T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK GRUPOİDLERİN KUVVETLİ HOMOMORFİZMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülhanım Gülşah ŞENER UÇAR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

AĞUSTOS 2023

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK GRUPOİDLERİN KUVVETLİ HOMOMORFİZMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülhanım Gülşah ŞENER UÇAR
(36203614036)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

AĞUSTOS 2023

Eşim Fatih'e

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren ve her türlü fedakarlık gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Habil Gürsoy'a,

Desteğini her zaman fiili ve duygusal olarak hissettiğim yol arkadaşım, eşim Muhammed Fatih Uçar'a, haklarını asla ödeyemeyeceğim babam ve anneme, desteklerini esirgemeyen kardeşlerim Oğuzhan ve İnsu'ya ve az da olsa ihmal ettiğim oğullarım Musab Hamza ve Eymen'e

teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Topolojik Grupoidlerin Kuvvetli Homomorfizmleri " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gülhanım Gülşah ŞENER UÇAR

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$	: Kategorilerin Nesne Sınıfı,
$\mathbf{Mor}(\mathscr{C})$	: Kategorilerin Morfizm Sınıfı,
$\mathbf{\Gamma}_0$	:Grupoidlerin Nesne Sınıfı,
$\mathbf{\Gamma}$	:Grupoidlerin Morfizm Sınıfı,
$\boldsymbol{\alpha}$	:Kaynak Dönüşümü,
$\boldsymbol{\beta}$	:Hedef Dönüşümü,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	:Nesne Dönüşümü,
$\mathbf{i}$	:Ters Dönüşüm,
$\mathbf{\Gamma}_{(2)}$	:Kısmi Çarpım İşleminin Tanım Kümesi,
$\boldsymbol{Is}(\mathbf{\Gamma})$	:Grupların Demeti,
$\mathbf{\Gamma}_x$	:Star,
$\mathbf{\Gamma}^x$	:Co-star,
$\boldsymbol{Kerf}$	:f nin çekirdeği,
$\boldsymbol{h}^*(\mathbf{\Gamma})$	:İndirgenmiş Grupoid,
$\boldsymbol{S}(\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Gamma}_0)$	:Topolojik Alt Grupoidlerin Kümesi
$\mathscr{N}(\mathbf{\Gamma})$	:Topolojik Normal Alt Grupoidlerinin Kümesi
$\tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Gamma}_0)$	: f nin çekirdeğini içeren topolojik alt grupoidlerinin kümesi
$\tilde{\mathscr{N}}(\mathbf{\Gamma})$	: f nin çekirdeğini içeren topolojik normal alt grupoidlerinin kümesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK GRUPOİDLERİN KUVVETLİ HOMOMORFİZMLERİ

GÜLHANIM GÜLŞAH ŞENER UÇAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

47+vi sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

Altı bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde tez konusunun tarihçesi ve kısaca amacından bahsedildi.

İkinci bölümünde, tezde göz önüne alınan ’kategori, grupoidler, grupoidlerin özel homomorfizmleri’ ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümünde Topolojik Grupoidlere yer verildi.

Dördüncü bölümde Topolojik Grupoidlerin özel homomorfizmlerine yer verilip ispatlara değinildi.

Beşinci bölümde Grupoidlerin kuvvetli homomorfizminin topolojik versiyonu verilmiş olup topolojik grupoidlerin kuvvetli homomorfizmi tanımlandı ve onunla ilgili bazı teoremler ispatlandı.

Altıncı bölümde ise sonuç kısmına yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Grupoid, Homomorfizm, Kuvvetli homomorfizm, Topolojik grupoid

ABSTRACT

Master Thesis

STRONG HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL GROUPOIDS

Gülhanım Gülşah ŞENER UÇAR

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

47+vi pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

This six-part master's thesis In the first part, the history of the thesis subject and its purpose were briefly mentioned.

In the second part, the basic definitions and concepts related to the 'category, groupoids, special homomorphisms of groupoids' considered in the thesis were included.

The third part included topological groupoids.

In the fourth part, special homomorphisms of topological groupoids were included and proofs were mentioned.

In the fifth part, the topological version of the strong homomorphism of the groupoids was given, and the strong homomorphism of the topological groupoids was defined and some theorems related to it were proved.

In the sixth part, the result is given.

Keywords: Groupoid, Homomorphism, Strong homomorphism, Topological groupoid

1. GİRİŞ

Kategoriler, funktorlar ve doğal dönüşümler Eilenberg ve Mac Lane'in 1945 yılındaki makalesinde ortaya atılmıştır [1]. Temelleri atılan ve kısa sürede matematiğin diğer birçok dalında kullanım alanı bulan kategori teorisi, aynı tip nesneler ve bunlar arasındaki dönüşümlerle ilgilidir.

Kategoriler matematik ve fizikte karşımıza çıkan bazı problemlerin çözümünde kolaylık sağlamak için tanımlanmıştır. Kategori kabaca oklarla bağlanan nesnelerden oluşan bir cebirsel yapıdır. Biraz daha ayrıntılı olarak kümeler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her bir küme için bir birim fonksiyon olduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak kümeler yerine nesneler ve fonksiyonlar yerine morfizmler alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur.

Grupoid kavramı 1927 de ilk kez Alman matematikçi Brandt tarafından matematik dünyasına sunulmuştur [2]. Fakat Brandt ekstra bir şart koymuştur;

$$\text{her } x, y \in Ob(G) \text{ için } Mor(x, y) \neq \varnothing.$$

Günümüzde özel olarak bu şartı sağlayan grupoidlere geçişli (transitive) grupoidler diyoruz. Grupoid, kategorinin özel bir durumudur. Şöyle ki bir kategoride herbir morfizmin tersi varsa yani herbir morfizm bir izomorfizm ise ona grupoid deriz. 1950 de C. Ehresmann tarafından grupoid kavramının kategorik tanımı verildikten sonra grupoidlere olan ilgi daha da arttı [3]. Grupoid yapısını koruyan, objelerinin ve morfizmlerinin sınıfı topolojik uzay olan yapı dönüşümlerinin sürekli olduğu grupoide topolojik grupoid denir. Topolojik grupoid kavramı C. Ehresmann tarafindan differansiyel topoloji ve geometriye bir uygulama olarak verilmiştir. Topolojik grupoid teorinin genişçe uygulamasını R. Brown, J.P. Hardy ve Macknezie' nin çalışmalarında bulunabilir [4–7]. Ivan cebirsel anlamda grupoidlerin özel homomorfizmlerini çalışmıştır [8]. Bu çalışmanın topolojik versiyonu ise Gürsoy ve Içen tarafından 2014'de yapılmıştır [9].

Bir virtual grup, aslında ergodik grupoidler üzerinde tanımlanan bir ergodik ölçüm bağıntısı ile oluşan ve adına benzerlik sınıfı (ergodik ölçüm sınıfı) denilen bir lokal kompakt gruptur. Arlan Ramsay, virtual gruplar arasında gerçek (true) homomorfizm adını verdiği kavramı tanımlamıştır [10]. Ivan da grupoidler arasında kuvvetli(strong) homomorfizm kavramı ile bu kavramı grupoid teoriye uyarlamıştır. Kuvvetli morfizmlerin en önemli sonuçlarından birisi altgrupoidler için eşleşme (correspondence) teoremidir.

Bu tezde Ivan tarafından verilen 'grupoidlerin kuvvetli homomorfizmi' kavramını topolojik grupoidler için tanımlayarak grup teorideki benzeşme teoremleri, topolojik grupoidler açısından incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kategori

Tanım 2.1.1. *x,y,z nesnelerinin sınıfı $Ob(\mathscr{C})$ ve $a : x \longrightarrow y$ şeklindeki nesneler arasındaki morfizmlerin sınıfı $\mathscr{C}(x,y)$ olmak üzere*

$$Mor(\mathscr{C}) = \bigcup_{x,y \in Ob(\mathscr{C})} \mathscr{C}(x,y)$$

olsun. Yapı dönüşümleri denilen aşağıdaki dönüşümlerle birlikte $\mathscr{C} = (Ob(\mathscr{C}), Mor(\mathscr{C}), \alpha, \beta, \varepsilon, \mu)$ yapısına bir kategori (category) denir.

i. $\alpha : Mor(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{C}), \alpha(a) = x$ *şeklinde tanımlı kaynak dönüşümü,* $a \in \mathscr{C}(x,y)$,

ii. $\beta : Mor(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{C}), \beta(a) = y$ *şeklinde tanımlı hedef dönüşümü,* $a \in \mathscr{C}(x,y)$,

iii. $\varepsilon : Ob(\mathscr{C}) \longrightarrow Mor(\mathscr{C}), \qquad x \mapsto \varepsilon(x) = \tilde{x} = id_x = 1_x$ *nesne dönüşümü,*

iv. $Mor(\mathscr{C})_\beta \times_\alpha Mor(\mathscr{C}) = \{(a,b) \in Mor(\mathscr{C}) \times Mor(\mathscr{C}) | \alpha(b) = \beta(a)\}$ *kümesi üzerinde tanımlanan*

$$\mu : Mor(\mathscr{C})_\beta \times_\alpha Mor(\mathscr{C}) \longrightarrow Mor(\mathscr{C})$$
$$(a,b) \mapsto \mu(a,b) = a \circ b$$

kısmi çarpım işlemi.

Bu yapı dönüşümleri aşağıdaki iki aksiyomu sağlar:

K.1.(Birleşme)

Eğer $a \in \mathscr{C}(x,y), b \in \mathscr{C}(y,z), c \in \mathscr{C}(z,t)$ ise

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

dir.

K.2.(Özdeş morfizmin varlığı)

Her $x \in Ob(\mathscr{C})$ için öyle bir $1_x \in \mathscr{C}(x,x)$ vardır ki $b \in \mathscr{C}(y,x), a \in \mathscr{C}(x,y)$ ise

$$1_x \circ a = a \text{ ve } b \circ 1_x = b$$

dir [11–13].

Önerme 2.1.1. *Bir $\mathscr{C}$ kategorisinde her bir x nesnesi için 1_x birim morfizmi tektir [12].*

Aşağıda kategori ile ilgili sık kullanılan bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1.1. *Tüm kümelerin sınıfı, kümeler arasındaki fonksiyonlar da bilinen bileşke işlemiyle morfizmler olarak ele alınırsa bir kategori oluşturur. Her bir A kümesi için birim morfizm $1_A : A \longrightarrow A$ birim fonksiyonu olup bu kategori* ***SET*** *ile gösterilir. Gerçekten;*
Nesnelerin sınıfı*:$Ob(SET) = \{A|\ A \text{ bir küme}\}$*
Morfizmlerin sınıfı*: $Mor(SET) = \{f \mid f : A \to B \quad \text{bir fonksiyon}, A, B \in Ob(SET)\}$*
Kaynak dönüşümü*:$f \in SET(A,B)$ için $\alpha(f) = A$*
Hedef dönüşümü*:$f \in SET(A,B)$ için $\beta(f) = B$*
Nesne dönüşümü: *Her $A \in Ob(SET)$ için*

$$\varepsilon : Ob(SET) \longrightarrow Mor(SET)$$
$$A \mapsto \varepsilon(A) = 1_A : A \to A$$

birim fonksiyonu vardır.
Kısmi çarpım işlemi:*$f \in SET(A,B)$ ve $g \in SET(B,C)$ morfizmleri için*

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

kısmi çarpım işlemi.

K.1. *Fonksiyonların bileşkesi her zaman birleşme özelliğine sahiptir.*
$f \in SET(A,B), g \in SET(B,C), h \in SET(C,D)$ alalım. Her $a \in A$ için $hogof : A \longrightarrow D$ olup

$$[ho(gof)](a) = ho(gof)(a) = h(g(f(a)))$$

ve

$$[(hog)of](a) = (hog)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

eşitliği görülür.
K.2. *Her $A, B \in Ob(SET)$ ve her $f : A \longrightarrow B$ için*
$1_B \circ f = f$ ve $f \circ 1_A = f$ olacak şekilde $1_A : A \to A$ ve $1_B : B \to B$ birim fonksiyonları vardır ve tektir [12].

Örnek 2.1.2. *Topolojik uzayların kümesi, topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlarla birlikte bir kategori oluşturur. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan bu kategoride kısmi çarpım işlemi tanımlıdır. Bu kategori **TOP** ile gösterilir [12].*

Örnek 2.1.3. *Nesneleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve kısmi çarpım işlemi ise grup homomorfizmlerin bileşkesi olarak alındığında elde edilen kategori **Gp** ile gösterilir. Benzer şekilde halkalar ve halka homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. Bu kategori de **Ring** ile gösterilir [12].*

Örnek 2.1.4. *Nesneleri topolojik gruplar ve morfizmler ise sürekli grup homomorfizmleri alınarak elde edilen topolojik grupların kategorisi **TGp** ile gösterilir [12].*

Tanım 2.1.2. *$\mathscr{C}^d$ ile gösterilen kategori $\mathscr{C}$ kategorisinin bir dualidir. Aşağıdaki şekilde tanımlanır.*

$Ob(\mathscr{C}^d) = Ob(\mathscr{C})$ ve $x, y \in Ob(\mathscr{C})$ için $\mathscr{C}^d(x,y) = \mathscr{C}(y,x)$ olmak üzere $a \in \mathscr{C}(x,y)$ ise $a^* \in \mathscr{C}^d(y,x)$ yazılır. $\mathscr{C}^d$ deki kısmi bileşke ise $b^*a^* = (ab)^*$ şeklinde tanımlanır.

Burada $(\mathscr{C}^d)^d = \mathscr{C}$ olduğuna dikkat edelim [12].

Tanım 2.1.3. *Kategori olan $\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathscr{D}$ kategorisine $\mathscr{C}$ kategorisinin bir alt kategorisidir denir.*

i. *$Ob(\mathscr{D})$ kümesi $Ob(\mathscr{C})$ kümesinin bir alt kümesidir.*

ii. *Her bir $x,y \in Ob(\mathscr{D})$ için $\mathscr{D}(x,y) \subseteq \mathscr{C}(x,y)$ dir.*

iii. *$\mathscr{D}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi, $\mathscr{C}$ deki morfizmlerin bileşkesi ile aynıdır.*

iv. *Her bir $x \in Ob(\mathscr{D})$ için $\mathscr{D}$ deki 1_x birim morfizmi, $\mathscr{C}$ deki birim morfizm ile aynıdır [12].*

Örnek 2.1.5. *Abelyan grupların kategorisi, grupların **Gp** kategorisinin bir alt kategorisidir [12].*

Tanım 2.1.4. *$\mathscr{D}$ kategorisi $\mathscr{C}$ kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer her $x, y \in Ob(\mathscr{D})$ nesne çifti için $\mathscr{D}(x,y) = \mathscr{C}(x,y)$ ise $\mathscr{D}$ alt kategorisine **tam (full) alt kategori**, eğer $Ob(\mathscr{C}) = Ob(\mathscr{D})$ ise $\mathscr{D}$ ye **geniş (wide) alt kategori** denir [14].*

Örnek 2.1.6. *Sonlu olan kümelerin $\boldsymbol{SET_f}$ kategorisi **SET** kategorisinin bir full alt kategorisidir [12].*

Örnek 2.1.7. *Nesneler olarak kümelerin sınıfını ve morfizmler olarak ikili bağıntıları alırsak bağıntıların* ***REL*** *kategorisini elde ederiz. Bu kategorideki bir* $R : A \to B$ *morfizmi* A *ve* B *kümeleri arasındaki bir bağıntıdır, yani* $R \subseteq A \times B$ *dir.* $R : A \to B$ *ve* $S : B \to C$ *gibi iki bağıntının kısmi çarpım işlemi;*

$$(a,c) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists b \in B \quad \text{için } (a,b) \in R \quad \text{ve } (b,c) \in S$$

şeklinde tanımlıdır.

REL *kategorisi, kümelerin* ***SET*** *kategorisinin bir geniş alt kategorisidir. Şöyle ki* ***SET*** *deki bir* $f : X \to Y$ *morfizmi,*

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow f(x) = y$$

şeklinde tanımlanan bir $F \subseteq X \times Y$ *bağıntısına karşılık gelir [14]*

Tanım 2.1.5. $\mathscr{C}$ *ve* $\mathscr{D}$ *iki kategori olmak üzere,* $\mathscr{C}$ *nin her bir nesnesini* $\mathscr{D}$ *nin bir nesnesine ve* $\mathscr{C}$ *nin her bir morfizmini* $\mathscr{D}$ *nin bir morfizmine karşılık getiren ayrıca aşağıdaki iki şartı sağlayan* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *dönüşümüne* ***(kovaryant) funktor*** *denir.*

F.1. *Her* $x \in Ob(\mathscr{C})$ *için* $F(1_x) = 1_{F(x)}$ *dir, yani*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1_x"'] & F(x) \arrow[d, "1_{F(x)}"] \\
x \arrow[r, "F"'] & F(x)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir.

F.2. *Her* $a,b \in Mor(\mathscr{C})$ *ve* $x,y,z \in Ob(\mathscr{C})$ *için* $F(a \circ b) = F(a) \circ F(b)$ *dir, yani*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "F"] \arrow[d, "a"'] & F(x) \arrow[d, "F(a)"] \\
y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "b"'] & F(y) \arrow[d, "F(b)"] \\
z \arrow[r] & F(z)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir [15].

Uyarı 2.1.1. *F funktoru her $a,b \in Mor(\mathscr{C})$ için $F(a \circ b) = F(b) \circ F(a)$ şartını sağlıyorsa F ye **kontravaryant funktor** denir [15].*

Örnek 2.1.8. *$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^d$,$F(x) = x$ ve $F(a) = a^*$ ile tanımlanan funktor bir **kontravaryant funktor**dur [15].*

Örnek 2.1.9. *$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. $\mathscr{C}$ nin her x nesnesi için $1_{\mathscr{C}}(x) = x$ ve $\mathscr{C}$ nin her bir a morfizmi için $1_{\mathscr{C}}(a) = a$ şeklinde belirlenen $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ dönüşümü bir funktordur. Özel olarak buna $\mathscr{C}$ üzerinde **özdeş (birim) funktor** denir [14].*

Örnek 2.1.10. *Grupların Gp kategorisinden kümelerin SET kategorisine aşağıdaki gibi tanımlanan bir*

$$U : Gp \longrightarrow SET$$

*dönüşümünü alalım. Her G grubu için onun grup yapısının ihmal edildiği UG kümesini ve her $f : G \longrightarrow H$ grup homomorfizmi için $Uf : UG \longrightarrow UH$ dönüşümünü düşündüğümüzde, U bir funktordur. Bu funktora **unutkan funktor** denir [14]*

2.2 Grupoidler

Bu bölümde nesneler sınıfı için Γ_0, morfizmler sınıfı için Γ ve kısmi çarpım işleminin tanım kümesi için $\Gamma_{(2)}$ notasyonları kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1. *Bir Γ grupoidi, sırasıyla nesnelerin kümesi (taban) Γ_0 ve morfizmlerin kümesi (grupoid) Γ dan,*

$$\alpha, \beta : \Gamma \longrightarrow \Gamma_0,$$

kaynak *ve* ***hedef*** *dönüşümlerinden,*

$$\varepsilon : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma,$$
$$x \mapsto \varepsilon(x) = \widetilde{x} = 1_x$$

nesne dönüşümü*nden,*

$$i : \Gamma \longrightarrow \Gamma$$
$$a \mapsto i(a) = a^{-1}$$

ters dönüşümü*nden, ve*

$\Gamma_{(2)} = \Gamma_\beta \times_\alpha \Gamma = \{(a,b) \in \Gamma \times \Gamma | \beta(a) = \alpha(b)\}$ *üzerinde tanımlı*

$$\mu : \Gamma_{(2)} \longrightarrow \Gamma,\ \mu(a,b) = a.b$$

kısmi çarpım işleminden *oluşur.*

Bu dönüşümler aşağıdaki aksiyomları sağlar:

G1) (Birleşme) $\alpha(c) = \beta(b)$ *ve* $\alpha(b) = \beta(a)$ *olacak şekildeki her* $a,b,c \in \Gamma$ *morfizmleri için;*

$$\mu(c, \mu(b,a)) = \mu(\mu(c,b),a)$$
$$c.(b.a) = (c.b).a$$

G2) (Birimlilik) Her $a \in \Gamma$ *için* $(\varepsilon(\alpha(a)),a) \in \Gamma_{(2)}$, $(a, \varepsilon(\beta(a))) \in \Gamma_{(2)}$ *olmak üzere* $\varepsilon(\alpha(a)).a = a.\varepsilon(\beta(a)) = a$.

G3) (Ters) Her $a \in \Gamma$ *için* $(a, i(a)) \in \Gamma_{(2)}, (i(a),a) \in \Gamma_{(2)}$ *olmak üzere*

$$a.i(a) = \varepsilon(\alpha(a)) \quad ve \quad i(a).a = \varepsilon(\beta(a)).$$

Γ_0*'ın elemanlarına, grupoidin* ***nesneleri****,* Γ *nın elemanlarına grupoidin* ***morfizmleri****,* $x \in \Gamma_0$ *a karşılık gelen* Γ*' daki* $\tilde{x} = 1_x$*' e x in* ***birim morfizmi*** *denir.*
Γ_0 *üzerinde bir grupoid,* $(\Gamma, \Gamma_0, \alpha, \beta, \varepsilon, \mu, i)$ *veya kısaca* $\Gamma = (\Gamma, \Gamma_0)$ *ile gösterilir [4,7,15–17].*

Önerme 2.2.1. *(Γ, Γ_0) bir grupoid olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:*

i) $\forall a \in \Gamma$ *için* $\beta(a^{-1}) = \alpha(a)$ *ve* $\alpha(a^{-1}) = \beta(a)$.

ii) *Eğer* $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ *ise* $a^{-1}(ab) = b$ *ve* $(ab)b^{-1} = a$.

iii) *Her* $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ *için* $\alpha(ab) = \alpha(a)$ *ve* $\beta(ab) = \beta(b)$.

iv) $a.b_1 = a.b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ *dir.*

v) *Eğer* $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ *ise* $(b^{-1},a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ *ve* $(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$.

vi) *Her* $a \in \Gamma$ *için* $(a^{-1})^{-1} = a$.

vii) *Her* $x \in \Gamma_0$ *için* $\alpha(\varepsilon(x)) = x$ *ve* $\beta(\varepsilon(x)) = x$ *dir.*

viii) *Her* $x \in \Gamma_0$ *için* $\varepsilon(x).\varepsilon(x) = \varepsilon(x)$ *ve* $(\varepsilon(x))^{-1} = \varepsilon(x)$ *dir.*

ix) $x,y \in \Gamma_0$ *olsun. Bu durumda,*

(a) $(a,\varepsilon(x)) \in \Gamma_{(2)}$ *ise, o zaman* $\varepsilon(x) = \varepsilon(\beta(a))$.

(b) $(\varepsilon(y),a) \in \Gamma_{(2)}$ *ise, o zaman* $\varepsilon(y) = \varepsilon(\alpha(a))$.

x) $\alpha \circ i = \beta$ *ve* $\beta \circ i = \alpha$.

xi) $i \circ i = Id_\Gamma$ *[8].*

İspat:

i) (G3) aksiyomundan $a \in \Gamma$ için $(a,a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ olduğundan $\beta(a) = \alpha(a^{-1})$ olur. Aynı şekilde $(a^{-1},a) \in \Gamma_{(2)}$ olduğundan $\beta(a^{-1}) = \alpha(a)$ bulunur.

ii) (G2) aksiyomundan her $b \in \Gamma$ için $\varepsilon(\alpha(b)).b = b$ dir. $\alpha(b) = \beta(a)$ olduğundan; $\varepsilon(\beta(a)).b = b$ dir. Ayrıca (G3) aksiyomundan $\varepsilon(\beta(a)) = a^{-1}.a$ olup, $(a^{-1}.a).b = b$ elde edilir. (G1) aksiyomundan da $a^{-1}(a.b) = b$ elde edilir. Benzer şekilde $(ab).b^{-1} = a$ bulunur.

iii) $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ ise (ii) den $a^{-1}(ab) = b$ dir. Bu durumda $(a^{-1},ab) \in \Gamma_{(2)}$ ise $\beta(a^{-1}) = \alpha(ab)$ olur. (i) den $\beta(a^{-1}) = \alpha(a)$ dir. Böylece $\alpha(a) = \alpha(ab)$ elde edilir.

iv) $a.b_1 = a.b_2$ ise (ii) den $a^{-1}(a.b_1) = a^{-1}(a.b_2)$ olup $b_1 = b_2$ elde edilir.

v) $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ (i) den $\beta(b^{-1}) = \alpha(b)$ ve $\alpha(a^{-1}) = \beta(a)$ dir. $\beta(a) = \alpha(b)$ olduğundan $\alpha(b) = \alpha(a^{-1})$ ve $\beta(b^{-1}) = \alpha(a^{-1})$ olur. Bu durumda $(b^{-1},a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ dir.
(G3) aksiyomundan

$$(ab)(ab)^{-1} = \varepsilon(\alpha(ab)) = \varepsilon(\alpha(a))((iii) \quad den) \tag{2.2.1}$$

olur.

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(b.b^{-1}).a^{-1} = a.\varepsilon(\alpha(b)).a^{-1} = a.\varepsilon(\beta(a)).a^{-1} = a.a^{-1} \qquad (2.2.2)$$

ve (G1) den; $a.a^{-1} = \varepsilon(\alpha(a))$ olur. 2.2.1 ve 2.2.2 eşitliklerinden $(ab).(ab)^{-1} = (ab).(b^{-1}.a^{-1})$ çıkar ve (iv) den $(ab)^{-1} = (b^{-1}.a^{-1})$ bulunur.

vi) (G3) aksiyomundan $a, a^{-1} \in \Gamma$ ve $a^{-1}.a = \varepsilon(\beta(a))$ ve $a^{-1}.(a^{-1})^{-1} = \varepsilon(\alpha(a^{-1})) = \varepsilon(\beta(a))$ Bu durumda $a^{-1}.a = a^{-1}.(a^{-1})^{-1}$ olur. (iv) den $a = (a^{-1})^{-1}$ bulunur.

vii) (G2) aksiyomundan $\varepsilon(\alpha(a)).a = a$ $\varepsilon(x) = a$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\varepsilon(\alpha(\varepsilon(x))).a = a$ olur. Yani $\varepsilon(\alpha(\varepsilon(x))).a = \varepsilon(\alpha(a)).a$ eşitliği gelir ve (iv) den $\varepsilon(\alpha(\varepsilon(x))) = \varepsilon(\alpha(a))$ eşitliğine ulaşılır. ε birebir olduğundan; $\alpha(\varepsilon(x)) = \alpha(a)$ ve $\alpha(a) = x$ olduğundan $\alpha(\varepsilon(x)) = x$ bulunur.

viii) (G2) aksiyomundan $\varepsilon(\alpha(a)).a = a$ $\varepsilon(x) = a$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\varepsilon(\alpha(\varepsilon(x))).\varepsilon(x) = \varepsilon(x)$ olur. $\alpha(\varepsilon(x)) = x$ olduğundan $\varepsilon(x).\varepsilon(x) = \varepsilon(x)$ bulunur. (G3) den $\varepsilon(x).\varepsilon(x)^{-1} = \varepsilon(\alpha(\varepsilon(x))) = \varepsilon(x)$ ve $\varepsilon(x).\varepsilon(x) = \varepsilon(x)$ olduğundan $\varepsilon(x).\varepsilon(x)^{-1} = \varepsilon(x).\varepsilon(x)$ (iv) den $\varepsilon(x))^{-1} = \varepsilon(x)$ bulunur.

ix) (a) $(a, \varepsilon(x)) \in \Gamma_{(2)}$ ise $\beta(a) = \alpha(\varepsilon(x))$ olur. viii den $\alpha(\varepsilon(x)) = x$ ise; $\beta(a) = x$ olur. ε birimliliğinden; $\varepsilon(\beta(a)) = \varepsilon(x)$ bulunur.

(b) $(\varepsilon(y), a) \in \Gamma_{(2)}$ ise $\beta(\varepsilon(y)) = \alpha(a)$ olur. (vii) den $\beta(\varepsilon(y)) = y$ ise $y = \alpha(a)$ olur. ε birimliliğinden $\varepsilon(y) = \varepsilon(\alpha(a))$ bulunur.

x) $\alpha \circ i = \beta$ ifadesinde

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & \xrightarrow{\quad \text{i} \quad} & \Gamma & \xrightarrow{\quad \alpha \quad} & \Gamma_0 \\ a & \longrightarrow & i(a) & \longrightarrow & \alpha(i(a)) \end{array}$$

(G3) aksiyomundan $(a, a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ için $\alpha(a^{-1}) = \beta(a)$ olduğundan ispat açıktır.
$\beta \circ i = \alpha$ ispatı benzer şekildedir.

xi) $a \in \Gamma$ için (vi). önermeden $(a^{-1})^{-1} = a$ ve $(a^{-1})^{-1} \in \Gamma$ yani $i \circ i = Id_\Gamma$ olduğu görülür.

Önerme 2.2.2. *Γ_0 üzerinde bir gupoid Γ olsun. $\alpha(a) = x$ ve $\beta(a) = y$ olacak şekilde bir $a \in \Gamma$ alalım. Bu takdirde,*

1. *Her $x \in \Gamma_0$ için 1_x birim morfizmi tektir,*

2. *Her $a \in \Gamma$ morfizminin a^{-1} tersi tektir,*

3. *Eğer $b \in \Gamma, \alpha(b) = y$ ve $a.b = a$ ise $b = \tilde{y} = 1_y$ dir,*

4. *Eğer $c \in \Gamma$, $\beta(c) = x$ ve $c.a = a$ ise $c = \tilde{x} = 1_x$ dir,*

5. *Eğer $b \in \Gamma$, $\alpha(b) = y$ ve $a.b = \tilde{x}$ ise $b = a^{-1}$ dir,*

6. *Eğer $c \in \Gamma$, $\beta(c) = x$ ve $c.a = \tilde{y}$ ise $c = a^{-1}$ dir [7].*

Tanım 2.2.2. *Bir Γ grupoidinde her $x \in \Gamma_0$ için x den x e tüm morfizmlerin sınıfı olan $\Gamma(x,x)$ (veya $\Gamma(x)$) bir gruptur. Bu gruba Γ grupoidinin x deki **izotropi grubu** veya x deki **nesne grubu** denir [7].*

Tanım 2.2.3. *Bir Γ grupoidi için*

$$\alpha \times \beta : \Gamma \longrightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$$
$$a \mapsto (\alpha \times \beta)(a) = (\alpha(a), \beta(a))$$

*dönüşümü örten ise Γ grupoidine **geçişlidir** denir. Buna denk olarak bir Γ grupoidinin geçişli olması $x, y \in \Gamma_0$ için $\Gamma(x,y) \neq \varnothing$ ile de ifade edilir. Eğer $\Gamma(x,y) = \varnothing$ ise tamamen geçişsizdir denir [7].*

Önerme 2.2.3. *(Γ, Γ_0) grupodi için aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) *$\Gamma(\alpha(a))$ ve $\Gamma(\beta(a))$ izotropi grupları izomorfiktir.*

(ii) *Γ geçişmeli ise Γ nın izotropi grupları, izomorf gruplardır [8].*

Örnek 2.2.1. *Herhangi bir A kümesine kendisi üzerinde aşağıdaki gibi bir grupoiddir diyebiliriz:*
$\Gamma = \Gamma_0 = A$,
$\alpha = \beta = \varepsilon = i = id_A$ *ve her eleman bir birimdir.*
*Kısmi çarpım ise her $x \in A$ için $x.x = x$ ile verilir. Bu grupoide **Null grupoid** denir [12]*

Örnek 2.2.2. *Eğer A boştan farklı bir küme ise, $A \times A$, A üzerinde aşağıdaki kurallarla bir grupoiddir. Herhangi $x, y \in A$ için $\alpha(x,y) = x$, $\beta(x,y) = y$, $\varepsilon(x) = (x,x)$, $i(x,y) = (y,x)$ ve Eğer $y = y'$ ise $\mu((x,y),(y',z)) = (x,z)$. Bu grupoide A ya karşılık gelen **kaba (coarse) grupoid** denir. Bu grupoidin birim morfizmlerinin $\varepsilon(A)$ kümesi açıkça $A \times A$ kartezyen çarpım kümesinin Δ_A köşegenidir [18].*

Örnek 2.2.3. *Her grup tek nesneli bir grupoid olarak düşünülebilir. Yani bir* Γ *grubu aldığımızda grup elemanları morfizmler, grup işlemi de kısmî çarpım işlemi olarak ele alınırsa* Γ *bir grupoid olacaktır [19].*

