T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR ÜZERİNDEKİ KONTAKT YAPILAR

Sibel ŞENER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2008

Tezin Başlığı: **Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerindeki Kontakt Yapılar**

Tezi Hazırlayan: **Sibel ŞENER**

Sınav Tarihi: 08.07.2008

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŞ ______________________

Doç. Dr. H. Bayram KARADAĞ ______________________

Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ ______________________

____

Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerindeki Kontakt Yapılar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sibel ŞENER

Babama, Anneme ve kardeşlerime...

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR ÜZERİNDEKİ KONTAKT YAPILAR

Sibel ŞENER

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

99+iv sayfa

2008

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, daha soraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldlar, alt manifoldlar, simplektik manifoldlar ve kompleks manifoldlar hakkındaki bazı temel kavramlar verildi. İkinci bölümde ise ilk olarak bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde, kontakt yapı ve kontakt manifold tanımı verilerek kontakt manifoldlarla ilgili örnekler verildi. Ayrıca bu bölümde hemen hemen kontakt manifoldlar, hemen hemen normal kontakt manifoldlar ve K-kontakt maifoldlar incelendi. Üçüncü bölümde ise Sasakian manifoldlar ele alındı. Bu son bölümde, Sasakian manifoldların alt manifoldları CR-manifold yapısı, kesit eğrilikleri ve Sasakian manifoldların alt manifoldları ile ilgili karekterizasyonlara yer verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Kontakt Yapı, Kontakt Manifold, Hemen Hemen Kontakt Manifold, Kontakt Dönüşüm, Normal Kontakt Yapı, K-Kontakt Manifold, Sasakian manifold.

ABSTRACT

MSc. Thesis

CONTACT MANİFOLDS ON DİFFERENTİABLE MANİFOLDS

Sibel ŞENER

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

99+iv pages

2008

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ

This study which is designed as master science thesis covers three chapters. In the first chapter we give differentiable manifolds, some basie concepts about Riemannian manifolds, submanifolds, symplectic manifolds and complex manifolds for the rest of the thesis that readers can eaisly understand. In the second chapter, firstly, the definition of a contact structure on a differentiable manifold, a contact manifold and some examples for contact manifolds are given. Further more, in this chapter, we investigate almost contact manifolds, normal almost contact manifolds and K-contact manifolds. In the third chapter, Sasakian manifolds are considered. We give some charestrictic properties deal with CR-manifold structure, sectional curvatures and submanifolds of Sasakian manifolds.

KEY WORDS: Contact Structure, Contact Manifold, Almost Contact Manifold, Contact Transformations, Normal Contact Structure, K-Contact Manifold, Sasakian Manifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen, tecrübeleriyle beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ' a, bölümde iyi çalışma zemini hazırladığından ve teşviklerinden dolayı Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, tez yazımında kullandığım latex programının kullanımında ve diğer konularda yardımını esirgemeyen Arş. Grv. Fulya DURAK' a, ayrıca tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen AİLEME ve özellikle Babam İsmet ŞENER' e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Kontakt geometri fizik ve matematiğin değişik alanlarında sıkça görülen bir konudur. Kontakt yapılar, kısmi diferensiyel denklemlerde, termodinamikler üzerindeki çalışmalarda, Hamilton dinamiklerinde ve geometrik optikler üzerinde kullanılan önemli yapılardan birisidir [11]. Son zamanlarda ise diferensiyel geometride, kontakt yapı kavramı önemli yer tutmaya başlamıştır.

Bilindiği üzere simplektik manifoldlar, üzerinde bir simplektik form tanımlı olan çift boyutlu bir manifolddur. Aslında, kontakt geometri, simplektik geometrinin tek boyuttaki benzeridir.

Bir kontakt manifold boyutu tek olan bir (2n+1)-boyutlu difenrensiyellenebilir manifolddur ve bu manifold üzerinde tanımlı olan bir diferensiyellenebilir η 1-formu yardımıyla tanımlanır öyleki bu η 1-formu manifoldun herbir noktasında

$$\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

dır. Bu η 1-formu yardımıyla kontakt distribüsyon olarak adlandırılan bir 2n-boyutlu

$$D = \{X \in TM^{2n+1}| \;\; \eta(X) = 0\}$$

distribüsyon tanımlanabilir. Bu D distribüsyonunun yönlendirilebilir olması

$$\eta(\xi) = 1, \qquad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak şekilde ve D nin TM^{2n+1} de tümleyeni olan bir ξ vektör alanının varlığını garanti eder ve bu vektör alanına M^{2n+1} in karekteristik vektör alanı denir. Böylece bir kontakt manifold η 1-formu ve ξ karekteristik vektör alanı ile karekterize edilir. φ, M^{2n+1} üzerinde bir (1,1) tipinde tensör alanı, ξ, M^{2n+1} üzerinde bir vektör alanı olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} e bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahiptir veya M^{2n+1} e bir hemen hemen kontakt manifold denir. Eğer bir hemen hemen kontakt manifold herhangi X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

şartını sağlayan bir g Riemann metriğine sahip ise M^{2n+1} e bir hemen hemen kontakt metrik manifold denir. Ayrıca bir (φ, ξ, η) yapısına sahip olan her bir manifoldda üstteki şartı sağlayan bir g Riemann metriği vardır. Böylece bir hemen hemen kontakt metrik manifoldda, bir Riemann manifoldda yapılan çalışmaların tamamı yapı labilir ve karekterizasyonlar çoğu zaman bu (φ, ξ, η) yapısı sayesinde daha kullanışlı hale indirgenir. Örneğin bir kısmi diferensiyel denklem bu yapı yardımıyla derecesi daha düşük olan bir kısmi diferensiyel denkleme dönüştürülür ve çözümü oldukça kolaylaşır.

M^{2n+1} bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip olan bir hemen hemen kontakt manifold ise $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde (φ, ξ, η) yapısı yardımıyla bir J hemen hemen kompleks yapısı tanımlanabilir. Bu J ile $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$, bir hemen hemen kompleks manifolddur. Eğer J integrallenebilir ise (φ, ξ, η) ya normaldir denir. Bir (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip olan bir kontakt metrik manifoldda, eğer ξ bir Killing vektör alanı ise bu yapıya bir K-kontakt yapı ve manifolda da bir K-kontakt manifold denir. Eğer bir K-kontakt manifold normal ise bu manifolda bir Sasakian manifold denir.

Sasakian manifoldların alt manifoldları, bu alanın ilginç çalışma alanlarından birisidir. Sasakian manifoldların CR-yapısı integral alt manifoldları, invaryant alt manifoldları, warped çarpım alt manifoldları, slant alt manifoldları bir çok matematikçinin çalıştığı önemli konulardan bazılarıdır [12], [13], [14], [15].

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan ve orjinallik içermeyen bu tezin amacı, diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanan kontakt, hemen hemen kontakt, metrik kontakt, K-kontakt ve Sasakian yapı kavramları hakkında bir derleme yapmak ve bu kavramları iyi bir şekilde anlamak ve anlaşilabilir hale getirmektir. Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde üstte bahsedilen bu kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için diferensiyellennebilir manifoldlar, Riemann manifoldlar, Riemann alt manifoldlar, simplektik manifoldlar ve kopleks manifoldlar hakkında temel ve kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümünde ise ilk olarak bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde kontakt yapı kavramı tanımlandı ve kontakt manifoldlarla ilgili örnekler verildi. Daha sonra ise hemen hemen kontakt, metrik kontakt, normal kontakt ve K-kontakt yapı kavramları tanıtıldı ve bu manifold tipleri ilgili örnekler, teoremler ve sonuçlar verildi. Üçüncü bölümde ise Sasakian manifoldlara yer verildi. Bu son bölümde daha sonra CR-yapılar, integral alt manifoldlar ve invaryant alt manifoldlar incelendi.

BÖLÜM 1

Temel Kavramlar

1.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Bu bölüm daha sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara ayrıldı. İlk olarak diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldlar, Riemann alt manifold kavramları tanıtıldı ve bunların bazı önemli özellikleri verildi. Daha sonra ise simplektik ve kompleks manifoldlar kısaca tanıtıldı.

Tanım 1.1.1. *M bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer M nin herbir açık alt kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayına veya $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorf ise M ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir [1].*

Tanım 1.1.2. *M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun. Eğer M nin bir U açık alt kümesi, $\mathbb{R}^n$ nin bir E açık alt kümesine bir ψ homeomorfizmasi ile eşlenebiliyorsa, yani*

$$\psi : U \to E \subset \mathbb{R}^n$$

dönüşümü homeomorfizma ise (U, ψ) ikilisine bir koordinat komşuluğu veya harita denir [1].

M bir n-boyutlu topolojik manifold, A α indislerinin kümesi ve $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ da M nin bir açık örtüsü olsun. Bu durumda her $\alpha \in A$ için U_α ya homeomorf olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de bir V_α açık alt kümesi ve bir

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizması vardır. Bu şekilde ortaya çıkan (U_α, ψ_α) haritalarının $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesine M nin bir atlası veya M nin bir koordinat komşuluğu sistemi denir [1].

(U_α, ψ_α) bir lokal koordinat komşuluğu ve $p \in U_\alpha$ olmak üzere

$$\psi_\alpha(p) = (x^1(p), ..., x^n(p)) \in V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

noktasının bileşenleri olan $x^i(p)$ *reel sayılarına* p *noktasının lokal koordintları,* $x^i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n,$ *fonksiyonlarına lokal koordinat fonksiyonları ve* $(x^1, ..., x^n)$ *e de* p *noktası civarında bir lokal koordinat sistemi denir [1].*

Tanım 1.1.3. *M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir atlası* $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *olsun. Eğer S atlası için,* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *olmak üzere,* $\forall \alpha, \beta \in A$ *ya karşılık* $\phi_{\alpha\beta}$ *ve* $\phi_{\beta\alpha}$ *fonksiyonları* C^k*-sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye* C^k*-sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde* C^k*-sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde* C^k*-sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir [1].*

n-boyutlu bir M topolojik manifoldu üzerinde C^k-sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı var ise, M ye C^k-sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir. M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.4. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve* $p \in M$ *olsun. p noktasının bir U komşuluğunda tanımlanan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini* $C^\infty(U, \mathbb{R})$ *ile gösterelim.*

$$\tau : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ *için*

$$Xf = (\frac{df(\tau(t))}{dt})_{t_0}$$

ile tanımlanan X e, $\tau(t_0) = p$ *noktasında bir tanjant vektörü denir, burada Xf,* $t = t_0$ *da* $\tau(t)$ *eğrisinin doğrultusunda, f fonksiyonun türevidir.*

X vektörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $X : C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ bir lineer dönüşümdür.

2) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg), \quad f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R}).$

$$X(f)(p) = X_p f$$

olmak üzere $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise X e diferensiyellenebilirdir denir [2].

$p \in M$ noktasında, tanjant vektörlerinin kümesine M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir ve bu uzay T_pM ile gösterilir ve T_pM, $\mathbb{R}$ üzerinde bir n-boyutlu vektör uzayıdır [2].

Tanım 1.1.5. *Her $p \in M$ noktasına T_pM de bir tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme M üzerinde bir vektör alanı denir, yani M üzerindeki bir X vektör alanı*

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p\in M} T_pM$$

şeklinde bir dönüşümdür.

M üzerindeki bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir ve $\chi(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı yapısına ve $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ üzerinde de bir modül yapısına sahiptir [1].

Tanım 1.1.6. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve p de M nin herhangi bir noktası olsun. p nin U ve U' $(U \cap U' \neq \phi)$ komşulukları üzerindeki lokal koordinat sistemleri $\{x^i\}$ ve $\{y^i\}$ olmak üzere $y^i = y^i(x^1, ..., x^n)$ olarak yazılır. Eğer $\det[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}] > 0$ ise M ye yönlendirilebilir manifold denir [1].*

Tanım 1.1.7. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. M nin p noktasındaki T_pM tanjant uzayının dual uzayına M nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir. Kotanjant uzayı*

$$T_p^*M = \{\omega \mid \omega : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. T_p^*M nin bir elemanına p de kotanjant vektör denir. Her bir kotanjant vektöre M üzerinde bir 1-form veya diferensiyel 1-form denir [2].

$(x^1, ..., x^n)$, $p \in M$ noktasında bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda $\{\frac{\partial}{\partial x^1} \mid_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} \mid_p\}$, T_pM için bir baz ve $\{dx^1 \mid_p, ..., dx^n \mid_p\}$ de T_p^*M nin bir bazıdır, ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir. Bir $\omega \in T_p^*M$ $1-formu$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx^i, \quad f_i \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$$

olarak yazılır. Eğer f_i ler diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise ω $1-formuna$ diferensiyellenebilirdir denir [2].

Tanım 1.1.8. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

lineer dönüşümü

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ *ya bir afin konneksiyonu ve* ∇_X *e* X *vektör alanına göre kovaryant türev operatörü denir [2].*

Eğer bir diferensiyellenebilir M manifoldunda bir ∇ afin konnneksiyonu $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

şartını sağlıyorsa ∇ konneksiyonu simetriktir denir [3].

Tanım 1.1.9. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.* $\chi(M)$*, M üzerinde vektör alanlarının kümesini ve* $\chi(M)^*$ *de* $\chi(M)$ *nin dualini göstersin. Ayrıca* T_s^r

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \times ... \times \chi(M) \times \chi(M)^* \times \chi(M)^* \times ... \times \chi(M)^* \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklindeki bütün lineer dönüşlerin kümesini göstersin. Bu durumda M de T_s^r *nin bir K elemanına* (r, s) *tipinde bir tensör alanı denir. Ayrıca bu K tensör alanına r yıncı dereceden kovaryant, s yıncı dereceden kontravaryant tensör alanı denir.* $T_0^r = T^r$*,* $T_s^0 = T_s$ *ve* $T_0^0 = C^\infty(M, \mathbb{R})$ *dir [2].*

Tanım 1.1.10. *M bir diferensiyellenebilir manifold, M üzerinde r-formların uzayı* $\Lambda^r(M)$ *olsun.*

$$d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$$

1) Eğer $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ *ise* $df(X) = X(f)$ *dir,*

2) $\theta \in \Lambda^r(M)$ *ve* $\omega \in \Lambda^s(M)$ *ise*

$$d(\theta\Lambda\omega) = d\theta\Lambda\omega + (-1)^r\theta\Lambda d\omega,$$

3) $d^2 = 0$

şartlarını sağlayan d dönüşümüne dış türev denir [9].

ω bir r-form olmak üzere

$$d\omega(X_0, X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i \omega(X_0, X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_r) +$$
$$\sum_{1\leq i\leq j\leq r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, ...\widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_r)\}$$

dır. Özel olarak ω $1-form$ ise

$$d\omega(X_0, X_1) = \frac{1}{2}\{X_0\omega(X_1) - X_1\omega(X_0) - \omega([X_0, X_1])\}$$

dir. Eğer ω 2-form ise

$$d\omega(X_0, X_1, X_2) = \frac{1}{3}\{X_0(\omega(X_1, X_2)) - X_1(\omega(X_0, X_2)) + X_2(\omega(X_0, X_1))$$
$$- \omega([X_0, X_1], X_2) + \omega([X_0, X_2], X_1) - \omega([X_1, X_2], X_0)\} \qquad (1.1.1)$$

dir [4].

1.2 Riemann Manifoldlar

Tanım 1.2.1. *M n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı $(0,2)$ tipinde bir g tensör alanı var ise g ye M üzerinde bir Riemann metrik ve (M, g) ikilisine de bir Riemann manifold denir [2].*

(M, g) bir Riemann manifold, M nin bir p noktasında lokal koordinat sistemi $(x^1, ..., x^n)$ olsun. $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $p \in M$ noktasında iki tanjant vektörü olmak üzere

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$
$$= \sum g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y)$$

olarak yazılır, burada $dx^i(X) = X(x^i) = X^i$ ve $dx^j(Y) = Y(x^j) = Y^j$ dir. Ayrıca $g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$ olmak üzere $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ dır.

Tanım 1.2.2. *∇, bir M manifoldunda afin konneksiyonu olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlanan $T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *tensörüne torsiyon tensörü denir.* T *torsiyon tensörü anti-simetriktir, yani*

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

dir. Ayrıca $X, Y \in \chi(M)$ *ve* f, g *fonksiyonları için*

$$T(fX, gY) = fgT(X, Y)$$

olur [2].

Tanım 1.2.3. *M bir Riemann manifoldu olsun.* $X, Y, Z \in \chi(M)$ *için*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ *dönüşümüne M Riemann manifoldunun eğrilik tensörü denir.*

R eğrilik tensörü anti-simetriktir, yani

$$R(X, Y) = -R(Y, X)$$

dir ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve f,g,h fonksiyonları için

$$R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$$

olur [3].

M manifoldunun $(0, 4)$ tipinde bir Riemann eğrilik tensör alanı $X_i \in T_pM$ için

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.2.4. T_pM *tanjant uzayında* $\{X_1, X_2\}$ *lineer bağımsız vektörlerinin gerdiği* P *düzlemi için*

$$K(P) = \frac{g(R(X_1, X_2)X_2, X_1)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1X_2)^2}$$

ye P *düzleminin kesit eğriliği denir.*

Eğer $\{X_1, X_2\}$ P nin bir ortonormal bazı ise,

$$K(P) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1)$$

olur. $K(P)$, P de $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazlarının seçilişinden bağımsızdır.

Eğer T_pM tanjant uzayında, her P düzlemi ve M manifoldunun her p noktası için, $K(P)$ bir sabit ise bu durumda M manifolduna sabit eğrilikli uzay denir. Bir sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir uzay form denir [2].

Teorem 1.2.1. *Eğer M sabit c eğrilikli uzay form ise, M de X, Y ve Z vektör alanları için*

$$R(X, Y)Z = c[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \tag{1.2.1}$$

dir [2].

Önerme 1.2.1. *Rieamann eğriliği aşağıdaki özellikleri sağlar:*
1) R, $\chi(M) \times \chi(M)$ de bilineerdir, yani $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonları için

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

2) $X, Y \in \chi(M)$ için $R(X, Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ dönüşümü lineerdir, yani $Z, W \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

dir [3].

Teorem 1.2.2. *Bir M Riemann manifoldu üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.*
1) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (I.Bianchi özdeşliği)
2) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$
3) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$
4) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$ [2].

Teorem 1.2.3. *M bir Riemann manifoldu olmak üzere T=0 ve* $\nabla g = 0$ *olacak şekilde bir tek afin konneksiyonu vardır [9].*

İspat. Varlık: M üzerinde X ve Y vektör alanları verilsin. Bu durumda M de herhangi bir Z vektör alanı için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

ile $\nabla_X Y$ tanımlansın. $(X, Y) \to \nabla_X Y$ şeklinde tanımlanan bu dönüşüm M de bir afin konneksiyondur. $\nabla_X Y$ nin (1.2.2) tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_Z X, Y) \\ &\quad - g(\nabla_Z Y, X) + g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) \\ &\quad - g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Z Y, X) - g(\nabla_Y Z, X) \\ &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten $g(T(X, Y), Z) = 0$ elde edilir. Bu durumda $T(X, Y) = 0$ dır. Benzer şekilde (1.2.2) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} 0 &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad - g(\nabla_Z Y, X) + g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y) \\ &\quad + g(\nabla_Z Y, X) - g(\nabla_Y Z, X) \\ &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) \end{aligned}$$

dir ve buradan $\nabla_X g = 0$ olduğu görülür, yani ∇, M de bir metrik konneksiyondur.

Teklik: $\nabla_X g = 0$ ve $T = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dir ve

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

ifadesi

$$g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \tag{1.2.3}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z Y, X) + g([Y, Z], Z) \tag{1.2.4}$$

ve

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Z Y, X) + g([Z, X], Y) \tag{1.2.5}$$

olur. (1.2.4) ve (1.2.5) denklemlerinin toplamından (1.2.3) denklemini çıkarırsak, Kozsul eşitliği denen (1.2.2) denklemini elde ederiz. (1.2.2) denklemi ile verilen ∇ konneksiyonuna Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir [2]. $\square$

$p \in M$ noktasında T_pM nin bazı $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ ve X, p de bir tanjant vektörü olsun. Bu durumda

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \omega_i^j(X) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olarak yazılır, burada ω_i^j, $1 - formlarına$ konneksiyon 1-formlar denir [3].

Tanım 1.2.5. *(M, g) bir Rieamann manifoldu ve R de M nin eğrilik tensör alanı olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için R nin izi*

$$S = iz\{R \to R(X, .)Y\}$$

ye M nin ∇ ya göre Ricci eğriliği denir.

S, $(0, 2)$ tipinde bir tensör alanıdır ve T_pM nin $\{e_i\}$ ortonormal bazı için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X, e_i)Y, e_i)$$

dir. Bir M manifoldunun Q Ricci operatörü, M de herhangi bir X ve Y vektör alanları için

$$g(QX, Y) = S(X, Y)$$

şeklinde tanımlanır ve Q, $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanıdır [3].

Tanım 1.2.6. *M bir diferensiyellenebilir manifold, $\forall p \in M$ noktasında T_pM nin bir D_p alt uzayını karşılık getiren D dönüşümüne bir distribüsyon denir [4].*

$$D : M \longrightarrow \cup T_pM$$
$$p \longrightarrow D_p \subset T_pM.$$

Eğer D_p yi geren $X_1, ..., X_n$ vektör alanları varsa D ye diferensiyellenebilir distribüsyon denir. Eğer $D_p = T_pM$ ise D ye integrallenebilirdir denir.

Tanım 1.2.7. *M bir manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun. Φ_t 1-parametreli dönüşüm gurubu olmak üzere*

$$(L_XK)_x = \lim_{t=0} \frac{1}{t}[K_x - (\Phi_t K)_x]$$

ifadesine K tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi denir. Lie türevi aşağıdaki özellikleri sağlar [5], [9]:

1) $L_X f = Xf, \quad \forall f \in C(M, R)$.

2) $L_X Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M)$.

3) $L_X(fY) = X(f)Y + fL_XY$.

4) $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] = L_XL_Y - L_YL_X$.

5) $L_X(df) = d(X[f])$.

6) $L_X\omega = \tau(X)d\omega + d\tau(X)\omega, \quad \omega$, p dereceden bir diferensiyel form ve $\tau(X)$, X ile bir iç çarpımdır.

7) $(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad \omega \in \chi^\star(M)$.

8) $(L_Xg)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$.

Tanım 1.2.8. *(M, g) bir Riemann manifold ve X de M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer g, X in 1-parametreli dönüşüm grubu altında invaryant, yani*

$$L_X \; g = 0$$

ise X vektör alanına g Riemann metriğinin bir Killing vektör alanı denir. Eğer X bir Killing vektör alanı ise bu durumda M de Y ve Z vektör alanları için

$$(L_Xg)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

dır [10].

1.3 Riemann Alt Manifoldlar

Tanım 1.3.1. *M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Eğer*

$$\varphi : M_1 \to M_2$$

dönüşümü diferensiyellenebilir, birebir, örten ve φ^{-1} de diferensiyellenebilir ise φ ye bir diffeomorfizm denir.

Eğer bir $p \in M_1$ noktasının komşuluğunda φ diffeomorfizm ise bu durumda φ ye $p \in M_1$ noktasında lokal diffeomorfizm denir [3].

Önerme 1.3.1. *$\varphi : M_1^n \to M_2^n$ bir diffeomorfizm olsun. Bu durumda $p \in M_1$ noktasında*

$$d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

dönüşümüne bir izomorfizim denir [3].

Tanım 1.3.2. *M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Eğer*

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\bar{M}$$

dönüşümü $\forall p \in M$ noktasında birebir ise

$$\varphi : M \to \bar{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne immersiyon denir. Bu durumda M manifolduna, $\bar{M}$ manifoldunun bir immersed alt manifoldu denir [3].

Eğer $\varphi : M^m \to \bar{M}^n$ dönüşümü bir immersiyon ise $m \leq n$ dir.

Eğer $d\varphi_p$ dönüşümü $\forall p \in M$ noktasında örten ise φ dönüşümüne submersiyon denir. φ dönüşümü submersiyon ise $m \geq n$ dir.

Eğer $d\varphi_p$ immersiyonu için φ dönüşümü birebir ise bu durumda φ ye imbedding denir [3].

Tanım 1.3.3. *m-boyutlu M manifoldu, n-boyutlu $\bar{M}$ manifoldunun bir immersed alt manifoldu olsun. $\bar{M}$ nün Riemann metrik tensör alanını g ile gösterelim. Bu durumda M de X ve Y vektör alanları için*

$$h(X,Y) = g(X,Y)$$

şeklinde verilen h Riemann metriğine indirgenmiş metrik denir [2].

Tanım 1.3.4. *M, $\bar{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer $x \in M$ noktasında $\bar{M}$ manifoldunun bir V vektörü, $x \in M$ noktasında herhangi bir X vektörü için*

$$g(X, V) = 0$$

şartını sağlıyorsa bu V vektörüne M nin bir normal vektörü denir [2].

TM, M nin tanjant demetini ve $TM^{\perp}$, M alt manifoldun bütün normal vektörlerinin vektör demetini göstersin. Bu durumda, $\bar{M}$ manifoldunun tanjant demeti

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

şeklinde yazılabilir [2].

Tanım 1.3.5. *∇, M manifoldunda ve $\bar{\nabla}$ de $\bar{M}$ manifoldunda kovaryant türev operatörünü göstersin. Bu durumda M de X ve Y vektör alanları için*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{1.3.1}$$

ile verilen denkleme Gauss formülü denir, burada $\nabla_X Y$, $\bar{\nabla}_X Y$ nin teğetsel bileşeni ve $B(X, Y)$ de $\bar{\nabla}_X Y$ nin normal bileşenidir. Ayrıca ∇ Riemann konneksiyonu indirgenmiş konneksiyon ve B de M nin ikinci temel formudur.

$$B : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$$

ile verilen B dönüşümü simetrik ve bilineer bir döşümdür, yani M de f ve g fonksiyonları için

$$B(X, Y) = B(Y, X)$$

ve

$$B(fX, gY) = fgB(X, Y)$$

dir [2].

Tanım 1.3.6. *Bir M manifoldunda, X bir vektör alanı ve V bir normal vekör alanı olsun.*

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V \tag{1.3.2}$$

şeklinde tanımlanan denkleme Weingarten formülü ve A_V ye de Weingarten dönüşümü denir, burada $A_V X$ teğetsel bileşen ve $D_X V$ normal bileşendir.

$A_V X$ bileneerdir, yani f ve g fonksiyonları için

$$A_{V+W}(X) = A_V X + A_W X,$$

$$A_V(X+Y) = A_V X + A_V Y,$$

$$A_{gV}(fX) = fgA_V X$$

dir [2].

Bir M manifoldunda X ve Y vektör alanları ve V de bir normal vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\bar{\nabla}_X g(Y,V) = g(\bar{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \bar{\nabla}_X V)$$

dir ve buradan

$$g(\bar{\nabla}_X Y, V) = -g(Y, \bar{\nabla}_X V)$$

olur. (1.3.1) ve (1.3.2) denklemlerinden B ve A arasındaki bağıntı

$$g(B(X,Y),V) = g(Y, A_V X) \tag{1.3.3}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 1.3.7. *Bir M manifolduna teğet her X vektör alanı için*

$$D_X V = 0$$

ise M de bir V normal vektör alanına paralelldir denir.

Eğer ikinci temel form sıfır ise, yani $B = 0$ veya $A = 0$ ise bir M alt manifolduna total geodeziktir denir [2].

Tanım 1.3.8. *M ye teğet herhangi bir X, Y ve Z vektör alanları için B ikinci temel formun $\nabla_X B$ kovaryant türevi*

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = D_X B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

ile verilir ve ayrıca M de herhangi bir normal vektör alan için

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X (A_V Y) - A_{D_X V} Y - A_V \nabla_X Y$$

dir. Eğer her X için $\nabla_X B = 0$ veya $\nabla_X A = 0$ ise bu durumda M nin ikinci temel formuna paraleldir denir [2].

$\bar{R}$ ve R, sırasıyla $\bar{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensör alanları olsun. Bu durumda M ye teğet herhangi bir X,Y ve Z vektör alanları için $\bar{R}$ ve R arasında, (1.3.1) ve (1.3.2) denklemleri yardımı ile

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y \\ + (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

bağıntısı elde edilir, buna Gauss denklemi denir [2].

M ye teğet herhangi bir X, Y, Z ve W vektör alanları için, (1.3.4) Gauss denkleminden

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(B(X, W), B(Y, Z)) + g(B(Y, W), B(X, Z))$$

elde edilir. (1.3.4) denkleminin normal bileşeni alınırsa

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) \tag{1.3.5}$$

olur ve bu denkleme Codazzi denklemi denir [2].

M nin normal demetinin $R^{\perp}$ eğrilik tensörü

$$R^{\perp}(X, Y) = D_X D_Y V - D_Y D_X V - D_{[X,Y]} V$$

şeklinde tanımlanır. M ye teğet herhangi bir X ve Y vektör alanları ve M ye normal herhangi bir V vektör alanı için Gauss ve Weingartın formüllerinden,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)V = R^{\perp}(X, Y)V - B(X, A_V Y) + B(Y, A_V X) \\ - (\nabla_X A)_V Y + (\nabla_Y A)_V X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda M ye normal bir U vektör alanı için Ricci denklemi

$$g(\bar{R}(X,Y)V,U) = g(R^{\perp}(X,Y)V,U) + g([A_U,A_V]X,Y)$$

dir. Burada $[A_U,A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ dır.

Eğer $\bar{R}(X,Y)Z$, M ye teğet ise bu durumda (1.3.5) Codazzi denklemi

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = (\nabla_Y B)(X,Z)$$

denklemine indirgenir. Buna denk olarak

$$(\nabla_X A)_V Y = (\nabla_Y A)_V X$$

elde edilir.

Eğer $\bar{M}$ sabit eğrilikli ise $\bar{R}(X,Y)Z$, M ye teğettir. Eğer $\bar{M}$, c sabit eğrilik ise Gauss denklemi,

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) =& c[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ &+ g(B(Y,Z),B(X,W)) - g(B(X,Z),B(Y,W)) \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

denklemine indirgenir. Ayrıca $\chi(M)^{\perp}$ nin bir ortonormal bazı $\{e_a\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(B(Y,Z),B(X,W)) - & g(B(X,Z),B(Y,W)) \\ &= \sum_a [g(B(Y,Z),e_a)g(e_a,B(X,W)) \\ &\qquad - g(B(X,Z),e_a)g(e_a B(Y,W))] \\ &= \sum_a [g(A_aY,Z)g(A_aX,W) - g(A_aX,Z)g(A_aY,W)] \end{aligned}$$

dir. Bu durumda (1.3.6) denkleminden

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) =& c[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ &+ \sum_a [g(A_aY,Z)g(A_aX,W) - g(A_aX,Z)g(A_aY,W)] \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

denklemi elde edilir.

S, M manifoldunun Ricci tensörü olsun. Bu durumda (1.3.7) denklemi

$$S(X,Y) = (n-1)cg(X,Y) + \sum_a \dot{I}zA_a g(A_aX,Y) - \sum_a g(A_aX,A_aY)$$

şeklinde verilir.

1.4 Simplektik Manifoldlar

V bir m-boyutlu reel vektör uzayı ve $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in V$ için $\Omega(u,v) = -\Omega(v,u)$ ise Ω ya bir anti-simetrik bilineer dönüşüm denir.

Ω, V üzerinde bir anti-simetrik bilineer dünüşüm ise V nin bir $\{u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$, $(m = k + 2n)$, bazı vardır öyleki

$$\Omega(e_i, v) = 0, \quad i = 1, ..., k, \ v \in V$$

$$\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j), \quad i, j = 1, ..., n$$

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n$$

dir [6].

$$U = \{u \in V | \Omega(u, v) = 0, v \in v\}$$

olmak üzeri U, V nin bir alt uzayıdır. W, V de U nun tümleyini olmak üzere W da V nin bir alt uzayıdır ve

$$V = U \oplus W$$

şeklinde yazılır. U nun tanımı bazın seçilişinden bağımsızdır.

Tanım 1.4.1. *V bir m-boyutlu reel vektör uzayı ve $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer dönüşüm olsun. Bu durumda $\widetilde{\Omega}(v)(u) = \Omega(v, u)$ ile tanımlı $\widetilde{\Omega} : V \to V^\star$ lineer dönüşümünün çekirdeği $\text{çek}\widetilde{\Omega} = U$ dur ve bir alt uzaydır.*

Eğer Ω bilineer dönüşümü için $\widetilde{\Omega}$ bire-bir ve örten ise, yani $U = \{0\}$ ise Ω ya bir simplektik yapı ve (V, Ω) ikilisinede bir simplektik vektör uzayı denir [6].

Tanım 1.4.2. *M bir manifold, Ω da M üzerinde bir kapalı 2-form olsun. Eğer her $p \in M$ için $\Omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü simplektik yapı ise (M, Ω) çiftine bir simplektik manifold ve Ω ya da bir simplektik form denir [6].*

Örnek 1.4.1. *$M = \mathbb{R}^{2n}$ olmak üzere $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ M nin standart koordinat sistemi olsun. Bu durumda*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \Lambda dy_i$$

bir simplektik form ve (M, Ω) bir simplektik manifolddur [6].

1.5 Kompleks Manifoldlar

Tanım 1.5.1. *V bir reel vektör uzayı olsun. V de $J^2 = -I$ özelliğini sağlayan bir $J : V \to V$ lineer endomorfizmine V de bir kompleks yapı denir, burada I, V üzerindeki birim dönüşümdür [2].*

V, J kompleks yapısına sahip bir reel vektör uzayı olsun. V nin bir X elemanı ile $\lambda = a + ib$ kompleks sayısının çarpımı

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX \tag{1.5.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.5.2. *M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer $J^2 = -I$ olacak şekilde J, T_pM tanjant uzayının bir endomorfizmi ise J tensör alanına M de bir hemen hemen kompleks yapı ve M manifolduna da hemen hemen kompleks manifold denir.*

Her bir hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur.

M manifoldunun bir p noktasında, kompleks tanjant uzayını $T_p^C M$ ile gösteririz. $T_p^C M$ nin bir elemanına x noktasında bir kompleks tanjant vektörü denir.

$$T_p^C M = T_p^{1,0} M + T_p^{0,1} M$$

şeklinde yazılır, burada $T_p^{1,0} M$ ve $T_p^{0,1} M$, sırası ile i ve -i eigen değerlerine sahip J nin eigen uzaylarıdır. Bir Z kompleks tanjant vektörü $(1, 0)$ (veya $(0, 1)$) tipindedir gerek ve yeter şart $X \in T_pM$ için $Z = X - iJX$ (veya $Z = X + iJX$) dir [2].

Tanım 1.5.3. *J, bir M manifoldunda hemen hemen kompleks yapı olsun. M de herhangi X ve Y vektör alanları için*

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

ile tanımlanan $(1, 2)$ tipindeki N torsiyon tensör alanına M nin Nijenhus tensör alanı denir [2].

Tanım 1.5.4. *M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $Z, W \in \chi(M)$, $(1, 0)$ tipinde iken $[Z, W]$ da $(1, 0)$ tipinde ise J ye integrallenebilirdir denir [2].*

Teorem 1.5.1. *M, hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olamı için gerek ve yeter şart N Nijenhus tensör alanının sıfır olmasıdır [2].*

İspat. M, bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Ayrıca M de X ve Y vektör alanları için

$$Z = [X - iJX, Y - iJY]$$

diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Z + iJZ &= [X - iJX, Y - iJY] + iJ[X - iJX, Y - iJY] \\
&= [X, Y] - [X, iJY] - [iJX, Y] + [iJX, iJY] \\
&\quad + iJ\{[X, Y] - [X, iJY] - [iJX, Y] + [iJX, iJY]\} \\
&= [X, Y] - i[X, JY] - i[JX, Y] + i^2[JX, JY] \\
&\quad + iJ\{[X, Y] - i[X, JY] - i[JX, Y] + i^2[JX, JY]\} \\
&= [X, Y] + J[X, JY] + J[JX, Y] - [JX, JY] \\
&\quad - iJ\{-[X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] + [JX, JY]\} \\
&= -N(X, Y) - iJN(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hemen hemen kompleks yapı integrallenebilir olduğundan Z, $(1, 0)$ tipindedir ve buradan $Z + iJZ = 0$ dır. Bu durumda $N = 0$ dır. □

Teorem 1.5.2. *M, J hemen hemen kompleks yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Bu durumda J nin bir kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart J nin torsiyonsuz olmasıdır, yani Nijenhus tensör alanının sıfır olamsıdır [2].*

Tanım 1.5.5. *M bir hemen hemen kompleks manifold ve L_X, X vektör alanına göre Lie türevi olsun. Eğer M manifoldunda bir X vektör alanı*

$$L_X J = 0$$

şartını sağlıyorsa bu durumda X e J hemen hemen kompleks yapısının bir infinitesimal otomorfizması (analitik vektör alanı) denir.

M de herhangi bir X ve Y vektör alanı için

$$(L_X J)Y = L_X JY - JL_X Y = [X, JY] - J[X, Y]$$

dir [2].

Önerme 1.5.1. *M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M de bir X vektör alanının bir J hemen hemen kompleks yapsının bir infinitesimal otomorfizması olması için gerek ve yeter şart M de bütün Y vektör alanları için*

$$[X, JY] = J[X, Y]$$

olmasıdir [2].

Tanım 1.5.6. *M, bir J hemen hemen kompleks yapsına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M de herhangi bir X ve Y vektör alanları için*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{1.5.2}$$

şartını sağlayan bir g Riemann metriğine, M de bir Hermitian metrik denir [10].

Bir Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifolda, bir hemen hemen Hermitian manifold denir ve bir Hermitian metriğe sahip bir kompleks manifolda da bir Hermitian manifold denir [2].

Tanım 1.5.7. *M bir J hemen hemen kompleks yapsına sahip bir hemen hemen Hermitian manifold ve g de bir Hermitian metrik olsun. M de her X ve Y vektör alanları için*

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY) \tag{1.5.3}$$

şeklinde tanımlanan Φ tensörüne M nin bir temel 2-formu denir.

