T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLY-NORDEN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Tuba ACET

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Şubat 2023

T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLY-NORDEN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Tuba ACET
(D36183614080)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ
Eş Danışman: Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Şubat 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında desteği ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ'a, doktora eğitimim süresince desteği ile bana rehberlik eden hocam Sayın Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım sırasında, benden desteklerini esirgemeyen aileme ve eşime teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum "Poly-Norden Semi-Riemann Manifoldların Dejenere Altmanifoldları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Tuba ACET

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\tilde{M}$	: Manifold
$\tilde{g}$	: Metrik tensör
$T_P\tilde{M}$	: Manifoldun P noktasındaki tanjant uzayı
$\Gamma(T_P\tilde{M})$	: Manifoldun vektör alanlarının uzayı
$\tilde{D}$	: Distribüsyon
∇	: Lineer konneksiyon
[,]	: Lie braket (parantez) operatörü
Φ	: Hemen hemen poly-Norden yapı
ρ_ω	: Bronz oran

ÖZET

Doktora Tezi

POLY-NORDEN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Tuba ACET

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

90+vi sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan Giriş bölümünde, tezde ele alınan konunun tarihsel gelişimi ele alınmaktadır.İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan semi-Riemann manifoldlar ile bu manifoldların dejenere hiperyüzey ve altmanifoldları ile ilgili temel tanım ve kavramlar işlenmektedir. Ayrıca bu bölümde, hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifoldlar tanıtılarak bazı geometrik özellikleri ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, poly-Norden semi-Riemann manifoldların dejenere hiperyüzeyleri çalışılmaktadır. İlk olarak poly-Norden semi-Riemann manifoldların invaryant dejenere hiperyüzeyleri incelenmekte, daha sonra screen-semi-invaryant dejenere hiperyüzeylerle ilgili sonuçlar elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde, poly-Norden semi-Riemann manifoldların dejenere altmanifoldları çalışılmaktadır. Öncelikle invaryant ve semi-invaryant dejenere altmanifoldlar çalışılmakta daha sonra ise genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold ve screen transversal CR-dejenere altmanifold tanıtılarak bu tipteki altmanifoldlar için örnekler elde edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Poly-Norden manifold, İnvaryant dejenere altmanifold, Semi-invaryant dejenere altmanifold, Genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold, Screen transversal CR-lightlikle dejenere altmanifold.

ABSTRACT

Phd. Thesis

LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS OF POLY-NORDEN SEMI-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Tuba ACET

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

90+vi pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Being prepared as a doctoral thesis, this study consists of four chapters. In the first chapter, historical development of the thesis subject is explained. In the second chapter, we give some basic definitions and theorems about semi-Riemannian manifolds with lightlike hypersurfaces and lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifold, which will be used in the next sections, are discussed.

In the third chapter, we study lightlike hypersurfaces of poly-Norden semi-Riemannian manifolds. Firstly, we introduce invariant lightlike hypersurfaces of ploy-Norden semi-Riemannian manifolds. Then we obtain some results on screen semi-invariant lightlike hypersurfaces of poly-Norden semi-Riemannian manifolds.

Fourth chapter is devoted to study of lightlike submanifolds of poly-Norden semi-Riemannain manifolds. Firstly, we study invariant and semi-invariant lightlikle submanifolds of poly-Norden semi-Riemannian manifolds. Then we introduce generalized CR-lightlike and screen transversal CR-lightlike submanifolds of poly-Norden semi-Riemannian manifolds and we give some examples of this types submanifolds

Keywords: Poly-Norden manifold, Invariant lightlike submanifold, Semi-invariant lightlike submanifold, Generalized CR-lightlike submanifold, Screen transversal CR-lightlike submanifold

1. GİRİŞ

Modern diferensiyel geometrinin önemli bir alanı olan manifoldlar teorisi, üzerinde tanımlanabilen geometrik yapılarla birlikte daha ilgi çekici hale gelmiştir. Süreçle birlikte disiplinlerarası çalışma alanı olarakta öne çıkan manifold teori, özellikle matematik gibi bir çok alanda daha fazla çalışılabilir hale gelmiştir.

Matematiksel anlamda, üzerinde herhangi bir noktasındaki tanjant uzayında tanımlanan metrik tensör, bahsi geçen noktada tanjant uzayını bir skaler çarpım uzayına dönüştürerek, çeşitli işlemlerin yapılabilmesinin önünü açar hale gelmiştir.

Bilindiği üzere, manifold üzerinde tanımlanan metriğin pozitif tanımlı olması halinde Riemann manifoldları elde edilir. Diğer taraftan manifold üzerinde tanımlanan metriğin negatif tanımlı olma halini göz önüne alarak semi-Riemann manifoldlar B. O'Neill tarafından tanımlandı [26]. Bir Riemann manifoldun altmanifoldu da Riemann manifoldudur. Yani, Riemann manifoldundan indirgenen Riemann metriği pozitif tanımlı, simetrik bilineer formdur. Diğer taraftan semi-Riemann manifolddan indirgenen metrik, altmanifold üzerinde negatif tanımlı, pozitif tanımlı veya dejenere olabilir. Negatif tanımlı olması hali timelike altmanifold, pozitif tanımlı olması hali spacelike altmanifold ve dejenere olması hali dejenere altmanifold alarak isimlendirilir. Spacelike ve timelike altmanifoldların geometrisi Riemann manifoldların altmanifolların geometrisi ile paralellik gösterirken dejenere altmanifoldlar tamamen farklı bir geometri ortaya koymaktadır.

Dejenere altmanifoldlarda, dejenere olmayan altmanifoldların tersine normal demetin bir kısmı tanjant demette kaldığından, normal ile tanjant demetin arakesiti sıfır elemana sahip değildir. Bu sebeple, dejenere altmanifoldlarda tanjant demete tamamlayan bir demetin varlığı konusu K.L. Duggal ve A. Bejancu tarafından ele alınmış ve böyle bir demetin var olduğu, ancak tanjant demete dik olmadığı gösterilmiştir [8]. Bu demet transversal demet olarak isimlendirilmiştir. Bu şekilde tanımlanan demetin varlığı, dejenere olmayan altmanifoldlar için tanımlanan bazı kavramların yeniden tanımlanmasına yol açmıştır. Örneğin dejenere olmayan altmanifoldlar üzerine indirgenen konneksiyon daima metrik konneksiyon iken, dejenere altmanifoldlarda böyle bir durum söz konusu değildir. Bu tür nedenlerden dolayı dejenere altmanifoldlar, özellikle geometriciler tarafından diferensiyel geometrinin daha ilgiyle çalışılan bir alanı haline gelmiştir [2, 9–12, 17, 29, 30]

İnsanlık tarihinde önemli yeri olan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısıyla tanımlanan altın oran, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin bir çözümü olup sanatta, doğada, mimaride ve matematikte yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle geometride bir bütünün parçaları ile basit bir kurala göre mükemmel bir uyumunu ortaya çıkaran, sayısal bir bağıntı olarak ele alınabilir.

Altın Oran kavramı, Öklid'in M.Ö. 3. yüzyılda, bir doğruyu 0,618... noktasından bölmekten bahsettiği Elementler isimli 13 kitaptan oluşan çalışmalarında ilk defa ortaya attığı düşünülmektedir. Bununla birlikte bazı kaynaklar, bu bilginin geçmişinin eski Mısır'a dayandığını belirtmektedir. Özellikle Giza Piramidinin, altın oranın kullanıldığı ilk örneklerden birisi olduğu bilinmektedir

Bir diferensiyellenebilir $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde $f-$yapı, K. Yano [32] tarafından $f^3 + f = 0$ eşitliğini gerçekleyen bir endomorfizm olarak tanımlandı. Daha sonra bu kavram S.I. Goldberg ve K. Yano [15] tarafından genişletilerek manifold üzerinde bir polinom yapısı kavramı tanıtıldı. Bu yapı bir $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_2 x + a_1 I$$

eşitliğini gerçekleyen (1,1) tipinde bir tensör alanıdır. Örnek olarak $Q_1(x) = x^2 + I$ polinomu bir hemen hemen kompleks yapı, $Q_2(x) = x^2 - I$ polinomu bir hemen hemen çarpım yapısı tanımlar. Özetle hemen hemen kompleks yapı ve hemen hemen çarpım yapısı birer polinom yapısıdır. Bu şekilde tanımlanan yapılar, matematikçilere C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde yeni geometrik yapılar üretip, çalışma fırsatı ortaya çıkarmıştır.

C.H. Hretcanu [19] yukarıda tanımlanan yapı polinomu yardımıyla $\tilde{M}$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde

$$\Phi^2 = \Phi + I$$

denklemini gerçekleyen (1,1) tipinde Φ tensör alanını tanımlayıp, bu yapıya altın yapı ismini verdi. Böylece $(\tilde{M}, \Phi)$ ikilisi de altın manifold olarak adlandırıldı [5, 19]. Bir altın yapı ile bir hemen hemen çarpım yapısı arasındaki ilişki P bir çarpım yapısı olmak üzere

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}P}{2}, \quad \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}P}{2}$$

şeklinde tanımlandı [5, 19]. Benzer olarak Φ altın yapısının da manifold üzerinde

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - 1), \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - 1)$$

eşitlikleri ile belirli iki hemen hemen çarpım yapısı tanımladığı gösterildi.

Daha sonra altın manifold $(\tilde{M}, \Phi)$ Riemann metriği ile donatılarak altın Riemann manifoldu kavramı ortaya atıldı [20, 21]. Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde altın Riemann yapı

$$\tilde{g}(\Phi X, Y) = \tilde{g}(X, \Phi Y)$$

eşitliğini gerçekleyen $(\tilde{g}, \Phi)$ ikilisidir. Burada $\tilde{g}$ metriğine $\Phi-$uyumludur denir. Bu durumda $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ bir altın Riemann manifoldu olarak isimlendirilir [20]. Son zamanlarda altın manifoldlar, semi-Riemann metriği ile donatılarak altın semi-Riemann yapı tanıtıldı ve üzerinde özellikle dejenere altmanifoldlar ile ilgili çalışmalar yapıldı [1, 14, 16, 27, 28].

1997 de V.W. Spinadel [6, 7] altın oranın genelleştirmesi olarak metalik oranlar ailesini tanıttı. p ve q pozitif tamsayıları için

$$x^2 - px + q = 0$$

denkleminin çözümü metalik oranlar ailesi olarak tanımlandı. Burada verilen $(p,q)-$metalik sayıları da

$$\delta_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2+4q}}{2}$$

ile verilir. Altın orana benzer şekilde metalik oranlar üzerinde de tanımlanan Riemann ve semi-Riemann metriği ile birlikte matematikçiler için oldukça geniş calışma alanı ortaya çıkmıştır [3, 4, 13, 22, 23].

Metalik oranlar ailesinde tanımlanan $(p,q)-$metalik sayıları aldıkları değerlere göre metalik oranlar ailesinin elemanları altın yapı $(p=1, q=1)$, gümüş yapı $(p=2, q=1)$, bronz yapı $(p=3, q=1)$, nikel yapı $(p=1, q=3)$ ve bakır yapı $(p=1, q=2)$ gibi bir çok metalin adını alır.

2011 yılında V. W. de Spinadel tarafından [7] tanımlanan bronz orandan farklı olan ve metalik oran ile arasında kapsama bağıntısı bulunmayan yeni bir bronz oran K. Kalia tarafından tanımlandı [24]. Bu çalışmada Lucas ve Fibonacci sayıları tanıtılarak bunlar arasındaki ilişki araştırılmıştır. [24] da verilen bronz orana metalik oranlar ailesinde tanımlanan $(p,q)-$metalik sayılarına değer vererek ulaşmak mümkün değildir.

2018 yılında altın ve metalik manifold tanımlarından esinlenerek, B. Şahin [31] tarafından [24] da verilen bronz oran kullanılarak donatılan yeni bir manifold tanımlandı ve bu tipteki manifoldlar hemen hemen poly-Norden manifold olarak isimlendirildi. Bu çalışmada poly-Norden manifoldların bazı geometrik özellikleri incelendi. Daha sonra [31] da tanımlanan hemen hemen poly-Norden manifoldların Riemann metriği ile donatılmış altmanifoldları ilk kez S. Yüksel Perktaş tarafından çalışıldı [34]. Bu çalışmada hemen hemen poly-Norden Riemann metrik manifoldların dejenere olmayan altmanifoldları ile ilgili geometrik sonuçlar elde edildi.

Bu çalışmada, hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifoldların dejenere hiperyüzey ve altmanifoldları çalışılmıştır. Giriş bölümünden sonra, ikinci bölümde semi-Riemann manifoldların dejenere hiperyüzey ve dejenere altmanifoldları ile ilgili tez boyunca kullanılacak temel kavramlarden bahsedilmiştir.

Tezin orjinal bölümleri diğer bölümlerdir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen poly-Norden semi-Riemann metrik manifoldlar üzerinde, ilk olarak dejenere hiperyüzeyler tanıtılmış, invaryant ve screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeylerle ilgili karekterizasyonlar verilip, bu tipteki hiperyüzeylerle ilgili örnekler elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm, hemen hemen poly-Norden semi-Riemann metrik manifoldların dejenere altmanifoldlarına ayrılmış, ilk olarak invaryant dejenere altmanifold tanıtılarak örnek verilmiştir. Daha sonra ikinci kısımda semi-invaryant dejenere altmanifold incelenmiştir. Üçüncü ve dördüncü kısımda ise sırasıyla genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold ve screen transversal CR-dejenere altmanifold kavramları tanıtılarak bu tipteki altmanifoldlar ile ilgili örnekler elde edilmiştir. Daha sonra altmanifold tanımlarından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilme şartları irdelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Dört kısımdan oluşan bu bölümde semi-Riemann manifoldlar, semi-Riemann manifoldların dejenere hiperyüzeyleri ve dejenere altmanifoldları hakkında temel bilgilere yer verildi. Son olarak ise hemen hemen poly-Norden manifoldlar incelendi.

2.1 Semi-Rieman Manifoldlar

Tanım 2.1.1. $\tilde{V}$ bir sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere

$$\bar{g} : \tilde{V} \times \tilde{V} \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $s, t \in \mathbb{R}$ ile $u, v, w \in \tilde{V}$ için

$i)$ $\tilde{g}(u,v) = \tilde{g}(v,u)$,

$ii)$ $\tilde{g}(su+tv,w) = s\tilde{g}(u,w)+t\tilde{g}(v,w)$,

$iii)$ $\tilde{g}(u,sv+tw) = s\tilde{g}(u,v)+t\tilde{g}(u,w)$

aksiyomları sağlanıyor ise $\tilde{g}$ ya simetrik bilineer form denir [26].

Tanım 2.1.2. $\tilde{g}$, $\tilde{V}$ üzerinde simetrik bilineer form olmak üzere $w \in \tilde{V}$ ve $w \neq 0$ için

$i)$ $\tilde{g}(w,w) > 0$ ise $\tilde{g}$ ya pozitif,

$ii)$ $\tilde{g}(w,w) < 0$ ise $\bar{g}$ ya negatif,

$iii)$ $\tilde{g}(w,w) \geq 0$ ise $\tilde{g}$ ya pozitif yarı

$iv)$ $\tilde{g}(w,w) \leq 0$ ise $\bar{g}$ ya negatif yarı tanımlı denir [26].

Tanım 2.1.3. $\tilde{g}$, $\tilde{V}$ üzerinde $\tilde{g}$ simetrik biliner form, $0 \neq \xi \in \tilde{V}$ ve her $z \in V$ için

$$\tilde{g}(\xi,z) = 0$$

ise $\tilde{g}$ ya dejenere, farklı sıfır ise non-dejeneredir denir [8].

Tanım 2.1.4. $\tilde{g}$, $\tilde{V}$ üzerinde simetrik biliner formu için $\tilde{V}$ nın radikal uzayı

$$Rad\tilde{V} = \{\xi \in \tilde{V} \mid \tilde{g}(\xi,w) = 0, \forall w \in \tilde{V}\}$$

ile verilir [8].

Tanım 2.1.5. Bir $\tilde{V}$ reel vektör uzayı ile

$$\tilde{g}:\tilde{V}\times\tilde{V}\rightarrow\mathbb{R}$$

simetrik bilineer formu için

$$\tilde{g}|_{\hat{V}}:\hat{V}\times\hat{V}\rightarrow\mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $\hat{V}$ nın boyutuna $\tilde{g}$ nın indeksi denir ve ν ile verilir. Burada $\tilde{g}|_{\hat{V}}$ ya indirgenmiş simetrik bilineer form denir ve $\hat{g}$ ile gösterilir [26].

Teorem 2.1.1. *$\tilde{g}$ simetrik bilineer formu için*

i) $\tilde{g}\ (\beta_k,\beta_l)=0,\ \ k\neq l,$

ii) $\tilde{g}\ (\beta_k,\beta_k)=1,\ \ 1\leq k\leq\varepsilon,$

iii) $\tilde{g}\ (\beta_k,\beta_k)=-1,\ \ \varepsilon+1\leq k\leq\varepsilon+\nu,$

iv) $\bar{g}\ (\beta_k,\beta_k)=0,\ \ \varepsilon+\nu+1\leq k\leq n=\varepsilon+\nu+\mu$

şeklinde $\tilde{V}$ nın bir $\{\beta_1,...,\beta_n\}$ bazı vardır [26].

Tanım 2.1.6. $\tilde{V}$ üzerinde dejenere olmayan simetrik biliner forma skaler çarpım, $(\tilde{V}$,$\tilde{g})$ ye de skaler çarpım uzayı denir. $\tilde{V}$ vektör uzayı $\tilde{g}$ dejenere ise dejenere (lightlike) vektör uzayı olarak isimlendirilir [8].

Tanım 2.1.7. $\hat{V}$, $\tilde{V}$ vektör uzayının altuzayı olmak üzere $\tilde{g}_{|\hat{V}}$ dejenere ise $\hat{V}$ ya dejenere altuzay denir ve

$$\hat{V}\cap\hat{V}^{\perp}\neq\{0\}$$

dır. Buradaki $\hat{V}$ nın dik uzayı

$$\hat{V}^{\perp}=\{w\in\hat{V}\mid\tilde{g}(w,z)=0,\ \forall z\in\hat{V}\}$$

ile verilir [8].

Teorem 2.1.2. *$\tilde{V}$ semi-Öklid uzay ve $\hat{V}$, $\tilde{V}$ nin altuzayı olsun. O halde*

$$Rad\hat{V}^{\perp}=Rad\hat{V}=\hat{V}\cap\hat{V}^{\perp}$$

dir [8].

Tanım 2.1.8. $\tilde{M}$ diferensiyelenebilir manifoldunun $p \in \tilde{M}$ noktasında $T_p\tilde{M}$ tanjant uzayı için

$$\tilde{g} : T_p\tilde{M} \times T_p\tilde{M} \to \mathbb{R}$$

$$(U_p, Y_p) \to \tilde{g}(U_p, Y_p)$$

ile verilen sabit indeksli, bilineer, simetrik ve dejenere olmayan (0,2)-tensör alanına metrik tensör ve $\tilde{g}$ ile donatılmış $\tilde{M}$ ya semi-Riemann manifoldu denir [26].

Tanım 2.1.9. $\tilde{M}$ semi-Riemann manifold üzerinde tanımlı metrik tensör $\tilde{g}$ nın indeksine manifoldun indeksi denir ve $ind\tilde{M}$ ile verilir.

İndeks υ ise $0 \leq \upsilon \leq boy\tilde{M}$ olur [26].

Tanım 2.1.10. $\tilde{g}$, $\tilde{M}$ semi-Riemann manifold üzerinde tanımlı metrik tensör olmak üzere $p \in \tilde{M}$ ile $U_p \in T_p\tilde{M}$ için

$$\tilde{g} : T_p\tilde{M} \times T_p\tilde{M} \to \mathbb{R}$$

ise

$i)$ $\tilde{g}(U_p, U_p) > 0$ ya da $U_p = 0$ ise U_p spacelike,

$ii)$ $\tilde{g}(U_p, Up) < 0$ ise U_p timelike,

$iii)$ $\tilde{g}(U_p, U_p) = 0$, $U_p \neq 0$ ise U_p dejenere (null) vektör olarak isimlendirilir [26].

Tanım 2.1.11. $\tilde{V}$ üzerinde tanımlı simetrik bilineer form $\tilde{g}_{|\tilde{V}}$ dejenere ise $\tilde{V}$ ya dejenere vektör uzayı denir [8].

Tanım 2.1.12. $\tilde{V}$ semi-Öklid uzayı ve $(\hat{V}, \tilde{g}_{|\hat{V}})$, $null\hat{V} = r < n$ şeklinde, $n-$boyutlu dejenere vektör uzayında radikal uzayın tümleyenine $\hat{V}$ nın screen (ekran) uzayı denir ve $S\hat{V}$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.1.13. $\tilde{V}$ semi-Öklid uzayı ve $\hat{V}$ da $\tilde{V}$ nın altuzayı için $\hat{V}$ üzerine indirgenmiş metrik $\hat{g}$ dejenere ise $\hat{V}$ ya dejenere altuzay aksi durumda dejenere olmayan altuzay denir [8].

Tanım 2.1.14. Bir diferensiyelenebilir manifold $\tilde{M}$ nın her noktasına r-boyutlu lineer altuzay eşleyen

$$D : \tilde{M} \to T_p\tilde{M}$$

$$p \to D_p \subset T_p\tilde{M}$$

dönüşüme distribüsyon adı verilir. Her $p \in \tilde{M}$ için D_p de r-tane diferensiyelenebilir lineer bağımsız vektör alanı bulunuyorsa distribüsyona diferensiyelenebilirdir denir [8].

Tanım 2.1.15. Bir diferensiyelenebilir manifold $\tilde{M}$ üzerinde D bir distribüsyon olsun. Her $U,Z \in \Gamma(D)$ için $[U,Z] \in \Gamma(D)$ oluyorsa distribüsyona involutivedir denir. Eğer distribüsyon involutive ise integrallenebilirdir [8].

Tanım 2.1.16. $\mathbb{R}^n_\upsilon$ üzerinde koordinat sistemi $\{w_1,...,w_n\}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial w_i}$ ve $\mathbb{R}^n_\upsilon$ de Y ve U için

$$\nabla_Y U = \sum Y(U_i)\partial_i$$

ile verilen $\nabla_Y U$ vektör alanına U nun Y ye göre kovaryat türevi denir. Burada $U = \sum w_i \partial_i$ dir [26].

Tanım 2.1.17. Bir diferensiyelenebilir manifold $\tilde{M}$ üzerinde aşağıdaki şartları gerçekleyen

$$\tilde{\nabla} : \Gamma(T\tilde{M}) \times \Gamma(T\tilde{M}) \to \Gamma(T\tilde{M})$$

ya konneksiyon denir:

$i)$ $\tilde{\nabla}_Z W$, Z ye göre $C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ lineerdir,

$ii)$ $\tilde{\nabla}_Z W$, W ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir,

$iii)$ $\tilde{\nabla}_Z(lW) = Z(l)W + l\tilde{\nabla}_Z W$, her $l \in C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$

dir [26].

Teorem 2.1.3. *Bir semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ ve her $U,Y,Z \in \Gamma(T\tilde{M})$ için*

$i)$ $[U,Y] = \tilde{\nabla}_U Y - \tilde{\nabla}_Y U$,

$ii)$ $U\tilde{g}(Y,Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U Y,Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_U Z)$

şartlarını gerçekleyen bir tek $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu vardır, bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U Y, Z) &= U\tilde{g}(Y,Z) + Y\tilde{g}(Z,U) - Z\tilde{g}(U,Y) \\ &+\tilde{g}([U,Y],Z) + \tilde{g}([Z,U],Y) - \tilde{g}([Y,Z],U) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Kozsul formülü ile belirlenir [26].

Tanım 2.1.18. Levi-Civita koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olan semi-Riemann manifoldu $\tilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörü, her $U,Y,Z \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{R} : \Gamma(T\tilde{M}) \times \Gamma(T\tilde{M}) \times \Gamma(T\tilde{M}) \to \Gamma(T\tilde{M})$$

$$(U,Y,Z) \to \tilde{R}(U,Y)Z = \tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_U Z - \tilde{\nabla}_{[U,Y]} Z$$

ile tanımlı (1,3) tensör alanına denir [26].

Teorem 2.1.4. *Bir semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ ve her $U,Y,W,V \in \Gamma(T\tilde{M})$ için*

i) $\tilde{g}(\tilde{R}(U,Y)V,W) = -\tilde{g}(\tilde{R}(Y,U)V,W)$,

ii) $\tilde{g}(\tilde{R}(U,Y)V,W) = -\tilde{g}(\tilde{R}(U,Y)W,V)$,

iii) $\tilde{R}(U,Y)V + \tilde{R}(Y,V)U + \tilde{R}(V,U)Y = 0$,

iv) $\tilde{g}(\tilde{R}(U,Y)V,W) = \tilde{g}(\tilde{R}(V,W)U,Y)$

dir [26].

Tanım 2.1.19. Y,U semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ nın $p \in \tilde{M}$ noktasında tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı P nin bir bazı olmak üzere

$$K(P) = \frac{\tilde{R}(Y,U,Y,U)}{\tilde{g}(Y,Y)\tilde{g}(U,U) - \tilde{g}(Y,U)^2}$$

şeklinde verilen $K(P)$ sayısına manifoldun kesit eğriliği denir. Ayrıca $K(P) = c$ ise manifold sabit kesit eğriliğine sahiptir denir [26].

Tanım 2.1.20. Eğer $\tilde{M}$ semi-Riemann manifoldu sabit kesit eğrliğine sahip ise $U,Y,W \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{R}(U,Y)W = c\{\tilde{g}(Y,W)U - \tilde{g}(U,W)Y\}$$

dir [26].

Tanım 2.1.21. $\tilde{R}$, semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörü ve $\{w_1,...,w_n\}$, $T_p\tilde{M}$ nın ortonormal bazı için

$$\tilde{Ric} : T_p\tilde{M} \times T_p\tilde{M} \to \mathbb{R}$$

$$(\,U_p,\, Y_p) \to \tilde{Ric}(U_p,Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tilde{g}(\tilde{R}(w_i,U_p)Y_p,w_i)$$

veya

$$\tilde{Ric}(U_p,Y_p) = iz\{Z_p \to \bar{R}(Z_p,U_p)Y_p\}$$

ile tanımlı tensöre Ricci tensörü ve $\tilde{Ric}(U_p,Y_p)$ değerine de Ricci eğrliği denir [26].

Tanım 2.1.22. Bir semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ ve $\{w_1,...,w_n\}$, $T_p\tilde{M}$ nın ortonormal bazı için $\tilde{M}$ nın skaler eğriliği

$$\tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tilde{Ric}(w_i,w_i)$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 2.1.23. $\hat{M}$ m-boyutlu ve $\tilde{M}$ n-boyutlu manifoldlar ve

$$\Pi : \hat{M} \to \tilde{M}$$

için $rank\Pi = boy\hat{M}$ ise dönüşüme daldırma (immersiyon) denir [18].

Tanım 2.1.24. $\hat{M}$ m-boyutlu, $\tilde{M}$ n-boyutlu manifoldlar ve $\hat{M} \subset \tilde{M}$ için

$$j : \hat{M} \to \tilde{M}$$

daldırma ise $\hat{M}$ ya $\tilde{M}$ nın altmanifoldu denir [18].

2.2 Semi-Riemann Manifoldların Dejenere Hiperyüzeyleri

Tanım 2.2.1. $\hat{M}$, $0 < \upsilon < m+1$ indeksine sahip $(m+2)$-boyutlu semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g})$, nın hiperyüzeyi için $p \in \hat{M}$ noktasında $T_p\hat{M}$ nin dik uzayı ve radikali sırasıyla

$$T_p\hat{M}^{\perp} = \{V_p \in T_p\tilde{M} : \tilde{g}(V_p,Y_p) = 0, \forall Y_p \in T_p\hat{M}\}$$

ve

$$RadT_p\hat{M} = \{V_p \in T_p\hat{M} : g(V_p, Y_p) = 0, \forall Y_p \in T_p\hat{M}\}$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 2.2.2. Bir $(m+2)$-boyutlu semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nın n-boyutlu altmanifoldu $\hat{M}$ üzerinde her noktayı bir r-boyutlu alt vektör uzaya eşleyen

$$RadT\hat{M} : p \in \hat{M} \to RadT_p\hat{M}$$

dönüşüme radikal distribüsyon, $\hat{M}$ ya ise r-dejenere altmanifod denir. Burada distribüsyonunun boyutu $nullRadT_p\hat{M}$ ile verilir [8].

Tanım 2.2.3. $\hat{M}$, $0 < \upsilon < m+1$ indeksine sahip $(m+2)$-boyutlu semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$, nın hiperyüzeyi olsun. Her $p \in \hat{M}$ için

$$RadT_p\hat{M} = T_p\hat{M} \cap T_p\hat{M}^{\perp} \neq \{0\}$$

ise $\hat{M}$ ya $\tilde{M}$ nın dejenere hiperyüzeyi denir [8].

Lemma 2.2.1. *$\hat{M}$, $0 < \upsilon < m+1$ indeksine sahip $(m+2)$-boyutlu semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$, nın hiperyüzeyi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [8]:*

$i)$ $\tilde{M}$ nın bir dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ dır.

$ii)$ $\hat{M}$ da $\hat{g}$, sbt m rankına sahiptir.

$iii)$ $T\hat{M}^{\perp} = \bigcup_{p\in\hat{M}} T_p\hat{M}^{\perp}$, $\hat{M}$ da bir distibüsyondur.

Lemma 2.2.1 den $S(T\hat{M})$, $RadT\hat{M}$ ya ortogonal ve non-dejenere olduğu görülebilir. $S(T\hat{M})$ sabit indeksli ise

$$T\hat{M} = S(T\hat{M}) \perp T\hat{M}^{\perp} \tag{2.2.1}$$

ve

$$T\tilde{M} = S(T\hat{M}) \perp S(T\hat{M})^{\perp} \tag{2.2.2}$$

dir. Burada $S(T\hat{M})^{\perp}$, $S(T\hat{M})$nın ortogonal tümleyenidir. Dejenere transversal vektör demeti olan $ltr(T\hat{M})$, $S(T\hat{M})$ da $T\hat{M}^{\perp}$ in tümleyeni olduğundan

$$S(T\hat{M})^{\perp} = T\hat{M}^{\perp} \oplus ltr(T\hat{M}) \tag{2.2.3}$$

dir [8].

Teorem 2.2.1. *$(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldun dejenere hiperyüzeyi $(\hat{M},\hat{g})$ üzerinde $E \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için*

$$\tilde{g}(N,E) = 1, \tag{2.2.4}$$

ve

$$\tilde{g}(N,N) = \tilde{g}(N,W) = 0,\ \forall W \in \Gamma(S(T\hat{M})) \tag{2.2.5}$$

olacak şekilde N tarafından gerilen ve rankı 1 olan bir tek $(ltr(T\hat{M}))$ distribüsyonu vardır [8].

(2.2.4) ile (2.2.5) ten

$$T\tilde{M}_{|\hat{M}} = S(T\hat{M})\perp\{T\hat{M}^{\perp} \oplus ltr(T\hat{M})\} \tag{2.2.6}$$

olur. O halde herhangi bir $S(T\hat{M})$ için (2.2.4) ile (2.2.5) eşitliklerini gerçekleyen ve $T\hat{M}$ için tümleyen bir tek $ltr(T\hat{M})$ vardır [8].

Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olan $(m+2)$-boyutlu $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldun dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ boyunca $T\tilde{M}$ nın $\{E,N,W_i\}$, $1 < i < m$, yerel quasi-ortonormal vektör alanları için

$$\tilde{\nabla}_U Z = \hat{\nabla}_U Z + h(U,Z) \tag{2.2.7}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_U N = -A_N U + \nabla^t_U N \tag{2.2.8}$$

yazılabilir. Burada $U,Z \in \Gamma(T\hat{M})$; $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$; $\nabla_U Y$, $A_N U \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $h(U,Z)$, $\nabla^t_U N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ dir. Yukarıdaki ilk eşitlik Gauss, ikincisi Weingarten formülü olarak isimlendirilir.

Her $U,Z \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$B(U,Z) = \tilde{g}(h(U,Z),E) \tag{2.2.9}$$

ve

$$\tau(U) = \tilde{g}(\nabla^t_U N,E)$$

denirse (2.2.7) ile (2.2.8) sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_U Z = \hat{\nabla}_U Z + B(U,Z)N \tag{2.2.10}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_U N = -A_N U + \tau(U)N \tag{2.2.11}$$

olur [8].

Sonuç 2.2.1. Bir $(m+2)$-boyutlu $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldun dejenere hiperyüzeyi $(\hat{M},\hat{g})$ için ikinci temel formu dejenere yani

$$B(U,E) = 0, \quad \forall U \in \Gamma(T\hat{M}),\ E \in \Gamma(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.2.12}$$

dir [8].

$P : \Gamma(T\hat{M}) \to \Gamma(S(T\hat{M}))$ projeksiyonunu ele alırsak

$$\hat{\nabla}_U PY = \nabla^*_U PY + h^*(U,PY), \qquad \forall U,Y \in \Gamma(T\hat{M}) \tag{2.2.13}$$

ve

$$\hat{\nabla}_U E = -A^*_E U + \nabla^{*t}_U E,\ \ \forall U \in \Gamma(T\hat{M}), E \in \Gamma(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.2.14}$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_U PY, A^*_E U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $h^*(U,PY), \nabla^{*t}_U E \in \Gamma(T\hat{M}^{\perp})$ dir [8]. h^*, $S(T\hat{M})$ nin ikinci temel formu ve A^* ise şekil opertörüdür. Yukarıdaki ilk eşitlik $S(T\hat{M})$ için Gauss ikincisi Weingarten formülü olarak isimlendirilir.

(2.2.8), (2.2.10), (2.2.13) ile (2.2.14) ten $U,Z \in \Gamma(T\hat{M})$, $E \in \Gamma(T\hat{M}^{\perp})$ ve $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ için

$$\hat{g}(A_N Z, PW) = \tilde{g}(N, h^*(Z,PW)), \quad \tilde{g}(A_N Z, N) = 0 \tag{2.2.15}$$

ve

$$\hat{g}(A^*_E U, PZ) = \hat{g}(E, h^*(U,Z)), \quad \tilde{g}\ (A^*_E U, N) = 0 \tag{2.2.16}$$

olur.

$\hat{M}$ nın bir λ koordinat komşuluğu üzerinde

$$C(U,PZ) = \tilde{g}(h^*(U,PZ),N)$$

ve

$$\varepsilon(U) = \tilde{g}(\nabla^{*t}_U E, N)$$

ile verilirse

$$h^*(U,PZ) = C(U,PZ)E \tag{2.2.17}$$

ve

$$\nabla_U^{*t} E = \varepsilon(U)E \tag{2.2.18}$$

bulunur. (2.2.17) ve (2.2.18), (2.2.13) ve (2.2.14) te yerine yazılırsa

$$\hat{\nabla}_U PZ = \nabla_U^* PZ + C(U,PZ)E \tag{2.2.19}$$

ve

$$\hat{\nabla}_U E = -A_E^* U + \varepsilon(U)E \tag{2.2.20}$$

olur. Burada $\varepsilon(U) = -\tau(U)$ dir. Artık (2.2.15) ve (2.2.16) eşitlikleri

$$\hat{g}(A_N Z, PW) = C(Y, ZW), \quad \tilde{g}(A_N Z, N) = 0 \tag{2.2.21}$$

ve

$$\hat{g}(A_E^* U, PZ) = B(U,PZ), \quad \tilde{g}\ (A_E^* Z, N) = 0 \tag{2.2.22}$$

şeklinde yazılabilir [8].

Lemma 2.2.2. *Bir $(m+2)$-boyutlu $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldun dejenere hiperyüzeyi $(\hat{M},\hat{g})$ üzerine indirgenmisş konneksiyon $\hat{\nabla}$ ve $S(T\hat{M})$ üzerindeki konneksiyon ∇^* olmak üzere*

$i)$ ∇^* konneksiyonu metrik konneksiyondur.

$ii)$ Her $U,Z,V \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$(\hat{\nabla}_U g)(Z,V) = B(U,Z)\theta(V) + B(U,V)\theta(Z) \tag{2.2.23}$$

dir. Burda $\theta(V) = \tilde{g}(V,N)$ dir [8].

2.3 Semi-Riemann Manifoldların Dejenere Altmanifoldları

Tanım 2.3.1. Bir $(m+n)$-boyutlu semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g})$ nın n-boyutlu altmanifodu $\hat{M}$ için

$$\Pi : \hat{M} \to \tilde{M}$$

izometrik daldırma ($rank\Pi = n$) ise $\hat{M}$ ya $\tilde{M}$ nın altmanifoldu denir [26].

Tanım 2.3.2. Bir $\tilde{M}$ semi-Riemann manifoldun altmanifoldu $\hat{M}$ olmak üzere, her $p \in \hat{M}$ için $T_p\hat{M}^{\perp}$ ın boyutuna dik tümleyenin boyutu (ek boyut), indeksine ise dik tümleyenin indeksi denir [26].

Tanım 2.3.3. Bir semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ nın bir altmanifodu $\hat{M}$ olmak üzere her $p \in \hat{M}$ için

$$Rad : p \in \hat{M} \to RadT_p\hat{M}$$

dönüşününün rankı r ve $r > 0$ ise $\hat{M}$ r-dejenere altmanifold olarak isimlendirilir [8].

Bir semi-Riemann manifold $\tilde{M}$ ve r-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ için, aşağıdaki durumlar incelenir:

Durum I. ($0 < r < min\{m,n\}$). Altmanifoldun tanjant demetinde, $RadT\hat{M}$ nın tamamlayanı olan $S(T\hat{M})$ göz önüne alınırsa, $RadT\hat{M}$ ya ortogonal, non-dejenere, $\hat{M}$ üzerinde sabit indeksli ve

$$T\hat{M} = S(T\hat{M}) \perp RadT\hat{M} \tag{2.3.1}$$

dır. Buradan

$$T\hat{M}^{\perp} = \cup T_p\hat{M}^{\perp}$$

ile verilirse $RadT\hat{M} = T\hat{M} \cap T\hat{M}^{\perp}$ ve $\hat{M}$ üzerinde $rankr > 0$ olan bir distibüsyon olduğundan $T\hat{M}^{\perp}$, $T\tilde{M}|_{\hat{M}}$ de $T\hat{M}$ ye tamamlayan değildir. $T\hat{M}^{\perp}$ da $RadT\hat{M}$ ya ortogonal tamamlayan vektör demetini $S(T\hat{M}^{\perp})$ ile gösterilirse $T\hat{M}^{\perp}$

$$T\hat{M}^{\perp} = RadT\hat{M} \perp S(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.3.2}$$

ile verilir ve $S(T\hat{M}^{\perp})$ e, $\hat{M}$ nın transversal ekran distribüsyonu denir. Diğer taraftan

$$T\tilde{M}|_{\hat{M}} = S(T\hat{M}) \perp S(T\hat{M})^{\perp} \tag{2.3.3}$$

dir. Burada $S(T\hat{M})^{\perp}$, $T\tilde{M}|_{\hat{M}}$ de $S(T\hat{M})$ ya ortogonal tamamlayandır. Ayrıca $S(T\hat{M}^{\perp})$, $S(T\hat{M})^{\perp}$ in altvektör demeti ve dejenere olmadığından

$$S(T\hat{M})^{\perp} = S(T\hat{M}^{\perp}) \perp S(T\hat{M}^{\perp})^{\perp} \tag{2.3.4}$$

olur.

Teorem 2.3.1. *[8] Bir semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g})$ *nın r-dejenere altmanifodu* $(\hat{M},\hat{g},S(T\hat{M}),S(T\hat{M}^{\perp}))$*, koordinat komşuluğu* λ *ve* $\{E_k\}$ *de* $\Gamma(RadT\hat{M}|_{\lambda})$ *uzayının bazı olsun. O halde* $S(T\hat{M}^{\perp})^{\perp}|_{\lambda}$ *altvektör demetinde*

$$\hat{g}(N_k,E_j)=\delta_{kj}, \tag{2.3.5}$$

$$\hat{g}(N_k,N_j)=0 \tag{2.3.6}$$

şeklinde $\{N_1,N_2,...,N_r\}$ *vektör alanları vardır.*

Teorem 2.3.2. *[8] Bir* $(\tilde{M},\tilde{g})$ *semi-Riemann manifoldun r-dejenere altmanifoldu* $(\hat{M},\hat{g})$ *ve* $k\in\{1,2,...,r\}$ *için* $\{N_1,N_2,...,N_r\}$ *tabanı olan* $S(T\hat{M}^{\perp})^{\perp}$ *de* $RadT\hat{M}$ *ya tamamlayan vektör demeti vardır.*

Yukarıda sözü edilen vektör demeti dejenere transversal vektör demeti olarak isimlendirilip $ltr(T\hat{M})$ ile gösterilir. Şimdi

$$tr(T\hat{M})=ltr(T\hat{M})\perp S(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.3.7}$$

vektör demetini inceleyelim. Burada $tr(T\hat{M})$ nın $T\hat{M}$ ile arakesti sıfır ve rankı n dır.

Böylece transversal vektör demeti $trT\hat{M}$, $T\tilde{M}|_{\hat{M}}$ de $T\hat{M}$ demetine tamamlayan ama ortogonal olmayan vektör demetidir.

(2.3.1) ile (2.3.7) den

$$\begin{aligned} T\tilde{M} &= T\hat{M}\oplus tr(T\hat{M}) \\ &= RadT\hat{M}\perp S(T\hat{M})\oplus ltr(T\hat{M})\perp S(T\hat{M}^{\perp}) \\ &= S(T\hat{M})\perp S(T\hat{M}^{\perp})\perp(RadT\hat{M}\oplus ltr(T\hat{M})) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olur.

Diğer yandan altmanifold boyunca $\tilde{M}$ deki quasi ortonormal çatı $k\in\{1,2,...,r\}$, $a\in\{r+1,...,m\}$ ve $\alpha\in\{r+1,...,n\}$ için $\{E_k,N_k,X_a,W_\alpha\}$ dır. $\{E_k\}$, $\{N_k\}$, $\{X_a\}$ ve $\{W_\alpha\}$ da sırasıyla $\Gamma(RadT\hat{M}|_{\lambda})$, $\Gamma(ltr(T\hat{M})|_{\lambda})$, $\Gamma(ST\hat{M}))$ ve $\Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$ nın bazlarıdır.

Durum II. $(1<r=n<m)$. O halde $S(T\hat{M}^{\perp})=\{0\}$ yani $RadT\hat{M}=T\hat{M}^{\perp}$ dır. Altmanifold üzerinde normal demet dejenere bir distribüsyon olup, altmanifolda koizotropik

altmanifod denir ve

$$T\hat{M} = S(T\hat{M}) \perp T\hat{M}^{\perp} \tag{2.3.9}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} T\tilde{M} &= T\hat{M} \oplus ltr(T\hat{M}) \\ &= S(T\hat{M}) \perp \{T\hat{M}^{\perp} \oplus ltr(T\hat{M})\} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

dır.

Diğer yandan altmanifold boyunca $\tilde{M}$ deki quasi ortonormal çatı $\{E_1, E_2, ..., E_n, N_1, N_2, ..., N_n, X_{n+1}, ..., X_m\}$ dir. Burda $\{X_{n+1}, ..., X_m\}$ kümesi $\Gamma(S(T\hat{M})|_{\lambda})$ nun bazıdır.

Durum III. $(1 < r = m < n)$. O halde $S(T\hat{M}) = \{0\}$ yani $RadT\hat{M} = T\hat{M}$ dır. Altmanifoldun tanjant demeti, $T\hat{M}^{\perp}$ in alt vektör demeti olup, altmanifolda izotropik altmanifold denir ve

$$T\hat{M}^{\perp} = T\hat{M} \perp S(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.3.11}$$

dir. Buradan

$$T\tilde{M} = T\hat{M} \oplus tr(T\hat{M}) \tag{2.3.12}$$

yazılir.

(2.3.12) te (2.3.7) kullanılarak

$$T\tilde{M} = T\hat{M} \oplus ltr(T\hat{M}) \perp S(T\hat{M}^{\perp}) \tag{2.3.13}$$

bulunur.

Diğer yandan altmanifold boyunca $\tilde{M}$ deki quasi ortonormal çatı $\{E_1, E_2, ..., E_m, N_1, N_2, ..., N_m, W_{n+1}, ..., W_n\}$ dir. Burada $\{W_{m+1}, ..., W_n\}$ kümesi $\Gamma(S(T\hat{M}^{\perp})|_{\lambda})$ nun bazıdır.

Durum IV. $(1 < r = m = n)$. O halde $S(T\hat{M}) = \{0\}$, $S(T\hat{M}^{\perp}) = \{0\}$ yani $RadT\hat{M} = T\hat{M} = T\hat{M}^{\perp}$ dır. Bu tipteki altmanifolda tamamen dejenere altmanifold denir ve

$$T\tilde{M} = T\hat{M} \oplus ltr(T\hat{M})$$

yazılabilir.

Diğer yandan altmanifold boyunca $\tilde{M}$ deki quasi ortonormal çatı $\{E_1, E_2, ..., E_m, N_1, N_2, ..., N_m\}$ dir [8].

Bir $(m+n)$-boyutlu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldun n-boyutlu dejenere altmanifoldu $(\hat{M}, \hat{g})$ olmak üzere $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ nın Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $U, Y \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $V \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için

$$\tilde{\nabla}_U Y = \hat{\nabla}_U Y + h(U, Y) \tag{2.3.14}$$

$$\tilde{\nabla}_U V = -A_V U + \nabla^t_U V \tag{2.3.15}$$

olur. Burada $\hat{\nabla}_U Y, A_V U \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $h(U, Y), \nabla^t_U V \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ dir. $\hat{\nabla}$ ile ∇^t sırasıyla $\hat{M}$ ve $tr(T\hat{M})$ üzerindeki lineer konneksiyonlar olmak üzere h ya ikinci temel form, A ya ise şekil operatörü denir.

$\hat{M}$ altmanifoldunun Durum I veya Durum IV deki gibi olduğu düşünülürse, $tr(T\hat{M})$ deki $ltr(T\hat{M})$ ve $S(T\hat{M}^{\perp})$ in projeksiyonları $\hat{L}$ ve $\hat{S}$ için

$$\hat{L} : tr(T\hat{M}) \to ltr(T\hat{M}) \; \hat{S} : tr(T\hat{M}) \to S(T\hat{M}^{\perp})$$

dir. Burada $h^l(U, Y) = \hat{L}h(U, Y)$, $D^l_X V = \hat{L}(\nabla^t_U V)$ ve $h^s(U, Y) = \hat{S}h(U, Y)$, $D^s_X V = \hat{S}(\nabla^t_U V)$. O halde (2.3.14) ile (2.3.15) ten

$$\tilde{\nabla}_U Y = \hat{\nabla}_U Y + h^l(U, Y) + h^s(U, Y), \tag{2.3.16}$$

$$\tilde{\nabla}_U V = -A_V U + D^l_U V + D^s_U V \tag{2.3.17}$$

olur. h^l ve h^s sırasıya ikinci temel form ve ekran ikinci temel form olarak isimlendirilir [8].

Tanım 2.3.4. [8] B vektör demeti, $P : \sigma \to \sigma$ vektör demet morfizimi ve her $s \in \Gamma(\sigma)$ için

$$D_U : \Gamma(\sigma) \to \Gamma(\sigma)$$

$$s \to D_U s$$

opertörü aşağıdaki şartlrı sağlıyan P morfizimine göre Otsuki konneksiyon denir:

1) $D_{fU+Y} s = f D_U s + D_Y s$

2) $D_U(fs + \acute{s}) = D_U fs + U(f)P(s) + D_U \acute{s}.$

Önerme 2.3.1. *Bir $\tilde{M}$ manifoldunun r-dejenere veya izotropik altmanifoldu $\hat{M}$ için D^l ve D^s operatörleri, sırsıyla $\hat{L}$ ve $\hat{S}$ morfizimlerine göre $tr(T\hat{M})$ de iki Otsuki konneksiyon tanımlar [8].*

Buradan $U,Y \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $Z \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için

$$\nabla^l_U : \Gamma(ltr(T\hat{M})) \to \Gamma(ltr(T\hat{M}))$$

$$\hat{L}Z \to \nabla^l_U(\hat{L}Z) = D^l_U(\hat{L}Z)$$

ve

$$\nabla^s_U : \Gamma(S(T\hat{M}^\perp)) \to \Gamma(S(T\hat{M}^\perp))$$

$$\hat{S}Z \to \nabla^s_U(\hat{S}Z) = D^s_U(\hat{S}Z)$$

diferansiyel operatörleri tanımlanır. Burada ∇^l ile ∇^s, dejenere transversal konneksiyon ve ekran transversal konneksiyon $ltr(T\hat{M})$ ve $S(T\hat{M}^\perp)$ üzerinde lineer konneksiyonlardır.

Ayrıca

$$D^l : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(S(T\hat{M}^\perp)) \to \Gamma(ltr(T\hat{M}))$$

$$(U,\hat{S}Z) \to D^l_U\hat{S}Z = D^l(U,\hat{S}Z)$$

ve

$$D^s : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(ltr(T\hat{M})) \to \Gamma(S(T\hat{M}^\perp))$$

$$(U,\hat{L}Z) \to D^s_U\hat{L}Z = D^s(U,\hat{L}Z)$$

bilineer dönüşümleri tanımlanıp (2.3.17) de uygulanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_U Z &= -A_Z U + \nabla^l_U \hat{L}Z + \nabla^s_U \hat{S}Z \\ &\quad + D^l(U,\hat{S}Z) + D^s(U,\hat{L}Z)\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

olur.

Burada Z yerine, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ ile $W \in \Gamma(S(T\hat{M}^\perp))$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_U N = -A_N U + \nabla^l_U N + D^s(U,N), \tag{2.3.19}$$

$$\tilde{\nabla}_U W = -A_W U + \nabla^s_U W + D^l(U,W) \tag{2.3.20}$$

bulunur.

Şimdi $\hat{M}$, $\tilde{M}$ nın koizotropik veya tamamen dejenere altmanifold olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.3.16) ve (2.3.18) den

$$\tilde{\nabla}_U Y = \hat{\nabla}_U Y + h^l(U,Y), \tag{2.3.21}$$

$$\tilde{\nabla}_U N = -A_N U + \nabla^l_U N \tag{2.3.22}$$

bulunur. Dejenere olmayan altmanifodlarda ki gibi (2.3.14), (2.3.16) ve (2.3.21) Gauss formülü, (2.3.15), (2.3.17), (2.3.18), (2.3.19), (2.3.20) ve (2.3.22) ise Weingraten formülüdür.

Metrik konneksiyon olan $\tilde{\nabla}$ nın özellikleri ile birlikte Gauss ve Weingarten formülerinden

$$\tilde{g}(h^s(U,Y),W) + \tilde{g}(Y,D^l(U,W)) = g(A_W U,Y), \tag{2.3.23}$$

$$\tilde{g}(h^l(U,Y),E) + \tilde{g}(Y,h^l(U,E)) + g(Y,\hat{\nabla}_U E) = 0, \tag{2.3.24}$$

$$\tilde{g}(D^s(U,N),W) = \tilde{g}(N,A_W U), \tag{2.3.25}$$

$$\tilde{g}(A_N U,\hat{N}) + \tilde{g}(A_{\hat{N}} U,N) = 0, \tag{2.3.26}$$

bulunur. Burda $U,Y \in \Gamma(T\hat{M})$, $E \in \Gamma(RadT\hat{M})$, $W \in \Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$, $N,\hat{N} \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ dir [8].

P dönüşümü, $S(T\hat{M})$ üzerinde $T\hat{M}$ nın projeksiyonu ise (2.3.1) den

$$\hat{\nabla}_U PY = \nabla^*_U PY + h^*(U,PY) \tag{2.3.27}$$

ve

$$\hat{\nabla}_U E = -A^*_E U + \nabla^{*t}_U E \tag{2.3.28}$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_U PY, A^*_E U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $h^*(U,PY), \nabla^{*t}_U E \in \Gamma(RadT\hat{M})$ dir. ∇^* ve ∇^{*t} sırasıyla $S(T\hat{M})$ ve $RadT\hat{M}$ üzerinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca $h^* : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(S(T\hat{M})) \to \Gamma(RadT\hat{M})$ ve $A^* : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(RadT\hat{M}) \to \Gamma(S(T\hat{M}))$ şeklindeki bilineer formlardır [8].

Diğer taraftan (2.3.16), (2.3.17), (2.3.27) ve (2.3.28) den her $U,Y \in \Gamma(T\hat{M})$, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $E \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için

$$\tilde{g}(h^l(U,PY),E) = \tilde{g}(A^*_E U,PY), \tag{2.3.29}$$

$$\tilde{g}(h^*(U,PY),N) = \tilde{g}(A_N U,PY), \tag{2.3.30}$$

bulunur. h^l simetrik olduğundan (2.3.29) dan $S(T\hat{M})$ nın şekil operatörü self-adjointir. (2.3.24) te Y yerine E yazılıra

$$\tilde{g}(h^l(U,E),E) = 0 \tag{2.3.31}$$

olur. (2.3.29) da U yerine E alınıp (2.3.31) kulanılırsa

$$A^*_E E = 0 \tag{2.3.32}$$

olur [8].

$\hat{\nabla}$ metrik konneksiyon olmadığından, (2.3.16) kullanılarak

$$(\hat{\nabla}_U \hat{g})(Y,Z) = \hat{g}(h^l(U,Z),Y) + \hat{g}(h^l(U,Y),Z) \tag{2.3.33}$$

bulunur. Ayrıca $S(T\hat{M})$ de tanımlanan ∇^*, metrik konneksiyondur [8].

2.4 Hemen Hemen Poly-Norden Manifoldlar

Bilindiği üzere $x^2 - \omega x + 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü

$$\rho_\omega = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2} \tag{2.4.1}$$

Bronz oranı verir [24]. (2.4.1) de verilen Bronz orandan esinlenerek B. Sahin [31] bir diferensiyelenebilir manifold üzerinde yeni bir yapı tanımladı

Tanım 2.4.1. Bir diferensiyellenebilir manifold $\tilde{M}$ üzerinde

$$\Phi^2 = \omega\Phi - I \tag{2.4.2}$$

eşitliğini gerçekleyen $(1,1)-$tipindeki tensör alanına poly-Norden yapı, $(\tilde{M},\Phi)$ ikilisine de hemen hemen poly-Norden manifold denir [31].

Örnek 2.4.1. $\mathbb{R}^4$ reel uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (u_1,u_2,u_3,u_4) \quad &\to \quad (\rho_\omega u_1, \rho_\omega u_2, \bar{\rho}_\omega u_3, \bar{\rho}_\omega u_4), \end{aligned}$$

ifadesini tanımlayalım. Bu ifade de $\rho_\omega = \frac{\omega+\sqrt{\omega^2-4}}{2}$ ve $\bar{\rho}_\omega = \omega - \rho_\omega$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Phi^2(U) &= \Phi^2(u_1,u_2,u_3,u_4) \\ &= \Phi(\Phi(u_1,u_2,u_3,u_4)) \\ &= \left(\rho_\omega^2 u_1, \rho_\omega^2 u_2, \bar{\rho}_\omega^2 u_3, \bar{\rho}_\omega^2 u_4\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\omega\Phi - I)(U) &= \omega\Phi(U) - U \\ &= \omega(\rho_\omega u_1, \rho_\omega u_2, \bar{\rho}_\omega u_3, \bar{\rho}_\omega u_4) \\ &\quad -(u_1,u_2,u_3,u_4) \\ &= \begin{pmatrix} (\omega\rho_\omega - 1)u_1, (\omega\rho_\omega - 1)u_2, \\ (\omega\bar{\rho}_\omega - 1)u_3, (\omega\bar{\rho}_\omega - 1)u_4, \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Buradan $\rho_\omega = \frac{\omega+\sqrt{\omega^2-4}}{2}$ ve $\bar{\rho}_\omega = \frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4}}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\rho_\omega^2 = \frac{\omega^2 + \omega\sqrt{\omega^2-4} - 2}{2},$$

$$\omega\rho_\omega - 1 = \frac{\omega^2 + \omega\sqrt{\omega^2-4} - 2}{2},$$

$$\bar{\rho}_\omega^2 = \frac{\omega^2 - \omega\sqrt{\omega^2-4} - 2}{2},$$

$$\omega\bar{\rho}_\omega - 1 = \frac{\omega^2 - \omega\sqrt{\omega^2-4} - 2}{2},$$

olacağından $\rho_\omega^2 = \omega\rho_\omega - 1$ ve $\bar{\rho}_\omega^2 = \omega\bar{\rho}_\omega - 1$ elde edilir. Böylece Φ dönüşümünün (2.4.2) eşitliğini sağladığı görülür. O halde $(\mathbb{R}^4, \Phi)$ bir hemen hemen poly-Norden manifold olur [31].

Tanım 2.4.2. Bir hemen hemen poly-Norden manifold $(\tilde{M},\Phi)$ ve $\tilde{g}$, semi-Riemann metrik olmak üzere her $U,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{g}(\Phi U,\Phi Y) = \omega\tilde{g}(\Phi U,Y) - \tilde{g}(U,Y) \tag{2.4.3}$$

bağıntısını sağlayan $\tilde{g}$ metriğine Φ ile uyumlu bir semi-Riemann metriktir denir [31].

(2.4.3) eşitliği göz önüne alınırsa Φ dönüşümünün self adjoint, yani

$$\tilde{g}(\Phi U,Y) = \tilde{g}(U,\Phi Y) \tag{2.4.4}$$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.4.3. Bir semi-Rieman manifold $(\tilde{M},\tilde{g})$ve Φ bir hemen hemen poly-Norden yapı olsun. Bu durumda $\tilde{g}$ semi-Riemann metriği, Φ ile uyumlu ise $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ ye bir hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifold denir [31].

Tanım 2.4.4. Bir diferensiyelenebilir $\tilde{M}$ manifoldu için

$$\begin{aligned} \tilde{J}: \quad \Gamma(T\tilde{M}) &\to \Gamma(T\tilde{M}) \\ U &\to \tilde{J}U \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm $\forall U \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{J}^2 U = -U$$

eşitliğini sağlıyor ise $(\tilde{M},\tilde{J})$ ikilisine hemen hemen kompleks manifold denir [33].

Eğer $(\tilde{M},\tilde{J})$ üzerinde

$$\tilde{g}(\tilde{J}U,\tilde{J}Y) = -\tilde{g}(U,Y) \tag{2.4.5}$$

eşitliğini gerçekleyen $\tilde{g}$ ya bir Norden metrik $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{J})$ üçlüsüne de hemen hemen Norden manifold denir. Eğer $\tilde{J}$ integralenebilir ise $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{J})$ üçlüsüne bir Norden manifold denir [25].

Tezin devamında $\omega \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Önerme 2.4.1. $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *hemen hemen poly-Norden manifold olsun.* Φ *bir hemen hemen poly-Norden yapısının özdeğerleri*

$$\frac{\omega+\sqrt{\omega^2-4}}{2} \quad ve \quad \frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4}}{2}$$

dir [31].

Önerme 2.4.2. $(\tilde{M},\tilde{g})$ *semi-Rieman manifold ve* Φ *hemen hemen poly-Norden yapı olmak üzere,* Φ, $\tilde{M}$ *nın bir tanjant uzayı üzerinde bir izomorfizmdir. Ayrıca* Φ *nın tersi* $\breve{\Phi}$ *ise*

$$\breve{\Phi}=-\Phi+\omega I \tag{2.4.6}$$

eşitliği sağlanır [31].

İspat. Öncelikle hemen hemen poly-Norden yapı Φ nin bire-bir olduğunu gösterelim. $U,Y\in\Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\Phi(U)=\Phi(Y)$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}\Phi(U)=\Phi(Y)\Rightarrow \quad \Phi(\Phi(U)) &= \Phi(\Phi(Y))\\ \Phi^2(U) &= \Phi^2(Y)\\ \omega\Phi(U)-I(U) &= \omega\Phi(Y)-I(Y)\end{aligned}$$

eşitliklerinden $U=Y$ yazılabilir. Şimdi $\Phi\circ\breve{\Phi}=I=\breve{\Phi}\circ\Phi$ eşitliği kullanılırsa

$$\Phi\circ\breve{\Phi}(U)=I(U)\Rightarrow\Phi(\Phi(\breve{\Phi}(U)))=\Phi(I(U))\Rightarrow\Phi^2(\breve{\Phi}(U))=\Phi(U)$$

$$\Rightarrow\omega\Phi(\breve{\Phi}(U))-I(\breve{\Phi}(U)))=\Phi(U)\Rightarrow\omega I(U)-\breve{\Phi}(U)=\Phi(U)$$

$$\Rightarrow\breve{\Phi}=-\Phi+\omega I$$

sonucuna ulaşılır. □

Önerme 2.4.3. $(\tilde{M},\tilde{g})$ *semi-Rieman manifold ve* Φ *hemen hemen poly-Norden yapı ve tersi,* $\breve{\Phi}$ *olmak üzere* $\breve{\Phi}$, $\tilde{M}$ *üzerinde bir poly-Norden yapı değildir. Yani*

$$\breve{\Phi}^2\neq\omega\breve{\Phi}-I \tag{2.4.7}$$

[31].

İspat. Her $U \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned}
\breve{\Phi}^2(U) &= \breve{\Phi}(\breve{\Phi}(U)) \\
&= \breve{\Phi}((-\Phi+\omega I)(U)) \\
&= \breve{\Phi}(-\Phi(U))+\omega\breve{\Phi}(I(U)) \\
&= (-I+\omega\breve{\Phi})(U)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\omega\breve{\Phi}-I)(U) &= \omega\breve{\Phi}(U)-I(U) \\
&= \omega((-\Phi+\omega I)(U))-I(U) \\
&= -\omega\Phi(U)+\omega^2 I(U)-I(U)
\end{aligned}$$

olacağından (2.4.7) nın varlığı görülebilir. □

Önerme 2.4.4. *Bir $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifold üzerindeki her $\tilde{J}$ hemen hemen kompleks yapısından*

$$\Phi_1 = \frac{\omega}{2}I + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}$$

ve

$$\Phi_2 = \frac{\omega}{2}I - \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}$$

olacak şekilde iki tane hemen hemen poly-Norden yapı elde edilir. Burada $-2<\omega<2$ dir [31].

İspat. Her $U \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $\Phi_1^2 = \omega\Phi_1 - I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\Phi_1^2(U) &= \Phi_1(\Phi_1(U)) \\
&= \Phi_1\left(\frac{\omega}{2}I(U) + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U)\right) \\
&= \frac{\omega}{2}I(U)\left(\frac{\omega}{2}I(U) + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U)\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U)\left(\frac{\omega}{2}I(U) + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U)\right) \\
&= \frac{\omega^2}{4}I^2(U) + \frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{4}\tilde{J}(U)I(U) + \frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{4}\tilde{J}(U)I(U) \\
&\quad + \frac{4-\omega^2}{4}\tilde{J}^2(U) \\
&= \frac{\omega^2-2}{2} + \frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{4}\tilde{J}(U)
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\omega\Phi_1(U) - I(U) &= \omega\left(\frac{\omega}{2}I(U) + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U)\right) - I(U) \\
&= \left(\frac{\omega^2}{2} - 1\right)I(U) + \frac{\sqrt{4-\omega^2}}{2}\tilde{J}(U) \\
&= \frac{\omega^2-2}{2} + \frac{\omega\sqrt{4-\omega^2}}{4}\tilde{J}(U)
\end{aligned}$$

olacağından $\Phi_1^2 = \omega\Phi_1 - I$ eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde $\Phi_2^2 = \omega\Phi_2 - I$ eşitliğide elde edilebilir. □

Önerme 2.4.5. *Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifold üzerindeki her Φ hemen hemen poly-Norden yapıdan*

$$\tilde{J}_1 = \frac{-\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I + \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi$$

ve

$$\tilde{J}_2 = \frac{\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I - \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi$$

olacak şekilde iki tane hemen hemen kompleks yapı elde edilir. Burada $-2 < \omega < 2$ dir [31].

İspat. Her $U \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $\tilde{J}_1^2 = -I$ ve $\tilde{J}_2^2 = -I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_1^2(U) &= \tilde{J}_1(\tilde{J}_1(U)) \\
&= \tilde{J}_1\left(\frac{-\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I(U) + \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi(U)\right) \\
&= \frac{-\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I(U)\left(\frac{-\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I(U) + \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi(U)\right) \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi(U)\left(\frac{-\omega}{\sqrt{4-\omega^2}}I(U) + \frac{2}{\sqrt{4-\omega^2}}\Phi(U)\right) \\
&= \left(\frac{\omega^2}{4-\omega^2}\right)I(U) - \left(\frac{4\omega}{4-\omega^2}\right)\Phi(U) \\
&\quad + \frac{4}{4-\omega^2}\left(\omega\Phi_1(U) - I(U)\right) \\
&= \frac{\omega^2-4}{4-\omega^2}I(U) = -I(U)
\end{aligned}$$

olacağından $\tilde{J}_1^2 = -I$ eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde $\tilde{J}_2^2 = -I$ eşitliği de elde edilebilir.

□

Tanım 2.4.5. $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ bir hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifold olsun. Eğer Φ, $\tilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel, yani

$$\tilde{\nabla}\Phi = 0 \tag{2.4.8}$$

ise $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ ye bir poly-Norden semi-Riemann manifold denir [31].

3. HEMEN HEMEN POLY-NORDEN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN DEJENERE HİPERYÜZEYLERİ

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde, hemen hemen poly-Norden manifoldların dejenere hiperyüzeyleri incelendi. İkinci ve üçüncü alt bölümlerde ise hemen hemen poly-Norden manifoldların invaryant dejenere hiperyüzeyleri ve screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyleri tanıtılarak bu tipteki hiperyüzeylerle ilgili örnekler verildi.

3.1 Hemen Hemen Poly-Norden Semi-Riemann Manifoldların Dejenere Hiperyüzeyleri

Bir hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ ve her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ için

$$\Phi U = \phi U + \hat{u}(U)N, \tag{3.1.1}$$

ve

$$\Phi N = \zeta + \hat{v}(E)N \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Burada $\phi U, \zeta \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $\hat{u}$ ile $\hat{v}$

$$\hat{u}(U) = \hat{g}(U,\Phi E) \quad \hat{v}(U) = \hat{g}(U,\Phi N), \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlı 1-formlardır.

Lemma 3.1.1. *Bir hemen hemen poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ ve her $U,Y \in \Gamma(T\hat{M})$ için*

$$\phi^2 U = \omega\phi U - U - \hat{u}(U)\zeta, \tag{3.1.4}$$

$$\hat{u}(\phi U) = -\omega\hat{u}(U) - \hat{u}(U)\hat{v}(E), \tag{3.1.5}$$

$$\phi\zeta = \omega\zeta - \hat{v}(E)\zeta, \tag{3.1.6}$$

$$\hat{v}(E)^2 = \omega\hat{v}(E) - 1 - u(\zeta), \tag{3.1.7}$$

$$\hat{g}(\phi U,Y)=\hat{g}(U,\phi Y)-\hat{u}(U)\theta(Y)+\hat{u}(Y)\theta(U), \tag{3.1.8}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\phi U,\phi Y) &= \omega\hat{g}(U,\phi Y)-\hat{g}(U,Y)+\omega\hat{u}(Y)\theta(U) \\ &\quad -\hat{u}(Y)\hat{g}(\phi U,N)-\hat{u}(U)\hat{g}(\phi Y,N).\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

İspat. (3.1.1) eşitliğinde her iki tarafa Φ uygulanıp (2.4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(U)) &= \Phi(\phi U)+\hat{u}(U)\Phi(N) \\ \omega\Phi U-U &= \phi^2U+\hat{u}(\phi U)N+\hat{u}(U)\zeta+\hat{u}(U)\hat{v}(E)N \\ \omega\phi U-\omega\hat{u}(U)N-U &= \phi^2U+\hat{u}(\phi U)N+\hat{u}(U)\zeta+\hat{u}(U)\hat{v}(E)N\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte teğet ve transversal bileşenler göz önüne alınırsa (3.1.4) ve (3.1.5) bulunur.

Benzer olarak (3.1.2) eşitliğinde Φ uygulanıp (2.4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(N)) &= \Phi(\zeta)+\hat{v}(E)\Phi(N) \\ \omega\Phi N-N &= \phi(\zeta)+\hat{u}(\zeta)+\hat{v}(E)\zeta+(\hat{v}(E))^2N \\ \omega\zeta+\omega\hat{v}(E)N-N &= \phi(\zeta)+\hat{u}(\zeta)+\hat{v}(E)\zeta+(\hat{v}(E))^2N\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte teğet ve transversal bileşenler göz önüne alınırsa (3.1.6) ve (3.1.7) bulunur.

Diğer taraftan (2.4.3) ve (2.4.2) eşitliğinden

$$\hat{g}(\phi U,Y)+\hat{u}(U)\theta(Y)=\hat{g}(U,\phi Y)+\hat{u}(Y)\theta(U),$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\phi U,\phi Y)+\hat{u}(U)\hat{g}(\phi Y,N)-\omega\hat{u}(Y)\theta(U) &= \omega\hat{g}(U,\phi Y)-\hat{g}(U,Y) \\ &\quad -\hat{u}(Y)\hat{g}(\phi U,N),\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.1.8) ile (3.1.9) eşitliğine ulaşılır. □

Lemma 3.1.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın dejenere hiperyüzeyi* $\hat{M}$ *ve her* $U,Y\in\Gamma(T\hat{M})$ *için*

$$(\hat{\nabla}_U\phi)Y=\hat{u}(Y)(A_NU)+B(U,Y)\zeta, \tag{3.1.10}$$

$$(\hat{\nabla}_U \hat{u})Y = \hat{v}(E)B(U,Y) - B(U,\phi Y) - \hat{u}(Y)\tau(U), \tag{3.1.11}$$

$$\hat{\nabla}_U \zeta = -\phi A_N U + \tau(U)\zeta + \hat{v}(E)(A_N U), \tag{3.1.12}$$

$$U(\hat{v}(E)) = -B(U,\zeta) - \hat{u}(A_N U) \tag{3.1.13}$$

dur.

İspat. Her $U,Y \in \Gamma(T\hat{M})$ için (2.4.8) den

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_U \Phi)Y &= \tilde{\nabla}_U \Phi Y - \Phi(\tilde{\nabla}_U Y) \\
0 &= \tilde{\nabla}_U(\phi Y - \hat{u}(Y)N) \\
&\quad -\Phi(\hat{\nabla}_U Y + B(U,Y)N) \\
&= \hat{\nabla}_U \phi Y + B(U,\phi Y)N - \hat{u}(Y)(A_N U) \\
&\quad +\hat{u}(Y)\tau(U)N - \phi\hat{\nabla}_U Y - \hat{u}(\hat{\nabla}_U Y) \\
&\quad -B(U,Y)\zeta - B(U,Y)\hat{v}(E)N
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte teğet ve transversal bileşenler alınırsa istenen ilk iki eşitlik bulunur.

Benzer şekilde $U \in \Gamma(T\hat{M})$ ile $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ için (2.4.8) den

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_U \Phi)N &= \tilde{\nabla}_U \Phi N - \Phi(\tilde{\nabla}_U N) \\
0 &= \tilde{\nabla}_U(\zeta - \hat{v}(E)N) \\
&\quad -\Phi(-A_N U + \tau(U)N) \\
&= \hat{\nabla}_U \zeta + B(U,\zeta)N - A_N U\hat{v}(E) + \hat{v}(E)\tau(U)N \\
&\quad +\phi A_N U + \hat{u}(A_N U) - \tau(U)\zeta - \tau(U)\hat{v}(E)N
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.1.12) ve (3.1.13) eşitliklerine ulaşılır. □

3.2 İnvaryant Dejenere Hiperyüzeyler

Bu alt bölümde, poly-Norden semi-Riemann manifoldların invaryant dejenere hiperyüzeyleri tanıtılarak, bu tipteki hiperyüzeylerle ilgili örnek verilecektir.

Tanım 3.2.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \Phi(Rad\,T\hat{M}) &= Rad\,T\hat{M}, \\ \Phi(ltr(T\hat{M})) &= ltr(T\hat{M}), \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

ise hiperyüzeye invaryant dejenere hiperyüzey denir.

Örnek 3.2.1. $(\tilde{M} = \mathbb{R}^7_3, \tilde{g})$ bir $(-,+,-,+,-,+,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1, w_2, ..., w_7)$, $\mathbb{R}^7_3$ nin standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1, w_2, ..., w_7) = \begin{pmatrix} \rho_\omega w_1, \rho_\omega w_2, \rho_\omega w_3, \rho_\omega w_4, \\ \rho_\omega w_5, \rho_\omega w_6, \rho_\omega w_7 \end{pmatrix},$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}^7_3$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır. $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ üzerinde

$$w_5 = w_7,$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ hiperyüzeyi göz önüne alınırsa Bu durumda

$$\Pi_1 = \frac{\partial}{\partial w_1}, \quad \Pi_2 = \frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$\Pi_3 = \frac{\partial}{\partial w_3}, \quad \Pi_4 = \frac{\partial}{\partial w_4}, \quad \Pi_5 = \frac{\partial}{\partial w_6},$$

$$\Pi_6 = \frac{\partial}{\partial w_5} + \frac{\partial}{\partial w_7}.$$

için $T\hat{M} = Sp\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6\}$ dir ve $\hat{M}$ bir dejenere hipeyüzeydir. Buradan

$$Rad\,T\hat{M} = Sp\left\{E = \frac{\partial}{\partial w_5} + \frac{\partial}{\partial w_7}\right\},$$

$$ltr\,T\hat{M} = Sp\left\{N = \frac{-1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_5} - \frac{\partial}{\partial w_7}\right)\right\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\Phi E = \rho_\omega E \quad \text{ve} \quad \Phi N = \rho_\omega N$$

olduğundan $\hat{M}$, bir invaryant dejenere hiperyüzeydir.

Teorem 3.2.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın invaryant dejenere hiperyüzeyi* $\hat{M}$ *olsun. O halde* ϕ*, hiperyüzey üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır.*

İspat. Bilindiği üzere, $\hat{M}$ nın invaryant dejenere hiperyüzeyidir ancak ve ancak her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\Phi U = \phi U$$

dır. Burada (3.1.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\hat{u}(U) = 0 \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.2) eşitliği (3.1.4) ve (3.1.8) eşitliklerinde kullanılır ise

$$\phi^2 U = \omega\phi U - U$$

ve

$$\hat{g}(\phi U, Y) = \hat{g}(U, \phi Y)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın invaryant dejenere hiperyüzeyi* $\hat{M}$ *olsun. O halde*

$$B(\Phi U, Y) = B(U, \Phi Y) = \Phi B(U, Y),$$

$$B(\Phi U, \Phi Y) = \omega B(U, \Phi Y) + B(U, Y)$$

dir.

3.3 Screen Semi-İnvaryant Dejenere Hiperyüzeyler

Bu bölümde, poly-Norden semi-Riemann manifoldların screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyleri tanıtılacaktır. Bu tipteki hiperyüzeye örnek verilip, üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilme şartları araştırılacaktır.

Tanım 3.3.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned}
&\Phi(Rad\,T\hat{M}) \subset S(T\hat{M}),\\
&\Phi(ltr(T\hat{M})) \subset S(T\hat{M}),
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

ise hiperyüzeye screen semi-invaryant dejenere hiperyüzey denir.

Örnek 3.3.1. $(\tilde{M}=\mathbb{R}^5_2,\tilde{g})$ bir $(-,+,-,+,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1,w_2,...,w_5)$, $\mathbb{R}^5_2$ nin standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1,w_2,...,w_5)=((\omega-\rho_\omega)w_1,(\omega-\rho_\omega)w_2,\rho_\omega w_3,\rho_\omega w_4,\rho_\omega w_5)\,,$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}^5_2$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır. $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ üzerinde

$$w_5=(\rho_\omega)w_1+(\rho_\omega)w_2+w_3,$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ hiperyüzeyi göz önüne alınırsa

$$\Pi_1=\frac{\partial}{\partial w_1}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_5},\qquad \Pi_2=\frac{\partial}{\partial w_2}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_5},$$

$$\Pi_3=\frac{\partial}{\partial w_3}+\frac{\partial}{\partial w_5},\quad \Pi_4=\frac{\partial}{\partial w_4},$$

için $T\hat{M}=Sp\{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\Pi_4\}$ dir ve $\hat{M}$ bir dejenere hipeyüzeydir. Buradan

$$Rad\,T\hat{M}=Sp\{E=\rho_\omega\Pi_1-\rho_\omega\Pi_2+\Pi_3\}\,,$$

$$ltr\,T\hat{M}=Sp\left\{N=\frac{1}{2}\left(-\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_1}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_2}-\frac{\partial}{\partial w_3}+\frac{\partial}{\partial w_5}\right)\right\}$$

ve $S(T\hat{M})=Sp\{\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\}$ tür. Burada

$$\Omega_1=-\frac{\partial}{\partial w_1}+\frac{\partial}{\partial w_2}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_3}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_5},$$

$$\Omega_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial w_1}+\frac{\partial}{\partial w_2}-\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_3}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_5}\right),$$

$$\Omega_3=\frac{\partial}{\partial w_4}$$

tür. Ayrıca

$$\Omega_1 = \Phi E \qquad \text{ve} \qquad \Omega_2 = \Phi N$$

olduğundan $\hat{M}$, screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeydir.

$S(T\hat{M})$ distribüsyonu non-dejenere olduğundan,

$$S(T\hat{M}) = \{\Phi(RadT\hat{M}) \oplus \Phi(ltr(T\hat{M}))\} \perp \hat{\vartheta}, \tag{3.3.2}$$

şeklinde dejenere olmayan $\hat{\vartheta}$ distribüsyonu tanımlanabilir. (3.3.2) den

$$T\hat{M} = \{\Phi(RadT\hat{M}) \oplus \Phi(ltr(T\hat{M}))\} \perp \hat{\vartheta} \perp RadT\hat{M}, \tag{3.3.3}$$

$$T\tilde{M} = \{\Phi(RadT\hat{M}) \oplus \Phi(ltr(T\hat{M}))\} \perp \hat{\vartheta} \perp \{RadT\hat{M} \oplus ltr(T\hat{M})\}. \tag{3.3.4}$$

yazılabilir. $\hat{D} = RadT\hat{M} \perp \Phi(RadT\hat{M}) \perp \hat{\vartheta}$ ve $\mathring{D} = \Phi(ltr(T\hat{M}))$ olarak tanımlanırsa

$$T\hat{M} = \hat{D} \oplus \mathring{D} \tag{3.3.5}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\xi = \Phi N$ ve $\Psi = \Phi E$ şeklinde tanımlı vektör alanları, $\mathring{R}$ ile $\mathring{Q}$ sırasıyla, $T\hat{M}$ dan $\hat{D}$ ile $\mathring{D}$ üzerine tanımlanan projeksiyonlar ve $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$U = \mathring{R}U + \mathring{Q}U$$

olsun. Buradan (3.1.1) eşitliğine Φ uygulanıp (2.4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Phi^2 U &= \Phi(\phi U + \hat{u}(U)N) \\ \omega\Phi U - U &= \phi^2 U + \hat{u}(\phi U)N + \hat{u}(U)\xi \\ \omega\phi U + \omega\hat{u}(U)N - U &= \phi^2 U + \hat{u}(\phi U)N + \hat{u}(U)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte teğet ve transversal bileşenler göz önüne alınırsa

$$\phi^2 U = \omega\phi U - U - \hat{u}(U)\xi, \tag{3.3.6}$$

ve

$$\hat{u}(\phi U) = \omega\hat{u}(U) \tag{3.3.7}$$

bulunur. Ayrıca (2.4.3) eşitliğinden

$$\hat{u}(\xi) = -1 \tag{3.3.8}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde (3.1.1) eşitliği ile birlikte (2.4.3) eşitliği kullanılırsa

$$\hat{g}(U,\phi Y) = \hat{g}(\phi U,Y) + \hat{u}(U)\theta(Y) - \hat{u}(Y)\theta(U), \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\phi U,\phi Y) &= \omega\hat{g}(U,\phi Y) - \hat{g}(U,Y) - \omega u(Y)\theta(U) \\ &\quad -u(Y)\hat{g}(\phi U,N) - u(U)\hat{g}(\phi Y,N). \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

bulunur.

Ayrıca (2.2.10), (2.2.11) ve (3.1.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_U\Phi)Y &= \tilde{\nabla}_U\Phi Y - \Phi(\tilde{\nabla}_U Y) \\ 0 &= \tilde{\nabla}_U(\phi Y - \hat{u}(Y)N) \\ &\quad -\Phi(\hat{\nabla}_U Y + B(U,Y)N) \\ &= \hat{\nabla}_U\phi Y + B(U,\phi Y)N - \hat{u}(Y)(A_N U) \\ &\quad +\hat{u}(Y)\tau(U)N - \phi\hat{\nabla}_U Y - \hat{u}(\hat{\nabla}_U Y)N \\ &\quad -B(U,Y)\xi \end{aligned}$$

buradan ise

$$(\hat{\nabla}_U\phi)Y = B(U,Y)\xi + u(Y)A_N U \tag{3.3.11}$$

elde edilir.

Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_U\xi &= \tilde{\nabla}_U\Phi N \\ &= (\tilde{\nabla}_U\Phi)N + \Phi(\tilde{\nabla}_U N) \\ &= \Phi(-A_N U + \tau(U)N) \\ \hat{\nabla}_U\xi + B(X,\xi)N &= -\phi A_N U - \hat{u}(A_N U) + \tau(U)\xi + \tau(U)\hat{v}(E)N \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\hat{\nabla}_U \xi = -\phi A_N U + \tau(U)\xi, \tag{3.3.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_U \Psi &= \tilde{\nabla}_U \Phi E \\
&= (\tilde{\nabla}_U \Phi)E + \Phi(\tilde{\nabla}_U E) \\
&= \Phi(-A_E^* U - \tau(U)N) \\
\hat{\nabla}_U \Psi + B(X,\Psi)N &= -\phi A_E^* U - \hat{u}(A_E^* U)N + \tau(U)\Psi
\end{aligned}$$

eşitliğinden ise

$$\hat{\nabla}_U \Psi = -\phi A_E^* U - \tau(U)\Psi \tag{3.3.13}$$

elde edilir. Ayrıca $B(U,\xi) = -\hat{u}(A_N U) = \hat{g}(A_N U, \Psi)$ olduğundan

$$B(U,\xi) = -C(U,\Psi) \tag{3.3.14}$$

olur.

Teorem 3.3.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. Bu durumda vektör alanı Ψ, hiperyüzey üzerinde paraleldir ancak ve ancak*

i) $\hat{M}$, $\tilde{M}$ üzerinde tamamen geodezik

ve

ii) $\tau = 0$

dır.

İspat. Vektör alanı Ψ nın paralel olduğu kabul edilip (3.1.1) ve (3.3.13) kullanılırsa, $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\begin{aligned}
0 &= -\phi A_E^* U - \tau(U)\Psi \\
&= -\Phi A_E^* U + \hat{u}(A_E^* U)N - \tau(U)\Psi
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

olur. (3.3.15) eşitliğine Φ uygulanıp, (3.1.1) ve (2.4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -\Phi^2(A_E^*U) + \hat{u}(A_E^*U)\Phi N - \tau(U)\Phi\Psi \\ &= -\omega\Phi(A_E^*U) + A_E^*U + \hat{u}(A_E^*U)\xi \\ &\quad -\omega\tau(U)\Psi + \tau(U)E \\ &= -\omega\phi(A_E^*U) - \omega\hat{u}(A_E^*U)N + A_E^*U \\ &\quad +\hat{u}(A_E^*U)\xi - \omega\tau(U)\Psi + \tau(U)E \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikten

$$A_E^*U = -\tau(U)E - \hat{u}(A_E^*U)\xi$$

ve

$$\omega\hat{u}(A_E^*U) = 0$$

yazılabilir. □

Teorem 3.3.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. O halde ξ hiperyüzey üzerinde paraleldir ancak ve ancak $\hat{M}$ ve $S(T\hat{M})$, $\tilde{M}$ üzerinde tamamen geodeziktir.*

İspat. ξ nın paralel olduğu kabul edilip (3.1.1) ile (3.3.12) eşitlikleri kullanılırsa, her $U, Y \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\begin{aligned} 0 &= -\phi A_N U + \tau(U)\xi \\ &= -\Phi A_N U + \hat{u}(A_N U)N - \tau(U)\xi \end{aligned} \qquad (3.3.16)$$

olur. (3.3.16) eşitliğine Φ uygulanıp, (3.1.1) ve (2.4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -\Phi^2(A_N U) + \hat{u}(A_N U)\Phi N - \tau(U)\Phi\xi \\ &= -\omega\Phi(A_N U) + A_N U + \hat{u}(A_N U)\xi \\ &\quad -\omega\tau(U)\xi - \tau(U)N \\ &= -\omega\phi(A_N U) - \omega\hat{u}(A_N U)N + A_N U \\ &\quad +\hat{u}(A_N U)\xi - \omega\tau(U)\xi - \tau(U)N \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikten

$$A_N U = -\hat{u}(A_E^* U)\xi$$

ve

$$\omega\hat{u}(A_E^* U) = \tau(U)$$

yazılabilir. □

Tanım 3.3.2. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. Her $U \in \Gamma(\hat{D})$ ve $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ için

$$B(U, Z) = 0$$

oluyorsa hiperyüzeye mixed geodezik dejenere hiperyüzey denir.

Teorem 3.3.3. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. O halde $\hat{M}$ mixed geodezik dejenere hiperyüzeydir ancak ve ancak*

$i)$ A_N nin $\hat{D}$ da bileşeni yoktur,

$ii)$ A_E^* nin $\mathring{D}$ da bileşeni yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\hat{M}$ mixed geodezik dejenere hiperyüzey yani

$$B(U, \xi) = 0 \tag{3.3.17}$$

olsun. (2.2.11) ve (2.4.4) eşitlikleri (3.3.17) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= B(U, \xi) \\
&= B(U, \Phi N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi N, E) \\
&= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_U \Phi)N + \Phi\tilde{\nabla}_U N, E) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U N, \Phi E) \\
&= -\hat{g}(A_N U, \Phi E)
\end{aligned}$$

eşitliğinden (i) elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} -\hat{g}(A_N U, \Phi E) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U N, \Phi E) \\ &= U\tilde{g}(N, \Phi E) + \tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_U \Phi E) \\ &= \tilde{g}(\Phi N, \tilde{\nabla}_U E) \\ &= \hat{g}(\Phi N, -A_E^* U - \tau(U)E) \\ &= \hat{g}(\Phi N, A_E^* U) \end{aligned}$$

eşitliğinden (ii) elde edilir. □

Şimdi hiperyüzey üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilme şartlarını inceleyelim. İlk olarak $\hat{\vartheta}$ yı ele alalım. (3.3.3) ten

$$\hat{\beta} = \{\Phi(RadT\hat{M}) \oplus \Phi(ltr(T\hat{M}))\} \perp RadT\hat{M}$$

denilirse $U \in \Gamma(T\hat{M})$, $Y \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ ve $Z \in \Gamma(\hat{\beta})$ için

$$\hat{\nabla}_U Y = \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y + \overset{\hat{\vartheta}}{h}(U, Y), \tag{3.3.18}$$

$$\hat{\nabla}_U Z = -\overset{\hat{\vartheta}}{A}_Z U + \nabla^{\perp}_U Z, \tag{3.3.19}$$

yazılabilir. Burada $\overset{\hat{\vartheta}}{h} : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(\hat{\vartheta}) \to \Gamma(\hat{\beta})$ ve $\overset{\hat{\vartheta}}{A} : \Gamma(T\hat{M}) \times \Gamma(\hat{\beta}) \to \Gamma(\hat{\vartheta})$ bilineer operatör, $\overset{\vartheta}{\nabla}$ ve $\nabla^{\perp}$ sırasıyla $\hat{\vartheta}$ ve $\hat{\beta}$ üzerinde lineer konneksiyonlardır.

Kabul edelim ki $\mathfrak{I} \subset \hat{M}$ koordinat komşuluğu olsun. (3.3.3) ten her $U, Y \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ için

$$\begin{aligned} \rho_1(U,Y) &= -\hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{h}(U,Y), \Phi N), \\ \rho_2(U,Y) &= -\hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{h}(U,Y), \Phi E), \\ \rho_3(U,Y) &= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{h}(U,Y), N), \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

denilirse, (3.3.18) eşitliği

$$\hat{\nabla}_U Y = \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \rho_1(U,Y)\Phi E - \rho_2(U,Y)\Phi N + \rho_3(U,Y)E \tag{3.3.21}$$

olarak yazılabilir. Şimdi ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 ü B ve C cinsinden hesaplayalım.

(2.4.3) eşitliği (3.3.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi N) &= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \rho_1(U,Y)\Phi E - \rho_2(U,Y)\Phi N \\
&\quad +\rho_3(U,Y)E, \Phi N) \\
&= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y, \Phi N) - \rho_1(U,Y)\hat{g}(\Phi E, \Phi N) \\
&\quad -\rho_2(U,Y)\hat{g}(\Phi N, \Phi N) + \rho_3(U,Y)\hat{g}(E, \Phi N) \\
&= \rho_1(U,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun bir metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınıp, (2.2.10) ve (2.4.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi N) &= \tilde{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi N) \\
&= \tilde{g}(\Phi \hat{\nabla}_U Y, N) \\
&= \tilde{g}(\Phi(\tilde{\nabla}_U Y - B(U,Y)N), N) \\
&= \tilde{g}(\Phi(\tilde{\nabla}_U Y), N) - B(U,Y)\tilde{g}(\Phi N, N) \\
&= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_U \Phi)Y, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi Y, N) \\
&= -U\tilde{g}(\Phi Y, N) + \tilde{g}(\Phi Y, \tilde{\nabla}_U N) \\
&= \tilde{g}(\Phi Y, \tilde{\nabla}_U N) \\
&= \hat{g}(\Phi Y, -A_N U + \tau(U)N) \\
&= -\hat{g}(\Phi Y, A_N U) \\
&= -C(U, \Phi Y)
\end{aligned}$$

olur ve $\rho_1(U,Y) = -C(U,\Phi Y)$ elde edilir.

Benzer olarak (2.4.3) eşitliği (3.3.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi E) &= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \rho_1(U,Y)\Phi E - \rho_2(U,Y)\Phi N \\
&\quad +\rho_3(U,Y)E, \Phi E) \\
&= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y, \Phi E) - \rho_1(U,Y)\hat{g}(\Phi E, \Phi E) \\
&\quad -\rho_2(U,Y)\hat{g}(\Phi N, \Phi E) + \rho_3(U,Y)\hat{g}(E, \Phi E) \\
&= \rho_2(U,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun bir metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınıp (2.2.10) ve (2.4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi E) &= \tilde{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Phi E) \\
&= \tilde{g}(\Phi \hat{\nabla}_U Y, E) \\
&= \tilde{g}(\Phi(\tilde{\nabla}_U Y - B(U,Y)N), E) \\
&= \tilde{g}(\Phi(\tilde{\nabla}_U Y), E) - B(U,Y)\tilde{g}(\Phi N, E) \\
&= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_U \Phi)Y, E) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi Y, E) \\
&= -U\tilde{g}(\Phi Y, E) + \tilde{g}(\Phi Y, \tilde{\nabla}_U E) \\
&= \tilde{g}(\Phi Y, \tilde{\nabla}_U E) \\
&= \hat{g}(\Phi Y, -A_E^* U + \nabla_U^{*t} N) \\
&= -\hat{g}(\Phi Y, A_E^* U) \\
&= -B(U, \Phi Y)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $\rho_2(U,Y) = -B(U,\Phi Y)$ olur.

Son olarak

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, N) &= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \rho_1(U,Y)\Phi E - \rho_2(U,Y)\Phi N \\
&\quad +\rho_3(U,Y)E, N) \\
&= \hat{g}(\overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y, N) - \rho_1(U,Y)\hat{g}(\Phi E, N) \\
&\quad -\rho_2(U,Y)\hat{g}(\Phi N, N) + \rho_3(U,Y)\hat{g}(E,N) \\
&= \rho_3(U,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\nabla_U^* Y + C(U,Y)E, N) &= \hat{g}(\nabla_U^* Y, N) + C(U,Y)\hat{g}(E,N) \\
&= C(U,Y)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\rho_3(U,Y) = C(U,Y)$ dir.

O halde ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 terimleri (3.3.21) eşitliğinde kullanılırsa

$$\hat{\nabla}_U Y = \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y + C(U,\Phi Y)\Phi E + B(U,\Phi Y)\Phi N + C(U,Y)E \tag{3.3.22}$$

yazılabilir.

Teorem 3.3.4. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ *nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi* $\hat{M}$ *olsun. O halde* $\hat{\vartheta}$ *distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak* $U, Y \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ *için*

$$\begin{aligned} C(U,\Phi Y) &= C(\Phi U, Y), \\ B(U,\Phi Y) &= B(\Phi U, Y), \qquad (3.3.23) \\ C(U,Y) &= C(Y,U), \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\hat{\nabla}$ torsiyonsuz olduğundan, (3.3.22) eşitliği göz öününe alınırsa

$$\begin{aligned} [U,Y] &= \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_Y U \\ &\quad +(C(U,\Phi Y) - C(\Phi U, Y))\Phi E \\ &\quad +(B(U,\Phi Y) - B(\Phi U, Y))\Phi N \\ &\quad +(C(U,Y) - C(Y,U))E \end{aligned}$$

yazılır. $\hat{\vartheta}$ distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu kabul edilirse her $U, Y \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ için $[U,Y] \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ dır. Bu durumda $[U,Y]$ nin $\Phi RadT\hat{M}$, $\Phi ltr(T\hat{M})$ ve $RadT\hat{M}$ bileşenlerinin hepsi sıfır olmalıdır. Buradan (3.3.23) eşitliğine ulaşılır.

Tersine (3.3.23) eşitliği sağlanırsa her $U, Y \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ için $[U,Y] = \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_U Y - \overset{\hat{\vartheta}}{\nabla}_Y U \in \Gamma(\hat{\vartheta})$ olacağından ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.5. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ *nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi* $\hat{M}$ *olsun. O halde* $\hat{D}$ *distribüsyonu integralenebilirdir ancak ve ancak her* $U, Y \in \Gamma(\hat{D})$ *için*

$$B(\Phi U, \Phi Y) = \omega B(\Phi U, Y) - B(U, Y), \qquad (3.3.24)$$

dır.

İspat. Eğer $Y \in \Gamma(\hat{D})$ olarak seçilirse $\Phi Y \in \Gamma(\hat{D})$ olur. Buradan $\hat{D}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
\hat{g}([\Phi U, Y], \Phi E) &= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi U} Y, \Phi E) - \hat{g}(\hat{\nabla}_Y \Phi U, \Phi E) \\
&= \hat{g}(\Phi \hat{\nabla}_{\Phi U} Y, E) - \hat{g}(\Phi \hat{\nabla}_Y U, \Phi E) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi U} \Phi Y, E) - \omega \hat{g}(\hat{\nabla}_Y U, \Phi E) + \hat{g}(\hat{\nabla}_Y U, E) \\
&= B(\Phi U, \Phi Y) - \omega B(\Phi U, Y) + B(U, Y)
\end{aligned}$$

olacağından (3.3.24) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 3.3.6. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen semi-invaryant dejenere hiperyüzeyi $\hat{M}$ olsun. O halde $\hat{D}$ distribüsyonu paraleldir ancak ve ancak her $\hat{D}$ distribüsyonu hiperyüzey üzerinde total geodeziktir.*

İspat. $\hat{D}$ distribüsyonunun tanımından, $\hat{D}$ paraleldir ancak ve ancak her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_U Y, \Psi) = 0$$

dır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{g}(\tilde{\nabla}_U Y, \Psi) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U Y, \Psi) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U Y, \Phi E) \\
&= \tilde{g}(\Phi \tilde{\nabla}_U Y, E) \\
&= \tilde{g}(-(\tilde{\nabla}_U \Phi) Y + \tilde{\nabla}_U \Phi Y, E) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi Y, E) = B(U, \Phi Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4. HEMEN HEMEN POLY-NORDEN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk ve ikinci alt bölümde sırasıyla, invaryant ve semi invaryant dejenere altmanifoldlar tanıtılarak, bu tipteki altmanifoldlar ile ilgili örnekler verildi. Üçüncü alt bölümde, genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldlar incelendi, son bölümde ise screen transversal CR-dejenere altmanifoldlar ve bu altmanifold üzerine tanımlanan distribüsyonlar ile ilgili geometrik karekterizasyonlar ve örnekler elde edildi.

4.1 İnvaryant Dejenere Altmanifoldlar

Tanım 4.1.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \Phi(S(T\hat{M})) &= S(T\hat{M}), \\ \Phi(Rad\, T\hat{M}) &= Rad\, T\hat{M}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ise altmanifolda invaryant dejenere altmanifold denir.

Örnek 4.1.1. $(\tilde{M} = \mathbb{R}^5_1, \tilde{g})$ bir $(-,+,+,+,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1, w_2, ..., w_5)$, $\mathbb{R}^5_1$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1, w_2, ..., w_5) = (\rho_\omega w_1, \rho_\omega w_2, \rho_\omega w_3, \rho_\omega w_4, \rho_\omega w_5),$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}^5_1$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır.

$(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ üzerinde

$$w_1 = \varsigma_3, \;\; w_2 = -\sin\alpha\varsigma_1 + \cos\alpha\varsigma_3$$

$$w_3 = \cos\alpha\varsigma_1 + \sin\alpha\varsigma_3, \quad w_4 = \varsigma_2, \quad w_5 = 0$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ altmanifoldu göz önüne alınırsa

$$\Pi_1 = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial w_2} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial w_3},$$

$$\Pi_2 = \frac{\partial}{\partial w_4},$$
$$\Pi_3 = \frac{\partial}{\partial w_1} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial w_2} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial w_3},$$

için $T\hat{M} = Sp\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ tür ve $\hat{M}$ bir dejenere altmanifolddur.

O halde

$$S(T\hat{M}) = Sp\{\Pi_1 = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial w_2} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial w_3}, \Pi_2 = \frac{\partial}{\partial w_4}\},$$
$$Rad\,T\hat{M} = Sp\left\{E = \Pi_3 = \frac{\partial}{\partial w_1} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial w_2} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial w_3}\right\}$$

ve

$$ltr\,T\hat{M} = Sp\left\{N = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial w_1} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial w_2} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial w_3}\right)\right\}$$

ile verilir. Ayrıca $\Phi(Rad\,T\hat{M}) = Rad\,T\hat{M}$ ve $\Phi(S(T\hat{M})) = S(T\hat{M})$ olduğundan $\hat{M}$ bir invaryant dejenere altmanifold olur.

K ve R, $S(T\hat{M})$ ve $Rad\,T\hat{M}$ üzerine tanımlanan projeksiyonları ve her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$U = KU + RU$$

yazılabilir, burada $KU \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $RU \in \Gamma(RadT\hat{M})$ dır. Bu eşitliğin her iki tarafına Φ uygulanırsa

$$\Phi U = \Phi KU + \Phi RU$$

olur. Burada $\Phi KU = \breve{S}U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $\Phi RU = \breve{Q}U \in \Gamma(RadT\hat{M})$ olmak üzere

$$\Phi U = \breve{S}U + \breve{Q}U \tag{4.1.2}$$

elde edilir.

(4.1.2) eşitliğinde (2.3.16) ve (2.3.19) eşitlikleri ile birlikte (2.4.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\breve{S}\hat{\nabla}_U Y + \breve{Q}\hat{\nabla}_U Y + \Phi h^l(U,Y) + \Phi h^s(U,Y) &= \nabla^*_U \breve{S}Y + h^*(U,\breve{S}Y) \\
&\quad + h^l(U,\breve{S}Y) + h^s(U,\breve{S}Y) \\
&\quad - A^*_{\breve{Q}Y}U + \nabla^{*t}_U \breve{Q}Y \\
&\quad + h^l(U,\breve{Q}Y) + h^s(U,\breve{Q}Y),
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin teğet, screen transversal ve dejenere screen transversal bileşenlerinden

$$\breve{S}\hat{\nabla}_U Y = \nabla^*_U \breve{S}Y - A^*_{QY}U, \tag{4.1.3}$$

$$\breve{Q}\hat{\nabla}_U Y = h^*(U,\breve{S}Y) + \nabla^{*t}_U \breve{Q}Y, \tag{4.1.4}$$

$$\Phi h^l(U,Y) = h^l(U,\breve{Q}Y), \tag{4.1.5}$$

$$\Phi h^s(U,Y) = h^s(U,\breve{Q}Y), \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi\hat{\nabla}_U Y &= \nabla^*_U \breve{S}V - A^*_{\breve{Q}Y}U + h^*(U,\breve{S}Y)\\ &\quad +\nabla^{*t}_U \breve{Q}Y\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Teorem 4.1.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $RadT\hat{M}$ distribüsyonu integralenebilirdir ancak ve ancak her $E_1,E_2 \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için*

$$A^*_{\Phi E_1}E_2 = A^*_{\Phi E_2}E_1 \quad ve \quad A^*_{E_1}E_2 = A^*_{E_2}E_1,$$

dır.

İspat. Her $E_1,E_2 \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için $RadT\hat{M}$ nın integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$[E_1,E_2] \in \Gamma(RadT\hat{M}) \tag{4.1.8}$$

dır. (4.1.8) göz önüne alınırsa $Z \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ için

$$\tilde{g}([E_1,E_2],Z) = 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte (2.4.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}([E_1,E_2],Z] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2 - \tilde{\nabla}_{E_2}E_1, Z)\\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1, Z)\\ &= -\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_1}E_2, \Phi Z) + \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2, \Phi Z)\\ &\quad +\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_2}E_1, \Phi Z) - \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1, \Phi Z)\\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi E_2, \Phi Z) + \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2, \Phi Z)\\ &\quad +\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi E_1, \Phi Z) - \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1, \Phi Z)\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

bulunur.

(4.1.9) eşitliğinde (2.3.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}\Phi E_1 + h^l(E_2,\Phi E_1) + h^s(E_2,\Phi E_1),\Phi Z) \\ & -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2 + h^l(E_1,\Phi E_2) + h^s(E_1,\Phi E_2),\Phi Z) \\ & +\omega\begin{pmatrix} \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}E_2 + h^l(E_1,E_2) + h^s(E_1,E_2),\Phi Z) \\ -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}E_1 - h^l(E_2,E_1) - h^s(E_2,E_1),\Phi Z) \end{pmatrix} \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

buradan ise

$$\begin{aligned} & \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}\Phi E_1,\Phi Z) - \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2,\Phi Z) \\ & +\omega\Big(\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi Z) - \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi Z)\Big) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte (2.3.28) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \hat{g}(-A_{\Phi E_1}E_2 + \nabla^{*t}_{E_2}\Phi E_1,\Phi Z) \\ & -\hat{g}(-A_{\Phi E_2}E_1 + \nabla^{*t}_{E_1}\Phi E_2,\Phi Z) \\ & +\omega\begin{pmatrix} \hat{g}(A_{E_1}E_2 - \nabla^{*t}_{E_2}E_1,\Phi Z) \\ -\hat{g}(-A_{E_2}E_1 + \nabla^{*t}_{E_1}E_2,\Phi Z) \end{pmatrix} \\ = & \ \hat{g}(A_{\Phi E_2}E_1 - A_{\Phi E_1}E_2,\Phi Z) \\ & +\omega(\hat{g}(A_{E_1}E_2 - A_{E_2}E_1,\Phi Z)) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.1.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $S(T\hat{M})$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak her $U,V \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ için*

$$h^*(U,V) = h^*(V,U),$$

dır.

İspat. Her $U,V \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ için $S(T\hat{M})$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V],N) = 0$$

dır. Yukarıdaki eşitlikte (2.4.3) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}([U,V],N] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, N) \\ &= -\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V, \Phi N) + \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi N) \\ &\quad + \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U, \Phi N) - \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, \Phi N) \\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V, \Phi N) + \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi N) \\ &\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U, \Phi N) - \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, \Phi N). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

bulunur. (4.1.10) eşitliğinde (2.3.27) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^*(U,\Phi V), \Phi N) \\ & -\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U + h^*(V,\Phi U), \Phi N) \\ & +\omega \begin{pmatrix} \hat{g}(\hat{\nabla}_U V + h^*(U,V), \Phi N) \\ -\hat{g}(\hat{\nabla}_V U + h^*(V,U), \Phi N) \end{pmatrix} \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

buradan ise

$$\begin{aligned} & \hat{g}(h^*(U,\Phi V), \Phi N) - \hat{g}(h^*(V,\Phi U), \Phi N) \\ & +\omega\left(\hat{g}(h^*(U,V), \Phi N) - \hat{g}(h^*(V,U), \Phi N)\right) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.1.3. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\hat{\nabla}$ konneksiyonu metrik konneksiyondur ancak ve ancak her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $E \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için*

$$A^*_{\Phi E}U = \omega A^*_E U,$$

dur.

İspat. Eğer $\hat{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oldugunu kabul edersek her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $E \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için

$$\hat{\nabla}_U E \in \Gamma(RadT\hat{M})$$

dir. Buradan $Z \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ için

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_U E, Z) = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan (2.3.16) eşitliği (2.4.3) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\hat{g}(\Phi\hat{\nabla}_U E, \Phi Z) - \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_U E, \Phi Z) = 0,$$

olur. Yukarıdaki son eşitlikte (2.4.8) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \hat{g}(-(\hat{\nabla}_U \Phi)E + \Phi\hat{\nabla}_U E, \Phi Z) - \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_U E, \Phi Z) &= 0, \\ \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi E, \Phi Z) - \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_U E, \Phi Z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

olur. (4.1.11) eşitliğinde (2.3.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \hat{g}(-A^*_{\Phi E}U + \nabla^{*t}_U \Phi E, \Phi Z) \\ & -\omega\hat{g}(-A^*_E U + \nabla^{*t}_U E, \Phi Z) \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.1.4. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $RadT\hat{M}$ distribüsyonu altmanifold üzerinde tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $E_1 \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için*

$$h^l(E_1, \Phi U) = \omega h^l(E_1, U),$$

dur.

İspat. İnvaryant dejenere altmanifold tanımı göz önüne alındığında, $RadT\hat{M}$ tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $E_1 \in \Gamma(RadT\hat{M})$ için

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_2 \in \Gamma(RadT\hat{M})$$

dır. (2.3.16) eşitliği ile birlikte $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun metrik konneksiyon olması göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1} E_2, U) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1} E_2 - h^l(E_1, E_2) - h^s(E_1, E_2), U) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1} E_2, U) \\ &= E_1 \tilde{g}(E_2, U) - \tilde{g}(E_2, \tilde{\nabla}_{E_1} U) \\ &= \tilde{g}(E_2, \tilde{\nabla}_{E_1} U) \\ &= 0. \end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.3.16), (2.3.27) ve (2.4.3) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1} \Phi U, \Phi E_2) - \omega \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1} U, \Phi E_2) \\ = \;& \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1} \Phi U + h^l(E_1, \Phi U) + h^s(E_1, \Phi U), \Phi E_2) \\ & -\omega \left(\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1} U + h^l(E_1, U) + h^s(E_1, U), \Phi E_2) \right) \\ = \;& \hat{g}(h^l(E_1, \Phi U), \Phi E_2) - \omega \hat{g}(h^l(E_1, U), \Phi E_2) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. □

4.2 Semi-İnvaryant Dejenere Altmanifoldlar

Tanım 4.2.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} &\Phi(RadT\hat{M}) \subset S(T\hat{M}), \\ &\Phi(ltr(T\hat{M})) \subset S(T\hat{M}), \\ &\Phi(S(T\hat{M}^{\perp})) \subset S(T\hat{M}) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ise altmanifolda semi-invaryant dejenere altmanifold denir.

$\check{D} = \Phi(RadT\hat{M})$, $\acute{D} = \Phi(ltr(T\hat{M}))$ ve $\dot{D} = \Phi(S(T\hat{M}^{\perp}))$ olarak alınırsa

$$S(T\hat{M}) = D_0 \perp \{\check{D} \oplus \acute{D}\} \perp \dot{D} \tag{4.2.2}$$

yazılabilir. Buradan

$$T\hat{M} = D_0 \perp \{\check{D} \oplus \acute{D}\} \perp \dot{D} \perp RadT\hat{M}, \tag{4.2.3}$$

$$T\tilde{M} = D_0 \perp \{\check{D} \oplus \acute{D}\} \perp \dot{D} \perp S(T\hat{M}^{\perp}) \perp \{RadT\hat{M} \oplus ltr(T\hat{M})\} \tag{4.2.4}$$

ayrışımları elde edilir.

Ayrıca $D = D_0 \perp \check{D} \perp RadT\hat{M}$ ve $D^{\perp} = \acute{D} \perp \dot{D}$ denirse

$$T\hat{M} = D \oplus D^{\perp} \tag{4.2.5}$$

olarak yazılabilir. Burada D invaryant distribüsyon, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyondur.

Örnek 4.2.1. $(\tilde{M} = \mathbb{R}^8_2, \tilde{g})$ bir $(-,-,+,+,+,+,+,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1, w_2, ..., w_8)$, $\mathbb{R}^8_2$ nin standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1, w_2, ..., w_8) = \begin{pmatrix} \omega w_1 + w_2, -w_1, \omega w_3 + w_4, -w_3, \\ \omega w_5 + w_6, -w_5, \omega w_7 + w_8, -w_7, \end{pmatrix},$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}^8_2$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır.

$(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ üzerinde

$$w_1 = -\varsigma_1 - \varsigma_3 + \varsigma_6,$$

$$w_2 = \varsigma_2,$$

$$w_3 = -\varsigma_1 + \varsigma_3 + \varsigma_6,$$

$$w_4 = \varsigma_2,$$

$$w_5 = w_7 = -\varsigma_4,$$

$$w_6 = \varsigma_5$$

$$w_8 = -\varsigma_5$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ altmanifoldunu göz önüne alınırsa

$$\Pi_1 = -\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\partial}{\partial w_3},$$
$$\Pi_2 = \frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial w_4},$$
$$\Pi_3 = -\frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_3},$$
$$\Pi_4 = -\frac{\partial}{\partial w_5} - \frac{\partial}{\partial w_7},$$
$$\Pi_5 = \frac{\partial}{\partial w_6} - \frac{\partial}{\partial w_8},$$
$$\Pi_6 = \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_3},$$

için $T\hat{M} = Sp\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6\}$ dır ve $\hat{M}$ bir dejenere altmanifolddur.

O halde $S(T\hat{M}) = Sp\{\Pi_1, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6\}$ ve

$$Rad\,T\hat{M} = Sp\{E = \Pi_2\},$$
$$ltr\,T\hat{M} = Sp\left\{N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_2} - \frac{\partial}{\partial w_4}\right)\right\},$$
$$S(T\hat{M}^{\perp}) = Sp\left\{L = \frac{\partial}{\partial w_6} + \frac{\partial}{\partial w_8}\right\}$$

ile verilir. Ayrıca $\Phi(Rad\,T\hat{M}) = \Pi_1$, $\Phi(ltr\,T\hat{M}) = \Pi_3$ ve $\Phi(S(T\hat{M}^{\perp})) = \Pi_4$ tür. Eğer $D_0 = Sp\{\Pi_5, \Pi_6\}$, $\check{D} = Sp\{\Pi_1\}$, $\acute{D} = Sp\{\Pi_3\}$ ve $\dot{D} = Sp\{\Pi_4\}$, olarak düşünülürse $\hat{M}$ bir semi-invaryant dejenere altmanifoldu olur.

T ile S, $S(T\hat{M})$ ve $Rad\,T\hat{M}$ üzerine tanımlanan projeksiyonları için

$$U = TU + SU$$

yazılabilir, burada $TU \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $SU \in \Gamma(RadT\hat{M})$ dır. Bu eşitliğin her iki tarafına Φ uygulanırsa

$$\Phi U = \Phi TU + \Phi SU$$

olur. Burada $\Phi TU = \check{K}U \in \Gamma(S(T\hat{M}))$ ve $\Phi SU = \check{L}U \in \Gamma(RadT\hat{M})$ alınırsa

$$\Phi U = \check{K}U + \check{L}U \tag{4.2.6}$$

elde edilir.

Benzer olarak her $W \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için

$$\Phi W = \breve{B}W + \breve{C}W \tag{4.2.7}$$

yazılabilir. Burada $\breve{B}W$ ve $\breve{C}W$ sırasıyla teğet ve transversal bileşenlerdir.

Lemma 4.2.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın semi-invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $U, V \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $W \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için*

$$(\hat{\nabla}_U \breve{K})V = A_{\breve{L}V}U + \breve{B}h(U,V), \tag{4.2.8}$$

$$\breve{L}\hat{\nabla}_U V = \nabla^t_U \breve{L}V + h(U, \breve{K}V), \tag{4.2.9}$$

$$\hat{\nabla}_U \breve{B}W = -\breve{K}A_W U + \breve{B}\hat{\nabla}_U W, \tag{4.2.10}$$

$$h(U, \breve{B}W) = -\breve{L}A_W U. \tag{4.2.11}$$

Teorem 4.2.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın semi-invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $U, V \in \Gamma(D)$ için*

$$h^l(\Phi U, \Phi V) = \omega h^l(V, \Phi U) - h^l(V, U)\ , \tag{4.2.12}$$

$$h^s(\Phi U, \Phi V) = \omega h^s(V, \Phi U) - h^s(V, U) \tag{4.2.13}$$

dur.

İspat. Her $U, V \in \Gamma(D)$, $E \in \Gamma(Rad T\hat{M})$, $L \in \Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$ için D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([\Phi U, V], \Phi E) = 0$$

ve

$$\tilde{g}([\Phi U, V], \Phi L) = 0$$

dır. Yukarıdaki ilk eşitlikte (2.4.3) ve (2.3.16) dan

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi U,V],\Phi E) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}V-\tilde{\nabla}_V\Phi U,\Phi E)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}V,\Phi E)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U,\Phi E)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi U}V,E)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\Phi E)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}\Phi V,E)-\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,E)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,E)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}\Phi V,E)-\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U,E)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,E)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi U}\Phi V+h^l(\Phi U,\Phi V)+h^s(\Phi U,\Phi V),E)\\
&\quad -\omega\left(\hat{g}(\hat{\nabla}_V\Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),E)\right)\\
&\quad +\hat{g}(\hat{\nabla}_V U+h^l(V,U)+h^s(V,U),E)\\
&= \hat{g}(h^l(\Phi U,\Phi V),E)-\omega\left(\hat{g}(h^l(V,\Phi U),E)\right)\\
&\quad +\hat{g}(h^l(V,U),E)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan (4.2.12) eşitliğine ulaşılır.

Benzer olarak (2.4.3) ve (2.3.16) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi U,V],\Phi L) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}V-\tilde{\nabla}_V\Phi U,\Phi L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}V,\Phi L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U,\Phi L)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi U}V,L)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\Phi L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}\Phi V,L)-\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,L)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi U}\Phi V,L)-\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U,L)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,L)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi U}\Phi V+h^l(\Phi U,\Phi V)+h^s(\Phi U,\Phi V),L)\\
&\quad -\omega\left(\hat{g}(\hat{\nabla}_V\Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),L)\right)\\
&\quad +\hat{g}(\hat{\nabla}_V U+h^l(V,U)+h^s(V,U),L)\\
&= \hat{g}(h^s(\Phi U,\Phi V),L)-\omega(\hat{g}(h^s(V,\Phi U),L))\\
&\quad +\hat{g}(h^s(V,U),L)
\end{aligned}
$$

olur. □

Teorem 4.2.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın semi-invaryant dejenere altmanifoldu* $\hat{M}$ *olsun. O halde* $D^{\perp}$ *distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak* $U,V\in\Gamma(D^{\perp})$, $N\in\Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $Z\in\Gamma(D_0)$ *ve* $W_1,W_2\in\Gamma(tr(T\hat{M}))$ *için*

i) $\omega\hat{g}(h^*(U,V)-h^*(V,U),N)=\hat{g}(A_{W_1}V-A_{W_2}U,N)$,

ii) $\hat{g}(A_{W_1}V,\Phi N)=\hat{g}(A_{W_2}U,\Phi N)$

iii) $\hat{g}(A_{W_1}V,\Phi Z)=\hat{g}(A_{W_2}U,\Phi Z)$

dır.

İspat. Her $U,V\in\Gamma(D^{\perp})$, $N\in\Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $Z\in\Gamma(D_0)$ için $D^{\perp}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V],\Phi N)=0,$$

$$\tilde{g}([U,V],N)=0$$

ve

$$\tilde{g}([U,V],Z)=0$$

dır. Diğer taraftan her $U,V\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$U=\Phi W_1 \quad \text{ve} \quad V=\Phi W_2$$

olacak şekilde $W_1,W_2\in\Gamma(tr(T\hat{M}))$ vardır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.4.3), (2.3.16), (2.3.19) ve (2.3.27) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi N] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U, \Phi N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, \Phi N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi W_2, \Phi N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi W_1, \Phi N) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U W_2, \Phi N) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V W_1, \Phi N) \\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U W_2, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U W_2, N) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V W_1, N) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W_1, N) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi W_2, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U W_2, N) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi W_1, N) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W_1, N) \\
&= \omega\left(\hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi W_2 + h^l(U,\Phi W_2) + h^s(U,\Phi W_2), N)\right) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{W_2}U + \nabla^t_U W_2, N) \\
&\quad -\omega\left(\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi W_1 + h^l(V,\Phi W_1) + h^s(V,\Phi W_1), N)\right) \\
&\quad +\hat{g}(-A_{W_1}V + \nabla^t_V W_1, N) \\
&= \omega\left(\begin{array}{c} \hat{g}(\nabla^*_U \Phi W_2 + h^*(U,\Phi W_2), N) \\ -\hat{g}(\nabla^*_V \Phi W_1 + h^*(V,\Phi W_1), N) \end{array}\right) \\
&\quad +\hat{g}(A_{W_2}U - A_{W_1}V, N) \\
&= \omega(\hat{g}(h^*(U,\Phi W_2) - h^*(V,\Phi W_1), N) \\
&\quad +\hat{g}(A_{W_2}U - A_{W_1}V, N)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan (i) eşitliğine ulaşılır.

Aynı şekilde ikinci eşitlik için (2.4.3) ve (2.3.19) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],N] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi W_2, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi W_1, N) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U W_2, N) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V W_1, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U W_2, \Phi N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W_1, \Phi N) \\
&= \hat{g}(-A_{W_2}U + \nabla^*_U W_2 + D^s(U,W_2), \Phi N) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{W_1}V + \nabla^*_V W_1 + D^s(V,W_1), \Phi N) \\
&= \hat{g}(A_{W_1}V - A_{W_2}U, \Phi N)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan (ii) eşitliğine ulaşılır.

Son olarak üçüncü eşitlikte (2.4.3) ve (2.3.19) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],Z] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi W_2, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi W_1, Z) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U W_2, Z) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V W_1, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U W_2, \Phi Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W_1, \Phi Z) \\
&= \hat{g}(-A_{W_2}U + \nabla^*_U W_2 + D^s(U,W_2), \Phi Z) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{W_1}V + \nabla^*_V W_1 + D^s(V,W_1), \Phi Z) \\
&= \hat{g}(A_{W_1}V - A_{W_2}U, \Phi Z)
\end{aligned}
$$

olup (iii) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.2.3. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın semi-invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $RadT\hat{M}$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $E_1,E_2,E_3 \in \Gamma(RadT\hat{M})$, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $L \in \Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$ ve $Z \in \Gamma(D_0)$ için*

i) $\hat{g}(h^*(E_1,\Phi E_2),N) = \hat{g}(h^*(\Phi E_1,E_2),N)$,

ii) $\hat{g}(h^l(E_1,\Phi E_2),E_3) = \hat{g}(h^l(\Phi E_1,E_2),E_3)$, *iii)* $\hat{g}(h^s(E_1,\Phi E_2),L)=\hat{g}(h^s(\Phi E_1,E_2),L)$,

iv) $\hat{g}(A^*_{E_1}E_2,Z)=\hat{g}(A^*_{E_2}E_1,Z)$,

dır.

İspat. Her $E_1,E_2,E_3\in\Gamma(RadT\hat{M})$, $N\in\Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $L\in\Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$, $Z\in\Gamma(D_0)$ için $RadT\hat{M}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi N)=0,$$

$$\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi E_3)=0,$$

$$\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi L)=0$$

ve

$$\tilde{g}([E_1,E_2],Z)=0$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) ile (2.3.28) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi N)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,N)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,N)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi E_2,N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi E_1,N)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2+h^l(E_1,\Phi E_2)+h^s(E_1,\Phi E_2),N)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}\Phi E_1+h^l(E_2,\Phi E_1)+h^s(E_2,\Phi E_1),N)\\
&= g(\nabla^*_{E_1}\Phi E_2+h^*(E_1,\Phi E_2),N)\\
&\quad -g(\nabla^*_{E_2}\Phi E_1+h^*(E_2,\Phi E_1),N)\\
&= g(h^*(E_1,\Phi E_2),N)-g(h^*(E_2,\Phi E_1),N),
\end{aligned}$$

eşitliğinden (i) elde edilir.

Aynı şekilde ikinci eşitlikte (2.3.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi E_3) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi E_3)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi E_3)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,E_3)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,E_3)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi E_2,E_3)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi E_1,E_3)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2+h^l(E_1,\Phi E_2)+h^s(E_1,\Phi E_2),E_3)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}\Phi E_1+h^l(E_2,\Phi E_1)+h^s(E_2,\Phi E_1),E_3)\\
&= \hat{g}(h^l(E_1,\Phi E_2),E_3)-\hat{g}(h^l(E_2,\Phi E_1),E_3),
\end{aligned}$$

olacağından (ii) elde edilmiş olur.

Üçüncü eşitlikte ise (2.3.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi L) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi L)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,L)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi E_2,L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi E_1,L)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2+h^l(E_1,\Phi E_2)+h^s(E_1,\Phi E_2),L)\\
&\quad -\hat{g}(\nabla_{E_2}\Phi E_1+h^l(E_2,\Phi E_1)+h^s(E_2,\Phi E_1),L)\\
&= \hat{g}(h^s(E_1,\Phi E_2),L)-\hat{g}(h^s(E_2,\Phi E_1),L),
\end{aligned}$$

eşitliğinden (iii) elde edilir.

Son olarak dördüncü eşitlikte (2.3.28) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,Z)\\
&= \hat{g}(-A^*_{E_1}E_2+\nabla^{*t}_{E_2}E_1,Z)\\
&\quad -\hat{g}(-A^*_{E_2}E_1+\nabla^{*t}_{E_1}E_2,Z)\\
&= \hat{g}(A^*_{E_1}E_2,Z)-\hat{g}(A^*_{E_2}E_1,Z),
\end{aligned}$$

eşitliğinden ise (iv) elde edilir. □

Teorem 4.2.4. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın semi-invaryant dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\Phi RadT\hat{M}$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $E_1,E_2,E_3\in\Gamma(RadT\hat{M})$, $N\in\Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $L\in\Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$ ve $Z\in\Gamma(D_0)$ için* *i)* $\hat{g}(h^l(\Phi E_1, E_2), E_3) = \hat{g}(h^l(\Phi E_2, E_1), E_3)$,

ii) $\hat{g}(h^s(\Phi E_1, E_2), L) = \hat{g}(h^s(\Phi E_2, E_1), L)$,

iii) $\hat{g}(\Phi E_2, A_N \Phi E_1) = \hat{g}(\Phi E_1, A_N \Phi E_2)$,

iv) $\hat{g}(A_{E_1}\Phi E_2, \Phi Z) = \hat{g}(A_{E_2}\Phi E_1, \Phi Z)$,

dır.

İspat. Her $E_1, E_2, E_3 \in \Gamma(RadT\hat{M})$, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $L \in \Gamma(S(T\hat{M}^{\perp}))$ ve $Z \in \Gamma(D_0)$ için $\Phi RadT\hat{M}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([\Phi E_1, \Phi E_2], \Phi E_3) = 0,$$

$$\tilde{g}([\Phi E_1, \Phi E_2], \Phi L) = 0,$$

$$\tilde{g}([\Phi E_1, \Phi E_2], N) = 0,$$

ve

$$\tilde{g}([\Phi E_1, \Phi E_2], Z) = 0,$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) ve (2.3.28) eşitlikleri (2.4.3) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi E_1, \Phi E_2], \Phi E_3) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2, \Phi E_3) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1, \Phi E_3) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2, \Phi E_3) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1, \Phi E_3) \\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2, E_3) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2, E_3) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1, E_3) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1, E_3) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2, E_3) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2, E_3) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1, E_3) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1, E_3) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2 + h^l(\Phi E_1, \Phi E_2) + h^s(\Phi E_1, \Phi E_2), E_3) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_1}E_2 + h^l(\Phi E_1, E_2) + h^s(\Phi E_1, E_2), E_3) \\
&\quad -\omega\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1 + h^l(\Phi E_2, \Phi E_1) + h^s(\Phi E_2, \Phi E_1), E_3) \\
&\quad +\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_2}E_1 + h^l(\Phi E_2, E_1) + h^s(\Phi E_2, E_1), E_3) \\
&= \hat{g}(h^l(\Phi E_2, E_1), E_3) - \hat{g}(h^l(\Phi E_1, E_2), E_3),
\end{aligned}$$

eşitliğinden (i) eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan ikinci eşitlikte (2.3.16), (2.3.28) ve (2.4.3) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi E_1,\Phi E_2],\Phi L) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2,\Phi L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1,\Phi L)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,\Phi L)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,\Phi L)\\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,L)\\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,L)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,L)\\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2,L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,L)\\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1,L)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,L)\\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2+h^l(\Phi E_1,\Phi E_2)+h^s(\Phi E_1,\Phi E_2),L)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_1}E_2+h^l(\Phi E_1,E_2)+h^s(\Phi E_1,E_2),L)\\
&\quad -\omega\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1+h^l(\Phi E_2,\Phi E_1)+h^s(\Phi E_2,\Phi E_1),L)\\
&\quad +\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_2}E_1+h^l(\Phi E_2,E_1)+h^s(\Phi E_2,E_1),L)\\
&= \hat{g}(h^s(\Phi E_2,E_1),L)-\hat{g}(h^s(\Phi E_1,E_2),L),
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan (ii) eşitliğine ulaşılır.

Benzer olarak üçüncü eşitlikte (2.3.19) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi E_1,\Phi E_2],N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2,N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1,N)\\
&= \Phi E_1 g(\Phi E_2,N)-\tilde{g}(\Phi E_2,\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}N)\\
&\quad -\Phi E_2 g(\Phi E_1,N)+\tilde{g}(\Phi E_1,\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}N)\\
&= -\tilde{g}(\Phi E_2,\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}N)+\tilde{g}(\Phi E_1,\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}N)\\
&= \hat{g}(\Phi E_2,-A_N\Phi E_1+\nabla^l_{\Phi E_1}N+D^s(\Phi E_1,N))\\
&\quad -\hat{g}(\Phi E_1,-A_N\Phi E_2+\nabla^l_{\Phi E_2}N+D^s(\Phi E_2,N))\\
&= \hat{g}(\Phi E_2,A_N\Phi E_1)-\hat{g}(\Phi E_1,A_N\Phi E_2),
\end{aligned}
$$

olur ki buradan (iii) eşitliğine ulaşılır.

Son olarak dördüncü eşitlikte (2.3.16) ve (2.3.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\Phi E_1,\Phi E_2],Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}\Phi E_2,Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}\Phi E_1,Z)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,Z)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,Z)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,\Phi Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,\Phi Z)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_1}E_2,\Phi Z)-\hat{g}(\hat{\nabla}_{\Phi E_2}E_1,\Phi Z)\\
&= \hat{g}(-A_{E_2}\Phi E_1+\nabla^{*t}_{\Phi E_1}E_2,\Phi Z)\\
&\quad +\hat{g}(-A_{E_1}\Phi E_2+\nabla^{*t}_{\Phi E_2}E_1,\Phi Z)\\
&= -\hat{g}(A_{E_2}\Phi E_1,\Phi Z)+\hat{g}(A_{E_1}\Phi E_2,\Phi Z),
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (iv) eşitliğini verir. □

4.3 Genelleştirilmiş CR-Dejenere Altmanifoldlar

Tanım 4.3.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan altmanifolda genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold denir.

$i)$ $RadT\hat{M}$ üzerinde

$$RadT\tilde{M}=D_\alpha\oplus D_\beta,\quad \Phi(D_\alpha)=D_\alpha,\quad \Phi(D_\beta)=S(T\tilde{M}),$$

şeklinde D_α ve D_β distribüsyonları vardır

$ii)$ $S(T\hat{M})$ üzernde

$$S(T\tilde{M})=\{\Phi(D_\beta)\oplus\tilde{D}\}\perp\mathring{D},\quad \Phi(\mathring{D})=\mathring{D},\quad \Phi(\tilde{L}\perp\tilde{S})=\tilde{D},$$

şeklinde $\mathring{D}$ ve $\tilde{D}$ distibüsyonları vardır. Burada $\mathring{D}$ dejenere olmayan distribüsyon, $\tilde{L}$ ve $\tilde{S}$ sırasıya $ltr(T\tilde{M})$ ve $S(T\tilde{M}^{\perp})$ in alt vektör demetleridir.

Eğer

$$\Phi(\tilde{L})=L_1\quad \text{ve}\qquad \Phi(\tilde{S})=S_1,$$

olarak alınırsa

$$\tilde{D}=\Phi(\tilde{L})\perp\Phi(\tilde{S})=L_1\perp S_1.$$

yazılabilir. Böylece

$$TM = \tilde{D} \oplus D, \tag{4.3.1}$$

dir. Burada $D = RadT\tilde{M} \perp \mathring{D} \perp \Phi(D_\beta)$.

Örnek 4.3.1. $(\tilde{M} = \mathbb{R}^{12}_4, \tilde{g})$ bir $(-,-,+,+,-,-,+,+,+,+,+,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1, w_2, ..., w_{12})$, $\mathbb{R}^{12}_4$ nin standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1, w_2, ..., w_{12}) = \begin{pmatrix} \rho_\omega w_1, \bar{\rho}_\omega w_2, \rho_\omega w_3, \bar{\rho}_\omega w_4, \omega w_5 + w_6, -w_5, \\ \omega w_7 + w_8, -w_7, \omega w_9 + w_{10}, -w_9, \omega w_{11} + w_{12}, -w_{11} \end{pmatrix},$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır burada $\bar{\rho}_\omega = \omega - \rho_\omega$ dir. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}^{12}_4$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır.

$(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ üzerinde

$$w_1 = w_3 = \varsigma_1 + \rho_\omega \varsigma_2,$$

$$w_2 = w_4 = \varsigma_1 + \bar{\rho}_\omega \varsigma_2,$$

$$w_5 = -\varsigma_4 - \varsigma_5, \;\; w_6 = \rho_\omega \varsigma_3,$$

$$w_7 = -\varsigma_4 + \varsigma_5, \;\; w_8 = \rho_\omega \varsigma_3,$$

$$w_9 = -\varsigma_7 + \rho_\omega \varsigma_8, \;\; w_{10} = -\bar{\rho}_\omega \varsigma_6,$$

$$w_{11} = \varsigma_7 + \rho_\omega \varsigma_8, \;\; w_{12} = \bar{\rho}_\omega \varsigma_6,$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ altmanifoldunu göz önüne alınırsa

$$\Pi_1 = \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial w_3} + \frac{\partial}{\partial w_4},$$

$$\Pi_2 = \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_1} + \bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_2} + \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_3} + \bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_4},$$

$$\Pi_3 = \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_6} + \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_8},$$

$$\Pi_4 = -\frac{\partial}{\partial w_5} - \frac{\partial}{\partial w_7},$$

$$\Pi_5 = -\frac{\partial}{\partial w_5} + \frac{\partial}{\partial w_7},$$

$$\Pi_6 = -\bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_{10}} + \bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_{12}},$$
$$\Pi_7 = -\frac{\partial}{\partial w_9} + \frac{\partial}{\partial w_{11}},$$
$$\Pi_8 = \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_9} + \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_{11}},$$

için $T\hat{M} = Sp\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8\}$ dir ve $\hat{M}$ altmanifoldu $S(T\hat{M}) = Sp\{\Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8\}$ ve $RadT\hat{M} = Sp\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ ile bir dejenere altmanifolddur. $\Phi\Pi_1 = \Pi_2$, $\Phi\Pi_3 = \rho_\omega\Pi$ ve $\Phi\Pi_6 = \bar{\rho}_\omega\Pi_7$ olduğundan $D_\alpha = Sp\{\Pi_1, \Pi_2\}$, $D_\beta = Sp\{\Pi_3\}$ ve $\mathring{D} = Sp\{\Pi_6, \Pi_7\}$ dir. Diğer taraftan $ltrT\hat{M} = Sp\{N_1, N_2, N_3\}$ ve $S(T\hat{M}^\perp) = Sp\{W\}$ dir. Burada

$$N_1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2} - \frac{\partial}{\partial w_3} - \frac{\partial}{\partial w_4}\right),$$
$$N_2 = -\frac{1}{2(\rho_\omega^2 + \bar{\rho}_\omega^2)}\left(\rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_1} + \bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_2} - \rho_\omega \frac{\partial}{\partial w_3} - \bar{\rho}_\omega \frac{\partial}{\partial w_4}\right),$$
$$N_3 = -\frac{1}{2\rho_\omega}\left(\frac{\partial}{\partial w_6} - \frac{\partial}{\partial w_8}\right),$$
$$W = \frac{\partial}{\partial w_{10}} + \frac{\partial}{\partial w_{12}},$$

ile verilir. Buradan $Sp\{N_1, N_2\}$ invaryant ve $\Phi N_3 = \frac{1}{2\rho_\omega}\Pi_5$ ve $\Phi W = -\Pi_8$ olacağından $\tilde{L} = Sp\{N_3\}$ ve $\tilde{S} = Sp\{W\}$ olur. Böylece $\hat{M}$, $\tilde{M}$ nın bir genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu olur.

$\hat{M}$, nın $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nin genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu olduğu kabul edilirse her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\Phi U = \varphi U + fU, \tag{4.3.2}$$

yazılabilir. Burada φU ve fU sırasıyla teğet ve tranversal bileşenlerdir. Aynı şekilde her $V \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için

$$\Phi V = bV + tV, \tag{4.3.3}$$

dir. Burada bV ve tV sırasıyla teğet ve transversal bileşenlerdir.

Teorem 4.3.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu* $\hat{M}$ *olsun. O halde* D *distibüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak* $U,V\in\Gamma(D)$, $\zeta\in\Gamma(D_\beta)$ *ve* $W\in\Gamma(\tilde{S})$ *için*

i) $\hat{g}(h^l(U,\Phi V),\zeta)=\hat{g}(h^l(V,\Phi U),\zeta)$,

ii) $\hat{g}(h^s(U,\Phi V),W)=\hat{g}(h^s(V,\Phi U),W)$,

dır.

İspat. Her $U,V\in\Gamma(D)$, $\zeta\in\Gamma(D_\beta)$ ve $W\in\Gamma(\tilde{S})$ için D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V],\Phi\zeta)=0$$

ve

$$\tilde{g}([U,V],\Phi W)=0$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) kulanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi\zeta] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V-\tilde{\nabla}_V U,\Phi\zeta)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi\zeta)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi\zeta)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\zeta)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\zeta)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U\Phi V,\zeta)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U,\zeta)\\
&= \hat{g}(\tilde{\nabla}_U\Phi V+h^l(U,\Phi V)+h^s(U,\Phi V),\zeta)\\
&\quad -\hat{g}(\tilde{\nabla}_V\Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),\zeta)\\
&= \hat{g}(h^l(U,\Phi V),\zeta)-\hat{g}(h^l(V,\Phi U),\zeta)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (i) elde edilir.

Benzer olarak ikinci eşitlikte (2.3.16) dan

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi W] &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U, \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi W) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U, \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V, W) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U, W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V, W) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U, W) \\
&= \hat{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V), W) \\
&\quad -\hat{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U + h^l(V,\Phi U) + h^s(V,\Phi U), W) \\
&= \hat{g}(h^s(U,\Phi V), W) - \hat{g}(h^s(V,\Phi U), W)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (ii) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.3.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\tilde{D}$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $X,Y \in \Gamma(\tilde{D})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$, $N \in \Gamma(ltrT\hat{M})$, $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ ve $V_1,V_2 \in \Gamma(\tilde{L}\perp\tilde{S})$ için*

i) $\hat{g}(A_{V_1}Y,\Phi Z) = \hat{g}(A_{V_2}X,\Phi Z)$,

ii) $\hat{g}(h^*(X,Y),\tilde{N}) = \hat{g}(h^*(Y,X),\tilde{N})$ ve $\hat{g}(A_{V_2}X,\tilde{N}) = \hat{g}(A_{V_1}Y,\tilde{N})$

iii) $\hat{g}(A_N X,Y) = \hat{g}(A_N Y,X)$

dir.

İspat. Her $X,Y \in \Gamma(\tilde{D})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$, $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ ve $V_1,V_2 \in \Gamma(\tilde{L}\perp\tilde{S})$ için $\tilde{D}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([X,Y],Z) = 0,$$

$$\tilde{g}([X,Y],\Phi\tilde{N}) = 0,$$

ve

$$\tilde{g}([X,Y],N) = 0,$$

dır. Diğer taraftan $X,Y \in \Gamma(\tilde{D})$ içn

$$X = \Phi V_1 \quad \text{ve} \quad Y = \Phi V_2$$

olacak şekilde $V_1, V_2 \in \Gamma(\tilde{L}\perp\tilde{S})$ vardır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.4.3), (2.3.19) ve (2.3.27) den

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([X,Y],Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V_2, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \Phi V_1, Z) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_X V_2, Z) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_Y V_1, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V_2, \Phi Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y V_1, \Phi Z) \\
&= \hat{g}(-A_{V_2}X + \nabla^l_X V_2 + D^s(X, V_2), \Phi Z) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{V_1}Y + \nabla^l_Y V_1 + D^s(Y, V_1), \Phi Z) \\
&= \hat{g}(A_{V_1}Y, \Phi Z) - \hat{g}(A_{V_2}X, \Phi Z),
\end{aligned}$$

olur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer olarak ikinci eşitlikte (2.4.3), (2.3.16) ile (2.3.19) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}([X,Y],\Phi\tilde{N}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\Phi\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,\Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V_2,\Phi\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \Phi V_1,\Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_X V_2,\Phi\tilde{N}) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_Y V_1,\Phi\tilde{N}) \\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_X V_2,\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V_2,\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_Y V_1,\tilde{N}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y V_1,\tilde{N}) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V_2,\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V_2,\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \Phi V_1,\tilde{N}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y V_1,\tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y),\tilde{N}) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{V_2}X + \nabla^l_X V_2 + D^s(X,V_2),\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\hat{g}(\hat{\nabla}_Y X + h^l(Y,X) + h^s(Y,X),\tilde{N}) \\
&\quad +\hat{g}(-A_{V_1}Y + \nabla^l_Y V_1 + D^s(Y,V_1),\tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y,\tilde{N}) + \hat{g}(A_{V_2}X,\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\hat{g}(\hat{\nabla}_Y X,\tilde{N}) - \hat{g}(A_{V_1}Y,\tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\nabla^*_X Y + h^*(X,Y),\tilde{N}) + \hat{g}(A_{V_2}X,\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\hat{g}(\nabla^*_Y X + h^*(Y,X),\tilde{N}) - \hat{g}(A_{V_1}Y,\tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(h^*(X,Y),\tilde{N}) + \hat{g}(A_{V_2}X,\tilde{N}) \\
&\quad -\omega\hat{g}(h^*(Y,X),\tilde{N}) - \hat{g}(A_{V_1}Y,\tilde{N})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (ii) eşitliğine ulaşılır.

Son olarak üçüncü eşitlikte (2.3.19) eşitliği ve $\tilde{\nabla}$ metrik konneksiyon olmasından

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([X,Y],N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,N) \\
&= X\tilde{g}(Y,N) - \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X N) \\
&\quad -Y\tilde{g}(X,N) + \tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Y N) \\
&= \tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Y N) - \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X N) \\
&= \hat{g}(X,-A_N Y + \nabla^l_N Y + D^s(Y,N)) \\
&\quad -\hat{g}(Y,-A_N X + \nabla^l_N X + D^s(X,N)) \\
&= \hat{g}(A_N X,Y) - \hat{g}(A_N Y,X),
\end{aligned}$$

olacağından (iii) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.3.3. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde D distribüsyonu tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U,V \in \Gamma(D)$ için $\omega h(U,\Phi V) = 0$ dır.*

İspat. Genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold tanımından D tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U,V \in \Gamma(D)$ için

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi\zeta) = 0,$$

ve

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi W) = 0,$$

olmasıdır. (2.3.19) ve (2.4.2) eşitlikleri yukarıdaki iki eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi\zeta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - h^l(U,V) - h^s(U,V),\Phi\zeta) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi\zeta) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\zeta) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\zeta) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V),\zeta) \\
&= \hat{g}(h^l(U,\Phi V),\zeta), \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U V, \Phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - h^l(U,V) - h^s(U,V), \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\Phi \tilde{\nabla}_U V, W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V, W) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U, \Phi V) + h^s(U, \Phi V), W) \\
&= \hat{g}(h^s(U, \Phi V), W), \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.3.4) ve (4.3.5) ten D nin $\hat{M}$ da tamamn geodezik olmsı için gerk ve yeter şart $h^l(U,\Phi V)$ nin $\tilde{L}$ bileşeni ve $h^s(U,\Phi V)$ nin $\tilde{S}$ bileşeninin olmaması gerekir. □

Teorem 4.3.4. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\tilde{D}$ distribüsyonu tamamen geodeziktir ancak ve ancak $X,Y \in \Gamma(\tilde{D})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$ ve $V_1, V_2 \in \Gamma(\tilde{L} \perp \tilde{S})$ için*

$i)$ $A_V X$ in $\mathring{D}$ da bileşeni yoktur,

$ii)$ $\omega \hat{g}(h^*(X,Y), \tilde{N}) = -\hat{g}(A_V X, \tilde{N})$,

$iii)$ $A_N X$ in $\Phi D_\beta \perp \Phi \tilde{S}$ da bileşeni yoktur.

İspat. Genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifold tanımı göz önüne alındığında, $\tilde{D}$ distribüsyonu tamamen geodeziktir ancak ve ancak $X,Y \in \Gamma(\tilde{D})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$, $N \in \Gamma(ltr(T\hat{M}))$, $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ için

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) = 0,$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, \Phi \tilde{N}) = 0,$$

ve

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, N) = 0,$$

dır. Diğer taraftan her $Y \in \Gamma(\tilde{D})$ için

$$Y = \Phi V$$

olacak şekilde $V \in \Gamma(\tilde{L} \perp \tilde{S})$ vardır. (2.3.19) ve (2.4.3) eşitlikleri yukarıdaki eşitliklerde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - h^l(X,Y) - h^s(X,Y), Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V, Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V, \Phi Z) \\
&= \hat{g}(-A_V X + \nabla^l_X V + D^s(X,V), \Phi Z) \\
&= \hat{g}(-A_V X, \Phi Z), \qquad (4.3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, \Phi\tilde{N}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - h^l(X,Y) - h^s(X,Y), \Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V, \Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_X V, \Phi\tilde{N}) \\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_X V, \tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V, \tilde{N}) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \Phi V, \tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V, \tilde{N}) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V, \tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y), \tilde{N}) \\
&\quad -\hat{g}(-A_V X + \nabla^l_X V + D^s(X,V), \tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, \tilde{N}) + \hat{g}(A_V X, \tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(\nabla^*_X Y + h^*(X,Y), \tilde{N}) + \hat{g}(A_V X, \tilde{N}) \\
&= \omega\hat{g}(h^*(X,Y), \tilde{N}) + \hat{g}(A_V X, \tilde{N}), \qquad (4.3.7)
\end{aligned}$$

ve $\tilde{\nabla}$ metrik koneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - h^l(X,Y) - h^s(X,Y), N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N) \\
&= X\tilde{g}(Y,N) - \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X N) \\
&= -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X N) \\
&= -\hat{g}(Y, -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(N,V)) \\
&= \hat{g}(Y, A_N X), \qquad (4.3.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.6) $\sim$ (4.3.8) den ispat biter. $\square$

Teorem 4.3.5. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\mathring{D}$ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $U,V \in \Gamma(\mathring{D})$, $N \in \Gamma(ltrT\hat{M})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$ ve $\zeta \in \Gamma(D_\beta)$ için*

i) $\hat{g}(\nabla^*_U V, \Phi\zeta) = \hat{g}(\nabla^*_V U, \Phi\zeta)$,

ii) $\hat{g}(h^s(U,\Phi V), W) = \hat{g}(h^s(V,\Phi U), W)$,

iii) $\hat{g}(h^*(U,\Phi V), \tilde{N}) = \hat{g}(h^*(V,\Phi U), \tilde{N})$,

iv) $\hat{g}(h^*(U,V), N) = \hat{g}(h^*(V,U), N)$

dir.

İspat. Her $U,V \in \Gamma(\mathring{D})$, $N \in \Gamma(ltrT\hat{M})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$ ve $\zeta \in \Gamma(D_\beta)$ için $\mathring{D}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V], \Phi\zeta) = 0,$$

$$\tilde{g}([U,V], \Phi W) = 0,$$

$$\tilde{g}([U,V], \Phi\tilde{N}) = 0,$$

ve

$$\tilde{g}([U,V], N) = 0,$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) ve (2.3.27) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi\zeta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi\zeta)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi\zeta) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U V+h^l(U,V)+h^s(U,V),\Phi\zeta) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V U+h^l(V,U)+h^s(V,U),\Phi\zeta) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi\zeta)-\hat{g}(\hat{\nabla}_V U,\Phi\zeta) \\
&= \hat{g}(\nabla^*_U V+h^*(U,V),\Phi\zeta) \\
&\quad -\hat{g}(\nabla^*_V U+h^*(V,U),\Phi\zeta) \\
&= \hat{g}(\nabla^*_U V,\Phi\zeta)-\hat{g}(\nabla^*_V U,\Phi\zeta),
\end{aligned}$$

olur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer olarak ikinci eşitlikte (2.3.16) eşitlikliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi W) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,W)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,W) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V+h^l(U,\Phi V)+h^s(U,\Phi V),W) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),W) \\
&= \hat{g}(h^s(U,\Phi V),W)-\hat{g}(h^s(V,\Phi U),W),
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) eşitliğine ulaşılır.

Benzer şekilde üçüncü eşitlikte (2.3.19) ve (2.3.27) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi\tilde{N}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\tilde{N}) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\tilde{N}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\tilde{N}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,\tilde{N}) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V),\tilde{N}) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U + h^l(V,\Phi U) + h^s(V,\Phi U),\tilde{N}) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V,\tilde{N}) - \hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U,\tilde{N}) \\
&= \hat{g}(\nabla^*_U \Phi V + h^*(U,\Phi V),\tilde{N}) \\
&\quad -\hat{g}(\nabla^*_V \Phi U + h^*(V,\Phi U),\tilde{N}) \\
&= \hat{g}(h^*(U,\Phi V),\tilde{N}) - \hat{g}(h^*(V,\Phi U),\tilde{N}),
\end{aligned}$$

olacağından (*iii*) eşitliğine ulaşılır.

Son olarak dördüncü eşitlik için (2.3.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,N) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U V + h^l(U,V) + h^s(U,V),N) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V U + h^l(V,U) + h^s(V,U),N) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V,N) - \hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U,N) \\
&= \hat{g}(\nabla^*_U V + h^*(U,V),N) \\
&\quad -\hat{g}(\nabla^*_V U + h^*(V,U),N) \\
&= \hat{g}(h^*(U,V),N) - \hat{g}(h^*(V,U),N),
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (*iv*) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.3.6. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın genelleştirilmiş CR-dejenere altmanifoldu* $\hat{M}$ *olsun. O halde* $RadT\hat{M}$ *distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak* $E_1,E_2 \in \Gamma(RadT\hat{M})$, $\zeta \in \Gamma(D_\beta)$, $W \in \Gamma(\tilde{S})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$ *ve* $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ *için*

i) $\hat{g}(E_1,h^l(E_2,\Phi\zeta)) = \hat{g}(E_2,h^l(E_1,\Phi\zeta))$,

ii) $\hat{g}(E_1,h^l(E_2,\Phi\tilde{N})) = \hat{g}(E_2,h^l(E_1,\Phi\tilde{N}))$, *iii)* $\hat{g}(E_1, h^s(E_2, \Phi W)) = \hat{g}(E_2, h^s(E_1, \Phi W))$,

iv) $\hat{g}(A^*_{E_1} E_2, Z) = \hat{g}(A^*_{E_2} E_1, Z)$

dir.

İspat. Her $E_1, E_2 \in \Gamma(RadT\hat{M})$, $\zeta \in \Gamma(D_\beta)$, $W \in \Gamma(\tilde{S})$, $\tilde{N} \in \Gamma(\tilde{L})$ ve $Z \in \Gamma(\mathring{D})$ için $RadT\hat{M}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([E_1, E_2], \Phi\zeta) = 0,$$

$$\tilde{g}([E_1, E_2], \Phi\tilde{N}) = 0,$$

$$\tilde{g}([E_1, E_2], \Phi W) = 0,$$

ve

$$\tilde{g}([E_1, E_2], Z) = 0,$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) ve $\tilde{\nabla}$ nın metrik koneksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1, E_2], \Phi\zeta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1} E_2, \Phi\zeta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2} E_1, \Phi\zeta) \\
&= E_1 \tilde{g}(E_2, \Phi\zeta) - \tilde{g}(E_2, \tilde{\nabla}_{E_1} \Phi\zeta) \\
&\quad - E_2 \tilde{g}(E_1, \Phi\zeta) + \tilde{g}(E_1, \tilde{\nabla}_{E_2} \Phi\zeta) \\
&= -\tilde{g}(E_2, \tilde{\nabla}_{E_1} \Phi\zeta) + \tilde{g}(E_1, \tilde{\nabla}_{E_2} \Phi\zeta) \\
&= \hat{g}(E_1, \hat{\nabla}_{E_2} \Phi\zeta + h^l(E_2, \Phi\zeta) + h^s(E_2, \Phi\zeta)) \\
&\quad - \hat{g}(E_2, \hat{\nabla}_{E_1} \Phi\zeta + h^l(E_1, \Phi\zeta) + h^s(E_1, \Phi\zeta)) \\
&= \hat{g}(E_1, h^l(E_2, \Phi\zeta)) - \hat{g}(E_2, h^l(E_1, \Phi\zeta)),
\end{aligned}$$

olur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer olarak ikinci eşitlikte (2.3.16) ve $\tilde{\nabla}$ nın metrik koneksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi\tilde{N}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi\tilde{N})-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi\tilde{N}) \\
&= E_1\tilde{g}(E_2,\Phi\tilde{N})-\tilde{g}(E_2,\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi\tilde{N}) \\
&\quad -E_2\tilde{g}(E_1,\Phi\tilde{N})+\tilde{g}(E_1,\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi\tilde{N}) \\
&= -\tilde{g}(E_2,\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi\tilde{N})+\tilde{g}(E_1,\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi\tilde{N}) \\
&= \hat{g}(E_1,\hat{\nabla}_{E_2}\Phi\tilde{N}+h^l(E_2,\Phi\tilde{N})+h^s(E_2,\Phi\tilde{N})) \\
&\quad -\hat{g}(E_2,\hat{\nabla}_{E_1}\Phi\tilde{N}+h^l(E_1,\Phi\tilde{N})+h^s(E_1,\Phi\tilde{N})) \\
&= \hat{g}(E_1,h^l(E_2,\Phi\tilde{N}))-\hat{g}(E_2,h^l(E_1,\Phi\tilde{N})),
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) eşitliğine ulaşılır.

Benzer şekilde üçüncü eşitlikte (2.3.19) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],\Phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,\Phi W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,\Phi W) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,W)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}\Phi E_2,W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}\Phi E_1,W) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}\Phi E_2+h^l(E_1,\Phi E_2)+h^s(E_1,\Phi E_2),W) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}\Phi E_1+h^l(E_2,\Phi E_1)+h^s(E_2,\Phi E_1),W) \\
&= \hat{g}(h^s(E_1,\Phi E_2),W)-\hat{g}(h^s(E_2,\Phi E_1),W),
\end{aligned}$$

olacağından (iii) eşitliğine ulaşılır.

Son olarak dördüncü eşitlik için (2.3.16) ve (2.3.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([E_1,E_2],Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_1}E_2,Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1,Z) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}E_2+h^l(E_1,E_2)+h^s(E_1,E_2),Z) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}E_1+h^l(E_2,E_1)+h^s(E_2,E_1),Z) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_{E_1}E_2,Z)-\hat{g}(\hat{\nabla}_{E_2}E_1,Z) \\
&= \hat{g}(-A_{E_2}E_1+\nabla^t_{E_1}E_2,Z) \\
&\quad -\hat{g}(-A_{E_1}E_2+\nabla^t_{E_2}E_1,Z) \\
&= \hat{g}(A_{E_1}E_2,Z)-\hat{g}(A_{E_2}E_1,Z),
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (iv) eşitliğine ulaşılır. $\square$

4.4 Screen Transversal CR-Dejenere Altmanifoldlar

Tanım 4.4.1. Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan altmanifolda screen transversal CR-dejenere altmanifold denir.

$i)$ $RadT\hat{M}$ da

$$RadT\hat{M} = D_\alpha \oplus D_\beta, \quad \Phi(D_\alpha) \subset S(T\hat{M}), \quad \Phi(D_\beta) \subset S(T\hat{M}^\perp),$$

şeklinde D_α ve D_β distribüsyonları vardır

$ii)$ $S(T\hat{M})$ da

$$S(T\hat{M}) = \{\Phi(D_\alpha) \oplus \acute{D}\} \perp \mathring{D}, \ \Phi(\mathring{D}) = \mathring{D}, \ \Phi(\acute{D}) = \tilde{L} \perp \tilde{S}, \ \ \Phi(\mathring{L}) \subset S(T\hat{M}^\perp),$$

şeklinde $\mathring{D}$ ile $\acute{D}$ vardır. Burada $\mathring{D}$ dejenere olmayan distribüsyon, $\tilde{L}$ ile $\mathring{L}$ ve $\tilde{S}$ sırsıyla $ltr(T\tilde{M})$ ve $S(T\tilde{M}^\perp)$ in alt vektör demetleridir.

Yukarıdaki tanım dikkate alınırsa

$$TM = D \oplus \hat{D}, \tag{4.4.1}$$

dir. Burada

$$D = \mathring{D} \oplus D_\alpha \oplus \Phi(D_\alpha) ve \hat{D} = D_\beta \oplus \Phi(\tilde{L}) \oplus \Phi(\tilde{S}) \tag{4.4.2}$$

dır.

Ayrıca

$$ltr(T\hat{M}) = \tilde{L} \oplus \mathring{L}, \quad \Phi(\tilde{L}) \subset S(T\hat{M}), \quad \Phi(\mathring{L}) \subset S(T\hat{M}^\perp),$$

$$S(T\hat{M}^\perp) = \{\Phi(\tilde{L}) \oplus \Phi(D_\beta)\} \perp \tilde{S},$$

eşitlikleride yazılabilir.

Örnek 4.4.1. $(\tilde{M}=\mathbb{R}_4^{12},\tilde{g})$ bir $(-,+,-,+,+,+,+,+,-,+,-,+)$ işaretli semi-Öklid uzay, $(w_1,w_2,...,w_{12})$, $\mathbb{R}_4^{12}$ nin standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$$\Phi(w_1,w_2,...,w_{12})=\begin{pmatrix} \bar{\rho}_\omega w_1,\bar{\rho}_\omega w_2,\rho_\omega w_3,\rho_\omega w_4,\omega w_5+w_6,-w_5, \\ \omega w_7+w_8,-w_7,\rho_\omega w_9,\rho_\omega w_{10},\bar{\rho}_\omega w_{11},\bar{\rho}_\omega w_{12} \end{pmatrix},$$

olarak alınırsa (2.4.2) eşitliği sağlanır burada $\bar{\rho}_\omega=\omega-\rho_\omega$ dir. Dolayısıyla Φ, $\mathbb{R}_4^{12}$ üzerinde bir hemen hemen poly-Norden yapıdır.

$(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ üzerinde

$$w_1=\rho_\omega\varsigma_1+\varsigma_2-\bar{\rho}_\omega\varsigma_4,$$

$$w_2=\rho_\omega\varsigma_1+\varsigma_2+\bar{\rho}_\omega\varsigma_4,$$

$$w_3=w_4=\bar{\rho}_\omega\varsigma_3,$$

$$w_5=w_7=-\varsigma_6,$$

$$w_6=w_8=\varsigma_5,$$

$$w_9=w_{10}=\varsigma_3,$$

$$w_{11}=w_{12}=\varsigma_1+\bar{\rho}_\omega\varsigma_2,$$

ile tanımlanan $\hat{M}$ altmanifoldunu göz önüne alınırsa

$$\Pi_1=\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_1}+\rho_\omega\frac{\partial}{\partial w_2}+\frac{\partial}{\partial w_{11}}+\frac{\partial}{\partial w_{12}},$$

$$\Pi_2=\frac{\partial}{\partial w_1}+\frac{\partial}{\partial w_2}+\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_{11}}+\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_{12}},$$

$$\Pi_3=\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_3}+\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_4}+\frac{\partial}{\partial w_9}+\frac{\partial}{\partial w_{10}},$$

$$\Pi_4=-\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_1}+\bar{\rho}_\omega\frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$\Pi_5=\frac{\partial}{\partial w_6}+\frac{\partial}{\partial w_8},$$

$$\Pi_6=-\frac{\partial}{\partial w_5}-\frac{\partial}{\partial w_7},$$

$$\Pi_7=\frac{\partial}{\partial w_7}+\frac{\partial}{\partial w_8},$$

için $T\hat{M} = Sp\{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\Pi_4,\Pi_5,\Pi_6,\Pi_7\}$ dir ve $\hat{M}$ altmanifoldu $S(T\hat{M}) = Sp\{\Pi_2,\Pi_4,\Pi_5,\Pi_6,\Pi_7\}$ ve $RadT\hat{M} = Sp\{\Pi_1,\Pi_3\}$ ile bir dejenere altmanifolddur. $\Phi\Pi_1 = \Pi_2 \in S(T\hat{M})$ olduğundan $D_\alpha = Sp\{\Pi_1\}$, $D_\beta = Sp\{\Pi_3\}$ dir. Ayrıca $\Phi\Pi_5 = \Pi_6 \in S(T\hat{M})$ olduğundan $\mathring{D} = Sp\{\Pi_5,\Pi_6\}$ ve

$$N_1 = \frac{1}{2\rho_\omega}\left(-\frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2}\right),$$

$$N_2 = \frac{1}{2\bar{\rho}_\omega}\left(-\frac{\partial}{\partial w_{11}} - \frac{\partial}{\partial w_{12}}\right),$$

ile verilir. Buradan $\tilde{L} = Sp\{N_1\}$, $\mathring{L} = Sp\{N_2\}$, $S(T\hat{M}^\perp) = Sp\{\Phi\Pi_3,\Phi N_2,\Phi\Pi_7\}$, $\tilde{S} = Sp\{\Phi\Pi_7 = W\}$ ve $\acute{D} = Sp\{\Phi N_1 = \Pi_4, W\}$ olur. Böylece $\hat{M}$, $\tilde{M}$ nın bir screen transversal CR-dejenere altmanifoldu olur.

$\hat{M}$ nın screen transversal CR-dejenere altmanifold olduğunu kabul edelim. $T\hat{M}$ dan $\mathring{D}$, ΦD_α, $\Phi\tilde{L}$, $\Phi\tilde{S}$, D_α ve D_β ya projeksiyonları sırasıyla $\mathring{T}$, T_α, T_β, $\hat{T}$, S_α ve S_β ile gösterirsek her $U \in \Gamma(T\hat{M})$ için

$$\begin{aligned} U &= TU + SU \\ &= \mathring{T}U + T_\alpha U + T_\beta U + \hat{T}U + S_\alpha U + S_\beta U, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

ve

$$\Phi U = PU + \delta U, \tag{4.4.4}$$

yazılabilir. Burada $TU \in \Gamma(D)$, $SU \in \Gamma(\hat{D})$, PU ve δU sırasıyla teğet ve transversal bileşenlerdir.

(4.4.3) eşitliğine Φ uygulanıp, $\Phi\mathring{T}$, ΦT_α, ΦT_β, $\Phi\hat{T}$, ΦS_α ve ΦS_β yı sırasıyla $\mathring{Q}$, Q_α, Q_β, $\delta_{\tilde{L}}$, $\delta_{\tilde{S}}$, $\tilde{T}_\alpha$, δ_β gösterirsek

$$\begin{aligned} \Phi U &= \mathring{Q}U + Q_\alpha U + Q_\beta U + \delta_{\tilde{L}}U \\ &\quad + \delta_{\tilde{S}}U + \tilde{T}_\alpha U + \delta_\beta U, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\mathring{Q}U \in \Gamma(\mathring{D})$, $Q_\alpha U \in \Gamma(D_\alpha)$, $\tilde{T}_\alpha U \in \Gamma(\Phi D_\alpha)$, $\delta_{\tilde{L}}U \in \Gamma(\tilde{L})$, $\delta_{\tilde{S}}U \in \Gamma(\tilde{S})$ ve $\delta_\beta U \in \Gamma(\Phi D_\beta)$.

Benzer olarak $tr(T\hat{M})$ den ΦL, $\Phi\mathring{L}$, $\Phi\tilde{S}$, $\Phi\tilde{L}$ ve $\mathring{L}$ ya projeksiyonları sırasıyla R_α, R_β, $\hat{R}$, Q_α, Q_β ile gösterirsek her $V \in \Gamma(tr(T\hat{M}))$ için

$$V = R_\alpha V + R_\beta V + \hat{R}V + Q_\alpha V + Q_\beta V, \tag{4.4.6}$$

yazılabilir.

Ayrıca ΦR_α, ΦR_β, $\Phi\hat{R}$, ΦQ_α ve ΦQ_β yı sırasıyla K_β, $F_{\tilde{L}}$, $\tilde{K}_S$, $\tilde{K}_L$ ve $\tilde{F}_L$ ile gösterirsek

$$\Phi V = K_\beta V + F_{\tilde{L}}V + \tilde{K}_S V + \tilde{K}_L V + \tilde{F}_L V, \tag{4.4.7}$$

olur. Burada KV ve FV sırasıyla $T\hat{M}$ ve $tr(T\hat{M})$ nın kesitleridir.

Diğer taraftan (4.4.5) eşitliğinde (2.3.16), (2.3.19) ve (4.4.7) den her $U,V \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla}_U P)V &= A_{w_{\tilde{L}}V}U + A_{w_{\tilde{S}}V}U + A_{w_\beta V}U \\ &\quad + Kh(U,V),\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

$$\begin{aligned}D^l(U,\delta_{\tilde{S}}V) + D^l(U,\delta_\beta V) &= \delta_{\tilde{L}}(\hat{\nabla}_U V) - \hat{\nabla}^l_U(\delta_{\tilde{L}}V) \\ &\quad - h^l(U,PV) + Fh^l(U,V),\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

$$\begin{aligned}D^s(U,\delta_{\tilde{L}}V) &= \delta_{\tilde{S}}(\hat{\nabla}_U V) + \delta_\beta(\hat{\nabla}_U V) - \hat{\nabla}^s_U(\delta_{\tilde{S}}V) \\ &\quad - \hat{\nabla}^s_U(\delta_\beta V) - h^s(U,PV) + Fh^s(U,V)\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın screen transversal CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $U,V \in \Gamma(D)$, $N_2 \in \Gamma(\mathring{L})$, $\zeta \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $W \in \Gamma(\tilde{S})$ için*

i) $\hat{g}(h^s(U,V),\Phi N_2) = \hat{g}(h^s(V,U),\Phi N_2)$

ii) $\hat{g}(h^l(U,\Phi V),\zeta) = \hat{g}(h^l(V,\Phi U),\zeta)$

iii) $\hat{g}(h^s(U,\Phi V),\zeta) = \hat{g}(h^s(V,\Phi U),W)$

dır.

İspat. Her $U,V \in \Gamma(D)$, $N_2 \in \Gamma(\mathring{L})$, $\zeta \in \Gamma(D_\alpha)$, $W \in \Gamma(\tilde{S})$ için D integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V],N_2) = 0,$$

$$\tilde{g}([U,V],\Phi\zeta) = 0,$$

ve

$$\tilde{g}([U,V],\Phi W) = 0,$$

dır. Buradan verilen ilk eşitlikte (2.3.16) ve (2.4.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],N_2) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,N_2) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,N_2) \\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,N_2) - \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_2) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,N_2) + \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\Phi N_2) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_2) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\Phi N_2) \\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi N_2) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,\Phi N_2) \\
&= \omega\hat{g}(\hat{\nabla}_U V + h^l(U,V) + h^s(U,V),\Phi N_2) \\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V),\Phi N_2) \\
&\quad -\omega\hat{g}(\hat{\nabla}_V U + h^l(V,U) + h^s(V,U),\Phi N_2) \\
&\quad +\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U + h^l(V,\Phi U) + h^s(V,\Phi U),\Phi N_2) \\
&= \omega\left(\hat{g}(h^s(U,V),\Phi N_2) - \hat{g}(h^s(V,U),\Phi N_2)\right) \\
&\quad -\hat{g}(h^s(U,\Phi V),\Phi N_2) + \hat{g}(h^s(V,\Phi U),\Phi N_2)
\end{aligned}$$

olur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer olarak ikinci eşitlikte (2.3.16) eşitlikliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi\zeta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi\zeta)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi\zeta)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\zeta)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\zeta)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\zeta)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,\zeta)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V+h^l(U,\Phi V)+h^s(U,\Phi V),\zeta)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),\zeta)\\
&= \hat{g}(h^l(U,\Phi V),\zeta)-\hat{g}(h^l(V,\Phi U),\zeta),
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) eşitliğine ulaşılır.

Benzer şekilde üçüncü eşitlikte (2.3.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi W)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,W)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,W)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,W)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,W)\\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V+h^l(U,\Phi V)+h^s(U,\Phi V),W)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_V \Phi U+h^l(V,\Phi U)+h^s(V,\Phi U),W)\\
&= \hat{g}(h^s(U,\Phi V),W)-\hat{g}(h^s(V,\Phi U),W),
\end{aligned}$$

olacağından (iii) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.4.2. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold* $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ *nın screen transversal CR-dejenere altmanifoldu* $\hat{M}$ *olsun. O halde* $\hat{D}$ *distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak* $U,V\in\Gamma(\hat{D})$, $N_1\in\Gamma(\tilde{L})$ *ve* $Z\in\Gamma(\mathring{D})$ *için*

i) $\hat{g}(A_{\Phi U}V,N_1)=\hat{g}(A_{\Phi V}U,N_1)$ *ve* $\hat{g}(A_{\Phi U}V,\Phi N_1)=\hat{g}(A_{\Phi V}U,\Phi N_1)$

ii) $\hat{g}(A_{\Phi U}V,Z)=\hat{g}(A_{\Phi V}U,Z)$

dir.

İspat. Her $U,V\in\Gamma(\hat{D})$, $N_1\in\Gamma(\tilde{L})$, $Z\in\Gamma(\mathring{D})$ için $\hat{D}$ integrallenebilirdir ancak ve ancak

$$\tilde{g}([U,V],N_1)=0,$$

$$\tilde{g}([U,V],\Phi N_1)=0,$$

ve

$$\tilde{g}([U,V],Z)=0,$$

dır. Buradan verilen ilk iki eşitlikte (2.3.16) ve (2.4.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],N_1) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,N_1)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,N_1)\\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,N_1)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_1)\\
&\quad -\omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,N_1)+\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,\Phi N_1)\\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,N_1)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\Phi N_1)\\
&\quad -\omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,N_1)+\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,\Phi N_1)\\
&= \omega\left(\hat{g}(-A_{\Phi V}U+\nabla^l_U\Phi V+D^s(U,\Phi V),N_1)\right)\\
&\quad -\hat{g}(-A_{\Phi V}U+\nabla^l_U\Phi V+D^s(U,\Phi V),\Phi N_1\\
&\quad -\omega\left(\hat{g}(-A_{\Phi U}V+\nabla^l_V\Phi U+D^s(V,\Phi U),N_1)\right)\\
&\quad +\hat{g}(-A_{\Phi U}V+\nabla^l_V\Phi U+D^s(V,\Phi U),\Phi N_1)\\
&= \omega\left(\hat{g}(A_{\Phi U}V,N_1)-\hat{g}(A_{\Phi V}U,N_1)\right)\\
&\quad -\hat{g}(A_{\Phi U}V,\Phi N_1)+\hat{g}(A_{\Phi V}U,\Phi N_1),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi N_1) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_1)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi N_1)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,N_1)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,N_1)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,N_1)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,N_1)\\
&= \hat{g}(-A_{\Phi V}U+\nabla^l_U\Phi V+D^s(U,\Phi V),N_1)\\
&\quad -\hat{g}(-A_{\Phi U}V+\nabla^l_V\Phi U+D^s(V,\Phi U),N_1)\\
&= \hat{g}(A_{\Phi U}V,N_1)-\hat{g}(A_{\Phi V}U,N_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer olarak son eşitlikte (2.3.16) eşitlikliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([U,V],\Phi Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V U,\Phi Z)\\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,Z)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_V U,Z)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V \Phi U,Z)\\
&= \hat{g}(-A_{\Phi V}U+\nabla^l_U\Phi V+D^s(U,\Phi V),Z)\\
&\quad -\hat{g}(-A_{\Phi U}V+\nabla^l_V\Phi U+D^s(V,\Phi U),Z)\\
&= \hat{g}(A_{\Phi U}V,Z)-\hat{g}(A_{\Phi V}U,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 4.4.3. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M},\tilde{g},\Phi)$ nın screen transversal CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde D distribüsyonu tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U,V\in\Gamma(D)$ için $Kh(U,\Phi V)=0$ dır.*

İspat. Screen transversal CR-dejenere altmanifold tanımı ndan D nın tamamen geodezik olması için her $U,V\in\Gamma(D)$ için

$$\hat{\nabla}_U V\in\Gamma(D), \tag{4.4.11}$$

olmalıdır. (4.4.11) eşitliğinden her $U,V\in\Gamma(D), N_2\in\Gamma(\mathring{L}),\zeta\in\Gamma(D_\alpha)$ ve $W\in\Gamma(\tilde{S})$ için

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_U V,N_2)=0,\quad \hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi\zeta)=0,\quad \hat{g}(\hat{\nabla}_U V,\Phi W)=0,$$

yazılabilir. Böylece (2.3.16) ve (2.4.3) eşitlerinden

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U V,N_2) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V-h^l(U,V)-h^s(U,V),N_2)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,N_2)\\
&= \omega\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,N_2)-\tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_2)\\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V,\Phi N_2)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V,\Phi N_2)\\
&= \omega\tilde{g}(\hat{\nabla}_U V+h^l(U,V)+h^s(U,V),\Phi N_2)\\
&\quad -\hat{g}(\hat{\nabla}_U\Phi V+h^l(U,\Phi V)+h^s(U,\Phi V),\Phi N_2)\\
&= \omega\hat{g}(h^s(U,V),\Phi N_2)-\hat{g}(h^s(U,\Phi V),\Phi N_2),
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U V, \Phi\zeta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - h^l(U,V) - h^s(U,V), \Phi\zeta) \\
&= \omega\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - h^l(U,V) - h^s(U,V), \Phi\zeta) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi\zeta) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V, \zeta) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V, \zeta) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V), \zeta) \\
&= \hat{g}(h^l(U,\Phi V), \zeta), \qquad (4.4.13)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_U V, \Phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V - h^l(U,V) - h^s(U,V), \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, \Phi W) \\
&= \tilde{g}(\Phi\tilde{\nabla}_U V, W) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U \Phi V, W) \\
&= \hat{g}(\hat{\nabla}_U \Phi V + h^l(U,\Phi V) + h^s(U,\Phi V), W) \\
&= \hat{g}(h^s(U,\Phi V), W), \qquad (4.4.14)
\end{aligned}
$$

olur. (4.3.4) ve (4.3.5) ten D $\hat{M}$ da tamamen geodeziktir ancak ve ancak $h^l(U,\Phi V)$ nin $\tilde{L}$ bileşeni ve $h^s(U,\Phi V)$ nin $\mathring{L} \cup \tilde{S}$ bileşeni yoktur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.4.4. *Bir poly-Norden semi-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ nın screen transversal CR-dejenere altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. O halde $\hat{D}$ distribüsyonu tamamen geodeziktir ancak ve ancak $U, V \in \Gamma(\hat{D})$ için $A_{\delta V} U \in \Gamma(\hat{D})$ dır.*

İspat. Screen transversal CR-dejenere altmanifold tanımı ndan $\hat{D}$ distribüsyonunun tamamen geodezik olması için $U, V \in \Gamma(\hat{D})$ için

$$\hat{\nabla}_U V \in \Gamma(\hat{D}),$$

olmalıdır. $V \in \Gamma(\hat{D})$ ve $\hat{\nabla}_U V \in \Gamma(\hat{D})$ olduğundan PV ve $P\hat{\nabla}_U V$ nin sıfıra eşit olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (4.4.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_U PV - P\hat{\nabla}_U V &= A_{\delta_{\tilde{L}}V}U + A_{\delta_{\tilde{S}}V}U + A_{\delta_\beta V}U \\ &\quad + Kh(U,V), \end{aligned}$$

buradan da

$$-Kh(U,V) = A_{\delta V}U \in \Gamma(\hat{D})$$

yazılabilir.

Tersine eğer $A_{\delta V}U \in \Gamma(\hat{D})$ ise (4.4.8) eşitliğinden

$$P\hat{\nabla}_U V = 0,$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

KAYNAKLAR

[1] **Acet, B. E.** (2020). Screen pseudo slant lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds, *Hacettepe J. Math. Stat.*, *49 (6)*, 2037-2045.

[2] **Acet, B. E., Yüksel Perktaş, S.** & **Kılıç, E.** (2014). On lightlike geometry of para-Sasakian manifolds, *Scientific Work J.*, Article ID 6962312.

[3] **Acet, B. E.**(2018). Lightlike hypersurfaces of metallic semi-Riemannian manifolds, *Int. J. Geom. Methods in Mod. Phys.*, *15 (12)*, 1-16.

[4] **Blaga, A. M.** & **Hretcanu, C. E.** (2018). Invariant, anti-invariant and slant submanifolds of a metallic Riemannian manifold, *Novi Sad Journal of Math.*, *48 (2)*, 57-82.

[5] **Crasmereanu, M. C.** & **Hretcanu, C. E.** (2008). Golden differential geometry, *Chaos, Solitons Fractals*, *38 (5)*, 1229-1238.

[6] **De Spinadel, V. W.** (1997). On characterization of the onset to chaos, *Chaos, Solitons Fractals*, *8 (10)*, 1631-1643.

[7] **De Spinadel, V. W.** (1999). The metallic means family and multifractal spectra, *Nonlinear Anal. Ser. B: Real World Appl., 36 (6)*, 721-745.

[8] **Duggal, K. L.** & **Bejancu, A.** (1996). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Mathematics and Its Applications, Kluwer Publisher.

[9] **Duggal, K. L.** & **Şahin, B.** (2010). Differential geometry of lightlike submanifolds, Frontiers in Mathematics.

[10] **Duggal, K. L.** & **Şahin, B.** (2007). Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds, *Int. J. Math. Math. Sci.*, Article ID 57585.

[11] **Duggal, K. L.** & **Şahin, B.** (2005). Screen Cauchy Riemann lightlike submanifolds, *Acta Math. Hungarica*, *106 (1-2)*, 137-165.

[12] **Duggal, K. L.** & **Şahin, B.** (2006). Generalized Cauchy-Riemann lightlike submanifolds of Kaehler manifolds, *Acta Math. Hungarica*, *112*, 107-130.

[13] **Erdoğan, F. E.** (2018). Transversal lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds, *Turk. J. Math.*, *42 (6)*, 3133-3148.

[14] **Erdoğan, F. E.** (2019). On some types of lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds, *Filomat*, *33(10)*, 3231-3242.

[15] **Goldberg S. I.** & **Yano, K.** (1970). Polinomial structures on manifolds, *Kodai Mat. Sem. Rep.*, *22 (2)*, 199-218.

[16] **Gök, M., Keleş, S.** & **Kılıç, E.** (2019). Some characterizations of semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds, *Mathematics*, *7 (12)*, 1-12.

[17] **Güneş, R., Şahin, B.** & **Kılıç, E.** (2003). On lightlike hypersurfaces of semi-Riemannian space form, *Turk. J. Math.*, *27 (2)*, 283-297.

[18] **Hacısalihoğlu, H. H.** Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:2.

[19] **Hretcanu, C. E.** (2008). Submanifolds in Riemannian manifolds with golden structure, *Acta Math. Acad. Paedagog Nyhazi N. S.*, *24 (1)*, 3-4.

[20] **Hretcanu, C. E.** & **Crasmereanu, M. C.** (2007). On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure, *An. Stiint. Univ. Al. Cuza Iasi Math. N. S.*, *53*, 199–211.

[21] **Hretcanu, C. E.** & **Crasmereanu, M. C.** (2009). Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds, *Turk. J. Math.*, *33 (2)*, 179-191.

[22] **Hretcanu, C. E.** & **Crasmereanu, M. C.** (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds, *Rev. de la Union Mat. Argentina*, *54 (2)*, 15-27.

[23] **Hretcanu, C. E.** & **Blaga, A. M.** (2018). Submanifolds in metallic Riemannian manifolds, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, *20*, 83-97.

[24] **Kalia, K.** *The generalizations of the Golden ratio: their powers, continued fractions and convergents,* http://math.mit.edu/research/highschool/primes/pape rs.pp.

[25] **Norden, A. P.** (1960). On a certain class of four-dimensional A-spaces, *Iz. VUZ*, *4*, 145-157.

[26] **O'Neill, B.** (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York.

[27] **Önen Poyraz, N.** (2016). Screen semi-invariant lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds, *Int. Elect. J. Geo.*, *14 (1)*, 207-216.

[28] **Önen Poyraz, N.** & **Yaşar, E.** (2019). Lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds, *J. Geom. Phys.*, *141*, 92-104.

[29] **Şahin, B.** (2008). Slant lightlike submanifolds of indefinite Hermitian manifolds, *Balkan J. Geo. and Its Appl.*, *13 (1)*, 107-119.

[30] **Şahin, B.** (2008). Screen transversal lightlike submanifolds of Kähler manifolds, *Chaos, Solitons Fractals*, *38*, 1439-1448.

[31] **Şahin, B.** (2018). Almost poly-Norden manifolds, *Int. J. of Maps in Math.*, *1*, 68-79.

[32] **Yano, K.** (1963). On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$, *Tensor N.S.*, *14 (1)*, 99–109.

[33] **Yano, K.** & **Kon, M.** (1984). Structure on manifold, World Sci. Publishing Co. Ptc. Ltd., pp. 508.

[34] **Yüksel Perktaş, S.** (2020). Submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds, *Turk. J. Math.*, *44*, 31-49.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad **:** Tuba ACET

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2007, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans :** 2011, Adıyaman Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR

- **Kılıç, E., Acet, T., & Yüksel Perktaş, S. (2022).** Lightlike hypersurfaces of poly-Norden semi-Riemannian manifolds. Turkish Journal of Science. 7 (1), 21-30.