TC

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN EĞRİLİKLERİ VE UYGULAMALARI

SAADET DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

TEMMUZ 2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN EĞRİLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Saadet DOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

74+v sayfa

2008
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.1. bölüm konunun daha iyi kavranabilmesi için temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

2. bölümde öncelikle E^3 deki yüzeyin geometrisinin temelleri açıklanarak yüzeyin bir noktasındaki asli eğrilikleri sunulmuş, sonrasında asli eğriliklerin geometrik yorumuna yer verilmiş, ardından bir yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile bu eğriliklerin geometrik yorumlarını içeren teoremler sunulmuştur. Daha sonra manifoldların eğrilikleri için kullanılacak olan Riemann eğrilik tensörü, kesit eğrilikleri, ricci eğriliği ve skalar eğrilik kavramları detaylarıyla ele alınıp, bunlar arasındaki ilişkiler belirlenmiştir. Bir Riemann alt manifoldun eğriliği kavramı da çeşitli yönleriyle incelenerek bölüm sonlandırılmıştır.

3.bölümde öncelikle Gauss' un Egregium teoremi ve bu teoremin uygulamaları verilmiş, sonrasında ise eğrilik formları ve Cartan yapı denklemleri sunulmuştur.

Son bölümde de eğriliğin somut kullanımlarından birtakım örneklere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Asli eğrilikler, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik, Riemann Eğrilik Tensörü, izometri, kesit eğriliği, ricci eğriliği, skalar eğrilik, alt manifold

SUMMARY

The Thesis of Master

THE CURVATURES OF A RIEMANNIAN MANIFOLD AND APPLICATIONS

Saadet DOĞAN

INONU UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

74+v pages

2008

Supervisor: Assist. of Prof.Dr. Müge KARADAĞ

This thesis has four main sections. In the first section main concepts have been represented in order to be comprehended well.

In the second section firstly principal curvatures in a random point of a surface have been presented by being explained the origins of the surfaces in E^3 geometry then included the geometrical interpretations of principal curvatures ,afterwards presented Gauss and mean curvatures of a surface and theorems that contain geometrical interpretations of these curvatures.

Then Riemannian curvature tensor ,sectional curvatures,ricci curvatures and skalar curvature concepts have been taken into consideration in a detailed way and relations among these titles have been designated. And the section has been finished by examining Riemannian submanifold curvature concept with its defferent sides.

In the third section Gauss' Egregium theorem and the applications of this theorem have been presented and then curvature forms and Cartan structure equations have been explained.

In the last section different kinds of examples from concrete usages of this curvature have been included.

KEY WORDS: Principal curvatures,Gauss curvature,mean curvature,Riemannian curvature tensor,isometry,sectional curvature,ricci curvature,skalar curvature,submanifold

TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Müge Karadağ'a ve lisansüstü öğrenimim boyunca önerilerini ve desteğini aldığım Sayın Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Sadık Keleş'e teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında kütüphanesinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. H.Bayram Karadağ'a ve tezimin en yoğun dönemlerinde yanımda olan değerli eşim ve aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Bir Riemann Manifoldunun Eğrilikleri ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Saadet DOĞAN

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Eğrilik kavramı, diferensiyel geometride çok yaygın ve kullanışlı bir kavramdır**.** Gauss'un çalışmaları bu konuda bir başlangıç noktası olmuş ve Riemann da bu çalışmalar üzerine somut olmayan bir şekilde eğrilik tensörünü tanımlamıştır. Bu tanımlamanın cebirsel olarak ifadesi 19. yy' ın ikinci yarısında gerçekleşmiştir *[16]*.

Yaşanılan dünyada matematiksel modellerin, geometrik ve fiziksel nesnelerin şekillerinin sadece lineer yapılarla açıklanması mümkün değildir. Bu nedenle eğrilik kavramına başvurma gerekliliği doğmuştur. Newton düzlem eğrilerinin eğriliğini çalışmıştır.1854'te Riemann, Gauss'un çalışmalarını keyfi boyutlu uzaylara genelleştirmiştir *[16]*.

Bu çalışma dört ana başlıkta incelenmiştir. Çalışmanın birinci bölümü ileride kullanılacak olan kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için temel tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur.

Çalışmanın ikinci kısmında öncelikle E^3 de yüzey geometrisinin kısa bir özeti verilerek bölüme başlanmış; daha sonra bir M yüzeyi üzerindeki eğriler boyunca vektör alanlarının diferensiyeli kullanılarak, M üzerinde yüzeyin şeklini belirleyecek bir simetrik bilineer form (2.dereceden kovaryant tensör) tanımlanmıştır. Sonrasında 4. dereceden kovaryant bir tensör olan $R(X,Y,Z,W)$ tanımlanıp, bu tensörün özellikleri incelenerek; Gauss eğriliği ve Riemann eğrilik tensörü arasındaki bağlantı verilmiştir. Ayrıca ricci eğriliği ve skalar eğriliğin geometrik yorumu sunularak, Riemann alt manifoldlarının eğrilikleri de çalışılmıştır.

Bir yüzeyin Riemann eğriliği kavramı boyutu ikiden büyük olan Riemann manifoldları için de tanımlanabilir. Boyutu ikiden büyük olan manifoldlar için Riemann eğriliği kavramı verilmiş ve kesit eğriliği kavramına geçiş yapılmıştır. Ardından Gauss eğrilikleriyle kesit eğrilikleri arasındaki ilişki, tanımlar ve teoremler yardımıyla sunulmuştur. Genel olarak bir Riemann manifoldun eğrilik tensörü dört değişkene bağlı iken, kesit eğriliği sadece iki değişkene bağlıdır. Nitekim Riemann eğrilik tensörü $R(X,Y,Z,W) = \left\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W \right\rangle$ ve kesit eğriliği de $K(V,W) = \dfrac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$ dir. Böylece bir Riemann manifoldun bir noktadaki kesit eğriliği kavramının eğrilik tensörü tarafından belirlendiği görülür. Buradan hareketle bu çalışmada kesit eğrilikleriyle, eğrilik tensörü arasındaki ilişkiler ve bağlantılar da kurulacaktır.

Çalışmanın üçüncü bölümü lokal invaryantlar ve Gauss'un Egregium Teoreminin çalışılmasına ayrılmıştır. Bu teorem diferensiyel geometrinin en temel teoremlerinden biri olup pek çok önemli çalışmaya da temel teşkil ettiğinden "muhteşem" anlamına gelen "Egregium" ile isimlendirilmiştir. Bu teoremin temelini oluşturduğu bazı fikirler de bu bölümde yer almaktadır. Eğrilik formları ve Cartan yapı denklemleri bu bölümün ikinci kısmını teşkil etmektedir. Cartan yapı denklemleri eğrilik çalışmalarında bazı kavramlara tekabül etmekte olup bir kısım teoremlerin ispatında klasik yolları tercih etmek yerine bu denklemler kullanılmıştır. Bu kısımda Egregium teoreminin ispatı bir de Cartan yapı denklemleri kullanılarak yapılmıştır.

Son bölümde de eğrilik kavramının kullanım alanları hakkında çeşitli bilgilere ve yapılan somut çalışmalara yer verilmiştir.

Bu tez eğrilikler üzerine çalışacak ve çalışmalarını eğrilikler üzerine kurmak isteyen kişilerin, temel bilgileri ve genel yaklaşımları bir arada bulabileceği bir çalışma olup orijinallik içermemektedir. Konuyla ilgili kapsamlı bir literatür taramasından ibarettir.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanılacak olan temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.1 (Bir manifold üzerinde C^k sınıfından eğri): *M bir diferensiyellenebilir manifold ve I, IR nin açık bir aralığı olmak üzere;*

$\alpha : I \to M$ de C^k sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman $\alpha(I) \subset M$ alt cümlesine, $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k ***sınıfından bir eğri*** *denir [1].*

Tanım 1.2 (Eğri boyunca vektör alanlarının diferensiyeli): *I, IR nin bir açık aralığı olmak üzere; $\alpha : I \to E^n$, $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t), ..., \alpha^n(t))$ bir eğri olsun. Z nin α eğrisi üstünde bir vektör alanı olduğu varsayılırsa eğrinin herhangi bir $\alpha(t)$ noktasında Z nin değeri $Z(\alpha(t))$ dir. Vektör alan tanımına göre $Z(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}E^n$ olur. $Z(\alpha(t))$ tanjant vektörü kısaca Z(t) ile gösterilir. $a^i(t) = \dot{\alpha}^i(t)$ olmak üzere;*

$$Z(t) = \sum a^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(\alpha(t))$$

dır. Z(t) nin t ye göre türevi , $\dot{Z}(t)$ veya $\frac{dZ}{dt}$ ile gösterilsin. Bu vektör p noktasında bir tanjant vektör olarak göz önüne alınacaktır. O halde;

$$\frac{1}{\Delta t}\left[Z(t_o + \Delta t) - Z(t_o)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i(t_o + \Delta t) - a^i(t_o)}{\Delta t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_o)}$$

dır [1].

$$\frac{dZ}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{da^i}{dt}(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t_0)}$$

olur. Burada $\frac{dZ}{dt}$, α üstünde bir vektör alanıdır [2].

Tanım 1.3 (Bir eğrinin tanjant vektörü): *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere,*

$$X_p : C^\infty(M, IR) \to IR$$

$$f \to X_p(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_t$$

şeklinde tanımlı X_p *fonksiyonuna* $\alpha(I)$ ***eğrisinin*** $\alpha(t)$ ***noktasındaki bir tanjant vektörü*** *denir [1].*

Tanım 1.4. (M diferensiyellenebilir manifoldunun tanjant vektörü): *M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir noktası* $p \in M$ *olsun. Bir*

$$X_p : C^\infty(M, IR) \to IR$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise X_P *ye* ***M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü*** *denir [1].*

Tanım1.5. (Vektör Alanı): *M bir diferensiyellenebilir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir* $p \in V$ *noktasındaki tanjant uzay* T_pV *olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi* $\bigcup_{p\in V} T_pV$ *ile gösterilsin. Bir*

$$\pi : \bigcup_{p\in V} T_pV \to V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_pV$ *tanjant vektörü için,* $\pi(t_p) = p$ *biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerinde bir vektör alanı tanımlanabilir.*

$V \subseteq M$ *üzerindeki bir vektör alanı operatörü*

$$X : V \to \bigcup_{p\in V} T_pV$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \to V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur [1].

Tanım 1.6. (Lie parantez operatörü): *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı* $\chi(M)$ *verilsin. O zaman,*

$$[\,,\,] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to [\,,\,](X, Y) = [X, Y]$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M, IR)$ *için,*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı $[\,,\,]$ *dönüşümüne* $\chi(M)$ *üzerinde* ***Lie Parantez Operatörü*** *denir ve bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1-) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$

2-) $[X,Y] = -[Y,X]$

3-) $[X,[Y,Z]] + [[Y,Z],X] + [[X,Z],Y] = 0$ *[1].*

Tanım 1.7. (Riemann Manifoldu, Yarı-Riemann Manifoldu): *M bir manifold olmak üzere; M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı* C^∞ *bir bilineer form (*ϕ*) tanımlı ise M'ye* ***"Riemann Manifoldu"*** *ve* ϕ *ye de* ***"Riemann metrik"*** *denir [2].*

Eğer M üzerinde bir bilineer form (ϕ)*aşağıdaki şartları sağlıyorsa M'ye* ***"yarı-Riemann manifoldu"*** *denir.*

i-) (ϕ) *simetrik*

ii-) $\forall\, X \in \chi(M)$ *için* $\phi(X,Y) = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$ *[1].*

Tanım 1.8. (Kovaryant türev ve konneksiyon): *M bir* C^∞ *manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı* $\chi(M)$ *ve* $Y = (y_1,...,y_n)$ *olmak üzere,*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y) \rightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y = (\langle X, \nabla y_1\rangle, \langle X, \nabla y_2\rangle, ..., \langle X, \nabla y_n\rangle)$$

fonksiyonu $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *,* $\forall\, f,g \in C^\infty(M, IR)$ *için*

1-) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_X Z$,

2-) $\nabla_X(f\,Y) = f\nabla_X Y + (X\,f)Y$

özelliklerini sağlıyorsa , ∇ *ya M manifoldu üstünde bir* ***afin konneksiyon*** *ve* ∇_X *e de* ***X e göre kovaryant türev operatörü*** *denir [1].*

Tanım 1.9. (Riemann anlamında Kovaryant Türev Ve Riemann Konneksiyonu): *M bir yarı-Riemann manifoldu ve* ∇*, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer*

1-) ∇*,* C^∞ *sınıfındandır.*

2-) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ *olan* $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ *için ,*

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *dir.*

3-) M nin bir A bölgesi üzerinde C^{∞} *olan* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *ve* $\forall p \in A$ *için*

$$X_p\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle\big|_P + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\big|_P$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ *konneksiyonuna* M *üstünde bir* ***Riemann konneksiyonu*** *ve* ∇_X *e de X e göre* ***Riemann anlamında kovaryant türev operatörü*** *denir [1].*

Tanım 1.10. (İmmersiyon, imbedding): M *ve* N *, m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsunlar.* $\varphi : M \to N$ *diferensiyellenebilir dönüşümünün*

$$\varphi_{*p} : T_p M \to T_{\varphi(p)} N$$

türev dönüşümü $\forall p \in M$ *için 1:1 ise* φ *dönüşümüne* ***immersiyon*** *denir.*

Ayrıca $\varphi : M \to \varphi(M) \subset N$ *dönüşümü bir homeomorfizm ise* φ *dönüşümüne* ***imbedding*** *denir [3].*

Tanım 1.11. (E^n ***de hiperyüzey):*** *N bir* C^{∞} $(n-1)-$*manifold olsun.*

$$f : N \to E^n$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$ *manifolduna* E^n *in bir* ***hiperyüzeyi*** *denir [1].*

Tanım 1.12. (Birim Normal Vektör Alanı): E^n *nin bir hiperyüzeyi* M *olsun.* $\chi(M)^{\perp}$ *in bir ortonormal bazı* N *ise N ye* M *nin* ***birim normal vektör alanı*** *denir.*

$\chi(M)^{\perp}$ *in iki tane birim normal vektör alanı vardır. Bunlardan birisi* N *ise diğeri –N dir [1].*

Tanım 1.13. (Yönlendirme): E^n ***,*** *n-boyutlu Öklid uzayının bir M hiperyüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir "****yönlendirme"*** *denir.*

E^n *deki her bir irtibatlı M hiperyüzeyi için iki farklı yönlendirme vardır. Bunlardan biri N ye diğeri de -N ye karşılık gelir. Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan hiperyüzeye* ***"yönlendirilmiş hiperyüzey"*** *denir [1].*

Tanım 1.14. (Şekil Operatörü, Gauss Eğriliği): E^n *de bir hiper yüzey M olsun. M'nin bir* $p \in M$ *noktasındaki birim normal vektör alanı* $N = (y_{1,} y_2, ..., y_n)$ *olmak üzere*

$S: \chi(M) \to \chi(M)$

$$X \to S(X) = \nabla_X N = (X[y_1],...,X[y_n])$$

olarak tanımlanan dönüşüme ***şekil operatörü*** *veya* ***Weingarten dönüşümü*** *denir [1].*

$$K: M \to IR$$

$$p \to K(p) = \det S(p)$$

olarak tanımlanan fonksiyona M nin ***Gauss eğrilik fonksiyonu*** *ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki* ***Gauss eğriliği*** *denir. Buradaki ∇, M nin Riemann konneksiyonudur [1].*

Tanım 1.15. (Temel Formlar) : *E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde*

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$

$$(X,Y) \to I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna ***"M yüzeyinin q-yuncu temel formu"*** *denir [1]. M yüzeyinin birinci temel formu $I^1 = I$,ikinci temel formu $I^2 = II$ ve üçüncü temel formu $I^3 = III$ ile gösterilecektir. Bu üç temel formun açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.*

Bir M yüzeyinin parametrik denklemi $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ olmak üzere u ve v'ye bu yüzeyin ***eğrisel koordinatları*** *denir. Yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin parametrik denklemi $u = u(t), v = v(t)$ olup, vektörel denklem*

$$\vec{r} = r(u(t), v(t))$$

dir. $\overrightarrow{dr} = \vec{r}_u.du + \vec{r}_v dv$ *olmak üzere;*

$$\left\|d\vec{r}\right\|^2 = \left\|\vec{r}_u\right\|^2 du^2 + 2\left\langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \right\rangle du.dv + \left\|\vec{r}_v\right\|^2 dv^2$$

$$= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

olur. Buna ***I. temel form*** *denir. Yüzey üzerindeki normal vektör alanı da u,v parametrelerine bağlı olacaktır, yani;*

$$\vec{N} = \vec{N}(u,v)$$

dir. Burada;

$$d\vec{N} = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv$$

olur [4].

I,II,III temel formları göstermek üzere,

$$\begin{bmatrix} I & II & III \\ d\vec{N} & d\vec{r} & 0 \\ 0 & d\vec{N} & d\vec{r} \end{bmatrix}$$

matrisi teşkil edilirse birinci satırdaki her elemanı kendi işaretli minöründen oluşan bir determinanta eşitleyerek sırasıyla I inci, II inci ve III üncü temel formlar tanımlanmış ve bu formların açık ifadeleri verilmiş olur:

$$I = \begin{vmatrix} d\vec{r} & 0 \\ d\vec{N} & d\vec{r} \end{vmatrix} = d\vec{r}^{\,2} = (\vec{r_u}.du + \vec{r_v}dv)^2$$

$$II = -\begin{vmatrix} d\vec{N} & 0 \\ 0 & d\vec{r} \end{vmatrix} = -d\vec{N}.d\vec{r} = -(\vec{N_u}du + \vec{N_v}dv).(\vec{r_u}du + \vec{r_v}dv)$$

$$III = \begin{vmatrix} d\vec{N} & d\vec{r} \\ 0 & d\vec{N} \end{vmatrix} = d\vec{N}^{\,2} = (\vec{N_u}du + \vec{N_v}dv)^2$$

Böylece;

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

$$III = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

olur. Burada;

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u , r_u \rangle \\ F &= \langle r_u , r_v \rangle \\ G &= \langle r_v , r_v \rangle \\ l &= \langle N_u , r_u \rangle = \langle N , r_{uu} \rangle \\ m &= \langle N_u , r_v \rangle = \langle N , r_{uv} \rangle \\ n &= \langle N , r_{vv} \rangle \end{aligned}$$

dır [4].

