T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin AKDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

ŞUBAT 2023

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin AKDOĞAN
(36193614073)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

ŞUBAT 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden sabırla beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY'a, bu tezin yazım düzeninde fikirlerinden yararlandığım ve her zaman değerli zamanını bana ayıran Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e, çalışmalarımda ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme, özellikle de her zaman bana güvenen ve inanan canım anneme teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Esnek Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hüseyin AKDOĞAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Bazı
$\ni$	:	Öyleki
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$\in$	:	Elemanıdır
$\Longrightarrow$	:	Gerek şart
$\Longleftarrow$	:	Yeter şart
$\Longleftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart
$\varnothing$	:	Boş küme
$\Re$	:	Denklik bağıntısı
B	:	Komşuluk tabanı
$\times$	:	Kartezyen çarpım
X,Y	:	Başlangıç evrenleri
U,X	:	Evrensel küme
$P(X)$	:	Kuvvet kümesi
$S(X),S(Y)$	:	Bütün esnek kümelerin kümesi
E	:	Parametrelerin kümesi
$\rceil e$	:	e parametresinin değili
F_A	:	Esnek küme
$S(U)$	:	U üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesi
$\tilde{\cap}$	:	Esnek arakesit
$\tilde{\cup}$	:	Esnek birleşim
$\tilde{\subseteq}$	:	Esnek alt küme
$\tilde{\setminus}$	:	Esnek fark
$\tilde{X}$	:	Esnek tam küme
$\tilde{\Phi}$	:	Esnek boş küme
τ	:	Topoloji
τ_Y	:	Y üzerinde tanımlanmış esnek alt uzay topolojisi
τ'	:	Kapalı esnek kümelerin ailesi
(X,τ,E)	:	Esnek topolojik uzay
$\overline{F_A}$	:	Esnek kümenin kapanışı
F_A^s	:	Esnek kümenin sınırı
F_A°	:	Esnek kümenin içi
F_A'	:	Esnek kümenin tümleyeni
$C_{\tilde{x}}$	:	x esnek noktasının esnek bileşeni
(I,τ_I,E)	:	Esnek birim aralık
$(\eta,\omega),(\gamma,\delta)$	:	Esnek yol

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK
TOPOLOJİK UZAYLARDA
BAĞLANTILILIK ÜZERİNE

Hüseyin AKDOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

42+vi sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

Beş bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde, bu tezde yer verilecek esnek kümelerin ve esnek bağlantılı topolojik uzayların tarihçesi hakkında genel bilgiler verildikten sonra tezin amacından bahsedildi.

İkinci bölümde, esnek kümeler ve bazı cebirsel özelliklerine yer verildikten sonra üçüncü bölümde esnek topolojik uzaylara, dördüncü bölümde ise esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık ve esnek lokal bağlantılılık kavramlarına yer verildi.

Beşinci ve son bölümde ise bu tezin sonuç kısmına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Topoloji, Esnek Bağlantılılık

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE CONNECTEDNESS
IN
SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Hüseyin AKDOĞAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

42+vi pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

The first part of this master's thesis, which consists of five chapters, gave general information about the history of plastic sets and plastic connected topological spaces that will be included in this thesis, and then the purpose of the thesis was mentioned.

In the second part, plastic sets and some of their algebraic properties are placed in soft topological spaces in the third region, and in the fourth region the concepts of connectivity and soft local connectedness in plastic topological spaces.

In the fifth and last chapter, the conclusion part of this thesis is given.

Keywords: Soft Set, Soft Topology, Soft Connectedness

1. GİRİŞ

Matematik biliminin temelini mantıksal sistem oluşturur. Geçmişten gelerek günümüze kadar birtakım matematiksel belirsizlikleri kamufule etmek ya da tamamen ortadan kaldırmaya yönelik birçok yöntem ve teoriler öne sunulmuştur. Temel bilimler başta olmak üzere mühendislik ve daha birçok alanda karşılaşılan karmaşık problemler için kesin ve tam olan bilgiye ulaşmak mümkün değildir. İçinde matematikçilerin de bulunduğu birçok bilim insanı yüzyıllar boyu klasik mantığın sınırlarını zorlayarak farklı ve kesin olmayan bilgi arayışına girdiler. Bu belirsizlik arayışı çok geçmeden sonuç verdi ve bu alanda birçok teori geliştirildi. Belirsizliği modelleyen bu teorilerden bazıları; bulanık, kaba ve esnek küme teorileri olarak verilebilir [1-3]. Tarihe bakıldığında matematiksel belirsizlikler ve karmaşık hal durumları konusundaki çalışmalar serüveninin ilk ayağını 17. yy da öne sunulan olasılık kavramı oluşturmaktadır. 1930 lu yıllara kadar oran ve limit şeklinde tarif edilmiş olan olasılık kavramı Kolmogorov aksiyomları [4] denen aksiyomlar kullanılarak bir dönüşüm biçiminde ifadesi sağlanmıştır. Bu yıllardan daha sonra, Kolmogorov' un belirsizliklere ve olasılığa yaklaşımına neredeyse benzer bir duruşla bazı çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu uğraş ve girişimlerin içerisinde bulanık kümeler [3] modern anlamdaki birçok karmaşık problem durumlarının modellenmesine öncülük etmiştir. Birçok bilim insanı bu teoriden faydalanarak hem teorik hem de uygulamalı olarak birçok alanda faaliyette bulunmuştur. Bununla birlikte, Zadeh tarafından önerilen teoride, belirli üyelik derecelerine güvenme ihtiyacı nedeniyle belirsizlik tam olarak çözülememektedir. Dolayısıyla bu teorinin eksikliği birtakım farklı teorilerin oluşmasına ortam hazırlamıştır. Daha yakın zamanlarda kaba küme [2] teorisi gibi kavramlar tanıtılmıştır. Bu kavramlar karar sonuçlama analizi, yapay zeka, bilişim ve tıp gibi birçok alanda sergilenip uygulamaları kullanılmıştır. Her ne kadar bu alanların birçok çalışma ve uygulama kısımına konu olan kaba küme teorisi bununla birlikte, bu kavramlarda da bulunan üyelik derecesine bağımlılık nedeniyle matematiksel belirsizlikler ve karmaşık problem durumları her şeye rağmen tamamen ortadan kaldırılamamıştır.

1999 da Molodtsov tarafından belirsizliğe yeni bir matematiksel yaklaşım metodu olan esnek küme teorisini tanımlamıştır [1]. Oyun teorisi, ölçüm teorisi, Riemann integrali ve Perron integrali gibi birçok alanda bu kavramın uygulamasını vermektedir. Bunun yanı sıra esnek küme kavramı yani parametreli kümeler yardımıyla oluşturulan dönüşümler belirli bir üyelik derecesine bağlı olmadığı için ekonomi, bilişim, tıp, çevre ve karar sonuç problemleri gibi çeşitli alanlarda uygulamalarına yer verilmiştir. Bu teori kısa sürede oyun teorisi, olasılık ve ölçü teorisi gibi farklı alanlarda geniş bir çalışma sahası oluşturmuştur. Özellikle matematikçiler yeni bir çalışma alanı olduğundan bu teoriyi cebirsel ve topolojik yönleriyle incelemişlerdir [5-10]. Molodtsov esnek kümeyi tanımladıktan sonra Maji ve arkadaşları esnek kümelerin üzerinde farklı operatörler tanımlayarak bunların bazı temel özelliklerini incelemişlerdir [9]. Shabir ve Naz ise esnek topoloji kavramını tanımlayarak bazı temel özellikleri ve esnek topolojik uzaylar üzerinde ayırma aksiyomlarını vermiştir [11]. Esnek topolojinin tanımlanmasından sonra genel topolojideki kavramlar esnek topolojik uzaylarda ele alınmıştır. Aygünoğlu ve Aygün, Min ve Zorlutuna ile arkadaşları esnek topolojik uzaylar ve cebirsel yapılar üzerinde çalışmalar yaparak bazı temel sonuçlar elde etmişlerdir [6], [12-13]. Peyghan ve arkadaşları 2013 yılında esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir [14]. Bu çalışmada ayrıca bir esnek noktanın esnek lokal bağlantılılığını tanımlamışlardır. Bayramov ve arkadaşları da yine 2013 de esnek yol bağlantılılık kavramını tanımlamışlardır [15]. 2014 senesinde Al-Khafaj ve Mahmood, esnek bağlantılı kümeler, esnek bağlantısız kümeler, esnek bağlantılı uzay, esnek lokal bağlantılı uzay ve esnek bileşen kavramları ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [16]. 2019 yılında Oğuz, Gürsoy ve İçen on soft topological categories başlıklı yazısı ile esnek topolojik kategorinin özelliklerini inceleyerek bazı temel sonuçları elde ederek ayrıca aynı yıllarda actions of soft groups başlıklı yazıları ile de esnek topolojik gruplar üzerindeki bulgularına yer vermişlerdir [17-18].

Esnek küme teorisi Molodtsov tarafından ortaya atıldıktan sonra genel topolojideki mevcut kavramlar esnek topoloji açısından incelenmeye başlanmıştır. Bu tez, 20 yıllık bir geçmişe sahip esnek küme teorisi literatürüne başvurarak, esnek bağlantılı topolojik uzaylar ve lokal olarak esnek bağlantılı topolojik uzaylar üzerindeki bazı sonuçlara odaklanmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Esnek Kümeler ve Özellikleri

Bu kısımda esnek kümenin tanımı ve esnek kümelerin bazı cebirsel özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 2.1.1. *Bir U evrensel kümesine ait kuvvet kümesi $P(U)$, parametrelerin belirtildiği küme E ve $A \subseteq E$ mevcut olsun.*

$$F : A \longrightarrow P(U)$$

olacak şekilde

$$F_A = (F,A) = \{(e,\ F(e)) \mid e \in A,\ F(e) \in P(U)\}$$

şeklindeki sıralı çiftlerinin belirttiği kümelere esnek küme denir [1].

Örnek 2.1.1. *Bilgisayarların kümesi U ve parametrelerin kümesi olarak*

$$E = \{\textit{dizüstü, pahalı, çok pahalı, masaüstü, ucuz, tablet, oyun}\}$$

kümesini alalım. Bu durumda tanımlanacak esnek kümeler dizüstü bilgisayarlar, pahalı bilgisayarlar, masaüstü bilgisayarlar, ucuz bilgisayarlar, tablet bilgisayarlar ve oyun bilgisayarları şeklinde olacaktır. F_E esnek kümesi, bay Y nin alacağı bilgisayar için bilgisayarların niteliğini tarif eden bir kümedir. $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve parametreler kümesi $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $F_{e_1} = \{v_1, v_3\}$, $F_{e_2} = \{v_1, v_2\}$, $F_{e_3} = \{v_4\}$, $F_{e_4} = \{v_1, v_2, v_3\}$ alalım. F_A esnek kümesi, U kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Böylece F_{e_1} in anlamı e_1 parametresini sağlayan bilgisayarların kümesidir. Dolayısıyla F_A esnek kümesi,

$$F_A = (F,A) = \{F_{e_1}, F_{e_2}, F_{e_3}, F_{e_4}\} = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.1.2. *$s(U) = \{F_A \mid A \subseteq E\}$, U daki bütün esnek kümelerin kümesini belirtecek şekilde $F_A \in s(U)$ olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \varnothing$ olursa F_A ya esnek boş küme denir ve $F_A = \Phi$ ile ifade edilir. $F_A = \Phi$ olması U kümesinde $e \in A$ parametreleriyle ilişkili hiçbir elemanın bulunmaması anlamına gelmektedir [9].*

Tanım 2.1.3. *$F_A \in s(U)$ olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = U$ oluyorsa F_A esnek kümesi esnek tam küme olarak adlandırılır ve $\tilde{U}$ veya $\tilde{U}_A$ şeklinde gösterilir [9].*

Tanım 2.1.4. *F_A, $G_B \in s(U)$ ve $A \subseteq B$ olsun. Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa F_A ya G_B nin bir esnek alt kümesidir denir ve $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ ile gösterilir [9].*

Örnek 2.1.2. *$A = \{e_1, e_2\} \subseteq E$, $B = \left\{e_1, e_2, e_3\right\} \subseteq E$ olsun. $A \subseteq B$ olduğu açıktır.*

$U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ evrensel kümesi üzerinde F_A ve G_B esnek kümelerini

$$F(e_1) = \{v_2, v_3\},\ F(e_2) = \{v_2, v_4\}$$

$$G(e_1) = \{v_2, v_3\},\ G(e_2) = \{v_2, v_3, v_4\},\ G(e_3) = \{v_3, v_4\}$$

olacak şekilde tanımladığımızda $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ olduğu açıktır [9].

Tanım 2.1.5. *F_A ve G_B aynı U evrensel kümesi üzerinde tanımlı iki esnek kümesi için eğer $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ aynı zamanda da $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ oluyorsa F_A ve G_B esnek eşittir denir ve $F_A \tilde{=} G_B$ şeklinde gösterilir [9].*

Tanım 2.1.6. *F_A, $G_B \in s(U)$ ve $A \cup B = C$ olsun. Her $e \in C$ için,*

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad e \in A - B \\ G(e) & , \quad e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & , \quad e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen H_C esnek kümesine F_A ile G_B esnek kümelerinin esnek birleşimi denir ve $H_C = F_A \tilde{\cup} G_B$ şeklinde ifade edilir [9].

Örnek 2.1.3. *Bilgisayarların maliyetini ve niteliğini tanımlayan, aynı U evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme sırasıyla F_A ve G_B olsun.*

$U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{\text{pahalı, ucuz}\}$, $B = \{\text{dizüstü, ucuz}\}$ olduğunu kabul edelim.

$C = A \cup B = \{\text{pahalı, dizüstü, ucuz}\}$ dır. $F_A \tilde{\cup} G_B = H_C$ dersek

$$H_{pahalı} = \{v_1, v_2\},\ H_{dizüstü} = \{v_1, v_5\},\ H_{ucuz} = \{v_2, v_3, v_4\}$$

olup $H_C = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$ dir [9].

Tanım 2.1.7. *F_A, $G_B \in s(U)$ ve $C = A \cap B$ olsun. Her $e \in C$ için $H_e = F_e$ ve $H_e = G_e$ oluyorsa H_C ye F_A ve G_B esnek kümelerinin esnek kesişimi denir ve $H_C = F_A \tilde{\cap} G_B$ şeklinde gösterilir [9].*

Örnek 2.1.4. *Bilgisayarların maliyetini ve niteliğini gösteren, U evrensel kümesi üzerinde tanımlı esnek kümeler F_A ve G_B olsun.*

$U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{$pahalı, ucuz$\}$, $B = \{$tablet, ucuz$\}$ olduğunu kabul edelim.

$$F_{pahalı} = \{v_1, v_2\}\,,\ F_{ucuz} = \{v_2, v_3, v_4\} \text{ ve } G_{tablet} = \{v_1, v_5\}\,,\ G_{ucuz} = \{v_2, v_3, v_4\}$$

olsun. Dolayısıyla $C = A \cap B = \{$ucuz$\}$ ve $H = \{v_2, v_3, v_4\}$ olup F_A ve G_B esnek kümelerinin arakesiti $H_C = \{\{v_2, v_3, v_4\}\}$ dir [9].

Tanım 2.1.8. *F_E ve G_E esnek kümelerinin esnek farkı, her $e \in E$ için*

$$H(e) = F(e) \setminus G(e)$$

şeklinde tanımlanır ve $F_E \tilde{\setminus} G_E$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.1.9. *$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ bir parametre kümesi olsun. E nin $\rceil E$ ile gösterilen değil kümesi, $\rceil E = \{\rceil e_1, \rceil e_2, \rceil e_3, ..., \rceil e_n\}$ ile tanımlanır ve burada $\rceil e_i$ tüm i ler için e_i değildir anlamına gelmektedir [11].*

Önerme 2.1.1. *A ve B boş olmayan parametre kümeleri için,*

i) $\rceil(\rceil A) = A$;

ii) $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cup \rceil B$;

iii) $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cap \rceil B$ [11].

Tanım 2.1.10. *$F_A \in S(U)$ nun bağıl tümleyeni, bir $F^{|} : \rceil A \to P(U)$ dönüşümüdür öyle ki her $e \in \rceil A$ için*

$$F^{|}(e) = U \setminus F(\rceil e) = (F(\rceil e))^c$$

dir. Yani $F_A^{|} = F_{\rceil A}^{|}$ dir [9].

Örnek 2.1.5. *U tüm kahvelerin kümesi ve E parametre kümesi olsun.*

$E = \{$sütlü, sade, damla sakızlı, fındıklı$\}$ olacak şekilde alınırsa bu durumda esnek kümenin anlamı sütlü kahve, sade kahve, damla sakızlı kahve ve fındıklı kahve şeklinde olacaktır.

$U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ olacak şekilde beş farklı kahve alalım. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesini e_1 =sütlü, e_2 =sade, e_3 =damla sakızlı, e_4 =fındıklı şeklinde belirleyelim. Eğer

$$F(e_1) = \{v_1, v_2\}$$

$$F(e_2) = \{v_3\}$$

$$F(e_3) = \{v_3, v_4, v_5\}$$

$$F(e_4) = \{v_1, v_5\}$$

ise F_E esnek kümesi

$$F_E = \{(\text{sütlü kahve}, \{v_1, v_2\}\ ), (\text{sade kahve}, \{v_3\}),$$
$$(\text{damla sakızlı kahve}, \{v_3, v_4, v_5\}), (\text{fındıklı kahve}, \{v_1, v_5\})\}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca $A = \{e_1, e_4\} \subseteq E$ olarak seçilirse

$$F_A = \{(e_1,\ \{v_1, v_2\}), (e_4,\ \{v_1, v_5\})\}$$

esnek kümesi elde edilir. Bu durumda tümleyeni,

$$F_A^{\prime} = \{(e_1,\ \{v_3, v_4, v_5\}), (e_4,\ \{v_2, v_3, v_4\})\}$$

olacaktır.

Önerme 2.1.2. *F_E, $G_E \in s(U)$ için aşağıdaki durumlar geçerlidir [14]:*

i) $(F_E \tilde{\cup} G_E)^{\prime} = F_E^{\prime} \tilde{\cap} G_E^{\prime}$

ii) $(F_E \tilde{\cap} G_E)^{\prime} = F_E^{\prime} \tilde{\cup} G_E^{\prime}$

İspat: i) Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ ile $F_E \tilde{\cup} G_E = H_E$ olsun.

$$\begin{aligned} H^{\prime}(e) &= (F(e) \cup G(e))^c \\ &= (F(e))^c \cap (G(e))^c \\ &= F^{\prime}(e) \cap G^{\prime}(e) \end{aligned}$$

dir. Buradan $H_E^{\prime} = F_E^{\prime} \tilde{\cap} G_E^{\prime}$ gelir.

ii) Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ ile $F_E \tilde{\cap} G_E = H_E$ olsun.

$$\begin{aligned} H^{\prime}(e) &= (F(e) \cap G(e))^c \\ &= (F(e))^c \cup (G(e))^c \\ &= F^{\prime}(e) \cup G^{\prime}(e) \end{aligned}$$

dir. Böylece $H_E^{\prime} = F_E^{\prime} \tilde{\cup} G_E^{\prime}$ elde edilir.

Tanım 2.1.11. *$F_A, G_B \in S(U)$ verilsin. Bu esnek kümelerin kartezyen çarpımı $H_{A\times B} = F_A \times G_B$ aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$H : A \times B \to P(U \times U)$$
$$H(a,b) = F(a) \times G(b) \ \ ve \ \ (a,b) \in A \times B$$

olur. Yani $H(a,b) = \left\{ \left(u_i, u_j\right) \mid u_i \in F(a) \ ve \ u_j \in G(b) \right\}$ dir [19].

Örnek 2.1.6. *$F_A, G_B \in S(U)$ verilsin. Buradaki F_A ve G_B yi sırası ile müzik(parça) türlerini ve parçaların çalma sürelerini temsil eden iki esnek küme olarak düşünelim.*

$$U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$
$$A = \{\text{türkü, caz, pop}\}$$
$$B = \{\text{2 dk, 3 dk, 5 dk}\}$$

biçiminde olup bu parametreler üzerinden tanımlanan esnek kümeler,

$$F(\text{türkü}) = \{v_3, v_4, v_5\}, \ F(\text{caz}) = \{v_1\}, \ F(\text{pop}) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$$
$$G(\text{2 dk}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \ G(\text{3 dk}) = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}, \ G(\text{5 dk}) = \varnothing$$

olsun. O zaman Tanım 2.1.11 gereğince $H_{A\times B} = F_A \times G_B$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(\text{türkü, 2 dk}) = \{v_3, v_4\}$$
$$H(\text{türkü, 3 dk}) = \{v_3, v_5\}$$
$$H(\text{türkü, 5 dk}) = \varnothing$$
$$H(\text{caz, 2 dk}) = \{v_1\}$$
$$H(\text{caz, 3 dk}) = \{v_1\}$$
$$H(\text{caz, 5 dk}) = \varnothing$$
$$H(\text{pop, 2 dk}) = \{v_2, v_4\}$$
$$H(\text{pop, 3 dk}) = \{v_5, v_6\}$$
$$H(\text{pop, 5 dk}) = \varnothing$$

olup $H_{A\times B} = F_A \times G_B = \{\varnothing, \{v_1\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$.

Bu tanım ve örneklem ile aynı U evrenseli üzerindeki iki esnek kümenin kartezyen çarpımını gösterdik, şimdi de farklı iki X ve Y evrenseli üzerinde alınan iki esnek kümenin kartezyen çarpımını tanımlayalım.

Tanım 2.1.12. *$F_{E_1} \in S(X)$ ve $G_{E_2} \in S(Y)$ esnek kümeler olsun. $(F \times G)_{E_1 \times E_2}$ ile gösterilen F_{E_1} ve G_{E_2} esnek kümelerinin kartezyen çarpımı,*

$$(F \times G)(e_1, e_2) = F(e_1) \times G(e_2)$$

şeklinde gösterilir [14].

3. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu kısımda esnek topojik uzayların genel yapısı ve özelliklerine değinilecektir.

Tanım 3.0.1. *E : Parametre kümesi, X : Evrensel küme olmak üzere,*

$$F : E \to P(X)$$

$$e \longmapsto F(e)$$

olacak şekilde $F_E \in S(X)$ ve $x \in X$ verilsin. Bu takdirde her $e \in E$ için $x \in F(e)$ ise x, F_E ye aittir denir ve $x\tilde{\in}F_E$ yazılır. $x \in X$ olacak şekilde en az bir $e \in E$ için $x \notin F(e)$ oluyorsa x, F_E ye ait değildir denir ve $x\tilde{\notin}F_E$ yazılır [11].

Tanım 3.0.2. *$x \in X$ olacak şekilde (x,E) sıralı ikilisi X te tanımlı her $e \in E$ için $x(e) = \{x\}$ ile gösterilen kümeyi tanımlar ve tek(bir) nokta esnek kümesi şeklinde ifade edilir [9].*

Tanım 3.0.3. *$F_E \in S(X)$ ve $(\varnothing \neq)Y \subset X$ verilsin. Burada F_E esnek kümesinin Y üzerinden ${}^{Y}F_E$ ile gösterilen alt esnek kümesi, $e \in E$ için ${}^{Y}F(e) = Y \cap F(e)$ olacak şekilde ifade edilir [11].*

Tanım 3.0.4. *τ, $X(\neq \varnothing)$ üzerinde tanımlı esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. Eğer aşağıda belirtilen durumlar gerçekleşirse τ ya X te bir esnek topoloji ve (X,τ,E) ye de esnek topolojik uzay denir [11].*

i) $\Phi, \tilde{X} \in \tau$,

ii) Her $i \in I$ için $(F_i)_E \in \tau$ ise $\tilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(F_i)_E \in \tau$,

iii) $(F_1)_E, (F_2)_E, \cdots, (F_n)_E \in \tau$ ise $\tilde{\bigcap\limits_{i=1,\cdots,n}}(F_i)_E \in \tau$.

Örnek 3.0.1. *$X = \{v_1, v_2, v_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Aşağıdaki esnek kümeleri ele alalım.*

$$F_1(e_1) = \{v_2\}, F_1(e_2) = \{v_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{v_2, v_3\}, F_2(e_2) = \{v_1, v_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{v_1, v_2\}, F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \{v_1, v_2\}, F_4(e_2) = \{v_1, v_3\}$$

Bu durumda $\tau = \{\Phi, X, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E\}$, X üzerinde bir esnek topolojidir [11].

Tanım 3.0.5. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) deki τ da bulunan her elemana esnek açık küme denir [11].*

Tanım 3.0.6. *(X,τ,E) de $F_E^{|} \in \tau$ oluyorsa F_E ye bir esnek kapalı kümedir denir [11].*

Önerme 3.0.1. *(X,τ,E) de $\tau^{|}$ ailesi esnek kapalı kümelerin bir koleksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır [11].*

i) $\Phi, \tilde{X} \in \tau^{|}$,

ii) $(F_1)_E, (F_2)_E, \cdots, (F_n)_E \in \tau$ ise $\widetilde{\bigcap\limits_{i=1,\cdots,n}} (F_i)_E \in \tau^{|}$,

iii) Her $i \in I$ için $(F_i)_E \in \tau$ ise $\widetilde{\bigcup\limits_{i\in I}} (F_i)_E \in \tau^{|}$.

İspat: i) Tanım 3.0.5 gereğince $\Phi, \tilde{X} \in \tau$ olduğundan dolayı esnek açıktır. Buradan $\Phi^{|} = \tilde{X}$ ve $\tilde{X}^{|} = \Phi$ olacağından $\Phi, \tilde{X} \in \tau^{|}$ olup esnek kapalıdır.

ii) $\{(F_i)_E\}$ ailesi $\tau^{|}$ da esnek kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $F_E = \widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}} (F_i)_E$ nin esnek kapalı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. De Morgan kuralını uygulayacak olursak Tanım 3.0.4 den $F_E^{|} = \left(\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}} (F_i)_E\right)^{|}$ esnek açıktır. Dolayısıyla F_E esnek kapalı olacaktır.

iii) $(F_1)_E, (F_2)_E, \cdots, (F_n)_E$ esnek kapalı kümeleri olmak üzere,

$F_E = \widetilde{\bigcup\limits_{i\in 1,2,\ldots,n}} (F_i)_E = (F_1)_E \tilde{\cup} (F_2)_E \tilde{\cup} \cdots \tilde{\cup} (F_n)_E$ esnek birleşiminin esnek kapalı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. De Morgan kuralı gereğince $F_E^{|}$ nin esnek açık olduğunu göstereceğiz.

$$F_E^{|} = \left(\widetilde{\bigcup\limits_{i\in 1,2,\ldots,n}} (F_i)_E\right)^{|} = \widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}} (F_i)_E^{|}$$

olur. Buradan sonlu sayıda esnek açık kümenin esnek kesişimi esnek açık olduğundan F_E de esnek kapalı olacaktır.

Örnek 3.0.2. *E : Parametre kümesi, X : Evrensel küme için; X te tanımlanmış bütün esnek kümelerin ailesine(τ ya) X üzerinde esnek diskret(ayrık) topoloji, (X,τ,E) de esnek diskret(ayrık) topolojik uzaydır [11].*

Örnek 3.0.3. *E : Parametre kümesi, X : Evrensel küme için; $\tau = \{\Phi, \tilde{X}\}$ ya esnek indiskret(ayrık olmayan) topoloji, (X,τ,E) de esnek indiskret(ayrık olmayan) topolojik uzaydır [11].*

Önerme 3.0.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) de her $e \in E$ için,*

$$\tau_e = \{F(e) \mid F_E \in \tau\}$$

X te tanımlanan bir topolojidir [11].

İspat: Her $e \in E$ için $\tau_e = \{F(e) \subseteq X \mid F_E \in \tau\}$ olmak üzere;

i) Φ, $\tilde{X} \in \tau$ olduğundan $\varnothing$, $X \in \tau_e$ dır.

ii) $\{F_i(e) \mid i \in I\}$, τ_e üzerindeki kümelerin bir topluluğu olsun. Her $i \in I$ için $(F_i)_E \in \tau$ olup $\widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i)_E \in \tau$ olur, buradan da $\bigcup_{i\in I} F_i(e) \in \tau_e$ elde edilir.

iii) $F_E, G_E \in \tau$ için $F(e), G(e) \in \tau_e$ olsun.

$F_E \tilde{\cap} G_E \in \tau$ olup $F(e) \cap G(e) \in \tau_e$ dır.

Dolayısıyla her $e \in E$ için τ_e, X kümesi üzerinde bir topolojidir.

Örnek 3.0.4. *$X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E\right\}$, X üzerinde tanımlı esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. Buradaki $(F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E$ esnekleri aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar:*

$$F_1(e_1) = \{v_2\},\ F_1(e_2) = \{v_1\},$$
$$F_2(e_1) = \{v_2, v_3\},\ F_2(e_2) = \{v_1, v_2\},$$
$$F_3(e_1) = \{v_1, v_2\},\ F_3(e_2) = X,$$
$$F_4(e_1) = \{v_1, v_2\},\ F_4(e_2) = \{v_1, v_3\}.$$

O halde τ, X te bir esnek topolojidir ve dolayısıyla (X, τ, E), X te bir esnek topolojik uzaydır. Açıkça görülür ki,

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\varnothing, X, \{v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$$

X te tanımlı olan birer topolojidir [11].

Örnek 3.0.5. *$X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E\right\}$, X üzerinde tanımlı bir esnek topolojik uzay olsun. Buradaki $(F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E$ esnekleri aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar:*

$$F_1(e_1) = \{v_2\},\ F_1(e_2) = \{v_1\},$$
$$F_2(e_1) = \{v_2, v_3\},\ F_2(e_2) = \{v_1, v_2\},$$
$$F_3(e_1) = \{v_1, v_2\},\ F_3(e_2) = \{v_1, v_2\},$$
$$F_4(e_1) = \{v_2\},\ F_4(e_2) = \{v_1, v_3\}.$$

O halde τ, X te bir esnek topoloji değildir, $G_E = (F_2)_E \cup (F_3)_E$, dersek açıkça $G(e_1) = X$ ve $G(e_2) = \{v_1, v_2\}$ olup $G_E \notin \tau$ dir.

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\varnothing, X, \{v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$$

X te birer topolojidir [11].

Bu örnek, her bir parametreye karşılık gelen koleksiyonların X te birer topoloji olmalarına rağmen esnek kümelerin herhangi bir koleksiyonunun X te bir esnek topoloji olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Önerme 3.0.3. *X te tanımlı $(X, \tau_1, E), (X, \tau_2, E)$ birer esnek topolojik uzayları mevcut olsun. O halde $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E)$ de X te bir esnek topolojik uzaydır [11].*

İspat: i) $\Phi, \tilde{X} \in \tau_1 \cap \tau_2$ ifadesi açıktır.

ii) $\tau_1 \cap \tau_2$ ait olan bütün esnek kümelerin topluluğu $\{(F_i)_E \mid i \in I\}$ olduğunu varsayalım. Her $i \in I$ için $(F_i)_E \in \tau_1$ ve $(F_i)_E \in \tau_2$ olup τ_1 ve τ_2 de birer esnek topoloji olduklarından dolayı $\tilde{\bigcup}_{i\in I} (F_i)_E \in \tau_1$ ve $\tilde{\bigcup}_{i\in I} (F_i)_E \in \tau_2$ dir. Buradan $\tilde{\bigcup}_{i\in I} (F_i)_E \in \tau_1 \cap \tau_2$ dir.

iii) F_E, $G_E \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. O halde F_E, $G_E \in \tau_1$ ve F_E, $G_E \in \tau_2$ dir. Buradan $F_E \tilde{\cap} G_E \in \tau_1$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E \in \tau_2$ olup $F_E \tilde{\cap} G_E \in \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$ elde edilir.

Dolayısıyla $\tau_1 \cap \tau_2$, X te bir esnek topoloji olup öte yandan $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E)$ esnek topolojik uzaydır.

Uyarı 3.0.1. *X te tanımlı $(X, \tau_1, E), (X, \tau_2, E)$ birer esnek topolojik uzayları mevcut olsun. Bu takdirde $(X, \tau_1 \cup \tau_2, E)$, X üzerinde bir esnek topolojik uzay olmayabilir [11].*

Örnek 3.0.6. *$X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere;*

$$\tau_1 = \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E\right\}$$
$$\tau_2 = \left\{\Phi, \tilde{X}, (G_1)_E, (G_2)_E, (G_3)_E, (G_4)_E\right\}$$

şeklinde iki tane τ_1 ve τ_2 esnek topolojisi verilsin. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
F_1(e_1) &= \{v_2\}, \ F_1(e_2) = \{v_1\} \\
F_2(e_1) &= \{v_2, v_3\}, \ F_2(e_2) = \{v_1, v_2\} \\
F_3(e_1) &= \{v_1, v_2\}, \ F_3(e_2) = X \\
F_4(e_1) &= \{v_1, v_2\}, \ F_4(e_2) = \{v_1, v_3\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G_1(e_1) &= \{v_2\}, \ G_1(e_2) = \{v_1\} \\
G_2(e_1) &= \{v_2, v_3\}, \ G_2(e_2) = \{v_1, v_2\} \\
G_3(e_1) &= \{v_1, v_2\}, \ G_3(e_2) = \{v_1, v_2\} \\
G_4(e_1) &= \{v_2\}, \ G_4(e_2) = \{v_1, v_3\}
\end{aligned}
$$

olarak belirlensin bu durumda

$$
\begin{aligned}
\tau &= \tau_1 \cup \tau_2 \\
&= \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, (F_4)_E, (G_3)_E, (G_4)_E\right\}
\end{aligned}
$$

olup $(F_2)_E \cup (G_3)_E = H_E$ esnek kümesi için,

$$
\begin{aligned}
H(e_1) &= G_3(e_1) \cup F_2(e_1) \\
&= \{v_1, v_2\} \cup \{v_2, v_3\} \\
&= \{v_1, v_2, v_3\} \\
&= X
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
H(e_2) &= G_3(e_2) \cup F_2(e_2) \\
&= \{v_1, v_2\} \cup \{v_1, v_2\} \\
&= \{v_1, v_2\}
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $H_E \tilde{\notin} \tau$ olup τ, X de bir esnek topoloji belirtmez [11].

Tanım 3.0.7. *Esnek bir topolojik uzay olan (X, τ, E) ve $B \subseteq \tau$ verilmiş olsun. Eğer τ ya ait olan her bir eleman B ye ait olan elemanların esnek birleşimi biçiminde ifade ediliyorsa B ye τ nun bir esnek bazı ve B ye ait olan her bir elemana da esnek baz elemanı denir [14].*

Önerme 3.0.4. *$(F_1)_{E_1}$, $(G_1)_{E_1} \in S(X)$ ve $(F_2)_{E_2}$, $(G_2)_{E_2} \in S(Y)$ olsun.*

Bu takdirde,

i) $\Phi_{E_1} \times (F_2)_{E_2} = (F_1)_{E_1} \times \Phi_{E_2} = \Phi_{E_1 \times E_2}$

ii) $\left((F_1)_{E_1} \times (F_2)_{E_2}\right) \cap \left((G_1)_{E_1} \times (G_2)_{E_2}\right) = \left((F_1)_{E_1} \cap (G_1)_{E_1}\right) \times \left((F_2)_{E_2} \cap (G_2)_{E_2}\right)$ [14].

İspat: i) Her $e_1 \in E_1$ ve $e_2 \in E_2$ için

$$(F_1 \times \phi_2)(e_1, e_2) = F_1(e_1) \times \phi_2(e_2) = F_1(e_1) \times \varnothing = \varnothing$$

ve

$$(\phi_1 \times F_2)(e_1, e_2) = \phi_1(e_1) \times F_2(e_2) = \varnothing \times F_2(e_2) = \varnothing$$

olduğundan $\Phi_{E_1} \tilde{\times} (F_2)_{E_2} = F_1(e_1) \tilde{\times} \Phi_{E_2} = \Phi_{E_1 \times E_2}$ elde edilir.

ii) $(F_1 \times F_2)_{E_1 \times E_2} \cap (G_1 \times G_2)_{E_1 \times E_2} = H_{E_1 \times E_2}$, $(F_1)_{E_1} \cap (G_1)_{E_1} = I_{E_1}$ ve $(F_2)_{E_2} \cap (G_2)_{E_2} = J_{E_2}$ olsun. Bu takdirde, her $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ için,

$$\begin{aligned} H(e_1, e_2) &= (F_1 \times F_2)(e_1, e_2) \cap (G_1 \times G_2)(e_1, e_2) \\ &= (F_1(e_1) \times (F_2)(e_2)) \cap (G_1(e_1) \times (G_2)(e_2)) \\ &= (F_1(e_1) \cap G_1(e_1)) \times ((F_2)(e_2) \cap (G_2)(e_2)) \\ &= I(e_1) \times J(e_2) = (I \times J)(e_1, e_2) \end{aligned}$$

olup ve $H_{E_1 \times E_2} = I_{E_1} \times J_{E_2}$ elde edilir.

Önerme 3.0.5. *(X, τ_1, E_1) ve (Y, τ_2, E_2) esnek topolojik uzaylar,*

$$B = \left\{ F_{E_1} \times G_{E_2} \mid (F_1)_{E_1} \in \tau_1,\ (F_2)_{E_2} \in \tau_2 \right\}$$

ve τ, B nin elemanlarının keyfi sayıdaki birleşimlerinin topluluğu olsun. O zaman τ, $X \times Y$ üzerinde bir esnek topolojidir [14].

İspat: $\Phi_{E_1} = (\phi_1)_{E_1} \in \tau_1$, $\Phi_{E_2} = (\phi_2)_{E_2} \in \tau_2$ ve Önerme 3.0.4 den $\Phi_{E_1} \tilde{\times} (F_2)_{E_2} = \Phi_{E_1 \times E_2} \in \tau$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\tilde{X} = X_{E_1} \in \tau_1$ ve $\tilde{Y} = Y_{E_2} \in \tau_2$ dir. O halde $\tilde{X} \times \tilde{Y} = (X \times Y)_{E_1 \times E_2}$ olacak şekilde herbir $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$

$$(X \times Y)(e_1, e_2) = X(e_1) \times Y(e_2) = X \times Y$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\tilde{X} \times \tilde{Y} = \widetilde{X \times Y} \in \tau$ olur. B ye ait $\left((F_\alpha)_{E_1} \times (G_\beta)_{E_2}\right)$, $\left((F_\beta)_{E_1} \times (G_\alpha)_{E_2}\right)$, $\alpha \in I$, ve $\beta \in J$ vardır, öyleki

$$
\begin{aligned}
F_{E_1 \times E_2} &= \bigcup_{\alpha \in I} (F_\alpha \times G_\alpha)_{E_1 \times E_2}, \\
G_{E_1 \times E_2} &= \bigcup_{\beta \in J} (F_\beta \times G_\beta)_{E_1 \times E_2}.
\end{aligned}
$$

$H_{E_1 \times E_2} = G_{E_1 \times E_2} \cap F_{E_1 \times E_2}$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
H(e_1, e_2) &= G_1(e_1, e_2) \cap F_1(e_1, e_2) \\
&= \left(\bigcup_{\beta \in J} (F_\beta(e_1) \times G_\beta(e_2)) \right) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} (F_\alpha(e_1) \times G_\alpha(e_2)) \right) \\
&= \bigcup_{\beta \in J} \left[\bigcup_{\alpha \in I} (F_\beta(e_1) \times G_\beta(e_2)) \cap (F_\alpha(e_1) \times G_\alpha(e_2)) \right] \\
&= \bigcup_{\beta \in J} \bigcup_{\alpha \in I} ((F_\beta(e_1) \times G_\beta(e_2)) \cap (F_\alpha(e_1) \times G_\alpha(e_2))) \\
&= \bigcup_{\beta \in J} \bigcup_{\alpha \in I} ((G_\alpha(e_2) \times G_\beta(e_2)) \cap (F_\alpha(e_1) \times F_\beta(e_1))) \\
&= \bigcup_{\alpha \in I,\ \beta \in J} ((G_\alpha \cap G_\beta)(e_2) \times (F_\alpha \cap F_\beta)(e_1)) \\
&= \bigcup_{\alpha \in I,\ \beta \in J} ((G_\alpha \cap G_\beta) \times (F_\alpha \cap F_\beta))(e_1, e_2).
\end{aligned}
$$

Bu da bize gösterir ki

$$
\begin{aligned}
H_{E_1 \times E_2} &= \bigcup_{\alpha \in I,\ \beta \in J} ((F_\alpha \cap F_\beta) \times (G_\alpha \cap G_\beta))_{E_1 \times E_2} \\
&= \bigcup_{\alpha \in I,\ \beta \in J} \left((F_\alpha \cap F_\beta)_{E_1} \times (G_\alpha \cap G_\beta)_{E_2} \right).
\end{aligned}
$$

Buradan da $H_{E_1 \times E_2} \in \tau$ olduğu sonucuna varırız.

Yukarıdaki önermede inşaa edilen τ esnek topolojisi ile birlikte $(X \times Y, \tau, E_1 \times E_2)$ ye $X \times Y$ üzerindeki esnek çarpım topolojisi deriz.

Önerme 3.0.6. *F_{E_1} ve G_{E_2} esnek kümeleri sırasıyla (X, τ_1, E_1) ve (Y, τ_2, E_2) esnek topolojik uzaylarına ait esnek kümeleri olsun. Buradan,*

$$
(F_{E_1} \times G_{E_2})' = \left(F'_{E_1} \times \tilde{Y}\right) \cup \left(\tilde{X} \times G'_{E_2}\right)
$$

eşitliği sağlanmaktadır [14].

İspat: $((F\times G)_{E_1\times E_2})^{\shortmid}=(F\times G)^{\shortmid}_{E_1\times E_2}$ olsun. Buradan,

$$(F\times G)^{\shortmid}(e_1,e_2)=(X\times Y)\setminus(F(e_1)\times G(e_2))=((X\setminus F(e_1))\times Y)\cup(X\times(Y\setminus G(e_2)))$$

diğer taraftan

$$\left(F^{\shortmid}_{E_1}\times\tilde{Y}\right)\cup\left(\tilde{X}\times G^{\shortmid}_{E_2}\right)=\left(F^{\shortmid}\times Y\right)_{E_1\times E_2}\cup\left(X\times G^{\shortmid}\right)_{E_1\times E_2}$$

olacaktır. $H_{E_1\times E_2}$ esnek kümesini

$$\begin{aligned}H(e_1,e_2)&=\left(F^{\shortmid}\times Y\right)(e_1,e_2)\cup\left(X\times G^{\shortmid}\right)(e_1,e_2)\\&=\left(F^{\shortmid}(e_1)\times Y\right)\cup\left(X\times G^{\shortmid}(e_2)\right)\\&=((X\setminus F(e_1))\times Y)\cup(X\times(Y\setminus G(e_2)))\end{aligned}$$

olacağından önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.0.1. *F_{E_1} ve G_{E_2} esnek kümeleri sırasıyla (X,τ_1,E_1) ve (Y,τ_2,E_2) esnek topolojik uzaylarına ait iki esnek küme olsun. O halde $F_{E_1}\times G_{E_2}$, $(X\times Y,\tau,E_1\times E_2)$ esnek çarpım topolojik uzayında esnek kapalı bir kümedir [14].*

İspat: $F^{\shortmid}_{E_1}$ ve $G^{\shortmid}_{E_2}$ esnek kümeleri sırasıyla $\tilde{X}$, (X,τ_1,E_1) ve $\tilde{Y}$, (Y,τ_2,E_2) de esnek açık kümelerdir. Buradan Önerme 3.0.6 gereğince $F^{\shortmid}_{E_1}\times G^{\shortmid}_{E_2}$, $(X\times Y,\tau,E_1\times E_2)$ esnek topolojik uzayı üzerinde esnek açıktır. Dolayısıyla buradan ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.0.8. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve F_E de X te tanımlı bir esnek kümeyi temsil etmek üzere, F_E yi kapsayan bütün kümelerin(esnek kapalı) arakesitine F_E nin esnek kapanışı denir ve $\overline{F}_E$ ile ifade edilir. Yani $\overline{F}_E$, X üzerindeki F_E yi kapsayan en dar esnek kapalı kümedir [14].*

Tanım 3.0.9. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve F_E de X üzerinde tanımlı bir esnek kümesi verilsin. Her $e\in E$ için $\overline{F(e)}$, $F(e)\subseteq X$ in τ_e daki kapanışı olacak şekilde $\overline{F}(e)=\overline{F(e)}$ ile ifade edilen $\overline{F}_E$ ye F_E nin kapanışı(bağıl) denir [14].*

Önerme 3.0.7. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve F_E de X te tanımlı olan esnek bir küme olsun. Bu takdirde $\overline{F}_E\tilde{\subseteq}\overline{(F_E)}$ dir [14].*

İspat: Her $e\in E$ için $\overline{F(e)}$,$F(e)$ yi kapsayacak biçimde τ_e deki en dar kapalı kümedir. $\overline{(F_E)}=H_E$ dersek $H(e)$ kümesi de $F(e)$ yı kapsayan τ_e da bir kapalıdır. Bu takdirde $\overline{F}(e)=\overline{F(e)}\subset H(e)$ yı gerektirir. Dolayısıyla $\overline{F}_E\tilde{\subseteq}\overline{(F_E)}$ olur.

Sonuç 3.0.2. *$\overline{F}_E = \overline{(F_E)}$ eşitliğinin sağlanması için ancak ve ancak $\left(\overline{F}_E\right)^{'} \in \tau$ olmasıdır [14].*

İspat: Varsayalım ki $\overline{F}_E = \overline{(F_E)}$ olsun. Buradan diyebiliriz ki $\overline{F}_E$ esnek kapalı bir kümedir dolayısıyla bu da $\left(\overline{F}_E\right)^{'} \in \tau$ olmasını gerektirir. Aksine $\left(\overline{F}_E\right)^{'} \in \tau$ olsun. $\overline{F}_E$, F_E yi kapsayan bir esnek kapalı kümedir. Önerme 3.0.7 gereğince $\overline{F}_E \tilde{\subseteq} \overline{(F_E)}$ dir. F_E yi içeren herhangi bir esnek kapalı küme $\overline{(F_E)}$ da içerir ve $\overline{(F_E)} \tilde{\subseteq} \overline{F}_E$ dir. Buradan $\overline{F}_E = \overline{(F_E)}$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

Örnek 3.0.7. *$X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, ..., (F_7)_E\right\}$, X te tanımlı esnek topoloji ve buradaki*

$$(F_1)_E, (F_2)_E, (F_3)_E, \; ... \;, \; (F_7)_E$$

ile ifade edilen esnekleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$F_1(e_1) = \{v_1, v_2\}, \; F_1(e_2) = \{v_1, v_2\},$$
$$F_2(e_1) = \{v_2\}, \; F_2(e_2) = \{v_1, v_3\},$$
$$F_3(e_1) = \{v_2, v_3\}, \; F_3(e_2) = \{v_1\},$$
$$F_4(e_1) = \{v_2\}, \; F_4(e_2) = \{v_1\},$$
$$F_5(e_1) = \{v_1, v_2\}, \; F_5(e_2) = X,$$
$$F_6(e_1) = X, \; F_6(e_2) = \{v_1, v_2\},$$
$$F_7(e_1) = \{v_2, v_3\}, \; F_7(e_2) = \{v_1, v_3\}.$$

F_E ve G_E esnek kümeleri de şu şekilde tanımlansın:

$$F(e_1) = \{v_1, v_3\}, \; F(e_2) = \varnothing,$$
$$G(e_1) = \{v_2, v_3\}, \; G(e_2) = \{v_1, v_2\}.$$

O halde $F_E \cap G_E = (F \cap G)_E$ şeklinde tanımlanır,

$$(F \cap G)(e_1) = \{v_3\}, \; (F \cap G)(e_2) = \varnothing.$$

Şimdi,

$$\overline{(F_E)} = \tilde{X} \cap (F_2)^{'}_E \cap (F_4)^{'}_E = (F_2)^{'}_E,$$

ve

$$\overline{(G_E)} = \tilde{X}.$$

Öyleyse

$$\overline{(F_E)} \cap \overline{(G_E)} = \overline{(F_E)}.$$

Ayrıca

$$\overline{(F_E \cap G_E)} = \bigcap \left\{ \tilde{X}, (F_1)^{|}_E, (F_2)^{|}_E, (F_3)^{|}_E, (F_4)^{|}_E, (F_5)^{|}_E \right\}$$
$$= (F_5)^{|}_E.$$

Yani

$$\overline{(F_E \cap G_E)} \tilde{\subseteq} \overline{(G_E)} \cap \overline{(F_E)}$$

ancak

$$\overline{(F_E \cap G_E)} \neq \overline{(G_E)} \cap \overline{(F_E)}.$$

Buradan da şunu görürüz

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}.$$

Burada $\left(\overline{F}_E\right)$ *şu şekilde tanımlıdır:*

$$\overline{F}(e_1) = \{v_1, v_3\}, \ \overline{F}(e_2) = \varnothing.$$

Dolayısıyla şunu söyleyebiliriz ki $\overline{(F_E)} \tilde{\subseteq} \overline{F}_E$ *dir ancak* $\overline{(F_E)} \neq \overline{F}_E$ *[11].*

Tanım 3.0.10. (X, τ, E), *X te esnek bir topolojik uzay olsun.* F_E *esnek kümesinin içerisinde yer alan tüm esnek açık kümelerin birleşimi olarak yazılan en büyük esnek açık kümeye* F_E *nin esnek içi denir ve* F_E° *ile gösterilir [20].*

Tanım 3.0.11. (X, τ, E), *X te esnek bir topolojik uzay olsun.* G_E, *X te bir esnek küme ve* $x \in X$ *verilsin. Eğer* $x \tilde{\in} F_E \tilde{\subseteq} G_E$ *yi gerçekleyen bir esnek açık* F_E *esnek kümesi mevcut ise x e* G_E *esnek kümesinin bir esnek iç noktası denir [11].*

Tanım 3.0.12. (X, τ, E) *de tanımlı olan bir* $F_E \in S(X)$ *verilsin.* F_E *nin esnek tümleyeninin esnek iç noktasına* F_E *nin esnek dış noktası denir.* F_E *nin bütün esnek dış noktalarının oluşturduğu esnek kümeye* F_E *nin esnek dışı denir ve* $\left(F_E^{|}\right)^{\circ}$ *şeklinde gösterilir [20].*

Tanım 3.0.13. (X, τ, E) *de tanımlı olan* $x \in X$ *ve* $G_E \in S(X)$ *verilsin.* F_E *nin ne içine ne de dışına ait olmayan noktaların oluşturduğu esnek kümeye* F_E *nin esnek sınırı denir ve*

$$F_E^s = \left\{ x \in X \mid x \tilde{\notin} F_E^{\circ} \text{ ve } x \tilde{\notin} \left(F_E^{|}\right)^{\circ} \right\}$$

ile gösterilir [14].

Tanım 3.0.14. *(X,τ,E) de tanımlı olan $x\in X$ ve $G_E\in S(X)$ verilsin. $x\tilde{\in}F_E\tilde{\subseteq}G_E$ olacak şekilde bir F_E var ise G_E ye x in bir esnek komşuluğu denir [11].*

Tanım 3.0.15. *$\tilde{x}$, U evreninde tanımlı bir esnek nokta elemanı olsun. Eğer esnek açık bir F_E kümesi mevcutsa $\tilde{x}$ in komşuluğu öyleki $\tilde{x}\tilde{\in}F_E^{\shortmid}\tilde{\subset}F_E$ dir. $\tilde{x}$ in bütün esnek komşuluklarına, esnek komşuluk tabanı denir [21].*

Tanım 3.0.16. *(X,τ,E) de $(\varnothing\neq)Y\subset X$ olacak şekilde mevcut olan bir Y alt kümesi olsun. Bu takdirde*

$$\tau_Y=\left\{{}^{Y}F_E=\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E \mid F_E\in\tau\right\},$$

Y de tanımlanmış esnek bir alt uzay topolojisi ve (Y,τ_Y,E) ye de (X,τ,E) nin esnek alt topolojik uzayıdır denir [22].

Önerme 3.0.8. *(X,τ,E) nin esnek bir alt uzayı (Y,τ_Y,E) ise ancak ve ancak her $e\in E$ için (Y,τ_{eY}) de (X,τ_e) nın altında tanımlanan alt topolojik uzayıdır [11].*

İspat: Önerme gereğince (Y,τ_Y,E) esnek uzay belirtmesinden dolayı her $e\in E$ için (Y,τ_{eY}) de topolojik uzay olmaktadır. Keyfi olacak şekilde bir $e\in E$ için

$$\begin{aligned}\tau_{eY}&=\left\{{}^{Y}F(e)\mid F_E\in\tau\right\}\\&=\{Y\cap F(e)\mid F_E\in\tau\}\\&=\{Y\cap F(e)\mid F(e)\in\tau_e\}.\end{aligned}$$

Buradan da (Y,τ_{eY}), (X,τ_e) nın bilinen anlamda bir topolojik alt uzayıdır.

4. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

Bu kısımda esnek topolojik uzaylardaki esnek bağlantılılık ve genel özelliklerine değinilecektir.

Tanım 4.0.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) üzerinde eğer*

$$F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$$

eşitliği sağlanıyorsa F_A ve G_B esnek kümelerine X üzerinde esnek ayrık kümelerdir denir [16].

Örnek 4.0.1. $X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ *ve* $\tau = \left\{\Phi, \tilde{X}, F_E, G_E\right\}$ *esnek bir topolojik uzayı olmak üzere,*

$$F(e_1) = \{v_1\},\ F(e_2) = \{v_2, v_3\}$$

ve

$$G(e_1) = \{v_2, v_3\},\ G(e_2) = \{v_1\}$$

olacak şekilde belirlenen F_E ve G_E esnek kümeleri X de iki esnek ayrıktır [16].

Tanım 4.0.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) de esnek boştan farklı olan F_E, G_E esnek kümeleri için eğer,*

$$\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E = \Phi \text{ ve } F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)} = \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa F_E ve G_E esnek kümelerine esnek bağlantılı olmayan(ayrılmış) iki esnek küme denir [16].

Uyarı 4.0.1. *Bir esnek topolojik uzayında herhangi iki esnek ayrılmış küme aynı zamanda esnek ayrıktır fakat iki esnek ayrık küme esnek ayrılmış olmak zorunda değildir. Bununla birlikte aynı esnek uzayda tanımlı olan herhangi iki esnek kapalı(açık) küme esnek ayrılmıştır gerek ve yeter şart esnek ayrık olmasıdır [16].*

Örnek 4.0.2. $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *ve* $\tau = \left\{\Phi, \tilde{X}, (F_1)_E, (F_2)_E\right\}$ *topolojik uzay olmak üzere,*

$$F_1(e_1) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\} \text{ ve } F_2(e_1) = \{v_1, v_3\}$$

şeklinde belirlenen $(F_1)_E$ ve $(F_2)_E$ esnek kümeleri iki ayrık esnek kümedir ancak esnek olarak ayrılmamış kümelerdir [16].

Tanım 4.0.3. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *de eğer esnek birleşimleri* $\tilde{X}$ *yı verecek şekilde esnek boştan farklı esnek ayrık, esnek açık ve esnek bağlantılı olmayan* F_E *ve* G_E *bulunmuyorsa* (X,τ,E) *ye esnek bağlantılı topolojik uzaydır denir. Bu durumda* F_E *ve* G_E *esnek kümelerine de esnek bağlantılı kümelerdir, aksi durumlarda ise esnek bağlantısızdır denir [16].*

Örnek 4.0.3. *Evlerin kümesi* $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ *ve* $E = \{e_1 = pahalı,\ e_2 = onarılmıs\}$ *parametrelerin kümesini belirtmek üzere,*

$$F(e_1) = \Phi,\ F(e_2) = \Phi \text{ ve } G(e_1) = \tilde{X} \text{ ve } G(e_2) = \tilde{X}$$

olacak şekilde alınan F_E *ve* G_E *esnek kümeleri esnek bağlantılıdır. Buradan da esnek tam(tekil) küme ve esnek boş kümeleri esnek bağlantılıdır [16].*

Tanım 4.0.4. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *de üzerinde seçilen herhangi* $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ *esnek noktaları için,* $\tilde{x}\tilde{\in}F_E \in \tau$ *ve* $\tilde{y}\tilde{\in}G_E \in \tau$ *olacak biçimde* F_E *ve* G_E *esnek bağlantısızlığı mevcutsa,* (X,τ,E) *esnek topolojik uzayına tamamen esnek bağlantısızdır denir [23].*

Sonuç 4.0.1. (X,τ,E) *nin tamamen esnek bağlantısız olması için ancak ve ancak boştan farklı, esnek bağlantılı kümelerin bir elemanlı esnek kümelerden oluşmasıdır [23].*

Tanım 4.0.5. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *ve* $(\varnothing \neq)Y \subseteq X$ *alt kümesi verilsin. Eğer* (Y,τ_Y,E) *esnek alt topolojik uzayı tamamen esnek bağlantısız ise, Y alt kümesi de tamamen esnek bağlantısızdır denir [23].*

Teorem 4.0.1. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *de aşağıdakiler denktir [24]:*

i) (X,τ,E) esnek bağlantılı değildir,

ii) $\tilde{X}$, boş olmayan, esnek bağlantılılık belirtmeyen iki esnek alt kümenin birleşimi biçiminde ifade edilir,

iii) $\tilde{X}$, boş olmayan, esnek kapalı ve esnek ayrık iki esnek alt kümenin birleşimi biçiminde ifade edilir,

iv) (X,τ,E) nin boş olmayan esnek açık aynı zamanda da esnek kapalı olan bir has alt kümesi mevcuttur.

İspat: i)$\Longrightarrow$**(ii)** Tanım 4.0.3 ün doğrudan sonucudur.

ii)$\Longrightarrow$(iii) F_E ve G_E esnek açık kümeleri $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ eşitlikleri mevcut olsun. Eğer

$$F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X} \iff F_E^{\shortmid} \tilde{\cap} G_E^{\shortmid} = \Phi$$
$$F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi \iff F_E^{\shortmid} \tilde{\cup} G_E^{\shortmid} = \tilde{X}$$

olup $F_E^{\shortmid}$ ve $G_E^{\shortmid}$ esnek kapalı kümeler olduğun (**iii**) gerçekleşir.

iii)$\Longrightarrow$(iv) F_E ve G_E esnek kapalı kümeleri $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ olacak şekilde var olsun. Bu durumda

$$F_E = \tilde{X} \tilde{\setminus} G_E$$

olup aynı zamanda F_E esnek kümesinin esnek açık küme olmasını gerektirir. O halde (X, τ, E) esnek topolojik uzayının boştan farklı esnek açık aynı zamanda da esnek kapalı bir esnek alt kümesinin mevcut olduğunu gösterir ve (**iv**) gerçekleşir.

iv)$\Longrightarrow$(i) F_E, (X, τ, E) nin esnek açık aynı zamanda da esnek kapalı bir alt kümesi mevcut olsun. Bu takdirde $G_E = \tilde{X} \tilde{\setminus} F_E$ de hem esnek açık aynı zamanda da esnek kapalıdır. Ayrıca $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ dir. Bu takdirde

$$\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E = F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$$
$$F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)} = F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$$

dir. Bu ise F_E ile G_E esnek kümelerinin esnek bağlantılı olmayan iki esnek küme olması demektir. Böylece (X, τ, E) esnek bağlantısızdır.

Örnek 4.0.4. *Esnek bağlantısız bir uzaya esnek diskret(ayrık) topolojik uzayı örnek verebiliriz. Şöyle ki* $X = \{v\}$ *mevcut olsun. Her* $e \in E$ *için* $F(e) = \{v\}$, X *te tanımlı olup* F_E *biçiminde ifade edilsin. Bu durumda* $F_E \tilde{\cup} \left[\tilde{X} \tilde{\setminus} F_E\right] = \tilde{X}$ *olup* F_E *ve Teorem 4.0.1 gereğince* $\tilde{X} \tilde{\setminus} F_E$ *esnek bağlantısız bir küme olduğundan esnek diskret uzay esnek bağlantısız bir uzaydır [5].*

Örnek 4.0.5. *Herhangi bir esnek indiskret(ayrık olmayan) topolojik uzayı esnek bağlantılı bir uzaydır [25].*

Örnek 4.0.6. *$X=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\Phi,X,(F_1)_E,(F_2)_E,(F_3)_E\}$ mevcut olsun. $(F_1)_E,(F_2)_E$ ve $(F_3)_E$, X te tanımlanmış esnekleri şu şekilde tanımlı olsun,*

$$F_1(e_1)=\{v_2\},\ F_1(e_2)=\Phi$$

$$F_2(e_1)=\{v_1,v_3\},\ F_2(e_2)=\Phi$$

$$F_3(e_1)=X,\ F_3(e_2)=\Phi.$$

O halde (X,τ,E), X te tanımlı olan bir esnek topolojik uzayıdır. $F_E\tilde{\cap}G_E=\Phi$ ve $F_E\tilde{\cup}G_E=\tilde{X}$ olacak şekilde $F_E,G_E\in\tau-\{\Phi\}$ bulunmadığını söylemek açıkça bellidir. τ_e tanım gereği elimizde $\tau_{e_1}=\{\Phi,X,\{v_2\},\{v_1,v_3\}\}$ ve $\tau_{e_1}=\{\Phi,X\}$ mevcuttur. Buradan açıkça $\{X,\tau_{e_1}\}$ bağlantılı değildir ancak $\{X,\tau_{e_2}\}$ bağlantılıdır. Bu örnek bir (X,τ,E) esnek topolojik uzayın esnek bağlantılı olmasına rağmen ondan indirgenen (X,τ_e) topolojik uzaylarının bağlantılı olmayabileceğini göstermektedir [25].

Uyarı 4.0.2. *Esnek bağlantılı bir (X,τ,E) nin olması demek her $e_i\in E$ için karşılık bulan (X,τ_{e_i}) topolojik uzayının bağlantılı olmasını gerektirmez [25].*

Örnek 4.0.7. *X, boştan farklı bir evren, $E=\{e_1,e_2\}$ de parametrelerin kümesini temsil etmek üzere,*

$$F(e_1)=\Phi,\ F(e_2)=X$$

ve

$$G(e_1)=X,\ G(e_2)=\Phi$$

olup $\tau=\left\{\Phi,\tilde{X},F_E,G_E\right\}$ ile birlikte (X,τ,E), X te tanımlı esnek topolojik uzaydır. $F_E,G_E\in\tau-\{\Phi\}$ için $\Phi=F_E\tilde{\cap}G_E$ ve $\tilde{X}=F_E\tilde{\cup}G_E$ olup (X,τ,E) esnek bağlantılı bir topolojik uzay değildir fakat $\tau_{e_1}=\tau_{e_2}=\{\varnothing,X\}$ olup (X,τ_{e_1}) ve (X,τ_{e_2}) topolojileri açıkça bağlantılıdır [25].

Önerme 4.0.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve $\tau^{\shortmid}$ de X mevcut olan esnek kapalı kümelerin bir topluluğu olsun. O halde aşağıdaki durumlar denktir.*

i) (X,τ,E) esnek bağlantılı bir topolojik uzaydır.

ii) $F_E,G_E\in\tau^{\shortmid}-\{\Phi\}$ yoktur öyleki

$$F_E\tilde{\cup}G_E=\tilde{X} \text{ ve } F_E\tilde{\cap}G_E=\Phi$$

şartlarını sağlayan $\tau^{\shortmid}=\left\{F_E^{\shortmid}\mid F_E\in\tau\right\}$ olsun.

iii) $F_E, G_E \in S(X) - \{\Phi\}$ yoktur öyleki

$$\left(F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)}\right) \tilde{\cup} (F_E \tilde{\cap} G_E) = \Phi \text{ ve } F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$$

olsun.

iv) $F_E \in \tau \cap \tau^{\shortmid}$ olacak şekilde bir $F_E \in S(X) - \left\{\Phi, \tilde{X}\right\}$ yoktur [25].

İspat: i)⟹(ii) $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ için $F_E, G_E \in \tau^{\shortmid} - \{\Phi\}$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$F_E^{\shortmid} = G_E \in \tau^{\shortmid} - \{\Phi\} \text{ ve } G_E^{\shortmid} = F_E \in \tau^{\shortmid} - \{\Phi\}$$

olduğu gelir. Buna göre F_E esnek kapalı kümesi $G_E^{\shortmid} = F_E \in \tau^{\shortmid} - \{\Phi\}$ olduğundan $F_E \in \tau - \{\Phi\}$ ve benzer şekilde $G_E \in \tau - \{\Phi\}$ olur. Dolayısıyla $\tilde{X} = F_E \tilde{\cup} G_E$ ve $\Phi = F_E \tilde{\cap} G_E$ eşitliklerini gerçekleyen $F_E, G_E \in \tau - \{\Phi\}$ mevcut olup bu durum (X, τ, E) nin esnek bağlantılı esnek bir topolojik uzay olması ile örtüşmemektedir. O halde diyebiliriz ki $F_E, G_E \in \tau^{\shortmid} - \{\Phi\}$ yoktur.

ii)⟹(iii) Kabul edelim ki $\left(F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)}\right) \tilde{\cup} (F_E \tilde{\cap} G_E) = \Phi$ ve $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ olacak şekilde $F_E, G_E \in S(X) - \{\Phi\}$ esnek kümeleri mevcut olsun. Uyarı 4.0.1 gereğince $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\overline{(G_E)} &= \overline{(G_E)} \tilde{\cap} \tilde{X} \\
&= \overline{(G_E)} \tilde{\cap} (F_E \tilde{\cup} G_E) \\
&= \left(\overline{(G_E)} \tilde{\cap} F_E\right) \tilde{\cup} \left(\overline{(G_E)} \tilde{\cap} G_E\right) \\
&= \Phi \tilde{\cup} G_E \\
&= G_E
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\overline{(F_E)} &= \overline{(F_E)} \tilde{\cap} \tilde{X} \\
&= \overline{(F_E)} \tilde{\cap} (F_E \tilde{\cup} G_E) \\
&= \left(\overline{(F_E)} \tilde{\cap} F_E\right) \tilde{\cup} \left(\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E\right) \\
&= F_E \tilde{\cap} \Phi \\
&= F_E
\end{aligned}$$

olup buradan F_E ve G_E esnek kümelerinin esnek kapalı kümeler olduğu sonucu ortaya çıkar. Dolayısıyla $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ ve $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ için $F_E, G_E \in \tau' - \{\Phi\}$ esnek kümeleri mevcuttur. Bu durum **(ii)** ile çelişeceğinden dolayı **(iii)** sağlanmış olur.

iii)$\Longrightarrow$(iv) Φ ve $\tilde{X}$ dan farklı esnek açık aynı zamanda da esnek kapalı olan bir F_E esnek kümesinin olduğunu kabul edelim. Yani $F_E \in (\tau \cap \tau') - \left\{\Phi, \tilde{X}\right\}$ olsun. Eğer $G_E = F_E'$ olacak şekilde alırsak bu takdirde F_E hem esnek açık hem de esnek kapalı olduğundan G_E de hem esnek açık hem de esnek kapalı olacaktır. O halde

$$\begin{aligned}
\left(F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)}\right) \tilde{\cup} \left(\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E\right) &= (F_E \tilde{\cap} G_E) \tilde{\cup} (F_E \tilde{\cap} G_E) \\
&= F_E \tilde{\cap} G_E \\
&= \Phi
\end{aligned}$$

ve $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{X}$ dır. Dolayısıyla bu bir çelişki belirtmektedir.

iv)$\Longrightarrow$(i) (X, τ, E) nin esnek bağlantılı bir uzay olmadığını kabul edelim. O halde $\tilde{X} = F_E \tilde{\cup} G_E$ ve $\Phi = F_E \tilde{\cap} G_E$ eşitliklerini gerçekleyen F_E ve G_E esnek boştan farklı esnek açık kümeleri mevcuttur. Bu durumda $F_E' = G_E$ ve $G_E' = F_E$ olduğu açıktır. Böylece F_E ve G_E esnek kümeleri aynı zamanda esnek kapalı birer kümedir. Bu ise hipotez ile çelişir. Dolayısıyla da (X, τ, E) esnek bağlantılıdır.

Teorem 4.0.2. *Esnek bağlantılı iki topolojik uzayın esnek kartezyen çarpımları da esnek bağlantılı topolojik uzaydır [16].*

Örnek 4.0.8. $X = \{v\}, E = \{e_1, e_2\}, (F_1)(e_1) = (F_1)(e_2) = \Phi, (F_2)(e_1) = (F_2)(e_2) = \tilde{X}$ *olacak şekilde* $\tilde{\tau}$ *esnek bağlantılıdır ve*

$$(X, \tau_i, E) \times (X, \tau_i, E) = (X \times X, \tau_i, E \times E),\ (F_i \times F_i)(e_i, e_i) = F_i(e_i) \times F_i(e_i),\ i = 1, 2 \text{ için}$$

$$(F_1 \times F_1)_{E\times E} = \{(F_1 \times F_1)(e_1, e_1), (F_1 \times F_1)(e_1, e_2), (F_1 \times F_1)(e_2, e_1), (F_1 \times F_1)(e_2, e_2)\} = \Phi_{E\times E}$$

$$(F_1 \times F_2)_{E\times E} = \{(F_1 \times F_2)(e_1, e_1), (F_1 \times F_2)(e_1, e_2), (F_1 \times F_2)(e_2, e_1), (F_1 \times F_2)(e_2, e_2)\} = \Phi_{E\times E}$$

$$(F_2 \times F_1)_{E\times E} = \{(F_2 \times F_1)(e_1, e_1), (F_2 \times F_1)(e_1, e_2), (F_2 \times F_1)(e_2, e_1), (F_2 \times F_1)(e_2, e_2)\} = \Phi_{E\times E}$$

$$(F_2 \times F_2)_{E\times E} = \{(F_2 \times F_2)(e_1, e_1), (F_2 \times F_2)(e_1, e_2), (F_2 \times F_2)(e_2, e_1), (F_2 \times F_2)(e_2, e_2)\} = \tilde{X} \times \tilde{X}$$

$(F_1 \times F_1)_{E\times E}$, $(F_1 \times F_2)_{E\times E}$, $(F_2 \times F_1)_{E\times E}$ *ve* $(F_2 \times F_2)_{E\times E}$ *esnek çarpım topolojisini oluşturan esnek çarpım kümeleridir ve* $\tau = \left\{\Phi_{E\times E},\ \tilde{X} \times \tilde{X}\right\}$ *olur. Buradan da açıkça görülmektedir ki* $(X \times X, \tilde{\tau}, E \times E)$, *esnek bağlantılı bir çarpım uzayıdır [16].*

Uyarı 4.0.3. *Esnek bağlantılı bir esnek topolojik uzayın esnek bağlantısız bir uzay ile esnek çarpımı esnek bağlantısız bir topolojik uzaydır [16].*

Aşağıda tanımlanacak olan iki örnek, Örnek 4.0.11 de kullanılması açısından verilmiştir.

Örnek 4.0.9. $(\varnothing \neq)X$ *ve* $E = \{e_1, e_2\}$ *için,*

$$F_1(e_1) = F_1(e_2) = \tilde{X}$$
$$G_2(e_1) = G_2(e_2) = \Phi$$

ve $\tilde{\tau}_X = \{\Phi, X\}$ *olsun. Bu takdirde* $(X, \tilde{\tau}_X, E)$ *esnek bağlantılı bir topolojik uzay olur [16].*

Örnek 4.0.10. $Y = \{v\}, E = \{e_1, e_2\}$ *ve*

$$G_1(e_1) = G_2(e_2) = G_3(e_1) = G_3(e_2) = Y,\ G_1(e_2) = G_2(e_1) = G_4(e_1) = G_4(e_2) = \Phi$$

ve $\tilde{\tau}_Y = \left\{(\Phi, Y), (Y, \Phi), \Phi, \tilde{Y}\right\}$ *olsun. O halde* $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ *esnek bağlantısız bir topolojik uzaydır [16].*

Örnek 4.0.11. *Örnek 4.0.9 ve Örnek 4.0.10 e göre* $(X, \tilde{\tau}_X, E)$ *esnek bağlantılı* $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ *esnek bağlantısız iki esnek topolojik uzayları için* $(X \times Y, \tilde{\tau}, E \times E)$ *çarpım uzayı da esnek bağlantısız bir topolojik uzaydır. Gerçekten,*

$$(F_1, G_1)(e_1, e_1) = (F_1 \times G_1)(e_2, e_1) = (F_1, G_2)(e_1, e_2) = (F_1 \times G_2)(e_2, e_2) = \tilde{X} \times \tilde{Y}$$

ve

$$(F_1 \times G_1)(e_1, e_2) = (F_1 \times G_1)(e_2, e_2) = (F_1 \times G_2)(e_1, e_1) = (F_1 \times G_2)(e_2, e_1) = \Phi$$

buradan

$$(F_1 \times G_1)_{E \times E} = \{\tilde{X} \times \tilde{Y}, \Phi, \tilde{X} \times \tilde{Y}, \Phi\}, (F_1 \times G_2)_{E \times E} = \{\Phi, \tilde{X} \times \tilde{Y}, \Phi, \tilde{X} \times \tilde{Y}\}$$

$(F_1 \times G_1)_{E\times E}$ *ve* $(F_1 \times G_2)_{E\times E}$ *biçiminde tanımlı olan esnek açıkları* $(X \times Y, \tilde{\tau}, E \times E)$ *esnek çarpım uzayının esnek bir ayrışımını oluştururlar.*

$$(F_1 \times G_1)(e_1,e_1) \cup (F_1 \times G_2)(e_1,e_1) = X \times Y \cup \Phi = X \times Y$$
$$(F_1 \times G_1)(e_1,e_1) \cap (F_1 \times G_2)(e_1,e_1) = X \times Y \cap \Phi = \Phi$$
$$(F_1 \times G_1)(e_1,e_2) \cup (F_1 \times G_2)(e_1,e_2) = \Phi \cup X \times Y = X \times Y$$
$$(F_1 \times G_1)(e_1,e_2) \cap (F_1 \times G_2)(e_1,e_2) = \Phi$$
$$(F_1 \times G_1)(e_2,e_1) \cup (F_1 \times G_2)(e_2,e_1) = X \times Y \cup \Phi = X \times Y$$
$$(F_1 \times G_1)(e_2,e_1) \cap (F_1 \times G_2)(e_2,e_1) = \Phi$$
$$(F_1 \times G_1)(e_2,e_2) \cup (F_1 \times G_2)(e_2,e_2) = \Phi \cup X \times Y = X \times Y$$
$$(F_1 \times G_1)(e_2,e_2) \cap (F_1 \times G_2)(e_2,e_2) = \Phi$$

dolayısıyla buradan da

$$(F_1 \times G_1)_{E\times E} \tilde{\cup} (F_1 \times G_2)_{E\times E} = \{X \times Y, X \times Y, X \times Y, X \times Y\} = \tilde{X} \times \tilde{Y}$$

ve

$$(F_1 \times G_1)_{E\times E} \tilde{\cap} (F_1 \times G_2)_{E\times E} = \{\Phi, \Phi, \Phi, \Phi\} = \Phi_{E\times E}$$

elde edilir [16].

Uyarı 4.0.4. *Esnek bağlantısız bir topolojik uzayın esnek bağlantısız bir topolojik uzay ile esnek çarpımı esnek bağlantısız bir topolojik uzaydır [16].*

Örnek 4.0.12. *Örnek 4.0.10 e göre* $(Y, \tau_Y, E) \times (Y, \tau_Y, E) = (Y \times Y, \tau_Y \times \tau_Y, E \times E)$ *için*

$$(G_3 \times G_1)(e_1,e_1) = Y \times Y$$
$$(G_3 \times G_1)(e_1,e_2) = Y \times \Phi = \Phi$$
$$(G_3 \times G_1)(e_2,e_1) = Y \times Y$$
$$(G_3 \times G_1)(e_2,e_2) = Y \times \Phi = \Phi$$

buradan $(G_3 \times G_1)_{E\times E} = \{Y \times Y, \Phi, Y \times Y, \Phi\}$ *ve*

$$(G_3 \times G_2)(e_1,e_1) = Y \times \Phi = \Phi$$
$$(G_3 \times G_2)(e_1,e_2) = Y \times Y$$
$$(G_3 \times G_2)(e_2,e_1) = Y \times \Phi = \Phi$$
$$(G_3 \times G_2)(e_2,e_2) = Y \times Y = \Phi$$

buradan da $(G_3 \times G_2)_{E\times E} = \{\Phi, Y\times Y, \Phi, Y\times Y\}$ *olacaktır. Dolayısıyla buradan da*

$$(G_1 \times G_1)_{E\times E}\tilde{\cup}(G_1\times G_2)_{E\times E} = \{Y\times Y, Y\times Y, Y\times Y, Y\times Y\} = \tilde{Y}\times\tilde{Y}$$

ve

$$(F_1 \times G_1)_{E\times E}\tilde{\cap}(F_1\times G_2)_{E\times E} = \{\Phi,\Phi,\Phi,\Phi\} = \Phi_{E\times E}$$

elde edilir. $(G_3 \times G_1)(e_1,e_1)$ *ve* $(G_3\times G_2)(e_1,e_2)$, $\tilde{Y}\times\tilde{Y}$ *çarpımının esnek ayrımını oluşturduğundan dolayı esnek bağlantısız olur [16].*

4.1 Esnek Bağlantılı Alt Topolojik Uzaylar

Tanım 4.1.1. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *ve* $(\varnothing \neq)Y \subseteq X$ *alt kümesi mevcut olsun. Eğer* (Y,τ_Y,E) *de esnek bağlantılı ise* Y *ye* X *in bir esnek bağlantılı alt kümesi denir [25].*

Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ye ait bir esnek alt uzay (Y,τ_Y,E) olsun. Herhangi bir $F_E \in S(Y)$ esnek kümesinin (X,τ,E) deki esnek kapanışını $\overline{(F_E)}$ ve (Y,τ_Y,E) deki esnek kapanışını $\overline{(F_E)}_Y$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.1.1. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *de eğer* Y*,* X *in esnek bağlantılı alt kümesi ise* $F_E\tilde{\cup}G_E = \tilde{Y}$ *ve* $F_E\tilde{\cap}G_E = \Phi$ *eşitliklerini gerçekleyen* $F_E, G_E \in \tau - \{\Phi\}$ *yoktur [25].*

İspat: $\tilde{Y} = F_E\tilde{\cup}G_E$ ve $\Phi = F_E\tilde{\cap}G_E$ eşitliklerini gerçekleyen $F_E, G_E \in \tau-\{\Phi\}$ esnek açıklarının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$F_E = \tilde{Y}\tilde{\cap}F_E \in \tau_Y - \{\Phi\}$$

ve

$$G_E = \tilde{Y}\tilde{\cap}G_E \in \tau_Y - \{\Phi\}$$

olacaktır. Bunlarla birlikte Y, X in bir esnek bağlantılı alt kümesidir. Bu da bir çelişki oluşturacağından önermenin ispatı açıktır [25].

Sonuç 4.1.1. *Esnek bir topolojik uzay olan* (X,τ,E) *ve* Y *de* (X,τ,E) *nin esnek bağlantılı bir alt kümesi olsun. Eğer*

$$\Phi = F_E\tilde{\cap}G_E \text{ ve } \tilde{Y}\tilde{\subseteq}(F_E\tilde{\cup}G_E)$$

biçiminde tanımlı $F_E, G_E \in \tau$ *mevcut ise ya* $\tilde{Y}\tilde{\subseteq}F_E$ *ya da* $\tilde{Y}\tilde{\subseteq}G_E$ *dir [25].*

İspat: Y esnek bağlantılı bir küme olsun. O zaman Y nin bir esnek bağlantısızlığının olmaması, yani kesişimleri Φ ve birleşimleri $\tilde{Y}$ yı veren τ_Y nin esnek boştan farklı iki elemanı olmaması gerekecektir. Hipotezden $F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ ve $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{Y}$ olacak şekilde $F_E, G_E \in \tau$ nun var olduğunu kabul edelim. Buradan

$$F_E \in \tau \implies \Phi \neq {}^Y F_E = \tilde{Y} \tilde{\cap} F_E \in \tau_Y$$
$$G_E \in \tau \implies \Phi \neq {}^Y G_E = \tilde{Y} \tilde{\cap} G_E \in \tau_Y$$

dir. Y esnek bağlantılı olduğundan

$${}^Y F_E \tilde{\cap} {}^Y G_E = \Phi$$

ve

$${}^Y F_E \tilde{\cup} {}^Y G_E = \tilde{Y}$$

eşitliklerine ulaşmamız gerekecektir.

$$\begin{aligned} {}^Y F_E \tilde{\cap} {}^Y G_E &= \left(\tilde{Y} \tilde{\cap} F_E\right) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y} \tilde{\cap} G_E\right) \\ &= \tilde{Y} \tilde{\cap} \left(F_E \tilde{\cap} G_E\right) \\ &= \tilde{Y} \tilde{\cap} \Phi \\ &= \Phi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^Y F_E \tilde{\cup} {}^Y G_E &= \left(\tilde{Y} \tilde{\cap} F_E\right) \tilde{\cup} \left(\tilde{Y} \tilde{\cap} G_E\right) \\ &= \tilde{Y} \tilde{\cap} \left(F_E \tilde{\cup} G_E\right) \\ &= \tilde{Y} \end{aligned}$$

olacaktır. Buna esnek boştan farklı iki tane ${}^Y F_E$ ve ${}^Y G_E$ esnek kümeleri ile ulaşmamamız gerekirdi. Bu demek olur ki aşikar bir durum söz konusudur. Bu da ${}^Y F_E = \Phi$ ya da ${}^Y G_E = \Phi$ ile mümkün olacaktır. Yani bu ikisinden bir tanesi Φ olmalıdır ki sonuç bu şekilde olsun. Eğer ${}^Y F_E = \Phi$ ve ${}^Y G_E \neq \Phi$ ise $\tilde{Y} \tilde{\cap} F_E \tilde{\cap} G_E = \Phi$ olduğu da dikkate alınarak $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} G_E$ olduğu ve ${}^Y G_E = \Phi$ ve ${}^Y F_E \neq \Phi$ durumunda ise $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} F_E$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.1.2. *X te tanımlanmış esnek bir topolojik uzay olan (X, τ, E) mevcut olsun. Y, X in esnek bağlantılı bir alt kümesi ve Z, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $\tilde{Y} \subseteq \tilde{Z} \subseteq \overline{\tilde{Y}}$ ise Z de X in esnek bağlantılı bir alt kümesidir [25].*

İspat: Hipotezin aksini düşünerek Z nin X de esnek bağlantılı olmadığını kabul edelim. Dolayısıyla $F_E, G_E \in S(Z) - \{\Phi\}$ vardır öyleki $F_E \tilde{\cup} G_E = \tilde{Z}$ ve $\left(F_E \tilde{\cap} \overline{(G_E)}\right) \tilde{\cup} \left(\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E\right) = \Phi$ olacaktır. $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} \tilde{Z}$ olup $\tilde{Y} \subseteq (F_E \tilde{\cup} G_E)$ ve Y, X in esnek bağlantılı bir alt kümesi olduğundan Sonuç 4.1.1 gereğince $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} F_E$ ya da $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} G_E$ olur. Eğer $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} F_E$ ise $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} \overline{(F_E)}$ olup $\tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Y}}$ olduğundan, $\tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{(F_E)}$ olur. Böylece $\tilde{Z} = F_E \tilde{\cup} G_E$, $\tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{(F_E)}$ ve $\overline{(F_E)} \tilde{\cap} G_E = \Phi$ olup $G_E = \Phi$ olacaktır. Bu durum G_E esnek kümesinin boştan farklı olması ile çelişmektedir. Benzer şekilde $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} G_E$ içinde G_E esnek kümesinin boştan farklı olma çelişki durumu gösterilebilir. Dolayısıyla önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X, τ, E) ve $(\varnothing \neq) Y \subseteq X$ esnek bağlantılı alt kümesi mevcut olsun. Bu takdirde $\overline{Y}$ esnek kümesi de esnek bağlantılıdır [25].*

İspat: Önerme 4.1.2 gereğince $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} \tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Y}}$ şeklinde tanımlanan uygun her Z esnek kümesinin esnek bağlantılı olduğunu göstermiştik. $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} \tilde{Z}$ olduğundan $\overline{\tilde{Y}} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Z}}$ olup dolayısıyla $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} \tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Y}} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Z}}$ elde edilmiş olur. Z kümesi esnek bağlantılı ve $\tilde{Z} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Y}} \tilde{\subseteq} \overline{\tilde{Z}}$ olduğundan Önerme 4.1.2 gereğince $\overline{Y}$ esnek kümesi de esnek bağlantılı bir küme olacaktır.

Lemma 4.1.1. *(Y, τ_Y, E) ve (Z, τ_Z, E), (X, τ, E) de birer esnek alt topolojik uzaylar ve $Y_E \tilde{\subseteq} Z_E$ olsun. O halde (Y, τ_Y, E), (Z, τ_Z, E) nin bir esnek alt topolojik uzayıdır [14].*

İspat: (X, τ, E) ye ait olan bir esnek alt topolojik uzay (Y, τ_Y, E) olduğundan τ_Y daki herbir esnek açık küme $F_E \in \tau$ olmak üzere $\tilde{Y} \tilde{\cap} F_E$ şeklinde yazılır. ${}^Y F_E = \tilde{Y} \tilde{\cap} F_E$ diyelim. Bu ${}^Y F_E$ yi τ_Z nun bir esnek açık kümesi ile $\tilde{Y}$ kesiştirerek yazabilirsek (Y, τ_Y, E) nin (Z, τ_Z, E) nin bir esnek alt topolojik uzayı olduğunu ispatlamış oluruz. Açıkça $Y_E \tilde{\subseteq} Z_E$ olduğundan $\tilde{Y} = \tilde{Y} \tilde{\cap} \tilde{Z}$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned} {}^Y F_E &= \tilde{Y} \tilde{\cap} F_E \ , \ F_E \in \tau \\ &= \left(\tilde{Y} \tilde{\cap} \tilde{Z}\right) \tilde{\cap} F_E \ , \ F_E \in \tau \\ &= \tilde{Y} \tilde{\cap} \left(\tilde{Z} \tilde{\cap} F_E\right) \\ &= \tilde{Y} \ \tilde{\cap} \ {}^Z F_E \ , \ {}^Z F_E \in \tau_Z \end{aligned}$$

buradan da (Y, τ_Y, E), (Z, τ_Z, E) nin bir esnek alt topolojik uzayı olduğu ispatı elde edilir.

Teorem 4.1.1. *$(Y, \tau_Y, E) = \{(Y_\alpha, \tau_{Y_\alpha}, E)\}_{\alpha \in I}$, (X, τ, E) nin esnek bağlantılı esnek alt uzaylarının bir topluluğu olsun, eğer*

$$\bigcap_{\alpha \in I} \tilde{Y}_\alpha \neq \Phi$$

ise (X, τ, E) ye ait olan bir esnek bağlantılı alt topolojik uzay (Y, τ_Y, E) dir [14].

İspat: $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha \neq \Phi$ olduğundan en az bir $x\tilde{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha$ vardır. $\tilde{Y}=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha$ nın esnek bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim, yani Y esnek bağlantısız olsun. Y nin esnek bağlantısızlığı da $\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E$ ve $\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E$ olsun. Buradan

$$\tilde{Y}=\left(\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E\right)\tilde{\cup}\left(\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E\right)$$

ve

$$\Phi=\left(\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E\right)\tilde{\cap}\left(\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E\right)$$

olur. Y esnek bağlantısız olduğundan dolayı $x\tilde{\in}\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E$ ya da $x\tilde{\in}\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E$ dir. $x\tilde{\in}\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x\tilde{\in}\tilde{Y}=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha$ dır. $\tilde{Y}_\alpha$ ların herbiri esnek bağlantılı olduğundan dolayı Sonuç 4.1.1 gereğince $\tilde{Y}_\alpha\tilde{\subseteq}\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E$ ya da $\tilde{Y}_\alpha\tilde{\subseteq}\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E$ dir. $\tilde{Y}_\alpha\tilde{\subseteq}\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E$ olup

$$Y=\bigcup_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha\subseteq\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E \text{ ve } \bigcap_{\alpha\in I}\tilde{Y}_\alpha\neq\Phi$$

olduğundan

$$\tilde{Y}\tilde{\cap}G_E=\Phi$$

olmasını gerektirir. Benzer şekilde,

$$\tilde{Y}\tilde{\cap}F_E=\Phi$$

durumu da gösterilebilir. Bu sonuçlar bir çelişki belirttiğinden $\tilde{Y}$ esnek bağlantılıdır.

4.2 Esnek Topolojik Uzaylarda Bileşen

Bir esnek topolojik uzay esnek bağlantılı olmadığı halde onun esnek alt uzayları esnek bağlantılı olabilir. Dolayısıyla bu durum esnek topolojik uzayın yapısı hakkında bazı genel sonuçlar vermektedir.

Tanım 4.2.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve (Y,τ_Y,E) de (X,τ,E) nin bir esnek bağlantılı alt uzayı olsun. Eğer (Y,τ_Y,E) yi içeren daha geniş bir esnek bağlantılı alt uzay yoksa (Y,τ_Y,E) nin esnek bağlantılı olan alt uzayına (X,τ,E) nin bir esnek bileşeni şeklinde ifade edilir. Yani bir esnek topolojik uzayının en geniş esnek bağlantılı alt uzayına esnek topolojik uzayın esnek bileşeni denir [23].*

Uyarı 4.2.1. *Esnek bağlantılı olan bir uzayın tek bir esnek bileşeni mevcuttur, o da esnek topolojik uzayın kendisidir. Bununla birlikte, ayrık bir esnek topolojik uzayın her esnek noktası aynı zamanda esnek bir bileşen olabilirken bunun aksi genellikle doğru değildir. Yani her esnek noktası bir esnek bileşen olan bir esnek topolojik uzayın bir esnek ayrık uzay olması gerekmez.*

Uyarı 4.2.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) nin tamamen esnek bağlantısızlığı için ancak ve ancak bu esnek topolojik uzayın esnek bileşenlerinin tek elemanlı esnek kümelerden oluşmasıdır [23].*

Tanım 4.2.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ bir esnek nokta olsun, $\tilde{x}$ yı içeren esnek bileşene $\tilde{x}$ esnek noktasının esnek bileşeni denir ve $C_{\tilde{x}}$ şeklinde gösterilir.*

Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) için $\tilde{X}$ te tanımlı aşağıdaki gibi bir bağıntı ifadesi sağlanır [24].

$$\tilde{x} \backsim \tilde{y} \iff \text{“}\tilde{x} \text{ ve } \tilde{y} \text{ içeren bir esnek bağlantılı alt küme mevcuttur.”}$$

Teorem 4.2.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) mevcut olsun. Tanım 4.2.2 de tanımlanan*

“aynı esnek bağlantılı alt kümeye ait olma”

şeklindeki bağıntı bir denklik bağıntısı olur [24].

İspat: Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek noktaları için $\tilde{x} \backsim \tilde{y} \iff$ “$\tilde{x}$ *ve* $\tilde{y}$ içeren bir esnek bağlantılı alt küme mevcuttur.” bağıntısının yansıma ve simetri özelliklerinin sağlandığı kolaylıkla görülmektedir. Şimdi de geçişme özelliğinin sağlandığını gösterelim, $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$ olmak üzere,

$$\tilde{x} \backsim \tilde{y} \wedge \tilde{y} \backsim \tilde{z} \implies \tilde{x} \backsim \tilde{z}$$
$$\tilde{x} \backsim \tilde{y} \implies \exists\, F_E \in S(X)$$

esnek bağlantılı bir alt kümesi vardır. $\tilde{x},\tilde{y} \in F_E$ için,

$$\tilde{y} \backsim \tilde{z} \implies \exists\ (G,E) \in S(X)$$

esnek bağlantılı bir alt kümesi vardır. $\tilde{y},\tilde{z} \in G_E$ için,

$$\tilde{y}\tilde{\in}F_E\tilde{\cap}G_E \neq \Phi$$

olduğundan Sonuç 4.1.1 gereğince $F_E\tilde{\cup}G_E$ esnek kümesi de esnek bağlantılıdır ve $\tilde{x}$ ile $\tilde{y}$ yı içerir. Buradan da $\tilde{x} \backsim \tilde{z}$ olduğu gelir. Dolayısıyla bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.2.2. *Esnek bağlantılı olan bir topolojik uzay (X,τ_2,E) mevcut olsun. $\tau_1\tilde{\subset}\tau_2$ ise (X,τ_1,E) de esnek bağlantılıdır [24].*

İspat: Esnek bağlantılı olmayan bir (X,τ_1,E) uzayı olduğunu kabul edelim. O halde $\tilde{X}=F_A\tilde{\cup}F_B$ ve $F_A\tilde{\cap}F_B=\Phi$ olacak şekilde $F_A,F_B\tilde{\in}\tau_1$ esnek açık kümeleri vardır. $\tau_1\tilde{\subseteq}\tau_2$ olduğundan $F_A,F_B\tilde{\in}\tau_2$ olup buradan (X,τ_2,E) de esnek bağlantısız olur. Bu durum çelişki oluşturduğundan (X,τ_1,E) esnek bağlantılıdır.

4.3 Esnek Lokal Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.3.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E), $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ bir esnek nokta olsun ve F_E esnek açık kümesi $\tilde{x}$ yı içersin. Eğer F_E esnek kümesi tarafindan kapsanan ve $\tilde{x}$ yı içeren bir G_E esnek bağlantılı kümesi mevcutsa (X,τ,E) ye $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ noktasında esnek lokal bağlantılıdır denir.*

Her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek noktasında esnek bağlantılı olan bir (X,τ,E) ye esnek lokal bağlantılı topolojik uzayıdır denir. Bu tanım esnek komşuluk tabanı göz önüne alınarak her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ lerin (X,τ,E) de esnek bağlantılı kümelerden oluşan bir esnek komşuluk tabanı mevcut ise (X,τ,E) esnek lokal bağlantılıdır şeklinde de ifade edilebilir [16].

Önerme 4.3.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) esnek lokal bağlantılıdır gerek ve yeter şart (X,τ,E) esnek bağlantılı kümelerden oluşan bir B esnek tabanına sahiptir [23].*

Uyarı 4.3.1. *Her esnek bağlantılı topolojik uzay esnek lokal bağlantılıdır fakat aksi doğru olmak zorunda değildir [26].*

Örnek 4.3.1. *Esnek bir diskret topolojik uzayı esnek lokal bağlantılıdır ancak esnek bağlantılı bir topolojik uzay değildir [26].*

Örnek 4.3.2. *Esnek bir indiskret topolojik uzayı esnek bağlantılı aynı zamanda da esnek lokal bağlantılı bir topolojik uzaydır [26].*

Uyarı 4.3.2. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) nin esnek lokal bağlantılı olması için ancak ve ancak her $\tilde{x}\tilde{\in}F_E$ esnek noktası ve her H_E esnek komşuluğu için $\tilde{x}\tilde{\in}G_E\tilde{\subseteq}H_E$ olacak şekilde esnek bağlantılı ve esnek açık bir G_E esnek komşuluğunun olmasıdır [23].*

Teorem 4.3.1. *Esnek bir topolojik uzay olan (X,τ,E) nin esnek lokal bağlantılı olması için ancak ve ancak (X,τ,E) esnek topolojik uzayının her esnek açık alt uzayının esnek bileşenlerinin (X,τ,E) ye göre esnek açık olmasıdır [23].*

İspat: $\Longrightarrow$:Esnek bağlantılı bir topolojik uzay olan (X,τ,E), $G_E\tilde{\subseteq}F_E$ esnek açık bir alt küme ve $C_{\tilde{x}}$ de (Y,τ_Y,E) esnek alt uzayında bir esnek bileşeni olsun. $\tilde{x}\tilde{\in}C_{\tilde{x}}\tilde{\subseteq}G_E\tilde{\subseteq}F_E$ yi gerçekleyen bir esnek nokta alalım. (X,τ,E) bir esnek lokal bağlantılı topolojik uzay olduğu için Uyarı 4.3.2 gereğince $H_E\tilde{\subseteq}G_E$ olacak şekilde esnek bağlantılı bir esnek açık komşuluğu mevcuttur. H_E esnek açık kümesi (Y,τ_Y,E) esnek alt uzayında $\tilde{x}$ esnek noktasını içeren esnek bağlantılı bir kümedir. Öte yandan, $C_{\tilde{x}}$ esnek kümesi (Y,τ_Y,E) alt uzayında esnek bir bileşen olduğu için Tanım 4.2.1 gereğince $H_E\tilde{\subseteq}C_{\tilde{x}}$ olup esnek iç noktadan $\tilde{x}\tilde{\in}C_{\tilde{x}}^{\circ}$ şeklinde de ifade edilebilir. Yani sonuç olarak şunu söyleyebiliriz ki $C_{\tilde{x}}$ esnek bileşeni esnek bir açıktır.

$\Longleftarrow$: (X,τ,E) uzayında esnek açık bir (Y,τ_Y,E) alt uzayının herbir esnek bileşeni esnek açık iken (X,τ,E) esnek uzayının esnek lokal bağlantılı olduğunu kanıtlayacağız. (Y,τ_Y,E) alt uzayına göre $\tilde{x}$ esnek noktasını içeren $C_{\tilde{x}}\tilde{\subseteq}G_E$ esnek bileşeni esnek bir açıktır ve $C_{\tilde{x}}$ esnek bileşeni esnek açık olup Uyarı 4.3.2 gereğince (X,τ,E) esnek lokal bağlantılıdır.

Sonuç 4.3.1. *(X,τ,E) esnek lokal bağlantılı bir topolojik uzayın esnek bileşenleri, esnek açık ve aynı zamanda esnek kapalıdır [23].*

İspat: Esnek lokal bağlantılı bir topolojik uzay olan (X,τ,E) ve $\tilde{C}$ de esnek bileşeni olsun. Teorem 4.3.1 e göre $\tilde{C}$ esnek bileşeni esnek açık olur. Esnek bağlantılı bir kümenin esnek kapanışı da esnek bağlantılı olduğundan dolayı $\tilde{C}$ esnek bileşeninin esnek kapalı olduğu açıkça görülmektedir.

4.4 Esnek Yol Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4.4.1. *$[0,1]=I$ için (I,τ_I,E) bir esnek birim aralıktır [15].*

Tanım 4.4.2. *Esnek birim aralık olan (I,τ_I,E) ve esnek topolojik uzay olan $(X,\tau,E^{'})$ verilmiş olsun. $(\eta,\omega):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E^{'})$ esnek sürekli dönüşümü bir esnek yol ifade etmektedir. $\eta:I\longrightarrow X$ ve $\omega:E\longrightarrow E^{'}$ için $\left\{\eta(0)_{\omega(e)}\right\}_{e\in E}$ ve $\left\{\eta(1)_{\omega(e)}\right\}_{e\in E}$ esnek küme çiftlerine (η,ω) esnek yolunun sırasıyla başlangıcı ve bitişi denir. Her $e\in E$ için $\eta:(I,\tau_I)\longrightarrow\left(X,\tau_{\omega(e)}\right)$ dönüşümü, $\eta(0)_{\omega(e)}$ den $\eta(1)_{\omega(e)}$ ye bir yol belirtmektedir. Buradan da her esnek yol, $(X,\tau,E^{'})$ esnek topolojik uzayı üzerindeki parametreye endekslenmiş olan bir topluluk olarak düşünülebilir [15].*

Tanım 4.4.3. *Esnek birim aralık olan (I,τ_I,E) ve esnek topolojik uzay olan $(X,\tau,E^{'})$ verilmiş olsun. Eğer her $\left(x_{e_1^{'}},E^{'}\right)$ ve $\left(y_{e_1^{'}},E^{'}\right)$ çifti için,*

$$\omega(e_1)=e_1^{'},\ \omega(e_2)=e_2^{'},\ \eta(0)=x,\ \eta(1)=y$$

olacak şekilde bir $(\eta,\omega):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E^{'})$ *esnek yol mevcut ise* $(X,\tau,E^{'})$ *ye esnek yol bağlantılıdır denir [15].*

Önerme 4.4.1. *Esnek yol bağlantılı bir topolojik uzay* $(X,\tau,E^{'})$ *ise, her* $e^{'}\in E^{'}$ *için* $(X,\tau_{e^{'}})$ *yol bağlantılı bir topolojik uzaydır [15].*

İspat: $x,y\in(X,\tau_{e^{'}})$ rastgele noktalar olmak üzere $(x_{e^{'}},E^{'}),(y_{e^{'}},E^{'})\in(X,\tau_{e^{'}})$ nokta çiftleri mevcuttur. $(X,\tau,E^{'})$ bir esnek yol bağlantılı topolojik uzay belirttiğinden dolayı,

$$(\eta,\omega):(I,\tau_I,E)\longrightarrow\left(X,\tau,E^{'}\right)$$
$$\omega(e)=e^{'},\ \eta(0)=x,\ \eta(1)=y$$

olacak şekilde bir yol vardır. Böylece her $e^{'}\in E^{'}$ için x den y ye;

$$\eta_e:(I,(\tau_I)_e)\longrightarrow(X,\tau_e)$$

şeklinde tanımlanan bir yol vardır. Bu (X,τ_e), her $e^{'}\in E^{'}$ nin yol bağlantılı bir topolojik uzay olduğu anlamına gelmektedir. Ancak önermenin tersi doğru değildir.

Teorem 4.4.1. (I,τ_I,E) *esnek bağlantılı bir topolojik uzaydır [15].*

İspat: Hipotezin aksini kabul ederek esnek birim aralık olan (I,τ_I,E) nin esnek bağlantılı olmadığını kabul edelim. O halde boştan farklı ve ayrık olmayan esnek F_E ve G_E esnek kümeleri için,

$$F_E\tilde{\cup}G_E=(I,\tau_I,E)$$

eşitliği olacaktır. Her $e\in E$ için boş olmayan $F(e),G(e)\in(\tau_I)_e$ ve

$$I=F(e)\cup G(e)$$

ve

$$\Phi=F(e)\cap G(e)$$

seçelim. Buradan $(I,(\tau_I)_e)$ esnek bağlantılı bir topolojik uzay olmadığı sonucu ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla bu durum bir çelişki olacağından ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.4.2. *Esnek birim aralık olan* (I,τ_I,E)*, esnek yol bağlantılı bir esnek topolojik uzaydır [15]*

İspat: $(1_I, 1_E) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow (I, \tau_I, E)$ şeklinde tanımlanan $(1_I, 1_E)$, esnek sürekli bir yol olacağından dolayı esnek birim aralık olan (I, τ_I, E), esnek yol bağlantılı bir esnek topolojik uzaydır.

Teorem 4.4.2. *Herhangi bir esnek yol bağlantılı uzay, esnek bağlantılı bir topolojik uzaydır [15]*

İspat: Esnek yol bağlantılı bir uzay olan (X, τ, E) nin esnek bağlantılı bir uzay olmadığını kabul edelim. Bu takdirde boş olmayan $F_{E^{\shortmid}}$ ve $G_{E^{\shortmid}}$ ayrık esnek kümeleri mevcuttur. Böylece $F_{E^{\shortmid}} \tilde{\cup} G_{E^{\shortmid}} = \tilde{X}$ olacaktır. $(X, \tau, E^{\shortmid})$ esnek yol bağlantılı bir uzay olduğundan dolayı herbir esnek nokta $\left(x_{e_1^{\shortmid}}, E^{\shortmid}\right) \in (F, E^{\shortmid})$, $\left(y_{e_1^{\shortmid}}, E^{\shortmid}\right) \in (G, E^{\shortmid})$ çifti için,

$$(\eta, \omega) : (I, \tau_I, E) \longrightarrow \left(X, \tau, E^{\shortmid}\right)$$

$$\omega(e_1) = e_1^{\shortmid}, \ \omega(e_2) = e_2^{\shortmid}, \ \eta(0) = x, \ \eta(1) = y$$

olacak şekilde bir esnek yolu mevcuttur. O halde Teorem 4.4.1 göre, (I, τ_I, E) esnek bağlantılı uzaydır. Kabul edelim $(F_1)_{E^{\shortmid}}$ ve $(G_1)_{E^{\shortmid}}$

$$(F_1)_{E^{\shortmid}} = F_{E^{\shortmid}} \tilde{\cap} (\eta, \omega)(I, \tau_I, E)$$

$$(G_1)_{E^{\shortmid}} = G_{E^{\shortmid}} \tilde{\cap} (\eta, \omega)(I, \tau_I, E)$$

olacak şekilde iki tane esnek ayrık küme $(\eta, \omega)(I, \tau_I, E)$ esnek topolojik uzayında tanımlı olsunlar. Buradan

$$(\eta, \omega)(I, \tau_I, E) = (F_1)_{E^{\shortmid}} \tilde{\cup} (G_1)_{E^{\shortmid}}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu durum bir çelişki oluşturduğundan dolayı $(\eta, \omega)(I, \tau_I, E)$ bir esnek topolojik uzaydır.

Teorem 4.4.3. *Esnek iki topolojik uzay sırasıyla (X, τ, E) ve $(X^{\shortmid}, \tau^{\shortmid}, E^{\shortmid})$ olsun, öyle $(F_1)_{B_1}, (F_2)_{B_2} \in \tau$ olacak şekilde $(F_1)_{B_1} \tilde{\cup} (F_2)_{B_2} = \tilde{X}$ vardır. Birazdan bahsedeceğimiz A ve B, $A = \bigcup_{e \in B_1} F_1(e)$ ve $B = \bigcup_{e \in B_2} F_2(e)$ şeklinde olsun. $\eta : (X, \tau, E) \longrightarrow (X^{\shortmid}, \tau^{\shortmid}, E^{\shortmid})$ olacak şekilde her $x \in X$ için,*

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta_1(e) & , \ x \in A \\ \eta_2(e) & , \ x \in B \end{cases}$$

sürekli bir η fonksiyonu olsun. η_1 ve η_2;

$$\eta_1 : (A, \tau_A, E) \longrightarrow \left(X^{\shortmid}, \tau^{\shortmid}, E^{\shortmid}\right) \text{ ve } \eta_2 : (B, \tau_B, E) \longrightarrow \left(X^{\shortmid}, \tau^{\shortmid}, E^{\shortmid}\right)$$

şeklinde sürekli iki yol olsun. Her $x \in G$ için eğer $x \in A \cap B$ oluyorsa buradan $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ olacaktır [27].

Lemma 4.4.1. *Teorem 4.4.3 e göre topolojide yapıştırma lemması olarak tanımlanmıştır. Ayrıca bu sonucun doğru kabulü için $(F_1)_{B_1}$ ve $(F_2)_{B_2}$ esnek kapalı kümeler olması gerekir [27].*

Önerme 4.4.3. *Esnek bir topolojik uzay olan $(X,\tau,E^{'})$ nin mevcut olduğunu kabul edelim.*

$$x=\left(x_{e_1^{'}},E^{'}\right)\in(F)_{E^{'}}$$

ve

$$y=\left(y_{e_1^{'}},E^{'}\right)\in(F)_{E^{'}}$$

nokta çiftlerini belirtmek üzere x ten y ye esnek noktaları arasındaki esnek yol

$$(\eta,\omega):(I,\tau_I,E)\longrightarrow\left(X,\tau,E^{'}\right)$$

ise

$$(\gamma,\delta)(t)=(\eta,\omega)(1-t)\,,\ t\in I=[0,1]$$

şeklinde tanımlanan $(\gamma,\delta):(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E^{'})$ esnek dönüşümü de y den x e esnek noktaları arasında mevcut olan bir esnek yol olmuş olur. (γ,δ) esnek dönüşümü (η,ω) esnek dönüşümünün aksi yönünde bir yolu belirtmektedir [27].

Önerme 4.4.4. *x ve y esnek yol bağlantılı, y ve z de esnek yol bağlantılı esnek noktaları olsun. $\eta:(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E)$ olacak şekilde her $t\in I=[0,1]$ için,*

$$\eta=\begin{cases}\eta_1(2t) & ,\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \eta_2(2t-1) & ,\ t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

vardır ve burada x ten y ye giden esnek yol ve y den z ye giden esnek yolları sırasıyla η_1 ve η_2 olacak şekilde bir $\eta_1,\eta_2:(I,\tau_I,E)\longrightarrow(X,\tau,E)$ olduğunu kabul edelim. O halde η Lemma 4.4.1 den yapıştırma lemması gereğince süreklidir, $\eta(0)=\eta_1(0)=x$ ve $\eta(1)=\eta_2(1)=z$ olur. Dolayısıyla da η, x den z ye giden bir yol olur [27].

5. SONUÇ

Matematik biliminin temelini mantıksal sistem oluşturur. Geçmişten gelerek günümüze kadar birtakım matematiksel belirsizlikleri kamufule etmek ya da tamamen ortadan kaldırmaya yönelik birçok yöntem ve teoriler öne sunulmuştur. Temel bilimler başta olmak üzere mühendislik ve daha birçok alanda karşılaşılan karmaşık problemler için kesin ve tam olan bilgiye ulaşmak mümkün değildir. İçinde matematikçilerin de bulunduğu birçok farklı bilim insanı yüzyıllar boyu geleneksel mantığın üst sınırlarını zorlayarak farklı ve aynı zamanda da kesin olmayan bilgi arayışına girdiler. Bu belirsizlik arayışı çok geçmeden sonuç verdi ve bu alanda birçok teori geliştirildi. Belirsizliği modelleyen bu teorilerden bazıları; bulanık ,kaba ve esnek küme teorileri olarak verilebilir [1-3]. 1999 da Molodtsov tarafından belirsizliğe yeni bir matematiksel yaklaşım metodu olan esnek küme teorisini tanımlamıştır [1]. Esnek küme kavramı yani parametreli kümeler yardımıyla oluşturulan dönüşümler belirli bir üyelik derecesine bağlı olmadığı için ekonomi, bilişim, tıp, çevre ve karar sonuç problemleri gibi çeşitli alanlarda uygulamalarına yer verilmiştir. Özellikle matematikçiler yeni bir çalışma alanı olduğundan bu teoriyi cebirsel ve topolojik yönleriyle incelemişlerdir. Molodtsov esnek kümeyi tanımladıktan sonra Maji ve arkadaşları esnek kümelerin üzerinden farklı operatörler tanımlayarak bunların bazı temel özelliklerini incelemişlerdir [9]. Shabir ve Naz ise esnek topoloji kavramını tanımlayarak bazı temel özellikleri ve esnek topolojik uzaylar üzerinde ayırma aksiyomlarını vermiştir [11]. Esnek topolojinin tanımlanmasından sonra genel topolojideki kavramlar esnek topolojik uzaylarda ele alınmıştır. Aygünoğlu ve Aygün, Min, ve Zorlutuna ile arkadaşları esnek topolojik uzaylar ve cebirsel yapılar üzerinde çalışmalar yaparak bazı temel sonuçları elde etmişlerdir [6], [12-13]. Peyghan ve arkadaşları 2013 yılında esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir [14]. Bu çalışmada ayrıca bir esnek noktanın esnek lokal bağlantılılığını tanımlamışlardır. Bayramov ve arkadaşları da yine 2013 de esnek yol bağlantılılık kavramını tanımlamışlardır [15]. 2014 senesinde Al-Khafaj ve Mahmood, esnek bağlantılı kümeler, esnek bağlantısız kümeler, esnek bağlantılı uzay, esnek lokal bağlantılı uzay ve esnek bileşen kavramları ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [16].

Topolojik açıdan esnek kümeler ile ilgili literatürde taranan çalışmalara bakıldığında özellikle genel topolojideki kavramların esnek topolojik uzaylarda tanımlanarak incelendiği ve araştırma bulgularının genel topolojik yapıda kullanılan metodlar üzerinden esnek hale getirilerek parametre kümeleri üzerinden örnekler ile daha somut hale getirildikleri görülmektedir. Bu tez çalışmasında da öncelikli olarak 2. bölümünde esnek küme yapısını tanım ve teoremler üzerinden vererek örnekler yardımıyla zenginleştirmeye çalıştık. 3. bölümünde ise esnek topolojik uzayların genel yapısı ve özelliklerinden bahsederek, kartezyen çarpımlarına yer verdik. Daha sonra 4. bölümde esnek bağlantılı topolojik uzayların üzerinde durularak bunlara paralel olacak şekilde bağlantılı uzayların alt topolojisine, bileşen kavramına, lokal bağlantılılığına ve son olarak yol bağlantılılılık tanımı verilip bu uzaylarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Molodtsov, D.** (1999). Soft set theory-First results, *Computers & Mathematics with Applications*, *37*(4-5), 19–31.

[2] **Pawlak, Z.** (1982). Rough sets, *International Journal of Computer and Information Sciences*, *11*(5), 341–356.

[3] **Zadeh, L.A.** (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, *8*, 338–353.

[4] **Kolmogoroff, A.** (1977). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin-New York, reprint of the 1933 original.

[5] **Aktaş, H. ve Çağman, N.** (2007). Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, *177*(13), 2726–2735.

[6] **Aygün, H. ve Aygünoğlu, A.** (2012). Some notes on soft topological spaces, *Neural Computation and Application*, 113–119.

[7] **Çağman, N.**, **Karataş, S. ve Enginoglu, S.** (2011). Soft topology, *Computers & Mathematics with Applications*, *62*(1), 351–358.

[8] **Feng, F.**, **Jun, Y.B. ve Zhao, X.** (2008). Soft semirings, *Computers & Mathematics with Applications*, *56*(10), 2621–2628.

[9] **Maji, P.K.**, **Biswas, R. ve Roy, A.R.** (2003). Soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, *45*(4-5), 555–562.

[10] **Molodtsov, D.** (2006). Soft sets technique and its application, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya*, *1*(1), 8–39.

[11] **Shabir, M. ve Naz, M.** (2011). On soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, *61*(7), 1786–1799.

[12] **Min, W.K.** (2011). A note on soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 3524–3528.

[13] **Zorlutana, I.**, **Akdağ, M.**, **Min, K. ve Atmaca, S.** (2012). Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *3*(2), 171–185.

[14] **Peyghan, E.**, **Samadi, B. ve Tayebi, A.** (2013). About soft topological spaces, *Journal of New Results in Science*, *2*, 60–75.

[15] **Bayramov, S.**, **Gündüz, C. ve Erdem, A.** (2013). Soft path connectedness on soft topological spaces, *The CMMSE Proceedings*.

[16] **Al-Khafaj, M.A., M.** (2014). Some properties of soft connected spaces and soft locally connected spaces, *IOSR Journal of Mathematics*, *10*(5), 102–107.

[17] **Oğuz, G.**, **Gürsoy, M. ve İlhan İçen** (2019). On soft topological categories, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *48*(6), 1675–1681.

[18] **Oğuz, G.**, **İlhan İçen ve Gürsoy, M.** (2019). Actions of soft groups, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, *68*(1), 1163–1174.

[19] **Babitha, K.V. ve Sunil, J.J.** (2010). Soft set relations and functions, *Computers & Mathematics with Applications*, *60*(7), 1840–1849.

[20] **Hussain, S. ve Ahmad, B.** (2011). Some properties of soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, *62*(11), 4058–4067.

[21] **Hida, T.** (2014). Soft topological group, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *8*(16), 1001–1025.

[22] **Hussain, S.** (2015). A note on soft connectedness, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, (23), 6–11.

[23] **Aydın, B.** (2015). Soft bileşen ve soft lokal bağlantılı uzaylar, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20(1-2)*, 56–63.

[24] **Lin, F.** (2013). Soft connected spaces and soft paracompact spaces., *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, *7*(2).

[25] **Hai-Long Yang, X.L.** (2015). On soft continuous mappings and softconnectedness of soft topological spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *44(2)*, 385–398.

[26] **Gürsoy, M.H. ve Karagülle, T.** (2020). On soft locally path connected spaces, *Fundamentals of contemporary mathematical Sciences*, (1(2)), 84–94.

[27] **Fu, L. ve Shi, X.** (2019). Path connectedness over soft rough topological space, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, (31(5)), 1–10.

ÖZGEÇMİŞ

**Ad–Soyad : ** Hüseyin AKDOĞAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2011, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2015- Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.