T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim Halil TANŞU

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

HAZİRAN 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim Halil TANŞU
(36183614078)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında beni her konuda yönlendiren ve emeğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ’a,

Çalışmalarımda ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini veren aileme,

Yüksek lisans öğrenciliğim süresinde iki yıl boyunca 117F414 nolu proje kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

İbrahim Halil TANŞU

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\widetilde{\nabla}, \nabla$	: Levi-Civita konneksiyonları
$\widetilde{M}, M, N$	: Diferensiyellenebilir Riemann manifoldları
$\tilde{g}, g$	: Riemann metrikleri
F	: Hermityen metrik
H	: Ortalama eğrilik vektörü
V^c	: Kompleks vektör uzayı
$\pounds_X$	: X vektör alanına göre Lie türevi
$\mathbf{H}$	: Ortalama eğrilik
∇f	: f nin gradienti
$\mathbb{E}^n, \mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\Gamma(TM)$	: M manifoldu üzerinde vektör alanları kümesi
$C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$	: M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar
A	: M manifoldu üzerinde şekil operatörü
h	: M manifoldu üzerinde ikinci temel form
D	: M manifoldu üzerinde normal konneksiyon
H_f	: f nin Hessian formu
h_f	: f nin Hessian tensörü
$\mathrm{div} X$	: X vektör alanının divergensi
Δf	: f nin Laplasyanı
Ric	: M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
Q	: Ricci operatörü
T	: Torsiyon tensörü
R	: Riemann eğrilik tensörü
K	: M manifoldunun kesitsel eğriliği
τ	: M manifoldunun skaler eğriliği
df	: f fonksiyonun diferensiyeli
d	: Dış türev
tanX veya $X^\top$	: X vektör alanının teğet bileşeni
$norX$ veya $X^\perp$	: X vektör alanının normal bileşeni
$\mathrm{Re}\{Z\}$	: Z kompleks vektör alanının reel kısmı
$\mathscr{D}$	: Distribüsyon
$\wedge$	: Dış (Wedge) çarpımı
$\otimes$	: Tensörel çarpım
$\oplus$	: Direkt toplam

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR
ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

İBRAHİM HALİL TANŞU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

107+v sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Bir derleme olarak hazırlanan bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Riemann manifoldlar üzerinde Ricci solitonlarla ilgili literatür bilgisi verildi. İkinci bölüm ise Riemann manifoldlar, Riemann altmanifoldları, kompleks manifoldlar ve kontakt manifoldlarla ilgili temel kavramlara ayrıldı. Üçüncü bölümde, Riemann manifoldları ve altmanifoldları üzerinde potansiyel vektör alanı bir özel vektör alanı (concurrent, concircular) olan Ricci solitonlar incelendi. Bu bölümde Öklidyen hiperyüzeylerde Ricci solitonlar ve gradient Ricci solitonlar çalışıldı. Dördüncü bölümde, hemen hemen kontakt metrik manifoldların bazı özel sınıflarında Ricci solitonlar ve η-Ricci solitonlar incelendi. Son bölümde ise kompleks uzay formun reel hiperyüzeyleri üzerinde Ricci solitonlar, η-Ricci solitonlar ve $*$-Ricci solitonlar ele alındı.

Anahtar Kelimeler: Ricci Soliton, Riemann Altmanifoldlar, Warped Product Manifold, Concurrent Vektör Alanı, Concircular Vektör Alanı, Ricci Akış, Gradient Ricci Soliton, η-Ricci Soliton, $*$-Ricci Soliton, Hopf Yüzeyler, α-Sasakian Manifold

ABSTRACT

Master Thesis

RICCI SOLITONS ON MANIFOLDS
AND SUBMANIFOLDS

İbrahim Halil TANŞU

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

107+v pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Erol KILIÇ

This master's thesis, prepared as a compilation, consists of five chapters. In the first chapter, literature information about Ricci solitons on Riemannian manifolds is given. The second chapter is devoted to the basic concepts of Riemannian manifolds, Riemannian submanifolds, complex manifolds and contact manifolds. In the third chapter, Ricci solitons whose potential vector field is a special vector field (concurrent, concircular) on Riemann manifolds and submanifolds are examined. Also in this chapter, Ricci solitons and gradient Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces are studied. In the fourth chapter, Ricci solitons and η-Ricci solitons are studied in some special classes of both almost contact metric manifolds. In the last chapter, Ricci solitons, η-Ricci solitons and $*$-Ricci solitons on real hypersurfaces of complex space form are studied.

Keywords: Ricci Soliton, Riemannian Submanifolds, Warped Product Manifold, Concurrent Vector Field, Concircular Vector Field, Ricci Flow, Gradient Ricci Soliton, η-Ricci Soliton, $*$-Ricci Soliton, Hopf Surfaces, α-Sasakian Manifold

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride Riemann manifoldlar uygulamada oldukça elverişli yapılardan birisidir. Riemann manifoldlar çalışılırken uzayı karakterize eden önemli araçlardan birisi Riemann manifoldun kesit eğriliğidir. $(\widetilde{M},\tilde{g})$ bir Riemann manifold olsun. Eğer $(\widetilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldu sabit kesit eğriliği c ye sahip ise M ye bir uzay form denir ve $\widetilde{M}(c)$ ile gösterilir. Bir n-boyutlu Riemann manifoldunda $c=0$ olduğunda Riemann manifoldu n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ e, $c>0$ olduğunda Öklidyen n-hiperküreye ve $c<0$ olduğunda n-boyutlu hiperbolik uzaya diffeomorfiktir. Eğer $(\widetilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldu $Ric=\lambda\tilde{g}$ şartını sağlıyor ise $\widetilde{M}$ ya Einstein uzay denir. Burada Ric, $\widetilde{M}$ nın Ricci eğriliği ve λ ise bir reel sayıdır. İyi bilinir ki Einstein uzaylar uzay formların bir genelleştirilmişidir, yani her uzay form aynı zamanda bir Einstein manifoldudur fakat tersi her zaman doğru değildir. Eğer $(\widetilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir ξ vektör alanı için

$$\frac{1}{2}\pounds_{\xi}\tilde{g}+Ric=\lambda\tilde{g} \tag{1.0.1}$$

şartını sağlayacak şekilde bir λ reel sayısı var ise $\widetilde{M}$ üzerinde bir Ricci soliton vardır veya $(\tilde{g},\xi,\lambda)$ üçlüsüne $\widetilde{M}$ üzerinde bir Ricci soliton, yada kısaca $\widetilde{M}$ ya bir Ricci soliton denir. Burada $\pounds_{\xi}\tilde{g}$, ξ doğrultusunda $\tilde{g}$ metriğinin Lie türevidir ve ξ ye potansiyel vektör alanı denir. $\lambda>0$ ise Ricci solitona genişleyen (expanded), $\lambda<0$ ise daralan (shrinking), $\lambda=0$ ise durağan (steady) denir. Ricci solitonlar Einstein uzaylarının genelleştirilmişidir. Bir Ricci soliton genel olarak $(\widetilde{M},\tilde{g},\xi,\lambda)$ ile gösterilir. $(1.0.1)$ ile verilen denkleme $\widetilde{M}$ üzerinde Ricci soliton denklemi denir ve bu denklem

$$\frac{1}{2}\pounds_{\xi}\tilde{g}+Ric+\lambda\tilde{g}=0 \tag{1.0.2}$$

şeklinde de verilebilir, yani $(1.0.1)$ ve $(1.0.2)$ denklemleri birbirine denktir. Sadece $(1.0.2)$ denkleminde $\lambda<0$ ise Ricci soliton genişleyen (expanded), $\lambda>0$ ise daralan (shrinking) olur. η, $\widetilde{M}$ Riemann manifoldu üzerinde bir 1-form ve μ bir reel sayı olmak üzere

$$\frac{1}{2}\pounds_{\xi}\tilde{g}+Ric=\lambda\tilde{g}+\mu\eta\otimes\eta \tag{1.0.3}$$

denklemi sağlanıyor ise $(\tilde{g},\xi,\lambda,\mu)$ dörtlüsüne $\widetilde{M}$ üzerinde η-Ricci soliton denir. Bir η-Ricci soliton, Ricci solitonun genelleştirilmişidir, yani $(1.0.3)$ de $\mu=0$ alınırsa $(1.0.1)$ elde edilir.

Bir Riemann metriği $\tilde{g}$ için gelişim (evolution) denklemi

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}=-2Ric(\tilde{g}) \tag{1.0.4}$$

şeklindeki Ricci akış (flow) denklemidir. Bu denklemin çözümü $\widetilde{M}$ üzerinde $(1.0.4)$ denklemini sağlayan $\tilde{g}(t)$ metriklerinin bir-parametreli ailesini verir, burada t parametresi reel sayıların bir non-dejenere aralığı I ya aittir $[1,2]$. Eğer I aralığının başlangıç noktası t_0 ise $(\widetilde{M}, \tilde{g}(t_0))$ a Ricci akışın başlangıç şartı veya $\tilde{g}(t_0)$ a Ricci akışın başlangıç metriği denir. Bir Ricci soliton, bir Ricci akış $(\widetilde{M}, \tilde{g}(t))$, $0 \leq t < T \leq \infty$, her $t \in [0,T]$ için $\varphi_t : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ bir diffeomorfizm ve $\sigma(t)$ bir sabit olmak üzere $\sigma(t)\,\varphi_t^* \tilde{g}(0) = \tilde{g}(t)$ yi sağlayan bir yapıdır. Yani bir Ricci solitonda bütün $(\widetilde{M}, \tilde{g}(t))$ Riemann manifoldları bir sabit çarpanı ile birbirine izometriktir [2].

Son yirmi yılda, Ricci solitonlarının geometrisi bir çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Özellikle, Grigori Perelman'ın 1904'te ortaya atılan uzun süredir devam eden Poincare varsayımını çözmek için Ricci solitonları uyguladıktan sonra daha önemli hale geldi [2]. Böylece Ricci solitonlar diferensiyel geometride son yılların bir popüler çalışma konusu haline gelmiştir ve bir Riemann metriğine sahip olan farklı uzaylarda (Riemann manifoldlar, Sasakian manifoldlar, para-Sasakian manifoldlar, Kahler manifoldlar ve bu manifoldların altmanifoldları, v.s.) incelenmeye başlanmıştır [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Potansiyel vektör alanı ξ yerine bazı özel vektör alanları alınarak Ricci solitonlarla ilgili yeni geometrik sonuçlar elde edilmiştir. ξ vektör alanı $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki bir f fonksiyonunun gradient vektör alanı olarak alındığında Ricci solitona gradient Ricci soliton denir ve $(1.0.1)$ denklemi

$$Ric + H_f = \lambda \tilde{g} \tag{1.0.5}$$

haline dönüşür. Bir gradient Ricci soliton $(\widetilde{M}, \tilde{g}, f, \lambda)$ ile gösterilir. Burada H_f, f fonksiyonunun Hessian tensörüdür. Bunların yanı sıra potansiyel vektör alanı ξ nin concurrent, concircular veya torse-forming vektör alanı olarak alındığında manifoldun incelenmesi sonucunda farklı ve elverişli geometrik sonuçlar elde edilmektedir.

Ricci solitonların altmanifoldlar üzerinde davranışları, altmanifoldların geometrisinin incelenmesine farklı bir bakış açısı getirmiş ve zenginlik katmıştır. Bir Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ nin bir altmanifoldu (M, g) üzerinde bir Ricci solitonun var olması için gerekli şartların incelenmesi problemi önemli geometrik sonuçların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Özellikle Öklidyen uzayın bir altmanifoldu Ricci solitona sahip ise bu altmanifoldların ne tür özelliklere sahip olduğu B. Y. Chen ve arkadaşları tarafından farklı makalelerde incelenmiş ve Ricci solitonlarla ilgili örnekler verilmiştir [3], [6].

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, bir Ricci solitona sahip manifold ve altmanifoldların geometrisi hakkında bir derleme yapılmıştır. Tez, beş bölüm halinde hazırlanmıştır. Giriş olarak verilen birinci bölümde, Ricci solitonlar hakkında literatür bilgisi ve tezin genel içeriği hakkında kısa bilgiler verildi. İkinci bölümde ise tezin anlaşılabilir olması için Riemann manifoldlar, Riemann altmanifoldları, kompleks manifoldlar ve kontakt manifoldlarla ilgili temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde, ilk olarak potansiyel vektör alanı concurrent vektör alanı ve concircular vektör alanı olan Ricci solitonlar, concurrent vektör alanına sahip olan Riemann manifoldların altmanifoldlarının Ricci soliton olmaları ve son olarak da Öklidyen hiperyüzeylerde Ricci solitonlar ve gradient Ricci solitonlar incelendi. Dördüncü bölümde, α-Sasakian manifoldlarda Ricci solitonlar ve 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldlarda η-Ricci solitonlar incelendi. Son bölümde ise kompleks uzay formun reel hiperyüzeyleri üzerinde Ricci solitonlar, η-Ricci solitonlar ve $*$-Ricci solitonlar ele alındı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldlar

Bu alt bölümde skaler çarpım uzayları, Riemann manifoldları ve altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. *V reel sayılar cismi üzerinde bir n-boyutlu vektör uzayı olsun. Eğer*

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü için

(1) *Her $u, v \in V$ için $g(u,v) = g(v,u)$,*

(2) *Her $u, v, w \in V$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için*

$$g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$$
$$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$$

şartları sağlanıyor ise g ye simetrik bilineer form denir [10].

Tanım 2.1.2. *g simetrik bilineer form olmak üzere her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı, $g(v,v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı, $g(v,v) \geq 0$ ise g ye pozitif yarı-tanımlı (semi-definite) ve $g(v,v) \leq 0$ ise g ye negatif yarı-tanımlı (semi-definite) denir [11].*

Tanım 2.1.3. *g simetrik bilineer form olmak üzere*

$$\forall u \in V \ \text{ için } \ g(u,v) = 0$$

olması $v = 0$ olmasını gerektiriyor ise g ye non-dejeneredir, aksi halde g ye dejeneredir denir [12].

Tanım 2.1.4. *g, V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form olsun. $g|_W : W \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü negatif tanımlı olacak şekilde en geniş $W \subset V$ alt vektör uzayının boyutuna g bilineer formunun indeksi denir. Başka bir ifade ile, V üzerinde g simetrik bilineer formunun indeksi g yi negatif tanımlı yapan en geniş $W \subset V$ alt vektör uzayının boyutudur ve $\operatorname{index} g$ veya $\operatorname{index} V$ ile gösterilir [10].*

Tanım 2.1.5. *V vektör uzayı üzerinde g simetrik bilineer formu non-dejenere ise g ye V üzerinde bir skaler çarpım ve (V,g) ikilisine de bir skaler çarpım uzayı denir [11].*

Tanım 2.1.6. *(V,g) bir skaler çarpım uzayı ve U da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $g|_U\colon U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü non-dejenere ise U ya V nin alt skaler çarpım uzayı denir [10].*

Tanım 2.1.7. *(V,g) bir skaler çarpım uzayı olsun. Eğer $u,v \in V$ için $g(u,v)=0$ ise u ile v ortogonaldir (diktir) denir ve $u \perp v$ ile gösterilir [11].*

Tanım 2.1.8. *(V,g) bir skaler çarpım ve $U,W \subset V$ olsun. Eğer her $u \in V$ ve her $w \in W$ için $g(u,w)=0$ ise U ile W alt vektör uzaylarına ortogonaldir (diktir) denir ve $U \perp W$ ile gösterilir [10].*

$U \subset V$ alt vektör uzayı için U nun dik uzayı $U^{\perp} = \{v \in V \mid g(u,v)=0 \text{ ve } \forall u \in U\}$ dir. Bu durumda $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ dur.

Lemma 2.1.1. *(V,g) bir skaler çarpım uzayı olsun. $U \subset V$ alt vektör uzayının non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $V = U \oplus U^{\perp}$ olmasıdır [10].*

Lemma 2.1.2. *Her (V,g) skaler çarpım uzayının bir ortonormal bazı vardır. (V,g) skaler çarpım uzayının ortonormal bazı $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ olmak üzere*

$$g\left(e_i,e_j\right) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = g(e_i,e_i) = \pm 1$$

dir. Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır [13].

Teorem 2.1.1. *(V,g) skaler çarpım uzayı ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ kümesi V nin bir ortonormal bazı olmak üzere her $v \in V$ vektörü için*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v,e_i)\, e_i$$

olarak yazılabilir ve bu ifade tek türlüdür [14].

V skaler çarpım uzayının bir $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ ortonormal bazı için $\varepsilon_i = g(e_i,e_i) = \pm 1$ olmak üzere $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ sıralı n-lisindeki negatif işaretli terim sayısı V nin indeksidir [14].

Tanım 2.1.9. *(V,g) ve $(W,\tilde{g})$ skaler çarpım uzayları olsunlar. $T : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere her $u,v \in V$ için*

$$g(u,v) = \tilde{g}(T(u), T(v))$$

şartı sağlanır ise T dönüşümüne lineer izometri denir [11].

İki skaler çarpım uzayının izometrik olması için gerek ve yeter şart bu iki uzayın boyutlarının ve indekslerinin eşit olmasıdır.

Tanım 2.1.10. *M bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için tanjant uzayı T_pM üzerinde bir sabit indeksli g_p skaler çarpımı var ise g ye M manifoldu üzerinde $(0,2)$ tipinde bir metrik tensör ve (M,g) ikilisine de bir semi-Riemann manifold denir [13].*

U kümesi n-boyutlu M semi-Riemann manifoldunun açık bir alt kümesi olsun. U üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olmak üzere g metrik tensörün bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\partial_i, \partial_j\right), \ \ 1 \leq i, j \leq n$$

dir. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ dir. g metrik tensörü $(0,2)$ tipten simetrik tensör alanı olduğundan $1 \leq i, j \leq n$ için $g_{ij} = g_{ji}$ dir. Dolayısıyla U üzerinde g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

olarak yazılabilir. Eğer $indexM = 0$ ise (M,g) ye Riemann manifold denir [13].

Tanım 2.1.11. *M bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olmak üzere her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \xrightarrow{C^\infty} \Gamma(TM), \ \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

operatörü

(1) $\nabla_X Y$, *X bileşenine göre* $C^\infty(M,\mathbb{R})$*-lineerdir,*

(2) $\nabla_X Y$, *Y bileşenine göre* $\mathbb{R}$*-lineerdir,*

(3) *Her* $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *için* $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

özelliklerini sağlıyor ise ∇ operatörüne M üzerinde bir lineer (afin) konneksiyon denir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanına göre kovaryant türevi denir [10].

Tanım 2.1.12. *M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere*

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

dönüşümü her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanan T tensör alanına ∇ lineer konneksiyonun torsiyon tensörü denir. Bu T tensörü $(1,2)$ mertebeli tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonuna torsiyonsuz denir [10].

Eğer g metriği M semi-Riemann manifoldu üzerindeki ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon denir. Yani, ∇ konneksiyonun g metriğine göre paralel olması her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Torsiyonsuz ve metrik olan bir afin konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir [10].

Aşağıdaki teorem bir semi-Riemann manifoldu üzerinde afin konneksiyon şartlarıyla birlikte iki tane daha özelliği sağlayan bir tek Levi-Civita konneksiyonun var olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.2. *M semi-Riemann manifoldu üzerinde her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için*

(4) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

(5) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$,

şartları sağlayan bir tek ∇ konneksiyon vardır. Bu konneksiyon Koszul formülü olarak bilinen

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

ile karakterize edilir. 4. *özelliğe sahip olan ∇ konneksiyonuna, simetrik konneksiyon da denir. Şu halde bir Levi-Civita konneksiyonu bir simetrik konneksiyondur [10].*

Tanım 2.1.13. *M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifoldu, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ M manifoldunun bir U açık komşuluğunda lokal koordinat sistemi ve bu koordinat sistemin belirlediği ortonormal çatı $\{\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n\}$ olsun. Bu durumda*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

olmak üzere U üzerinde

$$\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonlarına Christoffel sembolleri denir [11].

Önerme 2.1.1. *M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifoldu, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ kümesi M manifoldunun bir U açık komşuluğundaki lokal koordinat sistemi ve bu koordinat sistemin belirlediği ortonormal çatı $\{\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n\}$ olmak üzere*

(1) $\nabla_{\partial_i} Y = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$

(2) $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right\}$

dir. Burada $Y=\sum_{j=1}^{n} g_j\partial_j$ ve $\left[g^{ij}\right]$, $\left[g_{ij}\right]$ matrisinin tersidir [10].

Tanım 2.1.14. *M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için*

$$R(X,Y,Z)=R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanan

$$R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$$

tensör alanına ∇ lineer konneksiyonun Riemann eğrilik tensörü denir. Açıkça görülmektedir ki R, $(1,3)$ mertebeli tensör alanıdır. $R=0$ olması durumunda M manifoldu flattır (düzlemseldir) denir. $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için

$$g(R(X,Y)Z,W)=R(X,Y;Z,W)$$

ile gösterilir [13].

Önerme 2.1.2. *(M,g) semi-Riemann manifold ve ∇ da (M,g) üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonun eğrilik tensörü R olmak üzere her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için*

$$R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z \tag{2.1.4}$$

$$R(X,Y;Z,W)=-R(X,Y;W,Z) \tag{2.1.5}$$

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0 \tag{2.1.6}$$

$$R(X,Y;Z,W)=R(Z,W;X,Y) \tag{2.1.7}$$

dir. (2.1.6) *eşitliğine birinci Bianchi özdeşliği denir [11].*

Önerme 2.1.3. *(M,g) semi-Riemann manifoldu ve ∇, (M,g) manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonun R eğrilik tensörü olmak üzere her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için*

$$(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0 \tag{2.1.8}$$

dir. Burada $W\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z,W)=((\nabla_X R)(Y,Z))W&=\nabla_X R(Y,Z)W-R(\nabla_X Y,Z)W\\&\quad-R(Y,\nabla_X Z)W-R(Y,Z)(\nabla_X W)\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

eşitliğiyle tanımlanır. (2.1.8) *eşitliğine ikinci Bianchi özdeşliği denir [12].*

$X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere S, $(1,2)$ tensör alanı ve ω 1-formu için R eğrilik tensörü aşağıdaki özdeşlikleri de sağlar:

$$(\nabla_X \nabla_Y \omega)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \omega)(Z) - \left(\nabla_{[X,Y]}\omega\right)(Z) = -\omega(R(X,Y)Z) \tag{2.1.10}$$

ve

$$\begin{aligned} &(\nabla_X \nabla_Y S)(Z,W) - (\nabla_Y \nabla_X S)(Z,W) - \left(\nabla_{[X,Y]}S\right)(Z,W) \\ &= R(X,Y)S(Z,W) - S(R(X,Y)Z,W) - S(Z,R(X,Y)W). \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

$(2.1.10)$ ve $(2.1.11)$ formüllerine Ricci özdeşliği denir [12].

Tanım 2.1.15. *(M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının 2-boyutlu altuzayı π düzlemine kesit (tanjant düzlemi) denir. π düzleminin bir $\{e_1,e_2\}$ bazı için*

$$Q(e_1,e_2) = g(e_1,e_1)g(e_2,e_2) - (g(e_1,e_2))^2$$

diyelim. $|Q(e_1,e_2)|$ reel sayısı, e_1 ve e_2 vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını verir. $p \in M$ noktasındaki non-dejenere π düzleminin $\{e_1,e_2\}$ bir bazı olmak üzere

$$K(\pi) = K(e_1,e_2) = \frac{g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)}{Q(e_1,e_2)} \tag{2.1.12}$$

sayısına M manifoldunun π düzlemine göre kesit eğriliği denir. $\{e_1,e_2\}$ bir ortonormal baz ise $Q(e_1,e_2) = 1$ ve $K(\pi) = g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) = R(e_1,e_2;e_1,e_2)$ olur [12].

Her $p \in M$ için T_pM deki her π düzleminde kesit eğriliği $K(\pi) = 0$ olan semi-Riemann manifolduna flattır (düzlemseldir) denir. Açıkça anlaşıyor ki bir M semi-Riemann manifoldunun flat olması için gerek ve yeter şart her $p \in M$ noktasındaki eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır. n-boyutlu ve s indekli $\mathbb{E}^n_s$ semi-Öklidyen uzayı flattır [10].

Tanım 2.1.16. *(M,g) n-boyutlu semi-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ vektör alanları M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere*

$$Ric(X,Y) = iz\, R(.,X)Y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.1.13}$$

şeklinde tanımlanan

$$Ric : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$(0,2)$ tipli tensör alanına Ricci tensörü denir ve Ric ile gösterilir. Eğer $Ric = 0$ ise M manifolduna Ricci flattır denir [11].

Eğer $(2.1.13)$ eşitliğinde $(2.1.4)$, $(2.1.5)$ ve $(2.1.7)$ kullanılırsa M manifoldunun Ricci tensörü her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,X)Y,e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,Y)X,e_i) = Ric(Y,X) \end{aligned}$$

olur ki bu da Ricci tensörünün simetrik olduğunu gösterir [10].

Tanım 2.1.17. *(M,g) semi-Riemann manifold ve λ bir sabit olsun. Eğer*

$$Ric = \lambda g \tag{2.1.14}$$

ise M manifolduna Einstein manifoldu denir. $u \in \Gamma(TM)$ birim vektör alanı için $Ric(u)$ Ricci eğriliği $Ric(u) = Ric(u,u)$ eşitliğiyle tanımlanır [10].

Tanım 2.1.18. *(M,g) n-boyutlu semi-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ vektör alanları M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere*

$$\tau = \sum_{i<j} K\left(e_i,e_j\right) \tag{2.1.15}$$

sayısına M manifoldunun skaler eğriliği denir. M manifoldunun skaler eğriliği, $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamıdır [14].

Tanım 2.1.19. *(M,g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ fonksiyonun diferensiyeli df 1-formun duali olan vektör alanına f nin gradienti denir ve ∇f veya $\operatorname{grad} f$ ile gösterilir. Başka bir deyişle, (M,g) semi-Riemann manifoldu üzerinde f fonksiyonunun gradienti ∇f, M üzerinde bir vektör alanıdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(\nabla f,X) = df(X) = X(f) \tag{2.1.16}$$

şeklinde tanımlanır. M nin bir lokal koordinat sistemi $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, bu koordinat sistemine karşılık gelen ortonormal çatı $\{\partial_1,\cdots,\partial_n\}$ ve dual çatı $\{dx_1,\cdots,dx_n\}$ olsun. Bu durumda

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad ve \quad \nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j \tag{2.1.17}$$

dir [10].

Tanım 2.1.20. *(M,g) bir n-boyutlu semi-Riemann manifold ve $\{\partial_1,\cdots,\partial_n\}$ de M manifoldunun bir ortonormal çatısı olsun. $X\in\Gamma(TM)$ için*

$$\operatorname{div}:\Gamma(TM)\longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})\ ,\quad \operatorname{div}X=iz(\nabla X)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g\left(\nabla_{\partial_i}X,\partial_i\right) \tag{2.1.18}$$

şeklinde tanımlanan div *dönüşüme M üzerinde X vektör alanının divergensi denir. $X=\sum_{j=1}^{n}X^j\partial_j$, $X_i=\sum_{j=1}^{n}g_{ij}X^j$, olmak üzere*

$$\operatorname{div}X=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{jk}^{j}X_k\right\}$$

dır [11].

Tanım 2.1.21. *(M,g) bir semi-Riemann manifold ve $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere*

$$h_f:\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM),\quad h_f(X)=\nabla_X\nabla f \tag{2.1.19}$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Hessian tensörü denir. $X,Y\in\Gamma(TM)$ için $H_f(X,Y)=g(\nabla_X\nabla f,Y)$ şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipindeki tensöre f nin Hessian formu denir [10].

Lemma 2.1.3. *(M,g) bir semi-Riemann manifold ve $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonunun Hessian tensörü h_f olsun. Bu durumda h_f tensörü self-adjointtir. Yani $X,Y\in\Gamma(TM)$ için*

$$g\left(h_f(X),Y\right)=g\left(X,h_f(Y)\right) \tag{2.1.20}$$

dir. [12]

Tanım 2.1.22. *(M,g) n-boyutlu semi-Riemann manifold olsun. Bir $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonunun Laplasyanı $\Delta f=-\operatorname{div}(\nabla f)$ olarak tanımlanır. Bir $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ lokal koordinat sistemi için*

$$\Delta f=-\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\}$$

dır [10].

$\mathbb{E}_s^n$ semi-Öklidyen uzayının doğal koordinat sistemi $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\ ,\quad \operatorname{div}X=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial u_i}\ ,\quad \Delta f=-\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} \tag{2.1.21}$$

olur.

(M,g) bir Riemann manifoldu ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere eğer $\Delta f = 0$ ise f fonksiyonuna (M,g) manifoldu üzerinde harmoniktir denir. Eğer $\Delta f \geq 0$ ise f fonksiyonuna (M,g) manifoldu üzerinde altharmoniktir denir. Eğer $\Delta f \leq 0$ ise f fonksiyonuna (M,g) manifoldu üzerinde süperharmoniktir denir [11].

Tanım 2.1.23. *Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir tensör alanının $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı yönündeki Lie türevi $£_X$, aşağıdaki dört aksiyomu sağlayan bir dönüşümdür;*

(1) *M manifoldu üzerinde f diferensiyellenebilir fonksiyonun X vektör alanına göre Lie türevi, f fonksiyonun X vektör alanı yönüne göre türevine eşittir, yani $£_X f = X[f]$ dir.*

(2) *M manifoldu üzerinde her S ve T tensör alanları için Leibniz kuralı olarak bilenen*

$$£_X(S \otimes T) = (£_X S) \otimes T + S \otimes (£_X T)$$

eşitliğini sağlar.

(3) *$£_X$ dönüşümü (Lie türevi), T tensör alanı ve $X, X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} £_X(T(X_1,X_2,\ldots,X_n)) &= (£_X T)(X_1,X_2,\ldots,X_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} T(X_1,\ldots,(£_X X_i),\ldots,X_n) \end{aligned}$$

Leibniz kuralını sağlar.

(4) *$£_X$ dönüşümü (Lie türevi), fonksiyonlar üzerinde d dış türev operatörü ile birlikte değişimlidir, yani $[£_X, d] = 0$ dır [10].*

Lemma 2.1.4. *(M,g) semi-Riemann manifoldu olmak üzere her X,Y vektör alanları ve $v \in \Gamma(TM)$ için*

$$(£_v g)(X,Y) = g(\nabla_X v, Y) + g(X, \nabla_Y v) \tag{2.1.22}$$

dir [13].

Tanım 2.1.24. *(M,g) bir semi-Riemann manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer*

$$£_X g = 0 \tag{2.1.23}$$

ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir [10].

Tanım 2.1.25. *(M,g) semi-Riemann manifoldu, $\lambda \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve X, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer*

$$£_X g = \lambda g$$

ise X vektör alanına konformal vektör alanı denir [11].

Teorem 2.1.3. *(M,g) bir semi-Riemann manifold olmak üzere $X \in (TM)$ vektör alanı için aşağıdaki şartlar denktir.*

(1) *X bir Killing vektör alanıdır,*

(2) *Her $Y,Z \in \Gamma(TM)$ için $Xg(Y,Z) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z])$,*

(3) *∇X, g metrik tensörüne göre anti-adjointtir. Yani $Y,Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

dir [10].

Tanım 2.1.26. *(M,g_M) ve (N,g_N) semi-Riemann manifoldları ve $\psi : N \longrightarrow M$ bir diffeomorfizm olsun. Eğer ψ metrik tersörleri koruyorsa, yani $\psi^*(g_M) = g_N$ ise ψ diffeomorfizmine izometri denir [10].*

Tanım 2.1.27. *(M,g_M) ve (N,g_N) semi-Riemann manifoldları olsun. Her $u,v \in T_pN$ ve her $p \in N$ olmak üzere p nin bir U açık komşuluğu için $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ diffeomorfizmi var ve*

$$g_N(u,v) = g_M\left(\phi_{*_p}(u), \phi_{*_p}(v)\right)_{\phi(p)} \tag{2.1.24}$$

sağlanıyor ise $\phi : N \longrightarrow M$ dönüşüme $p \in N$ noktasındaki lokal izometri denir [12].

Eğer her $p \in N$ için p nin bir U komşuluğu ve $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset M$ lokal izometrisi var ise N semi-Riemann manifoldu, M semi-Riemann manifolduna lokal izometriktir denir. [10]

Tanım 2.1.28. *(M,g_M) ve (N,g_N) semi-Riemann manifoldlar olsun. $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $f \neq 0$ bir pozitif fonksiyon olmak üzere*

$$\phi^*(g_M) = f g_N \tag{2.1.25}$$

ise $\phi : N \longrightarrow M$ dönüşümüne konformal denir. Eğer f fonksiyonu sabit ise ϕ dönüşümüne homoteti denir [10].

Eğer $f = 1$ alınırsa ϕ homotetisi bir izometri olur, eğer $f = -1$ alınırsa ϕ homotetisi bir anti-izometri denir [10].

Tanım 2.1.29. *M bir semi-Riemann manifold, ∇ da M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu, $\mu \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve ψ bir $1-$form olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla_X v = \mu X + \psi(X) v \tag{2.1.26}$$

sağlanıyor ise v vektör alanına torse-forming vektör alanı denir. Eğer $\psi = 0$ *ise yani*

$$\nabla_X v = \mu X \tag{2.1.27}$$

ise v vektör alanına concircular vektör alanı denir. Eğer $\mu = 1$ *ve* $\psi = 0$ *ise yani*

$$\nabla_X v = X \tag{2.1.28}$$

ise v vektör alanına concurrent vektör alanı denir [10].

Tanım 2.1.30. *M ve N, sırasıyla n ve m boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar $(n \leq m)$, $i : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için $(i_*)_p : T_pM \to T_{i(p)}N$ dönüşümü birebir ise i dönüşümüne immersiyon ve M ye de N nin altmanifoldu denir. Eğer i immersiyonu birebir ise i ye bir imbedding denir [10].*

$(N, \tilde{g})$ bir Riemann manifold, M de N nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(X,Y) = \tilde{g}(i_*X, i_*Y)$ ile M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanır ve bu g metriğine indirgenmiş metrik denir. Ayrıca burada i ye izometrik immersiyon denir. TN de TM nin ortogonal tümleyeni $T^{\perp}M$ ile gösterilir ve

$$\Gamma\left(T^{\perp}M\right) = \{V \in \Gamma(TN) \,|\, \tilde{g}(V,X) = 0, \forall X \in \Gamma(TM)\} \tag{2.1.29}$$

ile tanımlanır. Bu durumda

$$TN = TM \oplus T^{\perp}M \tag{2.1.30}$$

olarak yazılır.

$(N, \tilde{g})$, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $i : M \longrightarrow N$ dönüşümü (M, g) n-boyutlu manifoldundan $(N, \tilde{g})$ m-boyutlu bir Riemann manifolduna bir izometrik immersiyon olsun.

(M, g) ve $(N, \tilde{g})$ nin Levi-Civita konneksiyonu sırasıyla ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ olsun. M nin X, Y teğet vektör alanları ve N normal vektör alanı için Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.1.31}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + D_X N \tag{2.1.32}$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$, $\widetilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. Benzer şekilde $-A_N X$ ve $D_X N$, $\widetilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenidir. Burada h ya ikinci temel form, A_N e şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü ve D ye de normal konneksiyon denir.

$p \in M$, $N \in T_p^{\perp} M$ normal vektörü için

$$A_N : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

bir lineer dönüşümdür ve A_N bir self-adjoint endomorfizmdir. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma\left(T^{\perp} M\right)$ vektör alanları için $\tilde{g}(Y, N) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}(h(X,Y), N) = g(A_N X, Y) \tag{2.1.33}$$

olarak elde edilir. Eğer $h = 0$ ise M ye total geodezik, her $N \in \Gamma\left(T^{\perp} M\right)$ için $A_N = \lambda I$ ise M ye total umbilik altmanifold denir. $\{e_1, \cdots, e_n\}$, M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) iz(h) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.1.34}$$

vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

ifadesinde Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ & - h([X,Y], Z) + D_X h(Y,Z) - D_Y h(X,Z) \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

elde edilir ve bu denkleme Gauss denklemi denir. Bu denklem teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{2.1.36}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = {} & h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) + D_X h(Y,Z) \\ & - D_Y h(X,Z) - h(\nabla_X Y, Z) + h(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.35) denklemi $W \in \Gamma(TM)$ ile iç çarpılırsa

$$\tilde{g}\left(\widetilde{R}(X,Y)Z, W\right) = g(R(X,Y)Z, W) + g\left(A_{h(X,Z)}Y, W\right) - g\left(A_{h(Y,Z)}X, W\right)$$

$$R(X,Y;Z,W) = \widetilde{R}(X,Y;Z,W) + g\left(A_{h(Y,Z)}X, W\right) - g\left(A_{h(X,Z)}Y, W\right)$$

ve (2.1.33) eşitliğinden

$$R(X,Y;Z,W) = \widetilde{R}(X,Y;Z,W) + \tilde{g}(h(X,W), h(Y,Z)) - \tilde{g}(h(Y,W), h(X,Z)) \tag{2.1.37}$$

olur.

$$\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \{D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)\}$$
$$- \{D_Y h(X,Z) - h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z)\}$$

dir. Buradan

$$\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\widetilde{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\widetilde{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \tag{2.1.38}$$

elde edilir ki ve buna Codazzi denklemi denir. Burada $\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp}$, $\tilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşenidir ve $\widetilde{\nabla}h$, h ikinci temel formun van der Waerden-Bortolotti $\widetilde{\nabla} = \nabla \oplus D$ konneksiyonuna göre kovaryant türevidir. Yani

$$\left(\widetilde{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \tag{2.1.39}$$

dir [3], [10].

Tanım 2.1.31. $(\widetilde{M},\tilde{g})$ *m-boyutlu bir Riemann manifold ve M de* $\widetilde{M}$ *nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer M nin normal uzayı* 1*-boyutlu, yani* $m-n=1$ *ise M ye* $\widetilde{M}$ *nın bir hiperyüzeyi denir [10].*

M hiperyüzeyinin birim normali N olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri $X,Y \in \Gamma(TM)$ için sırasıyla

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(A_N X,Y)N \text{ ve } \widetilde{\nabla}_X N = -A_N X \tag{2.1.40}$$

dir.

(M_1,g_1) ve (M_2,g_2) iki Riemann (veya semi-Riemann) manifold, f, M_1 üzerinde bir pozitif fonksiyon ve $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ ile $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ da doğal projeksiyonlar olsun. $M = M_1 \times M_2$ olmak üzere

$$g = g_1 + f^2 g_2 \tag{2.1.41}$$

olacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği var ise M ye warped çarpım manifoldu denir ve $M = M_1 \times_f M_2$ ile gösterilir. f fonksiyonuna warping fonksiyonu denir. Eğer f fonksiyonu M üzerinde tanımlı reel değerli pozitif fonksiyon ise $M = M_1 \times_f M_2$ ye twisted çarpım manifoldu denir [10].

Bir $M = M_1 \times_f M_2$ warped çarpım manifoldunda f sabit fonksiyon ise bu durumda M ye aşikar warped çarpım manifoldu veya Riemann çarpım manifoldu denir. $q \in M_2$ noktası için

$M_1 \times \{q\} = \pi_2^{-1}(q)$ ya yapraklar (leaves), $p \in M_1$ için $\{p\} \times M_2 = \pi_1^{-1}(p)$ ye lifler (fibers) denir [10] ve bunlar M nin sırasıyla total geodezik ve total umbilik altmanifoldlarıdır. $M_1 \times \{q\}$ üzerindeki vektör alanlarına yatay (horizontal, teğet, tanjant), $\{p\} \times M_2$ üzerindeki vektör alanlarına dikey (vertical, normal) denir. $u \in T_pM_1$, $p \in M_1$ ve $q \in M_2$ için u nun (p,q) noktasında M üzerine olan lifti (genişlemesi), $\pi_{1*}(\bar{u}) = u$ olacak şekildeki bir $\bar{u}$ vektörüdür. M üzerindeki vektör alanlarının horizontal liftlerinin kümesi $L(M_1)$ ile vertical liftlerinin kümesi ise $L(M_2)$ ile gösterilir. M nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere M_1 ve M_2 nin Levi-Civita konneksiyonları, eğrilik tensörleri ve Ricci tensörleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekildedir:

Önerme 2.1.4. *$X,Y \in L(M_1)$ ve $V,W \in L(M_2)$ için $M = M_1 \times_f M_2$ üzerinde aşağıdaki ifadeler sağlanır;*

1) $\nabla_X Y \in L(M_1)$,

2) $\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ \ln f)V$,

3) $nor(\nabla_V W) = -\dfrac{g(V,W)}{f}\nabla f$,

4) ∇', *M_2 nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla'_V W$ nın lifti $tan(\nabla'_V W) \in L(M_2)$ dir [10].*

Önerme 2.1.5. *$M = M_1 \times_f M_2$, M_1 ve M_2 nin eğrilik tensörleri sırasıyla R, ${}^{M_1}R$ ve ${}^{M_2}R$ olmak üzere $X,Y,Z \in L(M_1)$ve $U,V,W \in L(M_2)$ için aşağıdaki ifadeler vardır;*

1) *M_1 üzerinde ${}^{M_1}R(X,Y)Z$ nin lifti $R(X,Y)Z \in L(M_1)$ dir,*

2) $R(X,V)Y = \dfrac{H_f(X,Y)}{f}V$,

3) $R(X,Y)V = R(V,W)X = 0$,

4) $R(X,V)W = -\dfrac{g(V,W)}{f}\nabla_X \nabla f$,

5) $R(V,W)U = {}^{F}R(V,W)U + \dfrac{g(\nabla f, \nabla f)}{f^2}\{g(V,U)W - g(W,U)V\}$ *[12].*

Önerme 2.1.6. *$k = boyM_2 > 1$ ve $M = M_1 \times M_2$, M_1 ve M_2 nin Ricci eğrilikleri sırasıyla Ric, ${}^{M_1}Ric$ ve ${}^{M_2}Ric$ olmak üzere $X,Y \in L(M_1)$ ve $V,W \in L(M_2)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır;*

1) $Ric(X,Y) = {}^{M_1}Ric(X,Y) - \dfrac{k}{f}H_f(X,Y)$,

2) $Ric(X,V) = 0$,

3) $Ric(V,W) = {}^{M_2}Ric(V,W) - \left\{\dfrac{\Delta f}{f} - (k-1)\dfrac{g(\nabla f, \nabla f)}{f^2}\right\}g(V,W)$ *[12].*

Tanım 2.1.32. *$(\widetilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M,g) olsun. Eğer (M,g) paralel ortalama eğrilik vetörüne sahip bir total umbilik altmanifold ise (M,g) ye dışsal (extrinsic) küre denir [10].*

Tanım 2.1.33. *(M_1,g_1) ve (M_2,g_2) iki Rimann (veya semi-Riemann) manifold, f_i, M_i, $i=1,2$, üzerinde bir pozitif fonksiyonlar olmak üzere*

$$g = f_2^2 g_1 + f_1^2 g_2 \tag{2.1.42}$$

olacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği var ise M ye doubly warped çarpım manifoldu denir ve $M = {}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ ile gösterilir. Eğer f_i, $i=1,2$, fonksiyonları $M = M_1 \times M_2$ üzerinde tanımlı ise $M = {}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ ye doubly twisted çarpım manifoldu denir [10].

$M = {}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ doubly çarpım manifoldunda $X \in L(M_1)$ ve $V \in L(M_2)$ için

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ \ln f_1)V + (V \ \ln f_2)X \tag{2.1.43}$$

dir. $f_1 = 1$ veya $f_2 = 1$ olması durumunda bir doubly warped çarpım, warped çarpım olur. Eğer $f_1 \in C^\infty(M_2)$ ve $f_2 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ ise $M = {}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ doubly twisted çarpımına bir warped-twisted çarpımı denir. Benzer şekilde eğer $f_1 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ ve $f_2 \in C^\infty(M_1)$ ise $M = {}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ doubly twisted çarpımına twisted-warped çarpımı denir [11].

M manifoldu üzerindeki bir $\mathscr{D}$ distribüsyonu TM tanjant demetinin bir alt vektör demetidir. Eğer her $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D})$ için $[X,Y] \in \Gamma(\mathscr{D})$ ise $\mathscr{D}$ ye integrallenebilir denir. $\mathscr{D}$ integrallenebilir ise $\mathscr{D}$ ye M nin bir altmanifoldu karşılık gelir ve bu altmanifolda integral altmanifoldu veya yaprak (leave) denir. Eğer $\mathscr{D}$ nin her yaprağı M manifoldunun total umbilik altmanifoldu ise M üzerinde $\mathscr{D}$ distribüsyonuna total umbilik denir. Ayrıca her yaprağın ortalama eğrilik vektörü normal demette paralel ise $\mathscr{D}$ ye küresel foliasyon denir. Bu durumda $\mathscr{D}$ nin yaprakları M nin dışsal (extrinsic) küreleridir. Eğer $\mathscr{D}$ nin yaprakları total geodezik altmanifoldlar ise $\mathscr{D}$ ye total geodezik distribüsyon denir. Aşağıdaki iki teorem doubly twisted çarpım manifoldlarını karekterize eden teoremlerdir [11].

Teorem 2.1.4. *g, $M_1 \times M_2$ üzerinde bir semi-Riemann metrik olsun. Eğer $\mathscr{D}_1$ ve $\mathscr{D}_2$ foliasyonları sırasıyla M_1 ve M_2 ye karşılık gelen ortogonal distribüsyonlar ise aşağıdaki ifadelere sahip olunur.*

(a) g metriği $M_1 \times_{(f_1,f_2)} M_2$ double-twisted çarpımının metriği olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{D}_1$ ve $\mathscr{D}_2$ total umbilikal foliasyonlar olmasıdır.

(b) g metriği $M_1 \times_f M_2$ twisted çarpımının metriği olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{D}_1$ total geodezik ve $\mathscr{D}_2$ de total umbilikal foliasyon olmasıdır.

(c) g metriği $M_1 \times_f M_2$ warped çarpımının metriği olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{D}_1$ total geodezik ve $\mathscr{D}_2$ de küresel foliasyon olmasıdır [4].

Teorem 2.1.5. *g, $M_1 \times M_2$ üzerinde bir semi-Riemann metriği olsun. Eğer $\mathscr{D}_1$ ve $\mathscr{D}_2$ foliasyonları her yerde dik olarak kesişiyorlarsa*

(1) Eğer $\mathscr{D}_1$ total umbilikal foliasyon ve $\mathscr{D}_2$ küresel foliasyon ise $M_1 \times M_2$ üzerinde g metriği bir twisted-warped çarpımdır.

(2) Eğer $\mathscr{D}_1$ küresel foliasyon ve $\mathscr{D}_2$ total umbilikal foliasyon ise $M_1 \times M_2$ üzerinde g metriği bir warped-twisted çarpımdır.

(3) Eğer $\mathscr{D}_1$ ve $\mathscr{D}_2$ küresel foliasyon ise $M_1 \times M_2$ üzerinde g metriği bir doubly warped çarpımdır [4].

2.2 Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.2.1. *V reel bir vektör uzayı almak üzere*

$$V^c = \{Z |\ Z = X + iY;\ X, Y \in V\} \tag{2.2.1}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda V^c üzerinde aşağıdaki şekilde iki işlem tanımlayalım;

$$+ : V^c \times V^c \longrightarrow V^c \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned}(Z_1, Z_2) \longrightarrow Z_1 + Z_2 &= (X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) \\ &= (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ve

$$\bullet : \mathbb{C} \times V^c \longrightarrow V^c \tag{2.2.4}$$

$$(\lambda, Z) \longrightarrow (c_1 + ic_2)(X + iY) = (c_1X - c_2Y) + i(c_2X + c_1Y)$$

işlemlerine göre V^c, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olup bu uzaya V nin kompleksleştirilmiş uzayı denir [15].

Tanım 2.2.2. *I dönüşümü V üzerinde tanımlı birim dönüşüm olmak üzere V vektör uzayı üzerinde $J^2 = -I$ ile tanımlı J lineer endomorfizmine bir kompleks yapı denir [15].*

V, J kompleks yapısıyla verilen bir reel vektör uzayı olmak üzere her $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve her $X \in V$ için V üzerinde

$$(c_1 + ic_2)X = c_1X + c_2JX \tag{2.2.5}$$

çarpma işlemi tanımlansın. Bu durumda V bir kompleks vektör uzayı olur. Tersine V, kompleks bir vektör uzayı olsun. V üzerinde J endomorfizmi

$$JX = iX \tag{2.2.6}$$

ile tanımlanırsa J, V nin kompleks yapısı olur [16].

Önerme 2.2.1. *Bir J kompleks yapısına sahip V reel vektör uzayının boyutu çifttir [17].*

Örnek 2.2.1. *$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $W \in \mathbb{C}^n$, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, $w_k = x_k + iy_k$, $1 \leq k \leq n$ ve $i^2 = -1$ olsun.*

$$\begin{aligned} JW &= iW \\ &= (iw_1, iw_2, \ldots, iw_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde J tensörü tanımlanabilir. Böylece $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde $X = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ vektörü için

$$JX = (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n)$$

tanımlanırsa

$$J(JX) = (-x_1, \ldots, -x_n, -y_1, \ldots, -y_n)$$

elde edilir. Bu durumda her $X \in \mathbb{R}^{2n}$ için $J^2X = -X$ olur. Dolayısıyla J, $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

Önerme 2.2.2. *J, boyutu $2n$ olan reel bir vektör uzayı V nin kompleks yapısı olsun. Bu durumda $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ lineer bağımsız vektörler ise*

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_, JX_1, JX_2, \ldots, JX_n\}$$

kümesi V nin bir bazıdır [18].

Teorem 2.2.1. *$\mathbb{R}^{2n}$, J kompleks yapısına sahip $2n$-boyutlu reel bir vektör uzayı olmak $\mathbb{R}^{2n}_J$ ile $\mathbb{C}^n$ uzayları birbirine izomorftur.*

$\mathbb{R}^{2n}$ in kompleks yapısı J_0, $Z_k = X_k + iY_k$ olmak üzere

$$J_0 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_n, -x_1, \ldots, -x_n)$$

ile verilsin. Burada tanımlanan J_0 tensörüne kanonik kompleks yapı denir ve J_0 tensörüne karşılık gelen matris $[J_0]$ olmak üzere

$$[J_0] = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

dır [19].

Örnek 2.2.2. *$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $1 \leq k \leq n$ ve $i^2 = -1$ olsun. $Z_k = X_k + iY_k$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} JZ_k &= -iZ_k \\ &= Y_k - iX_k \end{aligned}$$

olup V^c üzerinde J_2 kompleks yapısı

$$J_2 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \longrightarrow (y_1, -x_1, y_2, -x_2, \ldots, y_n, -x_n)$$

olarak tanımlanabilir.

Şimdi $Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k)$, $\overline{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= \frac{1}{2}\left(JX_k - iJ^2X_k\right) \\ &= \frac{1}{2}(JX_k + iX_k) \\ &= i\left(\frac{1}{2}X_k - i\frac{1}{2}JX_k\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$J(Z_k) = iZ_k$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} J\left(\overline{Z}_k\right) &= \frac{1}{2}\left(JX_k + iJ^2X_k\right) \\ &= \frac{1}{2}(JX_k - iX_k) \\ &= -i\left(\frac{1}{2}X_k + i\frac{1}{2}JX_k\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$J\left(\overline{Z}_k\right) = -i\overline{Z}_k$$

elde edilir. Böylece elde ettiğimiz eşitliklerden V^c nin iki alt kümesi

$$V^{1,0} = \{Z|\ Z \in V^c :\ JZ = iZ\} \tag{2.2.8}$$

ve

$$V^{0,1} = \{Z|\ Z \in V^c :\ JZ = -iZ\} \tag{2.2.9}$$

tanımlanabilir [18].

Teorem 2.2.2. *V^c kompleksleştirilmiş vektör uzayı olmak üzere*

$$V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \tag{2.2.10}$$

dır [17].

Tanım 2.2.3. *$\mathbb{C}^n$ nin bir W açık alt kümesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. Eğer $f(p) = u(p) + iv(p)$ fonksiyonun reel ve imajiner kısımları C^1 sınıfından ise f ye C^1 sınıfındandır denir.*

Ayrıca, f nin kısmi ve total diferensiyelleri sırasıyla

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_p u + i\left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_p v \tag{2.2.11}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_p u + i\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_p v \tag{2.2.12}$$

ve

$$df|_p = du|_p + idv|_p \tag{2.2.13}$$

ile tanımlanır [19].

Tanım 2.2.4. *$\mathbb{C}^n$ nin bir W açık alt kümesi üzerinde tanımlı bir kompleks değerli fonksiyon f olsun. $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ için $p = z_0 \in D$ noktasında*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left(z_{0_k} + \Delta z_k\right) - f\left(z_{0_k}\right)}{\Delta z_k}$$

limit değeri her k için mevcut ve z_k, Δx_k ve Δy_k yaklaşımından bağımsız ise kompleks değerli f fonksiyonuna holomorfiktir denir. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k},\ \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k} \tag{2.2.14}$$

Cauchy-Riemann denklemleri elde edilir. $W \subset \mathbb{C}^n$ üzerinde verilen kompleks değerli f fonksiyonu Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarsa f ye holomorfik fonksiyon denir [19].

Tanım 2.2.5. *M bir Hausdorff uzay olmak üzere M de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ açık alt kümeleri verilsin. Eğer her $p \in M$ noktasında*

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizmaları mevcut olup $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ için

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \longrightarrow \Psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right),$$
$$\Phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \longrightarrow \Psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye kompleks manifold denir. Burada $\{U_\alpha, \Psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de M nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi denir. [15].

Tanım 2.2.6. *M bir reel 2n-boyutlu manifold ve her $p \in M$ için*

$$J_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

lineer dönüşümü $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa bu tensöre M üzerinde hemen hemen kompleks yapı ve M ye de J kompleks yapıyla birlikte hemen hemen kompleks manifold denir [15].

Teorem 2.2.3. *Hemen hemen kompleks manifoldların boyutu çifttir [15].*

Teorem 2.2.4. *M bir kompleks manifold olsun. Bu durumda M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı vardır [15].*

Tanım 2.2.7. *M ve M' sırasıyla J ve J' tensörleri ile birlikte hemen hemen kompleks manifoldlar ve $f : M \longrightarrow M'$ olsun. Eğer*

$$J' \circ f_* = f_* \circ J \tag{2.2.15}$$

ise f ye hemen hemen komplekstir veya f, J ve J' yapılarını korur denir [15].

Tanım 2.2.8. *M bir kompleks manifold ve J, M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N(X,Y) = -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \tag{2.2.16}$$

ile tanımlı N tensör alanına J nin Nijenhuis tensör alanı denir [18].

Teorem 2.2.5. *M bir kompleks manifold ise Nijenhuis tensör alanı sıfırdır [19].*

Tanım 2.2.9. *M bir kompleks manifold, J de bir hemen hemen kompleks yapı ve Z, W vektör alanları (1,0) tipinde olsun. $[Z,W]$, (1,0) tipinde olması durumunda J ye integrallenebilirdir denir [15].*

Teorem 2.2.6. *M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. J tensörünün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır [15].*

Tanım 2.2.10. *Z, M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde bir vektör alanı olmak üzere her f holomorfik fonksiyonu için $Z(f)$ holomorfik oluyorsa Z ye holomorfik vektör alanı adı verilir [15].*

Böylece $Z = \sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ vektör alanının holomorfik olması için gerek ve yeter koşul f_i fonksiyonlarının holomorfik olmasıdır.

Teorem 2.2.7. *(M,J) bir hemen hemen kompleks manifoldunun bir kompleks manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$, $T = 0$ olacak şekilde M üzerinde ∇ konneksiyonun var olmasıdır. Burada T, ∇ konneksiyonun torsiyon tensör alanıdır [15].*

Tanım 2.2.11. *M bir hemen hemen kompleks manifold, M nin hemen hemen kompleks yapısı J ve M üzerinde bir Riemann metriği g olsun. Eğer her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \tag{2.2.17}$$

şartı sağlanıyor ise g ye M üzerinde Hermityen metrik denir [15].

Örnek 2.2.3. *$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $Z,W \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $Z = (z_1,z_2,\ldots,z_n)$ ve $W = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $w_k = t_k + is_k$, $1 \le k \le n$, ve $i^2 = -1$ olsun. Bu durumda*

$$JZ = iZ = i(z_1,z_2,\ldots,z_n),$$
$$JW = iW = i(w_1,w_2,\ldots,w_n)$$

olmak üzere $\mathbb{C}^n$ üzerinde Riemann metriği

$$g(Z,W) = \mathrm{Re}\{\langle Z,W\rangle\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i\right\} \tag{2.2.18}$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$g(Z,W) = \sum_{i=1}^{n} [x_it_i + y_is_i] \tag{2.2.19}$$

ve

$$g(JZ,JW) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{n} iz_i.\overline{iw_i}\right\} \tag{2.2.20}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [x_it_i + y_is_i]$$

olur. Buradan $g(Z,W) = g(JZ,JW)$ olduğu görülür. Böylece g, $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı üzerinde bir Hermityen metriktir.

Tanım 2.2.12. *M bir hemen hemen kompleks manifold olmak üzere M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise (M,g) ikilisine hemen hemen Hermityen manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise (M,g) ikilisine Hermityen manifold denir [15].*

Tanım 2.2.13. *(M,g) bir hemen hemen Hermityen manifold, J de M nin bir hemen hemen kompleks yapısı olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY) \tag{2.2.21}$$

ile tanımlanan Φ tensörüne temel 2-form denir [15].

Lemma 2.2.1. Φ, *M üzerinde temel 2-form olmak üzere*

$$\Phi(JX,JY) = \Phi(X,Y),\ \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{2.2.22}$$

dir [15].

Tanım 2.2.14. *(M,g,J) bir hemen hemen kompleks manifold olmak üzere Φ temel 2-formu kapalı ise $(d\Phi = 0)$ g Hermityen metriğine bir Kahler metrik adı verilir [15].*

Tanım 2.2.15. *M bir hemen hemen kompleks manifold ve M üzerinde bir g Kahler metriği tanımlı ise M ye bir hemen hemen Kahler manifold denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kahler metriği tanımlı ise M manifolduna Kahler manifold denir [15].*

Teorem 2.2.8. *Bir (M,g,J) Hermityen manifoldunun bir Kahler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır [20].*

Önerme 2.2.3. *(M,g) bir Kahler manifold olmak üzere her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır;*

$$(i)\ \ R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z\,,\ \ R(JX,JY)Z = R(X,Y)Z, \tag{2.2.23}$$

$$(ii)\ Ric(JX,JY) = Ric(X,Y)\,,\ \ Ric(X,Y) = \frac{1}{2}(izJR(X,JY))\,. \tag{2.2.24}$$

Tanım 2.2.16. *M bir hemen hemen kompleks manifold, $p \in M$ için T_pM nin bir düzlemi π olsun. Eğer π düzlemi J altında invaryant ise π ye holomorfik düzlem kesiti denir [15].*

Bu tanıma göre her $X \in \Gamma(TM)$ için $\pi = Sp\{X,JX\}$ düzlemi bir holomorfik düzlem kesitidir.

Tanım 2.2.17. *M bir Kahler manifoldu, M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı J olsun. π holomorfik düzleminde tanımlı kesit eğriliğine holomorfik kesit eğriliği denir ve $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$K(\pi) = R(X,JX,X,JX) = g(R(X,JX),X) \tag{2.2.25}$$

ile verilir. Eğer M nin her p noktasındaki düzlem kesitleri için $K(\pi)$ değeri sabit oluyorsa M manifolduna sabit holomorfik kesit eğrilikli manifold (uzay) denir [15].

Tanım 2.2.18. *Sabit kesit eğrilikli bir Kahler manifolduna kompleks uzay form denir [21].*

Teorem 2.2.9. *M bir Kahler manifold olsun. Bu durumda M sabit holomorfik kesit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve $c \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\{&g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY \\ &-g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ\} \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

olmasıdır [15].

2.3 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.3.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde diferensiyellenebilir bir η 1-formu var ve*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlıyor ise M ye bir kontakt manifold ve η ya da bir kontakt form denir [22].

Tanım 2.3.2. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, φ de M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ de M üzerinde bir vektör alanı ve η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer*

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.3.1}$$

şartları sağlanıyor ise (φ,ξ,η) ya M üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı, M ye de bir hemen hemen kontakt manifold denir [22].

M ye bir hemen hemen kontakt manifold dendiğinde (M,φ,ξ,η) dörtlüsü kastedilir. (2.3.1) *deki I ise TM üzerindeki birim dönüşümdür [22].*

Önerme 2.3.1. *(M,φ,ξ,η) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda*

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad rank\varphi = 2n \tag{2.3.2}$$

dir.

Tanım 2.3.3. (M,φ,ξ,η) *bir hemen hemen kontakt manifold olmak üzere, her* $X,Y\in\Gamma(TM)$ *için*

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.3}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği var ise (φ,ξ,η,g) *ye M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapı ve M ye de hemen hemen kontakt metrik manifold denir. Burada g ye bağdaşabilir metrik denir [22].*

Eğer $(2.3.3)$ *de Y yerine* ξ *alınacak olursa*

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{2.3.4}$$

elde edilir. $(2.3.3)$ *de Y yerine* φY *alınırsa*

$$g(X,\varphi Y)=-g(\varphi X,Y) \tag{2.3.5}$$

olduğu görülür.

Bir hemen hemen kontakt metrik manifold üzerinde $e_{i^*}=\varphi e_i$ *olacak şekilde bir* $\{e_1,e_2,\ldots,e_n,e_{1^*},e_{2^*},\ldots,e_{n^*},\xi\}$ *bir ortonormal bazı vardır. Bu baza bir* φ*-baz denir [22].*

Tanım 2.3.4. (M,φ,ξ,η,g) *bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Her* $X,Y\in\Gamma(TM)$ *için*

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.3.6}$$

olarak tanımlanan $(0,2)$*-tipindeki* Φ *tensörüne M nin temel* 2*-formu denir [22].*

$(2.3.5)$ *den kolay bir şekilde görülür ki*

$$\Phi(X,Y)=-g(\varphi X,Y)=-\Phi(Y,X)$$

dir, yani Φ *anti-simetriktir.*

Tanım 2.3.5. (M,φ,ξ,η,g) *bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Her* $X,Y\in\Gamma(TM)$ *için*

$$d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.3.7}$$

ise M ye kontakt metrik manifold denir [23].

M manifoldu, (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısına sahip bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda $M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde bir vektör alanı $\overline{X}=\left(X,f\frac{d}{dt}\right)$

şeklindedir. Burada t, $\mathbb{R}$ nin koordinatı, f ise $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyon ve $X \in \Gamma(TM)$ dir. Buna göre

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanan J, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır, yani $J^2 = -I$ şartını sağlar.

$M \times \mathbb{R}$ üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhius tensör alanı

$$N_J\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = \left[J\overline{X}, J\overline{Y}\right] + J^2\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] - J\left[J\overline{X}, \overline{Y}\right] - J\left[\overline{X}, J\overline{Y}\right]$$

olarak tanımlanır [23].

Bir (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifoldunda φ nin Nijenhius tensör alanı ise $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

olarak tanımlanır [23].

Tanım 2.3.6. *Bir (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifoldu için $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifold yapısına normaldir denir [23].*

$M \times \mathbb{R}$ üzerinde $\overline{X} = \left(X, f\frac{d}{dt}\right), \overline{Y} = \left(Y, h\frac{d}{dt}\right)$ vektör alanlarının Lie braketi

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \left([X,Y], (X(h) - Y(f))\frac{d}{dt}\right)$$

dir.

Önerme 2.3.2. *Bir (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifoldunda, (φ, ξ, η) nın normal olması için gerek ve yeter şart*

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

olmasıdır [22].

Tanım 2.3.7. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer karekteristik vektör alanı ξ, g ye göre Killing vektör alanı ise (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına K-kontakt yapı ve M ye de K-kontakt manifold denir [22].*

$h = \frac{1}{2}\pounds_\xi \varphi$ olmak üzere bir kontakt metrik yapının K-kontakt olması için gerek ve yeter şart $h = 0$ olmasıdır. Burada h, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır [22].

Ayrıca kolayca görülebilir ki

$$h\xi = 0, \;\; h\varphi + \varphi h = 0, \;\; \nabla\xi = -\varphi - \varphi h \tag{2.3.8}$$

ifadeleri sağlanır [22]. Buna göre bir hemen hemen kontakt manifoldun bir K-kontakt olması için gerek ve yeter şart $\nabla\xi = -\varphi$ olmasıdır.

Tanım 2.3.8. *(M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer M nin kontakt metrik yapısı normal ise M ye Sasakian manifold denir [22].*

Böylece bir hemen hemen kontakt metrik manifoldun Sasakian olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.3.9}$$

denkleminin sağlamasıdır [22].

Tanım 2.3.9. *Bir hemen hemen kontakt metrik manifold (M,φ,ξ,η,g), M üzerindeki bir α fonksiyonu ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$(\nabla_X \varphi)Y = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) \tag{2.3.10}$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi(X); \;\; (\nabla_X \eta)Y = \alpha g(X,\varphi Y) \tag{2.3.11}$$

şartlarını sağlıyor ise M ye α-Sasakian manifold denir [5].

Bir α-Sasakian manifoldda her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki bağlantılar sağlanır:

$$R(X,Y)\xi = \alpha^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + Y(\alpha)\varphi X - X(\alpha)\varphi Y \tag{2.3.12}$$

$$R(\xi,X)Y = \alpha^2[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] + g(X,\varphi Y)(\operatorname{grad}\alpha) + Y(\alpha)\varphi X \tag{2.3.13}$$

$$\begin{aligned}\eta(R(X,Y)Z) = {} & \alpha^2[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] \\ & + X(\alpha)g(\varphi Y,Z) - Y(\alpha)g(\varphi X,Z)\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

$$Ric(X,\xi) = \alpha^2(n-1)\eta(X) - \varphi X(\alpha) \tag{2.3.15}$$

$$Ric(\xi,\xi) = \alpha^2(n-1) \tag{2.3.16}$$

$$Q\xi = \alpha^2(n-1)\xi + \varphi(\operatorname{grad}\alpha). \tag{2.3.17}$$

Burada R Riemann eğrilik tensörü, Ric Ricci tensörü ve Q Ricci operetörüdür [5].

Tanım 2.3.10. *(M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ şartları sağlanıyorsa M ye bir Kenmotsu manifold denir. Burada $\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ olup, Φ ye M nin temel 2-formu denir [23].*

Böylece bu yapı

$$(\nabla_X \varphi) Y = -\eta(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\xi \tag{2.3.18}$$

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.3.19}$$

denklemleri ile karekterize edilir, (2.3.19) denkleminden $\operatorname{div}\xi = 2n$ elde edilir [24].

M nin Riemann eğrilik tensörü $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (2.3.19) den

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{2.3.20}$$

elde edilir. (2.3.20) dan

$$Ric(X,\xi) = -2n\eta(X) \tag{2.3.21}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.11. *Bir M hemen hemen kontakt metrik manifold üzerinde Ricci tensörü*

$$Ric = ag + b\eta \otimes \eta \tag{2.3.22}$$

şartını sağlıyor ise M ye η-Einstein manifold denir. Burada a ve b de M üzerinde reel değerli fonksiyonlardır [24].

Önerme 2.3.3. *Eğer bir η-Einstein Kenmotsu manifoldda a bir sabit ve $b = 0$ ise bu durumda M bir Einstein uzaydır [24].*

3. RIEMANN MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

3.1 Concurrent Vektör Alanları ve Ricci Solitonlar

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ξ de M üzerinde bir diferensiyellenebilir vektör alanı olsun. λ bir reel sabit olmak üzere M üzerinde

$$\frac{1}{2}\pounds_{\xi}g + Ric = \lambda g \tag{3.1.1}$$

denklemi sağlanıyorsa (g,ξ,λ) üçlüsüne M üzerinde bir Ricci soliton denir ve Ricci soliton (M,g,ξ,λ) ile gösterilir. ξ vektör alanına Ricci solitonun potansiyel vektör alanı denir. Bir (M,g,ξ,λ) Ricci solitonunda $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ olmasına göre Ricci solitona sırasıyla daralan (shriking), durağan (steady) ve genişleyen (expanding) denir. ξ nin sıfır veya Killing vektör alanı olması durumunda Ricci solitona aşikar Ricci soliton denir [3].

Eğer ξ potansiyel vektör alanı M üzerinde bir diferensiyellenebilir f fonksiyonun gradienti ise (M,g,ξ,λ) Ricci solitonuna gradient Ricci soliton denir ve (M,g,f,λ) ile gösterilir. Ayrıca gradient Ricci solitonda bu diferensiyellenebilir f fonksiyonuna potansiyel fonksiyon denir [3]. Eğer f fonksiyonu sabit ise (M,g,f,λ) gradient Ricci solitonuna aşikar gradient Ricci soliton denir. $(3.1.1)$ den $\xi = \nabla f$ olduğundan her aşikar gradient Ricci soliton, aşikar Ricci solitondur.

Bu kısımda ilk önce potansiyel vektör alanı concurrent olan Ricci solitonları incelenilecektir. Eğer v bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde concurrent vektör alanı ise $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X v = X$ olduğunu biliyoruz. Şimdi concurrent vektör alanları için örnekler verelim.

Örnek 3.1.1. *Concurrent vektör alanı ile donatılmış Riemann manifoldlarının en iyi bilinen örneği Öklid uzayıdır. Öklid uzayında yer vektörü alanı v olarak alınırsa, Öklid uzayındaki her X vektör alanı için $\nabla_X v = X$ sağlanır ve v bir concurrent vektör alanıdır [3].*

Yine benzer şekilde Öklid uzayının bir hiperyüzeyi, Öklid uzayından indirgenen metrik ile bir Riemann manifolddur ve hiperyüzeyin yer vektör alanı bir concurrent vektör alanıdır.

Concurrent vektör alanları ile donatılmış Riemann manifoldları için daha genel bir örnek verelim.

Örnek 3.1.2. *I yay parametresi s olan $\mathbb{R}$ de bir açık aralık ve (F,g_F) de keyfi bir Riemann manifoldu olsun. $g = ds^2 + s^2 g_F$ metrik tensörü ile $I \times_s F$ bir warped çarpım manifoldudur. $v =$*

$s\frac{\partial}{\partial s}$ olsun. Her $U \in T(I \times_s F)$ için $U = X + Y$ ve $X = f_1 \frac{\partial}{\partial s} \in \Gamma(TI)$, $Y = \sum_{i=2}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TF)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_U v = \nabla_{X+Y} v = \nabla_X v + \nabla_Y v &= \nabla_{f_1 \frac{\partial}{\partial s}} s\frac{\partial}{\partial s} + \sum_{i=2}^{n} \nabla_{f_i \frac{\partial}{\partial x_i}} s\frac{\partial}{\partial s} \\
&= f_1 \left(\frac{\partial s}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} + s\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \sum_{i=2}^{n} f_i \left(\frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial s} + s\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial s} \right) \\
&= f_1 \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{i=2}^{n} f_i \frac{s\partial(\ln s)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= f_1 \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{i=2}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = X + Y = U
\end{aligned}$$

olduğundan $v = s\frac{\partial}{\partial s}$, $I \times_s F$ üzerinde bir concurrent vektör alanıdır [3].

Aşağıdaki teorem, potansiyel vektör alanı concurrent olan Riemann manifoldları üzerinde Ricci solitonları için önemli bir karekterizasyon teoremidir.

Teorem 3.1.1. *(M,g) n-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde (M,g,v,λ) Ricci solitonun v concurrent vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki şartın sağlamasıdır.*

i) (M,g,v,λ) Ricci solitonu $\lambda = 1$ olan bir daralan (shrinking) Ricci solitondur,

ii) I, yay parametresi s olan $\mathbb{R}$ nin açık aralığı ve (F,g_F) de Ricci tensörü $Ric_F = (n-2)g_F$ eşitliğini sağlayan $(n-1)$-boyutlu Einstein manifoldu olmak üzere, M Riemann manifoldu, $I \times_s F$ warped çarpım manifoldunun bir açık parçasıdır [3], [25].

İspat: v concurrent potansiyel vektör alanıyla donatılmış Ricci soliton (M,g,v,λ) olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X v = X \tag{3.1.2}$$

olur. $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının X_p ve v_p ortonormal teğet vektörlerin gerdiği π düzleminin kesit eğriliği $K(X_p,v_p)$ olmak üzere $(3.1.2)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K(\pi) = K(X,v)(p) = K(X_p,v_p) &= g(R(X_p,v_p)v_p,X_p) \\
&= g\left(\left[\nabla_{X_p},\nabla_{v_p}\right] v_p - \nabla_{[X_p,v_p]} v_p, X_p \right) \\
&= g\left(\nabla_{X_p}\nabla_{v_p} v_p - \nabla_{v_p}\nabla_{X_p} v_p - \nabla_{[X_p,v_p]} v_p, X_p \right) \\
&= g\left(\nabla_{X_p} v_p - \nabla_{v_p} X_p - [X_p,v_p], X_p \right) \\
&= g\left([X_p,v_p] - [X_p,v_p], X_p \right) = 0
\end{aligned}$$

olur. Her $p \in M$ için bu eşitlik sağladığından

$$K(X,v) = 0$$

eşitliği elde edilir. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ bir ortonormal çatı olmak üzere

$$\begin{aligned} Ric(v,v) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,v)v, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_{e_i}\nabla_v v - \nabla_v \nabla_{e_i} v - \nabla_{[e_i,v]} v, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_{e_i} v - \nabla_v e_i - \nabla_{[e_i,v]} v, e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g([e_i,v] - [e_i,v], e_i) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

bulunur. $e_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$, $\mu = \|v\|$ olmak üzere $v = \mu e_1$ olarak yazılır. e_1 i ihtiva eden bir lokal ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, bu çatıya karşılık gelen dual çatı $\left\{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n\right\}$ ve konneksiyon 1-formlar ω_i^j $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ olsun. Bu durumda

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j(X) e_j\ , \ \ i = 1,2,\ldots,n$$

şeklinde ifade edilir. (3.1.2) eşitliğinde $X = e_1$ seçilirse,

$$e_1 = \nabla_{e_1} v = \nabla_{e_1}(\mu e_1) = e_1(\mu) e_1 + \mu \nabla_{e_1} e_1$$

olur. Buradan

$$e_1(\mu) = 1$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. $\mathscr{D}_1 = S_p\{e_1\}$ ve $\mathscr{D}_2 = S_p\{e_2, \ldots, e_n\}$ şeklinde $\mathscr{D}_1$ ve $\mathscr{D}_2$ distribüsyonlarını tanımlayalım. $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ olduğundan $\mathscr{D}_1$ distribüsyonu integrallenebilirdir ve $\mathscr{D}_1$ total geodeziktir. Böylece $\mathscr{D}_1$ distribüsyonuna karşılık gelen eğri M manifoldunun bir geodeziğidir. Benzer şekilde (3.1.2) eşitliğinde $X = e_k$ $(k = 2,3,\ldots n)$ seçilirse

$$\begin{aligned} e_k &= \nabla_{e_k} v = \nabla_{e_k}(\mu e_1) = e_k(\mu) e_1 + \mu \nabla_{e_k} e_1 \\ &= e_k(\mu) e_1 + \mu \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_1^j(e_k) e_j\right) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$e_k(\mu) = 0, \ \ k = 2,3,\ldots,n$$

olur ve

$$\begin{aligned} e_k &= \mu \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_1^j(e_k) e_j\right) \\ &= \mu \left(\omega_1^1(e_k) e_1 + \omega_1^2(e_k) e_2 + \ldots + \omega_1^k(e_k) e_k + \ldots + \omega_1^n(e_k) e_n\right) \\ &= \mu \omega_1^k(e_k) e_k \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu\omega_i^1\left(e_j\right)=0,\ i\neq j \tag{3.1.4}$$

$$\mu\omega_1^i\left(e_i\right)=1\ \Rightarrow\ \mu\omega_i^1\left(e_i\right)=-1 \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Cartan yapı denklemi olarak bilinen

$$d\omega^i=-\sum_{j=1}^{n}\omega_j^i\wedge\omega^j\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

eşitliğinde $i=1$ için (3.1.4) eşitliği kullanılırsa

$$d\omega^1=\left(\underbrace{-\omega_1^1\wedge\omega^1}_{0}\right)+\left(\underbrace{-\omega_2^1\wedge\omega^2}_{0}\right)+\ldots+\left(\underbrace{-\omega_n^1\wedge\omega^n}_{0}\right)=0$$

dır. Bu nedenle M manifoldu üzerinde yerel olarak $ds=\omega^1$ olacak şekilde en az bir $s\in C^\infty\left(M,\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu vardır. Diğer taraftan $2\leq i\neq j\leq n$ olmak üzere (2.1.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g\left(\left[e_i,e_j\right],e_1\right)&=g\left(\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i,e_1\right)\\
&=g\left(\nabla_{e_i}e_j,e_1\right)-g\left(\nabla_{e_j}e_i,e_1\right)\\
&=g\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_j^k\left(e_i\right)e_k,e_1\right)-g\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_i^k\left(e_j\right)e_k,e_1\right)\\
&=\omega_j^1\left(e_i\right)-\omega_i^1\left(e_j\right)=0
\end{aligned}$$

olduğundan $\left[e_i,e_j\right]$ nin e_1 yönünde bileşeni yoktur, yani $\left[e_i,e_j\right]\in\mathscr{D}_2$ dir. Bu durumda $\mathscr{D}_2$ integrallenebilirdir. Üstelik $\mathscr{D}_2$ distribüsyonun her $p\in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur. M manifoldunda $\mathscr{D}_2$ distribüsyonun L yaprağının ikinci temel formu $\hat{h}$ ve $\hat{\nabla}$, $\mathscr{D}_2$ distribüsyonu üzerine indirgenen konneksiyon olmak üzere Gauss formülü

$$\nabla_{e_i}e_j=\hat{\nabla}_{e_i}e_j+\hat{h}\left(e_i,e_j\right) \tag{3.1.6}$$

dir. Buradan sonra (3.1.6) eşitliği her iki tarafı e_1 ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
g\left(\nabla_{e_i}e_j,e_1\right)&=g\left(\hat{\nabla}_{e_i}e_j+\hat{h}\left(e_i,e_j\right),e_1\right)\ ,\quad 2\leq i,j\leq n\\
&=g\left(\hat{\nabla}_{e_i}e_j,e_1\right)+g\left(\hat{h}\left(e_i,e_j\right),e_1\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g\left(\hat{h}\left(e_i,e_j\right),e_1\right)&=g\left(\nabla_{e_i}e_j,e_1\right)\\
&=g\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_j^k\left(e_i\right)e_k,e_1\right)\\
&=g\left(\omega_j^1\left(e_i\right)e_1,e_1\right)
\end{aligned}$$

(3.1.5) den

$$g\left(\hat{h}\left(e_i,e_j\right),e_1\right)=g\left(-\frac{\delta_{ij}}{\mu}e_1,e_1\right)$$

olur ve buradan

$$\hat{h}\left(e_i,e_j\right)=-\frac{\delta_{ij}}{\mu}e_1\ ,\qquad 2\leq i,j\leq n \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Bu da $\mathscr{D}_2$ distribüsyonun her L yaprağının ortalama eğriliğinin $-\frac{1}{\mu}$ olduğunu gösterir. (3.1.7) eşitliğinden $\mathscr{D}_2$ distribüsyonun her bir L yaprağının, ortalama eğrilik vektörü $\hat{H}=-\frac{e_1}{\mu}$ olan M manifoldunun totally umbilik hiperyüzeyi olmasını gerektirir. Bununla birlikte $e_2\mu=e_3\mu=\ldots=e_n\mu=0$ uygulanarak $\mathscr{D}_2$ nin küresel distribüsyon olduğu sonucuna ulaşılır, yani her total umbilik yaprağının ortalama eğrilik vektörü normal demetine paraleldir. Sonuç olarak M manifoldunun $e_1=\frac{\partial}{\partial s}$ için

$$g=ds^2+f^2(s)\,g_F$$

warped metrik tensör alanı ile $I\times_{f(s)}F$ warped çarpım manifoldu olduğu görülür.

v vektör alanına ortogonal her X birim vektörü için kesit eğriliği

$$\begin{aligned}K(X,v)&=g(R(X,v)v,X)\\&=-g(R(v,X)X,v)\\&=-g\left(\frac{H_f(X,X)}{f}v,v\right)\\&=-\frac{H_f(X,X)}{f}g(v,v)\\&=-\frac{f''}{f}\end{aligned}$$

olur. $K(X,v)=0$ olduğundan $f''(s)=0$ dır ve buradan $f(s)=as+b$, $(a,b\in\mathbb{R})$ elde edilir. $a=0$ olması durumunda $I\times_{f(s)}F$ warped çarpım manifoldu bir Riemann manifoldudur. Bu ise $\mathscr{D}_2$ nin her yaprağının total geodezik olmasını gerektirir; ancak bu (3.1.7) eşitliğinde elde edilen sonuç ile çelişir. O halde $a\neq 0$ dır. $f(s)=s$ olsun. Bu durumda M manifoldu bir $I\times_{f(s)}F$ yerel çarpım manifoldudur.

Lie türevinin tanımını ve (3.1.2) kullanılırsa her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\pounds_v g)(X,Y)&=g(\nabla_X v,Y)+g(X,\nabla_Y v)\\&=g(X,Y)+g(X,Y)=2g(X,Y)\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$(3.1.8)$ de elde edilen Sonuç 3.1.1 de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}2g(X,Y)+Ric(X,Y)=\lambda g(X,Y)$$
$$Ric(X,Y)=\lambda g(X,Y)-g(X,Y)$$
$$Ric(X,Y)=(\lambda-1)\,g(X,Y) \quad (3.1.9)$$

olur, bu da M nin bir Einstein $(n-1)$-manifold olduğunu gösterir. $(3.1.3)$ ve $(3.1.9)$ den $Ric(v,v)=(\lambda-1)\,g(v,v)=0$ olur ve buradan M manifoldu flat ve $\lambda=1$ dir. Bu da (M,g,v,λ) nin $\lambda=1$ olan daralan (shrinking) Ricci soliton olması demektir.

M manifoldu Ricci flat olduğundan ve Önerme 2.1.5 den warped çarpım manifoldunun ikinci faktörü F, $Ric_F=(n-2)\,g_F$ eşitliğini sağlayan Einstein manifoldudur.

Şimdi tersini ispatlayalım, yani $\lambda=1$ ve $M=I\times_s F$ warped çarpım manifoldu olsun. M manifoldu için $X\in\mathscr{L}(I)$ ve $v\in\mathscr{L}(F)$ birbirine dik vektör alanları olmak üzere

$$K(X,v)=g\left(\frac{H_s(X,X)}{s}v,v\right)=0$$

dir. Ayrıca, $K(X,v)=-g(R(v,X)X,v)$ olduğundan

$$Ric(X,X)=0 \quad (3.1.10)$$

ve

$$Ric(v,v)=0 \quad (3.1.11)$$

bulunur. Böylece M manifoldu Ricci flattır. Buradan $(3.1.10)$ ve $(3.1.11)$ eşitlikleri göz önüne alınarak $\lambda=1$ için Ricci soliton denklemi yazılırsa

$$\frac{1}{2}\pounds_v g=g \quad (3.1.12)$$

eşitliği elde edilir. Her $U\in\Gamma(I\times_s F)$ için

$$\frac{1}{2}(\pounds_v g)(U,U)=g(U,U)$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\pounds_v g)(U,U)&=\frac{1}{2}\{vg(U,U)-2g([v,U],U)\}\\&=\frac{1}{2}\{2g(\nabla vU,U)-2(g(\nabla_v U,U)-g(\nabla_U v,U))\}\\&=g(\nabla vU,U)-g(\nabla_v U,U)+g(\nabla_U v,U)\\&=g(\nabla_U v,U)\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_U v, U) &= g(U,U) \\
g(\nabla_U v - U, U) &= 0 \\
\nabla_U v - U &= 0 \\
\nabla_U v &= U
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da v vektör alanın concurrent vektör alanı olduğunu gösterir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.1. *Riemann manifoldlar üzerinde v potansiyel vektör alanı concurrent vektör alanı olan durağan (steady) ve genişleyen (expanding) Ricci soliton yoktur [3].*

Sonuç 3.1.2. *v potansiyel vektör alanı concurrent vektör alanı olan her (M,g,v,λ) Ricci soliton gradient Ricci solitondur [3].*

İspat: v vektör alanı concurrent vektör alanı olduğundan $(3.1.8)$ eşitliğinden

$$
\pounds_v g = 2g \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\pounds_v g = g
$$

olur. Buradan $(3.1.1)$ Ricci soliton eşitliğinden açıkça anlaşılıyor ki

$$
Ric = 0 \;\text{ ve }\; \lambda = 1
$$

dir. $f = \frac{1}{2}g(v,v)$ seçilirse her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
g(\nabla f, X) = X[f] &= X\left[\frac{1}{2}g(v,v)\right] \\
&= g(\nabla_X v, v) \\
&= g(X,v)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
g(\nabla f, X) &= g(X,v) \\
g(\nabla f - v, X) &= 0
\end{aligned}
$$

ve g metriği non-dejenere olduğundan

$$
\nabla f - v = 0 \;\Rightarrow\; \nabla f = v
$$

elde edilir. Böylece (M,g,v,λ) Ricci solitonu bir gradient Ricci solitondur.

Ayrıca Hessian formunun simetriliğinden

$$\begin{aligned}(\pounds_v g)(X,Y) &= \left(\pounds_{\nabla f} g\right)(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(X, \nabla_Y \nabla f)\\ &= H_f(X,Y) + H_f(Y,X) = 2H_f(X,Y)\end{aligned}$$

olur ve bu ifade her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için doğru olduğundan

$$\frac{1}{2}\pounds_v g = H_f$$

elde edilir. O halde $(3.1.12)$ eşitliğinden $g = H_f$ olur. Böylece gradient Ricci soliton

$$Ric = (\lambda - 1)g \;\Rightarrow\; Ric + g = \lambda g$$

eşitliğinde g Einstein metriği yerine H_f yazılırsa gradient Ricci soliton denklemi

$$Ric + H_f = \lambda g$$

eşitliğine dönüşür.

Şimdi üzerinde concurrent vektör alanı v bulunan m-boyutlu Riemann manifoldu $(N,\tilde{g})$ nin n-boyutlu altmanifoldu (M,g) üzerindeki Ricci solitonları inceleyelim.

$v^\top$ ve $v^\perp$, sırasıyla v concurrent vektör alanının teğet ve normal bileşenleri, yani $v = v^\top + v^\perp$ olsun.

Teorem 3.1.2. *$(N,\tilde{g})$ nin bir altmanifoldu (M,g) olsun. $\left(M,g,v^\top,\lambda\right)$ nin Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart M nin Ricci tensörünün, her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1)g(X,Y) - \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) \tag{3.1.13}$$

şeklinde olmasıdır [3].

İspat: v, N üzerinde concurrent vektör alanı olduğundan

$$v = v^\top + v^\perp \tag{3.1.14}$$

dir. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}X &= \widetilde{\nabla}_X v = \widetilde{\nabla}_X\left(v^\top + v^\perp\right) = \widetilde{\nabla}_X v^\top + \widetilde{\nabla}_X v^\perp\\ &= \nabla_X v^\top + h\left(X, v^\top\right) - A_{v^\perp}X + D_X v^\perp\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

olur. (3.1.15) ifadesi teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X v^\top = A_{v^\perp} X + X \tag{3.1.16}$$

$$h(X,Y) = -D_X v^\perp \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Lie türevi tanımından ve (3.1.16) dan her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
(\pounds_{v^\top} g)(X,Y) &= g\left(\nabla_X v^\top, Y\right) + g\left(X, \nabla_Y v^\top\right) \\
&= g(A_{v^\perp} X + X, Y) + g(X, A_{v^\perp} Y + Y) \\
&= g(A_{v^\perp} X, Y) + g(X,Y) + g(X,Y) + g(X, A_{v^\perp} Y) \\
&= 2g(X,Y) + 2g(A_{v^\perp} X, Y) \\
&= 2g(X,Y) + 2\tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right)
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

olur. Bu eşitlik (3.1.1) deki Ricci soliton denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\{2g(X,Y) + 2\tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right)\right\} + Ric(X,Y) &= \lambda g(X,Y) \\
Ric(X,Y) + g(X,Y) + \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) &= \lambda g(X,Y) \qquad (3.1.19) \\
Ric(X,Y) = (\lambda - 1) g(X,Y) - \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 3.1.3. γ, $\mathbb{R}^3$ *ün birim küresi üzerinde birim hızlı eğri olsun.* $\mathbb{R}^5$ *Öklid uzayında yer vektörü*

$$x(s, x_2, x_3) = (\gamma(s) x_2, x_2, x_3)$$

olan (M,g) *altmanifoldunu göz önüne alalım. M nin yer vektörü* $v = (\gamma(s)x_2, x_2, x_3)$ *bir concurrent vektör alanıdır. M nin tanjant demeti TM*

$$\left\{e_1 = \left(\gamma'(s), 0, 0\right),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma(s), 1, 0),\ e_3 = (0,0,1)\right\}$$

vektörleri tarafindan gerilir. $\{e_1, e_2, e_3\}$ *bir ortonormal çatıdır ve normal uzayın bir ortonormal çatısı ise*

$$\left\{n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma(s), -1, 0),\ n_2 = \left(\gamma(s) \times \gamma'(s), 0, 0\right)\right\}$$

olarak bulunur. Buna göre concurrent vektör alanı $v = \sqrt{2} x_2 e_2 + x_3 e_3$ *olarak yazılır, yani* $v = v^\top$ *dir. M nin eğrilik tensörünün* $R = 0$ *olduğu kolayca gösterilebilir, yani M flattır. Böylece* (3.1.1) *ifadesi* $\lambda = 1$ *ile sağlanır ve M bir Ricci solitondur [3].*

Örnek 3.1.4. *$M = S^2(1) \times \mathbb{R}^2$ olmak üzere M, $\mathbb{R}^5$ de küresel hipersilindirdir. Bu durumda $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ olmak üzere M nin yer vektörü $(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2)$ dir. Bu yer vektörüne v denilirse bu durumda v bir concurrent vektör alanıdır.*
$TM = Sp\{U_1 = (y_3, 0, -y_1, 0, 0), U_2 = (0, y_3, -y_2, 0, 0), U_3 = (0,0,0,1,0), U_4 = (0,0,0,0,1)\}$ dir ve hiperyüzeyin birim normali ise $N = (y_1, y_2, y_3, 0, 0)$ dır. Ayrıca $v = x_1U_3 + x_2U_4 + N$ olarak yazılır, yani $v^\top = x_1U_3 + x_2U_4$ ve $v^\perp = N$ dir. Doğrudan bir hesaplamayla $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$, $\lambda = 1$ ile bir daralan Ricci solitondur [3].

Teorem 3.1.3. *Bir v concurrent vektör alanına sahip $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ nın aşikar Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart M nin $v^\perp$-umbilik olmasıdır [3].*

İspat: M, $v^\perp$-umbilik ise $X \in \Gamma(TM)$ için $A_{v^\perp}X = \mu X$ olarak yazılır. Buradan ise $\tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) = g(A_{v^\perp}X, Y) = \mu g(X,Y)$ elde edilir. (3.1.13) den $Ric(X,Y) = (\lambda - \mu - 1)\, g(X,Y)$ olur ki bu ise M nin Einstein uzayı olması demektir, yani $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ bir aşikar Ricci solitondur.

Bu teoremden aşağıdaki sonuca varılabilir.

Sonuç 3.1.3. *Bir v concurrent vektör alanına sahip $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun her total umbilik altmanifoldu (M, g) üzerindeki $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ Ricci solitonu aşikardır [3].*

Önerme 3.1.1. *Eğer bir v concurrent vektör alanına sahip $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir minimal altmanifoldu (M, g) üzerinde $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ bir Ricci soliton ise M sabit skaler eğriliğine sahiptir ve $\tau = \dfrac{n(\lambda - 1)}{2}$ dir [3].*

İspat: Kabul edelimki $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ bir Ricci soliton olsun. (3.1.13) den $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1)\, g(X,Y) - \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right)$$

dir. M minimal olduğundan ortalama eğrilik vektörü sıfırdır, yani $\tilde{g}\left(H, v^\perp\right) = 0$ dır. Böylece son denklemden M nin bir $\{e_1, \cdots, e_n\}$ çatısı için

$$\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = n(\lambda - 1) \tag{3.1.20}$$

elde edilir. M nin skaler eğriliğinin $\tau = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} K\left(e_i, e_j\right)$ olduğu göz önüne alınırsa (3.1.20) ifadesinden $\tau = \dfrac{n(\lambda - 1)}{2}$ olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

M altmanifoldu üzerindeki bir f fonksiyonunun gradienti ∇f ile gösterilsin. (3.1.16) ve (3.1.17) denklemlerinden aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1.1. *Bir v concurrent vektör alanına sahip* $(N,\tilde{g})$ *Riemann manifoldunun bir altmanifoldu* (M,g) *olsun. Bu durumda* $\psi = \frac{1}{2}\tilde{g}\left(v^{\perp},v^{\perp}\right)$ *ve* $f = \frac{1}{2}\tilde{g}(v,v)$ *olmak üzere*

$$\nabla\psi = -A_{v^{\perp}}v^{\top}, \tag{3.1.21}$$

$$v^{\top} = \nabla f \tag{3.1.22}$$

dir [3].

İspat: (3.1.16) denkleminden $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X\psi = \tilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_X v^{\perp}, v^{\perp}\right) = \tilde{g}\left(D_X v^{\perp}, v^{\perp}\right) = -g\left(A_{v^{\perp}}v^{\top}, X\right)$$

olur ki bu (3.1.21) un sağlanması demektir. Benzer şekilde

$$Xf = \tilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_X v, v\right) = g\left(X, v^{\top}\right)$$

elde edilir ve bu da (3.1.22) ifadesinin sağlanması anlamına gelir.

Lemma 3.1.1 in (3.1.22) denkleminden aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1.2. *Bir v concurrent vektör alanına sahip* $(N,\tilde{g})$ *Riemann manifoldunun bir altmanifoldu* (M,g) *üzerindeki her* $\left(M,g,v^{\top},\lambda\right)$ *Ricci solitonu* $f = \frac{1}{2}\tilde{g}(v,v)$ *potansiyel fonksiyonu ile bir gradient Ricci solitondur [3].*

Bu önermeye göre M üzerindeki $\left(M,g,v^{\top},\lambda\right)$ gradient Ricci solitonunun bir aşikar Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart $\tilde{g}(v,v)$ nin M üzerinde sabit olmasıdır.

Sonuç 3.1.4. $(N,\tilde{g})$ *Riemann manifoldunun bir altmanifoldu* (M,g) *üzerindeki bir* (M,g,f,λ) *gradient Ricci solitonunun aşikar olması için gerek ve yeter şart N üzerindeki concurrent vektör alanı v nin M de normal vektör alanı olmasıdır [3].*

İspat: Kabul edelim ki (M,g,f,λ) bir aşikar gradient Ricci soliton olsun. Bu durumda $\tilde{g}(v,v)$, M üzerinde sabittir. $X \in \Gamma(TM)$ için $0 = X\tilde{g}(v,v) = 2g(X,v)$ olur. Böylece $v \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ dir.

Tersine v, M ye normal ise $X\tilde{g}(v,v) = 2g(X,v) = 0$ dır. Böylece $\tilde{g}(v,v)$, M üzerinde sabittir. Böylece Sonuç 3.1.4 e göre gradient Ricci soliton aşikardır.

3.2 Concircular Vektör Alanları ve Ricci Solitonlar

Bu kısımda potansiyel vektör alanı concircular vektör alanı olan Ricci solitonları incelenilecektir ve bunlarla ilgili önemli sonuçlar verilecektir. Örnek 3.1.2 deki warped çarpım yapısında warping fonksiyonu $f(s) = s$ yerine I üzerinde herhangi bir $\varphi(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu ve $v = \varphi(s)\dfrac{\partial}{\partial s}$ olarak alınırsa $\nabla_X v = \varphi'(s) X$ elde edilir ki bu da v nin bir concircular vektör alanı olması demektir.

Teorem 3.2.1. *Eğer bir n-boyutlu M Riemann manifoldu her yerde sıfırdan farklı bir concircular vektör alanına sahip ise bu durumda $M = I \times_{\varphi(s)} F$ şeklinde bir lokal warped çarpımdır, burada $\varphi(s) \neq 0$ ve F, $(n-1)$-boyutlu Riemann manifolddur [26].*

İspat: Kabul edelim ki M Riemann manifoldunun her noktasında sıfırdan farklı olan concircular vektör alanı v olsun. e_1, v vektörü doğrultusundaki birim vektör alanı, yani $\varphi = \|v\|$ olmak üzere

$$v = \varphi e_1 \tag{3.2.1}$$

olsun. M üzerinde e_1 in dahil olduğu bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $\nabla_{e_i} v = \mu e_i$ olduğundan doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} R(e_i, v)v &= \nabla_{e_i}\nabla_v v - \nabla_v \nabla_{e_i} v - \nabla_{[e_i,v]} v \\ &= (e_i(\mu))v - (v(\mu))e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.2) den ve $g(R(e_i, v)v, v) = 0$ olduğundan

$$e_2(\mu) = \cdots = e_n(\mu) = 0$$

elde edilir. Böylece $\nabla \mu$ gradient vektörü v vektörüne paraleldir.

$\nabla_X v = \mu X$ ve (3.2.1) den

$$\mu e_1 = \nabla_{e_1}(\varphi e_1) = e_1(\varphi) e_1 + \varphi \nabla_{e_1} e_1$$

bulunur ve buradan

$$e_1(\varphi) = \mu,\ \nabla_{e_1} e_1 = 0 \tag{3.2.3}$$

elde edilir. (3.2.3) nin ikinci denkleminden e_1 in integral eğrileri M de geodeziktir, yani $\mathscr{D}_1 = Sp\{e_1\}$ distribüsyonu bir total geodezik distribüsyondur. $\mathscr{D}_2 = Sp\{e_2, \ldots, e_n\}$ olsun.

(3.2.1) ve $\nabla_{e_i} v = \mu e_i$, $i = 2, \ldots, n$, den

$$\mu e_i = \nabla_{e_i}(\varphi e_1) = e_i(\varphi) e_1 + \varphi \nabla_{e_i} e_1,$$

bulunur ve buradan

$$e_2\varphi = \cdots = e_n\varphi = 0, \tag{3.2.4}$$

$$\varphi\nabla_{e_i}e_1 = \mu e_i \tag{3.2.5}$$

olur. $\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j(X)\, e_j$, $i = 1,2,\ldots,m$, ve (3.2.5) den

$$\omega_i^1(e_j) = \frac{\mu}{\varphi}\delta_{ij},\ 2 \le i,j \le n \tag{3.2.6}$$

olur. (3.2.6) den $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldları total umbilik olan M de integrallenebilir distribüsyon olduğu sonucuna varılır. Ayrıca $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldunun ortalama eğriliği $\frac{\mu}{\varphi}$ olarak verilir. $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldu hiperyüzey olduğundan (3.2.3) ve (3.2.4) den $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı M de normal demete paraleldir, yani hiperyüzeyin birim normaline paraleldir. Böylece $TM = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$ de $\mathscr{D}_1$ total geodezik ve $\mathscr{D}_2$ total umbilik integrallenebilir distribüsyonlar olduğundan $M = I \times_{f(s)} F$ şeklinde bir lokal warped çapım yapısına sahip olur. Burada $f(s)$, I üzerinde tanımlı bir fonksiyon, $\frac{\partial}{\partial s} = e_1$ ve F bir Riemann $(n-1)$-manifolddur. M nin kesit eğriliği, e_1 vektörüne ortogonal olan her X birim vektör alanı için

$$K(e_1,X) = -\frac{f''(s)}{f(s)} \tag{3.2.7}$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan (3.2.1) ve (3.2.2) den e_1 vektörüne ortogonal olan her X birim vektör alanı için

$$\varphi K(e_1,X) = -v\mu = -\mu'(s) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. Böylece (3.2.8) denklemi (3.2.3) ile (3.2.7) birlikte göz önüne alınırsa

$$\frac{f''(s)}{f(s)} = \frac{\mu'(s)}{\varphi} = \frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$$

elde edilir. O halde $f(s) = \varphi(s)$ seçilirse $M = I \times_{\varphi(s)} F$ lokal olarak bir warped çarpım olur. Doğrudan hesaplamalarla her $X \in \Gamma\left(T\left(I \times_{f(s)} F\right)\right)$ için $\nabla_X\left(\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}\right) = \varphi'(s)X$ olur.

Lemma 3.2.1. *f, M Riemann manifoldu üzerinde bir fonksiyon olsun. f nin ∇f gradienti bir concircular vektör alanı olması için gerek ve yeter şart f nin Hessianının her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$H_f(X,Y) = \mu g(X,Y) \tag{3.2.9}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada μ, M üzerinde bir fonksiyondur [26].

İspat: f, M Riemann manifoldunun bir fonksiyonu olsun. Kabul edelim ki f nin Hessianı $(3.2.9)$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(\mu X,Y) &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= Xg(Y,\nabla f) - g(\nabla_X Y,\nabla f) \\ &= g(Y,\nabla_X(\nabla f)) \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X(\nabla f) = \mu X$ elde edilir ki bu da ∇f nin concircular vektör alanı olduğunu gösterir. Tersine olan durum benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 3.2.1. *Öklidyen $n-$uzay üzerinde sıfırdan farklı bir vektör alanı v olsun. Bu durumda v nin concircular vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $v = b\mathbf{x}$ olmasıdır. Burada b sıfırdan farklı bir sabit ve $\mathbf{x}$ bir concurrent vektör alanıdır [26].*

İspat: Eğer v bir Riemann manifoldu M üzerinde bir concircular vektör alanı ise $\nabla_X v = \mu X$ olmak üzere v ye dik olan her X vektör alanı için

$$\begin{aligned} R(X,v)v &= \nabla_X\nabla_v v - \nabla_v\nabla_X v - \nabla_{[X,v]}v \\ &= X(\mu)v - v(\mu)X \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

dir. $(3.2.11)$ den $\nabla\mu$ nin v ye paralel olduğu görülür. Eğer M Öklidyen n-uzay ise $R=0$ olur. Böylece $(3.2.11)$ den $X\mu = v\mu = 0$, $\mu = b \neq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathbf{x} = \dfrac{v}{b}$ concurrent vektör alanıdır. Tersine olan ispat aşikardır.

Teorem 3.2.2. *$n \geq 3$ olmak üzere (M,g) Riemann n-manifoldu üzerinde bir (M,g,v,λ) Ricci solitonunun potansiyel vektör alanı v nin concircular olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlamasıdır;*

(i) $\nabla_X v = \mu X$ ifadesindeki μ fonksiyonu sıfırdan farklı bir b sabitidir,

(ii) $\lambda = b$,

(iii) I yay-parametresi s olan bir açık aralık, (F,g_F) de $Ric_F = (n-2)b^2 g_F$ olan bir $(n-1)$-boyutlu Einstein manifoldu olmak üzere M Riemann manifoldu $I \times_{bs+c} F$ warped çarpım manifoldunun bir açık parçasıdır. Burada b,c birer reel sabitlerdir [26].

İspat: Kabul edelim ki (M,g,v,λ), v potansiyel vektör alanı concircular olan bir Ricci soliton olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X v = \mu X$ olur ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için $(3.1.1)$ ve $\nabla_X v =$

μX den

$$(\pounds_v g)(X,Y) = g(\nabla_X v, Y) + g(\nabla_Y v, X) = 2\mu g(X,Y) \tag{3.2.12}$$

$$Ric(X,Y) = (\lambda - \mu) g(X,Y) \tag{3.2.13}$$

olur ki bu da M nin bir Einstein manifold olması demektir. $n \geq 3$ ve M Einstein olduğundan M sabit skaler eğriliklidir. Böylece $\mu - \lambda$ sabittir. O halde μ fonksiyonu da sıfırdan farklı sabit olur ve bu sabite b denilirse (i) ispatlanmış olur. Buradan ise $\mu = b$ olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X v = bX \tag{3.2.14}$$

olarak elde edilir. $(3.2.11)$ den X, v ortogonal olmak üzere $R(X,v)v = 0$ olur ve buradan $Ric(v,v) = 0$ dir, yani M Ricci-flattır. Sonuç olarak $(3.2.13)$ den $\lambda = b$ olarak elde edilir, bu da (ii) nin ispatıdır.

Teorem 3.2.1 den $\varphi(s)$ bir fonksiyon ve F Riemann $(n-1)$-manifold olmak üzere $M = I \times_{\varphi(s)} F$ bir lokal warped çarpım manifoldudur. Ayrıca (i) durumundan ve Teorem 3.2.1 den $\varphi'(s) = \mu = b$ dir ve buradan c bir sabit olmak üzere $\varphi = bs + c$ olur. O halde M, $I \times_{bs+c} F$ warped çarpımının bir açık parçasıdır. M Ricci-flat olduğundan $\lambda = \mu = b$ olur. Önerme 2.1.6 den $I \times_{bs+c} F$ nin ikinci çarpanı F, $Ric_F = (n-2)b^2 g_F$ eşitliğini sağlayan bir Einstein manifolddur. Tersi ise doğrudan hesaplamalarla kolayca ispatlanır.

Teorem 3.2.3. $(N,\tilde{g})$ *bir concircular vektör alanı* $v = v^\top + v^\perp$ *ye sahip m-boyutlu Riemann manifoldu ve* (M,g) *de N nin n-boyutlu altmanifoldu olsun.* $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ *nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart M nin Ricci tensörünün her* $X,Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$Ric(X,Y) = (\lambda - \mu) g(X,Y) - \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) \tag{3.2.15}$$

şeklinde olmasıdır [26].

İspat: $\phi : M \longrightarrow N$ izometrik immersiyon olsun. v, N üzerinde concircular vektör alanı olduğundan

$$v = v^\top + v^\perp \tag{3.2.16}$$

olarak yazılır. Burada $v^\top$ve $v^\perp$, v nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. $\nabla_X v = \mu X$ olduğundan $(3.2.16)$, Gauss ve Weingarten formülünden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\mu X = \nabla_X v^\top + h\left(X, v^\top\right) - A_{v^\perp} X + D_X v^\perp \tag{3.2.17}$$

olur. (3.2.17) denklemi teğet ve normal bileşenlerine ayrıştırılırsa

$$\nabla_X v^\top = A_{v^\perp} X + \mu X \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Lie türevin tanımından ve (3.2.18) den her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\pounds_{v^\top} g)(X,Y) = 2\mu g(X,Y) + 2\tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) \tag{3.2.19}$$

bulunur. Sonuç olarak Ricci soliton denklemi ve (3.2.19) den $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$Ric(X,Y) + \mu g(X,Y) + \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) = \lambda g(X,Y) \tag{3.2.20}$$

sonucuna varılır, bu da (3.2.15) ifadesinden başka birşey değildir.

η, M Riemann altmanifoldunun normal vektör alanı olmak üzere eğer M, η-umbilik ise yani şekil operatörü $A_\eta = \varphi I$ denklemini sağlıyorsa doğrudan aşağıdaki sonuca sahip olunur. Burada φ, M üzerinde bir fonksiyon ve I bir birim dönüşümdür.

Sonuç 3.2.1. *N nin bir M altmanifoldu üzerinde bir $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ $(n \geq 3)$ Ricci solitonunun aşikar olması için gerek ve yeter şart M nin $v^\perp$-umbilik olmasıdır [26].*

Sonuç 3.2.2. *N nin bir M total umbilikal altmanifoldu üzerinde her $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ Ricci solitonu bir aşikar Ricci solitondur [26].*

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, M in ortonormal çatısı olmak üzere (M,g) nin τ skaler eğriliği

$$\tau = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K\left(e_i, e_j\right) \tag{3.2.21}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Sonuç 3.2.3. *N de bir M minimal altmanifoldu üzerinde eğer $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$ bir Ricci soliton ise M nin τ skaler eğriliği $\tau = n(\lambda - \mu)/2$ dir [26].*

İspat: Varsayalım ki $\left(M, g, v^\top, \lambda\right)$, N de M altmanifoldunun bir Ricci solitonu olsun. Teorem 3.2.3 den her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = (\lambda - \mu) g(X,Y) - \tilde{g}\left(h(X,Y), v^\perp\right) \tag{3.2.22}$$

dir. Eğer M minimal ise bu durumda $\tilde{g}\left(H, v^\perp\right) = 0$ olur. Böylece (3.2.22) den $\sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) = n(\lambda - \mu)$ elde edilir. O halde M nin skaler eğriliği $\tau = n(\lambda - \mu)/2$ dir ve sabittir.

Sonuç 3.2.4. *v bir concircular vektör alanı ve c bir sabit olmak üzere $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ bir sabit eğrilikli Riemann manifoldu olsun. Eğer $\left(M,g,v^{\top},\lambda\right)$, $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ de bir M hiperyüzeyi üzerinde Ricci soliton ise M en fazla iki farklı asli eğriliğe sahiptir ve bunlar*

$$\kappa_1,\kappa_2=\frac{n\mathbf{H}+\rho\pm\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2-4(\lambda-\mu-(n-1)c)}}{2} \tag{3.2.23}$$

şeklinde verilir. Burada $\mathbf{H}$ ortalama eğriliktir, yani $H=\mathbf{H}N$ dir ve N birim normal vektör alanı olmak üzere $\rho=g(N,v)$ dir [26].

İspat: Hipoteze göre $\left(M,g,v^{\top},\lambda\right)$ nın, $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ de M hiperyüzeyi üzerinde bir Ricci soliton olduğunu kabul edelim. $e_1,\ldots,e_n$ vektörleri A_N şekil operatörün eigen vektörleri olacak şekilde $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ kümesi M üzerinde bir ortonormal çatı olsun. O zaman

$$A_Ne_i=\kappa_ie_i,\;\; i=1,2,\ldots,n \tag{3.2.24}$$

elde edilir. $\tilde{g}$, $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ metriği olmak üzere Gauss denkleminden

$$\begin{aligned}Ric(X,Y)=&(n-1)cg(X,Y)+n\tilde{g}(h(X,Y),H)\\&-\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}(h(X,e_i),h(Y,e_i))\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

olur. $(3.2.24)$, $(3.2.25)$ ve Teorem 3.2.3 den $\left(M,g,v^{\top},\lambda\right)$ bir Ricci soliton olması gerek ve yeter şart

$$\left\{(n-1)c+\left(n\mathbf{H}-\kappa_j\right)\kappa_i\right\}\delta_{ij}=(\lambda-\mu)\delta_{ij}-\rho\kappa_i\delta_{ij} \tag{3.2.26}$$

elde edilir. (3.2.26) denklemi aşağıdaki ikinci dereceden olan

$$\kappa_i^2-(n\mathbf{H}+\rho)\kappa_i+\lambda-\mu-(n-1)c=0,\; i=1,2,\ldots,n.$$

denkleme denktir ve bu denklemin kökleri ise (3.2.23) ifadesini verir.

3.3 Öklidyen Hiperyüzeyler Üzerinde Ricci Solitonlar

Bu alt bölümde Öklid uzayı $\mathbb{E}^{n+1}$ in bir M hiperyüzeyi üzerindeki $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ Ricci solitonun özelliklerini incelenilecektir ve bunlarla ilgili karakterizasyon teoremleri verilecektir. Öklidyen uzayda bir hiperyüzeyin $\mathbf{x}$ yer vektörü bir concurrent vektör alanıdır ve $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\top}+\mathbf{x}^{\perp}$ olarak yazılır. Böylece potansiyel vektör alanı $\mathbf{x}^{\top}$ olan Ricci solitonları incelenilecektir.

Önerme 3.3.1. *Eğer* $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$, $\mathbb{E}^{n+1}$ *in bir M hiperyüzeyi üzerinde Ricci soliton ise M en fazla iki farklı asli eğriliğe sahiptir ve bu asli eğrilikler*

$$\kappa_1,\kappa_2=\frac{n\mathbf{H}+\rho\pm\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda}}{2} \tag{3.3.1}$$

şeklinde verilir. Burada **H** *ortalama eğrilik ve* ρ *da M nin destek fonksiyonudur. Yani N birim normal vektör alanı ve H da M nin ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere* $\rho=\tilde{g}(\mathbf{x},N)$ *ve* $H=\mathbf{H}N$ *dir. Burada* $\tilde{g}$ *Öklid metriğidir [6].*

İspat: M nin yer vektörünün teğet vektörü $\mathbf{x}^{\top}$ olmak üzere $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ bir Ricci soliton olsun. $e_1,\cdots,e_n$ ler A_N şekil operatörünün eigen vektörleri olmak üzere $\{e_1,\cdots,e_n\}$, M üzerinde ortonormal çatı olsun. Bu durumda

$$A_Ne_i=\kappa_ie_i,\ \ i=1,\cdots,n \tag{3.3.2}$$

olacak şekilde κ_i asli eğrilikleri vardır. Gauss denklemi (2.1.35) den $X,Y\in\Gamma(TM)$ için M nin Ricci eğriliği

$$Ric(X,Y)=n\tilde{g}(h(X,Y),H)-\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}(h(X,e_i),h(Y,e_i)), \tag{3.3.3}$$

olarak hesaplanır. (3.3.2), (3.3.3) ve Teorem 3.1.2 den kolayca hesaplanır ki $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ nın bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$\left(n\mathbf{H}-\kappa_j\right)\kappa_i\delta_{ij}=(\lambda-1)\,\delta_{ij}-\rho\,\kappa_i\delta_{ij} \tag{3.3.4}$$

olmasıdır. $i=j$ için (3.3.4) denklemi düzenlenirse κ_i ye göre

$$\kappa_i^2-(n\mathbf{H}+\rho)\,\kappa_i+\lambda-1=0$$

şeklinde bir ikinci dereceden denklem elde edilir. Bu denklemin iki farklı çözümü var ve bu çözümler (3.3.1) deki κ_1 ve κ_2 den başka bir şey değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1. $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$, $\mathbb{E}^{n+1}$ *in M hiperyüzeyi üzerinde* $\lambda=1$ *olan bir daralan (shrinking) Ricci soliton olsun. Bu durumda M,* $\mathbb{E}^{n+1}$ *in aşağıdaki hiperyüzeylerin açık parçasından birisidir;*

(1) *Orjinden geçen bir hiperdüzlemdir,*

(2) *Orjin merkezli bir hiperküredir,*

(3) $\mathbb{E}^{n+1}$ *in orjininden geçen bir doğru tarafından üretilen bir flat hiperyüzeydir,*

(4) $S^k\left(\sqrt{k-1}\right)\times\mathbb{E}^{n-k}$, $2\leq k\leq n-1$, *şekilde bir küresel hipersilindirdir [6].*

İspat: Kabul edelimki $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$, M hiperyüzeyi üzerinde bir daralan (shinking) Ricci soliton olsun. Bu durumda Önerme 3.3.1 den M en az iki farkli asli eğriliğe sahiptir ve bunlar

$$\kappa_1=\frac{n\mathbf{H}+\rho+\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda}}{2},\ \kappa_2=\frac{n\mathbf{H}+\rho-\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda}}{2} \tag{3.3.5}$$

dir. Eğer M nin asli eğrilikleri sıfır ise (1) elde edilir. Eğer M sadece bir tek asli eğriliğe sahip ise bu durumda M total umbiliktir ve (2) sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki M iki farklı asli eğriliğe sahip ve $\lambda=1$ olsun. Bu durumda (3.3.5) de $\lambda=1$ alınırsa $\kappa_1=n\mathbf{H}+\rho$ ve $\kappa_2=0$ elde edilir. Bu sıfırdan farklı olan asli eğriliği $\kappa=n\mathbf{H}+\rho$ ile gösterelim. $1\leq k<n$ için asli eğriliklerin $k-$tanesi κ ve $(n-k)-$tanesi de 0 olsun. Bu durumda (2.1.34) den $n\mathbf{H}=k\kappa$ veya $\kappa=\dfrac{n\mathbf{H}}{k}$ eşitliğine sahip olunur. Bu $\kappa=n\mathbf{H}+\rho$ da yerine yazılırsa

$$n(1-k)=k\rho \tag{3.3.6}$$

elde edilir.

Durum (a) : $k=1$. Bu durumda (3.3.6) denkleminden $\rho=\tilde{g}(\mathbf{x},N)=0$ olur. Böylece concurrent vektör alanı $\mathbf{x}$, M nin tanjant vektör alanıdır. $\widetilde{\nabla}_X\mathbf{x}=X$ olduğundan $\mathbf{x}$ in integral eğrileri $\mathbb{E}^{n+1}$ de orijinden geçen doğruların bir parçasıdır. Bu ise teoremdeki (3) ifadesinin ispatıdır.

Durum (b) : $2\leq k\leq n-1$. Genelliği bozmaksızın M nin bir $\{e_1,\cdots,e_n\}$ ortonormal çatısına göre

$$A_N=\begin{bmatrix} kI_k & 0\\ 0 & 0_{n-k}\end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

olduğu kabul edilebilir. Burada I_k, $k\times k$ tipinde birim matris ve 0_{n-k} da $(n-k)\times(n-k)$ tipinde sıfır matrisidir. Şimdi

$$\mathscr{D}_1=Sp\{e_1,\cdots,e_k\},\ \ \mathscr{D}_2=Sp\{e_{k+1},\cdots,e_n\} \tag{3.3.8}$$

diyelim. (3.3.6) ifadesinin $X\in\Gamma(TM)$ vektör alanına göre türevi alınırsa

$$X\mathbf{H}=-\frac{k}{n(1-k)}g(\mathbf{x}^{\mathsf{T}},A_NX)=\frac{k}{n(k-1)}g(\mathbf{x}^{\mathsf{T}},A_NX), \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\nabla\mathbf{H}=\frac{k}{n(k-1)}A_N\mathbf{x}^{\mathsf{T}}, \tag{3.3.10}$$

olur ve bu da $\nabla \mathbf{H} \in \Gamma(\mathscr{D}_1)$ olması demektir. Burada

$$\nabla \mathbf{H} = \zeta e_1 \tag{3.3.11}$$

olarak almamız genelliği bozmaz. Burada ζ, $\nabla \mathbf{H}$ nın normudur. $(3.3.11)$ ifadesinden

$$e_2\mathbf{H} = \cdots = e_n\mathbf{H} = e_2\kappa = \cdots = e_n\kappa = 0, \tag{3.3.12}$$

bulunur. Bu ifadelerden $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D}_1)$ ve $V,W \in \Gamma(\mathscr{D}_2)$ vektör alanları için

$$h(X,Y) = \kappa g(X,Y), \;\; h(X,V) = h(V,W) = 0 \tag{3.3.13}$$

elde edilir. (2.1.39), (3.3.13) ve Codazzi denklemi $(\widetilde{\nabla}_V h)(W,X) = (\widetilde{\nabla}_X h)(V,W)$ ifadesinden $h(\nabla_V W,X) = 0$ olur. Bu durum $\mathscr{D}_1$ deki herhangi bir X vektör alanı için geçerli olduğundan $\nabla_V W \in \Gamma(\mathscr{D}_2)$ elde edilir. Böylece $\mathscr{D}_2$ bir total geodezik integrallenebilir distribüsyondur, yani $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldları M nin total geodezik altmanifoldudur. Ayrıca her $V,W \in \Gamma(\mathscr{D}_2)$ için $h(V,W) = 0$ ve $\mathscr{D}_2$ nin integral altmanifoldu $\mathbb{E}^{n+1}$ in $(n-k)$-boyutlu total geodezik altmanifoldudur.

$1 \leq i \neq j \leq k$ ve $t \in \{k+1,\cdots,n\}$ için, $(2.1.39)$, $(3.3.7)$ ve $(3.3.13)$ den

$$\left(\widetilde{\nabla}_{e_i} h\right)(e_j,e_t) = -h\left(e_j,\nabla_{e_i}e_t\right), \;\; \left(\widetilde{\nabla}_{e_t} h\right)(e_i,e_j) = 0 \tag{3.3.14}$$

elde edilir. Codazzi denkleminde $(\widetilde{\nabla}_{e_i} h)(e_j,e_t) = (\widetilde{\nabla}_{e_t} h)(e_j,e_t)$ olduğundan $\omega_i^t(e_j) = 0$ olur. Buna göre $\mathscr{D}_1$ de M de total geodezik integrallenebilir distribüsyondur. Böylece $\mathscr{D}_1$ in integral manifoldu k-boyutlu M_1 olmak üzere $M = M_1 \times \mathbb{E}^{n-k}$ olarak yazılır. Ayrıca (3.3.8) de $\mathscr{D}_1$ in inşasından M_1 total umbiliktir, yani $M_1 \backsimeq S^k$ küresidir. Böylece (4) ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}^{n+1}$ *nin bir dönel hiperyüzeyi* M,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = {} & (x_1, f(x_1)\sin x_2, f(x_1)\cos x_2 \sin x_3, \ldots, \\ & f(x_1)\cos x_2 \cdots \cos x_{n-1} \sin x_n, f(x_1)\cos x_2 \cdots \cos x_n) \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

ile verilsin. Eğer $\left(M,g,\mathbf{x}^\top,\lambda\right)$ *bir Ricci soliton ise bu durumda* M *bir hiperkürenin açık bir parçasıdır [6].*

İspat: (3.3.15) den M hiperyüzeyinin tanjant demeti TM aşağıdaki vektör alanları tarafından gerilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \big(0, f'(x_1)\sin x_2, f'(x_1)\cos x_2 \sin x_3, \ldots, \\
&\quad f'(x_1)\cos x_2 \cdots \cos x_{n-1}\sin x_n, f'(x_1)\cos x_2 \cdots \cos x_n\big) \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= (0, f(x_1)\cos x_2, -f(x_1)\sin x_2 \sin x_3, \ldots, \\
&\quad -f(x_1)\sin x_2 \cdots \cos x_{n-1}\sin x_n, -f(x_1)\sin x_2 \cdots \cos x_n) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} &= (0,0,\ldots,-f(x_1)\cos x_2 \cdots \sin x_{n-1}\sin x_n, -f(x_1)\cos x_2 \cdots \sin x_{n-1}\cos x_n) \\
\frac{\partial}{\partial x_n} &= (0,0,\ldots,f(x_1)\cos x_2 \cdots \cos x_{n-1}\cos x_n, -f(x_1)\cos x_2 \cdots \sin x_n).
\end{aligned}$$

Bu vektör alanları ortogonal baz olduğundan $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ dır ve buradan

$$\begin{aligned}
g_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= 1 + f'(x_1)^2 \\
g_{22}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= f^2(x_1) \\
g_{33}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) &= f^2(x_1)\cos^2 x_2 \\
&\vdots \\
g_{(n-1)(n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right) &= f^2(x_1)\sum_{j=2}^{n-2}\cos^2 x_j \\
g_{nn}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) &= f^2(x_1)\sum_{j=2}^{n-1}\cos^2 x_j
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da M nin metrik tensörü

$$g = \left(1 + f'(x_1)^2\right)dx_1^2 + f^2(x_1)\left\{dx_2^2 + \cos^2 x_2 dx_3^2 + \cdots \sum_{j=2}^{n-1}\cos^2 x_j dx_n^2\right\} \tag{3.3.16}$$

olur. Doğrudan hesaplamalarla M nin Ricci tensörü ve ikinci temel formu

$$Ric(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) = \frac{-2f''}{f(1+f'^2)}, \quad Ric(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = \frac{1 + f'^2 - ff''}{(1+f'^2)^2} \tag{3.3.17}$$

$$\tilde{g}\left(h(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}), \mathbf{x}^{\perp}\right) = \frac{(f - x_1 f')f''}{1+f'^2}, \quad \tilde{g}\left(h(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}), \mathbf{x}^{\perp}\right) = \frac{(x_1 f' - f)f}{1+f'^2} \tag{3.3.18}$$

eşitliklerini sağlar. Burada $\mathbf{x}^{\perp}$, $\mathbb{E}^{n+1}$ de M nin $\mathbf{x}$ yer vektör alanının normal bileşenidir. $\left(M, g, \mathbf{x}^{\top}, \lambda\right)$ bir Ricci soliton ise bu durumda (3.1.13) den

$$\frac{Ric(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) + \tilde{g}\left(h(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}), \mathbf{x}^{\perp}\right)}{g_{11}} = \frac{Ric(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) + \tilde{g}\left(h(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}), \mathbf{x}^{\perp}\right)}{g_{22}} \tag{3.3.19}$$

eşitliği sağlanır. (3.3.16) – (3.3.19) denklemleri kullanılarak, (3.3.19) eşitliği sağlanması için gerek ve yeter şart

$$(i)\ 1-f^2+x_1ff'=0 \ \text{ veya } \ (ii)\ 1+f'^2+ff''=0,$$

eşitliklerinin sağlanması gerektiği elde edilir. Bu farklı iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Durum $(i): 1-f^2+x_1ff'=0$ olduğunda $b\neq 0$ sabiti için $f(x_1)=\pm\sqrt{1+b^2x_1^2}$ olarak elde edilir. Böylece

$$\frac{Ric(\partial_{x_1},\partial_{x_1})-\tilde{g}\left(h(\partial_{x_2},\partial_{x_2}),\mathbf{x}^{\perp}\right)}{g_{11}}=\frac{-b^2}{\left(1+b^2x_1^2(1+b^2)\right)^2} \tag{3.3.20}$$

sabit olmadığı görülür. Bu durumda $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ bir Ricci soliton olamaz.

Durum $(ii): 1+f'^2+ff''=0$ olduğunda b ve c sabitleri için $f(x_1)=\pm\sqrt{b^2-(x_1-c)^2}$ olarak elde edilir. Böylece

$$\frac{Ric(\partial_{x_i},\partial_{x_i})-\tilde{g}\left(h(\partial_{x_i},\partial_{x_i}),\mathbf{x}^{\perp}\right)}{g_{11}}=\frac{2-b^2+c^2-cx_1}{b^2},\quad i=1,\ldots,n \tag{3.3.21}$$

sabit olması için gerek ve yeter şart $c=0$ olmasıdır. $c=0$ olduğunda M hiperkürenin bir açık parçası olur ve bu durumda M bir aşikar Ricci solitondur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Öklid uzayında sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeyler üzerindeki Ricci solitonları karakterize edecek olan aşağıdaki teoremi verelim.

Ricci soliton örneği olan Örnek 3.1.4 deki hiperyüzey (hipersilindir) kolayca görülebilir ki bir sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeydir.

Teorem 3.3.3. *M, $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklidyen uzayında bir hiperyüzey ve $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ bir Ricci soliton olsun. Eğer M sabit ortalama eğrilikli ise bu durumda M aşağıdaki hiperyüzeylerden birisidir;*

(a) Orjinden geçen bir hiperdüzlemdir,

(b) Orjin merkezli bir hiperküredir,

(c) $r>0$ olan $S^1(r)\times\mathbb{E}^{n-1}$ bir dairesel hipersilindirin bir açık parçasıdır,

(d) $2\leq k\leq n-1$ olmak üzere $S^k\left(\sqrt{k-1}\right)\times\mathbb{E}^{n-k}$ bir küresel hipersilindirin bir açık parçasıdır [6].

İspat: Kabul edelim ki $\mathbb{E}^{n+1}$ in bir M hiperyüzeyi üzerinde bir Ricci soliton $\left(M,g,\mathbf{x}^{\top},\lambda\right)$ olsun. Bu durumda Önerme 3.3.1 den M nin en fazla iki farklı asli eğriliği vardır. Eğer M nin sadece bir tane asli eğriliği olsaydı, bu durumda M total umbilik olurdu. O halde (a) veya (b) durumlarından biri elde eldilir.

Eğer M nin iki farklı asli eğriliği var ise Önerme 3.3.1 den bu iki farklı asli eğrilik sırasıyla

$$\kappa_1 = \frac{n\mathbf{H}+\rho+\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda}}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{n\mathbf{H}+\rho-\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda}}{2} \tag{3.3.22}$$

dir ve bu asli eğriliklerin $k-$tanesi κ_1 ve $(n-k)-$taneside κ_2 olsun. M nin ortalama eğriliğinin $\mathbf{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i$ olduğu göz önüne alınıp (3.3.22) kullanılırsa

$$(2-n)\,n\mathbf{H} = n\rho + (2k-n)\sqrt{(n\mathbf{H}+\rho)^2+4-4\lambda} \tag{3.3.23}$$

bulunur. Kabul edelimki M nin $\mathbf{H}$ ortalama eğriliği sabit olsun. Bu durumda (3.3.23) den destek fonksiyonu $\rho = \tilde{g}(\mathbf{x}, N)$ sabit olmak zorundadır. Böylece

$$0 = X\rho = -g(\mathbf{x}, A_N X) = -\tilde{g}\left(h\left(X, \mathbf{x}^\top\right), N\right) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{x}^\top \neq 0$ ise (3.3.24) den κ_1, κ_2 den biri sıfırdır ve buradan $\lambda = 1$ elde edilir. Bu durumda, Teorem 3.3.1 den (c) veya (d) elde edilir. Eğer $\mathbf{x}^\top = 0$ ise $\mathbf{x}$, M hiperyüzeyinin normalidir. O halde $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ sabit olmalıdır. Böylece durum (b) elde edilir.

3.4 Öklidyen Hiperyüzeyler Üzerinde Gradient Ricci Solitonlar

(M, g) Riemann manifoldu ve v, M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı olmak üzere bir (M, g, v, λ) Ricci solitonunun

$$\frac{1}{2}\pounds_v g + Ric = \lambda g, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.4.1}$$

denklemini sağlayan bir (M, g) Riemann manifoldu olduğu bilinir. Eğer v potansiyel vektör alanı M Ricci solitonu üzerinde f diferensiyellenebilir fonksiyonunun gradienti ise M Ricci solitonuna gradient Ricci soliton denir ve f fonksiyonuna da potansiyel fonksiyon denir [9]. $v = \nabla f$ ise Hessian formunun simetriliğinden

$$\begin{aligned}(\pounds_v g)(X,Y) = \left(\pounds_{\nabla f} g\right)(X,Y) &= g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(X, \nabla_Y \nabla f) \\ &= H_f(X,Y) + H_f(Y,X) = 2H_f(X,Y)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (3.4.1) eşitliği

$$Ric + H_f = \lambda g, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.4.2}$$

eşitliğine dönüşür.

Bu kısımda birim normal vektör alanı N olan $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ immersiyonu ile tanımlı n-boyutlu (M,g) hiperyüzeyi üzerideki gradient Ricci solitonlar incelenilecektir. M nin şekil operatörü A olmak üzere $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX,Y)N, \ \ \widetilde{\nabla}_X N = -AX \tag{3.4.3}$$

dir. Burada $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\mathbb{R}^{n+1}$ ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarıdır. M hiperyüzeyinin Ricci tensörü Ric ve skaler eğriliği τ

$$\begin{gathered} Ric(X,Y) = n\mathbf{H}g(AX,Y) - g(AX,AY) \\ \tau = n^2\mathbf{H}^2 - \|A\|^2 \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

dir. Burada $n\mathbf{H} = izA$ olan ortalama eğrilik fonksiyonudur. Hiperyüzey için Codazzi denklemi ise

$$(\nabla A)(X,Y) = (\nabla A)(Y,X) \tag{3.4.5}$$

dir ve $(\nabla A)(X,Y) = \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y)$ dir.

$\mathbb{R}^{n+1}$ deki ψ immersiyonu için M nin yer vektör alanını ψ ile gösterilirse $\psi = t + \rho N$ olarak ifade edilebilir. Burada $t \in \Gamma(TM)$ teğet bileşeni ve $\rho = g(\psi,N)$ olup M nin destek fonsiyonudur. M nin yer vektörünün concurrent vektör alanı olduğu göz önüne alınırsa $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X t = X + \rho AX \text{ ve } \nabla\rho = -At \tag{3.4.6}$$

elde edilir. Burada $\nabla\rho$ destek fonksiyonun gradientidir.

Teorem 3.4.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ *Öklidyen uzayında* $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi = t + \rho N$ *immersiyonu ile verilen* M *hiperyüzeyi üzerinde* (M,g,t,λ) *nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart*

$$A^2 - (\rho + n\mathbf{H})A + (\lambda - 1)I = 0 \tag{3.4.7}$$

olacak şekilde bir λ *sabitinin var olmasıdır. Burada* $\mathbf{H}$ *hiperyüzeyin ortalama eğriliği ve A şekil operatörüdür. Ayrıca bu Ricci soliton bir gradient Ricci solitondur [9].*

İspat: M hiperyüzeyinin immersiyonu $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. (3.4.6) kullanılarak $(\pounds_t g)$ Lie türevini hesaplarsak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\pounds_t g)(X,Y) &= g(\nabla_X t, Y) + g(X, \nabla_Y t) \\ &= g(X + \rho AX, Y) + g(X, Y + \rho AY) \\ &= 2g(X,Y) + \rho g(AX,Y) + \rho g(X,AY) \\ &= 2g(X,Y) + 2\rho g(AX,Y)\end{aligned}$$

olur. Buradan da (3.4.4) eşitliğiyle birlikte

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) + \frac{1}{2}(\pounds_t g)(X,Y) &= n\mathbf{H}g(A(X),Y) - g(A(X),A(Y)) \\ &\quad + g(X,Y) + \rho g(A(X),Y) \\ &= g(X,Y) + g((n\mathbf{H} + \rho)A(X),Y) - g(A(X),A(Y)) \\ &= g(X,Y) + g((n\mathbf{H} + \rho)A(X),Y) - g\left(A^2(X),Y\right) \\ &= g(X,Y) + g\left(\left((\rho + n\mathbf{H})A - A^2\right)(X),Y\right) \qquad (3.4.8)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifade (3.4.1) deki Ricci soliton denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}g(X,Y) + g\left(\left((\rho + n\mathbf{H})A - A^2\right)(X),Y\right) &= \lambda g(X,Y) \\ (\lambda - 1)g(X,Y) + g\left(\left(A^2 - (\rho + n\mathbf{H})A\right)(X),Y\right) &= 0 \\ g\left(\left(A^2 - (\rho + n\mathbf{H})A + (\lambda - 1)I\right)(X),Y\right) &= 0\end{aligned}$$

ve g metriğinin non-dejenereliğinden

$$A^2 - (\rho + n\mathbf{H})A + (\lambda - 1)I = 0$$

elde edilir.

Şimdi tersine öyle bir λ sabiti var ki A şekil operatörü (3.4.7) ifadesini sağlansın. (3.4.8) eşitliğinde $A^2 - (\rho + n\mathbf{H})A = (1 - \lambda)I$ yazılırsa bu durumda

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) + \frac{1}{2}(\pounds_t g)(X,Y) &= g(X,Y) + g\left(\left((\rho + n\mathbf{H})A - A^2\right)(X),Y\right) \\ &= g(X,Y) + g(((\lambda - 1)I)(X),Y) \\ &= g(X,Y) + g((\lambda - 1)(X),Y) \\ &= g(X,Y) + \lambda g(X,Y) - g(X,Y) \\ &= \lambda g(X,Y) \qquad (3.4.9)\end{aligned}$$

olur ki bu da M hiper yüzeyinin potansiyel vektör alanı t olan Ricci soliton olması demektir.

Bu Ricci soliton bir gradient Ricci soliton olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $f = \frac{1}{2}\|\psi\|^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X(f) = \frac{1}{2}X\left(\|\psi\|^2\right) = \frac{1}{2}X(g(\psi,\psi)) = g(\nabla_X \psi, t + \rho N)$$
$$X(f) = g(X, \nabla f) = g(X,t)$$

elde edilir ve bu da $t = \nabla f$ olduğunu gösterir. Yani potansiyel vektör alanı M üzerinde f diferensiyellenebilir fonksiyonun gradientidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2. *Destek fonksiyonu ρ ve şekil operatörü A olan $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklidyen uzayının bir M yönlendirilebilir hiperyüzeyi (M,g,ρ,λ) nın bir gradient Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart*

$$(\nabla A)(X,t) + (1 - n\mathbf{H})A(X) + (1+\rho)A^2(X) = -\lambda X$$

eşitliği sağlayacak şekilde bir λ sabitinin var olmasıdır [9].

İspat: $(\Rightarrow)$: M hiperyüzeyini ifade eden immersiyon $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. O zaman (3.4.6) kullanılarak ρ destek fonksiyonun Hessian formu her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} H_\rho(X,Y) &= g(\nabla_X \nabla \rho, Y) = g(\nabla_X(-At), Y) = -g(\nabla_X(At), Y) \\ &= -g((\nabla A)(X,t) + A(\nabla_X t), Y) \\ &= -g((\nabla A)(X,t) + A(X + \rho A(X)), Y) \\ &= -g\left((\nabla A)(X,t) + A(X) + \rho A^2(X), Y\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da (3.4.4) eşitliğiyle birlikte

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) + H_\rho(X,Y) &= n\mathbf{H}g(A(X),Y) - g(A(X),A(Y)) \\ &\quad - g\left((\nabla A)(X,t) + A(X) + \rho A^2(X), Y\right) \\ &= -g((\nabla A)(X,t),Y) + n\mathbf{H}g(A(X),Y) \\ &\quad - g(A(X),Y) - g\left(A^2(X),Y\right) - \rho g\left(A^2(X),Y\right) \\ &= -g((\nabla A)(X,t),Y) \\ &\quad - g\left((1-n\mathbf{H})A(X) + (1+\rho)A^2(X), Y\right) \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

olur. Bu ifade (3.4.2) deki gradient Ricci soliton denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&-g\left(\left(\nabla A\right)(X,t),Y\right)-g\left((1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X),Y\right)=\lambda g(X,Y)\\
&-g\left(\left(\nabla A\right)(X,t),Y\right)-g\left((1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X),Y\right)-\lambda g(X,Y)=0\\
&-g\left(\left(\nabla A\right)(X,t)+(1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X)+\lambda X,Y\right)=0\\
&g\left(\left(\nabla A\right)(X,t)+(1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X)+\lambda X,Y\right)=0
\end{aligned}
$$

ve g metriğinin non-dejeneriliğinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla A)(X,t)+(1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X)+\lambda X=0\\
(\nabla A)(X,t)+(1-n\mathbf{H})A(X)+(1+\rho)A^{2}(X)=-\lambda X
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer hipotezdeki şartı sağlayan bir λ sabiti var ise bu da $Ric(X,Y)+H_{\rho}(X,Y)=\lambda g(X,Y)$ gradient Ricci soliton denkleminin sağlandığını gösterir. Yani M hiperyüzeyi potansiyel fonksiyonu ρ olan bir gradient Ricci solitondur. Buna karşılık olarak eğer M hiperyüzeyi (M,g,ρ,λ) gradienti Ricci soliton ise bu durumda (3.4.10) kullanılarak tersine işlemlerle ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.3. *S^{n+1}, $(n+2)$-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^{n+2}$ de orijin merkezli birim hiperküre, M, $\psi : M \longrightarrow S^{n+1}$ immersiyonu ile verilmiş bir hiperyüzey ve Z de $\mathbb{R}^{n+2}$ Öklidyen uzayı üzerinde bir sabit vektör alanı olsun. (M,g,u,λ) nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart*

$$A^{2}-(n\mathbf{H}+f)A+(\rho+1+\lambda-n)I=0$$

denkleminin sağlamasıdır. Ayrıca bu Ricci soliton potansiyel fonksiyonu σ olan bir gradient Ricci solitondur [9].

İspat: M, S^{n+1} ve Öklidyen uzayı üzerinde Riemann konneksiyonlar sırasıyla ∇, $\widetilde{\nabla}$, D ve Z sabit vektör alanının S^{n+1} birim küresinin teğet bileşeni ξ olmak üzere

$$Z|_{S^{n+1}}=\xi+\sigma\widetilde{N} \tag{3.4.11}$$

olarak ve M boyunca ξ ise

$$\xi|_{M}=u+fN$$

olarak yazılır. Burada $\widetilde{N}$ ve N sırasıyla S^{n+1} ve M nin birim normal vektör alanları u ise ξ nin M deki teğet bileşenidir. Z sabit vektör alanı olduğundan $X\in\Gamma\left(TS^{n+1}\right)$ için (3.4.11) denkleminin kovaryant türevi alınırsa $D_{X}Z=0=D_{X}(\xi+\sigma\widetilde{N})$ olur. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{X}\xi-g(X,\xi)\widetilde{N}+X(\sigma)\widetilde{N}+\sigma X=0$$

bulunur. Bu son denklem $\mathbb{R}^{n+2}$ nin S^{n+1} hiperyüzeyine göre teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa $X \in \Gamma\left(S^{n+1}\right)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\sigma X \text{ ve } X(\sigma) = g(X, \xi)$$

olur. Böylece $X(\sigma) = g(\widetilde{\nabla}\sigma, X)$ olduğundan $\widetilde{\nabla}\sigma = \xi$ elde edilir, burada $\widetilde{\nabla}\sigma$, S^{n+1} üzerinde σ nın gradientidir. Şimdi $\widetilde{\nabla}_X \xi = -\sigma X$ ifadesinde $\xi = u + fN$ yazılır ve hesaplanırsa $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \widetilde{\nabla}_X u + X(f) N - fA(X),$$

veya

$$-\sigma X = \nabla_X u + g(Au, X) N + X(f) N - fA(X)$$

dir, burada A, M hiperyüzeyinin şekil operatörüdür. Bu denklem M hiperyüzeyi üzerinde teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X u = -\sigma X + fA(X), \ \nabla f = -Au$$

elde edilir. Şimdi M hiperyüzeyi üzerinde $\pounds_u g$ yi hesaplayalım. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\pounds_u g)(X,Y) = -2\sigma g(X,Y) + 2fg(A(X),Y), \tag{3.4.12}$$

olarak bulunur. S^{n+1} de M hiperyüzeyinin Gauss denklemi için kullanılırsa M nin Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = (n-1) g(X,Y) + n\mathbf{H} g(AX,Y) - g(AX,AY) \tag{3.4.13}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.4.12) ve (3.4.13) den

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) + \frac{1}{2}(\pounds_u g)(X,Y) = {} & (n-1-\sigma) g(X,Y) + (n\mathbf{H} + f) g(A(X),Y) \\ & - g\left(A^2(X),Y\right) \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

ifadesine ulaşılır.

Şimdi kabul edelimki hipotezdeki şartı sağlayan λ sabiti var olsun. Bu durumda $Ric(X,Y) + \frac{1}{2}(\pounds_u g)(X,Y) = \lambda g(X,Y)$ olur, yani (M, g, u, λ) bir Ricci solitondur. Tersinin doğruluğu aşikardır.

Ayrıca bu Ricci soliton bir gradient Ricci solitondur. Bunu görmek için $\widetilde{\nabla}\sigma = \xi$ olduğunu göz önüne alınırsa ve $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X(\sigma) = g(X, \xi) = g(X, u + fN) = g(X, u)$$

olduğundan $u = \nabla\rho$ elde edilir.

4. HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölümde hemen hemen kontakt metrik manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar ve Ricci solitonların genelleştirilmişi olan η-Ricci solitonlar incelenecektir. İlk önce α-Sasakian manifoldlar üzerinde Ricci solitonları karakterize eden teoremler ve sonuçlar verilecektir. Daha sonra ise 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldlar üzerindeki η-Ricci solitonlarla ilgili sonuçlar verilecektir.

4.1 α-Sasakian Manifoldlarda Ricci Solitonlar

Kabul edelim ki h, α-Sasakian manifoldu M üzerinde simetrik ve paralel $(0,2)$-tipinde bir tensör olsun. Bu durumda $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla^2 h(X,Y;Z,W) - \nabla^2 h(X,Y;W,Z) = 0, \tag{4.1.1}$$

dır. Burada $\nabla^2_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$ dir [27], [28], [29]. Buna göre M nin Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere $X,Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere h paralel olduğundan $R(X,Y)h = 0$ dır ve buradan

$$h(R(X,Y)Z,W) + h(Z,R(X,Y)W) = 0 \tag{4.1.2}$$

elde edilir. (4.1.2) de $Z = W = \xi$ alınırsa ve $R(X,Y)\xi$ nin (2.3.12) deki değerini yerine yazılacak olursa

$$2[Y(\alpha)h(\varphi X,\xi) - X(\alpha)h(\varphi Y,\xi)] + 2\alpha[\eta(Y)h(X,\xi) - \eta(X)h(Y,\xi)] = 0 \tag{4.1.3}$$

elde edilir. (4.1.3) de $X = \xi$ alınırsa

$$2\alpha^2[\eta(Y)h(\xi,\xi) - h(Y,\xi)] - 2\xi(\alpha)h(\varphi Y,\xi) = 0 \tag{4.1.4}$$

yazılır. (4.1.4) de Y yerine φY alınırsa

$$2\xi(\alpha)[h(Y,\xi) - \eta(Y)h(\xi,\xi)] - 2\alpha^2 h(\varphi Y,\xi) = 0 \tag{4.1.5}$$

ifadesine ulaşılır. (4.1.4) ve (4.1.5) in ortak çözümünden

$$\left(\alpha^4 + (\xi(\alpha))^2\right)[\eta(Y)h(\xi,\xi) - h(Y,\xi)] = 0 \tag{4.1.6}$$

elde edilir. $\alpha^4 + (\xi(\alpha))^2 \neq 0$ olduğundan

$$h(Y,\xi) = \eta(Y)h(\xi,\xi) \tag{4.1.7}$$

bulunur. (4.1.7) de X vektör alanına göre kovaryant türev alınır ve h nın paralelliği göz önüne alınırsa

$$Xh(Y,\xi) = X(\eta(Y)h(\xi,\xi))$$

veya

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)(Y,\xi) + h(\nabla_X Y,\xi) + h(Y,\nabla_X \xi) &= [(\nabla_X \eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y)]h(\xi,\xi) \\ &+ \eta(Y)[(\nabla_X h)(Y,\xi) + 2h(\nabla_X \xi,\xi)] \qquad (4.1.8)\end{aligned}$$

elde edilir. h paralel olduğundan $\nabla h = 0$ dır, ayrıca $\eta(\nabla_X \xi) = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$h(Y,\nabla_X \xi) = \eta(\nabla_X \eta)(Y)h(\xi,\xi) \qquad (4.1.9)$$

ifadesine ulaşılır.

$\nabla_X\ \xi = -\alpha\varphi X$ ve $(\nabla_X \eta)Y = \alpha g(X,\varphi Y)$ değerleri (4.1.9) da yerine yazılırsa

$$-\alpha h(Y,\varphi X) = \alpha g(X,\varphi Y)h(\xi,\xi) \qquad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.10) da X yerine φX alınırsa

$$\begin{aligned}-\alpha h\left(Y,\varphi^2 X\right) &= \alpha g(\varphi X,\varphi X)h(\xi,\xi) \\ -\alpha h(Y,-X+\eta(X)\xi) &= \alpha\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}h(\xi,\xi) \\ \alpha h(Y,X) - \alpha\eta(X)h(Y,\xi) &= \alpha\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}h(\xi,\xi) \\ \alpha h(X,Y) - \alpha\eta(X)\eta(Y)h(\xi,\xi) &= \alpha g(X,Y)h(\xi,\xi) - \alpha\eta(X)\eta(Y)h(\xi,\xi)\end{aligned}$$

veya

$$\alpha[h(X,Y) - g(X,Y)h(\xi,\xi)] = 0 \qquad (4.1.11)$$

yazılır. Bir α-Sasakian manifoldda $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$h(X,Y) = g(X,Y)h(\xi,\xi) \qquad (4.1.12)$$

elde edilir ve (4.1.7) denklemi yardımıyla (4.1.12) deki $h(\xi,\xi)$ nın sabit olduğu görülür. Buna göre aşağıdaki teoreme sahip olunur.

Teorem 4.1.1. *Bir α-Sasakian manifoldda bir simetrik paralel ikinci dereceden kovaryant tensör metrik tensörünün bir sabit ile çarpımına eşittir [5].*

Sonuç 4.1.1. *Bir lokal Ricci simetrik α-Sasakian manifold bir Einstein manifolddur [5].*

Böylece α-Sasakian manifoldlar için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. *Bir α-Sasakian manifold için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *Einsteindir,*

(2) *Lokal Ricci simetriktir,*

(3) *Ricci semi-simetriktir, yani $R.Ric = 0$ dır [5].*

İspat: Aşikar olarak $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ dür. Şimdi $(3) \Rightarrow (1)$ olduğunu ispatlayalım. $R.Ric = 0$ olduğundan Ric tensörü h ile aynı şartlara sahip olur. Buna göre

$$(R(X,Y):Ric)(U,V) = -Ric(R(X,Y)U,V) - Ric(R(X,Y)V,U)$$

dir. (4.1.2) den

$$Ric(R(X,Y)U,V) + Ric(R(X,Y)V,U) = 0 \tag{4.1.13}$$

olur. X yerine ξ alınırsa

$$Ric(R(\xi,Y)U,V) + Ric(R(\xi,Y)V,U) = 0 \tag{4.1.14}$$

elde edilir. (4.1.14) de (2.3.13) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&[g(\varphi U,Y)Ric(\operatorname{grad}\alpha,V) + U(\alpha)Ric(\varphi Y,V)] \\
&+\alpha^2[g(Y,U)Ric(\xi,V) - \eta(U)Ric(Y,V)] \\
&+[g(\varphi V,Y)Ric(U,\operatorname{grad}\alpha) + V(\alpha)Ric(U,\varphi Y)] \\
&+\alpha^2[g(Y,V)Ric(U,\xi) - \eta(V)Ric(U,Y)] = 0
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

elde edilir. (4.1.15) de U yerine ξ alınırsa ve (2.3.15), (2.3.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha)Ric(\varphi Y,V) - \alpha^2\eta(Y)(\varphi V)(\alpha) \\
-\alpha^2 Ric(Y,V) + g(Y,\varphi V)Ric(\xi,\operatorname{grad}\alpha) \\
+\alpha^4(n-1)g(Y,V) + \alpha^2\eta(V)(\varphi Y)(\alpha) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

olur. (4.1.16) da Y ve V nin rolleri değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha)Ric(\varphi V,Y) - \alpha^2\eta(Y)(\varphi V)(\alpha) \\
-\alpha^2 Ric(V,Y) + g(V,\varphi Y)Ric(\xi,\operatorname{grad}\alpha) \\
+\alpha^4(n-1)g(V,Y) + \alpha^2\eta(Y)(\varphi V)(\alpha) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.17) denklemlerinden

$$Ric(Y,V) = (n-1)\,\alpha^2 g(Y,V) \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Böylece (1) elde edilmiş olur.

Buradan aşağıdaki teoreme sahip olunur.

Teorem 4.1.3. *Bir Ricci simetrik α-Sasakian manifold bir Einstein manifolddur [5].*

Teorem 4.1.4. *Kabul edelim ki bir α-Sasakian manifold üzerinde bir V vektör alanına göre $(0,2)$-tipindeki $\pounds_V g + 2Ric$ tensör alanı paralel olsun. Bu durumda (g,V,λ) bir Ricci solitondur. Özel olarak, bir α-Sasakian manifold için Ricci semi-simetrik ve $\pounds_V g$ paralel ise (g,V,λ) Ricci solitondur [5].*

İspat: Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.1 den ispatı aşirkardır.

Bir Ricci soliton

$$\pounds_V g + 2Ric + 2\lambda g = 0 \tag{4.1.19}$$

denklemini sağlar. Böylece $\pounds_V g + 2Ric$ tensörü paraleldir. Teorem 4.1.1'e göre bu ifade metrik tensörünün bir sabit ile çarpımına eşittir, yani $(\pounds_V g + 2Ric)(X,Y) = g(X,Y)\,h(\xi,\xi)$ dir ve $h(\xi,\xi)$ sabittir.

Sonuç 4.1.2. *Bir α-Sasakian manifoldda bir g metriği $V = \xi$ ile bir Ricci soliton ise bu durumda M manifoldu Einsteindir [5].*

İspat: (4.1.19) da $V = \xi$ alınırsa ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\pounds_\xi g + 2Ric + 2\lambda g\right)(X,Y) = 0 \tag{4.1.20}$$

dır. Buradan

$$\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \tag{4.1.21}$$

olur. Buradan da $Ric(X,Y) = -\lambda g(X,Y)$ olur ve M, α-Sasakian manifold Einsteindir.

Sonuç 4.1.3. *Bir α-Sasakian manifoldda bir (g,ξ,λ) Ricci solitonu durağan (steady) olamaz, yani daralandır (shriking) [5].*

İspat: $\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) = 0$ olduğundan

$$h(X,Y) = \left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y)$$

denilirse

$$h(X,Y) = -2\lambda g(X,Y)$$

olur. $X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = -2\lambda \quad (4.1.22)$$

olur. n-boyutlu $(n = 2m+1)$ α-Sasakian manifoldda $Ric(\xi,\xi) = \alpha^2(n-1)$ olduğundan aynı zamanda

$$h(\xi,\xi) = 2\alpha^2(n-1) \quad (4.1.23)$$

olur. (4.1.22) ve (4.1.23) den

$$\lambda = -(n-1)\alpha^2 \quad (4.1.24)$$

elde edilir ve $\lambda < 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. *Eğer bir n-boyutlu α-Sasakian manifold η-Einstein ise bu durumda α-Sasakian manifolddaki (g,ξ,λ) Ricci solitonlar daralandır (shrinking). Burada $\lambda = -(n-1)\alpha^2$ dir [5].*

İspat: İspatı üç parça halinde yapacağız.

$i)$ α-Sasakian manifold η-Einsteindir,

$ii)$ α-Sasakian manifoldda Ricci soliton değişken (sabit olmayan) skaler eğrilik ile ifade edilir,

$iii)$ α-Sasakian manifoldda Ricci soliton daralandır (shrinking).

α-Sasakian manifoldun η-Einstein olması demek $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y) \quad (4.1.25)$$

olacak şekilde a,b reel değerli fonksiyonların var olmasıdır.

Şimdi (4.1.25) denklemini sağlayan a,b fonksiyonlarını bulalım. $\{e_i\}$, M nin bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i,e_i)$$

dir. (4.1.25) den

$$\tau = na + b \quad (4.1.26)$$

elde edilir. Tekrar (4.1.25) de $X = Y = \xi$ alınırsa ve $Ric(\xi,\xi) = \alpha^2(n-1)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$a + b = (n-1)\alpha^2 \quad (4.1.27)$$

denklemine sahip olunur. $(4.1.26)$ ve $(4.1.27)$ den a, b çözülürse

$$a = \left[\frac{\tau}{n-1} - \alpha^2\right], \quad b = \left[n\alpha^2 - \frac{\tau}{n-1}\right] \tag{4.1.28}$$

olarak bulunur. Böylece

$$Ric(X,Y) = \left[\frac{\tau}{n-1} - \alpha^2\right] g(X,Y) + \left[n\alpha^2 - \frac{\tau}{n-1}\right] \eta(X)\eta(Y) \tag{4.1.29}$$

elde edilir.

Şimdi skaler eğrilik τ nun değişken olduğunu, yani τ nun sabit olmadığını gösterelim. M, α-Sasakian manifoldu ξ potansiyel vektör alanı ile bir Ricci soliton ise

$$h(X,Y) = \left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y) \tag{4.1.30}$$

simetrik paralel $(0,2)$-tipinde bir tensördür. $\pounds_\xi g = 0$ olduğundan $(4.1.29)$ ve $(4.1.30)$ den

$$h(X,Y) = \left[\frac{2\tau}{n-1} - 2\alpha^2\right] g(X,Y) + \left[2n\alpha^2 - \frac{2\tau}{n-1}\right] \eta(X)\eta(Y) \tag{4.1.31}$$

olur. $(4.1.31)$ in Z vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_Z h)(X,Y) = {} & \left[\frac{2(\nabla_Z \tau)}{n-1} - 4\alpha Z(\alpha)\right] g(X,Y) + \left[4n\alpha Z(\alpha) - \frac{2(\nabla_Z \tau)}{n-1}\right] \eta(X)\eta(Y) \\ & + \left[2n\alpha^2 - \frac{2\tau}{n-1}\right] [g(X, \nabla_Z \xi)\eta(Y) + g(Y, \nabla_Z \xi)\eta(X)]\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

ifadesine sahip olunur. $Z = \xi$ ve X ile Y yi de ξ ye dik olarak seçilirse ve $\nabla h = 0$ olduğunu göz önüne alınırsa

$$\nabla_\xi \tau = 2(n-1)\alpha\xi(\alpha)$$

veya

$$\nabla_\xi \tau = (n-1)\nabla_\xi \alpha^2 \tag{4.1.33}$$

elde edilir. $(4.1.33)$ de integral alınırsa

$$\tau = (n-1)\alpha^2 + c \tag{4.1.34}$$

olur ve burada c integral sabitidir. Böylece τ sabit olmayan skaler eğriliktir.

Son olarak α-Sasakian manifoldda Ricci soliton olma durumuna bakalım.

$$\pounds_\xi g + 2Ric + 2\lambda g = 0$$

ifadesinde $h = \pounds_\xi g + 2Ric$ olmak üzere $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = -2\lambda g(X,Y)$$

dir. $X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = -2\lambda \tag{4.1.35}$$

olur. $(4.1.31)$ de $X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = 2(n-1)\alpha^2 \tag{4.1.36}$$

ifadesine sahip olunur. Bu son iki denklemden

$$\lambda = -(n-1)\alpha^2$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ olduğundan $\lambda < 0$ olur ve α-Sasakian manifold daralandır (shrinking). Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi 3-boyutlu α-Sasakian manifoldların Ricci soliton olma durumunu inceleyelim.

Teorem 4.1.6. *Değişken (sabit olmayan) skaler eğrilikli 3-boyutlu α-Sasakian manifoldda $\lambda = -2\alpha^2$ olan bir Ricci soliton (g,ξ,λ) ise bu daralandır (shrinking), yani durağan (steady) olamaz [5].*

İspat: İspatı üç kısım halinde yapacağız.

i) 3-boyutlu α-Sasakian manifold η-Einsteindir,

ii) Ricci soliton 3-boyutlu α-Sasakian manifoldda skaler eğrilik değişkendir (sabit değildir),

iii) 3-boyutlu α-Sasakian manifoldda Ricci soliton daralandır (shrinking).

3-boyutlu bir α-Sasakian manifoldun Riemann eğrilik tensörü $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + Ric(Y,Z)X \\ & - Ric(X,Z)Y - \frac{\tau}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

dir. $(4.1.37)$ de $Z = \xi$ alınıp ve

$$R(X,Y)\xi = \alpha^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + Y(\alpha)\varphi X - X(\alpha)\varphi Y$$

ve

$$Ric(X,\xi) = 2\alpha^2\eta(X) - (\varphi X)(\alpha)$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & [Y(\alpha)\varphi X - X(\alpha)\varphi Y] + \alpha^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \\ & = \eta(Y)QX - \eta(X)QY + 2\alpha^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \\ & - ((\varphi Y)(\alpha)X + (\varphi X)(\alpha)Y) - \frac{\tau}{2}[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

elde edilir. Burada tekrar $Y = \xi$ alınıp ve $Q\xi = 2\alpha^2\xi + \varphi(\operatorname{grad}\alpha)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$QX = \left[\frac{\tau}{2} - \alpha^2\right] X + \left[3\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\right] \eta(X)\xi + \xi(\alpha)\varphi X$$
$$+\eta(X)\varphi(\operatorname{grad}\alpha) + (\varphi X)(\alpha)\xi \qquad (4.1.39)$$

elde edilir. (4.1.39) ifadesi Y ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$Ric(X,Y) = \left[\frac{\tau}{2} - \alpha^2\right] g(X,Y) + \left[3\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\right] \eta(X)\eta(Y) + \xi(\alpha) g(\varphi X, Y)$$
$$-\eta(X)((\varphi Y)(\alpha)) + \eta(Y)((\varphi X)(\alpha)) \qquad (4.1.40)$$

olur. Buna göre

$$Ric(Y,X) = \left[\frac{r}{2} - \alpha^2\right] g(Y,X) + \left[3\alpha^2 - \frac{r}{2}\right] \eta(Y)\eta(X) + \xi(\alpha) g(\varphi Y, X)$$
$$-\eta(Y)((\varphi X)(\alpha)) + \eta(X)((\varphi Y)(\alpha)) \qquad (4.1.41)$$

dir. (4.1.40) ve (4.1.41) taraf tarafa toplanırsa

$$Ric(X,Y) = \left[\frac{\tau}{2} - \alpha^2\right] g(X,Y) + \left[3\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\right] \eta(X)\eta(Y) \qquad (4.1.42)$$

olarak bulunur. (4.1.42) ye göre 3-boyutlu α-Sasakian manifold bir η-Einsteindir.

Şimdi skaler eğrilik τ nin sabit olmadığını gösterelim.

$$h(X,Y) = \left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y) \qquad (4.1.43)$$

diyelim. $\pounds_\xi g = 0$ olduğundan (4.1.43) de (4.1.42) kullanılırsa

$$h(X,Y) = \left[\tau - 2\alpha^2\right] g(X,Y) + \left[6\alpha^2 - \tau\right] \eta(X)\eta(Y) \qquad (4.1.44)$$

elde edilir. (4.1.44) denkleminde Z ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$(\nabla_Z h)(X,Y) = [\nabla_Z\tau - 4\alpha Z(\alpha)] g(X,Y) + [12\alpha Z(\alpha) - \nabla_Z\tau] \eta(X)\eta(Y)$$
$$+\left[6\alpha^2 - \tau\right] [g(X, \nabla_Z\xi)\eta(Y) + g(Y, \nabla_Z\xi)\eta(X)] \qquad (4.1.45)$$

olur. $\nabla h = 0$ olduğunu göz önüne alınıp ve $Z = \xi$, $X = Y \perp \xi$ olarak alınırsa

$$\nabla_\xi\tau = 4\alpha(\xi(\alpha)) \;\Rightarrow\; \nabla_\xi\tau = \nabla_\xi\left(2\alpha^2\right) \qquad (4.1.46)$$

ifadesine sahip olunur. (4.1.46) da integral alınırsa

$$\tau = 2\alpha^2 + c \qquad (4.1.47)$$

elde edilir, burada c integral sabitidir. Böylece τ sabit değildir, yani değişkendir.

Son olarak (g,ξ,λ), α-Sasakian manifoldda bir Ricci soliton ise

$$h(X,Y) = -2\lambda g(X,Y)$$

dir ve burada $X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = -2\lambda \tag{4.1.48}$$

olur. (4.1.44) de $X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = 4\alpha^2 \tag{4.1.49}$$

elde edilir. (4.1.48) ve (4.1.49) dan

$$\lambda = -2\alpha^2 \tag{4.1.50}$$

olur ve $\alpha \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$, $\lambda < 0$ dır. Dolayısıyla Ricci soliton daralandır (shrinking).

Örnek 4.1.1. *$M = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\{E_1,E_2,E_3\}$ lineer bağımsız vektörleri*

$$E_1 = e^x \frac{\partial}{\partial y},\ E_2 = e^x \left[\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial z}\right],\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1.51}$$

olarak verilsin. Bu çatı yardımıyla g Riemann metriği $g\left(E_i,E_j\right) = \delta_{ij}$ olarak verilirse

$$g = \frac{1}{e^{2x}}\left[\left(1-4e^{2x}y^2\right)dx\otimes dx + dy\otimes dy + e^{2x}dz\otimes dz\right] \tag{4.1.52}$$

olarak ifade edilir. $U \in \Gamma(TM)$ için $\eta(U) = g(U,E_3)$ ve φ, $(1,1)-$tensör alanı $\varphi E_1 = E_2$, $\varphi E_2 = -E_1$, $\varphi E_3 = 0$ ile tanımlansın. Buna göre $U,W \in \Gamma(TM)$ için

$$\eta(E_3) = 1,\ \varphi^2 U = -U + \eta(U)E_3$$

ve

$$g(\varphi U,\varphi W) = g(U,W) - \eta(U)\eta(W)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $\xi = E_3$ olmak üzere M üzerinde (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapısı tanımlanır. $X,Y \in \Gamma(TM)$ için $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olduğu göz önüne alınırsa

$$[E_1,E_2] = -e^x E_1 + 2e^{2x}E_3, \quad [E_1,E_3] = [E_2,E_3] = 0 \tag{4.1.53}$$

şeklinde bulunur. Kozsul formülü

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) \\ &\quad - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{4.1.54}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\nabla_{E_1}E_1 = e^x E_2,\ \ \nabla_{E_2}E_2 = 0,\ \ \nabla_{E_3}E_3 = 0\\
&\nabla_{E_1}E_2 = -e^x E_1 + e^{2x}E_3,\ \nabla_{E_2}E_1 = -e^{2x}E_3,\ \nabla_{E_2}E_3 = e^{2x}E_1\\
&\nabla_{E_1}E_3 = -e^{2x}E_2,\ \nabla_{E_3}E_1 = -e^{2x}E_2,\ \nabla_{E_3}E_2 = e^{2x}E_1 \qquad (4.1.55)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\nabla_X\varphi)Y = \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y$$

olduğu göz önüne alınıp ve (4.1.55) *kullanılırsa*

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\left(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right),\ \ \nabla_X\xi = -\alpha\varphi X \qquad (4.1.56)$$

elde edilir ve burada $\alpha = e^{2x} \neq 0$ *dır.* (4.1.47) *den*

$$\tau = 2e^{4x} + c \neq 0$$

dır ve τ *sabit değildir.* (4.1.50) *den*

$$\lambda = -2e^{4x} \neq 0$$

ile M bir Ricci solitondur ve daralandır (shrinking) [5].

4.2 3-Boyutlu Normal Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlarda η-Ricci Solitonlar

Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde

$$\pounds_X g + 2Ric + 2\lambda g + 2\mu\eta\otimes\eta = 0 \qquad (4.2.1)$$

denklemi sağlanıyor ise (g,V,λ,μ) ye bir η-Ricci soliton denir [30]. Burada λ,μ reel sayıdır ve η da M üzerinde bir 1-formdur. Eğer $\mu = 0$ ise o zaman bir Ricci soliton elde edilir, yani bir η-Ricci soliton, Ricci solitonun bir genelleştirilmişidir.

Bir 3-boyutlu hemen hemen kontakt metrik manifold (M,φ,ξ,η,g) üzerinde

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi \qquad (4.2.2)$$

$$\nabla_X\xi = \alpha[X - \eta(X)\xi] - \beta\varphi X \qquad (4.2.3)$$

dır. Burada $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{div}\xi$, $\beta = \frac{1}{2}iz(\varphi\nabla\xi)$ ve $\operatorname{div}\xi = iz\{X \longrightarrow \nabla_X\xi\}$, $iz(\varphi\nabla\xi) = iz\{X \longrightarrow \varphi\nabla_X\xi\}$ dir.

Bir 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifold M için

(i) Eğer $\alpha = \beta = 0$ ise M kosimplektik,

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ ise M quasi-Sasakian,

(iii) Eğer $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ bir sabit ise M β-Sasakian, $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ise M Sasakian,

(iv) $\alpha \neq 0$ bir sabit ve $\beta = 0$ ise M α-Kenmotsu manifold elde edilir [31].

3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldlarda aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)\xi = \left(Y(\alpha) - \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\varphi^2 X - \left(X(\alpha) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\varphi^2 Y \tag{4.2.4}$$
$$+ \left(Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y)\right)\varphi X - \left(X(\beta) + 2\alpha\beta\eta(X)\right)\varphi Y$$

$$Ric(X,Y) = -Y(\alpha) - (\varphi Y)(\beta) - \left(\xi(\alpha) + 2\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\eta(Y) \tag{4.2.5}$$

$$\xi(\beta) + 2\alpha\beta = 0 \tag{4.2.6}$$

dır [30].

Ayrıca 3-boyutlu Riemann manifoldda Riemann eğrilik tensörü $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y,Z,W) = g(X,W)Ric(Y,Z) - g(X,Z)Ric(Y,W) \tag{4.2.7}$$
$$+ g(Y,Z)Ric(X,W) - g(Y,W)Ric(X,Z)$$
$$- \frac{\tau}{2}\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right]$$

dır. Burada τ, M nin skaler eğriliğidir [30].

$R(\xi,Y,Z,\xi) = -R(\xi,Y,\xi,Z)$ özelliğini kullanılırsa (4.2.4) den

$$R(\xi,Y)\xi = -\left(\xi(\alpha) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\varphi^2 Y - \left(\xi(\beta) + 2\alpha\beta\right)\varphi Y$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını Z ile iç çarpımı yapılırsa ve $g(\varphi X,Y) = -g(X,\varphi Y)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = -\left(\xi(\alpha) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)g(\varphi Y,\varphi Z) - \left(\xi(\beta) + 2\alpha\beta\right)g(Y,\varphi Z) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. (4.2.6) den

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = -\left(\xi(\alpha) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)g(\varphi Y,\varphi Z) \tag{4.2.9}$$

olur. Bir 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldda bir ortonormal baz $\{e_1,e_2,\xi\}$ ise Ricci eğriliği $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} R(e_i,X,Y,e_i) + R(\xi,X,Y,\xi)$$

dir. Buna göre α ve β nın sabit olması durumunda $(4.2.6), (4.2.7)$ ve $(4.2.8)$ den

$$Ric(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2} + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right) g(\varphi X, \varphi Y) - 2\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.10}$$

ve

$$QX = \left(\frac{\tau}{2} + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right) X - 2\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\eta(X)\xi \tag{4.2.11}$$

elde edilir, burada Q Ricci operatörüdür. (4.2.7) de (4.2.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = & \left(\frac{\tau}{2} + 2\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ & + g(X,Z)\left[\left(\frac{\tau}{2} + 3\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\right]\eta(Y)\xi \\ & - \left(\frac{\tau}{2} + 3\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\eta(Y)\eta(Z)X \\ & - g(Y,Z)\left[\left(\frac{\tau}{2} + 3\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\right]\eta(X)\xi \\ & + \left(\frac{\tau}{2} + 3\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\eta(X)\eta(Z)Y \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

bulunur.

(4.2.6) den α ve β nın sabit olması durumunda 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifold ya β-Sasakian ya α-Kenmotsu ya da kosimplektik manifolddur [27] [30] [32] [33].

Şimdi $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifold ve h da M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir simetrik paralel tensör olsun. Buna göre ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla h = 0$ dır. Bu durumda $(4.1.1)$ ve $(4.1.2)$ denklemleri sağlanır. $(4.1.2)$ denkleminin $U,V,X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(R(U,V)X,Y) + h(X,R(U,V)Y) = 0$$

dir. Burada $U = X = Y = \xi$ alınırsa

$$h(R(\xi,V)\xi,\xi) + h(\xi,R(\xi,V)\xi) = 0$$

olur. h simetrik olduğundan her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$h(\xi, R(\xi,X)\xi) = 0 \tag{4.2.13}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki M kosimpektik olmasın. Bu durumda $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ dır. (4.2.4) denkleminden

$$R(\xi,X)\xi = -\left(\xi(\alpha) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right)\varphi^2 X - \left(\xi(\beta) + 2\alpha\beta\right)\varphi X$$

olur. (4.2.4) den α, β sabit olduğundan

$$R(\xi, X)\xi = -\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\varphi^2 X \tag{4.2.14}$$
$$= -\left(\alpha^2 - \beta^2\right)(-X + \eta(X)\xi)$$

olur. Bu ifade (4.2.13) de yerine yazılırsa

$$\left(\alpha^2 - \beta^2\right)[h(X,\xi) - \eta(X)h(\xi,\xi)] = 0 \tag{4.2.15}$$

elde edilir. $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ olduğundan

$$h(X,\xi) - \eta(X)h(\xi,\xi) = 0 \tag{4.2.16}$$

elde edilir. (4.2.16) nin Y ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$h(\nabla_Y X, \xi) + h(X, \nabla_Y \xi) - Y(\eta(X))h(\xi,\xi) - 2\eta(X)h(\nabla_Y \xi, \xi) = 0$$

elde edilir. $Y(\eta(X)) = Y(g(X,\xi)) = g(\nabla_Y X, \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)$ olduğu göz önüne alınıp tekrar (4.2.16) kullanılırsa

$$h(X, \nabla_Y \xi) - g(X, \nabla_Y \xi)h(\xi,\xi) - 2\eta(X)h(\nabla_Y \xi, \xi) = 0$$

olur. Bu son denklemde $\nabla_Y \xi = \alpha[Y - \eta(Y)\xi] - \beta\varphi Y$ değerlerini yerine yazılıp (4.2.16) den $h(Y,\xi) = \gamma(Y)h(\xi,\xi)$ kullanılıp ve düzenlenirse

$$\alpha[h(X,Y) - g(X,Y)h(\xi,\xi)] = \beta[h(X,\varphi Y) - g(X,\varphi Y)h(\xi,\xi)] \tag{4.2.17}$$

elde edilir. Bu son eşitlikle Y nin yerine φY alınıp ve düzenlenirse

$$\left(\alpha^2 - \beta^2\right)[h(X,Y) - g(X,Y)h(\xi,\xi)] = 0 \tag{4.2.18}$$

denklemi bulunur. $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ olduğundan son olarak

$$h(X,Y) = g(X,Y)h(\xi,\xi) \tag{4.2.19}$$

denklemi elde edilir. Burada h ve g paralel tensör alanları olduğundan $\lambda = h(\xi,\xi)$ sabittir. Böylece M üzerinde $h = \lambda g$ olarak elde edilmiş olur. (4.2.19) dan aşağıdaki teorem ifade edilebilir [30].

Teorem 4.2.1. 3-*boyutlu kosimplektik olmayan bir normal hemen hemen kontakt metrik manifoldda* $(0,2)$ *tipindeki bir paralel tensör alanı metriğin bir sabitle çarpımına eşittir [30].*

3-boyutlu bir normal hemen hemen kontakt metrik manifold (M,φ,ξ,η,g) üzerinde bir η-Ricci soliton (g,ξ,λ,μ) olsun. Bu durumda

$$\pounds_\xi g+2Ric+2\lambda g+2\mu\eta\otimes\eta=0 \tag{4.2.20}$$

denklemi sağlanır. Buradan

$$2Ric=-\pounds_\xi g-2\lambda g-2\mu\eta\otimes\eta$$

dir ve

$$\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y)=g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi)$$

değeri yerine yazılırsa $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$2Ric(X,Y)=-g(\nabla_X\xi,Y)-g(X,\nabla_Y\xi)-2\lambda g(X,Y)-2\mu\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.21}$$

dir. (4.2.3) daki $\nabla_X\xi$ değeri (4.2.21) de yerine yazılıp ve düzenlenirse

$$Ric(X,Y)=-(\lambda+\alpha)g(X,Y)+(\alpha-\mu)\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.22) denkleminden

$$Ric(X,\xi)=-(\lambda+\mu)\eta(X) \tag{4.2.23}$$

$$QX=-(\lambda+\alpha)X+(\alpha-\mu)\xi \tag{4.2.24}$$

$$Q\xi=-(\lambda+\alpha)\xi \tag{4.2.25}$$

$$\tau=-\lambda n-(n-1)\alpha-\mu \tag{4.2.26}$$

ifadeleri bulunur.

Şimdi $\pounds_\xi g+2Ric+2\mu\eta\otimes\eta$ ifadesiyle ilgilenelim. $\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y)=g(\nabla_X\xi,Y)+g\left(X,\nabla_\xi Y\right)$ de $\nabla\xi$ ve $\nabla_X\xi$ ifadeleri (4.2.3) den yerine yazılırsa

$$\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y)=2\alpha\left[g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\right] \tag{4.2.27}$$

elde edilir. Ayrıca 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldda (4.2.7) den

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z&=g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY+Ric(Y,Z)X\\&-Ric(X,Z)Y-\frac{\tau}{2}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

yazılabilir. $Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} R(e_i,X,Y,e_i) + R(\xi,X,Y,\xi)$ olduğunu göz önüne alınıp burada (4.2.10) ve (4.2.11) kullanılırsa

$$Ric(X,Y) = \left[\frac{\tau}{2} - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\right] g(X,Y) - \left[\frac{\tau}{2} - 3\alpha^2 - \beta^2\right] \eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.29}$$

$$QX = \left[\frac{\tau}{2} - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\right] X - \left[\frac{\tau}{2} - 3\alpha^2 - \beta^2\right] \eta(X)\xi \tag{4.2.30}$$

elde edilir. (4.2.20) denkleminden

$$\pounds_\xi g + 2Ric + 2\mu\eta\otimes\eta = -2\lambda g$$

olarak yazılır ve λ sabit, g paralel olduğundan sol taraf $(0,2)$ tipinde bir paralel tensör alanıdır. Buna göre $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = \left(\pounds_\xi g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.31}$$

denilirse h, $(0,2)$ tipinde bir paralel tensör alanıdır. (4.2.31) ifadesinde (4.2.27) ve (4.2.29) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h(X,Y) = 2\alpha\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right] + 2\left[\frac{\tau}{2} - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\right] g(X,Y) \\ -2\left[\frac{\tau}{2} - 3\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]\eta(X)\eta(Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} h(X,Y) = &\left[2\alpha + \tau - 2\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right] g(X,Y) \\ &- \left[2\alpha - 2\mu + \tau - 6\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

olur. Burada X ve Y yerine ξ alınırsa

$$h(\xi,\xi) = 2\left[2\left(\alpha^2-\beta^2\right) + \mu\right] g(X,Y) \tag{4.2.33}$$

olarak yazılır. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir [30].

Teorem 4.2.2. *M, 3-boyutlu kosimplektik olmayan normal hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda (g,ξ,μ) üçlüsü de bir η-Ricci solitondur [30].*

Şimdi bir V vektör alanı ξ ile noktasal olarak lineer bağımlı olsun, yani b bir fonksiyon olmak üzere $V = b\xi$ olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(TM)$ için (g,v,η,μ), η-Ricci soliton ise

$$g(\nabla_X b\xi, Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) + 2Ric(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y) = 0$$

veya

$$bg(\nabla_X\xi,Y)+X(b)\eta(Y)+bg(\nabla_Y\xi,X)+Y(b)\eta(X)$$
$$+2Ric(X,Y)+2\lambda g(X,Y)+2\mu\eta(X)\eta(Y)=0$$

olur. $\nabla_X\xi=\alpha[X-\eta(X)\xi]-\beta\varphi X$ değeri üstte yerine yazılırsa

$$-2b\alpha g(X,Y)-2b\alpha\eta(X)\eta(Y)+X(b)\eta(Y)+Y(b)\eta(X)$$
$$+2Ric(X,Y)+2\lambda g(X,Y)+2\mu\eta(X)\eta(X)=0 \qquad (4.2.34)$$

elde edilir. (4.2.34) da Y yerine ξ alınırsa ve (4.2.5) den $Ric(X,\xi)$ değeri α,β nın sabit olması göz önüne alınarak yerine yazılırsa

$$X(b)+\xi(b)\eta(X)+2\left[2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\lambda+\mu-2b\alpha\right]\eta(X)=0 \qquad (4.2.35)$$

elde edilir. Burada tekrar X yerine ξ alınırsa

$$\xi(b)=-2\left(\alpha^2-\beta^2\right)-\lambda-\beta+2b\alpha$$

elde edilir. Bu değer (4.2.35) de yerine yazılırsa

$$X(b)+\left[2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\lambda+\mu-2b\alpha\right]\eta(X)=0$$

veya

$$db=-\left\{\lambda+\mu+2\left(\alpha^2-\beta^2\right)-2b\alpha\right\}\eta \qquad (4.2.36)$$

olur. (4.2.36) da d diferensiyeli tekrar uygulanırsa

$$\left\{\lambda+\mu+2\left(\alpha^2-\beta^2\right)-2b\alpha\right\}d\eta=0$$

olur ve $d\eta\neq0$ olduğundan

$$\lambda+\mu+2\left(\alpha^2-\beta^2\right)-2b\alpha=0 \qquad (4.2.37)$$

elde edilir. Bu ifade (4.2.36) de göz önüne alınırsa $db=0$ olur, yani b sabittir. Böylece (4.2.34) dan

$$Ric(X,Y)=(b\alpha-\lambda)g(X,Y)+(b\alpha-\mu)\eta(X)\eta(Y)$$

olarak yazılır ki bu M nin skaler eğriliğinin sabit olması anlamına gelir [30].

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3. *Eğer bir 3-boyutlu kosimplektik olmayan normal hemen hemen kontakt metrik manifold ξ ile lineer bağımlı bir potansiyel vektör alanı V ile bir η-Ricci soliton ise bu durumda V bir sabit ile ξ nin çarpımı ve α, β sabit olmak üzere g nin skaler eğriliği sabittir [30].*

Şimdi tersi olan durumuna bakalım, yani $V = \xi$, α, β sabit olmak üzere M, 3-boyutlu η-Einstein normal hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(TM)$ için a,b reel skaler olmak üzere

$$Ric(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.38}$$

dir. Buna göre (4.2.27) den

$$\left(\pounds_{\xi} g\right)(X,Y) = 2\alpha\left[g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)\right] \tag{4.2.39}$$

dir ve (4.2.38) ifadesinden

$$\begin{aligned}&\left(\pounds_{\xi} g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y)\\&= 2(\alpha + a + \lambda) g(X,Y) - 2(\alpha - b + \mu)\eta(X)\eta(Y)\end{aligned} \tag{4.2.40}$$

elde edilir. Buna göre eğer

$$a + b + \lambda = 0 \tag{4.2.41}$$

ve

$$b = -\alpha + \mu = \text{sabit} \tag{4.2.42}$$

ise bu durumda (g, ξ, λ, μ) M üzerinde bir η-Ricci solitondur. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir [30].

Teorem 4.2.4. *α, β sabit olmak üzere M bir 3-boyutlu kosimplektik olmayan normal hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu $Ric = ag + b\eta \otimes \eta$ olan bir η-Einstein manifold ise bu durumda $(g, \xi, -a+b, \mu)$, M üzerinde bir η-Ricci solitondur [30].*

Şimdi potansiyel vektör alanı $V = \xi$ olmak üzere bir η-Ricci solitonda, $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\pounds_{\xi} g\right)(X,Y) + 2Ric(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y) = 0 \tag{4.2.43}$$

sağlanır. Buna göre

$$\left(\pounds_{\xi} g\right)(X,Y) = 2\alpha\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right] \tag{4.2.44}$$

dir. (4.2.39) ve (4.2.44) kullanılırsa

$$\left(\pounds_{\xi} g\right)(X,Y)+2Ric(X,Y)=\left[2\alpha+\tau-2\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]g(X,Y) \qquad (4.2.45)$$
$$-\left[\tau-6\left(\alpha^2-\beta^2\right)+2\alpha\right]\eta(X)\eta(Y)$$

olarak bulunur. Buna göre (4.2.43) denkleminde X,Y yerine ξ alınırsa

$$2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\lambda+\mu=0$$

veya

$$\lambda=-\left\{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\mu\right\} \qquad (4.2.46)$$

elde edilir. Bu λ değeri skaler eğriliğin (4.2.26) deki denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau=6\left(\alpha^2-\beta^2\right)-2\lambda+2\mu \qquad (4.2.47)$$

elde edilir. λ sabit olduğundan (4.2.46) den $\alpha^2-\beta^2$ de sabittir, dolayısıyla τ sabittir. Buradan aşağıdaki teoreme ulaşılır [30].

Teorem 4.2.5. (g,ξ,μ), 3-*boyutlu kosimplektik olmayan normal hemen hemen kontakt metrik manifold M üzerinde bir* η*-Ricci soliton olsun. Bu durumda* λ *ve skaler eğrilik* τ *arasında*

$$\lambda+\mu=-2\left(\alpha^2-\beta^2\right),$$
$$\tau=6\left(\alpha^2-\beta^2\right)-2\lambda+2\mu$$

bağıntıları vardır [30].

(4.2.46) denkleminde $\mu=0$ için $\lambda=-2\left(\alpha^2-\beta^2\right)$ olur ve buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.6. *Eğer* α,β *sabit olan bir* 3-*boyutlu kosimplektik olmayan normal hemen hemen kontakt metrik manifold üzerinde bir* (g,ξ,λ) *Ricci solitonu daralandır (shrinking) [30].*

Örnek 4.2.1. $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\, z\neq 0\right\}$ *olsun. M üzerinde*

$$e_1=z\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=z\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=z\frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere M üzerindeki Riemann metriği

$$g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1,$$
$$g(e_1,e_2)=g(e_1,e_3)=g(e_2,e_3)=0$$

şeklinde tanımlansın, yani

$$g = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

olsun. $Z \in \Gamma(TM)$ *için* η, 1*-formu* $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ *olarak tanımlansın.* φ, $(1,1)$*-tensör alanını ise*

$$\varphi e_1 = -e_2, \; \varphi e_2 = e_1, \; \varphi e_3 = 0$$

ile tanımlayalım. g *ve* φ *nin lineerliğini kullanarak*

$$\eta(e_3) = 1, \; \eta(e_1) = 0, \; \eta(e_2) = 0$$

$$[e_1, e_2] = 0, \; [e_2, e_3] = -e_2, \; [e_1, e_3] = -e_1$$

ifadeleri elde edilir. M *üzerinde bir* $Z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$ *vektör alanı için*

$$\begin{aligned}
\varphi^2 Z = \varphi(\varphi Z) &= \varphi(z_1 \varphi e_1, z_2 \varphi e_2, z_3 \varphi e_3) \\
&= \varphi(-z_1 e_2 + z_2 e_1) \\
&= -z_1 \varphi(e_2) + z_2 \varphi(e_1) \\
&= -z_1 e_1 - z_2 e_2 \\
&= -z_1 e_1 - z_2 e_2 - z_3 e_3 + z_3 e_3
\end{aligned}$$

$\varphi^2 Z = -Z + \eta(Z) e_3$ *ve* $W = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$ *vektör alanı için*

$$\begin{aligned}
g(\varphi Z, \varphi W) &= g(-z_1 e_2 + z_2 e_1, -w_1 e_2 + w_2 e_1) \\
&= z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3 - z_3 w_3 \\
&= g(Z, W) - \eta(Z) \eta(W)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\xi = e_3$ *olmak üzere* (φ, ξ, η) *üçlüsü* M *üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik manifold olur [30].*

∇, g *metriğine göre Levi-civita konneksiyonu olsun. Bu durumda Kozsul eşitliğinden her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\
&\quad - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemden

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1} e_1 = e_3, \; \nabla_{e_1} e_2 = 0, \; \nabla_{e_1} e_3 = -e_3, \\
&\nabla_{e_2} e_1 = 0, \; \nabla_{e_2} e_2 = e_3, \; \nabla_{e_2} e_3 = -e_2, \\
&\nabla_{e_3} e_1 = 0, \; \nabla_{e_3} e_2 = 0, \; \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

elde edilir. Bu ifadelerden $(4.2.3)$ *denklemi* $\alpha=-1$ *ve* $\beta=0$ *için sağlanır.*

Böylece (M,g,ξ,φ,η) *bir normal hemen hemen kontakt metrik manifold ve* α,β *sabittir. Şimdi Riemann ve Ricci eğrilik tensörlerini* $(4.2.48)$ *ifadelerini kullanarak hesaplayalım. Buna göre*

$$R(e_1,e_2)e_3=0,\ R(e_2,e_3)e_3=-e_3,\ R(e_1,e_3)e_3=-e_1,$$
$$R(e_1,e_2)e_2=-e_1,\ R(e_2,e_3)e_2=e_3,\ R(e_1,e_3)e_2=0,$$
$$R(e_1,e_2)e_1=e_2,\ R(e_2,e_3)e_1=0,\ R(e_1,e_3)e_1=e_3.$$

elde edilir. Bu Riemann eğrilik ifadeleri Ricci tensörü için kullanılırsa

$$Ric(e_1,e_1)=g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)+g(R(e_1,e_3)e_3,e_1)=-2$$

olur ve benzer şekilde

$$Ric(e_1,e_1)=Ric(e_2,e_2)=Ric(e_3,e_3)=-2$$

dir. Şimdi η*-Ricci soliton olduğunu göstermek için* $(4.2.21)$ *denkleminin sağlandığını göstermek yeterlidir. Buna göre* $i=1,2,3$ *için*

$$S(e_i,e_i)=-(\lambda+\alpha)g(e_i,e_i)+(\alpha-\mu)\eta(e_i)\eta(e_i) \tag{4.2.49}$$

olur ve $\alpha=-1,\ \beta=0$ *için*

$$-2=-(\lambda-1)\ \Rightarrow\ \lambda=3$$

olmasını gerektirir. Aynı şekilde

$$S(e_3,e_3)=-(\lambda+\alpha)g(e_3,e_3)+(\alpha-\mu)\eta(e_3)\eta(e_3)$$

dir. Buradan ise benzer şekilde $\lambda=3$ *ve* $\alpha=-1$ *olduğunu kullanılırsa* $\mu=5$ *bulunur. Böylece* (g,ξ,λ,μ), M *üzerinde bir* η*-Ricci solitondur.* $\lambda=3>0$ *olduğundan bu* η*-Ricci soliton genişleyendir (expanding) [30].*

Bir hemen hemen kontakt metrik manifold (M,g,φ,ξ,η) normal ve temel 2-formu $\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ kapalı ise yani $d\Phi=0$ ise M ye quasi-Sasakian manifold denir [30].

$(4.2.3)$, $(4.2.10)$ ve $(4.2.11)$ denklemlerinde $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ için bir quasi-Sasakian manifold elde edilir. Buna göre quasi-Sasakian manifoldlar üzerinde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\nabla_X \xi = -\beta \varphi X \tag{4.2.50}$$

$$(\nabla_X \eta) Y = g(\nabla_X \xi, Y) = -\beta g(\varphi X, Y) \tag{4.2.51}$$

$$R(X,Y)\xi = \beta^2 [\eta(Y) X - \eta(X) Y] \tag{4.2.52}$$

$$Ric(X,\xi) = 2\beta^2 \eta(X) \tag{4.2.53}$$

$$Ric(X,Y) = \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right) g(X,Y) + \left(3\beta^2 - \frac{r}{2}\right) \eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.54}$$

$$QX = \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right) X + \left(3\beta^2 - \frac{r}{2}\right) \eta(X)\xi \tag{4.2.55}$$

dir. Bir β-Sasakian manifold quasi-Sasakian manifolddur ve $\beta = -1$ için Sasakian manifold elde edilir. Şimdi bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldun bir η-Ricci solitona sahip olduğunu gösterelim [30].

$(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ quasi-Sasakian manifold olsun ve

$$\pounds_\xi g + 2Ric + 2\lambda g + 2\mu \eta \otimes \eta = 0 \tag{4.2.56}$$

denklemini göz önüne alalım. Bir quasi-Sasakian manifoldda ξ bir Killing vektör alanıdır, yani $\pounds_\xi g = 0$ dır. $(4.2.56)$ de $(4.2.3)$ ve $\pounds_\xi g = 0$ olması kullanılırsa

$$Ric(X,Y) = -\lambda g(X,Y) - \mu \eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.57}$$

$$QX = -\lambda X - \mu \eta(X)\xi \tag{4.2.58}$$

$$Ric(X,\xi) = -(\lambda + \mu)\eta(X) \tag{4.2.59}$$

$$QS = -(\lambda + \mu)\xi \tag{4.2.60}$$

$$\tau = 3\lambda - \mu \tag{4.2.61}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir [30].

Teorem 4.2.7. *Skaler eğriliği $\tau = -(3\lambda + \mu)$ olan bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifold M üzerinde, (ξ, λ, μ) bir η-Ricci solitondur [30].*

$\mu = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. *Skaler eğriliği $\tau = -3\lambda$ olan bir quasi-Sasakian manifold üzerinde (ξ, λ) bir Ricci solitondur [30].*

Örnek 4.2.2. *x, y, z, $\mathbb{R}^3$ ün standart koordinatları olmak üzere $M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z \neq 0 \right\}$ olsun. M üzerinde*

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial x},\ e_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = 2\frac{\partial}{\partial x}.$$

vektör alanlarını göz önüne alalım. M üzerindeki g Riemann metriğini

$$g\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}$$

ile tanımlayalım. η, 1-formunu ise $Z \in \Gamma(TM)$ için $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ ile tanımlayalım. $(1,1)$-tensör alanı φ yi ise

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= 1,\ \eta(e_1) = \eta(e_2) = 0, \\
[e_1, e_2] &= \frac{1}{2}e_3,\ [e_2, e_3] = 0,\ [e_1, e_3] = 0, \\
\varphi^2 Z &= -Z + \eta(Z) e_3 \\
g(\varphi Z, \varphi W) &= g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\xi = e_3$ olmak üzere (φ, ξ, η, g), M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapı tanımlar. ∇, g ye göre Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Kozsul eşitliği

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\
&\quad - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])
\end{aligned}$$

sağlanır. Kozsul formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= 0,\ \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{4}e_3,\ \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{4}e_3 \\
\nabla_{e_2} e_1 &= \frac{1}{4}e_3,\ \nabla_{e_2} e_2 = 0,\ \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{1}{4}e_1 \\
\nabla_{e_3} e_1 &= \frac{1}{4}e_2,\ \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{4}e_1,\ \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.62}$$

elde edilir. (4.2.62) *denklemlerinden* (4.2.52) *denklemi $\beta = \frac{1}{4}$ ve $\xi = e_3$ için sağlanır. Böylece bu manifold $\beta = \frac{1}{4}$ olmak üzere bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifolddur. Ayrıca* (4.2.62) *ifadelerinden Riemann ve Ricci eğrilik tensör alanları*

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_2) e_3 = 0,\ R(e_2, e_3) e_3 = \frac{1}{16}e_2,\ R(e_1, e_3) e_3 = \frac{1}{16}e_1, \\
&R(e_1, e_2) e_2 = -\frac{3}{16}e_1,\ R(e_2, e_3) e_2 = -\frac{1}{16}e_3,\ R(e_1, e_3) e_2 = 0, \\
&R(e_1, e_2) e_1 = \frac{3}{16}e_2,\ R(e_2, e_3) e_1 = 0,\ R(e_1, e_3) e_1 = -\frac{1}{16}e_3.
\end{aligned}$$

ve

$$Ric\left(e_1,e_1\right)=g\left(R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_1\right)+g\left(R\left(e_1,e_3\right)e_3,e_1\right)=-\frac{1}{8}$$

olur ve benzer şekilde

$$Ric\left(e_1,e_1\right)=Ric\left(e_2,e_2\right)=\frac{1}{8},\ Ric\left(e_3,e_3\right)=-\frac{1}{8}$$

olarak bulunur. Böylece bir η*-Ricci soliton olması için* $(4.2.57)$ *denkleminin sağlanmasıdır, yani*

$$Ric\left(e_i,e_i\right)=-\lambda g\left(e_i,e_i\right)-\mu\eta\left(e_i\right)\eta\left(e_i\right),\ i=1,2,3$$

sağlanması gerekir. Buna göre

$$Ric\left(e_1,e_1\right)=-\lambda g\left(e_1,e_1\right)$$

veya

$$\lambda=\frac{1}{8}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$Ric\left(e_3,e_3\right)=-\lambda g\left(e_3,e_3\right)-\mu\eta\left(e_3\right)\eta\left(e_3\right)$$

veya

$$\mu=-\frac{1}{4}$$

elde edilir. O halde (g,ξ,λ,μ) *bir* η*-Ricci solitondur [30].*

5. KOMPLEKS UZAY FORMUN REEL HİPERYÜZEYLERİ ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölümde ilk önce kompleks uzay formlar ve kompleks uzay formların reel hiperyüzeyleri ile ilgili kısa bilgiler verilecektir. Daha sonra ise reel hiperyüzeyler üzerindeki Ricci solitonların ve η-Ricci solitonların karakteristik özelliklerini incelenilecektir.

5.1 Kompleks Uzay Formlar

Bir kompleks n-boyutlu (reel boyut $2n$) kompleks uzay form, sabit holomorfik kesit eğriliği c ye sahip bir Kahler manifolddur. Bu Kahler manifoldu $\widetilde{M}(c)$ ile gösterelim. Eğer $c > 0$ ise $\widetilde{M}$, bir kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ e, eğer $c = 0$ ise $\widetilde{M}$, kompleks Öklidyen uzay $\mathbb{C}^n$ e, eğer $c < 0$ ise kompleks hiperbolik uzay $\mathbb{C}H^n$ e izomorfiktir. Kompleks projektif ve kompleks hiperbolik uzaylara non-flat kompleks uzay formlar denir, yani bu $c \neq 0$ olması durumudur [34].

$\mathbb{C}^{n+1}$, kompleks Öklidyen uzay olsun. $\mathbb{C}^{n+1}$ in doğal kordinat sistemi $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ olsun. Buna göre $\mathbb{C}^{n+1}$ deki Hermityen metrik $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ ve $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ için

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{n} z_k \overline{w}_k \tag{5.1.1}$$

olarak tanımlanır. $Jz = iz$, olarak tanımlanan J, $\mathbb{C}^{n+1}$ üzerinde bir kompleks yapıdır. $z_k = u_{2k} + iu_{2k+1}$, $w_k = v_{2k} + iv_{2k+1}$ olmak üzere g Riemann metriği $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ için $g(z,w) = \mathrm{Re}\, F(z,w)$ ile tanımlıdır veya daha açık olarak $u, v \in \mathbb{R}^{2n+2}$ için

$$g(u,v) = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_k \tag{5.1.2}$$

dır. Eğer F Hermityen metriği Lorentz ise

$$g(u,v) = -u_0 v_0 - u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} u_k v_k \tag{5.1.3}$$

şeklinde tanımlıdır [34].

$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ üzerindeki çarpımsal grup ile $\mathbb{C}^*$ gösterilsin. Bu durumda $\mathbb{C}^*$ sıfırdan farklı kompleks sayılardan oluşur. U_j, $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ için j-yinci bileşeni, yani $z_j \neq 0$ olan noktaların kümesi olsun. U_j üzerinde

$$\left(z_0, \ldots, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n\right) \longrightarrow \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm altında U_j nin görüntüsü U_j^* olsun. Böylece

$$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right)/\mathbb{C}^*$$

şeklinde bir doğal projeksiyon tanımlanmış olur. $\mathbb{C}P^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right)/\mathbb{C}^*$ a kompleks projektif uzay denir.

$z_j \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right)$ ye karşılık gelen $\left(z_0, \ldots, z_j, \ldots, z_n\right)$ e U_j üzerinde homojen kordinat sistemi denir [34]. $\mathbb{C}^{n+1}$ ile $\mathbb{R}^{2n+2}$ uzayları izomorftur. Böylece $(2n+1)$-boyutlu r-yarıçaplı hiperküre

$$S^{2n+1}(r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \, g(z,z) = r^2 \right\}$$

ile tanımlıdır. $z \in S^{2n+1}(r)$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_z S^{2n+1}(r) = \left\{ w \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \, g(z,w) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır, yani z yer vektörü $S^{2n+1}(r)$ nin normal vektör alanıdır. $\mathbb{R}^{2n+2}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$, $S^{2n+1}(r)$ üzerine indirgenen Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere $X, Y \in \Gamma\left(T_z S^{2n+1}(r)\right)$ için Gauss formülünden

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - g(X,Y)\frac{z}{r^2}$$

olarak yazılır. Ayrıca ∇ nın Riemann eğrilik tensörü, $X, Y, Z \in \Gamma\left(T_z S^{2n+1}(r)\right)$ için

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

olarak bulunur. $S^{2n+1}(r)$ den $\mathbb{C}P^n$ üzerine kanonik projeksiyon

$$\pi : S^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

şeklindedir.

Kompleks hiperbolik uzayın inşası bazı önemli farklarla birlikte kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ inşasına benzer şekilde yapılır. $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ için

$$F(z,w) = -z_0\overline{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$

Lorentz Hermityen metriktir [34]. $g(z,w) = \operatorname{Re} F(z,w)$ dir ve daha açık olarak $(5.1.3)$ ile verilir. Buna göre $\mathbb{C}^{n+1}$ de r-yarıçaplı anti-de Sitter uzayı

$$H_1^{2n+1} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \, g(z,z) = -r^2 \right\}$$

ile tanımlanır. Buna göre $z \in H_1^{2n+1}$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_z H_1^{2n+1} = \left\{ w \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \; g(z,w) = 0 \right\}$$

dır, yani z yer vektörü H_1^{2n+1} nin normal vektör alanıdır. Buna göre $X, Y \in \Gamma\left(T_z H_1^{2n+1}\right)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(X,Y)\frac{z}{r^2}$$

olur. ∇ nın Riemann eğrilik tensörü $X, Y, Z \in \Gamma\left(T_z H_1^{2n+1}\right)$ için

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{r^2}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

olarak elde edilir. H_1^{2n+1} den kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ üzerine olan kanonik projeksiyon da H_1^{2n+1} in görüntüsü $\mathbb{C}H^n$ ile gösterilirse

$$\pi : H_1^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}H^n \subset \mathbb{C}P^n$$

olarak ifade edilebilir. $\mathbb{C}H^n$ e kompleks hiperbolik uzay denir [34] ve $\mathbb{C}H^n$, $\mathbb{C}P^n$ in açık bir alt kümesidir.

Şimdi $\mathbb{C}P^n$ veya $\mathbb{C}H^n$ uzaylarını $\widetilde{M}$ ile $S^{2n+1}(r)$ veya H_1^{2n+1} uzaylarını da $\widetilde{M}'$ ile gösterelim. Böylece kanonik projeksiyon

$$\pi : \widetilde{M}' \longrightarrow \widetilde{M}$$

olarak göz önüne alınır. M, $\widetilde{M}$ de bir hiperyüzey olmak üzere $M' = \pi^{-1}M$ de $\widetilde{M}'$ bir hiperyüzeydir.

Şimdi ise sabit holomorfik kesit eğrilikli uzaylarda reel hiperyüzeylerin standard örneklerini verelim. İlk önce kompleks hiperbolik uzaydaki örneklerden bahsedilecektir. $\widetilde{M} = \mathbb{C}H^n$, $t > 0$ bir reel parametre ve

$$M' = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \; g(z,z) = -r^2, \; |z_0 - z_1|^2 = t \right\}$$

olmak üzere $M = \pi M'$ ne horosphere veya Montiel tüpü (self tube) denir [34].

Teorem 5.1.1. *Horosphereler kompleks hiperbolik uzayın iki farklı asli eğriliğine sahip olan hiperyüzeylerdir. Bu asli eğriliklerin* $2n-2$ *tanesi* $\lambda = \frac{1}{r}$ *ve bir tanesi de* $\alpha = \frac{2}{r}$ *dir [34].*

$\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^{p+1} \times \mathbb{C}^{q+1}$, $p,q \geq 0$, $p+q = n-1 > 0$ olacak şekilde çarpım uzayı olarak yazılabilir. $\mathbb{C}^{p+1}$ ve $\mathbb{C}^{q+1}$ üzerindeki metrikler $\mathbb{C}^{n+1}$ in Hermityen metriği F den indirgenen metriklerdir. Bunları sırasıyla F_1 ve F_2 ile gösterelim.

$$M' = \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \; z_1 \in \mathbb{C}^{p+1},\; z_2 \in \mathbb{C}^{q+1}, \right.$$
$$\left. F_1(z_1, z_1) = -\left(b^2 + r^2\right),\; F_2(z_2, z_2) = b^2 \right\}$$

olmak üzere

$$M' = H_1^{2p+1}\left(\left(b^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \times S^{2q+1}(b)$$

şeklinde yazılır. $M = \pi M'$ ye $\mathbb{C}H^n$ üzerinde tüp denir [34]. Burada $b > 0$ olan bir reel parametre ve $r > 0$ dır. Böylece bir tüp başlangıç parametresi $b > 0$ ve daha sonra

$$b = r\sinh u,\; \left(b^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}} = r\cosh u,\; \lambda_1 = r^{-1}\tanh u \tag{5.1.4}$$
$$\lambda_2 = r^{-1}\coth u,\; c = -r^{-2}$$

ile u parametresine bağlı bir parametreli ailedir. (5.1.4) dan $\lambda_1\lambda_2 + c = 0$ olur. $z_1 \in H_1^{p+1}\left(b^2+r^2\right)$, $z_2 \in S^{q+1}(b)$ olmak üzere $N' = -(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ denilirse N', M' nün birim normal vektör alanı olur. $z = (z_1, z_2) \in M'$ için $V = Jz$ diyelim.

$$g(V, z) = g(Jz, z) = 0$$

ve

$$g(V, N) = -g(Jz_1 + Jz_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = -\lambda_1 g(Jz_1, z_1) - \lambda_2 g(Jz_2, z_2) = 0$$

olduğundan V, M' üzerinde bir vektör alanıdır. Bu λ_1 ve λ_2 ler $\alpha = \frac{2}{r}\coth 2u$ olmak üzere

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \frac{1}{r^2} = 0$$

ikinci dereceden denklemin çözümleridir [34].

Lemma 5.1.1. *A', M' nun şekil operatörü olsun. $X \in \Gamma(H_1^{2p+1})$ olmak üzere $A'X = \lambda_1 X$ ve $Y \in \Gamma(S^{2q+1})$ için $A'Y = \lambda_2 X$ dir. Eğer $U = -JN'$ denilirse bu durumda $A'V = U$ ve $A'U = \alpha U - r^{-2}V$ dir [34].*

$M = \pi M'$ hiperyüzeyini göz önüne alalım. $z \in M'$ noktasında

$$T_1 = \left\{ z \in T_z H_1^{2p+1} \middle| \; g(Z, U) = 0,\; g(z, v) = 0 \right\}$$
$$T_2 = \left\{ z \in T_z S^{2q+1} \middle| \; g(Z, U) = 0,\; g(z, v) = 0 \right\}$$

olmak üzere T_1 ve T_2 distribüsyonları J invaryant distribüsyonlardır. Böylece $\xi' = JN$ ve $\xi = \pi\xi'$ olmak üzere

$$T_{\pi(z)}M = Sp\{\xi\} \oplus \pi_* T_1 \oplus \pi_* T_2$$

olarak yazılabilir. Böylece M nin şekil operatörü A olmak üzere $X \in \Gamma(\pi_* T_1)$, $Y \in \Gamma(\pi_* T_2)$ için

$$A\xi = \alpha_1 \xi,\ AX = \lambda_1 X,\ AY = \lambda_2 Y$$

olarak yazılır.

Eğer $p = 0$ ise M ye bir geodezik hiperküre denir [34]. M nin iki farklı asli eğriliği vardır. Bunlardan $2n-2$ tanesi λ_1 dır, birisi ise α dır. Geodezik kürenin yarıçapı ru dur. Eğer $q = 0$ ise M ye kompleks hiperbolik uzay üzerinde tüp denir [34]. Bu durumda da iki farklı asli eğriliğe sahiptir, $2n-2$ tanesi λ_1 ve birisi de α dır ve yarıçapı ise ru dur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.2. *M, kompleks hiperbolik uzayda $p > 0$, $q = 0$, $p + q = n - 1$ ile bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M üç farklı asli eğriliğe sahiptir. Bunların $2p$-tanesi $\lambda_1 = \frac{1}{r}\tanh u$, $2q$-tanesi $\lambda_2 = \frac{1}{r}\coth u$, bir tanesi ise $\alpha_1 = \frac{2}{r}\coth u$ dur [34].*

$r > 0$ ve bir reel parametre de $t > r^4$ olmak üzere

$$M' = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \middle|\ g(z,z) = -r^2,\ |F(z,\bar{z})|^2 = t \right\}$$

hiperbolik uzayın bir hiperyüzeyidir. $M = \pi M'$ hiperyüzeyine de reel hiperbolik üzerindeki tüp denir [34].

Bu hiperyüzeyin asli eğrilikleri ise $n-1$ tanesi $\lambda_1 = \frac{1}{r}\coth u$, $n-1$ tanesi $\lambda_2 = \frac{1}{r}\tanh u$ ve birisi ise $\alpha_1 = \frac{2}{r}\tanh 2u$ dur.

$\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^{p+1} \times \mathbb{C}^{q+1}$, $p,q \geq 0$ ve $p+q = n-1 > 0$, $0 < b < r$ olmak üzere bir hiperyüzey M',

$$M' = S^{2p+1}\left(\left(r^2 - b^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \times S^{2q+1}(b)$$

olsun. Dikkat edilecek olursa M' iki kürenin kartezyen çarpımıdır ve M', $S^{2n+1}(r)$ küresinde yatar. $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ e kanonik projeksiyon olmak üzere $M = \pi M'$ ye kompleks projektif uzay üzerinde tüp denir [34]. Eğer $0 < u < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $b = r\sin u$ denilirse $\left(r^2 - b^2\right)^{\frac{1}{2}} = r\cos u$ olur. Böylece asli eğriliklerini $\lambda_1 = -\frac{1}{r}\tan u$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{r}\cot u$ olarak yazılır. Projektif uzayın sabit eğriliği $c = r^{-2}$ olduğundan $\lambda_1 \lambda_2 + c = 0$ olur [34].

Hiperbolik uzay durumunda olduğu gibi $p = 0$ durumunda da kompleks projektif uzay üzerindeki tüp bir geodezik küre olur ve asli eğrilikleri ise $2n-2$ tanesi $\lambda_2 = \frac{1}{r}\cot u$ ve birisi ise $\alpha_1 = \frac{2}{r}\cot 2u$ olur [34].

5.2 Kompleks Uzay Formların Reel Hiperyüzeyleri

$(\widetilde{M}, J, \tilde{g})$ reel $2n$-boyutlu (kompleks n-boyutlu) bir Kahler manifold olsun. Burada J, $\widetilde{M}$ nin kompleks yapısı ve $\tilde{g}$ de Kahler metrik tensörüdür. Şimdi M, $\widetilde{M}$ nin bir reel hiperyüzeyi olsun. M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere M ye ait bir X vektör alanı için

$$JX = \varphi X + \eta(X) N \tag{5.2.1}$$

olarak yazılır. Burada $\varphi X \in \Gamma(TM)$, $\eta(X) = \tilde{g}(JX, N)$ şeklinde tanımlı bir 1-formdur. Eğer

$$JN = -\xi \tag{5.2.2}$$

denilirse, ξ M üzerinde bir birim vektör alanıdır. $\tilde{g}$ den M üzerine indirgenen metrik g ile gösterilsin. Buna göre (5.2.1) ve (5.2.2) den $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} -X = J^2 X &= J(\varphi X + \eta(X) N) \\ &= J(\varphi X) + \eta(X) JN \\ &= \varphi^2 X + \eta(\varphi X) N - \eta(X)\xi \end{aligned}$$

olur. Bu son denklem teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \ \eta \circ \varphi = 0 \tag{5.2.3}$$

elde edilir. (5.2.2) den

$$\eta(\xi) = g(\xi, \xi) = 1 \tag{5.2.4}$$

olur. Ayrıca tekrar (5.2.1) ve (5.2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(\varphi X + \eta(X) N, \varphi Y + \eta(Y) N) \\ &= g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(Y)\tilde{g}(\varphi X, N) + \eta(X)\tilde{g}(N, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)\tilde{g}(N,N) \\ g(X,Y) &= g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

veya

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{5.2.5}$$

sonucuna ulaşılır. (5.2.1) ifadesinde X yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned} J\xi &= \varphi\xi + \eta(\xi) N \\ N &= \varphi\xi + N \end{aligned}$$

yani

$$\varphi\xi = 0 \tag{5.2.6}$$

elde edilir. Böylece $(5.2.3)$, $(5.2.4)$, $(5.2.5)$ ve $(5.2.6)$ dan (φ, ξ, η, g), M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapıdır [34], [35], [36].

$\widetilde{M}$ nin reel hiperyüzeyi M üzerindeki Gauss ve Weingarten denklemleri $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N \tag{5.2.7}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -AX \tag{5.2.8}$$

dır, burada $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\widetilde{M}$ ve M nin Levi-Civita konneksiyonları ve A da N ye karşılık gelen şekil operatörüdür. Kahler manifoldda $\widetilde{\nabla}J = 0$ olduğundan $(5.2.1)$, $(5.2.7)$, $(5.2.8)$ den

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\widetilde{\nabla}_X J\right) Y = \widetilde{\nabla}_X JY - j\widetilde{\nabla}_X Y \\
&= \widetilde{\nabla}_X (\varphi Y + \eta(Y)N) - J(\nabla_X Y + g(AX, Y)N) \\
&= \widetilde{\nabla}_X \varphi Y + X(\eta(Y))N + \eta(Y)\widetilde{\nabla}_X N - J\nabla_X Y - g(AX, Y)JN \\
&= \nabla_X \varphi Y + g(AX, \varphi Y)N + X(\eta(Y))N - \eta(Y)AX \\
&\quad - \varphi\nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)N + g(AX, Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklem normal ve teğet bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X \varphi Y - \varphi\nabla_X Y - \eta(Y)AX + g(AX, Y)\xi = 0 \tag{5.2.9}$$

ve

$$g(AX, \varphi Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) = 0 \tag{5.2.10}$$

elde edilir. (5.2.9) dan

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(Y)AX - g(AX, Y)\xi \tag{5.2.11}$$

ifadesine ulaşılır. Benzer şekilde $(\widetilde{\nabla}_X J)N = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{\nabla}_X JN - J\widetilde{\nabla}_X N = -\widetilde{\nabla}_X \xi + JAX \\
&= -\nabla_X \xi - g(AX, \xi)N + \varphi AX + \eta(AX)N \\
&= -\nabla_X \xi - \eta(AX)N + \varphi AX + \eta(AX)N
\end{aligned}$$

veya

$$\nabla_X \xi = \varphi AX \tag{5.2.12}$$

şeklinde elde edilir [35].

Şimdi M üzerinde $U = \nabla_{\xi}\xi$ ile bir vektör alanı tanımlayalım. Buna göre $g(\xi,\xi) = 1$ ve $g(\varphi X, X) = 0$ olduğundan

$$g(U,\xi) = 0,\ g(U, A\xi) = 0$$

elde edilir. (5.2.5) ve (5.2.12) den

$$\begin{aligned}\|U\|^2 &= g(U,U) = g(\varphi A\xi, \varphi A\xi)\\ &= g(A\xi, A\xi) - \eta(A\xi)^2\end{aligned}$$

veya $\alpha_1 = g(A\xi,\xi)$, $\alpha_2 = g\left(A^2\xi,\xi\right)$ denilirse

$$\|U\|^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \tag{5.2.13}$$

olarak bulunur. Bu son denklem ve (5.2.5) den aşağıdaki lemma verilir [35].

Lemma 5.2.1. *$A\xi = \alpha_1\xi$ olması için gerek ve yeter $\|U\| = 0$ olmasıdır [35].*

Şimdi kabul edelim ki $\widetilde{M}$ Kahler manifoldu c skaler eğrilikli kompleks uzay form olsun. Bu durumda M nin Gauss ve Codazzi denklemleri $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y - 2g(\varphi X,Y)\varphi Z\}\\ &= +g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

ve

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = \frac{c}{4}\{\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X - 2g(\varphi X,Y)\xi\} \tag{5.2.15}$$

dir. M nin Ricci eğriliği, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-2}, \xi\}$ ortonormal çatısına göre $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n-2} g(R(e_i,X)Y, e_i) + g(R(\xi,X)Y,\xi) \tag{5.2.16}$$

dır. $Ric(X,Y) = g(QX,Y)$ olmak üzere Q, M nin Ricci tensörü ise (5.2.14) ve (5.2.16) den

$$QX = \frac{c}{4}\{(2n+1)X - 3\eta(X)\xi\} + \mathbf{H}AX - A^2X \tag{5.2.17}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{H} = izA$ olup M nin ortalama eğriliğidir.

Tanım 5.2.1. *Bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$, $c \neq 0$, de bir M hiperyüzeyinde reel vektör alanı ξ bir asli vektör alanı yani $A\xi = \alpha_1\xi$ ise M ye Hopf hiperyüzeyi denir. Burada α_1 bir reel sabittir [37].*

A şekil operatörünün $X, Y \in \Gamma(TM)$ için kovaryant türevi

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X AY - A\nabla_X Y$$

dir. $A\xi = \alpha_1 \xi$ olduğu göz önüne alınırsa (5.2.12) den

$$(\nabla_X A)\xi = \alpha_1 \varphi AX - A\varphi AX \tag{5.2.18}$$

elde edilir. Codazzi denklemi (5.2.15) de X yerine ξ, Y yerine X alınırsa

$$\left(\nabla_\xi A\right)X - (\nabla_X A)\xi = \frac{c}{4}\{\eta(\xi)\varphi X - \eta(X)\varphi\xi - 2g(\varphi\xi, Y)\xi\}$$

veya

$$\left(\nabla_\xi A\right)X = \frac{c}{4}\varphi X + (\nabla_X A)\xi$$

olur. (5.2.18) denkleminde

$$\left(\nabla_\xi A\right)X = \frac{c}{4}\varphi X + \alpha_1 \varphi AX - A\varphi AX \tag{5.2.19}$$

sonucuna ulaşılır. $\nabla_\xi A$ bir self-adjoînt dönüşümdür, yani

$$g\left(\left(\nabla_\xi A\right)X, Y\right) = g\left(X, \left(\nabla_\xi A\right)Y\right)$$

dır. Buna göre (5.2.19) den

$$\begin{aligned} g\left(\left(\nabla_\xi A\right)X, Y\right) &= g\left(X, \frac{c}{4}\varphi Y + \alpha_1 \varphi AY - A\varphi AY\right) \\ &= -\frac{c}{4}g(\varphi X, Y) - \alpha_1 g(A\varphi X, Y) + g(A\varphi AX, Y) \end{aligned}$$

veya

$$\left(\nabla_\xi A\right)X = -\frac{c}{4}\varphi X - \alpha_1 \varphi AX + A\varphi AX$$

elde edilir. (5.2.19) ile bu denklem eşit olduğundan

$$2A\varphi AX - \frac{c}{2}\varphi X = \alpha_1(\varphi A + A\varphi)X \tag{5.2.20}$$

bağıntısı elde edilir.

Kabul edelim ki X, ξ ye dik bir vektör alanı ve $\|X\| = 1$ olmak üzere $AX = fX$ olsun. Bu durumda (5.2.20) dan

$$(2f - \alpha_1)A\varphi X = \left(f\alpha_1 + \frac{c}{2}\right)\varphi X \tag{5.2.21}$$

elde edilir. Eğer $2f = \alpha_1$ ise (5.2.21) dan $f^2 = -\frac{c}{4}$ olur ki bu $c < 0$ olması demektir, yani kompleks uzay form kompleks hiperbolik uzay $\mathbb{C}H^n$ olur [35].

Ayrıca (5.2.21) dan aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 5.2.2. *$c \neq 0$ olan bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$ de bir Hopf hiperyüzeyinde ξ ye dik bir X vektör alanı bir asli doğrultu ise bu durumda φX de bir asli doğrultudur [35].*

5.3 Reel Hiperyüzeylerin Ricci Solitonları

Şimdi M, $\widetilde{M}$ Kahler manifoldunun reel hiperyüzeyi olsun. Eğer M üzerinde

$$\frac{1}{2}\pounds_{\xi}g + Ric = \lambda g + \mu\eta \otimes \eta \tag{5.3.1}$$

denklemini sağlayan λ, μ reel sayıları var ise M, potansiyel vektör alanı ξ olan bir η-Ricci solitona sahip olur. Eğer $\mu = 0$ ise M bir Ricci solitona sahiptir.

Şimdi $\pounds_{\xi}g$ yi hesaplayalım. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\pounds_{\xi}g\right)(X,Y) = g(\nabla_X\xi, Y) + g(X, \nabla_Y\xi)$$

dır. (5.2.12) den

$$\begin{aligned}\left(\pounds_{\xi}g\right)(X,Y) &= g(\varphi AX, Y) + g(X, \varphi AY) \\ &= g(\varphi AX, Y) - g(A\varphi X, Y) \\ &= g((\varphi A - A\varphi)X, Y)\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

olarak bulunur.

Kabul edelim ki M bir η-Ricci soliton olsun. Bu durumda (5.2.17) ve (5.3.2) deki ifadeleri (5.3.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\left(A^2 - \mathbf{H}A - \frac{1}{2}(\varphi A - A\varphi) - \frac{c}{4}(2n+1) + \lambda\right)X \\ &= -\left(\mu + \frac{3}{4}c\right)\eta(X)\xi\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

elde edilir.

İlk önce ξ nin bir asli eğrilik vektörü olduğunu ispatlayalım. (5.3.3) denkleminde X yerine ξ alınırsa (5.2.12) den

$$A^2\xi - \mathbf{H}A\xi - \frac{1}{2}U + \left(\lambda + \mu + \frac{c}{2}(1-n)\right)\xi = 0 \tag{5.3.4}$$

ifadesi elde edilir. (5.3.4) ün her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\alpha_2 - \alpha_1\mathbf{H} = -\left(\lambda + \mu + \frac{c}{2}(1-n)\right) \tag{5.3.5}$$

elde edilir ve bu (5.3.4) kullanacak olursa

$$A^2\xi = \mathbf{H}A\xi + \frac{1}{2}U + (\alpha_2 - \alpha_1\mathbf{H})\,\xi \tag{5.3.6}$$

olur. (5.3.6) in her iki tarafınını U ile iç çarpıma tabi tutulursa ve $g(\xi,U) = g(A\xi,U) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$g(A\xi,AU) = \frac{1}{2}\|U\|^2 \tag{5.3.7}$$

elde edilir. Eğer

$$S = A^2 - \mathbf{H}A - \frac{1}{2}(\varphi A - A\varphi) - \left(\frac{c}{4}(2n+1) - \lambda\right)I \tag{5.3.8}$$

denilirse S bir simetrik operatördür.

Böylece (5.3.3) denklemi

$$SX = -\left(\mu + \frac{3}{4}c\right)\eta(X)\,\xi$$

olarak yeniden ifade edilir. Şimdi $AS - SA$ yı hesaplayalım. (5.3.8) den

$$\frac{1}{2}\left(\varphi A^2 + A^2\varphi\right)X - A\varphi AX = -\left(\mu + \frac{3}{4}c\right)(\eta(X)A\xi - \eta(AX)\,\xi) \tag{5.3.9}$$

elde edilir. Burada X yerine ξ alınırsa

$$\frac{1}{2}\varphi A^2\xi - AU = -\left(\mu + \frac{3}{4}c\right)(A\xi - \alpha_1\xi)$$

sonucuna ulaşılır. Bu son denklemde tekrar φ uygulanır ve düzenlenirse

$$A^2\xi = \alpha_2\xi - 2\varphi AU + \left(2\mu + \frac{3}{2}c\right)U \tag{5.3.10}$$

olur. (5.3.6) ve (5.3.10) dan

$$\mathbf{H}A\xi - \alpha_1 H\xi - \left(2\mu + \frac{3}{2}c - \frac{1}{2}\right)U + 2\varphi AU = 0$$

veya buna φ uygulanırsa

$$2AU + \left(2\mu + \frac{3}{2}c - \frac{1}{2}\right)\varphi U - \mathbf{H}U = 0 \tag{5.3.11}$$

elde edilir. (5.3.11) denklemini U ile iç çarpılırsa ve $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ olduğunu göz önüne alınırsa

$$2g(AU,U) = \mathbf{H}\|U\|^2 \tag{5.3.12}$$

ifadesini ve ayrıca (5.3.11) ile $A\xi$ iç çarpılırsa

$$g(AU,A\xi) = \frac{1}{2}\left(2\mu + \frac{3}{2}c - \frac{1}{2}\right)\|U\|^2 \tag{5.3.13}$$

ifadesi bulunur. $(5.3.7)$ ve $(5.3.13)$ den

$$\left(2\mu+\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}\right)\|U\|^{2}=0$$

elde edilir ve eğer $2\mu+\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}\neq 0$ ise $\|U\|=0$ olur ve Lemma 5.2.1 sağlanır, dolaysıyla $A\xi=\alpha_1\xi$ elde edilir.

Şimdi $2\mu+\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}=0$ olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $(5.3.11)$ dan

$$2AU=-\varphi U+\mathbf{H}U \tag{5.3.14}$$

olur. $(5.3.3)$ de X yerine U alır ve $\mu+\frac{3}{4}c=\frac{3}{4}$ olması ile $(5.3.5)$ kullanılırsa

$$A^{2}U-\mathbf{H}AU-\frac{1}{2}(\varphi AU-A\varphi U)+\left(\alpha_1\mathbf{H}-\alpha_2-\frac{3}{4}\right)U=0 \tag{5.3.15}$$

elde edilir. $(5.3.15)$, U ile iç çarpıma tabi tutalım her bir terimini ayrı ayrı hesaplayalım. Buna göre $(5.3.14)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(A^{2}U,U\right)&=g(AU,AU)=g\left(-\frac{1}{2}\varphi U+\frac{\mathbf{H}}{2}U,-\frac{1}{2}\varphi U+\frac{\mathbf{H}}{2}U\right)\\ &=\frac{1}{4}\|U\|^{2}+\frac{\mathbf{H}^{2}}{4}\|U\|^{2}\end{aligned}$$

ve $(5.3.14)$ kullanılırsa

$$g(-\mathbf{H}AU,U)=-\frac{\mathbf{H}^{2}}{2}\|U\|^{2}$$

elde edilir ve $(5.2.13)$ den $\alpha_2=\|U\|^{2}+\alpha_1^{2}$ olduğu dikkate alınırsa $(\alpha_1H-\alpha_2-3)\|U\|^{2}$ ifadesi

$$\frac{1}{4}\|U\|^{2}+\frac{\mathbf{H}^{2}}{4}\|U\|^{2}-\frac{\mathbf{H}^{2}}{2}\|U\|^{2}-\frac{1}{2}\|U\|^{2}-\left(\alpha_1\mathbf{H}-\alpha_2-\frac{3}{4}\right)\|U\|^{2}$$

ye eşit olur. Bu bulunan değerler $(5.3.15)$ denleminde dikkate alınır ve elde edilen son ifade -4 ile çarpılırsa

$$\mathbf{H}^{2}-4\alpha_1\mathbf{H}+4\left(\alpha_1^{2}+\|U\|^{2}+1\right)=(\mathbf{H}-2\alpha_1)^{2}+4\left(\|U\|^{2}+1\right)>0$$

elde edilir ki bu sıfırdan farklıdır. Böylece $(5.3.15)$ den $\|U\|^{2}=0$ elde edilir. Buradan aşağıdaki önerme verilebilir [35].

Önerme 5.3.1. *Eğer M bir η-Ricci solitona sahip ise bu durumda ξ bir asli eğrilik vektörüdür [35].*

$(5.3.1)$ de $\mu=0$ olması durumunda Ricci soliton denklemi elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 5.3.1. *$c \neq 0$ olan bir kompleks uzay formda potansiyel vektör alanı ξ olan bir Ricci soliton yoktur [35].*

5.4 Hopf Hiperyüzeyleri Üzerinde η-Ricci Solitonlar

M, bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$, $c \neq 0$, de Hopf hiperyüzeyi olsun. Buna göre reel vektör alanı ξ için $A\xi = \alpha_1 \xi$ sağlanır. Buradan M üzerinde $(5.2.12)$ denkleminden

$$\nabla_{\xi} \xi = \varphi A \xi = \alpha_1 \varphi \xi = 0$$

olur. $(5.2.14)$ denkleminden Z yerine ξ alınırsa

$$R(X,Y)\xi = \frac{c}{4}\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + g(Y,A\xi)AX - g(X,A\xi)AY \tag{5.4.1}$$

olur. $A\xi = \alpha_1 \xi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$R(X,Y)\xi = \frac{c}{4}\{\eta(X)Y - \eta(X)Y\} + \alpha_1\{\eta(Y)AX - \eta(X)AY\} \tag{5.4.2}$$

elde edilir. $(5.2.17)$ dan M nin Ricci tensörü

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) = \frac{c}{4}\{(2n+1)g(X,Y) - 3\eta(X)\eta(Y)\} \\ + \mathbf{H}g(AX,Y) - g(AX,AY) \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

dır.

h, M üzerinde $(0,2)$-tipinde bir simetrik paralel tensör alanı ise $(4.1.2)$ den, $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için

$$h(R(X,Y)Z,W) + h(Z,R(X,Y)W) = 0 \tag{5.4.4}$$

dır ve $Z = W = \xi$ alınırsa

$$h(R(X,Y)\xi,\xi) + h(\xi,R(X,Y)\xi) = 0$$

veya h simetrik olduğundan

$$h(R(X,Y)\xi,\xi) = 0$$

olur. Burada $(5.4.1)$ deki $R(X,Y)\xi$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{c}{4}\{\eta(Y)h(X,\xi) - \eta(X)h(Y,\xi)\} \\ +\alpha_1\{\eta(Y)h(AX,\xi) - \eta(X)h(AY,\xi)\} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

denklemi elde edilir. Burada X yerine ξ alınırsa

$$\frac{c}{4}\{\eta(Y)h(\xi,\xi)-\eta(\xi)h(Y,\xi)\} \tag{5.4.6}$$
$$+\alpha_1\{\alpha_1\eta(Y)h(\xi,\xi)-h(AY,\xi)\}=0$$

olur. A nın h ya göre self-adjoint olduğu kabul edilirse

$$h(AY,\xi)=h(Y,A\xi)=\alpha_1 h(Y,\xi) \tag{5.4.7}$$

ifadesine ulaşılır. Buna göre (5.4.6) dan

$$\left(\frac{c}{4}+\alpha_1^2\right)\{\eta(Y)h(\xi,\xi)-h(Y,\xi)\}=0 \tag{5.4.8}$$

elde edilir [35].

Tanım 5.4.1. *Eğer bir M Hopf hiperyüzeyi $c+4\alpha_1^2\neq 0$ şartını sağlıyor ise M ye regüler α_1-Hopf hiperyüzeyi denir [38].*

Örneğin kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ nin her Hopf yüzeyi regülerdir, çünkü $c>0$ dır.

Teorem 5.4.1. *Bir regüler α_1-Hopf hiperyüzeyinde bir simetrik paralel ikinci dereceden kovaryant tensör h için aşağıdakiler denktir;*

(i) *Şekil operatörü h-ξ-simetriktir, yani* (5.4.7) *sağlanır,*

(ii) *Sıfır bir asli eğrilik değildir, yani şekil operatörü örtendir. h tensörü metrik tensörünün bir çarpımı olarak ifade edilir [38].*

İspat: Tanım (5.4.1) ve (5.4.7) den

$$h(Y,\xi)=\eta(Y)h(\xi,\xi) \tag{5.4.9}$$

olur. Bu denklemin X vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$h(\nabla_X Y,\xi)+h(Y,\nabla_X\xi)=X\eta(Y)h(\xi,\xi)+Xh(\xi,\xi)\eta(Y)$$

olur. $\nabla_X\xi=\varphi AX$ ve $\nabla_\xi\xi=0$ olduğundan

$$h(\nabla_X Y,\xi)+h(\varphi AX,Y)=h(\xi,\xi)\{g(\nabla_X Y,\xi)+g(\varphi AX,Y)\} \tag{5.4.10}$$

elde edilir. (5.4.9) den $h(\nabla_X Y,\xi)=\eta(\nabla_X Y)h(\xi,\xi)$ dır ve bu değer (5.4.10) de göz önüne alınıp sadeleştirilir ise

$$h(\varphi AX,Y)=h(\xi,\xi)g(\varphi AX,Y) \tag{5.4.11}$$

olur. A örten olduğundan AX yerine X alınabilir. Bu durumda

$$h(\varphi X,Y)=h(\xi,\xi)\,g(\varphi X,Y) \tag{5.4.12}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi X yerine φX alınır ve $\varphi^2=-I+\eta\otimes\eta$ kullanılırsa

$$h(X,Y)=h(\xi,\xi)\,g(X,Y) \tag{5.4.13}$$

elde edilir. $(5.4.13)$ de h nın paralelliği göz önüne alınırsa $h(\xi,\xi)$ nın sabit olduğu sonucuna ulaşılır ve böylece ispat tamamlanır.

Bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$, $n\geq 3$, $c\neq 0$ de paralel Ricci tensörüne sahip reel hiperyüzey yoktur [39]. Fakat $n=2$ olduğu zaman paralel Ricci tensörlü hiperyüzey vardır [40].

Sonuç 5.4.1. *Kabul edelim ki bir regüler α_1-Hopf hiperyüzeyi üzerinde şekil operatörü A örten ve bir V vektör alanı için $h=\pounds_V g+2Ric$ tensörü paralel olsun. Eğer herhangi bir X vektör alanı için*

$$\eta([V,AX])+g(AX,[V,\xi])=\alpha_1\eta([V,X])+\rho g(X,[V,\xi]) \tag{5.4.14}$$

sağlanıyor ise bu durumda (g,V) bir Ricci solitondur [38].

İspat: $h=\pounds_V g+2Ric$ tensörü için $(5.4.7)$ denkleminin sağlanması $(5.4.14)$ denkleminin sağlanmasına eş değerdir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu sonuçta iki durum söz konusudur. Bunlardan birisi $V\in Sp\{\xi\}$ ve diğer durum ise V nin ξ ye dik olması durumudur. İkinci durum oldukça karmaşık ve incelemesi oldukça zordur. Bunun için $V=\xi$ için η-Ricci soliton durumunu incelenilecektir. Böylece

$$h=\pounds_\xi g+2Ric-2\mu\eta\otimes\eta$$

olarak inceleyelim. Bu ifade de Lie türevi

$$\begin{aligned}\left(\pounds_\xi g\right)(X,Y)&=g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi),X\\&=g(\varphi AX,Y)+g(\varphi AY,X)\\&=g(\varphi AX,Y)-g(A\varphi X,Y)\\&=g((\varphi A-A\varphi)X,Y)\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

olarak bulunur. h da $\pounds_\xi g$ ve Ricci tensörünün $(5.4.3)$ değeri yerine yazılır hesaplanırsa

$$\begin{aligned}h=&\frac{c}{2}\{(2n+1)g-3\eta\otimes\eta\}\\&+g\left(\left(2\mathbf{H}A+\varphi A-A\varphi-2A^2\right)\cdot,\cdot\right)-2\mu\eta\otimes\eta\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

elde edilir ki buradan

$$h(\xi,\xi) = (n-1)c + 2\mathbf{H}\alpha_1 - 2\alpha_1^2 - 2\mu \tag{5.4.17}$$

elde edilir. Böylece $\lambda = -\frac{1}{2}h(\xi,\xi)$ ve $\mu = \lambda + H\alpha_1 - \alpha_1^2 + \frac{n-1}{2}c$ olmak üzere $(g.\xi,\lambda,\mu)$, örten şekil operatörüne sahip regüler α_1-Hopf hiperyüzeyi üzerinde bir η-Ricci solitondur.

5.5 Reel Hiperyüzeyler Üzerinde $*$-Ricci Solitonlar

Kompleks uzay formun bir reel hiperyüzeyi M üzerine bir (φ,ξ,η,g) kontakt metrik yapısını indirger. Eğer $A\xi = \alpha_1\xi$ ise M ye Hopf hiperyüzeyi denir ve burada $\alpha_1 = \eta(A\xi)$ olup bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Tanım 5.5.1. *M, bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$ nın bir reel hiperyüzeyi olsun. M nın Riemann eğrilik tensör alanı R olmak üzere*

$$Ric^*(X,Y) = \frac{1}{2}iz\{Z \longrightarrow R(X,\varphi Y)\varphi Z\}$$

tensörüne M nin Ricci $*$-tensörü denir [41].

Bu tanıma göre (5.2.14) den $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric^*(X,Y) = 2cn\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) - g(\varphi A\varphi AX,Y)\} \tag{5.5.1}$$

veya $Ric^*(X,Y) = g(Q^*X,Y)$ şeklinde tanımlı $*$-Ricci operatörü

$$Q^* = -\left[\frac{cn}{2}\varphi^2 + (\varphi A)^2\right] \tag{5.5.2}$$

olarak ifade edilir [41].

Bir $p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayı için

$$T_pM = Sp\{\xi\} \oplus \mathscr{D} \tag{5.5.3}$$

ayrışımına sahip olunur. Burada $\mathscr{D} = \ker(\eta) = \left\{X \in T_pM \middle|\ \eta(X) = 0\right\}$ olup buna holomorfik distribüsyon denir. O halde (5.5.3) ayrışımına göre

$$A\xi = \alpha_1\xi + \beta U \tag{5.5.4}$$

olarak yazılır, burada $\beta = \|\varphi\nabla_\xi\xi\|$ ve $U = -\frac{1}{\beta}\varphi\nabla_\xi\xi \in \ker(\eta)$, $\beta \neq 0$ dır.

Tanım 5.5.2. *M, kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$ de bir reel hiperyüzey olsun. Eğer M üzerindeki bir V vektör alanı için*

$$\frac{1}{2}\pounds_V g + Ric^* - \lambda g = 0 \tag{5.5.5}$$

denklemini sağlayacak şekilde bir λ reel sabiti var ise (V, λ, g) ye M üzerinde bir $*$-Ricci soliton veya M ye bir $*$-Ricci solitona sahiptir denir [41].

Şimdi potansiyel vektör alanı ξ olan M reel hiperyüzeyi bir $*$-Ricci soliton olsun. Buna göre $(5.5.5)$ denklemindeki ifadeleri yerine yazalım. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\pounds_\xi g\right) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)$$

dir. Buna göre $(5.2.12)$ ve $(5.5.1)$ ifadeleri $(5.5.5)$ da yerine yazılıp düzenlenirse

$$g(\varphi AX, Y) + g(\varphi AY, X) + ncg(X,Y) - nc\eta(X)\eta(Y) + 2g(\varphi AX, A\varphi Y) - 2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{5.5.6}$$

elde edilir. Bir $p \in M$ noktasının bir N komşuluğu üzerinde $\beta \neq 0$ olsun. Yani

$$N = \{p \in M |\ \beta \neq 0\}$$

olsun. Böylece N üzerinde $(5.5.4)$ sağlanır. $(5.5.6)$ ifadesinde $X = Y = \xi$ alınırsa

$$g(\varphi A\xi, \xi) + g(\varphi A\xi, \xi) + ncg(\xi, \xi) - nc\eta(\xi)\eta(\xi) + 2g(\varphi A\xi, A\varphi\xi) - 2\lambda g(\xi, \xi) = 0$$

veya $(5.5.4)$ de $A\xi = \alpha_1\xi + \beta U$ olduğu dikkate alınırsa

$$g(\varphi A\xi, \xi) = g(\varphi(\alpha_1\xi + \beta U), \xi) = \beta g(\varphi U, \xi) = -\beta g(U, \varphi\xi) = 0$$

ve buradan

$$\lambda = 0 \tag{5.5.7}$$

elde edilir. Tekrar $(5.5.6)$ ifadesinde $X = \xi$, $Y = U$ alınırsa, $\lambda = 0$ olduğundan

$$g(\varphi A\xi, U) + g(\varphi AU, \xi) + ncg(\xi, U) - nc\eta(\xi)\eta(U) + 2g(\varphi A\xi, A\varphi U) = 0$$

veya

$$\begin{aligned}
g(\varphi AU, \xi) &= -g(AU, \varphi\xi) = 0, \\
g(\xi, U) &= -\frac{1}{\beta}g\left(\xi, \varphi\nabla_\xi\xi\right) = \frac{1}{\beta}g\left(\nabla_\xi\xi, \varphi\xi\right) = 0, \\
\eta(U) &= g(\xi, U) = 0, \\
g(\varphi A\xi, U) &= g(\varphi(\alpha_1\xi + \beta U), U) = \beta g(\varphi U, U) = 0
\end{aligned}$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$g(\varphi A\xi, A\varphi U) = 0$$

veya $A\xi = \alpha_1 + \beta U$ yerine yazılırsa

$$g(A\varphi U, \varphi U) = 0 \tag{5.5.8}$$

elde edilir. Yine (5.5.6) denkleminde benzer şekilde $X = \xi$, $Y = \varphi U$ alınırsa ve düzenlenirse

$$g(AU, \varphi U) = g(A\varphi U, U) = \frac{1}{2} \tag{5.5.9}$$

elde edilir. Yine (5.5.6) denkleminde $X = Y = U$ alınırsa

$$g(\varphi AU, U) + g(\varphi AU, U) + ncg(U,U) - nc\eta(U)\eta(U) + 2g(\varphi AU, A\varphi U) = 0$$

veya

$$g(\varphi AU, U) = -g(AU, \varphi U) = -\frac{1}{2},\ g(U,U) = 1,\ \eta(U) = 0$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$-1 + nc + 2g(\varphi AU, A\varphi U) = 0 \tag{5.5.10}$$

ve (5.5.6) denkleminde $X = Y = \varphi U$ alınırsa benzer şekilde

$$1 + nc + 2g(\varphi AU, A\varphi U) = 0 \tag{5.5.11}$$

elde edilir. (5.5.10) ve (5.5.11) taraf tarafa çıkartılırsa $2 = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu çelişkinin nedeni $\beta \neq 0$ olması kabülündendir, yani $\beta \neq 0$ olamaz. $\beta = 0$ olması durumunda ise ξ bir asli vektör alanı olur, yani M bir Hopf hiperyüzeyidir. Buradan aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 5.5.1. *Kompleks boyut $n \geq 2$ olmak üzere, $\widetilde{M}(c)$ de bir $*$-Ricci solitona sahip her reel hiperyüzey bir Hopf hiperyüzeyidir [41].*

Şimdi $Z \in \Gamma(U)$ birim vektörünü için $AZ = \mu Z$ olması durumunu göz önüne alalım. Bunun için ise R.Niebergul ve P.J.Rhan tarafından verilen Sonuç 2.3 ü kullanacağız ve bu sonucu ifade edelim [42].

Sonuç 5.5.1. *$\widetilde{M}(c)$ de bir M reel hiperyüzeyi için bir $p \in M$ noktasında*

(i) $\|Z\| = 1$, $Z \in \Gamma(\mathscr{D})$ için $AZ = \mu Z$ ise

$$\left(\mu - \frac{\alpha_1}{2}\right) A\varphi Z = \left(\frac{\mu\alpha_1}{2} + \frac{c}{4}\right) \varphi Z \tag{5.5.12}$$

dır.

(ii) $Z \in \Gamma(\mathscr{D})$, $AZ = \mu Z$ *ve* $A\varphi Z = \nu\varphi Z$ *sağlanıyor ise bu durumda*

$$\nu\mu = \frac{\mu+\nu}{2}\alpha_1 + \frac{c}{4} \tag{5.5.13}$$

dır.

(iii) $T\mu \subset \mathscr{D}$, *Z asli eğrilik vektörlerinin kümesi olmak üzere* $T\mu$, φ*-invaryant ise bu durumda*

$$\mu^2 = \alpha_1\mu + \frac{c}{4} \tag{5.5.14}$$

sağlanır.

(5.5.12) denkleminde $\mu = \dfrac{\alpha_1}{2}$ olması durumunda

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{4} + \frac{c}{4}\right)\varphi Z = 0$$

veya

$$\left(\alpha_1^2 + c\right)\varphi Z = 0 \tag{5.5.15}$$

elde edilir. $Z \in \Gamma(D)$ olduğundan $\varphi Z \neq 0$ dır ve $\alpha_1^2 + c = 0$ olmak zorundadır. O halde $\alpha_1^2 + c \neq 0$ ise kesinlikle $\mu \neq \frac{\alpha_1}{2}$ dir [42].

Buna göre aşağıdaki irdeleme yapılabilir.

$\alpha_1^2 + c \neq 0$ durumu:

Bu durumda $\mu \neq \dfrac{\alpha_1}{2}$ dır ve (5.5.15) den $A\varphi Z = \nu\varphi Z$ olacak şekilde ν vardır. Böylece (5.5.13) sağlanır, yani

$$\mu\nu = \frac{\alpha_1}{2}(\mu+\nu) + \frac{c}{4} \tag{5.5.16}$$

dır. (5.5.6) denkleminde $X = Y = \xi$ alınırsa $\lambda = 0$ olduğu görülür. Tekrar (5.5.6) denkleminde $X = Y = Z$ alınır ve $\lambda = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\varphi AZ, Z) + g(\varphi AZ, Z) + ncg(Z, Z) - nc\eta(Z)\eta(Z) \\ +2g(\varphi AZ, A\varphi Z) - 2\lambda g(Z, Z) = 0 \end{aligned}$$

veya $g(\varphi AZ, Z) = \mu g(\varphi Z, Z) = 0$, $Z \in \Gamma(\mathscr{D})$ için

$$\eta(Z) = 0,\ g(\varphi AZ, A\varphi Z) = \nu\mu g(\varphi Z, \varphi Z) = \nu\mu g(Z, Z) = \nu\mu,\ \lambda = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$nc+2\mu\nu=0 \tag{5.5.17}$$

elde edilir. Ayrıca (5.5.6) denkleminde $X=Z$, $Y\varphi Z$ alınırsa

$$\begin{aligned} g(\varphi AZ, A\varphi Z)+g(\varphi A\varphi Z, Z)+ncg(Z,\varphi Z) \\ -nc\eta(Z)\eta(\varphi Z)+2g\left(\varphi AZ, A\varphi^2 Z\right)=0 \end{aligned}$$

olur ve burada $AZ=\mu Z$, $A\varphi Z=\nu\varphi Z$ değerleri yerine yazılırsa

$$\mu=\nu \tag{5.5.18}$$

sonucuna ulaşılır. (5.5.17) de (5.5.18) kullanılırsa

$$nc+2\mu^2=0$$

elde edilir ki bu $c<0$ olması demektir. Bu ise kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ in reel hiperyüzeyi üzerinde potansiyel vektör alanı ξ olan $*$-Ricci solitonun olmaması demektir. O halde aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.5.1. *Kompleks projektif uzay $\mathbb{C}P^n$, $n\geq 2$, de potansiyel vektör alanı ξ olan $*$-Ricci solitona sahip reel hiperyüzey yoktur [41].*

Kompleks uzay form $\widetilde{M}(c)$ de aşağıdaki sınıflandırma teoremi oldukça önemli rol oynar. M. Okumura $\widetilde{M}(c)=\mathbb{C}P^n$ olması durumunda ve S. Montiel ve A. Romero $\widetilde{M}(c)=\mathbb{C}H^n$ olması durumunda reel hiperyüzeylerin bir sınıflandırmalarını yaptılar, bu sınıflandırmalar aşağıdaki şekildedir [43], [44].

Teorem 5.5.2. *M, $\widetilde{M}(c)$ nin bir reel hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $A\varphi=\varphi A$ dır ancak ve ancak M aşağıdakilerden birine kongruenttir;*

1) $\widetilde{M}(c)=\mathbb{C}P^n$ *olması durumunda:*

(A_1) *r-yarıçaplı bir geodezik hiperküre,* $0<r<\frac{\pi}{2}$,

(A_2) *Total geodezik* $\mathbb{C}P^k$ $(1\leq k\leq n-2)$ *üzerinde r-yarıçaplı bir tüp* $\left(0<r<\frac{\pi}{2}\right)$,

2) $\widetilde{M}(c)=\mathbb{C}H^n$*olması durumunda:*

(A_3) $\mathbb{C}H^n$ *de bir Montiel tüp (horosphere),*

(A_4) *Bir geodezik hiperküre veya bir total geodezik kompleks hiperbolik hiperdüzlem* $\mathbb{C}H^{n-1}$ *üzerinde bir tüp,*

(A_5) *Total geodezik* $\mathbb{C}H^k$, $(1\leq k\leq n-2)$ *üzerinde bir tüptür [41].*

Teorem 5.5.2 de sınıflandırılan reel hiperyüzeylere (A) tipindeki reel hiperyüzeyler denir ki bunlar sabit asli eğrilikli Hopf hiperyüzeyleridir.

Teorem 5.4.1 ve Teorem 5.5.1 ye göre $\mathbb{C}H^n$ de ξ nın potansiyel vektör alanı olduğu $*$-Ricci solitona sahip reel hiperyüzeyler (A) tipindeki reel hiperyüzeylerdir.

$\mu = \nu$ ve $c = -\dfrac{2\mu^2}{n}$ değeri (5.5.16) de yerine yazılırsa

$$\mu\left[(2n+1)\mu - 2\alpha_1 n\right] = 0 \tag{5.5.19}$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur. Ya $\mu = 0$ dır veya $(2n+1)\mu = 2\alpha_1 n$ dir.

Eğer $\mu = 0$ ise $c = -\dfrac{2\mu^2}{n}$ olduğundan $c = 0$ olur ki bu mümkün değildir, çünkü $\mathbb{C}H^n$ de $c < 0$ dır. Dolayısıyla çelişkidir yani $\mu \neq 0$ olmak zorundadır. O halde

$$(2n+1)\mu = 2n\alpha_1 \tag{5.5.20}$$

bağıntısı sağlanır.

Şimdi $\widetilde{M}(c) = \mathbb{C}H^n$ olması durumunda M reel hiperyüzeyini irdeleyelim.

Kabul edelim ki M, $\mathbb{C}H^n$ de bir geodezik hiperküre olsun. Geodezik hiperkürenin eigen değerleri $\mu = \coth(r)$, $\alpha_1 = 2\coth(2r)$ değerleri (5.5.20) de yerine yazılırsa $n = \dfrac{\coth^2(r)}{2}$ elde edilir.

Böylece geodezik hiperküre ξ nın potansiyel vektör alanı olduğu bir $*$-Ricci solitona sahiptir ve r-yarıçapı $2n = \coth^2(r)$ bağıntısını sağlar.

Kabul edelim ki M, total geodezik $\mathbb{C}H^k$, $(1 \leq k \leq n-2)$, üzerinde bir tüp olsun. (5.5.20) bağıntısında M nin eigen değerleri $\mu = \tanh(r)$, $\alpha_1 = 2\coth(2r)$ yerlerine yazılırsa $n = \dfrac{\tanh^2(r)}{2}$ elde edilir. $0 < \tanh(r) < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\mathbb{C}H^{n-1}$ üzerindeki tüp, potansiyel vektör alanı ξ olan bir $*$-Ricci solitona sahip değildir.

Son olarak kabul edelim ki M total geodezik $\mathbb{C}H^k$, $1 \leq k \leq n-2$, üzerinde tüp olsun. Bu durumda

$$A\xi = 2\coth(r)\xi,\ AX = \tanh(r)X,\ AY = \coth(r)Y$$

olacak şekilde $X.Y \in \Gamma(D)$ vardır. Önceden olduğu gibi bunlar (5.5.20) de yerine yazılırsa

$$\coth^2(r) = 2n \text{ ve } \tan h^2(r) = 2n$$

olur ki bu mümkün değildir ve bu bir çelişkidir. Böylece total geodezik $\mathbb{C}H^k$, $1 \leq k \leq n-2$, üzerindeki tüp üzeride potansiyel vektör alanı ξ olan $*$-Ricci soliton yoktur.

$\alpha_1^2 + c = 0$ durumu:

Bu durumda $c = -\alpha_1^2 < 0$ olduğundan uzay form sadece $\widetilde{M}(c) = \mathbb{C}H^n$ olur. Buradan ise $\alpha_1 \neq 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $\mu \neq \dfrac{\alpha_1}{2}$ olsun. Bu durum (5.5.16) bağıntısında göz önüne alınır ve $\alpha_1^2 + c = 0$ olduğu dikkate alınırsa $\nu = \dfrac{\alpha_1}{2}$ elde edilir ve burada ν, φZ ye karşılık gelen eigen değerdir, yani $A\varphi Z = \nu\varphi Z$ dır. (5.5.6) denkleminde $X = Y = \xi$ alınırsa $\lambda = 0$ olur. Yine (5.5.6) denkleminde $X = Z, Y = \varphi Z$ alınır ve $AZ = \mu Z$ ve $A\varphi Z = \dfrac{\alpha_1}{2}\varphi Z$ oldukları dikkate alınırsa

$$\mu = \frac{\alpha_1}{2}$$

elde edilir ki bu $\mu \neq \dfrac{\alpha_1}{2}$ kabülüyle çelişir.

Geriye $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{2}$ durumu kalıyor. Bu ise $\mathscr{D}$ distribüsyonundaki bütün vektörler için eigen değerlerin sadece $\dfrac{\alpha_1}{2}$ olması anlamına gelir. Bu durumda reel hiperyüzeyler horospheredir. (5.5.6) ifadesinde $X = Y = \xi$ alınırsa $\lambda = 0$ olur. Bu bir çelişkidir. (5.5.6) ifadesinde $X = Y = Z \in \Gamma(\mathscr{D})$ için eigen değerlerin sadece $\dfrac{\alpha_1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa $n = \frac{1}{2}$ olur ki bu mümkün değildir. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.5.3. M, $\widetilde{M}(c) = \mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$, $c = -4$, *kompleks hiperbolik uzayda reel hiperyüzey olsun. Eğer M potansiyel vektör alanı ξ olan $*$-Ricci solitona sahip ise bu durumda M, $2n = \coth^2(r)$ olan bir geodezik hiperkürenin bir parçasıdır [41].*

KAYNAKLAR

[1] **Hamilton, R.S.** (1995). The formation of singularities in the Ricci flow, *In: Surveys in Differential Geometry, Vol. II*, 7–136.

[2] **Morgan, J.W. ve Tian, G.** (2007). *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, cilt 3, American Mathematical Soc.

[3] **Chen, B.Y. ve Deshmukh, S.** (2014). Ricci solitons and concurrent vector fields, *arXiv preprint arXiv:1407.2790*.

[4] **Al-Sodais, H.**, **Alodan, H. ve Deshmukh, S.** (2014). Hypersurfaces of Euclidean space as gradient Ricci solitons, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.(NS) DOI*, *10*.

[5] **Ingalahalli, G. ve Bagewadi, C.** (2012). Ricci solitons in α-Sasakian manifolds, *ISRN Geometry*, *2012*, 1–13.

[6] **Chen, B.Y. ve Deshmukh, S.** (2014). Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *International Journal of Mathematics*, *25*(11), 1450104.

[7] **Chen, B.Y.** (2017). Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitons, *Kragujevac Journal of Mathematics*, *41*(2), 239–250.

[8] **Chen, B.Y.** (2016). Concircular vector fields and pseudo-Kaehler manifolds, *Kragujevac Journal of Mathematics*, *40*(1), 7–14.

[9] **Al-Sodais, H.**, **Alodan, H. ve Deshmukh, S.** (2014). Hypersurfaces of Euclidean space as gradient Ricci solitons, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.(NS) DOI*, *10*.

[10] **Chen, B.Y.** (2017). *Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds*, World Scientific.

[11] **Chen, B.Y.** (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific.

[12] **O'neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press.

[13] **Sahin, B.** (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications*, Academic Press.

[14] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların diferensiyel geometrisi*, Nobel Yayın.

[15] **Kon, M. ve Yano, K.** (1985). *Structures on manifolds*, cilt 3, World scientific.

[16] **Hsiung, C.C.** (1995). *Almost complex and complex structures*, cilt 20, World Scientific.

[17] **Martin, D.** (2002). *Manifold Theory: an introduction for mathematical physicists*, Elsevier.

[18] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963). *Foundations of differential geometry*, cilt 1, New York, London.

[19] **Vandoren, S.** (2008). Lectures on riemannian geometry, part II: Complex manifolds, *Fulltext on Stefan Vandoren's personal page*.

[20] **Bejancu, A.** (2012). *Geometry of CR-submanifolds*, cilt 23, Springer Science & Business Media.

[21] **Wali, A.N.** (2009). On totally real maximal spacelike submanifolds of an indefinite complex space form.

[22] **Blair, D.E. ve Blair, D.** (2010). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, cilt203, Springer.

[23] **Cho, J.T.** (2013). Almost contact 3-manifolds and Ricci solitons, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *10*(01), 1220022.

[24] **Kenmotsu, K.** (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *24*(1), 93–103.

[25] **Günsen, S.** (2017). *Ricci solitonlar ve concurrent vektör alanları* (Yüksek Lisans Tezi). Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[26] **Chen, B.Y.** (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *52*(5), 1535–1547.

[27] **Eisenhart, L.P.** (1923). Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero, *Transactions of the American Mathematical Society*, *25*(2), 297–306.

[28] **Sharma, R.** (1989). Second order parallel tensor in real and complex space forms, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *12*(4), 787–790.

[29] **Topping, P.** (2006). *Lectures on the Ricci flow*, cilt325, Cambridge University Press.

[30] **Siddiqi, M.D.** (2018). η-Ricci solitons in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds, *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Mathematics, Informatics, Physics. Series III*, *11*(2), 215–233.

[31] **Olszak, Z.** (1986). Normal almost contact metric manifolds of dimension three, *Annales Polonici Mathematici*, cilt 1, s.41–50.

[32] **Blair, D.E.** (1966). *The theory of quasi-Sasakian structures*, University of Illinois at Urbana-Champaign.

[33] **Janssens, D. ve Vanhecke, L.** (1981). Almost contact structures and curvature tensors, *Kodai Mathematical Journal*, *4*(1), 1–27.

[34] **Kuiper, N.H.** (1997). *Tight and Taut Submanifolds*, cilt 32, Cambridge University Press.

[35] **Cho, J.T. ve Kimura, M.** (2009). Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *61*(2), 205–212.

[36] **Deniz, O.** (2020). *Kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleri* (Yüksek Lisans Tezi). Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[37] **Kon, M.** (1979). Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex space forms, *Journal of Differential Geometry*, *14*(3), 339–354.

[38] **Calin, C. ve Crasmareanu, M.** (2012). Eta-Ricci solitons on hopf hypersurfaces in complex space forms, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl*, *57*(1), 55–63.

[39] **Ki, U.H.** (1989). Real hypersurfaces with parallel Ricci tensor of a complex space form, *Tsukuba Journal of Mathematics*, *13*(1), 73–81.

[40] **Kim, U.K.** (2004). Nonexistence of Ricci-parallel real hypersurfaces in P_2C or H_2C, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *41*(4), 699–708.

[41] **Kaimakamis, G. ve Panagiotidou, K.** (2014). $*$-Ricci solitons of real hypersurfaces in non-flat complex space forms, *Journal of Geometry and Physics*, *86*, 408–413.

[42] **Niebergall, R. ve Ryan, P.J.** (1997). Real hypersurfaces in complex space forms, *Math. Sci. Res. Inst. Publ*, *32*, 233–305.

[43] **Okumura, M.** (1975). On some real hypersurfaces of a complex projective space, *Transactions of the American Mathematical Society*, *212*, 355–364.

[44] **Montiel, S. ve Romero, A.** (1986). On some real hypersurfaces of a complex hyperbolic space, *Geometriae Dedicata*, *20*(2), 245–261.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : İbrahim Halil TANŞU

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü