xi) + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(\phi X + h\phi X) \\
&\quad = \phi R^{*}(\xi, \phi X)\xi + \phi^{2}X + h^{2}X + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(\phi X + h\phi X)
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\widehat{\nabla}_{\xi}\phi = 0$ olduğundan

$$\nabla_{\xi}\phi hX - \phi\nabla^{*}_{\xi} hX = (\widehat{\nabla}_{\xi}\phi)hX = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{\xi}\phi hX = \phi\nabla^{*}_{\xi} hX \tag{5.2.18}$$

ve

$$h\left(\nabla^{*}_{\xi}\phi X - \phi\nabla_{\xi} X\right) = h(\widehat{\nabla}_{\xi}\phi)X = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^{*}_{\xi}\phi X = \phi\nabla_{\xi} X \tag{5.2.19}$$

dir. (5.2.18) ve (5.2.19) eşitlikleri (5.2.17) denkleminde yerlerine yazılıp, (3.6.10) göz önüne alınırsa

$$-\phi\nabla^{*}_{\xi} hX + \phi h\nabla_{\xi} X = \phi R^{*}(\xi, \phi X)\xi + \phi^{2}X + h^{2}X + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(\phi X + h\phi X)$$

elde edilir. Bu durumda elde ettiğimiz bu denklem ile (5.2.15) eşitliği taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\phi\nabla^{*}_{\xi} hX - \phi h\nabla_{\xi} X - \phi\nabla^{*}_{\xi} hX + \phi h\nabla_{\xi} X \\
&\quad = -R(\xi, X)\xi + g(R(\xi, X)\xi, \xi)\xi + \phi^{2}X + h^{2}X \\
&\qquad + \eta(\nabla_{\xi}\xi)(\phi X + \phi hX) + \phi R^{*}(\xi, \phi X)\xi \\
&\qquad + \phi^{2}X + h^{2}X + \eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)(\phi X + h\phi X)
\end{aligned}$$

olur. (4.1.1) eşitliğine göre

$$\xi g(\xi, \xi) = 0$$

$$g(\nabla_{\xi}\xi, \xi) + g\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi, \xi\right) = 0$$

olup, burada $(3.3.1)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} g\left(\nabla^*_\xi \xi, \xi\right) &= -g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) \\ \eta\left(\nabla^*_\xi \xi\right) &= -\eta\left(\nabla_\xi \xi\right) \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

dir. O halde $(3.6.10)$ ve $(5.2.20)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & R(\xi, X)\xi - \phi R^*(\xi, \phi X)\xi \\ &= 2\phi^2 X + 2h^2 X + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)\phi X + \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)\phi h X \\ &\quad - \eta\left(\nabla_\xi \xi\right)\phi X - \eta\left(\nabla_\xi \xi\right) h\phi X + g\left(R(\xi, X)\xi, \xi\right)\xi \\ &= 2\phi^2 X + 2h^2 X + 2\eta\left(\nabla_\xi \xi\right)\phi h X + g\left(R(\xi, X)\xi, \xi\right)\xi \end{aligned}$$

$(5.2.10)$ elde edilir.

Uyarı 5.2.1. $(5.2.10)$ *eşitliğinin duali*

$$R^*(\xi, X)\xi - \phi R(\xi, \phi X)\xi = 2\phi^2 X + 2h^2 X + 2\eta\left(\nabla^*_\xi \xi\right)\phi h X + g\left(R^*(\xi, X)\xi, \xi\right)\xi \tag{5.2.21}$$

dir [23].

Önerme 5.2.2. *Bir kontakt metrik istatistiksel manifold üzerinde $X \perp \xi$ için $K(X, \xi) = 0$ dır. Buna denk olarak $X \perp \xi$ için*

$$\nabla_X \xi = \nabla^*_X \xi = \widehat{\nabla}_X \xi$$

dir [23].

İspat: $\{e_1, ..., e_n, \phi e_1, ..., \phi e_n, \xi\}$ bir $\phi-$bazı olsun. Buna göre

$$Ric(\xi) + Ric^*(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} g\left(R(e_i, \xi)\xi, e_i\right) + g\left(R(\phi e_i, \xi)\xi, \phi e_i\right) \\ + g\left(R^*(e_i, \xi)\xi, e_i\right) + g\left(R^*(\phi e_i, \xi)\xi, \phi e_i\right) \end{array} \right\}$$

dir. ϕ nin anti-simetrikliği ve $(4.1.7)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} -g\left(R(\xi, e_i)\xi, e_i\right) + g\left(\phi R(\xi, \phi e_i)\xi, e_i\right) \\ -g\left(R^*(\xi, e_i)\xi, e_i\right) + g\left(\phi R^*(\xi, \phi e_i)\xi, e_i\right) \end{array} \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} g\left(R^*(\xi, e_i)\xi - \phi R(\xi, \phi e_i)\xi, e_i\right) \\ + g\left(R(\xi, e_i)\xi - \phi R^*(\xi, \phi e_i)\xi, e_i\right) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $(4.1.9)$, $(5.2.10)$ ve $(5.2.21)$ eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&Ric(\xi)+Ric^{*}(\xi)\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} g\left(2\phi^{2}e_i+2h^{2}e_i+2\eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)\phi he_i+g\left(R^{*}(\xi,e_i)\xi,\xi\right)\xi,e_i\right)\\ +g\left(2\phi^{2}e_i+2h^{2}e_i+2\eta\left(\nabla_{\xi}\xi\right)\phi he_i+g\left(R(\xi,e_i)\xi,\xi\right)\xi,e_i\right)\end{array}\right\}\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} 2g\left(\phi^{2}e_i,e_i\right)+2g\left(h^{2}e_i,e_i\right)+2g\left(\eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)\phi he_i,e_i\right)\\ +g\left(g\left(R^{*}(\xi,e_i)\xi,\xi\right)\xi,e_i\right)+2g\left(\phi^{2}e_i,e_i\right)+2g\left(h^{2}e_i,e_i\right)\\ -2g\left(\eta\left(\nabla^{*}_{\xi}\xi\right)\phi he_i,e_i\right)-g\left(g\left(R^{*}(\xi,e_i)\xi,\xi\right)\xi,e_i\right)\end{array}\right\}\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\left\{4g\left(\phi^{2}e_i,e_i\right)+4g\left(h^{2}e_i,e_i\right)\right\}\\
&=4n-2trh^{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde (3.6.19) dan

$$
Ric(\xi)+Ric^{*}(\xi)=2\widehat{Ric}(\xi)
$$

olur. Buna göre (4.1.10) ve (4.1.11) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&Ric(\xi)+Ric^{*}(\xi)=2\widehat{Ric}(\xi)\\
&\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} g\left(R(e_i,\xi)\xi,e_i\right)+g\left(R^{*}(e_i,\xi)\xi,e_i\right)\\ +g\left(R(\phi e_i,\xi)\xi,\phi e_i\right)+g\left(R^{*}(\phi e_i,\xi)\xi,\phi e_i\right)\end{array}\right\}\\
&=2\sum_{i=1}^{n}\{g(\widehat{R}(e_i,\xi)\xi,e_i)+g(\widehat{R}(\phi e_i,\xi)\xi,\phi e_i)\}\\
&\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} g\left(R(\xi,e_i)e_i,\xi\right)+g\left(R^{*}(\xi,e_i)e_i,\xi\right)\\ +g\left(R(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi\right)+g\left(R^{*}(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi\right)\end{array}\right\}\\
&=2\sum_{i=1}^{n}\{g(\widehat{R}(\xi,e_i)e_i,\xi)+g(\widehat{R}(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi)\}\\
&\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\{2g\left(S(\xi,e_i)e_i,\xi\right)+2g\left(S(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi\right)\}\\
&=2\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} g\left(S(\xi,e_i)e_i-\left[K_{\xi},K_{e_i}\right]e_i,\xi\right)\\ +g\left(S(\xi,\phi e_i)\phi e_i-\left[K_{\xi},K_{\phi e_i}\right]\phi e_i,\xi\right)\end{array}\right\}\\
&\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}g\left(S(\xi,e_i)e_i,\xi\right)+2\sum_{i=1}^{n}g\left(S(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi\right)\\
&=2\sum_{i=1}^{n}g\left(S(\xi,e_i)e_i,\xi\right)-2\sum_{i=1}^{n}g\left(\left[K_{\xi},K_{e_i}\right]e_i,\xi\right)\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n}g\left(S(\xi,\phi e_i)\phi e_i,\xi\right)+2\sum_{i=1}^{n}g\left(\left[K_{\xi},K_{\phi e_i}\right]e_i,\phi\xi\right)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
\sum_{i=1}^{n}g\left(\left[K_{\xi},K_{e_i}\right]e_i,\xi\right)=0
$$

dır. Burada

$$
\left[K_{\xi},K_{e_i}\right]e_i=K\left(\xi,K(e_i,e_i)\right)-K\left(e_i,K(\xi,e_i)\right)
$$

olduğundan, (4.1.6) ve (5.2.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \{g(K(\xi, K(e_i, e_i)) - K(e_i, K(\xi, e_i)), \xi)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{g(K(\xi, K(e_i, e_i)), \xi) - g(K(e_i, K(\xi, e_i)), \xi)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{g(K(e_i, e_i), K(\xi, \xi)) - g(K(\xi, e_i), K(e_i, \xi))\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{g(K(e_i, e_i), K(\xi, \xi)) - g(K(e_i, \xi), K(e_i, \xi))\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{g(e_i, K(e_i, K(\xi, \xi))) - g(\xi, K(e_i, K(e_i, \xi)))\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{g\left(e_i, K\left(e_i, g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) \xi\right)\right) - g(\xi, K(e_i, g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) \xi))\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) g(e_i, K(e_i, \xi)) - g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) g(\xi, K(e_i, \xi))\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) g(e_i, g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) \xi) - g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) g(\xi, g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) \xi)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) \eta(e_i) - g(\nabla_{e_i} \xi, \xi)^2\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \xi, \xi)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Herhangi bir $e_i \perp \xi$ için

$$g(\nabla_{e_i} \xi, \xi) = 0$$

olur. O halde (5.2.3) e göre $X \perp \xi$ için

$$K(X, \xi) = 0$$

dır.

Sasakian manifoldlar kontakt metrik manifoldların özel durumları olduğundan herhangi bir Sasakian istatistiksel manifold için (5.2.2) eşitliğinde (3.6.2) yerine yazılırsa

$$\nabla_X \xi = -\phi X + g(\nabla_X \xi, \xi) \xi \tag{5.2.22}$$

elde edilir. Buna göre $X \perp \xi$ için

$$\nabla_X \xi = \nabla_X^* \xi = \widehat{\nabla}_X \xi = -\phi X \tag{5.2.23}$$

dir.

Sonuç 5.2.1. $(2n+1)-$*boyutlu bir M kontakt metrik istatistiksel manifoldda,* ξ *doğrultusundaki Ricci eğriliği ve onun duali için*

$$Ric(\xi) = Ric^*(\xi) = 2n - trh^2$$

dir [23].

İspat: Lemma (4.0.1) de X yerine ξ, Y yerine de X yazılıp, (4.1.6) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_\xi hX - h\nabla^*_\xi X = (\widehat{\nabla}_\xi h)X + K(hX,\xi) + hK(X,\xi)$$

bulunur. Burada (3.6.13), (5.2.4) ve Önerme (5.2.2) kullanılırsa

$$\nabla_\xi hX - h\nabla^*_\xi X = \phi X - h^2\phi X - \phi\widehat{R}(X,\xi)\xi$$

elde edilir. O halde bu eşitlik ile (5.2.16) karşılaştırılırsa

$$\phi R^*(\xi,X)\xi + \eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)(X - \eta(X)\xi + hX) = \phi\widehat{R}(\xi,X)\xi \tag{5.2.24}$$

olur. (4.1.10) ve (5.2.8) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} S(\xi,X)\xi &= \frac{1}{2}\{R(\xi,X)\xi + R^*(\xi,X)\xi\} \\ \widehat{R}(\xi,X)\xi &= \frac{1}{2}\{R(\xi,X)\xi + R^*(\xi,X)\xi\} \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

olup, buradaki (5.2.25) eşitliği (5.2.24) de yerine yazılırsa

$$2\eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)(X - \eta(X)\xi + hX) = \phi R(\xi,X)\xi - \phi R^*(\xi,X)\xi$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafına ϕ uygulanırsa

$$2\eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)(\phi X - \eta(X)\phi\xi + \phi hX) = \phi^2 R(\xi,X)\xi - \phi^2 R^*(\xi,X)\xi$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, (3.2.2) ve (3.3.1) eşitliklerinden $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2\eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)g(\phi X,X) + 2\eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)g(\phi hX,X) \\ = -g(R(\xi,X)\xi,X) + g(R(\xi,X)\xi,\xi)g(\xi,X) \\ + g(R^*(\xi,X)\xi,X) - g(R^*(\xi,X)\xi,\xi)g(\xi,X) \end{aligned}$$

olup, burada $X \perp \xi$ olduğundan

$$2\eta\left(\nabla^*_\xi\xi\right)g(\phi hX,X) = -g(R(\xi,X)\xi,X) + g(R^*(\xi,X)\xi,X)$$

olarak bulunur. Böylece $\{e_1,...,e_n,e_{n+1}=\phi e_1,...,e_{2n}=\phi e_n,\xi\}$ şeklinde tanımlı $\phi-$bazı için (4.1.7) ve (4.1.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$2g\left(\nabla^*_\xi \xi,\xi\right)\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(\phi he_i,e_i\right)=\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(R\left(e_i,\xi\right)\xi,e_i\right)-\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(R^*\left(e_i,\xi\right)\xi,e_i\right)$$

bulunur. O halde

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(\phi he_i,e_i\right)=0$$

olduğundan, buradan

$$0=Ric\left(\xi\right)-Ric^*\left(\xi\right)$$

olur. Ayrıca Önerme (5.2.2) nin ispatına göre

$$Ric\left(\xi\right)+Ric^*\left(\xi\right)=4n-2trh^2$$

olduğundan, böylece

$$Ric\left(\xi\right)=Ric^*\left(\xi\right)=2n-trh^2$$

elde edilir.

Uyarı 5.2.2. *Belirtelim ki yukarıdaki sonuç ve* (3.6.19) *eşitliğinden, herhangi bir kontakt metrik istatistiksel manifoldu için*

$$Ric\left(\xi\right)=Ric^*\left(\xi\right)=\widehat{Ric}\left(\xi\right)$$

dir [23].

Şimdi kontakt metrik istatistiksel manifoldlar üzerinde $K-$kontakt istatistiksel olmanın gerek ve yeter şartlarını verelim.

Teorem 5.2.1. *Bir M kontakt metrik istatistiksel* $(2n+1)$ *−boyutlu manifoldda*

$$g\left(\nabla_X\xi,Y\right)+g\left(\nabla_Y\xi,X\right)=0\quad ;\ X,\ Y\ \perp\ \xi$$

ise o zaman M bir $K-$kontakt istatistiksel manifold olur [23].

İspat: Eğer M bir $K-$kontakt istatistiksel manifold ise (4.1.16) ve Önerme (5.2.2) den sonucu elde edebiliriz. Tersine $X\perp\xi$ için $K\left(X,\xi\right)=0$ olduğundan (4.1.15) den $\forall\, X,Y\perp\xi$ için

$$\left(L_\xi g\right)\left(X,Y\right)=0$$

dır. Gerçekten (4.1.15) eşitliğinde X ve Y yerine ξ yazılıp, (4.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(L_\xi g\right)(\xi,\xi) &= g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) - g\left(K(\xi,\xi),Y\right) + g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) - g\left(K(\xi,\xi),\xi\right)\\ &= 2g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) - 2g\left(K(\xi,\xi),\xi\right)\\ &= 2g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) - 2g(\nabla_\xi \xi - \widehat{\nabla}_\xi \xi,\xi)\\ &= 2g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) - 2g\left(\nabla_\xi \xi,\xi\right) + 2g(\widehat{\nabla}_\xi \xi,\xi)\end{aligned}$$

olur. Burada $\widehat{\nabla}_\xi \xi = 0$ olduğundan

$$\left(L_\xi g\right)(\xi,\xi) = 0$$

olduğu görülür. Diğer taraftan benzer şekilde (4.1.15) eşitliğinde X veya Y yerine ξ yazılıp, (4.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(L_\xi g\right)(\xi,Y) = g\left(\nabla_\xi \xi,Y\right) - g(\nabla_\xi \xi - \widehat{\nabla}_\xi \xi,Y) + g\left(\nabla_Y \xi,\xi\right)\\ - g(\nabla_Y \xi - \widehat{\nabla}_Y \xi,\xi)\end{aligned}$$

olur. (5.2.23) eşitliğinden

$$\left(L_\xi g\right)(\xi,Y) = g(\widehat{\nabla}_\xi \xi,Y) - g(\phi Y,\xi)$$

bulunur. Burada $\widehat{\nabla}_\xi \xi = 0$ ve ϕ anti-simetrik olduğundan

$$\left(L_\xi g\right)(\xi,Y) = 0$$

olur ve böylece her iki durumdan dolayı

$$\left(L_\xi g\right)(X,Y) = 0$$

elde edilir.

Şimdi tek boyutlu bir istatistiksel manifold üzerinde elde edeceğimiz bir $K-$kontakt istatistiksel yapısını aşağıdaki önerme ile inceleyelim. Burada Riemann manifoldlarından yararlanıp, üzerinde bir $K-$kontakt istatistiksel yapının nasıl oluşacağını görelim.

Önerme 5.2.3. *M, $(2n+1)-$boyutlu ve $X \perp \xi$ için $\widehat{R}(X,\xi)\xi = X$ ifadesini sağlayan, ξ yi Killing vektör alanı kabul etmiş bir Riemann manifoldu olsun. O zaman M manifoldu üzerinde bir $K-$kontakt yapı vardır [19].*

İlk olarak bir istatistiksel manifold için ξ bir Killing vektör alanı ve S de bir istatistiksel eğrilik tensör alanı olmak üzere, $S(X,Y)\xi$ yi hesaplayalım.

R ve R^* Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere, (4.1.10) eşitliğinden biliyoruz ki

$$2g(S(X,Y)\xi,Z) = g\left(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{\nabla^*_X Y}\xi + \nabla_{\nabla^*_Y X}\xi, Z\right)$$
$$+ g\left(\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_Y\nabla^*_X\xi - \nabla^*_{\nabla_X Y}\xi + \nabla^*_{\nabla_Y X}\xi, Z\right)$$

dir. Burada (4.1.1), (4.1.16) ve (4.1.17) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
&2g(S(X,Y)\xi,Z)\\
&= Xg(\nabla_Y\xi,Z) - g(\nabla_Y\xi,\nabla^*_X Z) - Yg(\nabla_X\xi,Z)g\\
&\quad + g(\nabla_X\xi,\nabla^*_Y Z) + g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_X Y) - 2g(K(Z,\xi),\nabla^*_X Y)\\
&\quad - g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_Y X) + 2g(K(Z,\xi),\nabla^*_Y X) + Xg(\nabla^*_Y\xi,Z)\\
&\quad - g(\nabla^*_Y\xi,\nabla_X Z) - Yg(\nabla^*_X\xi,Z) + g(\nabla^*_X\xi,\nabla_Y Z)\\
&\quad + g(\nabla^*_Z\xi,\nabla_X Y) + 2g(K(Z,\xi),\nabla_X Y) - g(\nabla^*_Z\xi,\nabla_Y X)\\
&\quad - 2g(K(Z,\xi),\nabla_Y X)\\
&= -Xg(\nabla_Z\xi,Y) + 2Xg(K(Z,\xi),Y) + g\left(\nabla_{\nabla^*_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad - 2g(K(Y,\xi),\nabla^*_X Z) + Yg(\nabla_Z\xi,X) - 2Yg(K(Z,\xi),X)\\
&\quad - g\left(\nabla_{\nabla^*_Y Z}\xi,X\right) + 2g(K(X,\xi),\nabla^*_Y Z) + g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_X Y)\\
&\quad - 2g(K(Z,\xi),\nabla^*_X Y) - g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_Y X) + 2g(K(Z,\xi),\nabla^*_Y X)\\
&\quad - Xg(\nabla^*_Z\xi,Y) - 2Xg(K(Z,\xi),Y) + g\left(\nabla^*_{\nabla_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad + 2g(K(Y,\xi),\nabla_X Z) + Yg(\nabla^*_Z\xi,X) + 2Yg(K(Z,\xi),X)\\
&\quad - g\left(\nabla^*_{\nabla_Y Z}\xi,X\right) - 2g(K(X,\xi),\nabla_Y Z) + g(\nabla^*_Z\xi,\nabla_X Y)\\
&\quad + 2g(K(Z,\xi),\nabla_X Y) - g(\nabla^*_Z\xi,\nabla_Y X) - 2g(K(Z,\xi),\nabla_Y X)
\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılıp, (4.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&2g(S(X,Y)\xi,Z)\\
&= -g(\nabla_X\nabla_Z\xi,Y) - g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_X Y) + g\left(\nabla_{\nabla^*_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad - 2g(K(Y,\xi),\nabla^*_X Z) + g(\nabla_Y\nabla_Z\xi,X) + g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_Y X)\\
&\quad - g\left(\nabla_{\nabla^*_Y Z}\xi,X\right) + 2g(K(X,\xi),\nabla^*_Y Z) + g(\nabla_Z\xi,\nabla^*_X Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2g\left(K\left(Z,\xi\right),\nabla^*_X Y\right)-g\left(\nabla_Z\xi,\nabla^*_Y X\right)+2g\left(K\left(Z,\xi\right),\nabla^*_Y X\right)\\
&-g\left(\nabla^*_X\nabla^*_Z\xi,Y\right)-g\left(\nabla^*_Z\xi,\nabla_X Y\right)+g\left(\nabla^*_{\nabla_X Z}\xi,Y\right)\\
&+2g\left(K\left(Y,\xi\right),\nabla_X Z\right)+g\left(\nabla^*_Y\nabla^*_Z\xi,X\right)+g\left(\nabla^*_Z\xi,\nabla_Y X\right)\\
&-g\left(\nabla^*_{\nabla_Y Z}\xi,X\right)-2g\left(K\left(X,\xi\right),\nabla_Y Z\right)+g\left(\nabla^*_Z\xi,\nabla_X Y\right)\\
&+2g\left(K\left(Z,\xi\right),\nabla_X Y\right)-g\left(\nabla^*_Z\xi,\nabla_Y X\right)-2g\left(K\left(Z,\xi\right),\nabla_Y X\right)
\end{aligned}
$$

(4.1.5) ve (4.1.6) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&=-g\left(\nabla_X\nabla_Z\xi,Y\right)+g\left(\nabla_{\nabla^*_X Z}\xi,Y\right)+g\left(\nabla_Y\nabla_Z\xi,X\right)\\
&\quad-g\left(\nabla_{\nabla^*_Y Z}\xi,X\right)-g\left(\nabla^*_X\nabla^*_Z\xi,Y\right)+g\left(\nabla^*_{\nabla_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad+g\left(\nabla^*_Y\nabla^*_Z\xi,X\right)-g\left(\nabla^*_{\nabla_Y Z}\xi,X\right)+4g\left(K\left(Y,\xi\right),K\left(X,Z\right)\right)\\
&\quad-4g\left(K\left(X,\xi\right),K\left(Y,Z\right)\right)-4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(Y,X\right)\right)\\
&\quad+4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right)\\
&=-g\left(\nabla_X\nabla_Z\xi,Y\right)+g\left(\nabla_{\nabla^*_X Z}\xi,Y\right)+g\left(\nabla_Y\nabla_Z\xi,X\right)\\
&\quad-g\left(\nabla_{\nabla^*_Y Z}\xi,X\right)-g\left(\nabla^*_X\nabla^*_Z\xi,Y\right)+g\left(\nabla^*_{\nabla_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad+g\left(\nabla^*_Y\nabla^*_Z\xi,X\right)-g\left(\nabla^*_{\nabla_Y Z}\xi,X\right)+4g\left(Z,K\left(X,K\left(Y,\xi\right)\right)\right)\\
&\quad-4g\left(Z,K\left(Y,K\left(X,\xi\right)\right)\right)-4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right)\\
&\quad+4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right)
\end{aligned}
$$

olup, buradan

$$
\begin{aligned}
2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,Z\right)&=g\left(-\nabla_X\nabla_Z\xi+\nabla_{\nabla^*_X Z}\xi-\nabla^*_X\nabla^*_Z\xi+\nabla^*_{\nabla_X Z}\xi,Y\right)\\
&\quad+g\left(\nabla_Y\nabla_Z\xi-\nabla_{\nabla^*_Y Z}\xi+\nabla^*_Y\nabla^*_Z\xi-\nabla^*_{\nabla_Y Z}\xi,X\right)\\
&\quad+4g\left(\left[K_X,K_Y\right]\xi,Z\right) \qquad (5.2.26)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer yandan (5.2.26) eşitliğinde Z yerine X yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,X\right)\\
&=-g\left(\nabla_X\nabla_X\xi,Y\right)+g\left(\nabla_{\nabla^*_X X}\xi,Y\right)-g\left(\nabla^*_X\nabla^*_X\xi,Y\right)\\
&\quad+g\left(\nabla^*_{\nabla_X X}\xi,Y\right)+g\left(\nabla_Y\nabla_X\xi,X\right)-g\left(\nabla_{\nabla^*_Y X}\xi,X\right)\\
&\quad+g\left(\nabla^*_Y\nabla^*_X\xi,X\right)-g\left(\nabla^*_{\nabla_Y X}\xi,X\right)+4g\left(K\left(X,K\left(Y,\xi\right)\right),X\right)\\
&\quad-4g\left(K\left(Y,K\left(X,\xi\right)\right),X\right)
\end{aligned}
$$

olur. $(4.1.1)$, $(4.1.5)$, $(4.1.16)$ ve $(4.1.17)$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&2g(S(X,Y)\xi,X) \\
&\quad = -Xg(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_X\xi,\nabla^*_XY)-g(\nabla^*_Y\xi,\nabla^*_XX) \\
&\qquad -Xg(\nabla^*_X\xi,Y)+g(\nabla^*_X\xi,\nabla_XY)-g(\nabla_Y\xi,\nabla_XX) \\
&\qquad +Yg(\nabla_X\xi,X)-g(\nabla_X\xi,\nabla^*_YX)+g(\nabla^*_X\xi,\nabla^*_YX) \\
&\qquad +Yg(\nabla^*_X\xi,X)-g(\nabla^*_X\xi,\nabla_YX)+g(\nabla_X\xi,\nabla_YX) \\
&\qquad +g(\nabla_X\nabla_Y\xi,X)-g(\nabla^*_X\nabla_Y\xi,X)-g(\nabla_X\nabla^*_Y\xi,X) \\
&\qquad +g(\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi,X)-g(\nabla_Y\nabla_X\xi,X)+g(\nabla^*_Y\nabla_X\xi,X) \\
&\qquad +g(\nabla_Y\nabla^*_X\xi,X)-g(\nabla^*_Y\nabla^*_X\xi,X)
\end{aligned}$$

$(4.1.1)$, $(4.1.5)$, $(4.1.6)$, $(4.1.16)$ ve $(4.1.17)$ eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
&2g(S(X,Y)\xi,X) \\
&\quad = -Xg(\nabla_X\xi,Y)+2g(K(X,\xi),\nabla^*_XY)-g\left(\nabla_{\nabla^*_XY}\xi,X\right) \\
&\qquad -g(\nabla^*_Y\xi,\nabla^*_XX)+2Xg(K(X,\xi),Y)+Xg(\nabla^*_Y\xi,X) \\
&\qquad -2g(K(X,\xi),\nabla_XY)-g\left(\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,X\right)-g(\nabla_Y\xi,\nabla_XX) \\
&\qquad +Yg(\nabla_X\xi,X)-g(\nabla_X\xi,\nabla^*_YX)+g(\nabla^*_X\xi,\nabla^*_YX) \\
&\qquad -2Yg(K(X,\xi),X)-Yg(\nabla^*_X\xi,X)-g(\nabla^*_X\xi,\nabla_YX) \\
&\qquad +g(\nabla_X\xi,\nabla_YX)+g(\nabla_X\nabla_Y\xi,X)-Xg(\nabla_Y\xi,X) \\
&\qquad +g(\nabla_Y\xi,\nabla_XX)-Xg(\nabla^*_Y\xi,X)+g(\nabla^*_Y\xi,\nabla^*_XX) \\
&\qquad +g(\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi,X)-Yg(\nabla_X\xi,X)+g(\nabla_X\xi,\nabla^*_YX) \\
&\qquad +Yg(\nabla_X\xi,X)-g(\nabla_X\xi,\nabla_YX)+Yg(\nabla^*_X\xi,X) \\
&\qquad -g(\nabla^*_X\xi,\nabla^*_YX)-Yg(\nabla^*_X\xi,X)+g(\nabla^*_X\xi,\nabla_YX) \\
&\quad = -Xg(\nabla_X\xi,Y)-g\left(\nabla_{\nabla^*_XY}\xi,X\right)+Xg(\nabla_X\xi,Y) \\
&\qquad -Xg(\nabla^*_X\xi,Y)+Xg(\nabla^*_Y\xi,X)-g\left(\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,X\right) \\
&\qquad +Yg(\nabla_X\xi,X)-Yg(\nabla_X\xi,X)+Yg(\nabla^*_X\xi,X) \\
&\qquad -Yg(\nabla^*_X\xi,X)+g(\nabla_X\nabla_Y\xi,X)-Xg(\nabla_Y\xi,X) \\
&\qquad +Xg(\nabla_Y\xi,X)-Xg(\nabla^*_Y\xi,X)+Xg(\nabla^*_X\xi,Y) \\
&\qquad +g(\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi,X)-2g(K(X,\xi),\nabla_XY-\nabla^*_XY)
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,X\right) = g\left(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_X Y}\xi + \nabla^*_X\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_X Y}\xi, X\right)$$
$$-4g\left(K\left(X,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right) \tag{5.2.27}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 5.2.4. *Eğer ξ bir (M,∇,g) istatistiksel manifoldunda Killing vektör alanı ise*

$$S\left(X,\xi\right)Y = \frac{1}{2}\left\{\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_X Y}\xi + \nabla^*_X\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_X Y}\xi\right\}$$
$$-2K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right) \tag{5.2.28}$$

dir [23].

İspat: (5.2.27) denkleminde X vektör alanı yerine $X+Z$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&2g\left(S\left(X+Z,Y\right)\xi,X+Z\right)\\
&\quad = g(\nabla_{X+Z}\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_{X+Z}Y}\xi + \nabla^*_{X+Z}\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_{X+Z}Y}\xi, X+Z)\\
&\quad\quad -4g\left(K\left(X+Z,\xi\right),K\left(X+Z,Y\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
&2g\left(S\left(X+Z,Y\right)\xi,X+Z\right)\\
&\quad = 2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,X\right)+2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,Z\right)\\
&\quad\quad +2g\left(S\left(Z,Y\right)\xi,X\right)+2g\left(S\left(Z,Y\right)\xi,Z\right)\\
&\quad = g(\nabla_{X+Z}\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_{X+Z}Y}\xi + \nabla^*_{X+Z}\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_{X+Z}Y}\xi, X+Z)\\
&\quad\quad -4g\left(K\left(X+Z,\xi\right),K\left(X+Z,Y\right)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,X\right)+2g\left(S\left(Z,Y\right)\xi,Z\right)\\
&\quad = g(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_X Y}\xi + \nabla^*_X\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_X Y}\xi, X)\\
&\quad\quad + g(\nabla_Z\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_Z Y}\xi + \nabla^*_Z\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_Z Y}\xi, Z)\\
&\quad\quad -4g\left(K\left(X,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right)-4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(Z,Y\right)\right)\\
&\quad = g(\nabla_{X+Z}\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla^*_{X+Z}Y}\xi + \nabla^*_{X+Z}\nabla^*_Y\xi - \nabla^*_{\nabla_{X+Z}Y}\xi, X+Z)\\
&\quad\quad -4g\left(K\left(X+Z,\xi\right),K\left(X+Z,Y\right)\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&2g\left(S\left(X,Y\right)\xi,Z\right)+2g\left(S\left(Z,Y\right)\xi,X\right)\\
&\quad=g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_XY}\xi+\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,Z)\\
&\quad\;+g(\nabla_Z\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_ZY}\xi+\nabla^*_Z\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_ZY}\xi,X)\\
&\quad\;-4g\left(K\left(X,\xi\right),K\left(Z,Y\right)\right)-4g\left(K\left(Z,\xi\right),K\left(X,Y\right)\right)
\end{aligned}\tag{5.2.29}$$

dir. (5.2.26) eşitliğinde Y yerine Z ve Z yerine de Y yazılıp, (4.1.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2g\left(S\left(X,Z\right)\xi,Y\right)&=g(\nabla_Z\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_ZY}\xi+\nabla^*_Z\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_ZY}\xi,X)\\
&\quad+g(-\nabla_X\nabla_Y\xi+\nabla_{\nabla^*_XY}\xi-\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi+\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,Z)\\
&\quad+4g\left(K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right)-K\left(Y,K\left(X,\xi\right)\right),Z\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik (5.2.29) da yerine yazılıp, (4.1.6) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&g\left(S\left(X,Y\right)\xi,Z\right)+g\left(S\left(Z,Y\right)\xi,X\right)\\
&\quad=g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_XY}\xi+\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,Z)\\
&\quad\;+g\left(S\left(X,Z\right)\xi,Y\right)-4g\left(K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right),Z\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. I.Bianchi özdeşliğine göre $S(Y,Z)X=-S(X,Y)Z-S(Z,X)Y$ olduğundan, I.Bianchi özdeşliği ve Önerme (4.0.3) den

$$\begin{aligned}
&-g\left(S\left(X,Y\right)Z,\xi\right)+g\left(S\left(Y,Z\right)X,\xi\right)-g\left(S\left(Z,X\right)Y,\xi\right)\\
&\qquad=g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_XY}\xi+\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,Z)\\
&\qquad\;-4g\left(K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right),Z\right)\\
&\Rightarrow 2g\left(S\left(X,\xi\right)Y,Z\right)=g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_XY}\xi+\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_XY}\xi,Z)\\
&\qquad\;-4g\left(K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right),Z\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow S\left(X,\xi\right)Y=\frac{1}{2}\left\{\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla^*_XY}\xi+\nabla^*_X\nabla^*_Y\xi-\nabla^*_{\nabla_XY}\xi\right\}\\
&-2K\left(\xi,K\left(X,Y\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi vereceğimiz Teorem, Önerme (5.2.3) ifadesini genelleştirir. Bilinmelidir ki bir $K-$kontakt manifoldda, $X\perp\xi$ için $\widehat{R}\left(X,\xi\right)\xi=X$ dir. O halde (5.2.8) den $X\perp\xi$ için $S\left(X,\xi\right)\xi=X$ dir.

Teorem 5.2.2. *(M,∇,g) üçlüsü bir istatistiksel manifold ve ξ de birim Killing vektör alanı olsun. Öyle ki $X\perp\xi$ için*

$$S(X,\xi)\,\xi = X$$

ve

$$K(X,\widehat{\nabla}_Y\xi)+\widehat{\nabla}_{K(X,Y)}\xi = 0$$

dır. O halde M manifoldu üzerinde bir $K-$kontakt istatistiksel yapı vardır [23].

İspat: Her $X\in\chi(M)$ için

$$\nabla_X\xi = -\phi X + g(\nabla_X\xi,\xi)\,\xi \tag{5.2.30}$$

ve

$$\nabla^*_X\xi = -\phi X + g(\nabla^*_X\xi,\xi)\,\xi \tag{5.2.31}$$

ifadelerini göz önüne alalım. (5.2.30) ve (5.2.31) taraf tarafa toplanıp, (4.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$2\phi X = -\nabla_X\xi - \nabla^*_X\xi + Xg(\xi,\xi)\,\xi$$

olur. (4.1.2) eşitliğinden

$$2\phi X = -2\widehat{\nabla}_X\xi$$

olarak bulunur. Bu ifadenin her iki tarafına ϕ uygulanıp, eşitliğin sağında (5.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi^2X &= -\phi\,(\nabla^*_X\xi)+g(\nabla^*_X\xi,\xi)\,\phi\xi\\ &= \nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi - g\left(\nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi,\xi\right)\xi\end{aligned}$$

olur. $\forall Y\in\chi(M)$ ve $X\perp\xi$ için (5.2.28) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}g\left(\phi^2X,Y\right) &= g\left(\nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi,Y\right) - g\left(g\left(\nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi,\xi\right)\xi,Y\right)\\ &= -2g\left(S(X,\xi)\,\xi,Y\right)+g\left(\nabla_X\nabla_\xi\xi+\nabla^*_X\nabla^*_\xi\xi,Y\right)-g\left(\nabla^*_{\nabla_X\xi}\xi,Y\right)\\ &\quad -4g\left(K(\xi,K(X,\xi)),Y\right)-g\left(\nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi,\xi\right)\eta(Y)\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

olarak bulunur. Şimdi (5.2.32) eşitliğindeki son dört terimi hesaplayalım.

(4.1.2) eşitliğinden

$$g\left(\nabla_X\nabla_\xi\xi+\nabla^*_X\nabla^*_\xi\xi,Y\right) = g(\nabla_X\nabla_\xi\xi+\nabla^*_X(2\widehat{\nabla}_\xi\xi-\nabla_\xi\xi),Y)$$

olur. $\widehat{\nabla}_\xi\xi=0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı (5.2.1), (5.2.2) ve (5.2.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}&= g(\widehat{\nabla}_X\nabla_\xi\xi+g\left(\nabla_X\nabla_\xi\xi,\nabla_\xi\xi\right)\nabla_\xi\xi-\widehat{\nabla}_X\nabla_\xi\xi-g\left(\nabla^*_X\nabla_\xi\xi,\nabla_\xi\xi\right)\nabla_\xi\xi,Y)\\ &= 2g\left(K\left(X,\nabla_\xi\xi\right),Y\right)\end{aligned}$$

olur. Burada $\nabla_\xi \xi = g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right)\xi$ olduğundan, dolayısı ile

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_X \nabla_\xi \xi + \nabla^*_X \nabla^*_\xi \xi, Y\right) &= 2g\left(K\left(X, g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right)\xi\right), Y\right) \\ &= 2g\left(g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) K\left(X, \xi\right), Y\right) \\ &= 2g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) g\left(g\left(\nabla_X \xi, \xi\right)\xi, Y\right) \\ &= 2g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right) g\left(\nabla_X \xi, \xi\right)\eta\left(Y\right) \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

elde edilir.

(4.1.17) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} -g\left(\nabla^*_{\nabla_X \xi}\xi, Y\right) &= 2g\left(K\left(Y, \xi\right), \nabla_X \xi\right) + g\left(\nabla^*_Y \xi, \nabla_X \xi\right) \\ &= g(\nabla^*_Y \xi + 2K\left(Y, \xi\right),\ \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

(4.1.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &= g(\nabla^*_Y \xi + 2(\widehat{\nabla}_Y \xi - \nabla^*_Y \xi), \nabla_X \xi) \\ &= g(2\widehat{\nabla}_Y \xi - \nabla^*_Y \xi, \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

(4.1.2) eşitliğinden

$$= g\left(\nabla_Y \xi, \nabla_X \xi\right)$$

(5.2.30) eşitliği ve ϕ nin anti-simetrikliğinden

$$\begin{aligned} &= g\left(-\phi Y, -\phi X\right) + g\left(Y, g\left(\nabla_X \xi, \xi\right)\phi\xi\right) \\ &+ g\left(X, g\left(\nabla_Y \xi, \xi\right)\phi\xi\right) + g\left(g\left(\nabla_Y \xi, \xi\right)\xi, g\left(\nabla_X \xi, \xi\right)\xi\right) \end{aligned}$$

(5.2.3) eşitliğinden

$$= -g\left(-Y, -\phi^2 X\right) + g\left(K\left(Y, \xi\right), K\left(X, \xi\right)\right)$$

(3.2.2) eşitliği yardımıyla $X \perp \xi$ için

$$= -g\left(-Y, X\right) + g\left(K\left(\xi, Y\right), K\left(X, \xi\right)\right)$$

(4.1.6) ve (5.2.3) eşitliklerinden, dolayısıyla

$$\begin{aligned} -g\left(\nabla^*_{\nabla_X \xi}\xi, Y\right) &= g\left(Y, X\right) + g\left(Y, K\left(\xi, K\left(X, \xi\right)\right)\right) \\ &= g\left(Y, X\right) + g\left(K\left(\xi, g\left(\nabla_X \xi, \xi\right)\xi\right), Y\right) \\ &= g\left(X, Y\right) + g\left(g\left(\nabla_X \xi, \xi\right) K\left(\xi, \xi\right), Y\right) \\ &= g\left(X, Y\right) + g\left(g\left(\nabla_X \xi, \xi\right) g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right)\xi, Y\right) \\ &= g\left(X, Y\right) + g\left(\nabla_X \xi, \xi\right) g\left(\nabla_\xi \xi, \xi\right)\eta\left(Y\right) \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

elde edilir.

(5.2.3) den

$$
\begin{aligned}
g\left(K\left(\xi,K\left(X,\xi\right)\right),Y\right) &= g\left(K\left(\xi,g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)\xi\right),Y\right)\\
&= g\left(g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)K\left(\xi,\xi\right),Y\right)\\
&= g\left(g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\xi,Y\right)\\
&= g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\eta\left(Y\right) \qquad (5.2.35)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$(4.1.1)$, $(4.1.4)$ ve $(4.1.16)$ eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
-g\left(\nabla_{\nabla^*_X\xi}\xi,\xi\right) &= g\left(\nabla_\xi\xi,\nabla^*_X\xi\right)-2g\left(K\left(\xi,\xi\right),\nabla^*_X\xi\right)\\
&= g\left(\nabla_\xi\xi-2K\left(\xi,\xi\right),\nabla^*_X\xi\right)\\
&= g(\nabla_\xi\xi-2(\nabla_\xi\xi-\widehat{\nabla}_\xi\xi),\nabla^*_X\xi)\\
&= -g\left(\nabla_\xi\xi,\nabla^*_X\xi\right)\\
&= -g\left(g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\xi,-\phi X+g\left(\nabla^*_X\xi,\xi\right)\xi\right)\\
&= -g\left(g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\xi,g\left(\nabla^*_X\xi,\xi\right)\xi\right)\\
&= g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right) \qquad (5.2.36)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(5.2.33)$, $(5.2.34)$, $(5.2.35)$ ve $(5.2.36)$ eşitlikleri $(5.2.32)$ de yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
g\left(\phi^2X,Y\right) = & -2g\left(S\left(X,\xi\right)\xi,Y\right)+2g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)\eta\left(Y\right)\\
&+g\left(X,Y\right)+g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\eta\left(Y\right)\\
&-4g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\eta\left(Y\right)+g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)g\left(\nabla_\xi\xi,\xi\right)\eta\left(Y\right)\\
&= g\left(-2S\left(X,\xi\right)\xi+X,Y\right)\\
&= g\left(-2X+X,Y\right)\\
&= g\left(-X,Y\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\forall Y\in\chi\left(M\right)$ için

$$\phi^2X=-X$$

olduğundan, $X\perp\xi$ için

$$\phi^2=-I+\eta\otimes\xi$$

dir. Diğer taraftan (3.6.2) eşitliğinden

$$-K(X,\widehat{\nabla}_Y\xi)=K\left(X,\phi Y\right)$$

ve

$$-\widehat{\nabla}_{K(X,Y)}\xi = \phi K(X,Y)$$

olur. Buradan

$$K(X,\phi Y) + \phi K(X,Y) = 0$$

olarak bulunur. Böylece $(M,\nabla,g,\phi,\xi,\eta)$ yapısı h.h. kontakt metrik istatistiksel manifoldtur.

Ayrıca biliyoruz ki (5.2.5) eşitliğinde (5.2.22) kullanılırsa

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\{g(-\phi X + g(\nabla_X\xi,\xi)\xi,Y) - g(-\phi Y + g(\nabla_Y\xi,\xi)\xi,X)\}$$

olur. g nin lineerliğinden

$$2d\eta(X,Y) = g(-\phi X,Y) + g(\nabla_X\xi,\xi)\eta(Y) - g(-\phi Y,X) - g(\nabla_Y\xi,\xi)\eta(X)$$

(5.2.7) eşitliği yardımıyla

$$2d\eta(X,Y) = g(-\phi X,Y) - g(-\phi Y,X)$$

olup, ϕ nin anti-simetrikliğinden

$$d\eta(X,Y) = \Phi(X,Y)$$

olduğu görülür. O halde Tanım (5.2.1) e göre $d\eta = \Phi$ ve ξ de bir Killing vektör alanı olduğundan M bir $K-$kontakt istatistiksel manifold olur.

KAYNAKLAR

[1] **Blair, D.E.**, (1976). Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] **Sasaki, S.** (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *12*(3), 459–476.

[3] **Rao, C.R.** (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Reson. J. Sci. Educ*, *20*, 78–90.

[4] **Amari, S.i. ve Nagaoka, H.** (2000). *Methods of information geometry*, cilt191, American Mathematical Soc.

[5] **Amari, S.i.** (1985). *Differential-geometrical methods in statistics*, cilt 28, Springer Science & Business Media.

[6] **Simon, U.**, (2000), Affine Differential Geometry, ed. by F. Dillen, L. Verstraelen, Handbook of Differential Geometry, Vol. I.

[7] **Furuhata, H. ve Hasegawa, I.**, (2016). Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, Springer, s.179–215.

[8] **Kurose, T.** (1990). Dual connections and affine geometry, *Mathematische Zeitschrift*, *203*(1), 115–121.

[9] **Murathan, C. ve Şahin, B.** (2018). A study of Wintgen like inequality for submanifolds in statistical warped product manifolds, *Journal of Geometry*, *109*(2), 1–18.

[10] **Takano, K.** (2004). Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions, *Tensor. New series*, *65*(2), 128–142.

[11] **Hacisalihoglu, H.H.** (1983). Diferensiyel Geometri, *Inonu Univ. yayinlari, mat.*, *2*, 227.

[12] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1980). *Yüksek diferansiyel geometriye giriş*, Fırat Üniversitesi.

[13] **Kon, M. ve Yano, K.** (1984). *Structures on manifolds*, cilt 3, World scientific.

[14] **O'Neil, B.**, (1983), Semi-Riemannian Geometry.

[15] **O'Neill, B.** (1966). Elementary Differential Geometry Academic Press, *London—New York*.

[16] **Chen, B.Y.** (1984). *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, cilt 27, World Scientific Publishing Company.

[17] **Kobayashi, S.** (1963). Foundations of differential geometry vol 1 (new york: Interscience) kobayashi s and nomizu k 1969, *Foundations of differential geometry*, *2*.

[18] **Öztürk, U.** (2006). *Sasakian Manifoldlarda Eğriler Teorisi*, Ankara Üniversitesi.

[19] **Blair, D.** (2002). Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, *Progress in Math*, *203*.

[20] **Camcı, C.** (2003). *Kontakt Geometride Legendre Egrileri*, Ankara Üniversitesi.

[21] **Furuhata, H.**, **Hasegawa, I.**, **Okuyama, Y.**, **Sato, K. ve Shahid, M.H.** (2017). Sasakian statistical manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, *117*, 179–186.

[22] **Singh, A.P.** Survey on Geometry of Statistical Submanifolds, *International Journal of Mathematical Sciences*, *17*(3-4).

[23] **Akbari, H. ve Malek, F.** (2021). On contact metric statistical manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, *75*, 101735.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Gökhan ARIKAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü