T.C.

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NESNELERİN YAKINLIĞINA BİR MATEMATİKSEL YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUNUS EMRE MERCAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

AĞUSTOS-2023

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NESNELERİN YAKINLIĞINA BİR MATEMATİKSEL YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus Emre MERCAN
(36193614031)

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

AĞUSTOS-2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu çalışmada, bana manevi desteğini hiçbir zaman ihmal etmeyen ve hayatın her aşamasında yanımda olan danışman hocam sayın Prof. Dr. İlhan İÇEN'e teşekkürlerimi sunuyorum. Bilgisini, tecrübelerini ve ilgisini hiçbir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. Fatih ÖZCAN'a da her türlü konuda yardımcı olduğu için teşekkür ediyorum. Ayrıca manevi ve maddi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, kardeşime ve COŞKUNER ailesine de teşekkür ediyorum

Yunus Emre MERCAN

ONUR SÖZÜ

"Nesnelerin Yakınlığına Matematiksel Bir Yaklaşım" başlıklı bu yüksek lisans tezi, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun olarak tarafımdan yazılmıştır. Bu çalışmada, tüm kaynaklardan yararlanırken, alıntılar hem metin içinde hem de kaynakça bölümünde uygun bir şekilde belirtilmiştir.

Yunus Emre MERCAN

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\boldsymbol{I^X}$	: X' den I' ya bütün dönüşümlerin kümesi
$\mu_A(x)$	: Verilen bir x elemanının A kümesine aidiyet derecesi
$\boldsymbol{\mu_{A \cup B}(x)}$	: Verilen A ve B bulanık kümelerinin birleşimi
$\boldsymbol{\mu_{A \cap B}(x)}$	: Belirlenen A ve B bulanık kümelerin kesişimi
$\boldsymbol{\mu_{\overline{A}}}$	: Bulanık A kümesinin zıt kümesi
(F, A)	: Esnek Küme
$\boldsymbol{\neg E}$	: Parametrelerin değilleri
$\boldsymbol{(F, A)^c}$	: Verilen (F, A) esnek bir kümesinin tümleyeni
$\widetilde{\subseteq}$	: Esnek kümelerde alt küme sembolü
$\boldsymbol{\widetilde{A}}$	: A kümesinin mutlak esnek kümesi
T	: Kümenin Denklik bağıntısı
$\boldsymbol{T_*}$	: Kümenin Alt yaklaşımı
$\boldsymbol{T^*}$	: Kümenin Üst yaklaşımı
$\mathbf{TN}_{\boldsymbol{T}}$	: Kümenin Sınır bölgesi
$\boldsymbol{\mu_X^B}$	: Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu
$\boldsymbol{\xi}$	: Bölüm kümesi
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	: Çıkarım işlevi
$\boldsymbol{\Phi}$	: Nesne özellikleri
$\boldsymbol{(O, \mathcal{F})}$	: Bulanık Çıkarım Sistemi
$\boldsymbol{[x]}$	: x'in Denklik Sınıfı
Δ_{φ}	: Çıkarım fonksiyonlarının farkı
$\boldsymbol{N_r}$	: Dağılımlar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar kümesi
$\boldsymbol{O}$	: Algılanabilir nesneler kümesi
$\boldsymbol{X}$	: $X \subseteq O$ örnek nesnelerin oluşturduğu kümesi
$\boldsymbol{x}$	: x$\in O$ örnek nesne
$\boldsymbol{\varphi_i}$	: $\varphi_i : O \rightarrow R$
B	: $B \subseteq \mathcal{F}$
L	: Tanım uzunluğu
İ	: i $\leq L$, $L \in Z^+$
$\boldsymbol{\Phi}$	: Φ: O $\rightarrow$ R^L
$\boldsymbol{\Phi}$**(x)**	: Φ(x) = (φ_1, φ_2, $\varphi_3 \ldots \varphi_L$)
$\mathbf{V_{Nr}}$	: Yakınlık fonksiyonu
$\boldsymbol{\sim_B}$	: $\sim_B = \{(x, x') \mid \varphi_i(x) = \varphi_i(x') \ \forall \varphi \epsilon B\}$
$\boldsymbol{[x]_B}$	: $[x] = \{x' \epsilon X \mid x \sim Bx'\}$ yakınlık sınıfı
$\boldsymbol{O/\sim_B}$	: $O/\sim_B = \{[x]_B \mid x \in O\}$ bölüm kümesi
$\boldsymbol{\xi_B}$	: $\xi_B = O/\sim_B$
R	: $\binom{\lvert T \rvert}{r}$ yani $\varphi_j \in T$ fonksiyon sayısının r'li kombinasyonu
$\boldsymbol{T_r}$	: r $\leq \lvert T \rvert$
$\boldsymbol{\sim_{T_r}}$	: T_r yardımıyla tanımlanmış ayırt edilmezlik bağıntısı
$\boldsymbol{[x]_{T_r}}$	:Yakın kümelerde $[x]_{T_r} = \{x' \in O \ / \ x \sim_{T_r} x'\}$ yakınlık sınıfı

$\boldsymbol{O}/\sim_{\boldsymbol{T_r}}$	: $O/\sim_{T_r} = \{[\mathrm{x}]_{T_\mathrm{r}} \mid x \in O\}$
$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{O},\boldsymbol{T_r}}$	: $\xi_{O,T_r} = O/\sim_{T_r}$
$\mathbf{N}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{T})$	: $\mathrm{N}_k(\mathrm{T}) = \{\xi_{\mathrm{O},T_k}/T_k \subseteq \mathrm{B}\}$ ayrışımlar kümesi
$\mathbf{V}_{\boldsymbol{N_k}}$	: $\mathrm{V}_{N_k} = \wp(O) \times \wp(O) \rightarrow [0,1]$
$\mathbf{N}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{T})_*\boldsymbol{X}$	: $\mathrm{N}_k(T)_*X = \cup_{[x]_{T_k}} \subseteq \mathrm{X}[x]_{T_k}$
$\mathbf{N}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{X}$	: $\mathrm{N}_k(T)^*X = \cup_{[x]_{T_k}} \cap \mathrm{X} \neq \emptyset[x]_{T_k}$
$\mathbf{Tn}d_{N_k(T)}(X)$	: $\mathrm{Tn}d_{N_k(T)}(X) = \mathrm{N}_k(T)^*X \setminus \mathrm{N}_k(T)_*X = \{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_k(T)^*X \setminus \mathrm{x} \notin \mathrm{N}_k(T)_*X\}$

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NESNELERİN YAKINLIĞINA BİR MATEMATİKSEL YAKLAŞIM
Yunus Emre MERCAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

33 + ix

2023

Tez Danışman: Prof.Dr. İlhan İÇEN

Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan, 6 bölümden oluşan bu tezin I. bölümü Giriş bölümü olarak ele alındı ve literatür özeti yapıldı. II. bölümde Bulanık(Fuzzy), Esnek(Soft) ve Kaba (Rough) kümelerinin tanımı ortak özellikleri ve örnekleri verildi. III. bölümde Yakın küme (Near Set) özellikleri örnekleriyle anlatılmıştır. Ayrıca bu bölümde bahsedilen teorem, ispat ve örnekler ve simgeler tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. IV bölümde Yakın Yaklaşım Uzay hakkında bilgilendirmeler verilmiş ve bu uzay üzerine tanımlanan sembol ve özellikleri tablolar halinde verilmiştir. V bölümde yakın küme ile yaklaşımlı ve esnek küme arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bu ilişkiler için teorem ve ispatlara yer verilmiştir. VI bölümde tezin gelecekte ne gibi kullanım alanlarının olacağı diğer teorilere oranla avantajları ve dezavantajları belirtilmiştir

Anahtar Kelimeler: Küme, Yakın Küme, Yakın Yaklaşım Uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

A MATHEMATICAL APPROACH TO THE PROXIMITY OF OBJECTS

Yunus Emre MERCAN

İnonu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

33 + ix

2023

Supervisor: Prof.Dr. İlhan İÇEN

This paper has been prepared as a master thesis and it has been divided into six chapters; The first chapter is "Overview" and in this chapter literature review has been made, Second chapter, the specialties of the Fuzzy, Soft, and Rough sets and some instances of those shared, Additionally, in the third chapter, the specialties and instances of Near Set have been explained. Also, theorems proofs, instances and symbols that have been touched upon in this chapter form the original part of this thesis, In the fourth chapter, some details of nearness approximation space have been shared some symbols and specialties described in this space have been given by using tables, When it comes to the fifth chapter, Near Set Theory and its relation with the Flexible Set has been investigated also been shared along with the theories and proofs of the relation, Lastly in the sixth part, the possible usage area of this thesis along with the advantages and disadvantages has been also indicated.

Keywords: set, near set, nearness approximation space

1. GİRİŞ

Yüzmilyar galaksiden birinin dışında iyi olmayan bir yıldızın etrafında dönen küçük bir gezegende yaşayan bilinirlikte en gelişmiş canlı olan insanoğlu, uygarlığın doğuşundan beri evrenin temel düzenini anlamak için can atmakta ve evrenin sınır şartları ile ilgili bilinmezlikleri araştırmaktadır.Varolan dünyanın sınırlarını keşfetmek ve evrenin temel kurallarını anlamak, ana konuyu bütünüyle belirlemek için araştırmalarımızın tam ortasında tüm bilinmezliklerin karanlıklarını aydınlatmak için matematiği anlamamız gereklidir. Galileo'nun deyimiyle evren matematik dilinde yazılmıştır. Bunu anlamak ve yorumlamak için Matematik dilini bilmemiz gereklidir. Matematiğin nesneler dünyasının deneysel değişkenleriyle olağanüstü bir uyum içinde bulunduğu gözlenir.

Nesneler dünyasını matematiğin içinde ifade etmek için küme teorilerinden yararlanılır. Küme teorilerinin sınırlılığı nesneler dünyasının kısıtlanmasına ve matematiksel ifade gücümüzün kısıtlanmasına neden olan tek etkendir. Bu sebeble bütün kısıtlanmışlıkları kaldırmak isteyen matematikçiler küme kavramı üzerinde daha fazla durmuşlardır. Küme kavramı 1810'da ilk defa tanıtan ve bugüne kadar yapılan birçok çalışmanın temelini kuran B. Bolzano olmuştur. Küme kavramına ait teoriler birden fazla matematikçi tarafından merak ile çalışılmış olmasına rağmen kümelerin bağlantılı olduğu ilk teoriler ve ilk çalışmalar kümeler teorisinin kurucusu tasarlayıcısı olarakta isimlendirilen G. Cantor'un [1] çalışmasıdır.

1879-1884 yılları arasında Cantor'un yayımladığı makalelerde kümeler teorisinin ilk temelleri atılmıştır. Cantor hayatı boyunca kümeler üzerine çalışmış ve yakın zamandaki çalışmalarını ise 1895 ve 1897 yıllarında sunmuştur [2,3]. Bu makalelerde küme teorilerinde halen kullanmakta olduğumuz alt küme kavramlarına yer vermiştir. Cantor'un günümüze kadar makalelerinden hareketle araştırma yapan matematikçiler Cantor'un araştırmalarını dönemin şartlarına göre doğru ve matematik tarihinin en değerli ve en eşsiz bilgiler olarak kabul etmişlerdir. 1810'dan günümüze kadar sürekli aktif olan ve gelişmeye müsait kümeler teorisi insanlık tarihine her yeni bir bilgide yeni hedefler ve yeni sonuçlar koydurtmaktadır [4,5].

Kümeler teorisinin genişletilmesi matematikçi E. Zermelo çalışmaları sayesinde 1904 ile 1908 yılları arasında başlamıştır [6, 7]. Cantor'un çalışmalarını geliştirerek yeni kavramlar üzerinde duran E. Zermelo, toplu yapıtlarını 1982'de halka sunmuştur. Kümeler teorisini, detaylı şekilde ele alınan J. Jech'in kitabı [8], kümeler teorisini açıklayan en önemli kaynaklardan biridir.

G. Cantor'un başlattığı kümeler teorisi matematikçilerin kümeler üzerine kendilerini yeniden keşfetme ve kendilerinde görünmeyeni görme olanağı sağlamıştır. Bu sayede matematikçiler matematiğin farklı bakış açısı üzerinde durmuş ve teorilere farklı yaklaşımların olabileceğini anlamışlardır. Kümeler teorisi sembolik mantık ile bağdaşmış ve mantığın gerektirdiği sonuçlar doğrultusunda ortaya çıkmıştır. Felsefenin yandalı olarak ortaya çıkan mantık, zamanla kendi başına bir bilim alanı haline gelmiştir. İlk olarak Aristo tarafından çalışılan mantık, gündelik hayatta gerçekleşen olay ve olguların algılanabilirlik oranını yükseltmek ve doğru sonuçlara ulaşmak için geliştirilmiştir. Bu çalışmalar sonucunda Aristo mantığı günümüze kadar ulaşmış ve bilim insanlarının önemli destekleriyle gelecek vadeden bir ihtisas alanı haline gelmiştir.

Günlük yaşantımızdaki belirsizlikler sadece filozofların değil matematiğin yanında mantıkla uğraşan bilim insanlarının odak noktası haline gelmiştir. Aristo'nun düşüncelerinin günlük yaşantımızın şekillenebilmesi için eksik kaldığı belirlendikten sonra Türk Matematikçi L.A. Zadeh, 1965 ile 1975 yılları arasında 'Bulanık Küme' ve 'Bulanık Mantık' teorisini ispatlayarak bilim dünyasına yeni bir pencere açmıştır [9,10]. Daha sonra 1982 yılında Z. Pawlak, ağırlıklı olarak bilgi modellemelerindeki uyuşmazlıkların şekillenebilmesi için 'Kaba Küme' teorisini güncellemiştir [11].

Kaba kümeler, G. Frege'nin tutarsızlıklarını modelleyebilmek için uyguladığı özel bir yaklaşım modeli olarak düşünülebilir [12]. Kaba küme teorisi dikkate alınarak mühendislik ve cebirsel yapılar üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bu cebirsel yapılar ilk olarak T. B. Iwinski sayesinde hayat bulmuştur [13]. Daha sonra S. Nanda ve R. Biswas kümelerde kaba alt grup teorisini [14], N. Kuroki kaba alt halka teorisini [15] tanımlamıştır. N. Kuroki ve P. P. Wany, normal alt gruplar için alt ve üst yaklaşımların çeşitli özelliklerini araştırmışlardır. Ancak gelişen teknoloji ile birlikte bu çalışmalarda eksikliklerin fark edilmesi üzerine N. Kuroki ve P. P. Wany tarafından kullanılan yöntemlerde gözden geçirilmiştir. Bu yapılar için birçok bilim insanı çalışmalar yapmıştır [16-27].

Ayrıca danışman hocam Prof. Dr İlhan İÇEN'in içinde bulunduğu bir çalışma grubu kaba kümeler teorisine önemli katkılar sağlamıştır. [28] Küme "1998'e kadar stabil bir şekilde ilerleyen küme teorilerine 1999'da D. Molodtsow tarafından farklı bir perspektif olan 'Esnek Küme' teorisi eklendi [29]. Esnek Küme teorisi matematik alanının yanı sıra mühendislik ve teorik alanlarda da büyük ilgi gördü [30, 31].

Aynı şekilde, 2002 yılında J. Peters tarafından 'Yakın Küme' teorisi olarak adlandırılan kaba kümelerin genelleştirmesi geliştirildi [32]. Bu yakın kümelerde verilen reel değerli fonksiyonlar kullanılarak elde edildi. Bu durum, yakın küme teorisini diğer tüm teorilerden avantajlı kılar ve somut olayların veya olayların sonuçlarının zihinsel algılamasını sağlar [33-38].

Bulanık kümeler, yakın kümeler ve kaba kümeler 1875 yılında G. Cantor tarafından verilen küme tanımının tamamlayıcısı olarak öngörülmektedir. G. Cantor'un küme kavramı, bu kümelerle ilişki içindedir. Z. Pawlak ise kaba kümeleri Cantor küme kavramı ile ilişkilendirerek yaklaşımlı kümeleri klasik küme kavramlarının yeni bir formu olarak tanımlamıştır. J.F. Peters'in 2002'de ortaya attığı yakın küme teorisinde 'kaba küme yakın kümedir' (Ancak bazı şartlarda tersi doğru olmayabilir) teorileri öne sürülmüş ve yakın kümelerin yaklaşımlı kümelerin genelleştirmesi olduğu ortaya çıkmıştır.

Bulanık üyelik fonksiyonları, bulanık kümeleri karakterize etmek için kullanılırken; yakın kümeler, 1993'te M. Pavel tarafından görüntülerin topolojisi ve görüntü kayıtlarının işlevsel hale gelmesi için tanımlanan reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak belirlenir [39].

Bu durum, bize bulanık kümeler ve yakın kümeler arasında ilişki olduğunu gösterir ve şu sonuca ulaştırır: 'Her bulanık küme bir yakın kümedir'. Bu sonuçta bize bulanık kümelerin genellemesinin bir yakın küme olduğu sonucuna ulaştırır.

Benzer sonuçlar esnek kümeler için de geçerlidir. Z. Pawlak ve J.F. Peters, reel hayattaki ortak noktalarından kaynaklanan nedenlerle yaklaşımlı kümelerden daha kapsamlı olan yakın kümeleri geliştirdiler [32].

J.F. Peters, daha sonra yakın kümeleri daha geniş alanlara yayarak topoloji uygulamaları [34], bilgisayar uygulamaları [40-44] ve özellikle nesnel hayattaki görüntü analizi üzerine çalışmalar yaptı [45-48].

2. FUZZY (BULANIK) KÜME, SOFT (ESNEK) KÜME, ROUGH (YAKLAŞIMLI) KÜME

2.1 Fuzzy (Bulanık Küme)

Bu bölümde, belirsizliklerin giderilmesi için araçların yanı sıra sade dildeki belirli olmayan kavramların ifade edilmesine yardımcı olan bulanık kümeler tanıtılacaktır. Bulanık küme kavramı ünlü Türk matematikçi L.A. Zadeh tarafından tanımlanmıştır [10, 11].

Bulanık kümelerde, elemanlar klasik küme kavramından farklı olarak kümeye belirli durumlarda ait olurlar. Aşağıdaki tabloda, klasik küme ile bulanık küme arasındaki farklar daha iyi anlatılmıştır.

Klasik Küme	**Bulanık Küme**
B veya B değil (B herhangi bir küme)	B ve B değil (B herhangi bir küme)
Kesinlik vardır	Kısmilik vardır.
Ya Hep Ya Hiç method sağlanır	Belirli derecede sağlar
0 veya 1 değerlerini almaktadır	0 ve 1 değerleri arasında süreklilik kazanır
İkili Birimler	Bulanık Birimler

Şekil 2.1: Klasik kümelerin ve bulanık kümelerin arasındaki ayrım

Bulanık kümelerde elemanların ait olma durumu matematikçiler tarafından çıkarım fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirilir. Elemanlar, kendilerine ait üyelik dereceleri ile birlikte sunulur. Bu sayede, evrendeki her nesne, üyelik fonksiyonuna göre belirli bir derecede bir kümeye ait olabilir ve bu şekilde matematiksel dilde tanımlanabilir. Bu yaklaşım, matematik formüllerinin bilgisayar sistemlerine entegre edilmesi kadar, insan fikirlerini ve düşüncelerini de ifade etmede olanak sağlar.

Tanım 2.1.1: Verilen X kümesi boş kümeden farklı bir küme olsun ve I = [0,1] olmak üzere X kümesinden I' ya tanımlanmış bütün dönüşümlerin kümesi I^X olsun. Tanımlanan I^X'i oluşturan bütün elemanlara X üzerinde bulanık kümeler olarak ifade edilir.

Bulanık kümeler genellikle A, B, C, D…. gibi büyük harfler ile gösterilir, $\mu_A : A \to [0,1]$ olmak üzere her $x \in A$ için $\mu_A(x)$ değerine x elemanının A kümesindeki aidiyet derecesi denir.

A bulanık kümesi $A = \{(x, \mu_A(x) : x \in X\}$ şeklinde gösterilir. Burada $\mu_A(x)$ aidiyet derecesidir. [10]

Diğer bir deyişle bulanık küme, A'nın her bir elemanını [0,1] kapalı aralığında bir sayıya eşleyen bir fonksiyon ile belirlenir.

Burada 3 durum söz konusudur;

1. Üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$ =1 ise verilen x elamanı tamamen bulanık kümeye aittir.
2. Üyelik fonksiyonu $\mu_A(x) = 0$ ise bulanık kümeye ait değildir.
3. $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ise verilen x elemanın bulanık kümeye kısmi üyeliği vardır.

Bulanık kümeler, bulanık mantık tanımlarının geliştirilmesiyle birlikte Mandani ve diğerleri tarafından uygulamalara dönüştürülmüş ve bu alanda ses getiren adımlar atılmıştır [49-51]. Bulanık kümeler, klasik Cantor küme kuramının genişletilmiş bir versiyonudur. Klasik Cantor kümesi üzerinde yapılan işlemler, bulanık küme için genişletilerek uygulanabilir.

Tanım 2.1.2: Verilen P ≠ Ø kümesi için, Y ve Z kümeleri P'de birer bulanık küme olmak üzere Y ve Z bulanık kümelerinin birleşimi $\forall x \in$ P⋃Z $için$,

$$\mu_{Y \cup Z}(x) = max\ \{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}$$

şeklinde gösterilir [52].

Tanım 2.1.3: Verilen P ≠ Ø kümesi için P üzerinde Y ve Z kümeleri birer bulanık küme olmak üzere Y ve Z bulanık kümelenin kesişimi $\forall x \in$ P⋂Z için;

$$\mu_{Y \cap Z}(x) = min\ \{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}$$

ile gösterilir [52].

Tanım 2.1.4: Verilen P ≠ ∅ kümesi için K bulanık kümesinin değili(tümleyeni) $\mu_{\bar{K}}$ olarak gösterilir ve $\forall x \in$P $için$;

$$\mu_{\bar{K}\,(x)} = 1 - \mu_K(x)$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.1.5: Verilen P $\neq \emptyset$, Y ve Z kümeleri P'de bulanık kümeler olmak üzere $\forall x$∈P için Y ve Z kümelerinin aidiyet derecesi(çıkarım fonksiyonu) eşit ise Y ve Z kümesine eşit bulanık kümeler denir [10].

Bulanık kümelerin ve klasik kümelerin birleşme, değişme, dağılma ve De Morgan kurallarını sağlama özellikleri yapı bakımından aynıdır. Bulanık kümeleri klasik kümelerden ayıran fark ise bir kümenin tümleyeni alma işleminde ortaya çıkmaktadır.

Klasik kümelerde alt ve üst sınırlar keskin olduğu için, herhangi bir G kümesi için G ≠ Ø olduğunda G ∩ $\bar{G}$ = Ø ve G ∪ $\bar{G}$ = E gibi özellikler gözlemlenebilir. Ancak bulanık kümelerde kısmilik(fuzziness) söz konusu olduğu için, böyle keskin ayrımlar mevcut değildir.

Bulanık kümelerde, kısmi üyelik kavramı nedeniyle G ∩ $\bar{G}$ = Ø ve G ∪ $\bar{G}$ = E gibi tamamlayıcı özellikler ortadan kalkar. Bu sayede, bulanık kümeler daha esnek ve kesin sınırlar olmaksızın verilerin işlenmesine olanak sağlar.

Tanım 2.1.6: K boştan farklı bir küme olsun. R: K × K → [0,1] dönüşümüne K kümesi üzerinde bir benzerlik(emsallik) bağıntısı denir. Bu benzerlik bağıntısı, K kümesi içindeki her eleman çifti için [0,1] aralığında bir değer alır ve bu değerler elemanların ne kadar benzer olduğunu belirtir.

(K, R) ikilisine bulanık yaklaşım uzayı denir. Bu uzayda R, K kümesi üzerinde bir benzerlik bağıntısı olup şu özellikleri taşır [53]:

(i) Yansıma: ∀s ∈ K $için$ R (s, s) = 1

(ii) Simetrik: ∀s, t ∈ K $için$ R (s, t) = R (t, s)

(iii) Geçişken: ∀ s, t, z ∈ K $için$ R (s, z) ≥ min {R (s, t), R (t, z)}

Teorem 2.1.1: Boştan farklı P kümesi üzerinde Y ve Z iki bulanık küme olarak kabul edilsin Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Y∪Z bulanık kümesi Y ve Z kümelerini kapsayan en küçük bulanık kümedir.

ii) Y∩Z bulanık kümesi Y ve Z tarafından içerilen en büyük bulanık kümedir [53].

İspat:

I. Y ve Z bulanık kümelerinden aidiyet dereceleri μ_Y ve μ_Z olmak üzere ∀y∈P olsun; $\mu_{Y \cup Z}(y) = max\{\mu_Y(y), \mu_Z(y)\}$ şartını sağladığından Y ≤ Y∪Z ve Z ≤ Y∪Z dir.

Diğer taraftan Y ve Z'yi kapsayan herhangi bir bulanık küme D olsun. Yani Y ≤ D ve Z ≤ D olsun. O halde ∀y∈P için $\mu_Y(y) \leq \mu_D(y)$ ve $\mu_Z(y) \leq \mu_D(y)$ dir.

Dolayısıyla ∀y∈P için $max\{\mu_Y(y), \mu_Z(y)\} \leq \mu_D(y) \Leftrightarrow \mu_{Y \cup Z}(y) \leq \mu_D(y)$ dir.

Yani Y∪Z ≤ D olup Y∪Z bulanık kümesi Y ve Z yi içeren en küçük bulanık kümedir

II. Ayrıca Y ve Z bulanık kümelerinin aidiyet dereceleri sırasıyla $\mu_Y(x)$ ve $\mu_Z(x)$ olmak üzere ∀y∈P, $\mu_{Y \cap Z}(y) = min\{\mu_Y(y), \mu_Z(y)\}$ olduğundan Y∩Z ≤ Y ve Y∩Z ≤ Z olur. Diğer yandan Y ve Z tarafından içerilen herhangi bir D bulanık kümesi alalım. Yani D ≤ Y ve D ≤ Z olsun. O halde ∀y∈P için $\mu_D(y) \leq \mu_Y(y)$ve $\mu_D(x) \leq \mu_Z(y)$ olur. Bundan dolayı ∀y∈P için $\mu_D(y) \leq min\{\mu_Y(y), \mu_Z(y)\}$ dir. Yani D ≤ Y∩Z dir.

Sonuç olarak, Y∩Z bulanık kümesi, Y ve Z tarafından içerilen en büyük bulanık kümedir.

Not: X, boş bir kümeden farklı bir küme olsun ve T bir bulanık küme olsun. Bu durumda;

i) $T \cap \bar{T} = \emptyset$

ii) $T \cup \bar{T} = X$ her zaman bu eşitlik sağlanamayabilir.

Bu durum bulanık kümeler, klasik küme kuramından bu yönüyle farklılık oluşturur [53]. Bunu aşağıdaki örnekte gösterebiliriz

Örnek 2.1.1: X kümesi {1, 2, 3, 4} ve A bulanık kümesi {1, 2} elemanlarından oluşsun.

Bu durumda $\bar{A}$, A'nın tamamlayıcısı olup {3, 4} elemanlarından oluşan bir kümeyi temsil eder. Ancak $A \cap \bar{A} = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$ olacak şekilde boş küme olurken,

$A \cup \bar{A} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = X$ olur.

Bu nedenle bulanık kümeler, klasik küme kuramından bu açıdan farklılık gösterir.

2.2 Soft (Esnek) Küme

Bu bölümde bulanık kümelerde üyelik fonksiyonlarının seçiminde zorlanılması üzerine bulanık kümeyle çok yakından bir konu olan soft esnek küme kavramı tanıtılacaktır. Bulanık küme teorilerindeki belirsizlik ve zorluk durumunu ekarte etmek isteyen Molodstov 1999 tarihinde esnek küme kavramını açıklamıştır [29]. Molodstov, uzak zamanda yaptığı çalışmasında, esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzlü olmayan tarafını, Riemann İntegrali ölçü teorisi gibi birden fazla alana net bir şekilde aktarmıştır [54]. Bu çalışma, matematiksel analizde ve bulanık matematikte yeni perspektifler açarak, esnek kümelerin geniş uygulama alanlarına olanak sağlamıştır. Molodstov'un özgün yaklaşımı, bulanık mantık, sistem teorisi ve optimizasyon alanlarında da ilgi çekici sonuçlara yol açmıştır.

Bu kısımda Y evrensel bir küme, K parameter kümesi olmak üzere, P(Y), Y'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq K$ bir alt küme olsun.

Tanım 2.2.1: Y evrensel kümesi üzerinde tanımlanan ikililerin oluşturduğu(F_A, Y) soft kümesi;

F_A: K → P(Y) olmak üzere (F_A, Y)= {(t,F_A(t): t ∈ K, $F_A(\text{t}) \in P(Y)$} şeklinde gösterilir. Buradan $\text{t} \notin A$ ise $F_A(\text{t}) = \emptyset$ olur. Y evrensel kümesi üzerindeki bütün soft kümeler S(F_A, Y) ile gösterilir.

Örnek 2.2.1: Ali ve Ayşe ev kiralamak istiyor. (F,X)Soft kümesi evin özelliklerini açıklasın.

K = { $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$} kiralık evlerin kümesi olsun.

E = {e_1 =küçük, e_2 = merkezde,e_3 = uygun,e_4 = gösterişli,e_5 = arakat}

parametreler kümesi F(e_1) = { X_2, X_4}, F(e_2)={ X_1, X_3, X_4}, F(e_3) = ∅,

F(e_4) = { X_1, X_3, X_5}, olsun. (F, X) soft kümeleri;

(F, X) = {{ X_2, X_4},{ X_1, X_3, X_4}, ∅ ,{ X_1, X_3, X_5} ,{ X_1, X_6} şeklinde oluşturulabilir.

Tanım 2.2.2: Verilen $F_\emptyset \in$ S(X, E) için $F_\emptyset$'de bir alt eleman yani $F_\emptyset$(e) = ∅ eşitliği sağlanırsa $F_\emptyset$, dolu olmayan(boş) soft küme olarak adlandırılır ve F_Φ ile tanımlanır [65].

Tanım 2.2.3: X evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme (B,Y) ve (E,D) olmak üzere;

B(Y)$\widetilde{\subseteq}$ E(D) ve E(D) $\widetilde{\subseteq}$ B(Y) ise esnek kümeleri B(Y) =E(D) denir [30].

Tanım 2.2.4: E = $\{e_1, e_2, e_3, , , . e_n\}$ bir parametreler kümesi olmak üzere. E' nin değili

$\neg E$ = $\{\neg e_1, \neg e_2, \; .....\; \neg e_n\}$ ile tanımlanır. Burada $\forall e_i \in E$ için $\neg e_i = e_i$'nin değili şeklinde ifade edilir [30].

Tanım 2.2.5: Z evrensel kümesi üzerinde (B, Y) şeklinde tanımlanan esnek bir yapı düşünelim, burada B elemanları Y özellikleriyle birlikte göz önünde bulundurulur.;

Eğer ∀e∈ Z için F(e) = Y olursa (B,Y) esnek kümesi Y mutlak esnek kümesi olur ve $\tilde{Y}$ ile gösterilir.$\widetilde{Y^c} = \phi$ ve $\widetilde{\phi}^{\,c} = \tilde{Y}$ olur [30].

Tanım 2.2.6: X evrensel kümesi üzerinde (B, Y) ve (C, D) iki esnek küme olmak üzere;

herhangi bir K kümesi için K = Y ∪ D olmak üzere ∀t∈K için

$$Z(j) = \begin{cases} B(j), & j \in Y - D \\ C(j), & j \in D - Y \\ B(j) \cup C(j), & j \in Y \cap D \end{cases}$$

şeklinde oluşturulan (Z, K) esnek kümesi (B,Y) ile(C,D) (esnek) kümelerinin birleşimi ile oluşturulur ve (B, Y) $\widetilde{\cup}$ (C, D) = (Z, K) şeklinde gösterilir [30].

Önerme 1.2.2: X evrensel kümesi dahilinde (K, L) esnek küme olsun. (K, L) esnek kümesi aşağıdaki şartları sağlar [30].

i. (K, L) $\widetilde{\cap}$ (K, L) = (K, L)

ii. (K, L) $\widetilde{\cup}$ $\widetilde{\emptyset}$ = (K, L)

iii. (K, L) $\widetilde{\cap}$ $\emptyset$ = $\emptyset$

iv. (K, L) $\widetilde{\cup}$ $\tilde{L}$ = $\tilde{L}$

v. (K, L) $\widetilde{\cap}$ $\tilde{L}$ = (K, L)

Önerme 1.2.3: X üzerinde tanımlanan esnek kümeler (K, L) ve (M, N) olmak üzere;

i. $((\mathrm{K}, \mathrm{L})\ \tilde{\cap}\ (M, N))^{C} = (K, L)^{C}\ \tilde{\cup}\ (M, N)^{C}$

ii. $((\mathrm{K}, \mathrm{L})\ \tilde{\cup}\ (M, N))^{C} = (K, L)^{C}\ \tilde{\cap}\ (M, N)^{C}$

şartlarını sağlar [30].

2.3 Rough (Yaklaşımlı, Kaba) Küme

Bu kısımda belirsizliklerin çözümünde önemli rol oynayan kaba (rough) küme teorisi açıklanacaktır. 1982'de Pawlak [11] tarafından tanımlanan kaba küme teorisi matematiğin ve belirsizlik içeren problemlerin kullanıldığı bilim dallarının karanlık kısımlarını aydınlatma amacıyla kullanılmıştır.

Kaba kümeler çeşitli bağlantılar yardımıyla bir kümenin elamanlarını iki farklı yaklaşım olarak gösterilmesidir. Bu iki yaklaşım alt ve üst yaklaşım olarak adlandırılır. Alt yaklaşım kümenin kendisinden farklı alt kümesi olan denklik sınıflarının birleşimi iken, üst yaklaşım ise kümenin kendisi ile kesişimi boştan farklı olan denklik sınıflarının birleşimi olarak tanımlanır.

Yaklaşımlı kümelerin sınır bölgesi, ne kendisine ne de dışındaki elemanlara ait olan bir bölgede bulunur; bu yüzden belirsiz kavramlar net elemanlarla açıklanamazlar. Bu durumda, belirsiz kavramların yerine, alt ve üst belirsiz olmayan kavramları olarak adlandırılan iki belirli terim kullanılabileceği ifade edilmektedir [55].

Bilgi sistemlerinde, yaklaşımlı olan kümeler matematiksel modellere dönüştürülerek belirsiz kavramların birçok kullanımı sağlanır [56]. Daha önce ispatlanmış Yaklaşımlı küme teorisi, discriminant analizi gibi çeşitli yöntemlerle de ilişkilidir [57]. Ayrıca, karar analizi teorisi yaklaşımlı küme teorisi için güncellenen bir yöntemler bütünü olarak öne çıkar [58-59]

Tanım 2.3.1: Objelerin bir kümesi U ve Y kümeside U kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; U üzerinde belirtilen Y kümesini bir H denklik bağıntısına göre ele alalım. H bağıntısına göre bir y elemanının denklik sınıfı T_y olsun. Bu durumda alt ve üst yaklaşım

$$H(Y)_* = \{y \in U : T_y \subset Y\} \text{ ve}$$
$$H(Y)^* = \{y \in U : T_y \cap Y \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanır [11].

Tanım 2.3.2: U evrensel bir küme olmak üzere ve Y ⊆ U diyelim. $TN_A(Y) = H(Y)^*$- $H(Y)_*$ kümesine Y kümesinin sınır alanı(bölgesi) adı verilir [60].

$TN_A(Y) \neq \emptyset$ ise Y kümesine kaba küme denir.

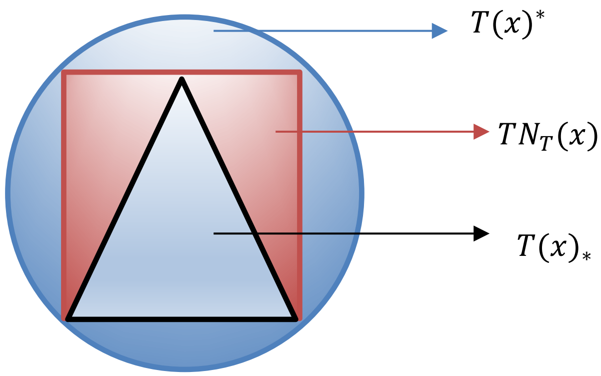
İncelendiği üzere, klasik küme ve yaklaşımlı küme kavramları arasında tamamen farklılık bulunmamaktadır. Yaklaşımlı kümeyi, klasik kümenin bir tür genişletmesi veya tamamlayıcısı olarak değerlendirebiliriz. Bu bağlamda aşağıdaki ifadeler dile getirilebilir;

i. Bir K kümesinin T evrensel kümeye göre üst yaklaşımı, K kümesinin T evrensel kümeye göre belirsizlik içeren K' kümesinin elemanlarından oluşan bir kümedir.

ii. Verilen bir K kümesinin T evrensel kümeye göre alt yaklaşımı, K kümesinin kendisinden farklı alt kümesi olan T evrensel kümeye göre kesin K'nın elemanı denklik olarak kabul edilebilen tüm elemanların toplamıdır.

iii. K kümesinin T evrensel kümeye göre sınır bölgesi, K kümesine ait olmayarak T evrensel kümeye göre hem K kümesinin elemanı olarak sınıflandırılabilen tüm elemanların kümesidir.

Tanım 2.3.2'yi göz önünde bulundurarak;



Şekil 2.2: Verilen kümenin dışı içi ve sınır bölgesi

Önerme 2.3.1: (Z, R) yaklaşım uzayı olsun. Z'nin alt kümeleri K ve Y olarak belirlensin. Bu alt ve üst yaklaşımlar, aşağıdaki özellikleri sağlar [60].

i. $T(K)_* \subseteq K \subseteq T(K)^*$

ii. $T(\emptyset)_* = T(\emptyset)^* = \emptyset, T(Z)_* = T(Z)^* = Z$

iii. $T(K \cap Y)_* = T(K)_* \cap T(Y)_*$

iv. $T(K \cup Y)^* = T(K)^* \cup T(Y)^*$

v. $K \subset Y \Rightarrow T(K)^* \subseteq T(Y)^*$ ve $T(K)_* \subseteq T(Y)_*$

vi. $T(K \cap Y)_* \supseteq T(K)_* \cap T(Y)_*$

vii. $T(K \cap Y)^* \subseteq T(K)^* \cap T(Y)^*$

Yukarıdaki yaklaştırmaların topolojik olarak genişletilmiş veriler içinde ve dışında uygulamaları olduğu açıktır. Bu sebeple bulanık küme teorisinin, yaklaşımlı küme teorisinden tamamen farklı matematiksel ifadelere ihtiyaç duyduğu belirtilmiştir.

Alt ve Üst yaklaşım üzerine örnekler

Örnek 2.3.1: A= {k, r, j, t, v} ve A üzerinde R = {(k, k), (k, r), (r, k), (r, r), (j, j), (j, t), (t, j), (t, t), (v, v)} denklik bağıntısı verilsin. Buna göre R'nin denklik sınıfı aşağıdaki gibidir.

$$[k]_R = [r]_R = \{k, r\}$$

$$[j]_R = [t]_R = \{j, t\}$$

$$[v]_R = [v]$$

K= {r, j, t} ⊂ A kümesini ele alalım ve bu kümenin üst ve alt yaklaşımı

$\bar{R}(K) = \{k, r, j, t\}$

$\underline{R}$ (K) = {j, t}

Sınır Bölgesi $TN_T(k) = \bar{R}(K)$ - $\underline{R}$ (K) = {k, r} şeklindedir.

Örnek 2.3.2: U = $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}\}$ objelerin kümesi

F = $\{a_1, a_2, a_3\}$ verilen değişkenler kümesi Va_1= {1,2,3}, Va_2 = {1,2} Va_3= {1,2,3,4} Tüm değişkenin alabileceği değerlerin kümesini gösteren kümeleri inceleyelim. Yukarıda gösterilen U nesneler kümesi için elde edilen F = { a_1, a_2, a_3} matris formunda aşağıda tanımlayalım. Ayrıca bu sistem için f_a fonksiyonu aşağıdaki tablo gibi verilir.

Çizelge 2.1: $\boldsymbol{f_a}$ fonksiyonu

U	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$
Q_1	2	1	3
Q_2	3	2	1
Q_3	2	1	3
Q_4	2	2	3
Q_5	1	1	1
Q_6	1	1	2
Q_7	3	2	1
Q_8	1	1	4
Q_9	2	1	3
$\boldsymbol{Q_{10}}$	3	2	1

Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $[Q_i]_R$, Q_i elemanlarının denklik sınıfını göstermek üzere;

$[Q_i]_R$= {Q_j : Q_j, Q_i ile benzer değerlerden oluşan 1 ≤ i ≤ 10 ve 1 ≤ j ≤ 10} şeklinde tanımlansın. Bu tanımdan hareketle;

$[Q_1]_R$= $[Q_3]_R$=$[Q_9]_R$= {Q_1,Q_3, Q_9}

$[Q_2]_R$=$[Q_7]_R$=$[Q_{10}]_R$= {Q_2, Q_7, Q_{10}}

$[Q_4]_R$= {Q_4}

$[Q_5]_R$=$[Q_8]_R$= {Q_5, Q_8}

$[Q_6]_R = \{Q_6\}$

denklik sınıfları elde edilir.

U'nun A= {Q_1, Q_3, Q_4, Q_5,Q_9} Alt kümelerin alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınırı

$\bar{R}(A) = \{Q_1, Q_3, Q_4, Q_5, Q_8, M_9\}$

$\underline{R}$ (A) = {Q_1, Q_3, Q_4, Q_9}

$TN_T(A)$ ={Q_5, Q_8} elde edilir.

Tanım 2.3.3: Verilen bir kümenin sınır bölgesi yani TN_T= Ø ise Y kümesi K'ya klasiktir denilir. Eğer sınır bölgesi yani $TN_T \neq \emptyset$ ise Y kümesi K'ya göre kaba kümedir denir.

Kaba kümelerde yaklaşımın olasılık değerini hesaplatan

$$\propto_T(\mathrm{Y}) = \left|\frac{B(Y)_*}{B(Y)^*}\right|$$

$\propto_T(\mathrm{Y})$ katsayısı ile ifade gösterilebilir [4].

- Eğer verilen $\propto_B(\mathrm{Y}) = 1$ ise bu durum bize alt ve üst yaklaşımın $K(Y)_* = K(Y)^*$ eşit olduğu gösterilir bu sınırınn boş küme olduğunu bu da Y kümesinin K üzerinde klasik olduğunu belirtir.
- Eğer verilen $\propto_B(\mathrm{Y}) < 1$ ve Y kümesi K üzerinde yaklaşımlı kümedir.

Tanım 2.3.4: |B|, B kümesinin eleman sayısını ifade etmek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(x) = \frac{|B \cap T_x|}{|T_x|}$$

şeklinde tanımlanır [60].

Bu üyelik fonksiyonu, x'in B kümesine ait olma olasılığını ve T tarafından B hakkında kullanılan verilere dayanarak x'in B kümesine ait olma derecesini tanımlar. Bu yapı bakımından, bulanık kümede tanımlanan çıkarım işlevine (üyelik fonksiyonuna) benzerlik gösterir.

Açıkca yaklaşımlı kümelerdeki üyelik fonksiyonu verilen kümenin yaklaşımlarını, sınır bölgelerini açıklamak için kullanılır.

2.4 Temel Yaklaşım Uzayı

Hissedilebilen nesneler kümesi olarak verilen K, T nesnelerin ayırt edici özelliklerini belirleyen çıkarım fonksiyonlar kümesi ve $\sim_B$, K nesneler kümesinin B ⊆ T ile ilgili $\xi_B = K \setminus \sim_B$ ayrışımını belirleyen ayırt edilmezlik bağıntısı olmak üzere (K, T, $\sim_B$) yapısını kullanarak yaklaşımlı küme teorisinin başlangıcını ve gelişimini açıklayabiliriz [35-61].

Tanım 2.4.1: K verilen bir nesneler kümesi olsun, $F \subseteq K$ kümesinin temel yaklaşımı F'in verilen bir alt kümesi olan $F_x \in \xi_B = K \setminus \sim_B$ sınıflarının toplamından(birleşiminden) oluşur.

Bu ayrışıma F kümesinin B- üzerinde alt yaklaşımı denir [61].

$$T_*F = \bigcup_{T_x \subseteq F} T_x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2: Bir T nesneler kümesi için X ⊆ T, X ≠ Ø olsun. Bir B_*X alt yaklaşımı elde ediyorsa X'e yakın küme denir [61].

Not: X ≠ Ø olan ve T_*X alt yaklaşıma sahip olan X kümesi olmak üzere;

T_*X alt yaklaşımı birleşim özelliği ile birlikte yakın küme olduğundan ve $T_*X \subseteq$ X alt yaklaşım aynı zamanda verilen kümenin alt kümesi oldugundan X bir yakın kümedir.

Tanım 2.4.3: Algılanabilir nesnelerin kümesi X ⊆ K olsun ve B kümesi X'den farklı olarak K'deki nesnelerin ayırt edici özelliklerini gösteren çıkarım işlevi kümesi olsun. X ⊆ K kümesinin bir başka yaklaşımı, verilen X kümesinin kesişimi boştan farklı olan;

$T_x \in \xi_B = K \setminus\sim_B$ sınıflarının toplamından oluşmaktadır. Bu yaklaşıma X'in B-üst yaklaşımı denir [63].

Tüm bu tanımlar vasıtasıyla T_*X , T^*X'in alt kümesi olduğu kanısına varılmıştır. T^*X üst yaklaşımının alt kümesi olan veya olmayan $T_x \in U \setminus\sim_B$ sınıfları tanımlanabilir.

Teorem: Belirli bir K nesnelerinin kümesi için $P \subseteq$ K olmak üzere, $P \neq$ Ø şartını sağlayan T^*P üst yaklaşıma sahip olan P kümesi, K kümesine ait bir yakın kümedir [61].

İspat: Yakın kümelerin özelliklerinden dolayı T^*P üst yaklaşımının alt kümeleride yakın küme sınıfları içerir. Dolayısıyla P ve T^*P'in bir yakın kümesidir. Üst yaklaşım tanımı gereği T^*P ve P kümesi birden fazla ortak nesneyi içerir ve bu ortak nesneler karşılıklı olarak eşleşen tanım ve özelliklere sahiptir. Bu durum T^*P ve P kümesinin yakın küme olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremle Alt ve Üst yaklaşıma sahip bir kümenin yakın küme olduğunu başarılı bir şekilde ispatladık. Şimdi, Sınır Bölgesine sahip bir kümenin de verilen şartlar doğrultusunda yakın küme olma koşulunu aşağıdaki teoremle kanıtlayacağız.

Teorem: K nesnelerin kümesi için P ⊆ K olacak şekilde $|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| \geq 0$ ise verilen P kümesi yaklaşımlı kümedir [61].

İspat: Verilen sınır bölgelerinde de iki durum söz konusudur. Bunlar

$|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| > 0$ ve $|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| = 0$ durumlarıdır.

- **1.durum** $|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| > 0$ ($|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| \neq \emptyset$) olmak üzere;

P ≠ Ø ve P ⊆ K olsun. Böylece T_*P alt yaklaşımın, T^*P üst yaklaşımının bir öz alt kümesi olduğunu söylenebilir. $T_x \in T_*P$ Sınıfları ξ_B ayrışımının dâhili elemanlarıdır. T_*P (Alt yaklaşım) tanımı gereğince verilen P kümesi T_*P (alt yaklaşımdaki) sınıfları barındırır. T_*P alt yaklaşımı kural gereği yakın küme olduğundan P'ye bir yakın kümedir denir.

- **2.durum** ($|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| = \emptyset$) $|\mathrm{T}nd_{\mathrm{T}}\mathrm{P}| = 0$ ise alt yaklaşım üst yaklaşıma eşittir

($T_*P = T^*P$) ve $T_*P \subset P$ durumu söz konusudur. Böylece alt yaklaşım (T_*P) ve P ortak özelliklere sahip nesnelere sahiptirler. Böylece P'e bir yakın kümedir denir.

3. YAKIN KÜME (NEAR SET)

Yakın küme kavramının temelleri:

Yakınlık günlük hayatımızda birçok işlevi yerine getirmemizi sağlayan bilişsel bir kavramdır. Hayatımızın birçok yerinde kulllanılan yakınlık fikrinin temel olarak matematiksel anlamda açıklanması yakın küme teorileriyle aydınlığa çıkmıştır.

Yakın küme teorisi, ilk olarak 1982 yılında Z. Pawlak [62] tarafından yaklaşımlı küme teorisi ve Orlouska'nin yaklaşma alanları üzerine yaptığı çalışmalarla temelleri atılmıştır [63].

Her ne kadar geçmiş zamanda çokça bahsedilmesine rağmen yakın küme teorisi ilk defa J. Peters tarafından 2007 yılında 'Near sets General Theory about nearness of object' isimli tanımlanmıştır. Peters çalışmasında objelerin ve nesnelerin aynı özelliklerini veren fonksiyonlar yardımıyla oluşturduğu ayırt edilmezlik bağıntısı ile yakın yaklaşım uzayını tanımlamıştır [61].

Öte yandan matematikteki yakınlık tanımı ise klasik küme kavramındaki komşuluk ile örtüşerek sunulmaktadır. Böylelikle yakın kümeleri sezgisel olarak topolojinin birçok alanında, nesnel olarak ise keşfi yapılabilen nesnelerin fiziksel olarak açıklanmasıyla başladığını söyleyebiliriz. Ayrıca nesnelerin karşılaştırılması, sınıflandırması ve gözlemlenmesi içinde yakın küme teorisi kullanılmıştır [40].

Yakın küme teorisinde çıkarım fonksiyonları nesnelerin kendilerine has özellikleri temsil eder ve her bir nesnenin gözlemlenebilir özelliklerinin değerine denk gelen bir reel sayıya tanımlıdır [61].

Tanım 3.1: Tanımlanabilen nesnelerin kendine ait özelliklerini belirten fonksiyonlara çıkarım (probe) fonksiyonu denir [33, 51].

Çıkarım (probe) fonksiyonlarının en geniş özelliği benzer nesnelerde olduğu gibi benzer nesnelerin oluşturduğu kümeler arasında da benzerlik kurmasıdır [41]. Aynı zamanda çıkarım fonksiyonu çevremizde bulunan nesnel nesnelerin gözlemlenebilen fiziksel özelliklerini ölçer.

Verilen nesne bir veya birden fazla çıkarım fonksiyonu ile tanımlanabilir.

Çıkarım fonksiyonları reel olmayan değerlerle tanımlandığı gibi reel olan değerler ile tanımlanabilir. Biz reel olmayan değerler üzerinde tanımlarsak, yani;

Tanım 3.2: Algılanabilen nesnelerin yardımıyla, ışığın yansıyan ana kaynağındaki görsel cisimlerin çeşitli özelliklerini temsil eden bir küme oluşturabiliriz. O halde, O algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere; R reel sayılar kümesini belirtsin ve X ≤ O olsun Bir φ görsel çıkarım fonksiyonu φ: $X \rightarrow$ R şeklinde tanımlanır. Burada x∈X için φ(x), x nesnesinin görsel algıdaki zenginliği gösterir [64].

Önerme 3.1: Bir nesne yalnızca tanımlanabildiğinde algılanabilir [64].

Önerme 3.3: Nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlamak için nesnelerin tanımlarını formülleştirmek gereklidir [64].

Tanım 3.3: O ≠ Ø olsun. Varsayalım ki algılanabilir nesnelerin sonlu bir kümesi O olsun ve $\mathcal{F}$ nesnelerin aynı olmayan özeliklerini taşıyan çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi olsun $(O, \mathcal{F})$ ye algılanabilir sistem denir [61].

Çevremizde varolmuş fiziksel veya zihinsel olan herşey kendine has bir tanıma sahiptir. Bir x ∈ O örnek nesnesinin tanımı Φ(x) fonksiyonu dediğimiz çıkarım fonksiyonu ile belirlenir.Asıl olanın verilen nesneyi tanımlamak için φ_{i}: $O \rightarrow R$ bileşen foksiyonlarının oluşturduğu tanımdır. Ölçümünü yapacağımız özelliklerin kümesi $B \subseteq \mathcal{F}$ nesnesinin şartlarını sağlayan fonksiyonların kümesi olsun. O halde verilen nesne için yakın bir tanımlama almamız için B kümesi üzerinde verilen φ_i fonksiyonlarını incelemeliyiz. Yani Φ(x) =$(\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{\mathrm{L}})$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyon bu nesne hakkında bize yeterli bilgiyi sunacaktır.

$X \subseteq O$ algılanabilir nesneler kümesindeki nesneler, benzer veya verilen özellikler açısından farklılık göstermeyen özelliklere sahipse, bu kümeler yakın benzerlik taşıyan nesneleri içerir olarak kabul edilir.

Verilen Φ: O → R^{L} , ayrı bir özelliği ölçmek için kullanılır.

Böylece x, $x' \epsilon O$ algılanabilir nesneler olmak üzere $\Delta\varphi_{\mathrm{i}}$farkı;

$$\Delta\varphi_{\mathrm{i}} = |\varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) - \varphi_{\mathrm{i}}(x')\,|$$

biçiminde gösterilir. Z. Pawlak'ın $\Delta\varphi$ farkı ayırt edilemezlik bağıntısını belirler [62].

Teorem 3.1: Verilen $[y]_B \in \xi_B$ sınıfındaki nesneler yakın nesnelerdir [61].

İspat: Nesneler kümesinin ayrışımı $\xi_B = O/{\sim}B$ olmak üzere $[y] \in \xi_B$ olsun y, $y' \in [x]_B$ olmak üzere yukarıda verilen ayırt edilemezlik bağıntı tanımı gereğince □$\varphi_j \in B$;

$$\Delta\varphi_j = |\varphi_j\,(y) - \varphi_j\,(y\,')\,| = 0 \text{ dır.}$$

Bu şekilde, yakınlık kuralına göre y ve y' nesneleri birbirine yakın nesnelerdir

-Ayırt edilmezlik bağıntısı çok uzun bir zamanda ele alınmış olsa da yakın zamanda Peters tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.4: $y, y\,' \in O$, $B \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere;

$$\sim_B = \{(y, y') \in O \times O : \Delta\varphi_i = 0 \;\; \forall\, \varphi_i \in B\}$$

biçiminde tanımlı $\sim_B$bağıntısına O üzerinde ayırt edilmezlik bağıntısı denir.[61]

Tanım 3.5: B kümesine ait olan ve ayırt edici nesnelerin özelliklerini belirten çıkarım işlevlerinin (fonksiyonlarının) bir alt kümesi olsun. Y ve Y′, ilgili nesnelerin ve test nesnelerinin kümesi olsun ve $j \leq |B|$ durumunda $\varphi_j \in B$ olsun.

$$\mu_Y^B(\boldsymbol{Y'}) = \frac{|\{\varphi_j \in B : y \sim \varphi_j\;\; y' \,;\, y \epsilon Y,\; y' \epsilon\, Y'\,\}|}{|\,B\,|}$$

$\mu_Y^B : (O) \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna yakınlık ölçüm fonksiyonu denir [61].

Tanım 3.6: P, $P' \subseteq O$ kümesine ait nesneler kümesi olsun $B \subseteq \mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini belirten fonksiyonlar olmak üzere bu kısımda $t \epsilon P$, $t' \epsilon P'$için $t \sim_{\varphi_j} t'$ olacak şekilde $\varphi_j \in B$ varsa P kümesi P' kümesine yakındır denir [61].

Tanım 3.7: $P \subseteq O$ nesneler kümesine ait ve $y, y\,' \in P$ olsun. y, y ′ nesneleri yakın ise P kümesi kendisi üzerinde yakın küme veya P kümesinin içsel yakınlığı şeklinde tanımlanır [61].

Örnek 3.1: Tanım 3.7'ye göre X kümesi 3-boyutlu uzayda bulunan üçgenlerden oluşan bir nesne kümesini temsil ediyor olsun. Her üçgenin kenar uzunlukları ve iç açıları belirli bir aralıkta olsun. Bu durumda, X kümesine ait iki üçgen y ve y' için, kenar uzunlukları ve iç açıları bakımından benzerlik gösteriyorlarsa, yani bu özellikler arasındaki fark belirli bir sınıra göre küçükse, bu iki üçgen X kümesinin içsel yakınlığına örnek olarak verilebilir. Aynı şekilde, X kümesine ait iki üçgen, benzer veya verilen özellikler açısından farklılık göstermiyorlarsa, yani özellikler arasındaki fark sıfıra yakınsıyorsa, bu durumda da bu iki üçgen X kümesi üzerinde yakın bir alt küme oluştururlar. Bu nedenle, X kümesi, içsel yakınlık ve yakın alt küme özelliklerine sahip bir nesneler kümesidir.

Teorem 3.2: $\xi_B = O/\sim_B$ ayrışımındaki her bir denklik sınıfı yakın küme olarak kabul edilir [63].

İspat: $O/\sim_B = \{[x]_B | x \in O\}$ ayrışımında alınan herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı özelliklere sahip nesnelerin kümesi olarak belirlenir. Yani $x, x' \in [x]$ ise $x \sim_B x'$ olur. Bu durumda $[x] \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir.

Teorem 3.3: ξ_B ayrışımı, yakın kümedir [61].

İspat: Ayırt edilemezlik bağlantısı olarak tanımlanan $\sim_B$, O nesnelerinin kümesi $\xi_B = O/\sim_B$ ayrışımını ifade eder , $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir ve ξ_B ayrışımı birbiriyle yakın olan nesneler içerdiği için ξ_B yakın kümedir.

Tanım 3.8: $P \subseteq O$ nesneler kümesi ve P', P'' P'nin birer alt kümesi veya denk kümeler olsun. Eğer P', P'' yakın kümeler ise o zaman P bir yakın küme olarak kabul edilir. Bu duruma da yakın kümelerin hiyerarşisi denir [61].

Tanım 3.9: Herhangi bir küme, içerisinde yakın kümeleri barındırıyorsa, o küme yakın küme olarak kabul edilir. Bu tür yakınlığa kalıtımsal yakınlık adı verilir [61].

Örnek 3.2: X, gerçel sayılar kümesi R üzerindeki standart (euclidean) topolojiye sahip olsun. A = [0, 1] kapalı aralığı ve B = [0, 1) yarı kapalı aralığı olsun. A kümesi, [0, 1] kapalı aralığı olduğu için kapalı bir kümedir ve tüm sınırlarını içerir. Bu durumda, A kümesi bir yakın kümedir.

B kümesi, [0, 1) yarı kapalı aralığı olduğu için sınırlarının bir kısmını içerir. Buna karşılık, B kümesi kapalı değildir çünkü sağ sınırı 1'i içermez. Ancak, [0, 1) aralığında yer alan herhangi bir r değeri için N_r(B) açık bir komşuluk oluşturur ve bu komşuluk B kümesini içerir.

Bu durumda, B kümesi bir yakın kümedir.

A kümesi kapalı aralığı olduğu için yakın bir küme olarak kabul edilir.

B kümesi ise kapalı olmamasına rağmen herhangi bir r yarıçaplı komşuluğunun içerisine alınabildiği için yakın bir küme olarak kabul edilir. Dolayısıyla, A ve B kümesi kalıtımsal yakınlık teorisine örnek olarak gösterilebilir. B kümesi A kümesinin alt kümesidir ve A kümesinin yakınlığı B kümesine aktarılmıştır.

Örnek 3.3: X kümesi, reel sayılardan oluşan bir aralık olsun: $X = [0, 1]$, yani 0 ile 1 arasındaki tüm reel sayıları içeren bir küme. Bu küme içerisinde, alt küme olarak Y ve Z kümelerini ele alalım. Y kümesi, $Y = [0, 0.5]$ aralığındaki reel sayılardan oluşsun. Z kümesi ise, $Z = [0.4, 1]$ aralığındaki reel sayılardan oluşsun.

Bu durumda, Y ve Z kümeleri, içerisinde yakın kümeler barındıran bir küme olan X'in alt kümeleri olarak kabul edilebilir. Y kümesindeki herhangi bir eleman, X kümesindeki diğer elemanlara göre daha yakın olarak kabul edilir. Aynı şekilde, Z kümesindeki herhangi bir eleman da, X kümesindeki diğer elemanlara göre daha yakın olarak kabul edilir.

4. YAKIN YAKLAŞIM UZAYI

Bu bölümde, evrensel kümelerde tanımlanmış olan yakın yaklaşım uzayının yapısı ve kavramları tüm detaylarıyla ele alınacaktır. Aynı zamanda, daha önce kaba (rough) kümelerde ele aldığımız sınır bölgesi, alt yaklaşım, üst yaklaşım kavramları da bu bölümde birçok kez yeniden açıklanacaktır.

F nesne özelliklerini belirten fonksiyonlar ailesi O algılanabilir nesnelerin ailesi olmak üzere $B_r \subseteq B \subseteq F$ ve $|B_r|$ = r olmak üzere B_r (B'nin r elemanlı kombinasyonları, nesne özelliklerini ifade eder.) $\binom{|B|}{r}$) için ayırt edilmezlik bağıntısı tanımlanabilir ve bunu $\sim_{\boldsymbol{B_r}}$ ile gösterelim.

Bu bağıntı O algılanabilir nesneler ailesinde B_r kombinasyonu için farklı ayrışımlara yol açar. Sonuç olarak B_r fonksiyon ailesi ayrışım oluşturduğundan $\mathrm{N_r(B)}= \{\xi_{\mathrm{O,B_r}} : \mathrm{B_r} \subseteq \mathrm{B}\}$ ayrışımlar kümesi her farklı kombinasyonu ile bölüntü kümesini oluşturur. Bu koşullar bize ayrı bir tanım olarak bölüntü kümelerinin B'nin r elemanlı kombinasyonlarını veren nesne özelliklerini ifade eder ve ayırt edilmezlik bağıntısının birleşilebilirlik ile açıklanabileceğini gösterir.

Yakınlık fonksiyonu $\mathbf{V}_{\boldsymbol{N_r}} = \wp\ (O) \times \wp\ (O) \to [0,\ 1]$ şeklinde gösterilmiştir. Bu durumda, yakınlık fonksiyonu [0, 1] aralığında tanımlanır ve çıkarım işlevleri bağlı olarak özellikleri belirli olan nesne kümeleri arasındaki benzerliği ölçer.

Tanım 4.1: P nesnelerin özelliklerini gösteren çıkarım işlevlerinin kümesi, O algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere r ≤ $|B|$ olsun $\sim_{\boldsymbol{B_r}}$ O nesnelerin kümesinin $K_t \subseteq \mathrm{K} \subseteq P$ ile ilgili $\xi_{O,N_k} = O/\sim_{N_k}$ ayrışımını belirleyen ayırt edilmezlik bağıntısı $\mathrm{N_k(T)}= \{\xi_{\mathrm{O,N_k}} : \mathrm{N_k} \subseteq \mathrm{T}\}$ ayrışımların kümesi ve V_{N_k}yakınlık fonksiyonu olsun. (P, O,$\sim_{\boldsymbol{T_k}}$, $\mathrm{N_k(T)}$, $\mathbf{V}_{\boldsymbol{N_k}}$**)** yapısına yakın yaklaşım uzayı denir [12,63].

Teorem 4.1: $\mathrm{N_r(B)}$ Ayrışımların tümü, bir yakın küme olarak kabul edilir [63].

Tanım 4.2: O belirtilen Nesneler kümesi ve X O'nun bir alt kümesi veya O kümesine eşit olan bir küme olmak üzere B ⊆ F ile ilgili $\mathrm{N_r}$(B) alt yaklaşımı

$$\mathrm{N}_r(B)_*X = \cup \left\{[x]_{B_r} \subseteq \mathrm{X}\right\}$$

şeklinde gösterilir [63].

Tanım 4.3: O nesneler kümesinin bir alt kümesi veya O nesneler kümesine eşit olan B ⊆ F için $\mathrm{N_r}$(B)- üst yaklaşım denklemi;

$$\mathrm{N}_k(T)^*X \ = \cup \left\{[x]_{T_k} \cap \ \mathrm{X} \neq \emptyset \right\}$$

olarak tanımlanır [63].

Teorem 4.2: Nesneler kümesi O ve P O'nun bir alt kümesi veya O kümesine eşit olan bir küme olmak üzere B ⊆ F $\mathrm{N}_r(B)^*$ üst yaklaşımı yakın küme belirtir. [63]

İspat: Üst yaklaşım kümesi tanımı gözönüne alınırsa $\mathbf{N}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{P} \subseteq$ P ve $\mathbf{N}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{P}$, P'in üst kümeleri olan $[\mathbf{x}]_{\mathbf{N_k}}$sınıflarından oluşur. $[\mathbf{x}]_{\mathbf{N_k}}$ sınıfları yakın kümeler ile oluşturulduktan dolayı üst yaklaşımı da yakın kümedir.

Benzer durum $\mathrm{N}_k(T)_*P$ yaklaşımı üzerinde de geçerlidir.

Teorem 4.3: Nesneler kümesi O ve X, O'nun bir alt kümesi veya O kümesine eşit olan bir küme olmak üzere B ⊆ F ile ilgili alt yaklaşımı olan bir yakın kümedir. [63]

Tanım 4.4: Verilen bir $X \subseteq O$ kümesinin sınır bölgesi;

$$\mathrm{Tn}d_{N_k(T)}(X) = \mathrm{N}_k(T)^*X - \mathrm{N}_k(T)_*X = \{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_k(T)^*X - \mathrm{x} \notin \mathrm{N}_k(T)_*X\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [63].

Teorem: Üst veya alt yaklaşım içeren her küme yakın kümedir [63].

İspat: Bir önceki teorem dikkate alınırsa P kümesiın yakın küme olduğunu bunun ise yalnızca $\left|\mathrm{Tn}d_{N_k(T)}(P)\right| \geq 0$ şartı ile olduğunu gördük. Bu şartı ele alan 2 durum söz konusuydu 1. Durumda $\left|\mathrm{Tn}d_{N_k(T)}(P)\right| > 0$ ise P kümesi üst ve alt yaklaşıma sahip olan küme olur ki buda yakınlığını gösterir. 2.durumda ise $\left|\mathrm{Tn}d_{N_k(B)}(P)\right| = 0$ olur ki buda yakın küme olduğunu gösterir fakat sınırın sıfıra eşitlenmesi durumunda alt ve üst yaklaşıma sahip olduğu söylenemez.

Son durumda, üst veya alt yaklaşım içeren her küme yakın bir kümeyi temsil ederken, önemli bir ayrım yapılması gereken nokta şudur: Her yakın küme, alt veya üst yaklaşıma sahip olmayabilir.

Yakınlık Fonksiyonu

Verilen her iki kümenin birbirlerine göre yakınlık derecelerini bulmak için yakınlık fonksiyonu kullanılabilir. Bu yakınlık fonksiyonu farklı yollarla açıklanabilir. P ve R bir küme H nesneler kümesi ve P, R ⊆ H iki yakın küme olmak üzere yakınlık fonksiyonunun iki farklı formu;

$$V_{N_k} = \wp(H) \times \wp(H) \rightarrow [0, 1]$$

$$V_{N_r}(P, R) \begin{cases} \frac{P \cap R}{|R|}, |P| \leq |R| \\ 1, \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$V_{N_r}(P, R) \begin{cases} \frac{P \cap R}{|P|}, |R| \leq |P| \\ 1, \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [63].

Örnek 4.1: X topolojik uzayında A = {1/n | n ∈ N} ve B = {1} kümeleri arasındaki yakınlık ilişkisi inceleyelim

Diyelim ki X, pozitif tam sayıların oluşturduğu topolojik uzay olsun ve A = {1/n | n ∈ N} ile B = {1} kümeleri verilsin.

A kümesi, 1/n formunda bir dizi noktadan oluşur ve bu dizi noktaların limiti de 0'dır. Ancak, A kümesinde 1 bulunmadığı için, A kümesinin herhangi bir noktasının B kümesinin içinde bir dizi noktayla yakınlık ilişkisi sağlanamaz.

Bununla birlikte, B kümesi yalnızca tek bir noktadan, yani 1'den oluşur ve herhangi bir ε > 0 için, (1-ε, 1+ε) aralığı B kümesinin içinde bir dizi noktayı kapsar. Dolayısıyla, B kümesinin herhangi bir noktası, A kümesinin içinde bir dizi noktayla yakınlık ilişkisi sağlar.

Sonuç olarak, A = {1/n | n ∈ N} ve B = {1} kümeleri arasında yakınlık ilişkisi yoktur, çünkü A kümesinin herhangi bir noktasının B kümesinin içinde bir dizi noktayla yakınlık ilişkisi sağlanamaz. Ancak, B kümesinin herhangi bir noktası, A kümesinin içinde bir dizi noktayla yakınlık ilişkisi sağlar.

5. YAKIN KÜME İLE YAKLAŞIMLI VE ESNEK KÜMELER ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, daha önce tanımlanan yakın küme, esnek küme ve yaklaşımlı küme kavramları üzerinden yola çıkarak, yakın küme ile yaklaşımlı küme arasındaki ilişki ve yakın küme ile esnek küme arasındaki ilişki incelenmiştir.

5.1 Yaklaşımlı küme ile Yakın küme arasındaki ilişki

Klasik küme teorilerinin eksikliği anlaşıldıktan sonra matematikçiler klasik mantık kuralları ile netliği belirli olmayan konularda yeni küme teorileri ortaya atılmıştır. 1982'de Z. Pawlak ''Yaklaşımlı Küme'' teorisini öncül olarak sunmuştur ve ardından her ne kadar 2002 yılında Peters tarafından açıklanan 'yakın küme' kavramı ile diğer teoriler arasında farklı tanımlar ve yapılar olsa da, birçok noktada benzerlikler göze çarpmaktadır. Yaklaşımlı küme ve yakın küme teorileri klasik küme teorisinin tanımlayıcısı değil tamamlayıcısıdır.

Teorem 5.1.1: Yaklaşımlı kümelerin tamamı aynı zamanda yakın kümelerdir [69].

İspat: Algısal nesneleri tanımlayan (O, F) olmak üzere F, O' daki özelliklerini temsil eden $O_{\sim T}$, B⊂ F için$\sim_T$ tarafından sınırlanan O' nun örüntüsündeki bütün bölümleri anlamına gelsin. Hatırlatalım ki $O_{\sim T}$, x ∈ O ya ait denklik sınıfları anlamına geliyordu. X ⊂ O, T ⊂ F için bir algısal parçacık X olsun, T- alt yaklaşımı T_*ile tanımlanır ve T- üst yaklaşımı T^*ile tanımlansın.

$$T_*(x)=\underset{x:[X]T\subseteq X}{U}[x]_T T^*(x) = \underset{x:[X]T\cap X\neq\emptyset}{U}[x]_T$$

$Tnd(x)$=$T^*(x)$-$T_*(x)$ sınır yaklaşımı olsun. Bir X kümesi sınırının yani Tnd(x) ≠ Ø olduğundan yaklaşımlı bir küme olduğunda yaklaşımlı bir kümedir. Bu durum $T^*(x)$-$T_*(x)$ ≠ Ø ise $T^*(x)$'in $T_*(x)$'I kapsadığı durumlarda tanımlıdır.

5.2 Esnek küme ile yakın küme arasındaki ilişki

Teorem 5.2.1: Her bir komşuluk ailesi, esnek bir kümeyi temsil eder [30].

İspat: O nesneler kümesini R ayırt edilmelik bağıntısına ve r çıkarım işlevi olmak üzere $N_k(T)(X)$ X kümesi üzerinde komşuluklarının bir ailesi olsun.Verilen X kümesinin üst ve alt yaklaşımları $N_k(T)^*$≠Ø,$N_k(T)_*$ olarak belirtilsin. $[x]_R$⊂X açıklayan $p_1(x)$={h_1,h_2,h_3,h_4,….$h_{|B|}$} olan $[x]_R \cap X \neq Ø$ açıklaması sağlanan r ≤ $|T|$ ve $p_2(x)$ için boştan farklıdır. Ayrıca verilen komşuklar ailesinin sınırlarıda sıfırdan büyük veya eşit olarak belirtilir.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ durumları parametre kümesinin elemanları olarak belirlenebilir. Bu da E = {$p_1(x)$,$p_2(x)$} şeklindedir.

Bu durumda yukarıda ki şartlar altında fonksiyonu belirleyebiliriz.

F: E → P(U), F($p_i(x)$)) = {x ∈ U / $p_i(x)$} i =1,2

Böylece X in sınır komşuluklarının ailesi aynı zamanda esnek kümeyi temsil eder.

(F,E) = {($p_1(x)$, $N_k(T)_*$X),($p_2(x)$,$N_k(T)^*$X} olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Gelecek asırlarda kullanılmak üzere geçmiş yıllarda kullanılan yakın küme teorileri birçok kullanım alanına sahiptir. Yakın kümelerde veriler reel değerli fonksiyonlar kullanarak elde edildiğinden karışık yapılar ile değil daha sade yapılar üzerinde kurulduğu için kullanımı basit ve rahattır. Bu durum yakın küme teorilerini diğer tüm teorilerden avantajlı hale getirir. Özellikle somut olayların olduğu gibi veya olayların sonuçlarıyla birlikye zihinsel algısının sonuçlanmasını sağlayan en etkili yöntemlerden biridir.

Bu teorilerin gelecek teknoloji devrimiyle birlikte yapay zeka uygulamaları üzerine daha fazla çalışarak yakın küme teorilerinin yapay zeka teorileriyle birleştirip gelecek nesiller için daha parlak bir gelecek yaratılabilir.

KAYNAKLAR

[1] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen,J.Reine Angew.Math.,77 (1874) 258-262

[2] G. Cantor, Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math Ann., 46 (1895) 481-512

[3] G. Cantor, Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre Math Ann., 49 (1897) 207-246

[4] B. Russell, The principles of mathematics, London, George Allen & Unwin Ltd., 1 st Ed. 1903 (2nd Ed. in 1937).

[5] A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica, 3vols, Cambridge University Press 19101912, and 1913. 2nd Ed., 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3). Abridged as Principia Mathematica to 56 Cambridge University Press, 1962.

[6] E. Zermelo, Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann., 59 (1904) 514-516.

[7] E. Zermelo, Untersuchungen ¨uber die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Ann., 65:2 (1908) 261-281. English translation: Heijenoort, Jean Van, Investigations in the foundations of set theory, 1967.

[8] J. J. Thomas, Set Theory, First Edition, Academic Press, 1978, 3th Ed., Springer-Verlag, 2003.

[9] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353

[10] L. A. Zadeh, Fuzzy logic and approximate reasoning, Kluwer Academic Publishers, 30:3-4 (1975) 407-428.

[11] Z. Pawlak, Rough sets, Int. J. Comput. Inform. Sci., 11:5 (1982) 341-356.

[12] G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, 2, Verlag von Hermann Pohle, Jena, 1893.

[13] T. B. Iwinski, Algebraic approach to rough sets, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 35 (1987) 673-683.

[14] R. Biswas and S. Nanda, Rough groups and rough subgroups, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 42 (1994) 251-254.

[15] N. Kuroki, Rough ideals in semigroups, Inform. Sci., 100 (1997) 139-163

[16] N. Kuroki and P. P. Wang, the lower and upper approximations in a fuzzy group, Inform. Sci., 90 (1996) 203-220.

[17] B. Davvaz, Roughness in rings, Inform. Sci., 164 (2004) 147-163.

[18] B. Davvaz and M. Mahdavipour, Roughness in modules, Inform. Sci., 176 (2006) 3658-3674.

[19] Z. Pawlak, Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data, Kluwer Academic Puplishers, Boston, London, Dordrecht, 1991.

[20] Y. Y. Yao, On generalizing Pawlak approximation operators, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 1424 (1994) 298-307.

[21] M. Wolski, Perception and classification. A note on near sets and rough sets, Fund. Inform., 101 (2010) 143-155.

[22] M. Wolski, Gauges, pregauges and completions: Some theoretical aspects of near and rough set approaches to data, Rough Sets and Knowledge Technology, LNCS 6954, Springer, Berlin, (2011) 559-568.

[23] S. S. Ahn, Y. B. Jun and K. J. Lee, Roughness in subtraction algebras, Commun. Korean Math. Soc., 21:4 (2006) 653-664.

[24] C. Wang and D. Chen, A short note on some properties of rough groups, Comput. Math. Appl., 59 (2010) 431-436.

[25] S. Rasouli and B. Davvaz, Roughness in MV-algebras, Inform. Sci., 180 (2010) 737-747.

[26] S. Yamak, O. Kazan¸c and B. Davvaz, generalized lower and upper approximations in a ring, Inform. Sci., 180 (2010) 1759-1768.

[27] S. B. Hosseinia and V. Ghaffari, Some results on rough (prime) modules, International Journal of Algebra and Statistics, 1:1 (2012) 17-21.

[28] H. Taşbozan, İ. İçen, N. Bağırmaz ve A. F. Özcan, Soft Sets and Soft Topology on Nearness Approximation Spaces, Published by Faculty of Sciences and Mathematics, Serbia, 31:13 (2017), 4117–4125.

[29] D. Molodtsov, Soft set theory- First results, Comput. Math. Appl., 37 (1999) 19-31.

[30] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy, Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45 (2003) 555-562.

[31] P. K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, an application of soft sets in a decision-making problem, Comput. Math. Appl., 44 (2002) 1077-1083.

[32] Z. Pawlak and J. F. Peters, Jak Blisko (how near), Systemy Wspomagania Decyzji I, 57, 109, ISBN:83-920730-4-5, 2002-2007.

[33] S. A. Naimpally and J. F. Peters, Topology with applications. Topological spaces via near and far, World Scientific, Singapore, 2012.

[34] J. F. Peters, Classification of perceptual objects by means of features, Int. J. Info. Technol. Intell. Comput., 3:2 (2008) 1-35.

[35] J. F. Peters, sufficiently near sets of neighbourhoods, Rough Sets ad Knowledge Technology, LNCS 6954, Springer, Berlin, (2011) 17-24.

[36] J. F. Peters and S. Naimpally, Approach spaces for near filters, Gen. Math. Notes, 2:1 (2011) 159-164.

[37] J. F. Peters, Topology of Digital Images. Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[38] J. F. Peters and S. Tiwari, Approach merotopies and near filters, Gen. Math. Notes, 3:1 (2011) 1-15.

[39] M. Pavel, Fundamentals of pattern recognition, 2nd Ed. N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1993.

[40] J. F. Peters, Rough ethology: Towards a biologically-inspired study of collective behaviour in intelligent systems with approximation spaces, Transactions on Rough Sets, III, LNCS 3400 (2005) 153-174.

[41] J. F. Peters and C. Henry, Reinforcement learning with approximation spaces, Fund. Inform., 71:2-3 (2006) 323-349.

[42] J. F. Peters and S. Ramanna, Affinities between perceptual granules: Foundations and perspectives. In Human-centric information processing through granular modelling sci 182, Eds. A. Bargiela and W. Pedrycz, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[43] J. F. Peters, C. Henry and D. S. Gunderson, Biologically-inspired approximate adaptive learning control strategies: A rough set approach, International Journal of Hybrid Intelligent Systems, 4:4 (2007) 203-216.

[44] J. F. Peters and S. A. Naimpally, Applications of near sets, Notices Amer. Math. Soc., 59:4 (2012) 536-542.

[45] A. Hassanien, A. Abraham, J. F. Peters, G. Schaefer and C. Henry, Rough sets and near sets in medical imaging: A review, IEEE Trans Info. Tech. in Biomedicine, 13:6 (2009) 955-968.

[46] C. Henry, Near sets: Theory and applications, PhD Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, 2010.

[47] J. F. Peters, Corrigenda and addenda: Tolerance near sets and image correspondence, Int. J. Bio-Inspired Comput., 2:5 (2010) 310-318.

[48] C. Henry and J. F. Peters, Near set evaluation and recognition (NEAR) system V2.0, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2010-017.BURAYA KADAR TAMAM

[49] E. H. Mamdani ve S. Assilian, An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, Int. J. Man-Mac. Stud., (1975) 1-13.

[50] E. H. Mamdani, Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant, Proc.Iee, Vol.121, No.12, 1585-1588, December 1974.

[51] E. H. Mamdani, Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers, Int. J. Man Machine Studies, (1976),8,669-678.

[52] C. L. Chang, Fuzzy Topological Spaces, J. of Math. Anal. and Appl., 24: (1968), 182-190, pp. 182-190

[53] N. Çağman ve H. Aktaş, Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler, J of Arts and Sci., Sayı: 3, (Mayıs 2005), 13-25, pp. 13-25.

[54] V. Y. Leonov, D. V. Kovkov ve D. Molodtsov, Soft sets technique and its application, Nechetkie Sistemyi Myagkie Vychisleniya, (2006) 8-39.

[55] E. İnan, Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Türkiye, 2015.

[56] S. Bayhan, Kaba Küme Teorisinin Matematiksel Temelleri, Göller Bölgesi Aylık Hakemli Ekonomi ve Kültür Derg., Sayı:52, 2017

[57] E. Krusinska, R. Slowinski ve J. Stefanowski, Discriminant versus rough set approach to vague data analysis, J. Appl. Stat. and Data Analysis, 8 (1992) 43-56.

[58] Z. Pawlak ve R. Slowinski, Decision analysis using rough sets, International Transactions on Operational Research, 1 (1994) 107-104.

[59] R. Slowinski, Rough set approach to decision analysis, AI Expert, 10 (1995) 18-25.

[60] Z. Pawlak, why rough sets? New Orleans, Louisiana: The 5th IEEE International conference on fuzzy systems (FUZZ-IEEE 96), Sept. (1996) 738- 743.

[61] J. F. Peters, Near sets. General theory about nearness of objects, Appl. Math.Sci., 1:53-56 (2007) 2609-2629.

[62] Z. Pawlak, Classification of objects by means of attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, 1981.

[63] E. Orlowska, Semantics of vague concepts. Applications of rough sets, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, 1982.

[64] S. K. Pal ve J. F. Peters, Rough Fuzzy Image Analysis. Foundations and Methodologies, CRC Press, Taylor & Francis Group, (2010), ISBN 13:9781439803295 ISBN 10: 1439803293.

[65] Çağman N., Karataş S., Enginoglu S., 2011. Soft Topology. Computers and Mathematics with Applications, 62: 351-358.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yunus Emre MERCAN

Lisans : 2014-2018 İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 2019-2023 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim:

2019 – 2020 Özel Kolej Matematik Öğretmeni

2020-2022 Böke Ticaret LTD ŞTİ Kurucu

2022-Siber Suçlarla Mücadele Daire Başkanlığı