Örnek 2.2.4. *A herhangi bir küme ve G bir grup olmak üzere* $x,y,z \in A$ *ve* $g,h \in G$ *için* (x,g,y) *üçlüsü x den y ye bir morfizm olarak ele alınır ve kısmi çarpım işlemi* $(x,g,y)(y,h,z) = (x,hg,z)$ *şeklinde tanımlanırsa,* $(A \times G \times A, A)$ *yapısı bir grupoid olur. Bir* (x,g,y) *morfizmi için yapı dönüşümleri;*

$$\begin{gathered}\alpha(x,g,y) = x,\\ \beta(x,g,y) = y,\\ 1_x = (x,e,x),\ e, G \text{ nin birim elemanı},\\ i(x,g,y) = (y,g^{-1},x)\end{gathered}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu grupoid ***aşikâr grupoid*** *(trivial grupoid) olarak adlandırılır [7, 12].*

Örnek 2.2.5. *X bir küme ve G bir grup olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir*

$$\begin{gathered}G \times X \longrightarrow X,\\ (g,x) \mapsto g \bullet x\end{gathered}$$

dönüşümüne G nin X üzerine soldan etkisi denir.

i) Her $g,h \in G$ *ve her* $x \in X$ *için* $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$

ii) Her $x \in X$ *için* $e \bullet x = x$*, burada e, G nin birim elemanıdır.*

Bu durumda X kümesine bir $G-$*küme denir. G nin X üzerine böyle bir etkisi verildiğinde aşağıdaki gibi bir grupoid elde edilir. Bir* (g,x) *sıralı ikilisi, kaynağı x ve hedefi* $g \bullet x$ *olan bir morfizm olarak ele alınırsa ve kısmi çarpım işlemi ise* $y = g \bullet x$ *ve* $z = h \bullet y$ *olmak üzere*

$$(g,x)(h,y) = (hg,x)$$

şeklinde tanımlanırsa,$(G \times X, X)$ *bir grupoid olur. Burada bir* (g,x) *morfizmi için yapı dönüşümleri;*

$$\alpha(g,x) = x,\ \beta(g,x) = g \bullet x,\ 1_x = (e,x),\ i(g,x) = (g^{-1}, g \bullet x)$$

şeklindedir. Bu grupoide ***etki grupoidi*** *(action grupoid) denir. Böylece her* $G-$ *kümeden bu yolla bir grupoid elde edilmiş olur [12].*

Tanım 2.2.4. *Γ bir grupoid ve Γ', Γ nın bir alt kategorisi olsun. Her bir $a \in \Gamma'$ için $a^{-1} \in \Gamma'$ ise Γ' ne Γ nın bir **alt grupoidi** denir. Grup durumuna benzer olarak Γ', Γ nın bir alt grupoididir gerek ve yeter şart her bir $a, b \in \Gamma'$ için $ab^{-1} \in \Gamma'$ dür [12].*

Ek olarak aşağıda alt grupoidin kategorik tanımı verilmiştir:

(Γ, Γ_0) bir grupoid olsun. $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ alt kümeleri aşağıdaki koşulları sağlarsa (Γ', Γ'_0) ikilisine (Γ, Γ_0)' ın bir alt grupoidi denir

(i) $\alpha(\Gamma') \subseteq \Gamma'_0$ ve $\beta(\Gamma') \subseteq \Gamma'_0$

(ii) Her $a, b \in \Gamma'$ için $a.b \in \Gamma'$ dür, yani Γ' kısmi çarpma altında kapalıdır .

(iii) $\forall x \in \Gamma'_0 \Longrightarrow \varepsilon(x) \in \Gamma'$

(iv) $\forall a \in \Gamma' \Longrightarrow a^{-1} \in \Gamma'$.

Tanım 2.2.5. *Γ', Γ grupoidinin bir altgrupoidi olsun.*

*1) Eğer $\Gamma'_0 = \Gamma_0$ ise Γ' ne Γ nın **geniş (wide) altgrupoidi** denir.*

*2) Eğer her bir $x, y \in \Gamma'_0$ için $\Gamma'(x, y) = \Gamma(x, y)$ ise Γ' ne Γ nın **tam (full) altgrupoidi** denir.*

*3) Eğer Γ' geniş ve her bir $x, y \in \Gamma'_0$, $\lambda \in \Gamma'(x, x)$ ve $b \in \Gamma(x, y)$ için $b\lambda b^{-1} \in \Gamma'(y, y)$ ise Γ' ne Γ nin **normal altgrupoidi** denir [4, 7, 17, 20, 21].*

Örnek 2.2.6. *(i) Bir Γ grupoidinde birim morfizmlerden oluşan $\varepsilon(\Gamma_0) = \{1_x | x \in \Gamma_0\}$ sınıfı Γ nın bir geniş alt grupoididir.*

(ii) Her $x \in \Gamma_0$ için $\Gamma(x), x$ noktasındaki nesne grubu olmak üzere

$$Is(\Gamma) = \bigcup_{x \in \Gamma_0} \Gamma(x)$$

grupların demeti olarak da adlandırılan, Γ nın bir geniş altgrupoididir [12].

Tanım 2.2.6. *Bir Γ grupoidinde her bir $x \in \Gamma_0$ için $\Gamma_x = \{a \in \Gamma | \alpha(a) = x\}$ kümesine Γ grupodinin x deki **starı**, $\Gamma^x = \{a \in \Gamma | \beta(a) = x\}$ kümesine Γ grupodinin x deki **co-starı** denir [17].*

Tanım 2.2.7. *(Γ, Γ_0) ve (Γ', Γ'_0) iki grupoid olmak üzere $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ ve $f_0 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma'_0$ olacak şekilde Γ_0 ın her bir x nesnesini Γ'_0 ın bir $f_0(x)$ nesnesine ve her bir $a \in \Gamma(x, y)$ morfizmini $f(a) \in \Gamma'(f_0(x), f_0(y))$ morfizmine götüren (f, f_0) ikilisine bir **grupoid homomorfizmi** denir ve aşağıdaki iki şartı sağlar :*

(1) Her $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$, $f(\mu(a,b)) = \mu'(f(a), f(b))$,

(2) $\alpha' \circ f = f_0 \circ \alpha$ *ve* $\beta' \circ f = f_0 \circ \beta$ *[7].*

Önerme 2.2.4. *Grupoid homomorfizmleri birim morfizmleri ve ters morfizmleri korur, yani*

(i) her $x \in \Gamma_0$ *için* $f(1_x) = 1_{f_0(x)}$,

(ii) her $a \in \Gamma$ *için* $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$*dir.*

İspat:

(i) $x \in \Gamma_0$ için $a = \varepsilon(x)$ dir. (G2)aksiyomundan $(\varepsilon(\alpha(a)), a) \in \Gamma_{(2)}$ ve $(f(\varepsilon(\alpha(a))), f(a)) \in \Gamma'_{(2)}$ dir. $f(a) \in \Gamma'$ olmak üzere, grupoid homomorfizminden dolayı; $f(\varepsilon(\alpha(a)).a) = f(\varepsilon(\alpha(a))).f(a)$ gelir. (G2) aksiyomundan $\varepsilon'(\alpha'(f(a))).f(a) = f(a)$ ise o zaman, $f(\varepsilon(\alpha(a))).f(a) = \varepsilon'(\alpha'(f(a))).f(a)$ eşitliğinden Önerme 2.2.1 deki (iv). maddesinden $f(\varepsilon(\alpha(a))) = \varepsilon'(\alpha'(f(a)))$ gelir ve Tanım 2.2.7 deki (2) den $(f \circ \varepsilon)\alpha(a) = \varepsilon'(f_0 \circ \alpha)a$ gelir. Sonuç olarak
$(f \circ \varepsilon)(x) = \varepsilon'(f_0(x))$
$f(1_x) = 1_{f_0(x)}$ eşitliklerini elde ederiz.

(ii) $a \in \Gamma$ için (G3) aksiyomundan $(a, a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ $\quad a.a^{-1} = \varepsilon(\alpha(a))$. $(f(a), f(a^{-1})) \in \Gamma'_{(2)}$ ve grupoid homomorfizminden dolayı $f(a.a^{-1}) = f(a).f(a^{-1})$
$f(\varepsilon(\alpha(a))) = f(a).f(a^{-1})$, Sonuç 2.2.1 deki (i) den ;

$$f(\varepsilon(\alpha(a))) = \varepsilon'(f_0(\alpha(a))) \tag{2.2.3}$$

olur. Diğer taraftan (G2) aksiyomundan $f(a).f(a)^{-1} = \varepsilon'(\alpha'(f(a)))$,

$$f(a).f(a)^{-1} = \varepsilon'(f_0(\alpha(a))) \tag{2.2.4}$$

2.2.3 ve 2.2.4 denklemden dolayı;

$$f(a).f(a^{-1}) = f(a).(f(a))^{-1}$$

olur.
Önerme 2.2.1 deki (iv) den $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ olduğu görülür. Bu önermedeki (i) ve (ii) şartlarından aşağıdaki sonuçları elde ederiz [7].

Sonuç 2.2.1. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *bir grupoid homomorfizmi olmak üzere aşağıdaki iki şart sağlanır:*

(i) $f\circ\varepsilon=\varepsilon'\circ f_0$

(ii) $f\circ i=i'\circ f$ *[18].*

Tanım 2.2.8. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *bir grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde,*

$$Kerf=\{a\in\Gamma|f(a)=1_{x'},\exists x'\in\Gamma'_0\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir. Açıkça $N=Kerf,\Gamma$ nın bir normal alt grupoididir [12].

Örnek 2.2.7. *(a)* (Γ,Γ_0) *bir grupoid olmak üzere I_Γ ve I_{Γ_0} birim dönüşümlerden meydana gelen (I_Γ,I_{Γ_0}) ikilisi bir grupoid homomorfizmidir.*

(b) $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *ve* $(g,g_0):(\Gamma',\Gamma'_0)\longrightarrow(\Gamma'',\Gamma''_0)$ *grupoid homomorfizmleri olmak üzere $(g,g_0)\circ(f,f_0)=(g\circ f,g_0\circ f_0)$ şeklinde tanımlanan $(g,g_0)\circ(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma'',\Gamma''_0)$ bileşkesi bir grupoid homomorfizmidir [18].*

Tanım 2.2.9. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *grupoid homomorfizmine bir grupoid izomorfizmi denir, eğer $(f,f_0)\circ(g,g_0)=(I_{\Gamma'},I_{\Gamma'_0})$ ve $(g,g_0)\circ(f,f_0)=(I_\Gamma,I_{\Gamma_0})$ olacak şekilde bir $(g,g_0):(\Gamma',\Gamma'_0)\longrightarrow(\Gamma,\Gamma_0)$ grupoid homomorfizmi varsa. Ek olarak, bir $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ grupoid izormorfizmi verildiğinde Γ ve Γ' grupoidleri izomorf grupoidlerdir denir [18].*

Önerme 2.2.5. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *grupoid homomorfizmi aşağıdaki şartları sağlar;*

(i) Eğer f birebir ise f_0 da birebirdir. Benzer şekilde f örten ise f_0 da örtendir.

(ii) f birebir ve örten ise (f,f_0) bir grupoid izomorfizmidir.

(iii) $f(Is(\Gamma))\subseteq Is(\Gamma')$

(iv) (f,f_0) grupoid homomorfizminde f örten ve f_0 birebir ise $f(Is(\Gamma))=Is(\Gamma')$ [8].

İspat:

(i) f birebir iken f_0 ın birebir olduğunu ispatlayalım. Eğer f birebir ise her $a,b\in\Gamma$ için $f(a)=f(b)$ iken $a=b$ dir. $f(a)=f(b)$ olması $\alpha'(f(a))=\alpha'(f(b))$ ve $\beta'(f(a))=\beta'(f(b))$ eşitliklerini getirir. Aynı mantıkla $a=b$ olduğundan $\alpha(a)=\alpha(b)$

ve $\beta(a) = \beta(b)$ dir. Diğer taraftan (f, f_0) grupoid homomorfizmi olduğundan $\alpha'(f(a)) = \alpha'(f(b))$ eşitliği bize $f_0(\alpha(a)) = f_0(\alpha(b))$ eşitliğini verir. $\alpha(a) = \alpha(b)$ ye sahip olduğumuzdan f_0 ın birebirliği ispatlanmış olur. Benzer şekilde β içinde aynı şeyi söyleyebiliriz.

Örtenlik için, f'i örten kabul ettiğimizde her $b \in \Gamma'$ için $f(a) = b$ olacak şekilde en az bir $a \in \Gamma$ vardır. $f(a) = b$ olması $\alpha'(f(a)) = \alpha'(b)$ ve $\beta'(f(a)) = \beta'(b)$ eşitliklerini getirir. f grupoid homomorfizmi olduğundan $f_0(\alpha(a)) = \alpha'(b)$ ve $f_0(\beta(a)) = \beta'(b)$ eşitlikleri gelir. Böylece f_0 ın örtenliği ispatlanmış olur.

(ii) İspatı Tanım 2.2.8 den ve Önerme 2.2.5 (i) den açıkça görülür.

(iii) $a' \in f(Is(\Gamma))$ olsun. Böylece bir $a \in Is(\Gamma)$ için $a' = f(a)$ dır. Bu durumda $\alpha'(a') = \alpha'(f(a)) = f_0(\alpha(a)) = f_0(\beta(a)) = \beta'(f(a)) = \beta'(a')$ olup buradan $a' \in Is(\Gamma')$ olur ve $f(Is(\Gamma)) \subseteq Is(\Gamma')$ olduğu gelir.

(iv) $f(Is(\Gamma)) \subseteq Is(\Gamma')$ olduğunu biliyoruz. $Is(\Gamma') \subseteq f(Is(\Gamma))$ olduğunu gösterelim. $a' \in Is(\Gamma')$ için $\alpha'(a') = \beta'(a')$ dir. f' nin örtenliğinden, $a' \in \Gamma'$ için $a' = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in \Gamma$ vardır. O zaman $\alpha'(a') = \beta'(a')$ ve grupoid homomorfizminden $f_0(\alpha(a)) = f_0(\beta(a))$ olup f_0 birebir olduğundan $\alpha(a) = \beta(a)$ olur. Bu durumda $a \in Is(\Gamma)$ dır. Buradan $f(a) = a' \in f(Is(\Gamma))$ dır. Böylece $Is(\Gamma') \subseteq f(Is(\Gamma))$ dir. Sonuç olarak $f(Is(\Gamma)) = Is(\Gamma')$ dür.

Önerme 2.2.6. $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma'_0)$ *bir grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) Eğer (K', K'_0), (Γ', Γ'_0) *ın bir alt grupoidi ise* $(f^{-1}(K'), f_0^{-1}(K'_0))$ *de* (Γ, Γ_0) *ın alt grupoididir.*

(ii) Eğer K', Γ' *nün normal alt grupoidi ise,* $Kerf \subseteq f^{-1}(K')$ *olacak şekildeki* $f^{-1}(K')$ *de* Γ *nın normal alt grupoididir.*

İspat:

(i) $(f^{-1}(K'), f_0^{-1}(K'_0))$ nün Tanım 2.2.4 deki koşulları sağladığını göstermeliyiz.

• $\alpha(f^{-1}(K')) \subseteq f_0^{-1}(K'_0)$ olduğunu gösterelim. Bu durumda eğer $x \in \alpha(f^{-1}(K'))$ ise, $a \in f^{-1}(K')$ ile $x = \alpha(a)$ gelir. $f(a) \in K'$ ve $\alpha'(K') \subseteq K'_0$ olduğundan $f_0(x) = f_0(\alpha(a)) =$

$\alpha'(f(a)) \in K'_0$ dır. Bu durumda $x \in f_0^{-1}(K'_0)$ dır. Benzer şekilde, $\beta(f^{-1}(K')) \subseteq f_0^{-1}(K'_0)$ olur.

• $a,b \in f^{-1}(K')$ olsun $a.b$ tanımlıdır yani $\beta(a) = \alpha(b)$. Bunun sonucunda $f(a), f(b) \in K'$ dür ve $\beta'(f(a)) = f_0(\beta(a)) = f_0(\alpha(b)) = \alpha'(f(b))$ dir. Bu durumda, $f(a).f(b)$ Γ' de tanımlıdır. Ardından K' bir alt grupoid olduğundan, $f(a).f(b) \in K'$ dür. $a.b \in f^{-1}(K')$ şöyleki $f(a.b) \in \Gamma'$ dür. Bu nedenle Tanım 2.2.4 in (ii) koşulu sağlanıyor.

• Her $x \in f_0^{-1}(K'_0)$ için $\varepsilon(x) \in f^{-1}(K')$ vardır. O halde, $f_0(x) \in K'_0$ ve K' altgrupoid olduğundan $\varepsilon'(f_0(x)) \in K'$ dür. Bu takdirde, $\varepsilon(x) \in f^{-1}(K')$ şöyleki $f(\varepsilon(x)) \in K'$ dür.

• Gerçekten K' bir alt grupoid olduğunda, $f(a) \in K'$ den $(f(a))^{-1} \in K'$ gelir. O zaman $a^{-1} \in f^{-1}(K')$ şöyleki $(f(a))^{-1} \in K'$ dür.

(ii) i maddesinden; $f^{-1}(K')$ nün, (Γ) nın bir alt grupoidi olduğu açıktır. Normallik şartını sağlatalım.

$\beta(a) = \alpha(\lambda) = \beta(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in f^{-1}(K')$ ve $a \in \Gamma$ olsun. $a.\lambda.a^{-1} \in f^{-1}(K')$ olduğunu ispatlayalım.

Gerçekten, $f(\lambda) \in K'$ olup $\beta'(f(a)) = f_0(\beta(a)) = f_0(\alpha(\lambda)) = \alpha'(f(\lambda))$ ve $\beta'(f(a)) = f_0(\beta(a)) = f_0(\beta(\lambda)) = \beta'(f(\lambda))$ dır. $f(\lambda) \in K'$ den, $\beta'(f(a)) = \alpha'(f(\lambda)) = \beta'(f(\lambda))$ ve Γ' de K' nün normal alt grupoid olmasından dolayı $f(a).f(\lambda).(f(a))^{-1} \in K'$ gelir. f bir grupoid homomorfizmi olduğundan $f(a.\lambda.a^{-1}) \in K'$ dür. Bu durumda, $a.\lambda.a^{-1} \in f^{-1}(K')$ olup, dolayısıyla $f^{-1}(K')$ normal alt grupoiddir.

$Kerf \subseteq f^{-1}(K')$ dür. Gerçekten, $a \in Kerf$ için, $f(a) = \varepsilon'(x')$ ile $x' \in \Gamma'_0$ a sahibiz. K' altgrupoid olduğundan Tanım 2.2.4 in (iii) maddesinden $\varepsilon'(x') \in K'$ dür. Buradan $\varepsilon'(x') = f(a) \in K'$ olup $a \in f^{-1}(K')$ elde edilir.

Sonuç 2.2.2. *$f : \Gamma \to \Gamma'$ bir Γ_0- grupoid homomorfizmi olsun. O halde aşağıdaki iddalar sağlanır:*

(i) Eğer (K', K'_0), (Γ', Γ_0) ın alt grupoidi ise $(f^{-1}(K'), f_0^{-1}(K'_0))$ de (Γ, Γ_0) ın alt grupoididir.

(ii) Eğer K', Γ' nün normal alt grupoidi ise; $f^{-1}(K')$ de Γ nın normal alt grupoididir, $Kerf \subseteq f^{-1}(K')$ şeklindedir.

Uyarı 2.2.1. *Eğer $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma'_0)$ bir grupoid homomorfizmi ise, $Imf = \{f(a) | a \in \Gamma\}$ ifadesi Γ' nün her zaman alt grupoidi değildir. Örneğin,*

$$\Gamma = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} = B \times B$$

kaba grupoidi $B = \{0,1\}$ *kümesi ile bağlantılı ve* $f : \Gamma \to Z$ *dönüşümü* $f(0,0) = 0$*,* $f(0,1) = 1$*,* $f(1,0) = -1$*,* $f(1,1) = 0$ *ile tanımlı olsun.* $f_0 : B \to \{0\}$ *ile gösterdiğimiz dönüşüm* $f_0(0) = 0$ *ve* $f_0(1) = 0$ *ile tanımlıdır. B üzerindeki* Γ *kaba grupoidinden* $\{0\}$ *üzerindeki giriş sayılarının Z toplamsal grubuna giden* (f, f_0) *ikilisi için Tanım 2.2.7 nin koşullarını kolayca ispatlatabiliriz. Burada* $Imf = \{0,-1,1\}$ *dir ki bu Z nin altgrubu değildir. Dolayısıyla* Imf *altgrupoid değildir.*

2.2.1 İndirgenmiş Grupoid

Grupoid teoride mevcut grupoidlerden yararlanarak yeni grupoidler elde edilebilir. İndirgenmiş grupoidde bu mantıkla oluşturulmuştur.

Tanım 2.2.10. (Γ,Γ_0) *bir grupoid olsun ve* $p : X \longrightarrow \Gamma_0$ *dönüşümünü verilsin.* $p^*(\Gamma) = \{(x,y,a) \in X \times X \times \Gamma \mid \alpha(a) = p(x), \beta(a) = p(y)\}$ *kümesi,*

$$\alpha^*(x,y,a) = x, \beta^*(x,y,a) = y, \varepsilon^* = (x,x,\varepsilon(p(x))), i^*(x,y,a) = (y,x,i(a))$$

ve

$$\mu^*((x,y,a),(y',z,b)) = (x,z,\mu(a,b)) \Leftrightarrow y = y'$$

kısmi çarpımı ile X *üzerinde bir grupoiddir. Buna* p *altında* Γ *nın indirgenmiş bir grupoidi denir.*

$p^*(\Gamma)$, $p : X \longrightarrow \Gamma_0$ dönüşümü altında Γ nın indirgenmiş bir grupoidi ise, bu takdirde, $p^*_\Gamma(x,y,a) = a$ aracılığıyla birlikte p ve $p^*_\Gamma : p^*(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ dönüşümü tanımlı olup $(p^*_\Gamma, p) : (p^*(\Gamma),X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ grupoid homomorfizmi, indirgenmiş bir grupoidin kanonik homomorfizmidir [8].

Teorem 2.2.1. $(p^*_\Gamma, p) : (p^*(\Gamma),X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ *ikilisi aşağıdaki evrensellik özelliğini sağlar*

her $(s,p) : (\Gamma',X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ grupoid homomorfizmi için aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde bir tek $t' : (\Gamma',X) \longrightarrow (p^*(\Gamma),X)$ grupoid homomorfizmi vardır [8].

$$\begin{tikzcd}
\Gamma' \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "(\exists)t'"'] & & \Gamma \\
& p^*(\Gamma) \arrow[ur, "p^*_\Gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

İspat: Γ', X üzerinde bir grupoid ve $(s,t) : (\Gamma',X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ grupoid homomorfizmi olsun. Her $a' \in \Gamma'$ için $t' : \Gamma' \longrightarrow p^*(\Gamma)$ dönüşümü, $t'(a') = (\alpha'(a'), \beta'(a'), s(a'))$ ile tanımlayalım.

$\alpha^* \circ t' = \alpha'$ ve $\beta^* \circ t' = \beta'$ eşitliklerine sahibiz. t' nün, grupoidlerin X- homomorfizmi olduğu kolayca görülür. Açıkça, $p^*_\Gamma \circ t = s$ ya sahibiz ve standart şekilde t tektir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Ayrıca $s : (\Gamma,X) \longrightarrow (\Gamma',X)$ X- homomorfizmi için $f : Y \longrightarrow X$ olacak şekilde en az bir tek $f^*(s) : f^*(\Gamma) \longrightarrow f^*(\Gamma')$ Y- homomorfizmi vardır. Her $(y_1,y_2,a) \in f^*(\Gamma)$ için $f^*(s)(y_1,y_2,a) = (y_1,y_2,s(a)) \in f^*(\Gamma')$ tanımlıdır.

Açıkça, $f^*(I_\Gamma) = I_{f^*(\Gamma)}$ eşitliğine sahibiz. Eğer ikinci bir X- homomorfizmi $t : (\Gamma', X) \longrightarrow (\Gamma'', X)$ varsa o zaman $f^*(t \circ s) = f^*(\Gamma) \longrightarrow f^*(\Gamma'')$ dönüşümünü elde ederiz ve her $(y_1, y_2, a) \in f^*(\Gamma)$ için $f^*(t \circ s)(y_1, y_2, a) = (y_1, y_2, (t \circ s)(a))$ bir Y- homomorfizmidir. $f^*(t \circ s) = f^*(t) \circ f^*(s)$ eşitliği korunur [8].

Önerme 2.2.7. *$f : Y \longrightarrow X$ dönüşümü ve $f^* : \mathrm{G}(X) \longrightarrow \mathrm{G}(Y)$ X, Y tabanlı indirgenmiş grupoid funktor dönüşümü için;*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & X \arrow[r, "f^*"] & f^*(\Gamma) \arrow[r, shift left, "\alpha^*"] \arrow[r, shift right, "\beta^*"'] & Y \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift right, "\alpha"'] & & \Gamma' \arrow[dl, shift right, "\beta"'] \arrow[dl, shift left, "\alpha'"] & \arrow[r, "f^*"] & & f^*(\Gamma) \arrow[rr, "f^*(s)"] \arrow[dr, shift left, "\beta^*"] \arrow[dr, shift right, "\alpha^*"'] & & f^*(\Gamma') \arrow[dl, shift right, "\beta'^*"'] \arrow[dl, shift left, "\alpha'^*"] \\ & X & & & & & Y & \end{tikzcd}$$

geçişmeli bir ilişki elde edilir [8].

Önerme 2.2.8. *(Γ, X) bir grupoid, $t : Z \to Y$ ve $s : Y \to X$ iki dönüşüm olsun. $t^*(s^*(\Gamma))$ ve $(s \circ t)^*(\Gamma)$ grupoidleri Z izomorfiktir [8].*

İspat: İlk olarak aşağıdaki indirgenmiş grupoidleri tanımlayalım:

$$s^*(\Gamma) = \{(y_1, y_2, a) \in Y \times Y \times \Gamma | \alpha(a) = s(y_1), \beta(a) = s(y_2)\},$$

$$\begin{aligned} t^*(s^*(\Gamma)) &= \{(z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) \in Z \times Z \times s^*(\Gamma) | \alpha(y_1, y_2, a) = t(z_1), \beta(y_1, y_2, a) = t(z_2)\} \\ &= \{(z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) \in Z \times Z \times s^*(\Gamma) | y_1 = t(z_1), y_2 = t(z_2)\} \end{aligned}$$

ve

$$(s \circ t)^*(\Gamma) = \{(z_1, z_2, a) \in Z \times Z \times \Gamma | \alpha(a) = (s \circ t)(z_1), \beta(a) = (s \circ t)(z_2)\}$$

dir. Tanımlanan grupoidler için iki dönüşüm alalım:

$$\begin{aligned} \varphi : (s \circ t)^*(\Gamma) &\longrightarrow t^*(s^*(\Gamma)) \\ (z_1, z_2, a) &\xrightarrow{\ \varphi\ } (z_1, z_2, (t(z_1), t(z_2), a)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi : t^*(s^*(\Gamma)) &\longrightarrow (s \circ t)^*(\Gamma) \\ (z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) &\xrightarrow{\ \psi\ } (z_1, z_2, a) \end{aligned}$$

Bu iki dönüşümü bileşkelendirdiğimizde $\psi \circ \varphi = Id_{(s\circ t)^*(\Gamma)}$ ve $\varphi \circ \psi = Id_{t^*(s^*(\Gamma))}$ olması, $t^*(s^*(\Gamma))$ ve $(s\circ t)^*(\Gamma)$ grupoidlerinin Z izomorfizm olduğunu gösterir. Gerçekten,

$$(\varphi \circ \psi)(z_1,z_2,(y_1,y_2,a)) = \varphi(\psi(z_1,z_2,(y_1,y_2,a))) = \varphi(z_1,z_2,a) = (z_1,z_2,(t(z_1),t(z_2),a))$$

dir $(z_1,z_2,(y_1,y_2,a)) \in t^*(s^*(\Gamma))$ olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$(\psi \circ \varphi)(z_1,z_2,a) = \psi(\varphi(z_1,z_2,a)) = \psi(z_1,z_2,(y_1,y_2,a)) = (z_1,z_2,a) \in (s\circ t)^*(\Gamma)$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Önerme 2.2.9. (Γ,X) *bir grupoid olsun.* $Id_X^*(\Gamma)$ *ve* Γ *grupoidi* $X-$ *izomorfiktir [8].*

İspat: $Id^*(\Gamma) = \{(x_1,x_2,a) \in X \times X \times \Gamma | \alpha(a) = Id(x_1) = x_1, \beta(a) = Id(x_2) = x_2\}$ dır.

$$s : \Gamma \to Id^*(\Gamma)$$
$$s(a) = (\alpha(a),\beta(a),a)$$

ve

$$t : Id^*(\Gamma) \to \Gamma$$
$$t(x_1,x_2,a) = a$$

ile tanımlı iki dönüşüm alalım.

$s\circ t = I_{Id^*(\Gamma)}$ ve $t\circ s = I_\Gamma$ olduğunu gösterelim.

$(s\circ t)(x_1,x_2,a) = s(t(x_1,x_2,a)) = s(a) = (x_1,x_2,a)$ olur ve $(x_1,x_2,a) \in Id^*(\Gamma)$

$(t\circ s)(a) = t(s(a)) = t(x_1,x_2,a) = a$ olur ve $a \in \Gamma$ olduğu görülür. Böylece $Id_X^*(\Gamma)$ ve Γ grupoidi $X-$ izomorfiktir.

(Γ,X) bir grupoid ve $j : Y \hookrightarrow X$ dahil etme dönüşümü ve Y,X in alt kümesi olsun. $\Gamma_1 = \alpha^{-1}(Y) \cap \beta^{-1}(Y)$ olmak üzere (Γ_1,Y) bir grupoiddir. Buna Γ nın Y ye kısıtlaması denir ve $(\Gamma|_Y,Y)$ ile gösterilir. Açıkça

$\alpha_1 = \alpha|_{\Gamma_1}, \beta_1 = \beta|_{\Gamma_1}, \varepsilon_1 = \varepsilon|_Y$ dir [8].

Önerme 2.2.10. *(i)* $\Gamma(x_0)$ *izotropi olacak şekilde* $Y \times Y \times \Gamma(x_0)$ *aşikar grupoiddir. Her* $y \in Y$ *için,* $c : Y \to X$ *ve* $c(y) = x_0$ *ile tanımlı bir sürekli dönüşümdür. Bu takdirde,* (Γ,X) *grupoidinin* $c^*(\Gamma)$ *indirgenmiş grupoidi ile* $Y \times Y \times \Gamma(x_0)$ *aşikar grupoidi* Y *izomorfiktir.*

(ii) *$Y \subseteq X$ olduğunda, $j : Y \hookrightarrow X$ dahil etme dönüşümü altında (Γ, X) grupoidinin $j^*(\Gamma)$ indirgenmiş grupoidi ile $\Gamma\,|_Y$ kısıtlaması Y izomorfiktir.*

(iii) *$(\Gamma, \alpha = \beta, X)$ grup demetini alalım ve $f : Y \to X$ birebir dönüşüm olsun. Bu takdirde $f^*(\Gamma)$ indirgenmiş grupoidi bir grup demetidir [8].*

İspat:

(i) $c^*(\Gamma) = \{(y_1, y_2, a) \in\ Y \times Y \times \Gamma | \alpha(a) = c(y_1) = x_0, \beta(a) = c(y_2) = x_0\}$ ile tanımlansın. $(y_1, y_2, a) \in c^*(\Gamma)$ için $a \in \Gamma(x_0)$ olduğu açıktır. Böylece $c^*(\Gamma)$ ve $Y \times Y \times \Gamma(x_0)$ Y izomorfiktir.

(ii) $j^*(\Gamma) = \{(y_1, y_2, a) \in\ Y \times Y \times \Gamma | \alpha(a) = y_1, \beta(a) = y_2\}$ grupoidine sahibiz.

$\Gamma\,|_Y = \{a \in \Gamma \mid \alpha(a) = Y, \beta(a) = Y\} = \alpha^{-1}(Y) \cap \beta^{-1}(Y)$ kısıtlaması tanımlı olup, $u : j^*(\Gamma) \to \Gamma \mid Y$ ve $v : \Gamma \mid Y \to j^*(\Gamma)$ olacak şekilde iki dönüşüm alalım. $u \circ v = Id_{\Gamma|_Y}$ ve $v \circ u = Id_{j(\Gamma)}$ olduğu görülür. $j^*(\Gamma)$ ve $\Gamma\,|_Y$ grupoidleri Y izomorfiktir.

(iii) $(\Gamma, \alpha = \beta)$ X üzerinde grup demeti olduğundan, $f^*(\Gamma) = \{(y_1, y_2, a) \in\ Y \times Y \times \Gamma | \alpha(a) = f(y_1), \beta(a) = f(y_2) \Rightarrow f(y_1) = f(y_2)\}$ ile tanımlıdır. $\alpha^*, \beta^* : f^*(\Gamma) \to Y$ dönüşümleri, $\alpha^*(y_1, y_2, a) = y_1$, $\beta^*(y_1, y_2, a) = y_2$ şeklindedir. f birebir olduğundan $f(y_1) = f(y_2)$ iken $y_1 = y_2$ olur. $y_1 = y_2$ ise $\alpha^*(y_1, y_2, a) = \beta^*(y_1, y_2, a)$ gelir. Sonuç olarak $\alpha^* = \beta^*$ dir. Böylece $f^*(\Gamma)$ grup demetidir.

Önerme 2.2.11. *Bir $f : Y \to X$ dönüşümü altında bir Γ geçişli grupoidinin $f^*(\Gamma)$ indirgenmiş grupoidi Y üzerinde bir geçişli grupoiddir [8].*

İspat: Γ, X üzerinde bir geçişli grupoid olduğundan

$$\alpha \times \beta : \Gamma \to X \times X$$
$$(\alpha \times \beta)(a) = (\alpha(a), \beta(a))$$

dönüşümü örtendir. Buradan $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ verildiğinde $(\alpha \times \beta)(a) = (f(y_1), f(y_2))$ olacak şekilde $\exists a \in \Gamma$ var olduğu gelir. Yani $\alpha(a) = f(y_1)$ ve $\beta(a) = f(y_2)$ dir. Sonuç olarak $(y_1, y_2, a) \in f^*(\Gamma)$ ve $(\alpha^* \times \beta^*)(y_1, y_2, a) = (\alpha^*(y_1, y_2, a), \beta^*(y_1, y_2, a)) = (y_1, y_2)$ dir. Buradan $\alpha^* \times \beta^* : f^*(\Gamma) \to Y \times Y$ örtendir. Böylece $f^*(\Gamma)$ bir geçişli grupoiddir.

2.3 Grupoidlerin Özel Homomorfizmleri

Tanım 2.3.1. *Bir $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ grupoid homomorfizmi aşağıdaki evrensellik özelliğini sağlıyorsa ona bir geri çekme (pullback) denir. Evrensellik özelliği şudur:*

Her (Γ_1,Γ_0) grupoidi ve her $(g,g_0=f_0):(\Gamma_1,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ grupoid homomorfizmi için $f\circ\bar{g}=g$ olacak şekilde bir tek $\bar{g}:\Gamma_1\to\Gamma \quad \Gamma_0$ homomorfizmi vardır. Diğer bir ifadeyle her $(g,g_0=f_0):(\Gamma_1,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ grupoid homomorfizmi aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde $\quad \Gamma_1\xrightarrow{\bar{g}}\Gamma\xrightarrow{f}\Gamma'$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\exists\bar{g}"'] & & \Gamma' \arrow[dl, "f"] \\
& \Gamma &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagram elde edilir [8].

Teorem 2.2.1'i kullanarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 2.3.1. *$p:X\to\Gamma_0$ dönüşümü ile Γ nın $p^*(\Gamma)$ indirgenmiş grupoidinin $(p^*(\Gamma),p)$ kanonik homomorfizmi bir geri çekme(pullback) dir [8].*

Her $x,y\in\Gamma_0$ için $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde,

$$f(\Gamma_x)\subseteq(\Gamma')_{f_0(x)}$$

$$f(\Gamma^y)\subseteq(\Gamma')^{f_0(y)}$$

ve

$$f(\Gamma_x^y)\subseteq(\Gamma')_{f_0(x)}^{f_0(y)}$$

dir. f nin $\Gamma_x,\Gamma^y,\Gamma_x^y$' ye kısıtlamaları sırasıyla;

$$f_x:\Gamma_x\to\Gamma'_{f_0(x)}$$

$$f^y:\Gamma^y\to(\Gamma')^{f_0(y)}$$

$$f_x^y:\Gamma_x^y\to(\Gamma')_{f_0(x)}^{f_0(y)}$$

dönüşümleridir.

Eğer $Ker f=\varepsilon(\Gamma_0)$ ise, $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ diskret çekirdeğe sahiptir [8].

Tanım 2.3.2. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *bir grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde,*

(i) f_0 *birebir (örten, birebir-örten) ise,* (f,f_0)*'a taban birebir (taban örten, taban birebir-örten) denir.*

(ii) Her $x\in\Gamma_0$ *için* $f_x:\Gamma_x\to\Gamma'_{f_0(x)}$ *birebir (örten, birebir-örten) ise,* (f,f_0)*'a lifsel birebir (lifsel örten, lifsel birebir-örten) denir.*

(iii) Her $x,y\in\Gamma_0$ *için* $f_x^y:\Gamma_x^y\to(\Gamma')_{f_0(x)}^{f_0(y)}$ *birebir (örten, birebir-örten) ise,* (f,f_0)*'a parçasal birebir (parçasal örten, parçasal birebir-örten) denir [8].*

Önerme 2.3.2. *(i)* $f:X\to\Gamma_0$ *dönüşümü ile* Γ *nın* $f^*(\Gamma)$ *indirgenmiş grupoidinin* $(f^*(\Gamma),f)$ *kanonik homomorfizmi parçasal birebir-örtendir.*

(ii) Eğer $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *taban örten ve parçasal örten ise* f *örtendir.*

(iii) $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *grupoid homomorfizmi diskret çekirdeğe sahiptir gerek ve yeter şart , her* $x\in\Gamma_0$ *için* $Kerf_x^x=\{\varepsilon(x)\}$ *dur. Yani her* $x\in\Gamma_0$ *için* $f_x^x:\Gamma(x)\to(\Gamma')(f_0(x))$ *grup homomorfizmi aşikar çekirdeğe sahiptir [8].*

Teorem 2.3.1. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde,*

(i) (f,f_0) *bir geri çekme(pullback)dir gerek ve yeter şart* (f,f_0) *parçasal birebir-örtendir.*

(ii) f *birebirdir gerek ve yeter şart* f *taban birebir ve parçasal birebirdir.*

(iii) (f,f_0) *lifsel birebirdir gerek ve yeter şart* (f,f_0) *diskret çekirdeğe sahiptir [8].*

Önerme 2.3.3. *Bir* $f:\Gamma\to\Gamma'$ *lifsel örten grupoid homomorfizmi bir lifsel birebir-örten homomorfizmdir gerek ve yeter şart* $Kerf$ *diskrettir (ayrıktır) [8].*

İspat: Teorem 2.3.1 in (iii) maddesinden kolayca ispatlanır.

Şimdi lifsel örten ya da lifsel birebir-örten homomorfizmleri karakterize eden bir teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.2. (Γ,Γ_0), (Γ',Γ'_0) *ve* (Γ'',Γ''_0) *üç grupoid olsun.* $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\to(\Gamma',\Gamma'_0)$ *ve* $(g,g_0):(\Gamma',\Gamma'_0)\to(\Gamma'',\Gamma''_0)$ *grupoid homomorfizmleri olsun. Bu takdirde*

(i) eğer f,g *lifsel örten (birebir-örten) homomorfizm ise o zaman* $g\circ f$ *de lifsel örten (birebir-örten)dir.*

(ii) *eğer $g \circ f$ ve f lifsel örten homomorfizm ve $f_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ örten ise o zaman g bir lifsel örten homomorfizmdir.*

(iii) *eğer $g \circ f$ ve g lifsel birebir- örten homomorfizm ise o zaman f de lifsel birebir- örtendir. [8].*

Sonuç 2.3.1. *g bir geri çekme (pullback) olacak şekilde grupoid homomorfizmlerinin aşağıdaki değişimli diyagramı verilsin:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma'' & \xrightarrow{g} & \Gamma''' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\ \Gamma & \xrightarrow[f]{} & \Gamma' \end{array}$$

Eğer h lifsel örten homomorfizm ise $\bar{h}$ de lifsel örten homomorfizmdir [8].

İspat: Teorem 2.3.2 de kolayca ispatlanır.

3. TOPOLOJİK GRUPOİDLER

3.1 Topolojik Grupoidlerin Özellikleri

Tanım 3.1.1. *Bir topolojik grupoid, yapı dönüşümleri sürekli olacak şekilde Γ ve Γ_0 üzerindeki topolojilerle birlikte bir (Γ,Γ_0) grupoididir. [7]*

Örnek 3.1.1. *Her topolojik grup tek nesneli bir topolojik grupoid olarak düşünülebilir. [5]*

Örnek 3.1.2. *Eğer Γ bir topolojik grup ve A topolojik uzay ise $A\times\Gamma\times A$, A üzerinde bir topolojik grupoiddir ve buna aşikar(trivial) topolojik grupoid denir [7].*

Tanım 3.1.2. (Γ,Γ_0) *bir topolojik grupoid olsun.* (Γ,Γ_0) *ın bir topolojik alt grupoidi bir* (Γ',Γ'_0) *alt grupoididir, öyleki Γ' ve Γ'_0 sırasıyla Γ ve Γ_0 dan indirgenen alt uzay topolojilerine sahiptir [9].*

Tanım 3.1.3. (Γ,Γ_0) *topolojik grupoidinin bir topolojik alt grupoidi* (Γ',Γ'_0) *olsun.*

(i) Eğer $\Gamma'_0=\Gamma_0$ ise (Γ',Γ'_0) a geniştir denir.

(ii) Her $x,y\in\Gamma'_0$ için $\Gamma(x,y)=\Gamma'(x,y)$ ise (Γ',Γ'_0) a tam(full) dır denir [9].

Tanım 3.1.4. (Γ,Γ_0) *bir topolojik grupoid ve N geniş topolojik alt grupoidi olsun. Her bir $x,y\in\Gamma_0$, $\lambda\in N(x,x)$ ve $a\in\Gamma(x,y)$ için $a^{-1}.\lambda.a\in N(y,y)$ ise N'ye Γ'nın topolojik normal alt grupoidi denir [9].*

Tanım 3.1.5. *Bir* $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi, nesneler ve morfizmlerin kümesi üzerinde sürekli olan bir grupoid homomorfizmidir [5].*

Önerme 3.1.1. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

$$\forall x\in\Gamma_0,\quad f(\tilde{x})=\widetilde{f_0(x)}$$

$$\forall a\in\Gamma,\quad f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$$

Burada, $f\circ\varepsilon=\varepsilon'\circ f_0$ ve $f\circ i=i'\circ f$ dir. Bu eşitlikler aşağıdaki değişimli diyagramlara karşılık gelir [7].

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\
\Gamma'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & \Gamma'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\
\Gamma' \arrow[r, "i'"'] & \Gamma'
\end{tikzcd}
$$

İspat: İspatı Önerme 2.2.4 ün ispatındaki gibidir.

Önerme 3.1.2. *$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ sürekli bir dönüşüm olsun. $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ ikilisinin topolojik grupoid homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart,*

$$\forall (a,b) \in \Gamma_{(2)} \quad \textit{için} \quad (f(a), f(b)) \in \Gamma'_{(2)} \quad \textit{ve} \quad f(\mu(a,b)) = \mu'(f(a), f(b)) \quad (3.1)$$

dir [9].

İspat: (f, f_0) topolojik grupoid homomorfizmi olsun. O halde (3.1) şartı, topolojik grupoid homomorfizminin tanımından gelir.

Tersine, diyelim ki $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ dönüşümü (3.1) in şartlarını sağlar ve her $x \in \Gamma_0$ için $f_0 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma'_0$ dönüşümünü $f_0(x) = \alpha'(f(\varepsilon(x)))$ ile tanımlıyalım. f_0 süreklidir çünkü bu, sürekli dönüşümlerin bir bileşkesidir. (f, f_0) ın topolojik grupoid homomorfizmi olduğunu görmek için $\alpha' \circ f = f_0 \circ \alpha$ ve $\beta' \circ f = f_0 \circ \beta$ eşitliklerini göstermeliyiz.

$(a, \varepsilon(\beta(a))) \in \Gamma_{(2)}$ olduğundan, $(f(a), f(\varepsilon(\beta(a)))) \in \Gamma'_{(2)}$ gelir. Bu nedenle,

$$f(a)f(\varepsilon(\beta(a))) = f(a\varepsilon(\beta(a))) = f(a)$$

eşitliğine sahibiz, fakat $f(a)\varepsilon'(\beta'(f(a))) = f(a)$ dır. Dolayısıyla

$$\varepsilon'(\beta'(f(a))) = f(\varepsilon(\beta(a))) \Longrightarrow \alpha'(\varepsilon'(\beta'(f(a)))) = \alpha'(f(\varepsilon(\beta(a))))$$

ve eğer Önerme (2.2.1) in (xii) şartını uygularsak, $\beta'(f(a)) = f_0(\beta(a))$ elde ederiz.

Benzer şekilde, $\alpha' \circ f = f_0 \circ \alpha$ yı gösterebiliriz. Bu durumda (f, f_0) bir topolojik grupoid homomorfizmidir [9].

Önerme 3.1.3. *$(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \rightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ bir topolojik grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanır.*

(i) Eğer (K', K'_0), (Γ', Γ'_0) ın topolojik alt grupoidi ise; $(f^{-1}(K'), f_0^{-1}(K_0))$ de (Γ, Γ_0) ın topolojik alt grupoididir.

(ii) Eğer K', Γ' nün topolojik normal alt grupoidi ise; $f^{-1}(K')$ de $Kerf \subseteq f^{-1}(K)$ olacak şekilde Γ nın topolojik normal alt grupoididir [9].

İspat: İspat Önerme 2.2.6 daki gibi yapılır.

Tanım 3.1.6. $(f,f_0) : (\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma',\Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi olsun.* $Kerf = \{a \in \Gamma \mid f(a) \in \varepsilon'(\Gamma'_0)\}$ *kümesine* f *nin çekirdeği denir.* $Kerf$ *altuzay topolojisine sahiptir. Eğer* $Kerf = \varepsilon(\Gamma_0)$ *ise* (f,f_0) *diskret çekirdeğe sahiptir deriz [7].*

Topolojik grupoidlerin homomorfizm hakkında iyi bilinen üç örneği ifade edelim.

Örnek 3.1.3. *(i)* (Γ,Γ_0) *topolojik grupoid olsun. O halde* $(Id_\Gamma, Id_{\Gamma_0}) : (\Gamma,\Gamma_0) \to (\Gamma,\Gamma_0)$ *bir topolojik grupoid homomorfizmidir.*

(ii) $(f,f_0) : (\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma',\Gamma'_0)$ *ve* $(g,g_0) : (\Gamma',\Gamma'_0) \longrightarrow (\Gamma'',\Gamma''_0)$ *iki topolojik grupoid homomorfizmi olsun. O halde* $(g,g_0)\circ(f,f_0) : (\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma'',\Gamma''_0)$ *bileşkesi bir topolojik grupoid homomorfizmidir ve bu,* $(g,g_0)\circ(f,f_0) = (g\circ f, g_0\circ f_0)$ *ile tanımlıdır.*

(iii) (Γ,Γ_0) *bir topolojik grupoid olsun. Bu takdirde* $\alpha\times\beta : \Gamma \to \Gamma_0\times\Gamma_0$ *dönüşümü bir topolojik grupoid homomorfizmidir. Gerçekten* $a\in\Gamma$ *için,*

$$\begin{array}{rcl} \alpha\times\beta : \Gamma & \to & \Gamma_0\times\Gamma_0 \\ a & \mapsto & (\alpha(a),\beta(a)) \end{array}$$

olur. Ayrıca $(\alpha\times\beta, Id) : (\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma_0\times\Gamma_0,\Gamma_0)$ *dır. Bu takdirde*

$$\begin{array}{rcl} \alpha'\circ(\alpha\times\beta)(a) & = & \alpha'(\alpha(a),\beta(a)) \\ & = & \alpha(a) = (Id\circ\alpha)(a) \\ & \Rightarrow & \alpha'\circ(\alpha\times\beta) = Id\circ\alpha \end{array}$$

eşitliği gelir ve grupoid homomorfizm şartı olan $f_0\circ\alpha = \alpha'\circ f$ *sağlanmış olur.* $f_0\circ\beta = \beta'\circ f$ *de benzer şekilde gelir. Ek olarak* α,β *izdüşüm fonksiyonu olduklarından süreklidir. Dolayısıyla sürekliliği açıktır [9].*

Eğer $(f,f_0) : (\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma',\Gamma'_0)$ topolojik grupoid homomorfizmi ise her $x,y\in\Gamma_0$ için

$$f(\Gamma_x) \subseteq \Gamma'_{f_0(x)}, f(\Gamma^y) \subseteq (\Gamma')^{f_0(y)}, f(\Gamma(x,y)) \subseteq (\Gamma')(f_0(x),f_0(y))$$

dir. Ayrıca f nin Γ_x, Γ^y, $\Gamma(x,y)$'ye kısıtlamaları sırasıyla

$$f_x : \Gamma_x \to \Gamma'_{f_0(x)}, \quad f^y : \Gamma^y \to (\Gamma')^{f_0(y)}, \quad f_x^y : \Gamma_x^y \to (\Gamma')(f_0(x), f_0(y))$$

sürekli dönüşümleri olup bu dönüşümler genellikle topolojik grupoid homomorfizmi olmaz [9].

Önerme 3.1.4. Γ *bir grupoid ve* Γ' *bir topolojik grupoid olmak üzere* Γ*dan* Γ' *üzerine grupoidlerin bir homomorfizmi* $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ *olsun. Bu takdirde* f, Γ *üzerine* Γ *nın grupoid yapısı ile uyumlu bir topoloji indirger ve* f *böylece bir topolojik grupoid homomorfizmi olur [22].*

İspat: Aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

- $U \subset \Gamma$ açıktır gerek ve yeter şart en az bir $V \subset \Gamma'$ açık kümesi için $U = f^{-1}(V)$ dir.

- $\bar{U} \subseteq \Gamma_0$ açıktır gerek ve yeter şart en az bir $\bar{V} \subseteq \Gamma'_0$ açık kümesi için $\bar{U} = f_0^{-1}(\bar{V})$ dür.

Bunlar Γ ve Γ_0 üzerinde bir topoloji tanımlar. Ayrıca örten olan f, f_0 hem sürekli hem de açık dönüşümlerdir.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{(2)} \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mu"'] & \Gamma'_{(2)} \arrow[d, "\mu'"] \\
\Gamma \arrow[r, "f"'] & \Gamma'
\end{tikzcd}$$

Diyagramı değişimli olduğundan, μ nun sürekliliği gelir. Çünkü eğer $U \subset \Gamma$ açık bir küme ise, en az bir $V \subset \Gamma'$ açığı için $U = f^{-1}(V)$ dir dolayısıyla $\mu^{-1}(U) = \mu^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \times f)^{-1}((\mu')^{-1}(V))$ dir ki bu $\Gamma_{(2)}$ de açıktır. Benzer şekilde, ters dönüşümün sürekliliği ve diyagramların değişimliliği α, β ve ε nun sürekliliğini sağlar.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Gamma' \arrow[d, "\alpha'"] \\
\Gamma_0 \arrow[r, "f_0"'] & \Gamma'_0
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & \Gamma' \arrow[d, "\beta'"] \\
\Gamma_0 \arrow[r, "f_0"'] & \Gamma'_0
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\Gamma_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\
\Gamma'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & \Gamma'
\end{tikzcd}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.7. (Γ, Γ_0) *ve* (Γ', Γ'_0) *topolojik grupoidler olsun.* f, f_0 *homeomorfizm olacak şekildeki* $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ *topolojik grupoidlerinin homomorfizmi, topolojik grupoidlerin bir izormorfizmidir [7].*

Şimdi topolojik groupoid homomorfizmlerin belirgin özelliklerini bir önermeyle verelim.

Önerme 3.1.5. $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır*

(i) Eğer f birebir ise f_0 da birebirdir. Benzer şekilde f örten ise f_0 da örtendir,

(ii) f homeomorfizmdir gerek ve yeter şart f birebir-örten ve açık dönüşümdür.

(iii) $f(Is(\Gamma)) \subseteq Is(\Gamma')$,

(iv) (f, f_0) topolojik grupoid homomorfizmi olsun. f örten ve f_0 birebir dönüşüm olacak şekilde (özel olarak, topolojik grupoidlerin örten Γ_0- homomorfizmi) izotropi grup demetlerini korur. Böylece $f(Is(\Gamma)) = Is(\Gamma')$ dür [9].

İspat: (ii) f homeomorfizm olduğundan, $f : \Gamma \to \Gamma'$ sürekli, birebir, örten ve tersi de süreklidir. f sürekli olduğundan $U \subset \Gamma$ açık kümesini alalım. $V \subset \Gamma'$ açık kümesi için $U = f^{-1}(V)$ dir. Ayrıca f örten olduğundan $f(f^{-1}(V)) = V$ dir. Dolayısıyla $f^{-1}(V)$ ve V kümesinin açık olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak açık dönüşümlerin birleşimi açık olduğundan f de açık dönüşümdür.

(i),(iii) ve (iv) nin ispatları (f, f_0) topolojik grupoid homomorfizmi için önerme 2.2.5 deki gibi yapılır.

3.2 İndirgenmiş Topolojik Grupoidler

Bu kısımda, daha önce tanımlanan indirgenmiş grupoid kavramının topolojik versiyonu verilecektir.

Tanım 3.2.1. (Γ, Γ_0) *bir topolojik grupoid olsun. X herhangi bir topolojik uzay ve $p : X \longrightarrow \Gamma_0$ sürekli dönüşümü verilsin.*

$$p^*(\Gamma) = \{(x, y, a) \in X \times X \times \Gamma \mid \alpha(a) = p(x), \beta(a) = p(y)\}$$

kümesi,

$$\textit{Kaynak dönüşümü} : \alpha^*(x, y, a) = x,$$

$$\textit{Hedef dönüşümü} : \beta^*(x, y, a) = y,$$

$$\textit{Nesne dönüşümü} : \varepsilon^* = (x, x, \varepsilon(p(x)))$$

$$\textit{Ters dönüşüm} : i^*(x, y, a) = (y, x, i(a))$$

ve $(a,b) \in \Gamma_2$ *için*

$$\textit{Kısmi çarpım}: \mu^*((x,y,a),(y',z,b)) = (x,z,\mu(a,b)) \Leftrightarrow y = y'$$

ile bir grupoiddir. Bu grupoide p *altında* Γ *nın indirgenmiş topolojik grupoidi denir.* $(p^*(\Gamma),X)$ *ile gösterilir.*

Ayrıca $p : X \longrightarrow \Gamma_0$ *altında* Γ *nın indirgenmiş topolojik grupoidi* $p^*(\Gamma)$ *olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} (p^*_\Gamma, p) : (p^*(\Gamma),X) &\longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0) \\ (x,y,a) &\mapsto p^*_\Gamma(x,y,a) = a \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir topolojik grupoid homomorfizmi vardır. Bu homomorfizme indirgenmiş topolojik grupoidin kanonik homomorfizmi denir [7].

$$\begin{tikzcd} p^*_\Gamma \arrow[r, "p^*_\Gamma"] \arrow[d] & \Gamma \arrow[d] \\ X \arrow[r, "p"'] & \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

Şimdi indirgenmiş topolojik grupoid homomorfizminin evrensellik özelliğini verelim. Aşağıdaki teoremin ispatı [5]' de Brown ve Hardy tarafından verilen Sonuç 6' nın özel bir durumudur.

Teorem 3.2.1. (Γ,Γ_0) *bir topolojik grupoid ve* $p : X \longrightarrow \Gamma_0$ *sürekli bir dönüşüm olmak üzere* $(p^*(\Gamma),X)$ *onun indirgenmiş topolojik grupoidi olsun. Bu takdirde* $(p^*_\Gamma, p) : (p^*(\Gamma),X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ *homomorfizmi aşağıdaki özelliği sağlar:*

Her $(g,p) : (\Gamma',X) \longrightarrow (\Gamma,\Gamma_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi için* $p^*_\Gamma \circ g' = g$ *olacak şekilde topolojik grupoidlerin bir tane* $g' : \Gamma' \longrightarrow p^*(\Gamma)$ X*-homomorfizmi vardır [9].*

(Γ,X) ve (Γ',X) iki topolojik grupoid olsun. Bu takdirde onların indirgenmiş topolojik grupoidleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi verebiliriz:

$(f,Id) : (\Gamma,X) \to (\Gamma',X)$ aynı X tabanı üzerinde topolojik grupoidlerin homomorfizmi olsun. Topolojik uzayların bir $p : Y \to X$ sürekli bir dönüşümünü ele alalım. Bu takdirde (Γ,X) ve (Γ',X) indirgenmiş topolojik grupoidlerine karşılık gelen

$$\begin{aligned} p^*(f) : (p^*(\Gamma),Y) &\to (p^*(\Gamma'),Y) \\ (y_1,y_2,a) &\mapsto p^*(f)(y_1,y_2,a) = (y_1,y_2,f(a)) \end{aligned}$$

homomorfizmi vardır. $p^*(f)$ nin iyi tanımlı olduğu ve $p^*(f)$ nin aynı Y tabanı üzerinde bir topolojik grupoid homomorfizmi olduğu kolayca görülür.

p^* ın funktor olduğu açıktır. Gerçekten, $p^*(Id_\Gamma) = Id_{p^*(\Gamma)}$ dir ve $g : (\Gamma', X) \to (\Gamma'', X)$, X üzerinde bir başka topolojik grupoid homomorfizmi ise o zaman her $(y_1, y_2, a) \in p^*(\Gamma)$ için

$$\begin{array}{rcl} p^*(g \circ f) : p^*(\Gamma) & \to & p^*(\Gamma'') \\ (y_1, y_2, a) & \mapsto & p^*(g \circ f)(y_1, y_2, a) = (y_1, y_2, (g \circ f)(a)) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $p^*(g \circ f)$, Y üzerinde bir topolojik grupoid homomorfizmidir öyleki

$$p^*(g \circ f) = p^*(g) \circ p^*(f)$$

dir [9].

Şimdi bu bilgilerin ışığında aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz.

Önerme 3.2.1. *$p : Y \to X$ topolojik uzayların sürekli bir dönüşümü olsun. Bu takdirde aynı X tabanı üzerindeki topolojik grupoidlerin $\mathscr{K}(X)$ kategorisinden, onların aynı Y tabanı üzerinde indirgenmiş topolojik grupoidlerinin $\mathscr{K}(Y)$ kategorisine bir p^* funktoru vardır [9].*

Önerme 3.2.2. *$p : Z \to Y$ ve $k : Y \to X$ topolojik uzayların iki sürekli dönüşümü ve (Γ, X) bir topolojik grupoid olsun. Bu takdirde $p^*(k^*(\Gamma))$ ve $(k \circ p)^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidleri izomorfiktir [9].*

İspat: İlk olarak $k^*(\Gamma)$, $p^*(k^*(\Gamma))$ ve $(k \circ p)^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidlerini oluşturalım:

$$k^*(\Gamma) = \{(y_1, y_2, a) \in Y \times Y \times \Gamma | k(y_1) = \alpha(a), k(y_2) = \beta(a)\},$$

$$p^*(k^*(\Gamma)) = \{(z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) \in Z \times Z \times k^*(\Gamma) | p(z_1) = y_1, p(z_2) = y_2\},$$

$$(k \circ p)^*(\Gamma) = \{(z_1, z_2, a) \in Z \times Z \times \Gamma | (k \circ p)(z_1) = \alpha(a), (k \circ p)(z_2) = \beta(a)\}.$$

$p^*(k^*(\Gamma))$ ve $(k \circ p)^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidler arasında bir izomorfizm olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Bunun için:

$$\varphi : (k \circ p)^*(\Gamma) \to p^*(k^*(\Gamma))$$

$$(z_1, z_2, a) \mapsto \varphi(z_1, z_2, a) = (z_1, z_2, (p(z_1), p(z_2), a))$$

ve

$$\psi : p^*(k^*(\Gamma)) \to (k \circ p)^*(\Gamma),$$

$$(z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) \mapsto \psi(z_1, z_2, (y_1, y_2, a)) = (z_1, z_2, a).$$

dönüşümlerini ele alalım. φ ve ψ nin,

$$\psi \circ \varphi = Id_{(k \circ p)^*(\Gamma)} \quad \text{ve} \quad \varphi \circ \psi = Id_{p^*(k^*(\Gamma))}$$

olacak şekilde Z tabanı üzerinde topolojik grupoid homomorfizmi olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak φ, Z tabanı üzerindeki topolojik grupoidlerin bir izomorfizmidir.

Önerme 3.2.3. (Γ, X) *topolojik grupoid olsun. O zaman* Id_X^* *ve* Γ *topolojik grupoidleri* $X-$ *izomorfiktir [9].*

İspat: İlk olarak $Id_X^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidini açıkça yazalım.

$$Id_X^*(\Gamma) = \{(x_1, x_2, a) \in X \times X \times \Gamma | \alpha(a) = x_1, \beta(a) = x_2\}.$$

Bu takdirde

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma &\rightarrow Id_X^*(\Gamma) \\ a &\mapsto \varphi(a) = (\alpha(a), \beta(a), a). \end{aligned}$$

dönüşümün $X-$ izomorfizm olduğu açıktır.

Önerme 3.2.4. (Γ, X) *geçişli topolojik grupoid ve* $f : Y \rightarrow X$ *topolojik uzayların bir sürekli dönüşümü olsun. Bu takdirde* $f^*(\Gamma)$ *indirgenmiş topolojik grupoidi de* Y *üzerinde bir geçişli topolojik grupoiddir [9].*

İspat: (Γ, X) geçişli olduğundan $\alpha \times \beta : \Gamma \rightarrow X \times X$, $(\alpha \times \beta)(a) = (\alpha(a), \beta(a))$ sürekli dönüşümü örtendir. Bu yüzden $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ verildiğinde $(\alpha \times \beta)(a) = (f(y_1), f(y_2))$ olacak şekilde bir $a \in \Gamma$ morfizmi vardır. Şöyle $\alpha(a) = f(y_1)$ ve $\beta(a) = f(y_2)$ dir. Böylece $(y_1, y_2, a) \in f^*(\Gamma)$ ve $(\alpha^* \times \beta^*)(y_1, y_2, a) = (\alpha^*(y_1, y_2, a), \beta^*(y_1, y_2, a)) = (y_1, y_2)$ dir. Yani $\alpha^* \times \beta^* : f^*(\Gamma) \rightarrow Y \times Y$ örtendir. Ayrıca, $\alpha^* \times \beta^*$ dönüşümü süreklidir, çünkü α^* ve β^* sırasıyla birinci ve ikinci çarpanların üzerinde izdüşümdür. Sonuç olarak $f^*(\Gamma)$ geçişli topolojik grupoiddir.

4. TOPOLOJİK GRUPOİDLERİN ÖZEL HOMOMORFİZMLERİ

Bu bölümde topolojik grupoidlerin özel homomorfizmleri ile ilişkili bazı sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca özel homomorfizmler ile indirgenmiş topolojik grupoidler arasındaki ilişki verilmektedir.

Bu bölüme aşağıdaki tanım ile başlayalım.

Tanım 4.0.1. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmi olsun. O halde*

(i) *f_0 birebir (örten, birebir-örten) ise, o zaman (f,f_0)* taban birebir *(taban örten, taban birebir-örten) dir denir.*

(ii) *$x\in\Gamma_0$ için $f_x:\Gamma_x\to\Gamma'_{f_0(x)}$ birebir (örten, birebir-örten) ise (f,f_0) da lifsel birebir (lifsel örten, lifsel birebir-örten) dir denir.*

(iii) *Her $x,y\in\Gamma_0$ için $f_x^y:\Gamma(x,y)\to(\Gamma')(f_0(x),f_0(y))$ birebir (örten, birebir-örten) ise (f,f_0)* parasal birebir *(parçasal örten, parçasal birebir-örten) dir denir [9].*

Aşağıdaki önerme İndirgenmiş topolojik grupoid ve geri çekme(pullback) kavramı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 4.0.1. *$p:X\to\Gamma_0$ sürekli dönüşümü aracılığıyla Γ nın $p^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidinin $(p^*(\Gamma),p)$ kanonik homomorfizmi bir geri çekme (pullback) dir [7].*

Önerme 4.0.2. *(i) $p:X\to\Gamma_0$ sürekli dönüşümü aracılığıyla Γ nın $p^*(\Gamma)$ indirgenmiş topolojik grupoidinin $(p^*(\Gamma),p)$ kanonik homomorfizmi parçasal birebir-örtendir.*

(ii) *Eğer $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ taban örten ve parçasal örten ise f örtendir.*

(iii) *$(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ topolojik grupoid homomorfizmi diskret çekirdeğe sahiptir gerek ve yeter şart her $x\in\Gamma_0$ için $Kerf_x^x=\{\varepsilon(x)\}$ dur [9].*

İspat:

(i) $(p^*(\Gamma),p)$ nin parçasal birebir-örten olduğunu ispatlamak için, her $x,y\in\Gamma_0$ için $(p^*_\Gamma)_x^y:p^*(\Gamma)(x,y)\longrightarrow\Gamma(p(x),p(y))$ nin birebir-örten olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi iki $(x_1,y_1,a_1),(x_2,y_2,a_2)\in p^*(\Gamma)(x,y)$ elemanını alalım.

$$
\begin{aligned}
(p_\Gamma^*)_x^y(x_1,y_1,a_1) &= (p_\Gamma^*)_x^y(x_2,y_2,a_2)\\
\Rightarrow \alpha^*(x_1,y_1,a_1) &= \alpha^*(x_2,y_2,a_2)=x\\
\Rightarrow \beta^*(x_1,y_1,a_1) &= \beta^*(x_2,y_2,a_2)=y\\
\Rightarrow a_1 &= a_2.
\end{aligned}
$$

Bu takdirde $(x_1,y_1,a_1)=(x_2,y_2,a_2)$ dir. Böylece $(p_\Gamma^*)_x^y$ birebirdir. Şimdi örten olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
b\in\Gamma(p(x),p(y)) &\implies \alpha(b)=p(x),\beta(b)=p(y)\\
&\implies (x,y,b)\in p^*(\Gamma),(x,y,b)\in p^*(\Gamma)(x,y)
\end{aligned}
$$

$p^*(\Gamma)$ nin tanımından $p^*(\Gamma)(x,y,b)=b$ dir. Böylelikle $p^*(\Gamma)(x,y,b)=b\implies(p_\Gamma^*)_x^y$ örtendir.

(ii) $b'\in\Gamma'$ olsun. $\alpha'(b')=x',\beta'(b')=y'$ alalım. (f,f_0) taban örten olduğundan f_0 da örtendir. f_0 ın örtenliğinden $x'=f_0(x),y'=f_0(y)$ olacak şekilde $x,y\in\Gamma_0$ vardır. Parçasal örtenlikten $b'\in(\Gamma')_{x'}^{y'}$ olup, $f_x^y:\Gamma_x^y\to(\Gamma')_{x'}^{y'}$ örtenliğinden;$f_x^y(a)=b'$ olacak şekilde en az bir $a\in\Gamma_x^y$ vardır ve $f(a)=b'$ olduğundan f örtendir sonucuna varırız.

(iii) İspatı açıktır.

Teorem 4.0.1. $(f,f_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma_0')$ *topolojik grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde;*

(i) Eğer (f,f_0) bir geri çekme (pullback) ise (f,f_0) parçasal birebir-örtendir.

(ii) f birebirdir gerek ve yeter şart f taban birebir ve parçasal birebirdir.

(iii) (f,f_0) lifsel birebirdir gerek ve yeter şart (f,f_0) diskret çekirdeğe sahiptir [9].

İspat:

(i) (f,f_0) bir geri çekme ve $f_0^*(\Gamma')$ de $f_0:\Gamma_0\to\Gamma_0'$ aracılığıyla Γ' nün indirgenmiş topolojik grupoidi olsun. Önerme 4.0.2'den dolayı $(f_0)_{\Gamma'}^*$ bir geri çekmedir. Dolayısıyla, $g:\Gamma\to f_0^*(\Gamma')$ Γ_0 üzerinde bir topolojik grupoid homomorfizmi olmak üzere (f,f_0), bir tek şekilde $f=(f_0)_{\Gamma'}^*\circ g$ bileşkesi olarak yazılabilir.

Ayrıca (f,f_0) geri çekme olduğundan $(f_0)^*_{\Gamma'} = f_0^*(\Gamma') \longrightarrow \Gamma'$ topolojik grupoid homomorfizmi için bir tek şekilde $f = (f_0)^*_{\Gamma'} \circ g$ bileşkesi olarak yazılabilir, burada $\bar{g} : f_0^*(\Gamma') \to \Gamma$, Γ_0 üzerinde bir topolojik grupoid homomorfizmidir.

$$f = (f_0)^*_{\Gamma'} \circ g \quad \text{ve} \quad (f_0)^*_{\Gamma'} = f \circ \bar{g}$$

eşitliklerinden

$$f = f \circ (\bar{g} \circ g) = f \circ Id$$

ve

$$(f_0)^*_{\Gamma'} = (f_0)^*_{\Gamma'} \circ (g \circ \bar{g}) = (f_0)^*_{\Gamma'} \circ Id$$

yi elde ederiz. f ve $(f_0)^*_{\Gamma'}$ geri çekme olduklarından $\bar{g} \circ g = Id$ ve $g \circ \bar{g} = Id$ dir. Buradan $g : \Gamma \to f_0^*(\Gamma')$ bir topolojik grupoidlerin izomorfizmidir öyleki $f = (f_0)^*_{\Gamma'} \circ g$ dir. $(f_0)^*_{\Gamma'}$ parçasal birebir-örten ve g birebir-örten olduğundan f nin parçasal birebir-örten olduğunu elde ederiz.

(ii) f birebir olsun. $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$ olduğundan $f \circ \varepsilon$ birebirdir. Bu durumda, $\varepsilon' \circ f_0$ da birebirdir ve bu birebirlik f_0 ında birebir olduğunu gösterir.

Tersine, Her $x, y \in \Gamma_0$ için f_0 ve f_x^y nin birebir olduğunu kabul edelim ve f in birebir olduğunu ispatlayalım.

$f(a) = f(b)$ olacak şekilde $a, b \in \Gamma$ olsun.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Longrightarrow (\alpha' \circ f)(a) = (\alpha' \circ f)(b), (\beta' \circ f)(a) = (\beta' \circ f)(b) \\ &\Rightarrow (f_0 \circ \alpha)(a) = (f_0 \circ \alpha)(b), (f_0 \circ \beta)(a) = (f_0 \circ \beta)(b) \\ &\Rightarrow \alpha(a) = \alpha(b), \beta(a) = \beta(b) \end{aligned}$$

dir. Eğer $\alpha(a) = x$ ve $\beta(b) = y$ ile gösterirsek, $a, b \in \Gamma_x^y$ ve $f_x^y(a) = f_x^y(b)$ eşitliğini elde ederiz. Bu da f_x^y birebir olduğundan $a = b$ olduğunu gösterir.

(iii) (f,f_0) ın lifsel birebir olduğunu kabul edelim. O zaman $f_x : \Gamma_x \to \Gamma'_{f_0(x)}$ da birebirdir. $Kerf = \varepsilon(\Gamma_0)$ olduğunu ispatlayalım. $\varepsilon(\Gamma_0) \subseteq Kerf$ olduğu açıktır. Bu nedenle $Kerf \subseteq \varepsilon(\Gamma_0)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $a \in Kerf$ olsun, $x = \alpha(a)$ ve $x' = f_0(x)$ ile gösterelim. O zaman $x' \in \Gamma'_0$ olacak şekilde $f(a) \in \varepsilon'(\Gamma'_0) \Longrightarrow f(a) = \varepsilon'(x')$ olur. Zaten f_x birebir olduğundan, $f(\varepsilon(x)) = \varepsilon'(f_0(x)) = \varepsilon'(x') \Longrightarrow f(a) = f(\varepsilon(x)) \Longrightarrow f_x(a) =$

$f_x(\varepsilon(a)) \Longrightarrow a = \varepsilon(x)$ eşitliklerine sahibiz. Böylece $a \in \varepsilon(\Gamma_0)$ dır. Buradan $Kerf = \varepsilon(\Gamma_0)$ ve $Kerf$ in diskret çekirdeğe sahip olduğu sonucunu çıkarırız.

Tersine, f in diskret çekirdeğe sahip olduğunu kabul edelim. $a, b \in \Gamma_x$ olacak şekilde $f_x(a) = f_x(b)$ dir, bu takdirde $\alpha(a) = \alpha(b) = x$ ve $f(a) = f(b)$ dir. $x' \in \Gamma_0'$ ile $f(a).(f(b))^{-1} = \varepsilon'(x')$ den $f(a.b^{-1}) = \varepsilon'(x')$ gelir.

$$
\begin{aligned}
a.b^{-1} \in Kerf = \varepsilon(\Gamma_0') &\Rightarrow \\
a.b^{-1} = \varepsilon(x), x \in \Gamma_0' &\Rightarrow a = \varepsilon(x).b \\
&\Rightarrow \varepsilon(x).a = \varepsilon(x).\varepsilon(x).b \\
&\Rightarrow \varepsilon(x).a = \varepsilon(x).b \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılmış olur.

Önerme 4.0.3. $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma_0')$ *topolojik grupoidlerin bir lifsel örten homomorfizmi olsun. Bu takdirde* (f, f_0) *bir lifsel birebir-örten homomorfizmdir gerek ve yeter şart* $Kerf$ *diskrettir (ayrıktır) [9].*

İspat: Teorem 4.0.1 in (iii) maddesinden ispat kolayca yapılır.

Teorem 4.0.2. $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma_0')$ *ve* $(g, g_0) : (\Gamma', \Gamma_0') \to (\Gamma'', \Gamma_0'')$ *topolojik grupoid homomorfizmleri olsun. Bu takdirde*

(i) Eğer f, g lifsel örten (birebir-örten) homomorfizmler ise o zaman $g \circ f$ de lifsel örten (birebir-örten) homomorfizmdir.

(ii) Eğer $g \circ f$ ve f lifsel örten homomorfizmler ve $f_0 : \Gamma_0 \to \Gamma_0'$ örten ise o zaman g bir lifsel örten homomorfizmdir.

(iii) Eğer $g \circ f$ ve g lifsel birebir- örten homomorfizmler ise o zaman f de lifsel birebir- örten homomorfizmdir [9].

İspat:

(i) ispatı açıktır.

(ii) $g_{x'} : (\alpha')^{-1}(x') \longrightarrow (\alpha'')^{-1}(g_0(x'))$ nün örten olduğunu ispatlayalım. Bunun için, $b'' \in (\alpha'')^{-1}(g_0(x'))$ olduğunda $x' \in \Gamma_0'$ için $(\alpha'')(x'') = g_0(x')$ dür. f_0 örten olduğundan $f_0(x) = x'$ olacak şekilde en az bir $x \in \Gamma_0$ vardır. O zaman $(g \circ f)_x : \alpha^{-1}(x) \longrightarrow (\alpha'')^{-1}((g \circ f)_0(x))$ örtendir. $(\alpha'')(b'') = (g_0 \circ f_0)(x)$ dur , $\alpha(a) = x$ ve $(g \circ f)(x) = b''$ olacak şekilde en az bir $a \in \alpha^{-1}(x)$ vardır. Eğer $a' = f(a)$ alırsak, $\alpha'(a') = \alpha'(f(a)) = f_0(\alpha(a)) = f_0(x) = x'$ den $a' \in \alpha^{-1}(x')$ dir. $(g \circ f)(a) = b''$ den $g_{x'}(a') = b''$ elde ederiz. Buradan $g_{x'}$ örtendir.

(iii) $a, b \in \alpha'(x)$ alalım öyle ki $f_x(a) = f_x(b)$ dir. O zaman $f(a) = f(b) \Longrightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Longrightarrow (g \circ f)_x(a) = (g \circ f)_x(b) \Longrightarrow a = b$ olduğundan $(g \circ f)_x$ birebirdir. Bu durumda, f lifsel birebirdir.

Açıkça, $(g \circ f)_x = g_{f_0(x)} \circ f_x$ ve $(g \circ f)_0 = g_0 \circ f_0$ dır.

$b' \in (\alpha')^{-1}(y)$, $y = f_0(x)$ olduğunda; $g_y(b') \in (\alpha'')^{-1}(g_0(y)) \Longrightarrow g_{f_0(x)}(b') \in (\alpha'')^{-1}(g_0 \circ f_0(x))$. dur. $(g \circ f)_x$ örten olduğundan $g_{f_0(x)}(b') \in (\alpha'')^{-1}(g_0 \circ f_0(x))$ için $(g \circ f)(a) = g_{f_0(x)}(b')$ olacak şekilde en az bir $a \in \alpha^{-1}(x)$ vardır. $g_{f_0(x)}$ birebir olduğundan $g_{f_0(x)}(f_x(a)) = g_{f_0(x)}(b')$ sonucunu gösterir ve $f_x(a) = b'$ nü elde ederiz. Bu nedenle f_x örtendir ve f lifsel örtendir.

.

5. TOPOLOJİK GRUPOİDLERİN KUVVETLİ HOMOMORFİZMLERİ

Bu bölüm topolojik grupoid homomorfizmlerinin özel bir türü olan kuvvetli homomorfizme ayrılmıştır. Kuvvetli homomorfizmin önemli sonuçlarından biri alt grupoidler ve normal alt grupoidler için eşleşme (correspondence) teoremleridir.

Topolojik grupoid homomorfizminin özel bir türü olan topolojik grupoidlerin kuvvetli homomorfizmi tanımını verelim.

Tanım 5.0.1. *Topolojik grupoidlerin bir kuvvetli homomorfizmi aşağıdaki şartı sağlayan bir* $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma'_0)$ *topolojik grupoid homomorfizmidir:*

$$\textit{Her} \quad (f(a), f(b)) \in \Gamma'_{(2)} \quad \textit{için} \quad (a,b) \in \Gamma_{(2)} \quad \textit{dir} \quad .$$

Teorem 5.0.1. *(i)* $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma'_0)$, f_0 *dönüşümü birebir olacak şekilde bir topolojik grupoid homomorfizmi ise* (f, f_0) *topolojik grupoidlerin kuvvetli bir homomorfizmidir.*

(ii) Topolojik grupoidlerin her $f : \Gamma \to \Gamma'$, Γ_0- *morfizmi topolojik grupoidlerin bir kuvvetli homomorfizmidir.*

İspat:

(i) $a, b \in \Gamma$ ile $(f(a), f(b)) \in \Gamma'_{(2)}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\begin{aligned}
\beta'(f(a)) = \alpha'(f(b)) &\Rightarrow (\beta' \circ f)(a) = (\alpha' \circ f)(b) \\
&\Rightarrow (f_0 \circ \beta)(a) = (f_0 \circ \alpha)(b) \\
&\Rightarrow f_0(\beta(a)) = f_0(\alpha(b)) \\
&\Rightarrow \beta(a) = \alpha(b) (f_0 \text{birebir olduğundan}) \\
&\Rightarrow (a,b) \in \Gamma_{(2)}.
\end{aligned}$$

Bu durumda (f, f_0) topolojik grupoidlerin bir kuvvetli bir homomorfizmidir.

(ii) $f_0 = Id_{\Gamma_0}$ eşitliğinden, madde (i) nin bir sonucudur.

Örnek 5.0.1. *(i)* (Γ, Γ_0) *topolojik grupoid olsun.* $f = \alpha \times \beta : \Gamma \longrightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$ *dönüşümü, topolojik grupoidlerin kuvvetli bir homomorfizmidir. Şöyleki:*$((\alpha \times \beta)(a), (\alpha \times \beta)(b)) \in (\Gamma_0 \times \Gamma_0)_{(2)}$ *iken* $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ *olduğunu gösterelim.* $(f(a), f(b)) \in (\Gamma_0 \times \Gamma_0)_{(2)}$ *tanımlı olduğundan*

$$\beta'(f(a)) = \alpha'(f(b))$$

yazabiliriz. Bu takdirde

$$\beta'(f(a)) = \beta'(\alpha(a), \beta(a)) = \beta(a)$$

elde ederken,

$$\alpha'(f(b)) = \alpha'(\alpha(b), \beta(b)) = \alpha(b)$$

olur ve buradan $\beta(a) = \alpha(b)$ eşitliği gelir, dolayısıyla $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ olur.

(ii) *$f : X \to \Gamma_0$ sürekli dönüşüm olsun. $f^*(\Gamma)$, Γ nın indirgenmiş bir topolojik grupoididir. (f^*_Γ, f) kanonik homomorfizmi için*

$$\begin{aligned}
(f^*(\Gamma)(x,y,a), f^*(\Gamma)(x',y',b)) &\in \Gamma_{(2)} \quad \textit{iken} \\
((x,y,a),(x',y',b)) &\in f^*(\Gamma)_{(2)} \quad \textit{olup olmadığını inceleyelim.} \\
(f^*(\Gamma)(x,y,a), f^*(\Gamma)(x',y',b)) &\in \Gamma_{(2)} \quad \textit{den} \\
(a,b) &\in \Gamma_{(2)} \quad \textit{gelir.}
\end{aligned}$$

Tanımlılıktan $\beta(a) = \alpha(b)$ olur. Böylece $f(y) = f(x')$ dir. Fakat birebirlik tanımlı olmadığından $y = x'$ eşitliğini elde edemeyiz. Dolayısıyla (f^*_Γ, f) kanonik homomorfizmi, topolojik grupoidin kuvvetli bir homomorfizmi değildir.

Önerme 5.0.1. *$(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \to (\Gamma', \Gamma'_0)$ topolojik grupoidlerin bir kuvvetli homomorfizmi olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) *Eğer (K, K_0), (Γ, Γ_0) ın topolojik alt grupoidi ise, $(f(K), f_0(K_0))$ da (Γ', Γ'_0) nün topolojik alt grupoididir. Özel olarak, Imf, Imf_0 üzerinde Γ' nün topolojik alt grupodidir.*

(ii) *Eğer f örten ve K, Γ nın normal topolojik alt grupoidi ise, $f(K)$ da Γ' nün normal topolojik alt grupoididir.*

İspat:

(i) (K, K_0), (Γ, Γ_0) ın topolojik alt grupoidi olduğundan, topolojik alt grupoid şartlarını sağlatalım.