Tanım 1.16. (Ortalama Eğrilik): *E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin p noktasındaki şekil operatörü S(p) olmak üzere;*

$$H : M \to IR$$
$$p \to H(p) = iz(S(p))$$

biçiminde tanımlanan H fonksiyonuna M nin ***ortalama eğrilik fonksiyonu*** *ve H(p) değerine de M nin p noktasındaki* ***ortalama eğriliği*** *denir [1].*

Tanım 1.17. (Eğrilik çizgisi): *E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir* ***eğrilik çizgisidir*** *denir [1].*

Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere,

$S(T) = \lambda(T)$ *dir [1].*

Tanım 1.18. (Asimptotik Çizgi): *M nin herhangi bir p noktasındaki bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için ,*

$$\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$$

ise X_p doğrultusuna, M nin p noktasındaki bir ***asimptotik doğrultusu*** *ve X_p yi $\forall\, p \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine de M üzerinde bir* ***asimptotik çizgidir*** *denir. Şu halde M üzerindeki asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemi $\langle S(T), T \rangle = 0$ dır. Burada T aranan asimptotik çizginin teğet vektör alanıdır [1].*

Tanım 1.19. (Aslî Eğrilikler, Aslî Eğrilik doğrultuları): *M nin bir P noktasına karşılık gelen şekil operatörünün karakteristik (eigen) değerleri M nin bu noktadaki* ***aslî eğrilikleri*** *olarak adlandırılır. Aslî eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör olarak adlandırılan vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki* ***aslî eğrilik doğrultuları*** *denir [1].*

Tanım 1.20. (Türev Dönüşümü): *M ve $\overline{M}$, E^3 te iki yüzey ve*

$$F: M \to \overline{M}$$

fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$F_{*p}: T_p(M) \to T_{F(p)}\overline{M}$$

$$v_p \to F_{*p}(v_p) = (F'(p)v)_{F(p)}$$

dönüşümüne, F fonksiyonunun p noktasındaki ***türev dönüşümü*** *denir [5].*

Tanım 1.21. (Jakobiyen matrisi): *F_{*p} lineer dönüşümünün $T_p(M)$ ve $T_{F(p)}\overline{M}$ uzaylarının doğal tabanlarına göre matrisine, F fonksiyonunun p noktasındaki* ***Jakobiyen matrisi*** *denir [5].*

Tanım1.22. : *E^n in her noktasında bir F fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise F fonksiyonu* ***C^1 sınıfındandır*** *denir [5].*

Tanım 1.23. : *M ve $\overline{M}$, E^3te iki yüzey olsun.*

$F : M \to \overline{M}$ fonksiyonu 1:1 ve F_* fonksiyonu M nin her p noktasında iç çarpımı koruyan bir dönüşüm ise F fonksiyonuna M den $\overline{M}$ ye bir ***izometridir*** *denir.*

F_* fonksiyonunun iç çarpımı korunması; $\forall p \in M$ ve $\forall v, w \in T_pM$ için

$$\left\langle F_*(v), F_*(w) \right\rangle = \left\langle v, w \right\rangle$$

anlamındadır. M ve $\overline{M}$ yüzeyleri arasında bir izometri varsa M ile $\overline{M}$ ***izometriktir*** *denir [1].*

Tanım 1.24. :*(M,g) bir Riemann manifoldu, boy $M \geq 2$ olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı π ve $V, W \in \pi$ olmak üzere;*

$$K(V,W) = \frac{g\big(R(V,W)W,V\big)}{g(V,V)\,g(W,W) - g(V,W)^2}$$

ile tanımlanan K ya π nin ***kesit eğriliği*** *denir [6].*

Tanım 1.25: *$\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$; m boyutlu bir Riemann manifold, M de n boyutlu bir Riemann manifold olsun.*

$$\iota : M \to \widetilde{M}$$

bir immersiyon olmak üzere; eğer M nin metriği ;

$$g = \iota^* \widetilde{g}$$

şeklinde tanımlanan bir metrikse, ι ‘ ya ***“izometrik immersiyon”*** *denir. Buna ilaveten ι injektif ise* ***M ye $\widetilde{M}$ nün alt manifoldu*** *denir. $\widetilde{M}$ ye de* ***“esas manifold”*** *denir [7].*

Tanım 1.26: $T\widetilde{M}\Big|_M = \bigcup\limits_{p \in M} T_p\widetilde{M}$

kümesi, M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör demeti olmak üzere; $\widetilde{M}$ üzerindeki herhangi bir diferensiyellenebilir vektör alanı $T\widetilde{M}\big|_M$ nin herhangi bir kesitine kısıtlanabilir. Aksine, $T\widetilde{M}\big|_M$ nin herhangi bir diferensiyellenebilir X kesiti de aynı şekilde $T\widetilde{M}$ nün diferensiyellenebilir bir kesitine genişletilebilir. $\forall\, p \in M$ *için, esas manifoldun tanjant uzayı $T_p\widetilde{M}$;*

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM$$

şeklinde, ortogonal direk toplam olarak yazılabilir. Burada ; $N_pM = (T_pM)^{\perp}$; $T_p\widetilde{M}$ üzerinde $\widetilde{g}$ metriğine göre p noktasındaki normal uzaydır.

$$NM = \bigcup_{p \in M} N_pM$$

*kümesi M nin **normal demeti** diye adlandırılır. T_pM ve N_pM alt uzayları üzerinde* $\forall\, p \in M$ *noktasında ;*

$$\pi^{T} : T\widetilde{M}\big|_M \rightarrow TM$$
$$\pi^{\perp} : T\widetilde{M}\big|_M \rightarrow NM$$

*dönüşümleri p noktasındaki **tanjant ve normal projeksiyonlar** olarak adlandırılır. Eğer X ; $T\widetilde{M}\big|_M$ nin bir kesitiyse;*

$$X^{T} = \pi^{T} X$$
$$X^{\perp} = \pi^{\perp} X$$

olarak yazılabilir [7].

***Tanım 1.27** (**IR^3 üzerinde 1-form**)**:** IR^3 üzerinde bir ω 1-formu; IR^3 teki tüm tanjant vektörlerin kümesi üzerinde reel değerli bir fonksiyondur öyle ki $\forall\, a,b \in IR$ ve $\forall\, V,W$ tanjant vektörleri için ω ;*

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W)$$

şartını sağlar [11] .

II. BÖLÜM

Bu bölümde eğrilik kavramının tanımı ve yorumlarına yer verilmiştir. Bu kavram bir manifold üzerindeki en önemli invaryanttır. Bir M yüzeyinin herhangi bir noktası civarında M nin biçimini belirleyen çeşitli nicelikler elde edilerek bu niceliklerin E^3 de bulunan M yüzeyinin tanımına bağlı olup koordinat seçiminden bağımsız olduğu görülmüştür.

II.1: E^3 de Yüzey Geometrisi

M; bir tek $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğu tarafından belirlenmiş imbedded bir yüzey olsun. Burada

$$\varphi : U \subset IR^3 \to W \subset IR^2$$
$$p = (p_1, p_2, p_3) \to \varphi(p) = (u(p), v(p))$$

olup (u,v) noktaları bir imbedding veya parametre dönüşümü altında E^3 e resmedilebilir. Bu dönüşüm

$$\varphi^{-1} : \mathrm{W} \to \mathrm{U} \subset IR^3$$
$$(u,v) \to \phi^{-1}(u,v) = (x^1, x^2, x^3) = (f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v))$$

ile verilir. $E_1 = \varphi_*^{-1}(\partial/\partial u)$ ve $E_2 = \varphi_*^{-1}(\partial/\partial v)$ koordinat çatılarını göstersin ve M yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Yönlendirme; M nin birim normal vektör alanı olan *N*' yi herhangi bir belirsizlik olmadan belirleyebilmek için gereklidir. *N;* her bir $p \in M$ noktasında $T_pM \subset T_p(IR^3)$ e ortogonal olan bir tek birim vektör olup, böylece seçilmiş E_1, E_2, N formu p noktasında bir çatı oluşturur. Bu çatı IR^3'ün standart ortonormal çatısı $\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/x_3\}$ ile aynı yönlendirmeye sahip bir çatıdır.

Uzunluk ve ortogonallik Riemann metrikten indirgenmiş Öklid uzayının iç çarpımı $\langle X,Y \rangle$ ile tanımlanır. $\forall\ p \in M$ noktasındaki *M*' nin şekli, yüzeyin normali olan *N*'nin türevleri aracılığıyla tanımlanacaktır. p noktasındaki *N'* nin türevleri, çeşitli yönlerde M ye teğettir. IR^3 te diferensiyellenebilen bir *p(t)* eğrisi boyunca *N*' nin *p(t)*ye kısıtlanması $N(t)=N_{p(t)}$ vektör alanını verir. dN/dt, *p(t)* eğrisi boyunca bir vektör alanıdır. $\langle N,N \rangle = 1$ olduğunu göz önünde bulundurulur ve bu iç çarpımın türevi alınırsa;

$$0=\frac{d}{dt}\langle N,N\rangle = 2\left\langle \frac{dN}{dt}, N\right\rangle$$

olur. Öyleyse eğrinin her t noktasında ${dN}/{dt}$, $N(t)$ ye ortogonaldir. Yani; ${dN}/{dt} \in T_{p(t)}(M)$ olur.

Teorem II.1 : $(dN/dt)_{t=0}$ *vektörü sadece* X_p *'ye bağlıdır, seçilen p(t) eğrisine bağlı değildir. Ayrıca;*

$$S: T_pM \to T_pM$$

$$X_p \to S(X_p) = -(dN/dt)_{t=0}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer bir dönüşümdür [2].

İspat: $X_p \in T_pM$, p yi içeren $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğunun $\{E_{1p}, E_{2p}\}$ koordinat çatısının bir lineer birleşimi yani; $X_p = aE_{1p} + bE_{2p}$ olarak yazılabilir.

$p(t)=(f^1(u(t), v(t)),\ f^2(u(t),v(t)),\ f^3(u(t),v(t)))$ herhangi diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $p(0)=p;$ $u_0 = u(0)$ ve $v_0 = v(0)$ koordinatlarına sahip olmak üzere $\dot{p}(0) = X_p$ ise $\dot{p}(0) = aE_{1p} + bE_{2p}$ olarak yazılabilir. Buradan $\dot{u}(0) = a$ ve $\dot{v}(0) = b$ olur.

U üzerinde IR^3 teki standart çatıya göre N 'nin bileşenleri, $n^i(u,v)$ ile gösterilirse

$$N=n^1(u,v)\frac{\partial}{\partial x^1} + n^2(u,v)\frac{\partial}{\partial x^2} + n^3(u,v)\frac{\partial}{\partial x^3}$$

olarak yazılabilir. Yani eğri boyunca

$$N(t)=\sum_{i=1}^{3} n^i(u(t),v(t))\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{ve}$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0} = \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial n^i}{\partial u}\right)_{\varphi(p)} \dot{u}(0) + \left(\frac{\partial n^i}{\partial v}\right)_{\varphi(p)} \dot{v}(0)\right]\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= a\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial n^i}{\partial u}\right)_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+b\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial n^i}{\partial v}\right)_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

olur. Bu da S(X_p) nin X_p' nin bileşenleriyle lineer bağımlı olup $(\frac{dN}{dt})_{t=0} \in T_pM$ olduğu da göz önünde bulundurulduğunda S: $T_pM \to T_pM$ dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğunu gösterir.

(u(0),v(0)), *p* nin koordinatlarını; $\left(\dot{u}(0),\dot{v}(0)\right)$ ise $\dot{p}(0) = X_p$ nin bileşenlerini göstermek üzere; elde edilen son eşitlikten $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0}$ ın p ye ve X_p ye bağlı olduğu, hesaplamada kullanılan eğriye bağlı olmadığı görülecektir.

Özetle; her $p \in M$ noktasında verilen $S: T_pM \xrightarrow{lineer} T_pM$ dönüşümü; M üzerindeki $\{U,\varphi\}$ koordinat sisteminin seçilişine veya Öklid uzayda kullanılan kartezyen koordinat sistemine bağlı değildir. *N; M* nin yönlendirilmesi ve Öklid iç çarpımı kullanılarak tanımlandığı için; $\frac{dN}{dt}$ sadece Öklidyen uzaydaki paralel ortonormal çatının varlığına bağlıdır. Dolayısıyla $\frac{dN}{dt}$ yardımıyla tanımlanan *S* de koordinat seçiminden bağımsızdır. Buradaki *S* operatörüne *"şekil operatörü"* denilecektir *[2]*.

Örneğin *M*; *xy*-düzlemi olarak ele alınırsa ; $N=E_3$ sabit bir vektör olup $S(X_p)=0$ dır.

Ayrıca eğer *M*; yarıçapı *R* olan bir küre ise $\left(x^1,x^2,x^3\right) \in M$ noktasındaki birim normal vektör alanı $N=\frac{x^1}{R}.\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{x^2}{R}.\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{x^3}{R}.\frac{\partial}{\partial x^3}$ dür.

Eğer küreye yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş büyük çember eğrisi boyunca teğet doğrultuda yaklaşılırsa burada

$$\left\|X_p\right\| = 1 \quad \text{ve} \quad S(X_p) = -\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{R}X_p \text{ olur.}$$

M bir C^∞ alt manifold olsun. *M* üzerindeki her *p* noktasında bir C^∞ kovaryant tensör alanı tanımlamak için lineer bir dönüşüm olan $S: T_pM \to T_pM$ dönüşümü kullanılabilir.

S:V→V ; $\langle X,Y\rangle$ iç çarpımıyla *V* vektör uzayı üzerinde lineer bir operatör olsun. O zaman

$$\psi : V \times V \to IR$$

$$(X,Y) \to \psi(X,Y) = \langle S(X),Y\rangle$$

bir bilineer form, ya da V üzerinde 2.dereceden kovaryant tensör olarak tanımlanır. $\forall X,Y \in V$ için ψ formu simetriktir $\Leftrightarrow \langle S(X),Y\rangle = \langle X,S(Y)\rangle$. Bu durumda S simetrik veya self-adjoint olarak adlandırılır [2].

Teorem II.2: *S(X); $\forall p \in M$ için T_pM tanjant uzayında bir simetrik operatör ve $\psi(X,Y)$; 2.dereceden kovaryant simetrik bir tensör olsun. Eğer M, C^∞ sınıfındansa; S ve ψ nin bileşenleri de C^∞ sınıfındandır [2].*

İspat: Bunun için $\psi(X,Y)$ nin bileşenleri incelenirse; $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğu ve

$$\varphi^{-1} : W \to U \subset M$$

$$(u,v) \to \varphi^{-1}(u,v) = (x^1,x^2,x^3) = \left(f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v)\right)$$

olmak üzere; $E_1 = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial u})$ ve $E_2 = \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$ çatılarına göre $\psi(X,Y)$ nin bileşenleri

$$\psi(E_1,E_1) = \langle S(E_1),E_1\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u},E_1\right\rangle$$

$$\psi(E_1,E_2) = \langle S(E_1),E_2\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u},E_2\right\rangle$$

$$\psi(E_2,E_1) = \langle S(E_2),E_1\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v},E_1\right\rangle$$

$$\psi(E_2,E_2) = \langle S(E_2),E_2\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v},E_2\right\rangle$$

dir. $X = X(u,v) = f^1(u,v)\frac{\partial}{\partial x_1} + f^2(u,v)\frac{\partial}{\partial x_2} + f^3(u,v)\frac{\partial}{\partial x_3}$ olmak üzere, *X* in *u*' ya göre türevi $X_u = E_1$ ve *X* in *v* 'ye göre türevi $X_v = E_2$ olarak seçilirse;

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = E_1 \ , \ X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = E_2 \text{ dir.}$$

$$\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$$

olduğu göz önünde bulundurularak türev alındığında

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, X_u \right\rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \Rightarrow -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, X_u \right\rangle = \langle N, X_{uu} \rangle = \sum n_i . \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^2}$$
$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, X_v \right\rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0 \Rightarrow -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, X_v \right\rangle = \langle N, X_{vv} \rangle = \sum n_i . \frac{\partial^2 f^i}{\partial v^2}$$
$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, X_u \right\rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \Rightarrow -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, X_u \right\rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = \sum n_i . \frac{\partial^2 f^i}{\partial v \partial u}$$
$$= \langle N, X_{uv} \rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, X_v \right\rangle$$

olacaktır. Dolayısıyla eğer *M*, C^∞ ise, ψ ve *S* nin bileşenleri de C^∞ dur. Bu bağıntılardan üçüncüsü $\psi(X,Y) = \psi(Y,X)$ olduğunu gösterir. Öyleyse ψ simetrik bir tensördür. Burada $(l)_{ij} = (\psi(E_i, E_j))$ olmak üzere;

$$l = \langle N, X_{uu} \rangle = l_{11}$$
$$m = \langle N, X_{uv} \rangle = l_{12} = l_{21}$$
$$n = \langle N, X_{vv} \rangle = l_{22}$$

olup; 2×2 matrisinin bileşenleri $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$ olarak yazılabilir.

Burada; $\psi(X,Y)$ bilineer formuna *M yüzeyinin 2.temel formu* denir. $\langle X, Y \rangle$ iç çarpımına da *1.temel form* denir *[2]*.

Riemann metriği $\langle X, Y \rangle$ nin bileşenleri, g_{ij} ile gösterilirse;

$$g_{11} = E = \langle X_u, X_u \rangle$$
$$g_{12} = F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle = F = g_{21}$$
$$g_{22} = G = \langle X_v, X_v \rangle$$

dir *[2]*.

II.1.1 Yüzeyin Bir Noktasındaki Asli Eğrilikleri:

Teorem II.1.1: *$\forall p \in M$ noktasında S lineer dönüşümünün karakteristik değerleri k_1 ve k_2, $k_1 \geq k_2$ olsun. Eğer $k_1 \neq k_2$ ise k_1 ve k_2 ye karşılık gelen karakteristik vektörler* *ortogonaldir. Eğer p de* $k_1 = k_2 = k$, $k \in IR$ *ise o zaman* $\forall X_p \in T_pM$ *için* $S(X_p) = k.X_p$ *dir.*

Üstelik; $X_p \in T_pM$ *birim vektör olmak üzere* k_1 *ve* k_2 *sayıları,* $\psi(X_p, X_p) = \langle S(X_p), X_p \rangle$ *nin maksimum ve minimum değerleridir [2].*

İspat: İspat $k_1 \neq k_2$ için yapılacaktır. Kabul edelim ki; $k_1 \succ k_2$ olsun. Burada S self-adjoint olup, F_1 ve F_2 de k_1, k_2 ye karşılık gelen karakteristik birim vektörleri göstersin. Bu durumda;

$$k_1\langle F_1, F_2\rangle = \langle S(F_1), F_2\rangle = \langle F_1, S(F_2)\rangle = k_2\langle F_1, F_2\rangle$$
$$(k_1 - k_2)\langle F_1, F_2\rangle = 0$$

olur. $k_1 \neq k_2$ olduğundan $\langle F_1, F_2\rangle = 0$ olduğu görülür. Gerektiğinde F_2 yerine $-F_2$ de alınabilir. Burada F_1, F_2; T_pM ile aynı yönlendirilmiş bir ortonormal baz olarak kabul edilebilir.

X_p birim vektörleri için k_1 ve k_2 nin $\langle S(X_p), X_p\rangle$ nin maksimum ve minimum değerleri olduğu gösterilecek olursa herhangi bir $X_p \in T_pM$ birim vektörü için;

$$X_p = \cos\theta.F_1 + \sin\theta.F_2$$

yazılabilir. $k(\theta)$ ile $\langle S(X_p), X_p\rangle = \psi(X_p, X_p)$ gösterilsin. F_1, F_2 yönlendirilmiş ortonormal bir çatıyı göstermek üzere;

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \langle S(X_p), X_p\rangle \\ &= \langle S(\cos\theta.F_1 + \sin\theta.F_2), \cos\theta.F_1 + \sin\theta.F_2\rangle \\ &= \cos^2\theta\langle S(F_1), F_1\rangle + \cos\theta\sin\theta\langle S(F_1), F_2\rangle + \sin\theta\cos\theta\langle S(F_2), F_1\rangle + \sin^2\theta\langle S(F_2), F_2\rangle \end{aligned}$$

olur.

$$\langle S(F_1), F_1\rangle = \langle k_1F_1, F_1\rangle = k_1\langle F_1, F_1\rangle = k_1$$
$$\langle S(F_2), F_2\rangle = k_2$$
$$\langle S(F_1), F_2\rangle = \langle k_1F_1, F_2\rangle = k_1\langle F_1, F_2\rangle = 0$$
$$\langle S(F_2), F_1\rangle = 0$$

olur. Bu durumda

$$k(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \qquad \text{(Euler formülü)}$$

yazılabilir. Bu formülde her iki tarafın θ ya göre türevi alınırsa;

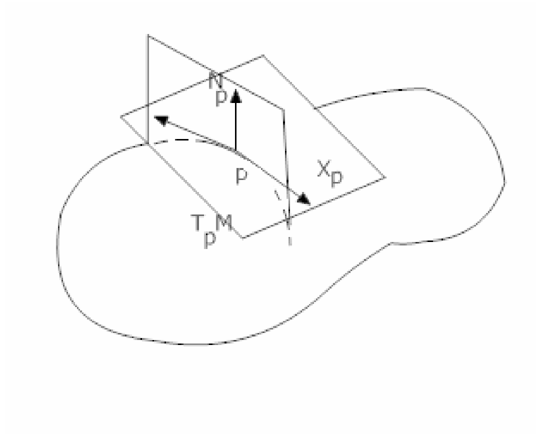
$$\frac{dk}{d\theta} = -2k_1 \cos\theta \sin\theta + 2k_2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{dk}{d\theta} = 2(k_2 - k_1)\sin\theta \cos\theta$$

elde edilir. Buradan $k(\theta)$ nın ekstremumları $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ veya $\frac{3\pi}{2}$ noktalarındadır. Diğer taraftan; $X_p = \pm F_1$ veya $X_p = \pm F_2$ olduğu zaman $\langle S(X_p), X_p \rangle = \psi(X_p, X_p)$ nin maksimum ve minimum değerleri k_1 ve k_2 olmuş olur.

$\forall\, p$ noktasında $k_1 = k_2$ ve $k_1 \neq 0$ ise o zaman p' ye M' nin *"umbilik noktası"* denir. Eğer $k_1 = k_2$ ve $k_1 = 0$ ise p ye *"düzlemsel nokta"* denir. R yarıçaplı bir küre düşünüldüğünde $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$ olup, kürenin tüm noktaları umbilik noktadır. Benzer şekilde; eğer M bir düzlemse; $k_1 = k_2 = 0$ olup her noktası düzlemseldir.

$\boldsymbol{k(\theta) = \psi(X_p, X_p)}$ **nin geometrik yorumu:** Herhangi bir p noktasındaki birim teğet vektör X_p olsun. X_p ve N_p birim vektörleri, p yi orijin kabul eden bir düzlem tanımlar. Böylece düzlem üzerinde bir koordinat sistemi ve bir yönlendirme verilmiş olur.



Şekil II.1

Bu düzlem M yi bir eğri boyunca keser. p noktasından geçen bu eğriye X_p tarafından belirlenmiş *"normal kesit"* denir.

*E*ğrinin p noktasındaki normal vektörü N_p, birim teğet vektörü X_p olsun. Yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir eğri $p(t)$ ve $p(0) = p$ olmak üzere her t için $\dot{p}(t) = dp/dt$ birim vektörü vardır öyle ki $\dot{p}(0) = X_p$ dir. Eğri boyunca

$\left\langle N, \frac{dp}{dt} \right\rangle = 0$ olup, bu ifadenin türevi alınırsa

$$\left\langle \frac{dN}{dt}, \frac{dp}{dt} \right\rangle + \left\langle N, \frac{d^2 p}{dt^2} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{dN}{dt}, \frac{dp}{dt} \right\rangle = -\left\langle N, \frac{d^2 p}{dt^2} \right\rangle = -\tilde{k}$$

$\tilde{k}$, düzlem eğrisi olan $p(t)$ *nin* eğriliği olarak tanımlanır. $p = p(0)$ da $\left\langle \frac{dN}{dt}, X_p \right\rangle = -\left\langle S\left(X_p\right), X_p \right\rangle$ olur. Böylece; $X_p = \cos\theta \ F_1 + \sin\theta \ F_2$ olduğundan; X_p tarafından tanımlanan normal kesitin eğriliği $\tilde{k} = k(\theta)$ bulunabilir. $k(\theta)$ ya X_p tarafından tanımlanmış kesitin *"normal eğriliği"* ; $k(\theta)$ nın maksimum ve minimum değeri olan k_1 ve k_2 ye p noktasındaki *"asli eğrilikler";* yönlendirmeyle uyumlu seçilmiş birim vektörlere karşılık gelen F_{1p}, F_{2p} ye de *"asli doğrultular"* denir.

p noktasındaki bir yüzeyi çalışmak için Öklid uzayında *xyz*-koordinat sistemi seçilecektir. Yüzeyin parametrik denklemi; $x=u,\ \ y=v,\ \ z=f(u,v)$ olsun. O zaman; *xy*-düzlemindeki W açık kümesini, M deki U açık kümesine taşıyan bir φ^{-1} dönüşümüyle *xy* ve *uv* düzlemleri tanımlanabilir.

p noktasındaki 1.temel formun bileşenleri hesaplanırsa $E = G = 1,\ F = 0$ bulunur. 2.temel form için;

$$\varphi^{-1} : (x, y) \to (x, y, f(x, y))$$

M nin parametrik temsilidir ve böylece p noktasında

$$l = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, f_{xx} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = f_{xx}$$

$$m = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, f_{xy} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = f_{xy}$$

$$n = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, f_{yy} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = f_{yy}$$

elde edilir. Burada; $\frac{\partial}{\partial x}$ *ve* $\frac{\partial}{\partial y}$ koordinat eksenleri asli doğrultular olarak seçildiğinde

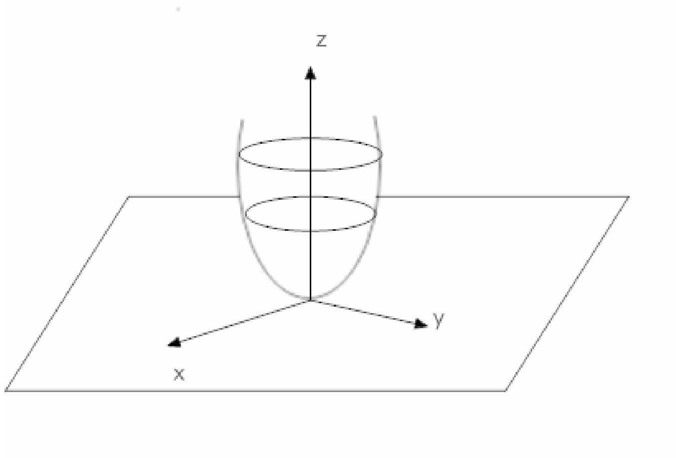
$m=0,\ l=k_1\ ,n=k_2$ olur. $x=0$ *ve* $y=0$ da Euler formülü kullanıldığı zaman $k(\theta)=f_{xx}\cos^2\theta+f_{yy}\sin^2\theta$ dır. Şimdi; (0,0) noktasında $f(x,y)$; Taylor serisine $f(0,0)=0$ *ve* $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ şartları göz önünde bulundurularak açılırsa

$$z=f(x,y)=f_{xx}(0,0)x^2+f_{yy}(0,0)y^2+R_2$$

olur. Burada; R_2, daha yüksek mertebeden terimleri içerir. $f_{xx}(0,0)=a$ *ve* $f_{yy}(0,0)=b$ denilirse $z=ax^2+by^2$ nin normal kesitinin eğriliği, verilen yüzeyin p noktasındaki kesit eğriliğiyle aynıdır.

Örnek II.1: $z=ax^2+by^2$ denklemi için;

$a.b\succ 0$ *hali:* Bu denklem asli eğrilikleri a ve b olan eliptik paraboloidi gösterir. a ve b nin her ikisi de pozitifse bu paraboloidin konumu xy- düzleminin üst kısmında her ikisi de negatifse bu paraboloid xy- düzleminin alt kısmında yer alır.

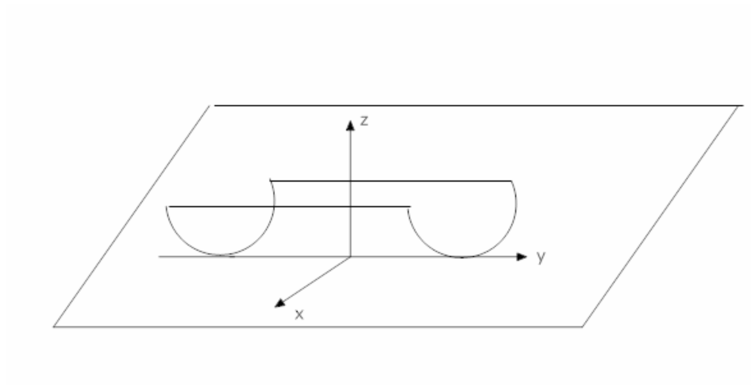


$ab\succ 0\ (a\succ 0, b\succ 0)$

Şekil II.2

ÖrnekII.2:

a.b=0 hali: $z=ax^2+by^2$ denklemi; a ve b nin her ikisi birden sıfırsa $z=0$ düzlemi yani xy- düzlemi elde edilir. a ve b den biri mesela $b=0$ ise o zaman $a\succ 0$ olması durumunda xy-düzleminin üst kısmında bulunan bir parabolik silindir elde edilir.



$ab = 0 \ (a \succ 0, b = 0)$

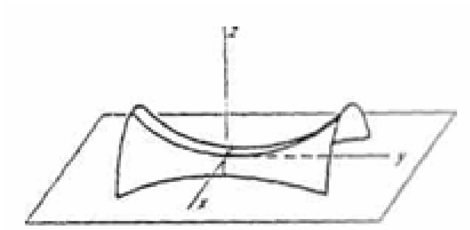
Şekil II.3

Örnek II.3:

$a.b \prec 0$ *hali:* $z = ax^2 + by^2$ denklemi bir hiperbolik paraboloide veya semer noktasında xy- düzlemine teğet bir semer yüzeyine karşılık gelir. Mesela $a = 1$, $b = -1$ alınır ve Euler formülü uygulanırsa

$$k(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

olur ve burada $k(\theta)$; -1 ile 1 arasında değişir ve $\pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{3\pi}{4}$ noktalarında sıfır olur. $k_1 \succ 0$ ve $k_2 \prec 0$ olduğunda yüzey T_pM nin her iki tarafında da noktalara sahip olacaktır.



$ab \prec 0, \ a \succ 0, \ b \prec 0$

Şekil II.4

II.1.2 Bir Yüzeyin Gauss Ve Ortalama Eğriliği :

S lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisin determinantı ve izi; S nin karakteristik polinomunun katsayılarıdır ve önemli değişmezlerdir.

S ye karşılık gelen matrisin determinantı yani; S nin karakteristik değerlerinin çarpımına yüzeyin "Gauss eğriliği" denir. K ile gösterilir.

S nin izine de yüzeyin "Ortalama eğriliği" denir.

Bu değerler doğrudan 1.temel formun bileşenleri kullanılarak da hesaplanabilir. Aşağıda bununla ilgili teorem verilmiştir:

Teorem II.1.2: *Bir yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;*

$$K=\frac{l\,n-m^2}{EG-F^2} \quad ve\; H=\frac{1}{2}\,\frac{Gl-2Fm+En}{EG-F^2}$$

ile verilir [2].

İspat:

M üzerinde p nin bir $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğunda $E_1=X_u$ ve $E_2=X_v$ koordinat çatısına göre S şekil operatörünün bileşenleri;

$$S(X_u)=aX_u+bX_v$$
$$S(X_v)=cX_u+dX_v$$

olsun. O zaman

$S=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olacağından $K=\det S=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ yazılabilir. $\times\,; E^3$ teki vektörlerin vektörel çarpım işlemini göstermek üzere

$$S(X_u)\times S(X_v)=(aX_u+bX_v)\times(cX_u+dX_v)$$
$$=ac(X_u\times X_u)+ad(X_u\times X_v)+bc(X_v\times X_u)+bd(X_v\times X_v)$$
$$=0+(ad-bc)(X_u\times X_v)+0$$

$$S(X_u)\times S(X_v)=K(X_u\times X_v) \qquad ...(2.1.2)$$

dir.

IR^3 de Lagrange özdeşliğinden

$$\langle X_u\times X_v, X_u\times X_v\rangle=\begin{vmatrix} \langle X_u,X_u\rangle & \langle X_u,X_v\rangle \\ \langle X_v,X_u\rangle & \langle X_v,X_v\rangle \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}=EG-F^2$$

yazılır. *(2.1.2)* no'lu eşitliğin her iki tarafı $X_u\times X_v$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$K\langle X_u\times X_v, X_u\times X_v\rangle=\langle S(X_u)\times S(X_v), X_u\times X_v\rangle$$
$$K(EG-F^2)=\begin{vmatrix} \langle S(X_u),X_u\rangle & \langle S(X_u),X_v\rangle \\ \langle S(X_v),X_u\rangle & \langle S(X_v),X_v\rangle \end{vmatrix}$$

$$K(EG-F^2)=\begin{vmatrix} l & m \\ m & n \end{vmatrix}=l\,n-m^2$$

$$\Rightarrow K=\frac{l\,n-m^2}{EG-F^2}$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} S(X_u)\times X_v+X_u\times S(X_v) &= (aX_u+bX_v)\times X_v+X_u\times(cX_u+dX_v) \\ &= a(X_u\times X_v)+d(X_u\times X_v) \\ &= izS(X_u\times X_v) \end{aligned}$$

$S(X_u)\times X_v+X_u\times S(X_v)=2H(X_u\times X_v)$ olup

$$2H\langle X_u\times X_v, X_u\times X_v\rangle=\langle S(X_u)\times X_v+X_u\times S(X_v), X_u\times X_v\rangle$$

$$\begin{aligned} 2H\|X_u\times X_v\|^2 &= \begin{vmatrix} \langle S(X_u),X_u\rangle & \langle S(X_u),X_v\rangle \\ \langle X_v,X_u\rangle & \langle X_v,X_v\rangle \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \langle X_u,X_u\rangle & \langle X_u,X_v\rangle \\ \langle S(X_v),X_u\rangle & \langle S(X_v),X_v\rangle \end{vmatrix} \\ &= lG-mF+En-Fm \\ &= lG-2Fm+En \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{2}\frac{lG-2Fm+En}{EG-F^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Asli eğriliklerin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik cinsinden ifadesi aşağıdaki lemmada verilmiştir:

Lemma II.1.1:

k_1 ve k_2 yüzeyin asli eğrilikleri olmak üzere ;

$k_1=H+\sqrt{H^2-K}$ ve $k_2=H-\sqrt{H^2-K}$ dır [11].

İspat: Yüzeyin K Gauss eğriliği $K=k_1.k_2$ ve ortalama eğriliği ise $2H=k_1+k_2$ olup k_1 ve k_2, S şekil operatörünün karakteristik değerleridir. Asli doğrultulara göre S şekil operatörünün matrisi $S=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olup, S nin karakteristik değerleri bu matrisin karakteristik polinomunun kökleridir. Bu matrisin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \\ &= x^2 - iz(S)x + \det S \\ &= x^2 - 2Hx + K \end{aligned}$$

olup bu denklemin kökleri k_1 ve k_2 olarak adlandırılırsa

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

elde edilecektir.

Örnek II.4:

$$\begin{aligned} X &: IR^2 \to IR^3 \\ &(u,v) \to (u,v,uv) \end{aligned}$$

şeklinde parametrelenmiş $z = xy$ semer yüzeyi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} X_u &= (1,0,v) = \frac{\partial}{\partial x^1} + v\frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_v &= (0,1,u) = \frac{\partial}{\partial x^2} + u\frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1+v^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = uv \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1+u^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v,-u,1)$$

$$N = \frac{(-v,-u,1)}{\sqrt{v^2 + u^2 + 1}}$$

olur. Yazımda kolaylık olması açısından; $\sqrt{v^2 + u^2 + 1} = \lambda$ denilirse

$$\lambda N = (-v,-u,1)$$

ve $\quad X_{uu} = X_{vv} = 0$, $X_{vu} = X_{uv} = \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ bulunur. Öyleyse

$$\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{\lambda^2}}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^4}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{Gl - 2Fm + En}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{-2uv\frac{1}{\lambda}}{\lambda^2} = \frac{-uv}{\lambda^3}$$

olarak bulunur. Asli eğrilikler hesaplanacak olursa Lemma II.1.1 den

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$
$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

olduğundan

$$k_{1,2} = \frac{-uv \mp \lambda\sqrt{u^2v^2 + 1}}{\lambda^3}$$

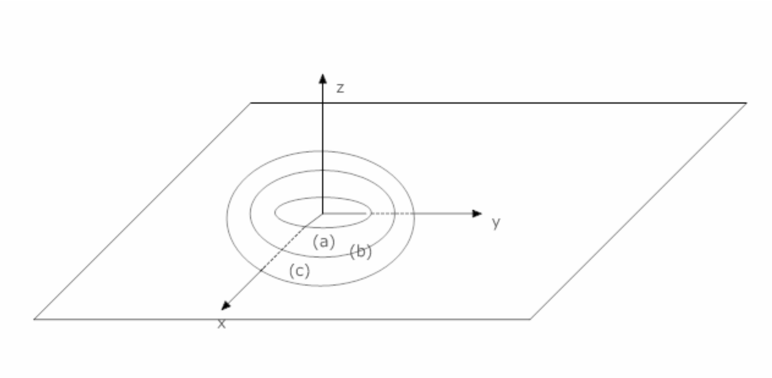
elde edilir.

K Gauss eğriliği , asli eğrilikler olan k_1 ve k_2 nin çarpımı olup, k_1 ve k_2 sıfırdan farklı ve her ikisi de aynı işaretli ise $K \succ 0$ dır. Buna göre iki durum söz konusudur: $k_1 \succ 0$ ve $k_2 \succ 0$ durumunda her bir normal kesit eğrisi p noktasındaki N_p normaline doğrudur. $k_1 \prec 0$ ve $k_2 \prec 0$ durumunda ise; her bir eğri normalden uzaklaşır. Bundan dolayı yüzey p nin komşuluğunda tamamen N_p ye zıt yönde yatar. Ayrıca $z = f(x, y)$ ve $K \succ 0$ ise o noktada yüzeyin ekstremumları vardır *[2]*.

Diğer yandan eğer k_1 ve k_2 sıfırdan farklı ve zıt işaretli ise $K \prec 0$ dır. Bu ise yüzeyin bir semer yüzeyi olduğunu gösterir. Bazı normal kesitler N ye doğru konkavdır ve bazı konkavlar da N den uzaklaşır.

Asli eğriliklerden biri sıfır ise $K=0$ dır. Silindirin asli eğriliklerinden biri sıfır olduğundan gauss eğriliği sıfırdır.

Örnek II.5 : Tor yüzeyi incelendiğinde yüzeyi iç kısım $K \prec 0$ ve dış kısım $K \succ 0$ diye ikiye bölen, eksenine ortogonal olacak şekildeki iki paralel teğet düzlemde sabit bir noktanın etrafında dönen hayali iki çember görülebilir. O iki çember boyunca da *K=0* dır. Ve bu çemberler boyunca normal vektör z eksenine paraleldir.



$(a)\ K \prec 0\ bölgesi$
$(b)\ K = 0\ bölgesi$
$(c)\ K \succ 0\ bölgesi$

Şekil II.5

$$\varphi : IR^2 \to IR^3$$
$$(u,v) \to \varphi(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

$$\varphi_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$$
$$\varphi_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\sin u)$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = b^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\cos^2 u = b^2$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = (a+b\cos u)b\sin u\sin v\cos v - (a+b)\cos u\ b\cos v\sin v\sin u$$
$$= 0$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (a+b\cos u)^2\sin^2 v + (a+b\cos u)^2\cos^2 v$$
$$= (a+b\cos u)^2$$

$$l = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = b$$
$$m = 0$$
$$n = \langle N, \varphi_{vv} \rangle = (a+b\cos u)\cos u$$

olur. Öyleyse 1. ve 2. temel form sırasıyla

$$b^2du^2 + (a+b\cos u)^2dv^2 \quad ve \quad bdu^2 + (a+b\cos u)\cos u dv^2$$

dir. Buradan asli eğrilikler

$$k_1 = \frac{1}{b}\ ve\ k_2 = \frac{\cos u}{a+b\cos u}$$

bulunur. Her yerde $k_1 \succ 0$ olduğundan torun eliptik, parabolik veya hiperbolik olması k_2 ye bağlıdır. Buna göre

$$u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow k_2 \succ 0$$

$$u = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_2 = 0$$

$$u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow k_2 \prec 0$$

olur. Buna göre ilk verilen bölgede yüzey eliptik, ikinci bölgede parabolik, üçüncü bölgede ise hiperboliktir.

II.2 Riemann Eğrilik Tensörünün Basit Özellikleri:

M bir manifold; X, Y, Z, W vektör alanları ve bunların $p \in M$ deki değerleri de X_p, Y_p, Z_p, W_p ise $R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) = \left\langle \nabla_{X_p}\nabla_Y Z - \nabla_{Y_p}\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_P} Z, W_P \right\rangle$ olur. Bu tensör, seçilen vektör alanlarından bağımsız olup bir C^∞ kovaryant tensör alanı tanımlar. Aynı şekilde her bir $p \in M$ deki X, Y vektör alanları eğrilik operatörünü tanımlar. T_pM deki Riemann eğrilik operatörü

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \nabla_{X_p}\nabla_Y Z - \nabla_{Y_p}\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_p} Z$$

şeklinde tanımlanır *[2]*. Eğer $f \in C^\infty(M)$ ise bu eğrilik tensörü C^∞ lineerdir. Yani;

$f\,R(X,Y)Z = R(f\,X,Y)Z = R(X, f\,Y)Z = R(X,Y)f\,Z$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\
&= f\,\nabla_X\nabla_Y Z - Y[f]\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]-Y[f]X} Z \\
&= f\,\nabla_X\nabla_Y Z - Y[f]\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]} Z + \nabla_{Y[f]X} Z \\
&= f\,\nabla_X\nabla_Y Z - Y[f]\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z - f\,\nabla_{[X,Y]} Z + Y[f]\nabla_X Z \\
&= f\,R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,fY)Z &= \nabla_X\nabla_{fY} Z - \nabla_{fY}\nabla_X Z - \nabla_{[X,fY]} Z \\
&= \nabla_X f\,\nabla_Y Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]+X[f]Y} Z \\
&= \nabla_X f\,\nabla_Y Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z - f\,\nabla_{[X,Y]} Z - X[f]\nabla_Y Z \\
&= f\,R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)fZ &= \nabla_X\nabla_Y(fZ)-\nabla_Y\nabla_X(fZ)-\nabla_{[X,Y]}(fZ)\\
&= \nabla_X\left(f\nabla_Y Z+Y(f)Z\right)-\nabla_Y\left(f\nabla_X Z+X(f)Z\right)-f\nabla_{[X,Y]}Z-[X,Y](f)Z\\
&= \nabla_X\left(f\nabla_Y Z\right)+\nabla_X\left(Y(f)Z\right)-\nabla_Y\left(f\nabla_X Z\right)-\nabla_Y\left(X(f)Z\right)-f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&\quad -X\left(Y(f)\right)Z+Y\left(X(f)\right)Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z+X(f)\nabla_Y Z+Y(f)\nabla_X Z+X\left(Y(f)\right)Z-f\nabla_Y\nabla_X Z-Y(f)\nabla_X Z\\
&\quad -X(f)\nabla_Y Z-Y\left(X(f)\right)Z-f\nabla_{[X,Y]}Z-X\left(Y(f)\right)Z+Y\left(X(f)\right)Z\\
&= f\,R(X,Y)Z
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem II.2.1:

i-) *R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0*

ii-) *R(X.Y)Z+R(Y.Z)X+R(Z,X)Y=0*

iii-) *g(R(X.Y)Z,W)+g(R(X,Y)W,Z)=0*

iv-) *g(R(X.Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y) [2].*

İspat:

i-)

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= -\left[\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z\right]\\
&= -\left[\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_{[Y,X]}Z\right]\\
&= -R(Y,X)Z\\
&\Rightarrow R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0
\end{aligned}
$$

ii-) *R(X.Y)Z+R(Y.Z)X+R(Z,X)Y*

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[Y,Z]}X\\
&\quad +\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&= \nabla_X\left(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y\right)+\nabla_Y\left(\nabla_Z X-\nabla_X Z\right)+\nabla_Z\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X\right)\\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&= \nabla_X[Y,Z]-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Y[Z,X]-\nabla_{[Z,X]}Y+\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z
\end{aligned}
$$

$R(X.Y)Z+R(Y.Z)X+R(Z,X)Y=[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ *(1.bianchi özdeşliği)*

iii-)

$$g\left(R\left(X,Y\right)Z,W\right)=g\left(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z,W\right) \qquad ...(2.2.1)$$

ve $X\left[g\left(\nabla_Y Z,W\right)\right]=g\left(\nabla_X\nabla_Y Z,W\right)+g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned}g\left(\nabla_X\nabla_Y Z,W\right)&=X\left[g\left(\nabla_Y Z,W\right)\right]-g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)\\&=X\left[Y\left[g\left(Z,W\right)\right]-g\left(Z,\nabla_Y W\right)\right]-g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)\\&=X\left[Y\left[g\left(Z,W\right)\right]\right]-X\left[g\left(Z,\nabla_Y W\right)\right]-g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)\\&=X\left[Y\left[g(Z,W)\right]\right]-g\left(\nabla_X Z,\nabla_Y W\right)-g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y W\right)-g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$g(\nabla_Y\nabla_X Z,W)=Y[X[g(Z,W)]]-g(\nabla_Y Z,\nabla_X W)-g(Z,\nabla_Y\nabla_X W)-g(\nabla_X Z,\nabla_Y W)$ ve

$$\begin{aligned}g(\nabla_{[X,Y]}Z,W)&=[X,Y][g(Z,W)]-g(\nabla_{[X,Y]}W,Z)\\&=W[Z(g(X,Y))]-Y[X(g(W,Z))]-g(\nabla_{[X,Y]}W,Z)\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}g\left(R\left(X,Y\right)Z,W\right)=&X\left[Y\left[Z,W\right]\right]-Y\left[X\left[Z,W\right]\right]-Z\left[W\left[g\left(X,Y\right)\right]\right]+W\left[Z\left[\langle X,Y\rangle\right]\right]\\&-g\left(\nabla_X Z,\nabla_Y W\right)-g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y W\right)-g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)\\&+g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right)+g\left(Z,\nabla_Y\nabla_X W\right)+g\left(\nabla_X Z,\nabla_Y W\right)+g\left(\nabla_{[Z,W]}X,Y\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}g\left(R\left(X,Y\right)W,Z\right)=&X\left[Y\left[W,Z\right]\right]-Y\left[X\left[W,Z\right]\right]-W\left[Z\left[g\left(X,Y\right)\right]\right]+Z\left[W\left[\langle X,Y\rangle\right]\right]\\&-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)-g\left(W,\nabla_X\nabla_Y Z\right)-g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)+g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)\\&+g\left(W,\nabla_Y\nabla_X Z\right)+g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)+g\left(\nabla_{[W,Z]}X,Y\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler *(2.2.1) d*e yerlerine yazılıp uygun sadeleştirmeler yapılacak olursa
$g(R(X.Y)Z,W)+g(R(X,Y)W,Z)=0$
elde edilir.

iv-) I.Bianchi özdeşliğinin iki yanı da W ile skalar çarpılıp düzenlenirse

$$g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)=0$$

olur. Buradan W,Z,X,Y dairesel permütasyonu ile;

$$g(R(Y,W)X,Z)+g(R(W,X)Y,Z)+g(R(X,Y)W,Z)=0$$
$$g(R(W,Z)Y,X)+g(R(Z,Y)W,X)+g(R(Y,W)Z,X)=0$$
$$g(R(Z,X)W,Y)+g(R(X,W)Z,Y)+g(R(W,Z)X,Y)=0$$

Bu dört eşitlik taraf tarafa toplanıp, *(i)* ile *(iii)* de kullanılarak

$$g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$$

elde edilir.

Herhangi $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğunda $E_1,E_2,...,E_n$ koordinat çatıları olmak üzere

$$R(E_k,E_l)E_i=\sum_j R^j_{ikl}E_j \quad ve$$
$$R(E_k,E_l,E_i,E_j)=R_{ijkl}=\sum_s g_{js}R^s_{ikl} \quad ,g_{js}=\langle E_j,E_s\rangle$$

olup, R_{ijkl} ye *Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri* denir. Burada g_{ij} ise *Riemann metriğinin bileşenleri* olup, hem $R(X,Y)Z$ hem de $g(R(X,Y)Z,W)$ U üzerinde lokal olarak tanımlı fonksiyonlardır [2]. Teorem II.2.1, bu bileşenler cinsinden yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç II.2.1 : $\forall\ 1\le i,j,k,l\le n$ için;

i-) $R^j_{ikl}+R^j_{ilk}=0$

ii-) $R^j_{ikl}+R^j_{kli}+R^j_{lik}=0$

iii-) $R_{ijkl}+R_{jikl}=0$

iv-) $R_{ijkl}=R_{klij}$

v-) $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$ *dir [2].*

İspat: ***i-)***

$$\begin{aligned}\sum_j\left(R^j_{ikl}+R^j_{ilk}\right)E_j &=\sum_j R^j_{ikl}E_j+\sum_j R^j_{ilk}E_j\\ &=R(E_k,E_l)E_i+R(E_l,E_k)E_i\\ &=\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i-\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i-\nabla_{[E_k,E_l]}E_i+\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i-\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i-\nabla_{[E_l,E_k]}E_i\\ &=0\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer şıklar da benzer şekilde gösterilebilir.

II.3. Kesit Eğriliği

Riemann eğrilik tensörü $g(R(X,Y)Z,W)$; Riemann geometride önemli rol oynayan kesit eğriliğini tanımlamak için kullanılır. Bir M manifoldunun herhangi bir $p \in M$ noktasındaki kesiti π ile gösterilirse , π ;T_pM nin 2-boyutlu bir alt uzayıdır.

π kesitinin kesit eğriliği $K(\pi)$; X ve Y ortonormal bazıyla şu şekilde tanımlanır:

$$K(\pi) = -R(X,Y,X,Y) = -g(R(X,Y)X,Y)$$

X,Y yerine X', Y' vektör çifti yerleştirilip; simetri ve lineerlik özellikleri de kullanılırsa

$$X' = \alpha X + \beta Y$$
$$Y' = \gamma X + \delta Y$$

olup,

$$\frac{g(R(X',Y')X',Y')}{\Delta^2} = g(R(X,Y)X,Y)$$

dır.

Burada $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ olup, katsayılar determinantıdır. Eğer X', Y' ortonormal ise o zaman $\Delta = \pm 1$ olur, dolayısıyla $K(\pi)$ seçilen vektör çiftlerinden bağımsız olur. Eğer X', Y' herhangi lineer bağımsız vektör çifti olarak alınırsa

$\Delta^2 = \langle X', X' \rangle \langle Y', Y' \rangle - \langle X', Y' \rangle^2$ kullanılarak

$$K(\pi) = -\frac{g(R(X',Y')X',Y')}{\langle X',X'\rangle\langle Y',Y'\rangle - \langle X',Y'\rangle^2} \qquad \textit{...(2.3.1)}$$

bulunur. Lokal koordinatlarda $\langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}$ olup $X' = \sum_i \alpha_i E_i$,$Y' = \sum_j \beta_j E_j$ vektörleri *(2.3.1) d*e yerine yazılırsa

$$K(\pi) = -\frac{\sum R_{ijkl}\alpha_i\beta_j\alpha_k\beta_l}{\sum (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\alpha_i\beta_j\alpha_k\beta_l}$$

elde edilir *[2]*. Gerçekten

$$K(\pi) = -\frac{R\left(\sum \alpha_i E_i, \sum \beta_j E_j, \sum \alpha_k E_k, \sum \beta_l E_l\right)}{\left(\sum_{i,k} \alpha_i\alpha_k g_{ik}\right)\left(\sum_{j,l} \beta_j\beta_l g_{jl}\right) - \left(\sum_{i,j} \alpha_i\beta_j g_{ij}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sum R_{ijkl}\alpha_i\beta_j\alpha_k\beta_l}{\sum\limits_{i,k,l,j}\alpha_i\alpha_k\beta_j\beta_l g_{ik}g_{jl} - \sum\limits_{i,j,k,l}\alpha_i\beta_j\alpha_k\beta_l g_{ij}g_{kl}}$$

$$= -\frac{\sum R_{ijkl}\alpha_i\beta_j\alpha_k\beta_l}{\sum\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right)\alpha_i\alpha_k\beta_j\beta_l}$$

olur.

Teorem II.3.1: *$X,Y \in T_pM$ ve $\{X,Y\}$ lineer bağımsız olsun. X ve Y nin gerdiği düzlem π olsun. K(π) kesit eğriliği X ve Y vektörlerinden bağımsızdır. Daha açıkça ; π düzlemini geren herhangi lineer bağımsız Z ve W vektörleri için;*

$$\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} = \frac{R(Z,W,Z,W)}{g(Z,Z)g(W,W)-g(Z,W)^2}$$

dir [7].

İspat: $Z = aX + bY$, $W = cX + dY$ biçiminde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}
R(Z,W,Z,W) &= R(aX+bY,cX+dY,aX+bY,cX+dY) \\
&= aR(X,cX+dY,aX+bY,cX+dY) + bR(Y,cX+dY,aX+bY,cX+dY) \\
&= acR(X,X,aX+bY,cX+dY) + adR(X,Y,aX+bY,cX+dY) \\
&\quad + bcR(Y,X,aX+bY,aX+dY) + bdR(Y,Y,aX+bY,cX+dY) \\
&= adR(X,Y,aX+bY,cX+dY) + bcR(Y,X,aX+bY,cX+dY) \\
&= (ad-bc)R(X,Y,aX+bY,cX+dY) = (ad-bc)^2 R(X,Y,X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$g(Z,Z)g(W,W)-g(Z,W)^2 = (ad-bc)^2\left(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\right)$$

olur. Bu eşitliklerden teoremin doğru olduğu görülür.

Teorem II.3.2: *Eğer boy M ≥ 3 ve T_pM nin tüm kesitlerinde kesit eğriliği biliniyorsa, o zaman Riemann eğrilik tensörü p noktasında bir tek olarak tanımlıdır [2].*

İspat: $R(X,Y,Z,W)$ ve $\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$ simetri özelliklerini sağlayan iki tensör ve *A(X,Y,Z,W)* de bunların farkı olsun. Bu takdirde *A* da aynı özellikleri taşır.

Kabul edelim ki; $\forall$ X,Y için,

$$R(X,Y,X,Y) = \widetilde{R}(X,Y,X,Y)$$

olsun veya buna denk olarak

$$A(X,Y,X,Y)=0 \qquad \text{...(2.3.2)}$$

olsun. $A(X,Y,Z,W)=0$ olduğunda $\forall\, X,Y,Z,W$ için $A=0$ olduğu gösterilmelidir.

$p \in M$ ve X,Y,Z,W de T_pM de keyfi vektörler olsun. *(2.3.2)* denkleminde X yerine $X+Y$ ve Y yerine Z alınarak,

$$0=A(X+Y,Z,X+Y,Z)=A(X,Z,Y,Z)+A(Y,Z,X,Z)$$

$g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$ olduğundan

$A(X,Z,Y,Z)=0$ elde edilir.

Bu son denklemde Z yerine $Z+W$ yerleştirilerek

$$0=A(X,Z+W,Y,Z+W)=A(X,Z,Y,W)+A(X,W,Y,Z)$$

$g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$ ve $R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$0=A(Y,W,X,Z)+A(X,W,Y,Z)=A(Y,W,X,Z)-A(W,X,Y,Z)$$

olur. Y,W,X,Z değişkenleri X,Y,Z,W şeklinde yeniden isimlendirilirse;

$$A(X,Y,Z,W)=A(Y,Z,X,W)$$

olarak yazılabilir. Bu ise; X,Y,Z nin dairesel permütasyonunun A nın değerini değiştirmeyeceğini gösterir.

$$g(R(X,Y)Z,W)+g(R(X,Y)W,Z)=0$$

olduğu göz önünde bulundurulduğunda;

$$3A(X,Y,Z,W)=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Manifoldlar kesit eğriliklerine göre aşağıdaki şekilde adlandırılabilirler:

Tanım II.3.1: *M bir Riemann manifoldu olmak üzere; bir $p \in M$ noktasındaki her kesit, aynı sabit K_p eğriliğine sahip ise p noktasına* ***izotropik nokta*** *denir. Eğer M manifoldunun her noktası izotropik noktaysa M manifolduna* ***izotropik manifold*** *denir [2].*

Teorem II.3.3: *M nin bir izotropik noktası p ve K_p de bu noktadaki sabit kesit eğriliği olsun. $\{U,\varphi\}$ koordinat komşuluğunun koordinat çatısı $E_1,...,E_n$ olmak üzere Riemann metrik $g_{ij}=\langle E_i,E_j\rangle$ ise p noktasında*

$$R_{ijkl} = -K_p.(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

dır [2].

İspat: $A_{ijkl}(p) = -K_p.(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})(p)$ ...*(2.3.3)*

olsun.

$$A = \sum_{i,j,k,l} A_{ijkl} E_i^* \otimes E_j^* \otimes E_k^* \otimes E_l^*$$

şeklinde tanımlanan A simetri özelliklerini sağlayan bir tensör alanı olur.

$$\begin{aligned} A(X_p, Y_p, Z_p, W_p) &= \sum_{i,j,k,l} A_{ijkl}(p) E_i^*(X_p) E_j^*(Y_p) E_k^*(Z_p) E_l^*(W_p) \\ &= \sum_{i,j,k,l} A_{ijkl}(p) E_j^*(Y_p) E_i^*(X_p) E_k^*(Z_p) E_l^*(W_p) \end{aligned}$$

dir. *(2.3.3)* denklemi A_{jikl} için uygulanırsa

$$\begin{aligned} A_{jikl}(p) = -K_p.(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik})(p) &= K_p.(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})(p) \\ &= -A_{ijkl}(p) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} A(X_p, Y_p, Z_p, W_p) &= -\sum_{i,j,k,l} A_{ijkl}(p) E_i^*(Y_p) E_j^*(X_p) E_k^*(Z_p) E_l^*(W_p) \\ &= -A(Y_p, X_p, Z_p, W_p) \end{aligned}$$

olur. Diğer özelliklerde benzer şekilde gösterilebilir. A tensöründen elde edilen kesit eğriliği K_p dir. Gerçekten $X_p, Y_p \in T_pM$ ve

$$X_p = \sum a_i E_{ip},\ Y_p = \sum b_i E_{ip}, \quad Sp\{X_p, Y_p\} = \pi$$

olmak üzere

$$K(\pi) = \frac{-\sum A_{ijkl}(p) a_i b_j a_k b_l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})(p) a_i a_k b_j b_l} = K_p$$

olur. Teorem II.3.2 den eğrilik tensörü bir tek olarak belirli olduğundan A tensörü Riemann eğrilik tensörüne eşittir.

Tanım II.3.2: *Bir İzotropik Riemann manifoldunun her p noktasında K_p eğriliği aynı ise bu manifolda* ***"sabit eğrilikli manifold"*** *denir [2].*

Öklidyen uzay buna örnek olarak gösterilebilir.

$S^n(r)$ hiperküresi de sabit eğrilikli bir Riemann manifoldudur. $S^n(r)$nin π düzleminin bir ortonormal bazı $\{X,Y\}$ olmak üzere;

$$K(\pi)=g\big(R(X,Y)X,Y\big)=c\in IR$$

olur.

II.4 Ricci Eğriliği ve Skalar Eğrilik

II.4.1 Ricci Eğriliği

Ricci eğriliği, eğrilik operatörünün izi olup *S(X,Y)* ile gösterilecektir *[7]*.

$S(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörü 2.dereceden kovaryant bir tensör ve skalar bir fonksiyondur. Ayrıca ortonormal bazın seçilişinden bağımsızdır ve M üzerinde simetrik C^∞ kovaryant tensör alanı tanımlar. $F_{1p},F_{2p},...,F_{np};p$ de bir ortonormal baz olmak üzere;

$$S:T_pM\times T_pM\rightarrow IR$$

$$(X_p,Y_p)\rightarrow S(X_p,Y_p)=\sum_{i=1}^{n}R(F_{ip},X_p,Y_p,F_{ip})$$

dır *[2]*. Gerçekten $T_p(M)$ uzayının başka bir ortonormal çatısı $\{\overline{F_{1p}},...,\overline{F_{np}}\}$ olmak üzere

$$\overline{F_{jp}}=\sum_k a_{jk}F_{kp}$$

olduğu varsayılırsa

$$\begin{aligned}
R(\overline{F_{ip}},X_p,Y_p,\overline{F_{ip}}) &= \sum_i R\left(\sum_k a_{ik}F_{kp},X_p,Y_p,\sum_t a_{it}F_{tp}\right)\\
&=\sum_{i,k,t}a_{ik}a_{it}R(F_{kp},X_p,Y_p,F_{tp})\\
&=\sum_{k,t}\left(\sum_i a_{ik}a_{it}\right)R(F_{kp},X_p,Y_p,F_{tp})\\
&=\sum_k R(F_{kp},X_p,Y_p,F_{kp})=S(X_p,Y_p)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım II.4.1: *M nin Ricci eğriliği* $S(X,Y)$ *olmak üzere*

$$S(X,Y)=c.g(X,Y)$$

olacak şekilde sabit bir $c \in IR$ *varsa* M *ye* ***Einstein Manifoldu*** *denir [2].*

Sabit eğrilikli uzaylar Einstein manifoldun örnekleridir.

$S^n(r)$ küresi üzerindeki metrikle c= n-1 olan bir Einstein manifoldudur.

II.4.2 Skalar Eğrilik:

Tanım II.4.2: *M üzerinde*

$$\Gamma(p)=\sum_{i,j=1}^{n} R\left(F_{ip},F_{jp},F_{jp},F_{ip}\right)=\sum_{j=1}^{n} S\left(F_{jp},F_{jp}\right)$$

olacak şekilde tanımlı Γ *fonksiyonuna* M *nin* ***"skalar eğriliği"*** *denir [2].*

Ayrıca skalar eğrilik; Ricci eğrilik tensörünün izi olarak da tanımlanır [7].

Lemma II.4.2 (Daraltılmış Bianchi Özdeşliği): *S Ricci eğriliğini,* Γ *skaler eğriliği göstermek üzere*

$$div\, S=\frac{1}{2}\nabla\Gamma$$

dir [7].

Lemma II.4.3 : *Bir Riemann 2-manifoldun Gauss eğriliğinin eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve skalar eğrilikle ilişkisi*

$$R(X,Y,Z,W)=K\left(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\right) \quad ...(2.4.1)$$

$$S(X,Y)=K\langle X,Y\rangle \quad ...(2.4.2)$$

$$\Gamma=2K \quad ...(2.4.3)$$

şeklindedir [7].

İspat: *(2.4.1)* nolu eşitliğin her iki tarafı da bir tensör olup, bazlar cinsinden hesaplanabilirler. T_pM nin herhangi bir ortonormal bazı $\{E_1,E_2\}$ ve $R_{ijkl}=R\left(E_i,E_j,E_k,E_l\right)$ de eğrilik tensörünün bileşenleri olsun. $K=\dfrac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2}$ ifadesi bu bazlar cinsinden yazılırsa; $K=R_{1221}$ olur. Eğrilik tensörünün antisimetri özelliğinden dolayı $i=j$ veya $k=l$ olduğunda R_{ijkl} sıfır olur. Dolayısıyla R nin sadece

$R_{1221}=R_{2112}=-R_{1212}=-R_{2121}=K$

bileşenleri sıfırdan farklı olacaktır. $R(X,Y,Z,W)$, $K(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)$ ile karşılaştırıldığında X,Y,Z,W nin her biri E_1 veya E_2 alınırsa *(2.4.1)* sağlanmış olur.

$R_{ij}=S(E_i,E_j)$ olmak üzere; $\{E_i,E_j\}$ bazına göre Ricci tensörünün bileşenleri;

$R_{ij}=R_{1ij1}+R_{2ij2}$

olur. Buradan

$R_{12}=R_{21}=0;\quad R_{11}=R_{22}=K$

olduğu görülür ki; *(2.4.2)* de sağlanmış olur.

Son olarak skaler eğrilik de

$\Gamma=izS=R_{11}+R_{22}=2K$

olarak bulunur.

II.4.3 Ricci Eğriliğinin ve Skalar Eğriliğin Geometrik Yorumu

Herhangi bir $V\in T_pM$ için $\{E_i\}$ ortonormal baz ve $E_1=V$ olmak üzere Ricci tensörü:

$$S(V,V)=R_{11}=R_{k11}^{k}=\sum_{k=1}^{n}R(E_k,E_1,E_1,E_k)=\sum_{k=2}^{n}K(E_1,E_k)$$

dir*[7]*.

Herhangi bir birim vektör $V\in T_pM$ için $S(V,V)$ Ricci tensörü, V ve ortonormal bazın diğer elemanları tarafından gerilmiş düzlemlerin kesit eğriliklerinin toplamıdır *[7]*.

Diğer taraftan $K(E_j,E_k)$; E_j ve E_k tarafından gerilmiş düzlemin kesit eğriliğini göstermek üzere Γ skalar eğriliği;

$$\Gamma=R_j^j=\sum_{j=1}^{n}S(E_j,E_j)=\sum_{j,k=1}^{n}R(E_k,E_j,E_j,E_k)=\sum_{j\neq k}K(E_j,E_k)$$

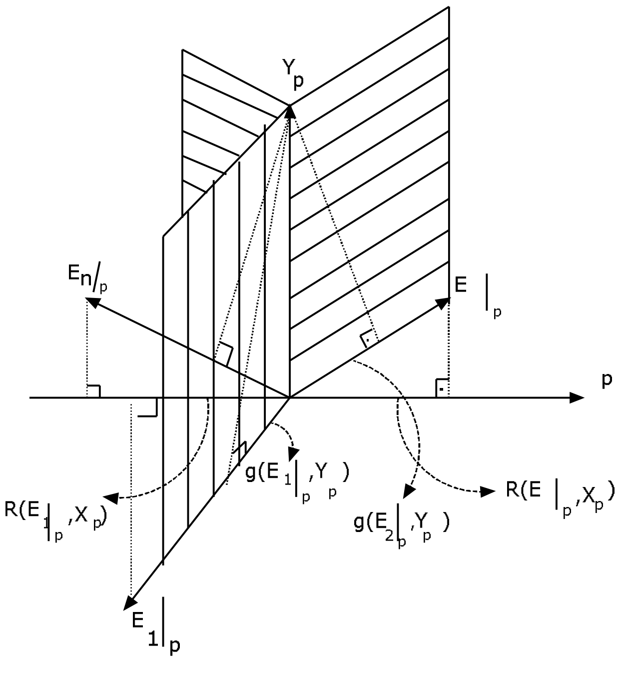
olarak tanımlanır. Skalar eğrilik ortonormal baz çiftleri tarafından gerilen tüm düzlemlerin kesit eğriliklerinin toplamıdır *[7]*.

Ricci eğrilik tensörünün bir $p \in M$ noktasındaki değeri hesaplanırsa;

$$S\left(X_p, Y_p\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} R(E_i\big|_p, X_p)E_i\big|_p, Y_p\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R\left(E_i\big|_p, X_p\right) g\left(E_i\big|_p, Y_p\right)$$

olur. Eğer $\{E_1, ..., E_n\}$ ortonormal baz ise $g\left(E_i\big|_p, Y_p\right)$değeri Y_p nin $E_i\big|_p$ üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğudur. Buna göre $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $E_i\big|_p$ ler üzerindeki Y_p nin dik izdüşümlerinin $R\left(E_i\big|_p, X_p\right)$ katlarının toplamı, *p* noktasındaki Ricci eğriliğini verir *[6]*.



Şekil II.6

II.5 Riemann Alt Manifoldların Eğrilikleri

Bu alt bölümdeki bütün ifadeler izometrik immersiyon kavramına dayalı olarak açıklanacaktır. $f : M \to \widetilde{M}$ bir immersiyon olmak üzere; $\forall X, Y \in T_pM$ için $g\left(f_*(X), g\left(f_*(Y)\right)\right) = g(X, Y)$ ise f bir izometrik immersiyondur *[6]*. Hesaplamaların hepsi lokal olduğundan ve her immersiyon da lokal olarak bir imbedding olduğundan

M, $\tilde{M}$ nın bir imbedded Riemann alt manifoldu olduğu kabul edilecektir. g ve $\tilde{g}$ metriği yerine de $\langle X, Y \rangle$ iç çarpım notasyonu tercih edilecektir.

$T\tilde{M}\big|_M = \bigcup_{p \in M} T_p \tilde{M}$, M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör demeti oluşturmaktadır. $\tilde{M}$ üzerindeki herhangi diferensiyellenebilir bir vektör alanı, $T\tilde{M}\big|_M$ nin bir kesitine kısıtlanabilir. Tersine $T\tilde{M}\big|_M$ nin bir X kesiti de $T\tilde{M}$ nin bir kesitine genişletilebilir.

$\forall p \in M$ için $N_p M = \left(T_p M\right)^{\perp}$; $T_p \tilde{M}$ üzerinde p noktasındaki normal uzay olmak üzere

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus N_p M$$

yazılabilir *[7]*. $NM = \bigcup_{p \in M} N_p M$ normal demeti de M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör demeti oluşturur.

TM üzerindeki herhangi *X, Y* vektör alanları $\tilde{M}$ üzerindeki vektör alanlarına genişletilebilir. Öyleyse M nin noktalarına $\tilde{M}$ üzerindeki $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev operatörünü uygulanır ve düzenleme yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\mathrm{T}} + \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp} \qquad ...(2.5.1)$$

yazılabilir *[7]*. *X,Y;* $\tilde{M}$ ye genişletilmiş vektör alanları olmak üzere; M nin ikinci temel formu

$$II : TM \times TM \to NM$$

$$(X,Y) \to II(X,Y) = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}$$

olarak tanımlanır ve M boyunca

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y) \qquad \text{(Gauss Formülü)}$$

dir *[7]*. Gerçekten 2. temel formun $\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}$ bileşenine eşit olduğu ve *(2.5.1)* eşitliği göz önünde bulundurulduğunda Gauss formülünün ispat edilebilmesi için , $\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{T} = \nabla_X Y$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\nabla^{T} = T(M) \times T(M) \to T(M)$$

$$(X,Y) \to \nabla^{T}(X,Y) = \nabla^{T}_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{T}$$

∇^T , M üzerinde bir konneksiyondur. Eğer ∇^T nin simetrik, g ile uyumlu ve M üzerinde bir tek olduğu gösterilirse; $\nabla^T = \nabla$ olduğu gösterilmiş olur.

∇^T nin simetrik olduğunu görmek için , $\tilde{\nabla}$ nin simetrikliği ve $[X,Y]$ nin M ye teğet olduğu kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}\nabla^T_X Y - \nabla^T_Y X &= \left(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X\right)^T \\ &= [X,Y]^T = [X,Y].\end{aligned}$$

Konneksiyonun g ile uyumluluğunu ispatlamak için keyfi olarak $\tilde{M}$ e genişletilmiş $X, Y, Z \in T(M)$ alınsın. $\tilde{\nabla}$ nin $\tilde{g}$ ile uyumluluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle &= \left\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^T, Z\right\rangle + \left\langle Y, \left(\tilde{\nabla}_X Z\right)^T\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla^T_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \nabla^T_X Z\right\rangle\end{aligned}$$

olduğu görülür. Üstelik ∇^T , g ile uyumlu olduğundan $\nabla^T = \nabla$ olacaktır.

İkinci temel form, M ye teğet vektör alanlarının kovaryant türevleri cinsinden yazılabilmesine karşın normal vektör alanlarının kovaryant türevlerini değerlendirmek için de kullanılır. Bununla ilgili lemma aşağıda verilmiştir:

Lemma II.5.1 (Weingarten Denklemi) : *$X, Y \in T(M)$ ve $N \in N(M)$ olsun. X, Y , N ; $\tilde{M}$ e keyfi olarak genişletildiği zaman , M nin her noktası için şu eşitlik yazılabilir:*

$$\left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle = -\langle N, II(X,Y)\rangle \quad [7].$$

İspat: M boyunca $\langle N,Y\rangle = 0$ olup;

$$\begin{aligned}0 &= X\langle N,Y\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \left\langle N, \tilde{\nabla}_X Y\right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, \nabla_X Y + II(X,Y)\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, II(X,Y)\rangle\end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem esas manifoldun eğrilik tensörü ile alt manifoldun eğrilik tensörü arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Teorem II.5.2 (Gauss Denklemi) : $\forall X,Y,Z,W \in T_pM$ *için*

$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle$ *dir [7].*

İspat: $\forall X,Y,Z,W \in T_pM$ için M boyunca Gauss formülüne göre;

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= \left\langle \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z, W \right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + II(Y,Z)) - \widetilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + II(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]} Z + II([X,Y],Z)), W \right\rangle\end{aligned}$$

olur. İkinci temel form, normal demette değer aldığından ve *W*, *M* ye teğet olduğundan son *II* li terim sıfır olacaktır. *II(Y,Z)* veya *II(X,Z) ; N* nin rolünü oynayacağından

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= \left\langle \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z, W \right\rangle - \left\langle II(Y,Z), II(X,W) \right\rangle - \left\langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \right\rangle \\ &\quad + \left\langle II(X,Z), II(Y,W) \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \right\rangle\end{aligned}$$

olacaktır. $\widetilde{\nabla}$ nin her bir terimi teğet ve normal bileşenleri cinsinden yeniden düzenlenirse, sadece teğet bileşenleri kalır. Gauss formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle \\ &\quad - \langle II(Y,Z), II(X,W) \rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W) \rangle \\ &= \langle R(X,Y)Z, W \rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z) \rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W) \rangle\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

III. BÖLÜM

GAUSS'UN EGREGİUM TEOREMİ ÜZERİNE

Bu teorem bir manifoldun bazı özelliklerinin izometriler altında korunduğu fikrine dayanır. Pek çok önemli fikre zemin oluşturduğundan "muhteşem" anlamına gelen "Egregium" adı verilmiştir. Egregium teoremine geçmeden önce, teoremin daha iyi anlaşılmasına ve uygulanmasına yardımcı olacak teoremler sunulacaktır:

Teorem III.1.1: *E^3te M ve N iki yüzey , $F:M\rightarrow N$ bir C^1 dönüşüm ve $x:U\subset E^2\rightarrow M$, $\bar{x}=F\circ x:U\subset E^2\rightarrow N$ birer harita olsun. E, F ve G, M nin; $\overline{E},\overline{F}$ ve $\overline{G}$ de N nin 1.temel formunun bileşenlerini göstersin. Buna göre F nin lokal izometri olması için gerek ve yeter şart $E=\overline{E},\ F=\overline{F},\ \ G=\overline{G}$ olmasıdır [1].*

İspat:

$(\Rightarrow)$: F lokal izometri olsun. O zaman;

$$\overline{x_u}=F_*(x_u)\ ,\ \overline{x_v}=F_*(x_v)$$

yazılabilir. Buna göre F_* iç çarpımı koruyacağından;

$$\overline{E}=\left\langle \overline{x_u},\overline{x_u}\right\rangle=\left\langle F_*(x_u),F_*(x_u)\right\rangle=\left\langle x_u,x_u\right\rangle=E$$

$$\overline{F}=\left\langle \overline{x_u},\overline{x_v}\right\rangle=\left\langle F_*(x_u),F_*(x_v)\right\rangle=\left\langle x_u,x_v\right\rangle=F$$

$$\overline{G}=\left\langle \overline{x_v},\overline{x_v}\right\rangle=\left\langle F_*(x_v),F_*(x_v)\right\rangle=\left\langle x_v,x_v\right\rangle=G$$

olur.

$(\Leftarrow)$: $E=\overline{E},\ F=\overline{F},\ \ G=\overline{G}$ olsun.

$x:U\subset E^2\rightarrow M$ haritası için $p\in M$ noktasının dahil olduğu komşuluk *v=x(U)* olsun. $\forall x_p,y_p\in T_pM$ için $T_pM\ =\ Sp\left\{x_u\,,\,x_v\right\}$ olduğundan;

$$x_p=a\,x_u+b\,x_v$$

$$y_p=c\,x_u+d\,x_v \qquad (a,b,c,d\in IR)$$

yazılabilir. F nin lokal izometri olduğunu göstermek için

$$\left\langle F_*(x_p),F_*(y_p)\right\rangle=\left\langle x_p,y_p\right\rangle$$

olduğu gösterilmelidir. O halde

$$\left\langle F_*(x_p), F_*(y_p) \right\rangle = \left\langle F_*(ax_u + bx_v), F_*(cx_u + dx_v) \right\rangle$$

ve F_* lineer olduğundan

$$=\left\langle a\overline{x_u} + b\overline{x_v}, c\overline{x_u} + d\overline{x_v} \right\rangle$$

$$= ac\overline{E} + (ad + bc)\overline{F} + bd\overline{G}$$

elde edilir. $E = \overline{E},\ F = \overline{F}, G = \overline{G}$ olduğundan;

$$= ac\ E + (ad+bc)\ F + bd\ G$$

$$= ac\ \left\langle x_u, x_u \right\rangle + (ad + bc)\left\langle x_u, x_v \right\rangle + bd\left\langle x_v, x_v \right\rangle$$

$$= \left\langle x_p, y_p \right\rangle$$

olur. Bu da *F* nin iç çarpımları koruması, dolayısıyla lokal izometri olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur .

F bir lokal izometri ise *F* regüler bir dönüşümdür. O halde; $\forall p \in M$ için *p* nin *M* de yatan bir *U* komşuluğu mevcut olup bu komşuluk *F* tarafından *N* deki *F(p)* nin bir *V* komşuluğuna diffeomorfik olarak resmedilir. Demek oluyor ki; $F{:}M \to N$ lokal izometrisi E^3 te başlı başına birer yüzey olacağından *U* ile *V* yüzeyleri arasında bir izometri olarak düşünülebilir *[1]*.

Teorem III.1.2 (Gauss Formülleri): $M \subset IR^3$ *yönlendirilmiş bir yüzey ve* $x : U \subset E^2 \to M$ *bir parametrelendirme olsun.* $1 \le i, j \le 2$ *için;*

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij} x_1 + \Gamma^2_{ij} x_2 + l_{ij} N \qquad \text{...(III.1.1)}$$

dir [12].

İspat: $\{x_1, x_2, N\}, IR^3$ ün bir bazı olmak üzere;

$$x_{ij} = P^1_{ij} x_1 + P^2_{ij} x_2 + Q_{ij} N \qquad \text{...(III.1.2)}$$

olacak şekilde P^k_{ij} ve Q_{ij} sayıları vardır. Bu eşitlikte her iki tarafın bu bazlara göre sırasıyla iç çarpımı alınırsa $g_{ij} = \left\langle x_i, x_j \right\rangle$ yi göstermek üzere;

$$\left\langle x_{ij}, x_1 \right\rangle = P^1_{ij} g_{11} + P^2_{ij} g_{12} \qquad \text{...}(III.1.3)$$

$$\left\langle x_{ij}, x_2 \right\rangle = P^1_{ij} g_{21} + P^2_{ij} g_{22} \qquad \text{...}(III.1.4)$$

$$\left\langle x_{ij}, N \right\rangle = Q_{ij} \qquad \text{...}(III.1.5)$$

$l_{ij} = II(x_i, x_j) = \left\langle S(x_i), x_j \right\rangle = -\left\langle D_{x_i} N, x_j \right\rangle = -\left\langle N_i, x_j \right\rangle$ olduğundan *(III.1.5)* eşitliği göz önünde bulundurulduğunda $Q_{ij} = l_{ij}$ olur *[12]*.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij}^1 \\ P_{ij}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle x_{ij}, x_1 \right\rangle \\ \left\langle x_{ij}, x_2 \right\rangle \end{bmatrix}$$

olur.

$$\left\langle x_{ij}, x_k \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right\}$$

olduğundan *[12]*,

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij}^1 \\ P_{ij}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\left[g_{ij} \right]^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} P_{ij}^1 \\ P_{ij}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $g^{kr}, \left[g_{kr} \right]$ matrisinin tersinin bileşenleri olmak üzere;

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r} \right)$$

olduğu göz önüne alınarak *[12]*,

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $P_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ olduğu görülür *[12]*.

Teorem III.1.3 (Gauss'un Egregium Teoremi):

Bir yüzeyin K Gauss eğriliği, lokal izometriler tarafından korunur [8].

İspat: M regüler ve yönlendirilmiş bir yüzey, $x : U \subset E^2 \to M$ ise M'de bir parametrelendirme olsun. $\{x_u, x_v, N\}$ bazı göz önünde bulundurularak, bu vektörlerin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= \Gamma_{11}^{1} x_u + \Gamma_{11}^{2} x_v + L_1 N \\
x_{uv} &= \Gamma_{12}^{1} x_u + \Gamma_{12}^{2} x_v + L_2 N \\
x_{vu} &= \Gamma_{21}^{1} x_u + \Gamma_{21}^{2} x_v + \overline{L_2} N \\
x_{vv} &= \Gamma_{22}^{1} x_u + \Gamma_{22}^{2} x_v + L_3 N \\
N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v \\
N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v
\end{aligned}$$

...*(III.1.6)*

elde edilir. Buradaki Γ_{ij}^{k} bileşenleri M nin x parametresine göre Christoffel sembolleridir. Ayrıca;

$$x_{uv} = x_{vu}$$

olduğu için;

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} \quad ve \ \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2}$$

olduğu sonucuna varılır ki Christoffel sembolleri alt indise göre simetriktir. *(III.1.6)* daki ilk 4 eşitliğin N ile iç çarpımı alınırsa $\langle x_{uu}, N \rangle = l = L_1$ olur ve benzer şekilde $m = L_2 = \overline{L_2}$, $n = L_3$ bulunur. Burada l, m ve n M nin 2.temel formunun bileşenleridir.

Christoffel sembollerini tanımlamak için *(III.1.6)* nın ilk dört eşitliğinin her iki tarafının x_u ve x_v ile iç çarpımları alınarak

$$\Gamma_{11}^{1} E + \Gamma_{11}^{2} F = \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u$$

$$\Gamma_{11}^{1} F + \Gamma_{11}^{2} G = \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^{1} E + \Gamma_{12}^{2} F = \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^{1} F + \Gamma_{12}^{2} G = \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_u$$

$$\Gamma_{22}^{1}E+\Gamma_{22}^{2}F=\langle x_{vv},x_u\rangle=F_v-\frac{1}{2}G_u$$
$$\Gamma_{22}^{1}F+\Gamma_{22}^{2}G=\langle x_{vv},x_v\rangle=\frac{1}{2}G_v \qquad \ldots(III.1.7)$$

elde edilir. Dikkat edilirse *(III.1.7)* deki denklemler üç çift olarak gruplandırıldı ve her bir denklem sisteminin determinantı $EG\text{-}F^2\neq 0$ dır. Böylece Christoffel sembollerinin1.temel formun *E,F,G* bileşenleri ve onların türevleri cinsinden hesaplanabildiği görülür.

$$(x_{uu})_v-(x_{uv})_u=0$$
$$(x_{vv})_u-(x_{vu})_v=0$$
$$N_{uv}-N_{vu}=0 \qquad \ldots(III.1.8)$$

eşitlikleri yazılabileceğinden *(III.1.6)* daki değerler *(III.1.8)* in birincisinde kullanılırsa

$$\Gamma_{11}^{1}x_{uv}+\Gamma_{11}^{2}x_{vv}+lN_v+\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v x_u+\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v x_v+l_vN$$
$$=\Gamma_{12}^{1}x_{uu}+\Gamma_{12}^{2}x_{vu}+mN_u+\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u x_u+\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u x_v+m_uN \qquad \ldots(III.1.9)$$

olur. *(III.1.9)* eşitliğinde *(III.1.6)* daki değerler kullanılırsa x_v nin bileşenlerinin denklemi

$$\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}+la_{22}+(\Gamma_{11}^{2})_v=\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}+ma_{21}+(\Gamma_{12}^{2})_u$$

dur. Bu durumda

$$\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u-\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v+\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}=-E\frac{l\,n-m^2}{EG-F^2}$$
$$=-EK \qquad \ldots(III.1.10)$$

elde edilir *[8].*

İspatı tamamlamak için; *M* ve *N* yönlendirilmiş yüzeyler olmak üzere; $F:M\to N$ lokal izometrisi için $E=\overline{E}$, $F=\overline{F}$, $G=\overline{G}$ dir. $\forall\, p\in U$ için; *(III.1.10)* nolu eşitlik göz önünde bulundurulduğunda Gauss eğriliği *K* nın *E,F,G* ile onların 1. ve 2. kısmi türevleri cinsinden yazıldığı görülür. Bu da *M* nin *p* noktasındaki eğriliğinin *N* nin *F(p)* noktasındaki eğriliğine eşit olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Kısaca özetlenecek olursa;

Gauss'un Egregium teoremi eğriliğin imbedingten bağımsız olup konneksiyona ve Riemann eğriliğine bağlı olduğunu gösterir *[10]*.

Teorem III.1.4(Egregium Teoreminin Genelleştirilmişi):

E^n, n- boyutlu Öklid uzayının bir (n-1)-alt manifoldunun Gauss anlamındaki eğrilik operatörü birinci mertebeden bir diferensiyel formdur [1].

n=3 özel halinde şu teorem verilebilir:

Teorem III.1.5 : *E^3 te bir M yüzeyinin K Gauss eğriliği,;*

$$K(p) = \det S_p = \left\langle \overline{R}(X_p, Y_p)Y_p, X_p \right\rangle$$

dir [1]. Burada $\{X, Y\}$ $\chi(M)$nin bir ortonormal bazıdır.

İspat: $\overline{R}(X_p, Y_p)Z_p$ ifadesinde $Z_p = Y_p$ alınırsa Gauss eğrilik denkleminden

$$\overline{R}(X_p, Y_P)Y_P = \left\langle S(Y_p), Y_p \right\rangle S(X_p) - \left\langle S(X_p), Y_p \right\rangle S(Y_p)$$

yazılabilir. Öyleyse

$$\overline{R}(X_p, Y_P)Y_P = \det \begin{bmatrix} S(X_p) & S(Y_p) \\ \left\langle S(X_p), Y_p \right\rangle & \left\langle S(Y_p), Y_p \right\rangle \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\{X_p, Y_p\}$ sistemi ortonormal olduğundan M üzerinde asli eğrilik doğrultularına karşılık tutulabilir. O halde

$S(X_p) = k_1(p)X_p$ ve

$S(Y_p) = k_2(p)Y_p$

olarak alınabilir. O zaman

$$\left\langle S(X_p), X_p \right\rangle = k_1(p)\left\langle X_p, X_p \right\rangle = k_1(p)$$
$$\left\langle S(Y_p), Y_p \right\rangle = k_2(p)\left\langle Y_p, Y_p \right\rangle = k_2(p)$$
$$\left\langle S(X_p), Y_p \right\rangle = \left\langle S(Y_p), X_p \right\rangle = 0$$

olacağından

$$\overline{R}(X_p,Y_p)Y_p=\det\begin{bmatrix} k_1(p)X_p & k_2(p)Y_p \\ & \\ 0 & k_2(p)\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{k}_1(p)k_2(p)X_p$$

$$=\det S_p X_p$$

$$\Rightarrow\left\langle \overline{R}(X_p,Y_p)Y_p,X_p\right\rangle=\det S_p=K_p$$

bulunur. Bu özel halden görüldüğü gibi Gauss eğriliği *K(p)* sadece $\langle,\rangle$ metriğine ve $\overline{D}$ kovaryant türevine bağlıdır, fakat *M* nin *N* normal vektör alanı ile *S* şekil operatörüne bağlı değildir. Bunun anlamı; Gauss eğriliği *K(p)* nin *M* yüzeyinin diferensiyel değişmezi olmasıdır *[1]*.

Örnek III.1 :

M_1 bir düzlem ve M_2 de IR^3 Öklid uzayında r yarıçaplı dik dairesel silindir olsun. M_2 silindiri, M_1 düzlemi üzerinde dönderildiğinde silindir üzerindeki eğrilerin uzunlukları veya kesişen eğriler arasındaki açı değişmeyeceğinden bunlar arasında bir izometrinin varlığı söz konusudur. Gerçekten

M_1:E^2 bir düzlem ve $M_2:C=\{(x,y,z)\in E^3\,/\,x^2+y^2=r^2\}$ silindir olmak üzere

$F:E^2\to C$ dönüşümünü ele alalım. E^2 de

$$X\!:IR^2\to E^2$$
$$(u,v)\to X(u,v)=(u,v)$$

haritasına göre $X_u=(1,0)$, $X_v=(0,1)$ olduğundan

$$E=\langle X_u,X_u\rangle=1$$
$$F=\langle X_u,X_v\rangle=0$$
$$G=\langle X_v,X_v\rangle=1$$

olur. C=$\{(x,y,z)\in E^3\,/\,x^2+y^2=r^2\}$ silindirinin parametrik denklemi;

$$x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta\ ,z=t\ ,\ t\in IR$$

olmak üzere

$$X:IR^2\to E^3$$
$$(\theta,t)\to X(\theta,t)=(r\cos\theta,r\sin\theta,t)$$

dir. X=F alınırsa

$$F : E^2 \to C$$

$$(\text{u,v}) \to F(u,v) = \left(r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}, v \right)$$

$$F_*(X_u) = F_u = (-\sin\frac{u}{r}, \cos\frac{u}{r}, 0)$$

$$F_*(X_v) = F_v = (0,0,1)$$

olacağından; silindirin 1.temel formunun bileşenleri $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ ile gösterilecek olursa;

$$\overline{E} = \langle F_*(X_u), F_*(X_u) \rangle = \sin^2\frac{u}{r} + \cos^2\frac{u}{r} = 1$$
$$\overline{F} = \langle F_*(X_u), F_*(X_v) \rangle = 0$$
$$\overline{G} = \langle F_*(X_v), F_*(X_v) \rangle = 1$$

olur. O halde $\overline{E} = E = 1$, $\overline{F} = F = 0$, $\overline{G} = G = 1$ olduğundan F bir lokal izometridir *[1]*.

Düzlemin şekil operatörü $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup, K=0 olduğundan teoreme göre silindirin de Gauss eğriliği K=0 olmalıdır. Silindir için şekil operatörü; $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$ olup normal kesitlerin eğrilikleri 0 ile $\frac{1}{r}$ arasında değişir. Burada Gauss eğriliği K=0 dır ve sadece M üzerindeki Riemann metriğine bağlıdır *[2]*.

Örnek III.2: Katenoid ve helisoid yüzeylerini ele alalım. $0 \prec u \prec 2\pi$, $-\infty \prec v \prec \infty$ olmak üzere katenoidin parametrik denklemi

$$X_1(u,v) = (\text{a coshv cosu, a coshv sinu, av})$$

olup $X_{1v} = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a)$

$$X_{1u} = (-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)$$

$$E = \langle X_{1u}, X_{1u} \rangle = a^2\cosh^2 v$$

$$F = \langle X_{1u}, X_{1v} \rangle = 0$$
$$G = \langle X_{1v}, X_{1v} \rangle = a^2(1+\sinh^2 v) = a^2\cosh^2 v$$

olarak bulunur.

$0 \prec \tilde{u} \prec 2\pi$,$-\infty \prec \tilde{v} \prec \infty$ olmak üzere helisoidin parametrik denklemi $X_2(\tilde{u},\tilde{v})$=$(\tilde{v}\cos\tilde{u},\tilde{v}\sin\tilde{u},a\tilde{u})$ dir. $\tilde{u}=u,\tilde{v}=a\sinh v$ parametre dönüşümü yapıldığında helisoidin yeniden parametrelendirilmiş şekli;

(Bu dönüşümü yapmak mümkündür. Çünkü; dönüşüm 1:1 dir ve jakobiyeni $\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}=a\cosh v$ her yerde sıfırdan farklıdır.)

$$X_2(u,v)=(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$
$$X_{2u}=(-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, a)$$
$$X_{2v}=(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, 0)$$

olacaktır. $\overline{E},\overline{F},\overline{G}$ helisoidin 1.temel formunun bileşenleri olmak üzere;

$$\overline{E}=\langle X_{2u},X_{2u}\rangle=a^2\cosh^2 v$$
$$\overline{F}=0$$
$$\overline{G}=a^2\cosh^2 v$$

dir. $E=\overline{E},\ F=\overline{F},\ G=\overline{G}$ olduğundan helisoid ve katenoid lokal olarak izometriktir. Bunların birbirine karşılık gelen noktalarda Gauss eğriliklerini inceleyelim. Katenoid için

$$X_{1u}=(-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)$$
$$X_{1uu}=(-a\cosh v\cos u, -a\cosh v\sin u, 0)$$
$$X_{1v}=(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a)$$
$$X_{1vv}=(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, 0)$$
$$X_{1vu}=(-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, 0)$$

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}$$

$$X_{1u}\times X_{1v}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\cosh v\sin u & a\cosh v\cos u & 0 \\ a\sinh v\cos u & a\sinh v\sin u & a \end{vmatrix}$$
$$=a^2\cosh v(\cos u,\sin u,-2\sinh v)$$

$$\|X_{1u}\times X_{1v}\|=a^2\cosh^2 v\sqrt{2+4\sinh^2 v}$$

$$N=\frac{(\cos u,\sin u,-2\sinh v)}{\sqrt{2+4\sinh^2 v}}$$

$$l = \langle N, X_{1uu} \rangle = -a\cosh v$$
$$m = \langle N, X_{1uv} \rangle = 0$$
$$n = \langle N, X_{1vv} \rangle = a\cosh v$$
$$K_1 = \frac{l\,n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{a^2 \cosh^2 v}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde helisoid için

$$X_{2u} = (-a\sinh v \sin u, a\sinh v \cos u, a)$$
$$X_{2uu} = (-a\sinh v \cos u, -a\sinh v \sin u, 0)$$
$$X_{2v} = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, 0)$$
$$X_{2vv} = (a\sinh v \cos u, a\sinh v \sin u, 0)$$
$$X_{2vu} = (-a\cosh v \sin u, a\cosh v \cos u, 0)$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

$$X_{2u} \times X_{2v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sinh v \sin u & a\sinh v \cos u & a \\ a\cosh v \cos u & a\cosh v \sin u & 0 \end{vmatrix}$$
$$= a^2 \cosh v(-\sin u, \cos u, -2\sinh v)$$

$$\|X_{2u} \times X_{2v}\| = a^2 \sqrt{\cosh^2 v + 4\sinh^2 v \cosh^2 v}$$

$$N = \frac{(-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, -2\sinh v \cosh v)}{\sqrt{\cosh^2 v + 4\sinh^2 v \cosh^2 v}}$$
$$l = \langle N, X_{2uu} \rangle = 0$$
$$m = \langle N, X_{2uv} \rangle = a^2 \cosh^2 v$$
$$n = \langle N, X_{2vv} \rangle = 0$$

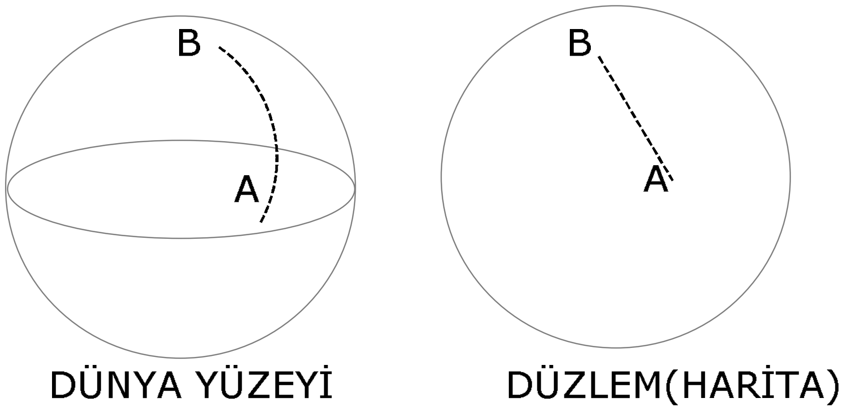
olup $K_2 = \dfrac{l\,n - m^2}{EG - F^2} = -\dfrac{1}{a^2 \cosh^2 v}$ elde edilir. Görüldüğü gibi Gauss eğrilikleri eşittir.

Örnek III.3: $M_1; R$ yarıçaplı bir kürenin herhangi açık alt kümesi ve $M_2 de$ bir düzlem olsun. Küre için; $K_1 \equiv \dfrac{1}{R^2} \neq 0$ ve düzlem için $K_2 \equiv 0$ olduğundan teoreme göre M_1 ile M_2 arasında izometri olan bir diffeomorfizm yoktur.

Örneğin; kürenin bir parçasının herhangi bir düzleme dönüşümünde uzaklık veya eğrilerin uzunluğu, açılar, alanlar gibi bazı metrik özellikler bozulur.

Fakat birbirine izometrik olup kongrüent olmayan yüzeyler de vardır. Örneğin; ince pirinç bir tabakadan yapılmış üst yarımküre ele alınacak olursa bu yarımküre, herhangi bir kırılma vs. olmadan kenarından tutularak eğilebilir. Yapılan bu işlem yarım küre üzerindeki eğrilerin uzunluklarını değiştirmeyeceğinden orijinaline izometrik bir yüzey elde edilecektir. Dolayısıyla birbirine karşılık gelen noktalarda bu iki yüzeyin gauss eğrilikleri aynıdır, fakat bu yüzeyler kongrüent değildir. Çünkü; dairesel kenar ovale dönüşmüştür *[2]*.

Sonuç III.1:

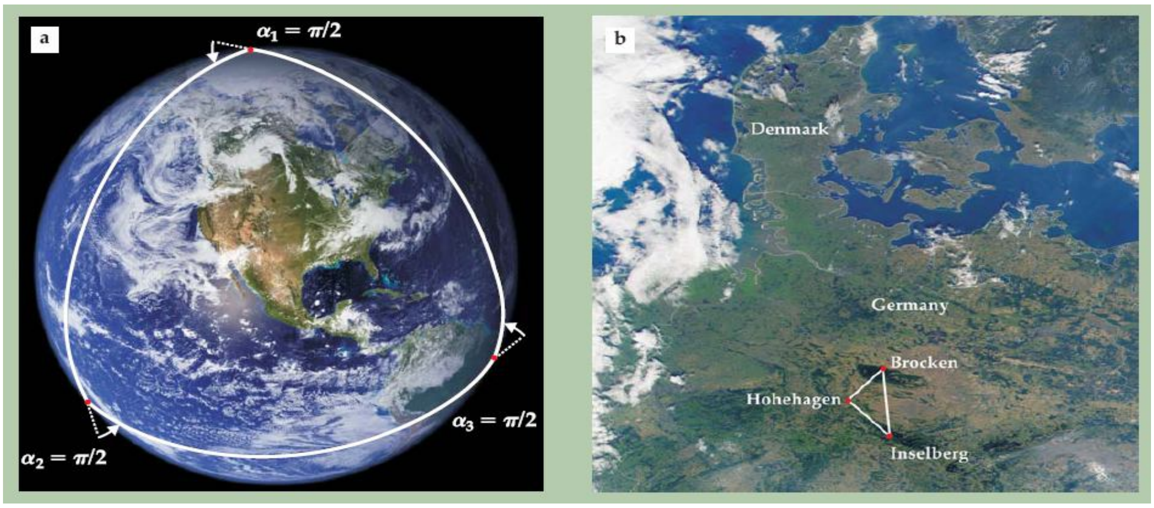


Şekil III.1

Kürenin gauss eğriliği pozitif, düzlemin eğriliği ise sıfır olduğundan bunlar arasında bir izometri yoktur. Yani; küresel dünya yüzeyinin bir düzlem üzerine coğrafik nesneler arasındaki mesafeleri bozmadan bir haritasını yapmak mümkün değildir. Eğer;
•Açıların orijinal yüzeydeki büyüklükleri korunuyorsa **açı koruyan (konform) projeksiyon,**
•Alan korunuyorsa **alan koruyan (equivalent) projeksiyon,**
•Hem açı, hem alan korunuyorsa (uzunluklar da korunmuş olur) **izometrik projeksiyon** denir.
Kürenin düzlem üzerine, açı koruyan ve alan koruyan projeksiyonu yapılabilir. Egregium teoreminin sonucuna göre; izometrik projeksiyonu yapılamaz *[17]*.

Uygulama: Gauss'un en ünlü coğrafik ölçümü şekil III.2 de görülen üç dağ arasında en kısa yolu takip ederek çizilmiş üçgenle ilgili ölçümdür. Gauss küre üzerindeki üçgenlerin iç açı toplamlarını hesaplamış ve π radyandan büyük olduğunu görmüştür.

Halbuki düzlem üzerindeki bir üçgenin iç açıları toplamının π radyan olduğu bilinmektedir. Nitekim Egregium teoremine göre de böyle bir sonuç beklenmektedir.



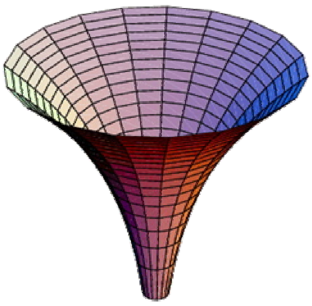
Şekil III.2

(a)Bu şekilde üçgenin iç açıları toplamının $\frac{3\pi}{2}$ radyan olduğu görülmüştür *[13]*.

(b)Dünya yüzeyinin en geniş üçgeni Gauss tarafından ölçülmüştür *[13]*.

Egregium teoreminin tersi doğru değildir. Yani; birbirine karşılık gelen noktalarda gauss eğrilikleri eşit olan yüzeyler arasında izometri mevcut olmayabilir.

Örnek III.3:



Şekil III.3 (Funnel Yüzeyi)

$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u)$ Funnel yüzeyi için;

$$X_u = \left(\cos v, \sin v, \frac{1}{u}\right)$$

$$X_{uu} = \left(0, 0, \frac{-1}{u^2}\right)$$

$$X_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$
$$X_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$
$$X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1+u^2}$$
$$N = \frac{(-\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$E = \frac{u^2+1}{u^2} \;, F = 0,\; G = u^2$$

$$l = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{(-\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, \left(0, 0, \frac{-1}{u^2}\right) \right\rangle = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$m = \langle N, X_{uv} \rangle = \left\langle \frac{(-\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, (-\sin v, \cos v, 0) \right\rangle = 0$$

$$n = \langle N, X_{vv} \rangle = \left\langle \frac{(-\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, (-u\cos v, -u\sin v, 0) \right\rangle = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$K_1 = \frac{l\,n - m^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{-1}{1+u^2}}{u^2+1} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

olarak bulunur. $\tilde{X}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ helisoid yüzeyi için de benzeri hesaplamalar yapılırsa

$$\tilde{X}_u = (\cos v, \sin v, 0)$$
$$\tilde{X}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$
$$\tilde{X}_{uu} = (0,0,0)$$
$$\tilde{X}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$
$$\tilde{X}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u)$$

$$\left\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\right\| = \sqrt{1+u^2}$$

$$N = \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\left\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\right\|} = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\tilde{E} = \left\langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \right\rangle = 1$$

$$\tilde{F} = \left\langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \right\rangle = 0$$

$$\tilde{G} = \left\langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \right\rangle = u^2 + 1$$

$$\tilde{l} = \left\langle N, \tilde{X}_{uu} \right\rangle = \left\langle \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, (0,0,0) \right\rangle = 0$$

$$\tilde{m} = \left\langle N, \tilde{X}_{uv} \right\rangle = \left\langle \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, (-\sin v, \cos v, 0) \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\tilde{n} = \left\langle N, \tilde{X}_{vv} \right\rangle = \left\langle \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, (-u\cos v, -u\sin v, 0) \right\rangle = 0$$

$$K_2 = \frac{\tilde{l}\tilde{n} - \tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{u^2+1} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

bulunur. Görüldüğü gibi $K_1 = K_2$ olduğu halde; bu iki yüzey arasında izometri yoktur. Gerçekten; $E \neq \tilde{E}, F = \tilde{F}, G \neq \tilde{G}$ olması da böyle bir izometrinin var olmadığını gösterir. Yani; teoremin tersi doğru değildir.

Teorem III.1.6 : $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ *olmak üzere;*

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$$

eşitliğiyle tanımlanan R fonksiyonu M üstünde dördüncü dereceden kovaryant tensör alanıdır. M_1 *ve* M_2 *Riemann manifoldları ve* $F: M_1 \to M_2$ *bir izometri ise;*

$F^*(R_2) = R_1$ *dir [2].*

İspat: Herhangi $p \in M$ için $R(X_p, Y_p)Z_p \in T_pM$ olduğundan;

$$R_p(X_p, Y_p, Z_p, W_p) = g(R(X_p, Y_p)Z_p, W_p)$$

eşitliği, T_pM üstünde dördüncü dereceden R_p kovaryant tensörünü tanımlar. Buna göre R, M üstünde dördüncü dereceden bir kovaryant tensör alanıdır. $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir izometri olduğundan Riemann metriğini korur. $M_1 \, ve M_2$ üstündeki $\nabla^1 \, ve \nabla^2$ konneksiyonları, Riemann metriğiyle tek olarak belirli olduğundan,

$$F_*\left(\nabla^1_X Y\right) = \nabla^2_{F_*(X)} F_*(Y)$$

olmak zorundadır. Kısaca F izometrisi konneksiyonu korur. Buradan;

$$\begin{aligned} R_2\left(F_*X, F_*Y\right)F_*Z &= \nabla^2_{F_*X}\left(\nabla^2_{F_*Y}F_*Z\right) - \nabla^2_{F_*Y}\left(\nabla^2_{F_*X}F_*Z\right) - \nabla_{[F_*X, F_*Y]}F_*Z \\ &= \nabla^2_{F_*X}\left(F_*\left(\nabla^1_Y Z\right)\right) - \nabla^2_{F_*Y}\left(\nabla^1_X Z\right) - \nabla^2_{F_{*[X,Y]}}F_*Z \\ &= F_*\left(\nabla^1\left(\nabla^1_Y Z\right)\right) - F_*\left(\nabla^1_Y\left(\nabla^1_X Z\right)\right) - F_*\left(\nabla^1_{[X,Y]}Z\right) \\ &= F_*[\left(\nabla^1\left(\nabla^1_Y Z\right)\right) - \left(\nabla^1_Y\left(\nabla^1_X Z\right)\right) - \left(\nabla^1_{[X,Y]}Z\right)] \\ &= F_*\left[R_1(X,Y)Z\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} F^* R_2(X,Y,Z,W) &= R_2\left(F_*X, F_*Y, F_*Z, F_*W\right) \\ &= g\left(R_2\left(F_*X, F_*Y\right)F_*Z, F_*W\right) = g\left(F_*R_1(X,Y)Z, F_*W\right) \\ &= g\left(R_1(X,Y)Z, W\right) = R_1(X,Y,Z,W) \end{aligned}$$

bulunur.

III.2 Eğrilik Formları ve Cartan Yapı Denklemleri

Cartan'a göre konneksiyonların diferensiyel formlarla birlikte ele alınmaları esastır. Bir ∇ konneksiyonunu ilgilendiren lokal problemlerde ∇ nın özellikleri diferensiyel formların özelliklerine dönüştürülebilir*[2]*.

III.2.1 Konneksiyon Formları

Frenet formülleri denilen formüllerde T, N, B çatılarının T', N', B' türevlerinin ifadesi yer almaktadır. Aynı şey IR^3 deki keyfi E_1, E_2, E_3 çatı alanları için uygulanırsa yani; bu çatı alanlarının kovaryant türevleri aynı çatı alanlarının terimleri ile ifade edilirse, herhangi $p \in IR^3$ deki tanjant vektör X olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla_X E_1 &= c_{11}E_1(p) + c_{12}E_2(p) + c_{13}E_3(p) \\ \nabla_X E_2 &= c_{21}E_1(p) + c_{22}E_2(p) + c_{23}E_3(p) \\ \nabla_X E_3 &= c_{31}E_1(p) + c_{32}E_2(p) + c_{33}E_3(p) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerin bileşenleri ortonormal olarak düşünüldüğünde,

$$c_{ij} = \langle \nabla_X E_i(p), E_j(p) \rangle, \quad 1 \le i, j \le 3$$

c_{ij} nin bileşenleri belirli bir X vektörüne bağlı olduğundan en son ifade düzenlenirse,

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X E_i(p), E_j(p) \rangle, \quad 1 \le i, j \le 3$$

olarak yazılabilir. Burada *i* ve *j* nin her bir seçimi için ω_{ij} nin tanjant vektörler üzerinde reel değerli bir fonksiyon tanımladığı görülür.

Lemma III.2.1: E_1, E_2, E_3; *IR^3 te bir çatı alanı olsun. p noktasındaki her bir V tanjant vektörü için*

$$\omega_{ij}(V) = \langle \nabla_V E_i(p), E_j(p) \rangle, \quad 1 \le i, j \le 3$$

olup ω_{ij}*, 1-formdur ve* $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ *dir.*(Bu 1-formlara E_1, E_2, E_3 çatı alanlarının *konneksiyon formları* denir.) *[11].*

İspat: Tanımdan ω_{ij}, tanjant vektörler üzerinde reel değerli bir fonksiyon olup,

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}(aV + bW) &= \langle \nabla_{aV+bW} E_i(p), E_j(p) \rangle \\
&= \langle a\nabla_V E_i(p) + b\nabla_W E_i(p), E_j(p) \rangle \\
&= a\langle \nabla_V E_i(p), E_j(p) \rangle + b\langle \nabla_W E_i(p), E_j(p) \rangle \\
&= a\omega_{ij}(V) + b\omega_{ij}(W)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da reel değerli olan ω_{ij} nin 1-form olduğunu göstermektedir. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ olduğunu göstermek için çatı alanının tanımından $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ olduğu ve Leibnitz formülü göz önünde tutulursa

$$0 = V\langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_V E_i(p), E_j(p) \rangle + \langle E_i(p), \nabla_V E_j(p) \rangle$$

olacaktır. İç çarpımın özelliklerinden

$$0 = \omega_{ij}(V) + \omega_{ji}(V)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem III.2.1: $1 \le i, j \le 3$ *için* ω_{ij}*, konneksiyon formları olsun. Herhangi V vektör alanı için,*

$$\nabla_V E_i = \sum_j \omega_{ij}(V) E_j, \quad 1 \le i \le 3$$

dir.(Bu denkleme E_1, E_2, E_3 ün konneksiyon denklemleri denir) [11].

İspat: Sabit bir i için, bu denklemin her iki tarafı vektör alanıdır. Bu nedenle her p için,

$$\nabla_{V(p)} E_i = \sum \omega_{ij}(V(p)) E_j(p)$$

olduğu gösterilmelidir. Bu formatın da çatıların ortonormal çatıya genişletilmesiyle elde edildiği aşikardır •

$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\omega_{ii} = -\omega_{ii}$ olur ki buradan, $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$ olacaktır. Bu durumda ω_{ij} 1-formlarına karşılık gelen matris,

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Konneksiyon denklemleri açık olarak

$$\begin{aligned} \nabla_V E_1 &= \qquad\qquad\quad \omega_{12}(V)E_2 + \omega_{13}(V)E_3 \\ \nabla_V E_2 &= -\omega_{12}(V)E_1 \qquad\qquad\quad + \omega_{23}(V)E_3 \\ \nabla_V E_3 &= -\omega_{13}(V)E_1 - \omega_{23}(V)E_2 \end{aligned} \qquad ...(III.2.1)$$

şeklinde yazılırsa bu denklemlerin Frenet formülleriyle ilişkisi görülecektir:

$$\begin{aligned} T' &= \qquad\quad \kappa N \\ N' &= -\kappa T \qquad\qquad + \tau B \\ B' &= \qquad\quad -\tau N \end{aligned}$$

Dikkat edilirse Frenet formüllerinde $\omega_{13}(V)E_3$ ve $-\omega_{13}(V)E_1$ e karşılık gelen terimler yoktur. Bu formüller arasındaki sözü edilen formal farklılığın yanı sıra daha temel bir farklılık göze çarpar. Frenet çatı alanları eğriye uygun olarak seçildiği için, Frenet formülleri eğri hakkında bilgi verir. E_1, E_2, E_3 keyfi seçildiğinden dolayı konneksiyon denklemleri IR^3 hakkında doğrudan bir bilgi vermez. Fakat çatı alanlarının dönme oranı hakkında bilgi verir.

III.2.2 Yapı Denklemleri:

E_1, E_2, E_3 ; IR^3 üzerinde çatı alanları ise çatı alanlarının $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ 1-formları; p noktasındaki her V tanjant vektörü için,

$$\theta^i(V)=\langle V(p),E_i(p)\rangle$$

ile tanımlanır. θ^i , reel değerli ve lineer olduğundan 1-formdur. $\theta^i(E_j)=\delta_{ij}$ olduğundan $\theta^1,\theta^2,\theta^3$; E_1,E_2,E_3 ün dual bazıdır. V herhangi bir vektör alanı ve V nin koordinat fonksiyonları $f_i=\langle V,E_i\rangle$ ise $V=\sum f_i E_i$ olarak yazılabilir *[11]*. O halde dual formlar kullanılırsa $V=\sum\theta^i(V)E_i$ olur.

Teorem III.2.2 (Cartan Yapı Denklemleri): *E_1,E_2,E_3 çatı alanı, $\theta^1,\theta^2,\theta^3$ dual formlar ve ω_{ij} konneksiyon formları olmak üzere bu formlar için,*

(1) *Birinci Yapı Denklemi* :

$$d\theta^i=\sum_j \omega_{ij}\wedge\theta^j \qquad (1\le i\le 3)$$

(2) *İkinci Yapı Denklemi* :

$$d\omega_{ij}=\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \qquad (1\le i,j\le 3)$$

dir [11].

θ^i, E_i nin duali olduğundan birinci yapı denklemi konneksiyon denklemlerinin dualidir.

Benzer şekilde *M* bir manifold ve *U; M* nin açık bir alt kümesi olsun ve onun üzerinde bir $E_1,...,E_n\,;C^\infty$ çatı alanı tanımlansın. $\forall\, p\in U$ da $E_1,...,E_n$ 'e karşılık gelen $T_p{}^*M$ *ın* $\theta^1,...,\theta^n$ dual bazları vardır. Bu dual bazlar da

$$\theta^i(E_j)=\delta^i_j$$

şeklinde karakterize edilir. U üzerindeki dual çatılar açıkça C^∞ dur.

Eğer $\theta^1,...,\theta^n$ verilirse $E_1,...,E_n$ tanımlanabilir.

$\nabla_X Y$; manifold üzerindeki konneksiyon olmak üzere; $\nabla_X Y$ yi hesaplayabilmek için ; $\nabla_{E_i}E_j$ nin bilinmesi yeterlidir. Burada

$$\nabla_{E_i}E_j=\sum_k \Gamma^k_{ij}\theta^l$$

ile tanımlanabilir. Aksine 1-formlar verilirse o zaman da;

$$\Gamma^k_{ij}=\theta^k_j(E_i)$$

dir ve $\nabla_{E_i} E_j$, dolayısıyla konneksiyon tanımlıdır. Gerçekten;

$$\nabla_X E_j = \sum_k \theta_j^k (X) E_k$$

dır.Burada X üzerinde $\theta_j^1,...,\theta_j^n$ formlarının değerleri $\nabla_X E_j$ nin verilen çatıya göre bileşenleridir. Üstelik U ve U üzerindeki $\theta^1,...,\theta^n$ dual çatıları verilmişse, o zaman θ_j^k n^2-formları tarafından konneksiyon tanımlanabilir. Bu formlara *Konneksiyon formları* denir *[2]*. Elbetteki θ_j^k konneksiyon formları keyfi değildir; eğer U üzerinde bir Riemann konneksiyonu tanımlanacaksa bu konneksiyon Riemann konneksiyonu şartlarını sağlamalıdır.

Teorem III.2.3: *M; C^∞ dual çatı alanı $\theta^1,...,\theta^n$ tarafından gerilen bir Riemann manifold olsun. Bu durumda; M üzerinde şu iki denklemi sağlayan bir tek θ_j^k 1-form vardır.*

i-) $d\theta^i - \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i = 0$ *...(III.2.2)*

ii-) $dg_{ij} = \sum_k \left(\theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki} \right)$ *...(III.2.3)*

Burada $g_{ij} = g(E_i, E_j), \theta_j^k$ *formları da Riemann konneksiyon şartlarını sağlayan ve şu şekilde tanımlanan formlardır:*

iii-) $\nabla_X E_j = \sum \theta_j^k (X) E_k$

iv-) $\nabla_X (f Y) = (X f) Y + f \nabla_X Y, f \in C^\infty(M)$ *[2].*

$\theta_{ij} = \sum_k \theta_i^k g_{kj}$ olarak tanımlanırsa (*ii*) daha basit olarak $dg_{ij} = \theta_{ij} + \theta_{ji}$ şeklinde yazılabilir. Eğer buradaki çatılar ortonormalse $g_{ij} = \delta_{ij}$ olup, bu ortonormal çatılarda da θ^i, θ_{ij} yerine w^i, w_i^j kullanılırsa; $1 \le i, j \le n$ olmak üzere;

$w_i^j + w_j^i = 0$ olur. θ_i^j formları Riemann konneksiyonu tanımlar ve Riemann konneksiyonu tarafından tanımlanır.

R_{ikl}^j ,verilen çatıya göre eğriliğin bileşenleri olsun öyle ki;

$$R(E_k, E_l) E_i = \sum_j R_{ikl}^j E_j$$

dir. O zaman n^2 2-form Ω_i^j şu şekilde tanımlanabilir:

$$\Omega_i^j = \sum_{1\le k\prec l\le n} R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \Omega_i^j (E_k, E_l) E_j = \sum_{j=1}^{n} R_{ikl}^j E_j = R(E_k, E_l) E_i \; ve$$

$$R(X,Y)E_i = \sum_j \Omega_i^j (X,Y) E_j$$

Yani; $(\Omega_i^j (X,Y))$; $E_1,...,E_n$ bazına göre eğrilik operatörünün matrisidir. p noktasındaki *R(X,Y)Z* ve dolayısıyla $\Omega_i^j (X,Y)$ nin sadece p noktasındaki X ve Y değerlerine bağlı olduğu, vektör alanlarına bağlı olmadığı görülmüştü. Açıkça;

$$\Omega_i^j (X,Y) = - \Omega_i^j (Y,X)$$

U_j üzerinde n^2, Ω_i^j formları *"eğrilik formları"* olarak adlandırılır. Bu eğrilik formları Riemann metriği ve U üzerinde seçilen çatı alanlarına bağlıdır. Bu formlarla konneksiyon formları arasındaki bağıntıyı veren teorem aşağıda verilmiştir:

Teorem III.2.4: Ω_i^j *formları aşağıdaki şekilde tanımlanır[2]:*

$$\Omega_i^j = d\theta_i^j - \sum_{k=1}^{n} \theta_i^k \wedge \theta_k^j \;, 1 \le i, j \le n \qquad \textbf{...}(III.2.4)$$

İspat: U üzerinde X ve Y herhangi vektör alanları olmak üzere; denklemin her iki tarafında iki formların değeri birbirine eşittir. Bu da şuna karşılık gelmektedir :

$$R(X,Y)E_i = \sum_j \left(\left(d\theta_i^j - \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j \right) (X,Y) \right) E_j \quad , i = 1,2,...,n$$

Tanımdan;

$$R(X,Y)E_i = \nabla_X \nabla_Y E_i - \nabla_Y \nabla_X E_i - \nabla_{[X,Y]} E_i$$

dir. Bu denklem düzenlenirse;

$$R(X,Y)E_i = \nabla_X \left(\sum_j \theta_i^j (Y) E_j \right) - \nabla_Y \left(\sum_j \theta_i^j (X) E_j \right) - \sum_j \theta_i^j ([X,Y]) E_j$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı;

$$\sum_j \left(X\left(\theta_i^j (Y)\right) - Y(\theta_i^j (X)) - \theta_i^j ([X,Y]) \right) E_j + \sum_{j,k} \theta_i^k (Y) \theta_j^k (X) E_k - \sum_{j,k} \theta_i^k (X) \theta_j^k (Y) E_k$$

olur.

$w \in \Lambda^1(M)$ *ve* $X, Y \in \chi(M)$ ise

$dw(X,Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X,Y])$

olduğu göz önünde bulundurulursa *[2]*;

$$R(X,Y)E_i = \sum_j \left\{ d\theta_i^j(X,Y) - \sum_k \left[\theta_i^k(X)\theta_k^j(Y) - \theta_i^k(Y)\theta_k^j(X) \right] \right\} E_j$$

$$= \sum_j \left(d\theta_i^j - \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j \right)(X,Y)E_j$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Özetle *U;* üzerinde $\theta^1, ..., \theta^n$ dual çatısı tanımlanmış olan bir Riemann manifoldu üzerinde herhangi bir açık alt küme olsun. $E_1, ..., E_n$ de U üzerinde bir tek olarak tanımlı çatı alanını göstersin. O zaman U üzerinde tanımlı bir tek θ_i^j 1-formu vardır. Bu 1-formlar da Ω_i^j 2-formlarını tanımlar. Bu nedenle *U* üzerindeki eğrilik *(III.2.4)* denklemi ile verilir. (*III.2.2) ,(III.2.3)* ve *(III.2.4)* *"yapı denklemleri"* olarak bilinir *[2]*.

Sonuç III.2.1: *Ortonormal çatı-alanına dual* $w^1, ..., w^n$ *formları, aşağıdaki şartları sağlayan bir tek olarak* w_i^j *1-form kümesi tanımlar:*

$$i-)\, dw^i = \sum_k w^k \wedge w_k^i$$

$$ii-)\; w_i^j + w_j^i = 0$$

$$iii-)\, dw_i^j - \sum_k w_i^k \wedge w_k^j = \sum_{k \prec l} R_{ikl}^j w^k \wedge w^l = \Omega_i^j = \Omega_{ij}$$

Bu çatılara göre; eğrilik operatörü R(X,Y) nin $(\Omega_{ij}(X,Y))$ *matrisi anti-simetrik bir matristir [2].*

Sonuç III.2.2: $\Gamma_{ij}^k; \{U, \varphi\}$ *komşuluğunda* $E_1, E_2, ..., E_n$ *koordinat çatılarına göre konneksiyon formlarının bileşenlerini göstersin öyle ki;*

$\theta_j^k = \sum_l \Gamma_{lj}^k \theta^l \quad ; \theta^1, ..., \theta^n;$ $E_1, ..., E_n$ *in duali olup;* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ *ve*

$$R_{ikl}^j = \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} - \sum_h \left(\Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j - \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j \right)$$

dir [2].

İspat: Teoreme göre ;

$$\Omega_i^j = d\theta_j^i - \sum_s \theta_j^s \wedge \theta_s^i$$

Buradan;

$R_{jkh}^i = R_{ij}(E_k, E_h)$ olup;

$$R_{jkh}^i = \left(d\theta_j^i - \sum_s \theta_j^s \wedge \theta_s^i \right)(E_k, E_h)$$

$$= d\theta_j^i(E_k, E_h) - \sum_s \left(\sum_r \Gamma_{rj}^s \theta^r \right) \wedge \left(\sum_t \Gamma_{ts}^i \theta^t \right)(E_k, E_h)$$

$$= d\theta_j^i(E_k, E_h) - \sum_{s,r,t} \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ts}^i (\delta_{rk}\delta_{th} - \delta_{rh}\delta_{tk})$$

$$= d\theta_j^i(E_k, E_h) + \sum_{s,r,t} \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ts}^i \delta_{rh}\delta_{tk} - \sum_{s,r,t} \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ts}^i \delta_{rk}\delta_{th}$$

$$= d\theta_j^i(E_k, E_h) + \sum_s \left(\Gamma_{hj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{hs}^i \right)$$

$$= E_k \theta_j^i(E_h) - E_h \theta_j^i(E_k) + \sum_s \left(\Gamma_{hj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{hs}^i \right)$$

$$= E_k \Gamma_{hj}^i - E_h \Gamma_{kj}^i + \sum_s \left(\Gamma_{hj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{hs}^i \right)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{hj}^i}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u_h} + \sum_s \left(\Gamma_{hj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{hs}^i \right)$$

olur.

Boy M=2 olduğunda ve ortonormal çatı söz konusu olduğunda ise şu sonuç çıkarılabilir:

Sonuç III.2.3: *Eğer boy M=2 ise* $dw_1^2 = \Omega_1^2 = -Kw^1 \wedge w^2$ *dir. Burada K; M nin Gauss eğriliğini göstermektedir [2].*

İspat: Gauss'un Egregium teoreminden E_1, E_2 ortonormal vektörlerse;

$$K = -R(E_1, E_2, E_2, E_1) = -g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = -R_{1212}$$

olduğu biliniyor. Diğer yandan; $g_{ij} = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ olup

$\Omega_1^2 = \Omega_{12} = R_{1212} w^1 \wedge w^2$ olur. $w_i^j + w_j^i = 0$ olduğundan $w_1^1 = 0 = w_2^2$ olur ki

$$\sum_{k=1}^{2} w_1^k \wedge w_k^2 = 0 \Rightarrow dw_1^2 = \Omega_1^2$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem III.2.5: *E^n uzayında $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ortonormal bir çatı alan sistemi ve*

$$E_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olsun. $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sisteminin belirttiği konneksiyon formları θ_{ij} ler olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ve \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & . & . & . & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & . & . & . & \theta_{2n} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ \theta_{n1} & & . & . & . & \theta_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\theta = (dA).A^t$$

dir. Daha açık olarak $\theta_i^j = \sum_k a_{jk}\left(da_{ik}\right)$ dır [11].

İspat: $V \in T_p E^n$ için, $\nabla_V E_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}\left(V\right) E_{jp}$ olduğundan,

$$\theta_{ij}\left(V\right) = g\left(\nabla_V E_i, E_j\left(p\right)\right)$$

olur.

$$\nabla_V E_i = \sum_{j=1}^{n} \nabla_V \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[V\left[a_{ij}\right] \frac{\partial}{\partial x_j} + a_{ij} \nabla_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} V\left[a_{ij}\right] \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p\right)$$

olduğundan,

$$\theta_{ij}(V) = g\left(\sum_k V[a_{ik}]\frac{\partial}{\partial x_k}(p), \sum_k a_{jk}(p)\frac{\partial}{\partial x_k}(p)\right)$$

$$= \sum_k V[a_{ik}].a_{jk}(p) = \sum_k da_{ik}(V).a_{jk}(p) = \left(\sum_k a_{jk}.da_{ik}\right)(V)$$

bulunur. Bu eşitlik, $\theta = (dA).A^t$ olduğunu gösterir. A matrisi ortogonal olduğundan, $\theta = (dA).A^{-1}$ yazılabilir.

Örnek III.2.1: E^3 uzayında Öklidyen koordinat sistemi $\{x, y, z\}$ olsun. E^3 den IR ye ,

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = u$$

olacak biçimde r, θ, u fonksiyonları tek olarak bellidir. $\{r, \theta, u\}$ kümesine E^3 de *silindirik koordinat fonksiyonları* denir.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}, u = z$$

olarak yazılabilir. E^n manifoldu üzerinde E_1, E_2, E_3 vektör alanları,

$$E_1 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$
$$E_2 = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$
$$E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

biçiminde tanımlandığında $\{\mathrm{E}_1, E_2, E_3\}$, E^3 de *silindirik çatı alan sistemi*nin belirttiği konneksiyon formları yazılacak olursa

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$dA = \begin{bmatrix} -\sin\theta d\theta & \cos\theta d\theta & 0 \\ -\cos\theta d\theta & -\sin\theta d\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $(dA).A^t$ matrisi hesaplanarak

$$\begin{bmatrix} 0 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Örneğin;

$$\theta_{12} = d\theta = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \text{ olur}$$

IV. BÖLÜM

Bu bölümde bilgisayar teknolojisiyle 3-boyutlu yüz tanılama işlemi örneği sunulmuştur. Bu örnek üzerinde hem konuyla ilgili bundan önceki bölümlerde verilen bir takım temel kavramların somut kullanımı gözler önüne serilecek, hem de eğriliğin kullanım ve uygulama alanlarının genişliği hakkında fikir sahibi olunacaktır. Çalışma, bilgisayar teknolojisiyle ilgili teknik terimler içerdiğinden, daha ziyade matematiksel yönü vurgulanacak şekilde ele alınıp, detaya çok yer verilmemiştir.

IV.1 Üç Boyutlu Yüz Tanılama İşlemi

Yüz tanıma işlemi günümüzde pek çok yerlerde kullanıldığı gibi en sık ATM ler, kasa kiralama işlemleri gibi güvenlikli finansal işlemlerde belli bir yüzü doğrulama şeklinde kullanılır. Bunun haricinde de mevcut olan bir galeri içerisinden istenilen veya aranılan kişiyi tanılama gibi uygulamalar da vardır. Bir kalabalık içinde aranan bir şahsı birebir eşleme yoluyla tanılama böyle bir uygulamanın örneğidir. Yüz tanılamadaki en büyük zorluk; insan yüzünün görünümünün, ışık şartları, arka plan ve başın duruş pozisyonu gibi dış etkenlerden büyük oranda etkilenmesidir. Bunun yanı sıra saç şekli, kozmetik kullanımı, plastik cerrahi veya kilo kaybı gibi etkiler de yüzün görünümünü etkileyebilir. Bunların hiç birinde değişme olmasa bile, yüzün görünümünü daha ziyade etkileyen faktör, insan yüzünün mimik hareketleridir.

3 boyutlu yüz geometrisi; yüzün dış etkenlerden ve çevresel faktörlerden bağımsız olarak, iç anatomik yapısına dayandırılır. İnsan yüzü yüzeyi, 3-boyutlu düzgün bağlantılı bir manifold olarak düşünülüp bu manifold; S ile gösterilirse S ; IR^2 nin kompakt bir alt kümesi Ω dan , IR^3 e tanımlıdır. Yani; $S:\Omega \subset IR^2 \to IR^3$ dir.

Gauss ' un Egregium teoreminden; birbirine izometrik olan yüzeylerin Gauss eğriliklerin eşit olduğu bilinmektedir. Bu izometri modeli insan yüzüne uygulanmıştır.

İnsan yüzü tanılama sisteminin özü "izometrik imbedding" kavramına dayandırılır. Bu kavram yüz üzerindeki noktalar arasındaki geodezik mesafeleri ölçmeyi içerir.

Bu sistem insan yüzü gibi deforme olabilecek nesneleri daha basit katı yüzeylere dönüştürme işlemi olup, insan yüzlerinin Riemann yüzeyler ve farklı yüz ifadelerinin de izometriler olarak modellenmesi ile başlar. Sonrasında çok boyutlu ölçekleme (MDS) kavramı ve onun izometrik imbeddinglere uygulamaları ile devam eder.

$$S:\Omega \subset IR^2 \to IR^3$$
$$(\xi_1,\xi_2) \to S(\xi_1,\xi_2) = \left(x^1(\xi_1,\xi_2), x^2(\xi_1,\xi_2), x^3(\xi_1,\xi_2)\right)$$

insan yüzü yüzeyinin parametrelendirilmesi olmak üzere burada x^3, derinlik koordinatını temsil etmektedir. Bunun yanı sıra $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ de kamera tarafından edinilen 2-boyutlu görüntüdeki koordinatlardır. $x \in S$ olmak üzere; $\partial_i x \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^i} x$ türevleri S üzerinde lokal ortogonal olmayan bir koordinat sistemidir ve $T_x S$ ile gösterilen ve tanjant uzay olarak adlandırılan IR^3 ün bir alt uzayını gererler. Manifoldların Öklidyen olmayan geometrisi üzerinde çalışabilmek için, bilineer simetrik dejenere olmayan form (tensör) olan g Riemann metriği veya birinci temel forma geçiş yapılmalıdır. Riemann metrik; S üzerindeki mesafelerin lokal olarak ölçülmesini koordinatlardan bağımsız olarak sağlıyor olup, manifoldun *intrinsic* bir karakteridir (Manifoldun metrikle ifade edilebilen özellikleri *int*rinsic, ikinci temel formun terimleri ile ifade edilen özellikler de *ext*rinsic olarak adlandırılır.) .

S, bağlantılı ve kompakt bir yüzey ve $x, y \in S$ için $c:[0,1] \to S$; x ve y yi birleştiren diferensiyellenebilir eğri olsun. c nin uzunluğu :

$$l(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\| dt$$

olup, S üzerindeki x ve y arasındaki uzaklık ise:

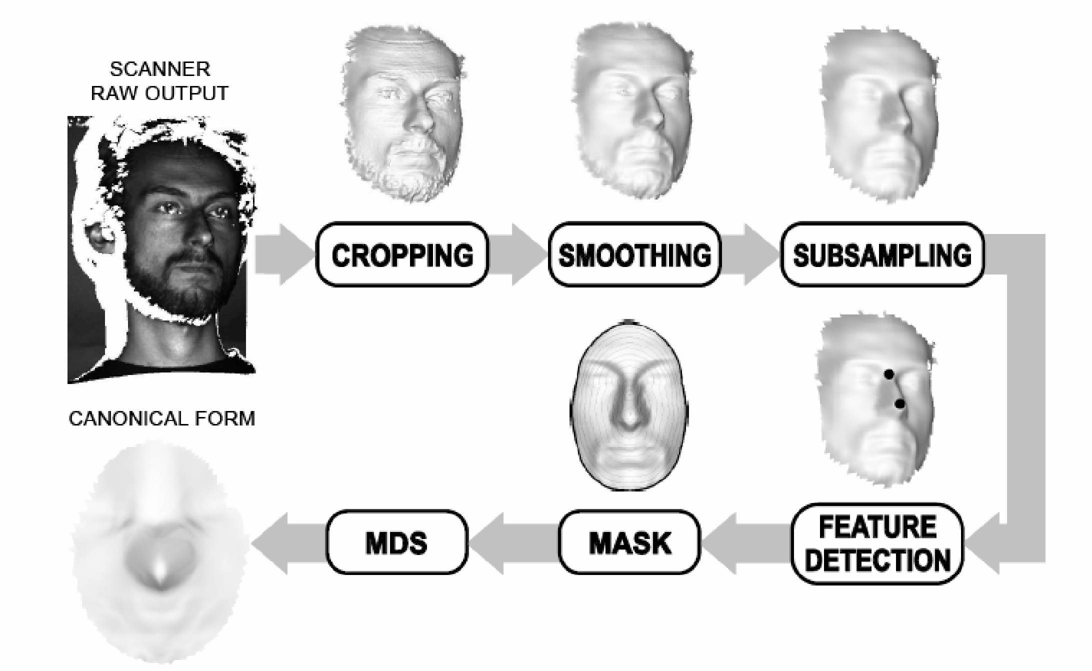
$$d(x,y) = \inf_c l(c)$$

ile verilir ve $d(x,y)$ ye *geodezik uzaklık* denir.

Böylelikle yüz yüzeyi üzerinde çalışabilmek için gerekli yapılar kurulmuş olup çalışmaya konu edilen yüz ifadelerine geçilecek olursa bu ifadeler, mimik kaslarının hareketlerinden meydana gelmektedir. Yüz yüzeyinin doğal deformasyonu izometriler olarak modellenirse yani; yüzün farklı ifadeleri birbirine izometrik yüzeyler olarak düşünülürse farklı yüz ifadeleri, referans alınan noktaların komşuluğundaki Gauss eğriliklerini değiştirmeyecektir. (Ancak bu izometrik modeller; yüzün patolojik durumlar dışındaki değişimi içindir. Bu patolojik durumlardan biri; ağzın açık halidir.

Ağız açık olduğu zaman, yüz üzerinde bir delik oluştuğundan, bu durum yüzün topolojisini değiştirecektir. Bu da istenmeyen bir durumdur.)

Sistem birkaç aşamadan oluşmaktadır. Öncelikle; insan yüzü bir 3D (3 boyutlu) tarayıcıdan geçirilir ve aşağıdaki aşamalar uygulanır:



Şekil IV.1 [15].

Cropping (kırpma) aşamasında yüz bölgesi arka plandan ve problem oluşturabilecek noktalardan ayrılır. Yüz bölgesi 320×240 maske haline getirilir [15].

Smoothing (düzgünleştirme) aşamasında ise yüz, yüzey alanını minimize edecek şekilde düzgünleştirilir [15].

Feature detection (yüz tarama) kısmında da yüz ifadeleri altında değişmeyen burnun uç kısmı, burun köprü kemiğinin en üst noktası gibi bazı noktalar göz önünde bulunduruldu. Başın pozisyonunun değişebileceği durumunu garanti altına alabilmek için, eğrilik tabanlı yüz detectörü kullanılmış ve eğrilik tabanlı çalışılmıştır [15]. (Çünkü bu mantığa göre, birbirine kongrüent olan manifoldların karşılıklı noktalarında eğriliği değişmez.) Bu çalışmalar da diferensiyel invaryantlar hesaplanırken aşağıdaki teori ve metodlardan da yararlanılabilir.

Teorik Alt Yapı:

S bir yüzey ve

$$f : M \subseteq IR^2 \to IR^3, \qquad S = f(M)$$

olsun. f nin p noktasındaki df_p diferensiyeli,

$$df_p = T_p M \to T_{f(p)} S$$

dir. Eğer *df* bir izomorfizm ise *f* bir immersiyondur ve eğer *f* bir immersiyonsa S her noktasında iyi tanımlı bir tanjant düzleme sahiptir. *M* yönlendirilmiş ise yüzeyin her bir noktasında sadece bir normal tanımlıdır. Burada yönlendirilmiş yüzeyler üzerinde durulacaktır. Gauss dönüşümü *N* ile,

$$N = \frac{df(v_1) \times df(v_2)}{\left\| df(v_1) \times df(v_2) \right\|}$$

kastedilmektedir. (v_1, v_2); $T_p M$ nin pozitif yönlendirilmiş bir çatısı ve $\times$; IR^3 deki vektörel çarpımdır. *M* sabit koordinat sistemi (u, v) ile verilmişse,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$ ve Gauss dönüşümü N ise;

$$N = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|} \qquad ...(4.1)$$

olduğu göz önünde bulundurularak aşağıda yüzey üzerindeki diferensiyel invaryantların hesaplanmasında farklı metodlara yer verilmiştir:

Bir yüzey üzerindeki *konformal yapı* tanjant vektörler arasındaki açının bir seçimi olup yönlendirilmiş bir yüzey üzerinde konformal yapı; tanjant düzlemde tanjant vektörleri saat yönünün tersi yönünde 90 derece dönderen bir *J* operasyonu tanımlar. Bu operasyon *kompleks yapı* olarak da adlandırılır. Yüzey parametrizasyonu $f : M \to IR^3$; M üzerinde bir J_f kompleks yapısını;

$$df\left(J_f(v)\right) = N \times df(v)$$

şeklinde oluşturur. Yani;

$$df \circ J_f = N \times df \qquad ...(4.2)$$

dir. f nin ikinci temel formu $II(u, v) = -\langle dN(u), df(v) \rangle$ olup $\forall p \in M$ için pozitif yönlendirilmiş bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal çatısı vardır ve $e_2 = Jf(e_1)$, $\|df(e_i)\| = 1$ dir. Simetrik, quadratik ikinci temel form;

$$\begin{bmatrix} II(e_1, e_1) & II(e_1, e_2) \\ II(e_2, e_1) & II(e_2, e_2) \end{bmatrix}$$

matrisiyle verilir. Burada; $II\left(e_1,e_2\right)=II\left(e_2,e_1\right)=0$ ve $II\left(e_j,e_j\right)=k_j$, $(j=1,2)$ dir. e_1 ve e_2 vektörleri *asli eğrilik vektörleri* olup, *asli doğrultular*ı tanımlarlar. k_1 ve k_2 *asli eğrilikler*dir *[14]*.

IV.1.1 Diferensiyel İnvaryantların Hesaplanmasında Konformal Hesaplama Metodu:

Teorem IV.1: *H ortalama eğrilik olmak üzere Gauss dönüşümünün dN diferensiyeli*

$$dN=-Hdf+\omega \qquad ...(4.3)$$

şartını sağlar.Buradaki ω *1-formu;*

$$\omega:\chi(M)\rightarrow IR^3 \qquad ...(4.4)$$

her v tanjant vektörü için;

$$\omega(v)\perp N \qquad ...(4.5)$$

$$\omega\left(J_f(v)\right)=-N\times\omega(v) \qquad ...(4.6)$$

şartlarını sağlar[14].

Sonuç IV.1 (Ortalama Eğrilik):

$$-Hdf=\frac{1}{2}\left(dN-N\times dN\circ J_f\right) \text{ dir [14].} \qquad ...(4.7)$$

Sonuç IV.2 (Asli doğrultular):

$$\omega=\frac{1}{2}\left(dN+N\times dN\circ J_f\right) \qquad ...(4.8)$$

olup, λ *skalar ve u vektör olmak üzere asli eğrilik vektörleri,*

$$\frac{1}{2}\left(dN(u)+N\times dN\left(J_f(u)\right)\right)=\lambda df(u) \qquad ...(4.9)$$

denklemi çözülerek bulunur [14].

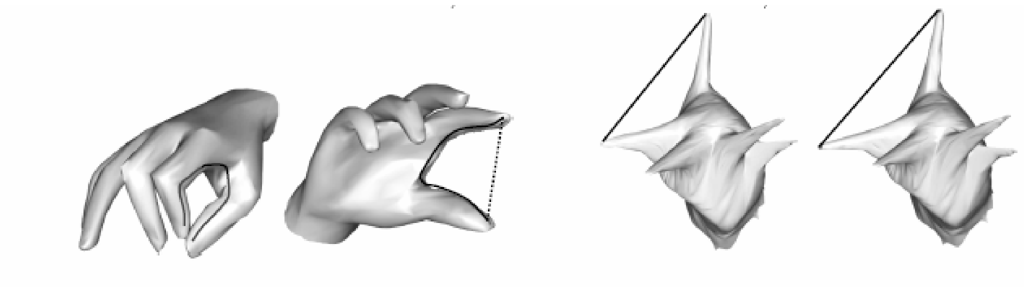
Sonuç IV.3(Gauss Eğriliği): λ^2***;*** $\left\langle\omega(.),df(.)\right\rangle$ *quadratik formunun eigen değerlerinin kareleri toplamı olmak üzere K Gauss eğriliği;*

$$K=H^2-\lambda^2 \qquad ...(4.10)$$

dir. $\left\langle\omega(.),df(.)\right\rangle$ *quadratik formunun matrisi A ile gösterilirse;*

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ olup, } \lambda^2=a^2+b^2 \text{ dir [14].} \qquad ...(4.11)$$

İşlem öncesi son aşama yüz çevresinin *geodezik maske* kullanılarak belirlenmesidir. *Geodezik maske;* yüz çevresinin iç kısmıdır. Çevrenin dışındaki tüm noktalar kaldırılır. Bu işlem yüz ifadelerine duyarsız, çevresel etkilerden uzaklaşılacak şekilde yüz yüzeyinin kırpılmasını sağlar. Geodezik maske, kanonik bazlı yüz tanılamada önemli bir rol oynar[15]. Şekil IV.3 bu konuda fikir sunması açısından verilmiştir :



(a) Orijinal yüzey (b) Kanonik form

Şekil IV.2 [15].

Geodezik maskeleme yapıldıktan sonra işlemin son aşaması da kanonik forma getirilen yüzeylerin eşleştirilmesi işlemidir. Böylelikle hedefe ulaşılmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu H.H., Diferensiyel Geometri II,A.Ü.Fen Fakültesi,(1983).

[2] Bootby,William,M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry., by Academic Pres.Inc.,1986

[3] Do Carmo, M.P., Riemannian Geometry, Birkhauser ,(1972)

[4] F.Akbulut, Vektörel Analiz, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Kitaplar Serisi No:25, Bornova,(1970).

[5] Sabuncuoğlu,Arif., Diferensiyel Geometri , Nobel Yayın ve Dağıtım 2004.

[6] Hacısalihoğlu H.H., Ekmekçi Nejat; Tensör Geometri, Ankara, (2003)

[7] Lee,John, M., Riemannian Manifolds (An Introduction to Curvature), Springer,1997

[8] Do Carmo, M.P., Differentiable Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey(1976)

[9] Presley,Andrew, Elementary Differential Geometry, Springer-Verlag,2001.

[10] Hicks,Noel,J.,Notes on Differential Geometry,D. Van Nostrand Co., London 1965.

[11] O'Neill Barrett, Elementary Differential Geometry,Academic Press,1997

[12] Ethan D. Bloch,A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry,Birkhauser,(1996).

[13] "Crumpling, buckling,and cracking:Elasticity of thin sheets";Michael Marder, Robert D. Deegan, and Eran Sharon, 2007 American Institute of Physics, (February 2007)

[14] Kamberov George and Gerda, "Shape Invariants and Principal Directions from 3D Points and Normals",Hofstra University,USA

[15] Bronstein Alexander M. and Michael M., Kimmel Ron; Three-Dimensional Face Recognition, Israel Institue of Technology,2004

[16] The Riemann Curvature Through History,Naveira.A.M,RACSAM Rev.R.Acad.Cien Serie A.Mat. Vol 99(2),2005

[17] [www.koeri.boun.edu.tr/jeodezi/notdefteri/bilgi_notes/JEODEZI_BUKRDAE_GED.pdf]

ÖZGEÇMİŞ

Saadet Doğan; 1981 yılında Malatya’da doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladıktan sonra 1998 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü kazanmış ve 2003 yılında bölümünü bölüm üçüncüsü olarak bitirmiştir. İlk yılında Adıyaman’a öğretmen olarak atanmış ve bir yıl sonrasında eş durumundan Hekimhan’ın Güzelyurt Kasabasında görev yapmaya başlamıştır. Bu esnada İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Fakültesi, Matematik Ana Bilim Dalının yüksek lisans programına başvurmuş ve programa kabul edilmiştir. Alan değişikliğinden dolayı bir yıl da Yeşilyurt’un Bostanbaşı kasabasında görev yaptıktan sonra, Anadolu Lisesi Öğretmenliği sınavlarına girerek başarılı olmuş ve Hüseyin Kölük Anadolu Ticaret Lisesine ataması yapılmıştır. Evli ve bir çocuk annesi olan Saadet Doğan; aynı lisede görevine devam etmektedir.