• $(\alpha'(f(K))) \subseteq f_0(K_0)$ olduğunu gösterelim. Bu durumda eğer $x' \in \alpha'(f(K))$ ise $b' \in f(K)$ ile $x' = \alpha'(b')$ gelir. $b' \in f(K)$ için $b \in K$ ile $f(b) = b'$ dür. Bu takdirde $x' = \alpha'(b') = \alpha'(f(b)) = f_0(\alpha(b))$ olur. Buradan $\alpha(b) \in K_0$ olduğundan $x' \in f_0(K_0)$ gelir. Sonuç olarak $(\alpha'(f(K))) \subseteq f_0(K_0)$ dir. Benzer şekilde, $(\beta'(f(K))) \subseteq f_0(K_0)$ dır.

- $a',b' \in f(K)$ olsun $a'.b'$ tanımlıdır. $a'.b' \in f(K)$ olduğunu ispatlayalım. Gerçekten $a,b \in K$ ile $a' = f(a), b' = f(b)$ dir. $a'.b'$ tanımlılığı, $(f(a), f(b)) \in \Gamma'_{(2)}$ anlamına gelir ve f topolojik grupoidin kuvvetli homomorfizmi olduğundan $(a,b) \in \Gamma_{(2)}$ dir. Böylelikle $a.b$ tanımlıdır. K, Γ nın topolojik alt grupoidi olduğundan, $a.b \in K$ dır. Sonuç olarak $a'.b' = f(a).f(b) = f(a.b) \in f(K)$ dır.
- Her $x' \in f_0(K_0)$ için $\varepsilon'(x') \in f(K)$ olduğunu gösterelim. Bu takdirde $x' \in f_0(K_0)$ için $x' = f_0(x)$ olacak şekilde $x \in K_0$ vardır. $\varepsilon(x) \in K$ olduğundan, $\varepsilon'(x') = \varepsilon'(f_0(x)) = f(\varepsilon(x)) \in f(K)$ olur.
- Her $a' \in f(K)$ için $(a')^{-1} \in f(K)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, $a \in K$ ile $a' = f(a) \quad \Rightarrow \quad a^{-1} \in K$ olduğundan $(a')^{-1} = (f(a))^{-1} = f(a^{-1}) \in f(K)$ dır.

Sonuç olarak $(f(K), f_0(K_0))$, (Γ', Γ'_0) ın topolojik alt grupoididir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) (i) maddesinden f_0 örten olduğundan $(f(K), \Gamma'_0)$, (Γ', Γ'_0) ın topolojik alt grupoididir. $\beta'(a') = \alpha'(\lambda) = \beta'(\lambda)$ olacak şekilde, $\lambda' \in f(K)$ ve $a' \in \Gamma'$ olsun. $a'.\lambda'.(a')^{-1} \in f(K)$ olduğunu ispatlayalım.

Gerçekten, f örten olduğundan $\lambda \in K$ ile $\lambda' = f(\lambda)$ ve $a \in \Gamma$ ile $a' = f(a)$ dır. f bir topolojik grupoidin kuvvetli homomorfizmi olduğundan, $(f(a), f(\lambda)), (f(\lambda), (f(a))^{-1}) \in \Gamma'_{(2)}$ den $(a,\lambda), (\lambda, a^{-1}) \in \Gamma_{(2)}$ gelir. K, Γ da normal olduğundan $a.\lambda.a^{-1}$ tanımlı olduğu gelir ve $a.\lambda.a^{-1} \in K$ dır. Böylece, $f(a.\lambda.a^{-1}) \in f(K)$ ve $f(a).f(\lambda).f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.f(\lambda).f(a^{-1}) = (a')^{-1}.\lambda'.a' \in f(K)$. Sonuç olarak, $f(K)$, Γ' nün topolojik normal bir alt grupoididir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer (Γ, Γ_0) bir topolojik grupoid ise (Γ, Γ_0) ın topolojik alt grupoidlerinin kümesini $S(\Gamma, \Gamma_0)$ ile (Γ, Γ_0) ın topolojik normal alt grupoidlerinin kümesini $\mathscr{N}(\Gamma)$ ile göstereceğiz.

Eğer $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ bir topolojik grupoid homomorfizmi ise, (Γ, Γ_0) ın f nin çekirdeğini içeren topolojik alt grupoidlerinin kümesini $\tilde{S}(\Gamma, \Gamma_0)$ ile f nin çekirdeğini içeren (Γ, Γ_0) ın topolojik normal alt grupoidlerinin kümesini $\tilde{\mathscr{N}}(\Gamma)$ ile göstereceğiz yani:

$\tilde{S}(\Gamma, \Gamma_0) = \{K \mid K, Kerf \subseteq K \quad \text{olacak şekilde} \quad (\Gamma, \Gamma_0)\text{ın bir topolojik altgrupoididir}\}$

$\tilde{\mathscr{N}}(\Gamma) = \{K \mid K, Kerf \subseteq K \quad \text{olacak şekilde} \quad \Gamma \quad \text{nın bir topolojik normal altgrupoididir}\}.$

Teorem 5.0.2. *{ Topolojik alt grupoidler için eşleşme teoremi} Herhangi bir* $(f, f_0) : (\Gamma, \Gamma_0) \longrightarrow (\Gamma', \Gamma'_0)$ *örten kuvvetli topolojik grupoid homomorfizmi için,* (Γ', Γ'_0) *ın topolojik* *alt grupoidlerinin $S(\Gamma',\Gamma'_0)$ kümesinden (Γ,Γ_0) ın f nin çekirdeğini içeren topolojik alt grupoidlerinin $\tilde{S}(\Gamma,\Gamma_0)$ kümesine bir birebir-örten dönüşüm vardır.*

İspat: $\varphi : \tilde{S}(\Gamma,\Gamma_0) \longrightarrow S(\Gamma',\Gamma'_0)$ ve $\psi : S(\Gamma',\Gamma'_0) \longrightarrow \tilde{S}(\Gamma,\Gamma_0)$ sürekli dönüşümleri aşağıdaki gibi verilsin $\forall K \in \tilde{S}(\Gamma), \varphi(K) = f(K)$ $\forall K' \in S(\Gamma'), \psi(K') = f^{-1}(K')$ Önerme 5.0.1 in (i) maddesinden her $K \in \tilde{S}(\Gamma)$ için $f(K)$ nın, Γ' nün bir topolojik alt grupoidi olduğu görülür. Bu durumda φ iyi tanımlanmıştır. Ayrıca, Önerme 3.1.3 ün (i) maddesinden dolayı her $K' \in S(\Gamma')$ için $f^{-1}(K')$, Γ nın bir topolojik alt grupoidi olduğu gelir. Dolayısıyla ψ iyi tanımlanmıştır.

Yukarıdaki φ ve ψ sürekli dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\psi \circ \varphi = Id_{\tilde{S}(\Gamma)} \text{ve} \quad \varphi \circ \psi = Id_{S(\Gamma')} \tag{5.0.1}$$

Bu eşitlikler :
$\forall K \in \tilde{S}(\Gamma), f^{-1}(f(K)) = K$ ve
$\forall K' \in S(\Gamma'), f(f^{-1}(K')) = K'$ ile eşdeğerdir.

(i) Eğer $a \in K$, o halde $f(a) \in f(K)$ ve $a \in f^{-1}(f(K))$ ya sahibiz. Bu durumda, $K \subseteq f^{-1}(f(K))$ dır.

(ii) Eğer $a \in f^{-1}(f(K))$, o halde $f(a) \in f(K)$ ve $f(a) = f(b)$ olacak şekilde en az bir $b \in K$ vardır. $f(a).(f(b))^{-1} \in \varepsilon'(\Gamma'_0)$ ye sahibiz. Bu yüzden, $f(a.b^{-1}) \in \varepsilon'(\Gamma'_0)$ ve $a.b^{-1} \in Kerf$ i elde ederiz. Böylelikle, $a.b^{-1} = c$ dersek $a = c.b$ gelir. $c \in Kerf \subseteq K$ ve $b, c \in K$ dan $a \in K$ gelir. Bu durumda, $f^{-1}(f(K)) \subseteq K$ dır. (i) ve (ii) den ilk eşitliğimiz geliyor.
(iii) Eğer $a' \in f(f^{-1}(K'))$ olsun. $a' \in K'$ olduğu gösterilirse $f(f^{-1}(K'))$ elde edilmiş olur. $a' \in f(f^{-1}(K'))$ ise $f(a) = a'$ olacak şekilde en az bir $a \in f^{-1}(K')$ vardır. $a \in f^{-1}(K')$ ise $f(a) \in K'$ dür. Yani $a' \in K'$ dür. Böylelikle $f(f^{-1}(K')) \subseteq K'$ gelir.

(iv) $a' \in K'$ olsun. f örten olduğundan en az bir $a \in \Gamma$ var öyleki $f(a) = a'$ dür. Burada $f(a) \in K'$ olduğundan $a \in f^{-1}(K')$ dür. Buradan, $f(a) \in f(f^{-1}(K'))$ olup $a' \in f(f^{-1}(K'))$ elde edilir. Sonuç olarak, $K' \subseteq f(f^{-1}(K'))$. (iii) ve (iv) den ikinci eşitliğimiz gelir. Eşitlik 5.0.1 den ψ nin tersi alınabilir olduğu görülür. Böylece ψ birebir-örtendir.

Sonuç 5.0.1. *(Γ_0 homomorfizmi aracılığıyla topolojik alt grupoidler için eşleşme teoremi)*

$f:\Gamma\longrightarrow\Gamma'$ bir sürekli örten Γ_0 homomorfizmi için, (Γ',Γ) topolojik alt grupoidlerinin $S(\Gamma',\Gamma_0)$ kümesinden (Γ,Γ_0) topolojik alt grupoidlerinin $S(\Gamma,\Gamma_0)$ kümesine bir birebir-örten dönüşüm vardır.

İspat: Teorem 5.0.1 in *ii* ve teorem 5.0.2 nin bir sonucudur.

Önerme 5.0.1 (ii) deki ve Önerme 5.0.2 deki (ii) yi uygulayarak aşağıdaki teoremi de benzer şekilde ispatlayabiliriz.

Teorem 5.0.3. *{topolojik normal alt grupoidler için eşleşme teoremi} Herhangi bir (f,f_0) : $(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ örten kuvvetli topolojik grupoid homomorfizmi için (Γ',Γ'_0) ın topolojik normal alt grupoidlerinin $\mathscr{N}(\Gamma')$ kümesinden (Γ,Γ_0) ın $Kerf$ içeren topolojik normal alt grupoidlerinin $\tilde{\mathscr{N}}(\Gamma)$ kümesine bir birebir-örten sürekli dönüşüm vardır.*

Sonuç 5.0.2. *(Γ_0 homomorfizmi aracılığıyla topolojik normal alt grupoidler için eşleşme teoremi) $f:\Gamma\longrightarrow\Gamma'$ bir örten Γ_0 homomorfizmi için, (Γ',Γ) topolojik normal alt grupoidlerinin $\mathscr{N}(\Gamma')$ kümesinden (Γ,Γ_0) ın $Kerf$'yi içeren topolojik normal alt grupoidlerinin $\tilde{\mathscr{N}}(\Gamma)$ kümesine bir birebir-örten sürekli dönüşüm vardır.*

İspat: Teorem 5.0.1 (ii) ve Teorem 5.0.3 ün bir sonucudur.

Uyarı 5.0.1. *(i) Teorem* 5.0.2 *ve Teorem* 5.0.3 *, grupların sürekli örten homomorfizmleri yardımıyla topolojik alt gruplar ve topolojik normal alt gruplar için eşleşme teoremlerinin genelleştirilmeleridir.*

(ii) Teorem 5.0.2 *ve Teorem* 5.0.3 *, keyfi sürekli örten topolojik grupoidlerin homomorfizmleri için doğru değildir.*

(iii) (f,f_0) : $(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ bir kuvvetli topolojik grupoid homomorfizmi olsun. Bu takdirde $\tilde{f}$ ve $\tilde{f}_0$ sırasıyla her $a\in\Gamma$ için $\tilde{f}(a)=f(a)$ ve her $x\in\Gamma_0$ için $\tilde{f}_0(x)=f_0(x)$ şeklinde alınmak üzere $(\tilde{f},\tilde{f}_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(Imf,Imf_0)$ topolojik grupoidlerin bir örten kuvvetli homomorfizmidir.

Teorem 5.0.4. *Herhangi bir (f,f_0) : $(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(\Gamma',\Gamma'_0)$ kuvvetli topolojik grupoid homomorfizmi için, (Imf,Imf_0) ın topolojik alt grupoidlerinin $S(Imf,Imf_0)$ kümesinden (Γ,Γ_0) ın topolojik alt grupoidlerinin $S(\Gamma,\Gamma_0)$ kümesine bir birebir-örten sürekli dönüşüm vardır.*

İspat: İspat için Teorem 5.0.2'yi, (f,f_0)'a karşılık gelen $(\tilde{f},\tilde{f}_0):(\Gamma,\Gamma_0)\longrightarrow(Imf,Imf_0)$ kuvvetli topolojik grupoid homomorfizmine uygularız.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, grupoidler arasında tanımlanan kuvvetli homomorfizm kavramı topolojik açıdan ele alınmıştır. Topolojik grupoidler arasındaki kuvvetli homomorfizmler ile ilgili olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca topolojik alt grupoidler ve topolojik normal alt grupoidler için eşleşme teoremleri verilmiştir. Bu teoremleri destekleyen ve tez çalışmasını daha anlaşılır hale getiren çeşitli örnekler sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] **Eilenberg, S. ve MacLane, S.** (1945). General theory of natural equivalences, *Transactions of the American Mathematical Society*, *58*(2), 231–294.

[2] **Brandt, H.** (1927). Über eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes, *Mathematische Annalen*, *96*(1), 360–366.

[3] **Ehresmann, C.** (1950). Oeuvres completes. Parties I. 1, I. 2, *Topologie algéBrique et géométrie différentielle*.

[4] **Brown, R.** (1987). From Groups to Groupoids: a Brief Survey, *Bulletin of The London Mathematical Society*, *19*, 113–134.

[5] **Brown, R. ve Hardy, J.L.** (1976). Topological groupoids: I. universal constructions, *Mathematische Nachrichten*, *71*(1), 273–286.

[6] **Brown, R.**, **Danesh-Naruie, G. ve Hardy, J.** (1976). Topological groupoids: II. Covering morphisms and G-spaces, *Math. Nachr*, *74*(1), 43–156.

[7] **Mackenzie, K.C.H.** (1987). Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, *124*.

[8] **Ivan, G.** (2002). Special morphisms of groupoids, *Novi Sad J. Math*, *31*(2), 23–36.

[9] **Gürsoy, M.H. ve Icen, I.** (2014). The homomorphisms of topological groupoids, *Novi Sad J. Math*, *44*(1), 129–141.

[10] **Ramsay, A.** (1971). Virtual groups and group actions, *Advances in Mathematics*, *6*(3), 253–322.

[11] **Awodey, S.** (2010). *Category theory*, Oxford university press.

[12] **Mucuk, O.** (2010). Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 2, *Basım, Ankara*.

[13] **Blyth, T.S.** (1986). *Categories*, Longman Publishing Group.

[14] **MacLane, S.** (1971). Categories for the Working Mathematician, GTM5, Sprin-ger, *Verlag, Berlin and New York*.

[15] **Higgins, P.J.** (1971). *Categories and groupoids*, Citeseer.

[16] **İlhan, M.** (1999). *Lokal topolojik grupoidler* (Yüksek Lisans Tezi).

[17] **Brown, R.** (1988). *Topology: a geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, cilt228, Ellis Horwood Chichester.

[18] **Ivan, G.** (1999). Strong morphisms of groupoids, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, *4*(1), 91–102.

[19] **Brown, R. ve Loday, J.L.** (1987). Homotopical Excision, and Hurewicz Theorems, for n-Cubes of Spaces, *Proceedings of The London Mathematical Society*, 176–192.

[20] **Icen, I.** (2000). Sheaves and local subgroupoids, *arXiv preprint math/0009086*.

[21] **Mucuk, O.** (1993). *Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid.* (Doktora Tezi). University College of North Wales.

[22] **Seda, A.K.** (1974). *Topological groupoids, measures and representations,Ph.D. Thesis*, Bangor University (United Kingdom).

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Gülhanım Gülşah ŞENER UÇAR

ÖĞRENİM DURUMU: Lisans

- **Lisans:** 2013, Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER: 2013 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.