Bu durumda

$$\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$$

dir. Ayrıca M de X, Y ve Z vektör alanları için (1.5.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Phi)(Y, Z) &= X\Phi(Y, Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z)\\ &= Xg(Y, JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J\nabla_X Z)\\ &= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J\nabla_X Z)\\ &= g(Y, (\nabla_X J)Z) \qquad (1.5.4)\end{aligned}$$

elde edilir [2].

Teorem 1.5.3. *M bir J hemen hemen kompleks yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Bu durumda M nin bir kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ olacak şekilde M de bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır, burada T, ∇ nın torsiyonudur [2].*

İspat. M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M de $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ ı sağlayan bir ∇ lineer konneksiyonun varlığını kabul edelim. Bu durumda M de X ve Y vektör alanları için $T = 0$ olduğundan

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dir ve $\nabla J = 0$ olduğundan

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX \\ &\quad - J\nabla_{JX} Y + J\nabla_Y JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X \\ &= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + J\nabla_{JX} Y - J\nabla_{JY} X \\ &\quad - J\nabla_{JX} Y - \nabla_Y X + \nabla_X Y + J\nabla_{JY} X \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 1.5.2 den M bir kompleks manifolddur.

Tersine M bir kompleks manifold olsun. Bu durumda $N = 0$ dır. $T = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu alabiliriz.

$$A(X, Y) = (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X$$

ve

$$S(X, Y) = (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X$$

ile iki tensör alanı tanımlayalım. Eğer

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4}\{A(X, JY) - JS(X, Y)\}$$

dersek ∇' bir lineer konneksiyondur.

M de X ve Y vektör alanları için $\nabla' J = 0$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(\nabla'_X J)Y &= \nabla'_X JY - J\nabla'_X Y \\
&= \nabla_X JY - J\nabla_X Y - \frac{1}{4}\{A(X,Y) + JS(X,JY) + JA(X,JY) + S(X,Y)\} \\
&= (\nabla_X J)Y - \frac{1}{4}\{(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X + J(\nabla_X J)JY + J(\nabla_{JY} J)X \\
&\quad (\nabla_X J)JY - J(\nabla_{JY} J)X + (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X\} \\
&= (\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}\{(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)JX\} \qquad (1.5.5)
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
J(\nabla_X J)JY &= J(\nabla_X J^2 Y - J\nabla_X JY) \\
&= -J\nabla_X Y + \nabla_X JY \\
&= (\nabla_X J)Y
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda (1.5.5) denkleminden $\nabla' J = 0$ elde edilir.

Şimdi de $T' = 0$ olduğunu gösterelim. $S(X,Y)$ simetrik ve $A(X,Y)$ anti-simetrik olduğundan,

$$
\begin{aligned}
T'(X,Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] + \frac{1}{4}\{A(X,JY) - A(Y,JX) \\
&\quad + JS(Y,X) - JS(X,Y)\} \\
&= \frac{1}{4}\{A(X,JY) + A(JX,Y)\} \\
&= \frac{1}{4}\{\nabla_X J)JY - (\nabla_{JY} J)X + (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_Y J)JX\} \\
&= \frac{1}{4}\{-\nabla_X Y - J\nabla_X JY - \nabla_{JY} JX + J\nabla_{JY} X \\
&\quad + \nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y + \nabla_Y X + J\nabla_Y JX\} \\
&= \frac{1}{4}\{-[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]\} \\
&= \frac{1}{4}N(X,Y)
\end{aligned}
$$

dir ve böylece

$$
T'(X,Y) = \frac{1}{4}N(X,Y)
$$

elde edilir. M bir kompleks manifold olduğundan $N = 0$ dır. Bu durumda $T' = 0$ olur. □

Lemma 1.5.1. *M, J hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğine sahip bir hemen hemen Hermitan manifold olsun. Bu durumda Riemann konneksiyonun* ∇ *kovaryant türevi g ile tanımlanır. M de X, Y ve Z vektör alanları için* Φ *temel 2-formu ve J nin N torsiyonu*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) - g(JX, N(Y, Z)) = 3d\Phi(X, JY, JZ) - 3d\Phi(X, Y, Z)$$

denklemini sağlarlar [2].

Tanım 1.5.8. *M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer* Φ *temel 2-formu kapalı ise bu durumda M de bir g Hermitian metriğine, bir Kaehlerian metrik denir. Bir Kaehlerian metriğine sahip bir M hemen hemen kompleks manifolduna, bir hemen hemen Kaehlerian manifold ve bir Kaehlerian metriğine sahip, bir M kompleks manifolduna da bir Kaehlerian manifold denir [2].*

Bir M Hermitian manifoldu, bir Kaehlerian manifolddur gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır.

Önerme 1.5.2. *M, J hemen hemen kompleks yapısına sahip bir Kaehlerian manifold ve g de Kaehlerian metrik olsun. R, M nin Riemann eğrilik tensörünü ve S de Ricci tensörünü göstersin. Bu durumda M de herhangi bir X ve Y vektör alanları için;*
a) $R(X, Y)J = JR(X, Y)$ *ve* $R(JX, JY) = R(X, Y)$ *dir.*
b) $S(JX, JY) = S(X, Y)$ *ve* $S(X, Y) = \frac{1}{2}(\dot{I}zJR(X, JY))$
dir [2].

V, bir J kompleks yapısına sahip bir 2n-boyutlu reel vekör uzayı ve

$$B : V \times V \times V \times V \times \rightarrow R$$

bir 4-lineer dönüşüm olsun. Bu durumda bir Kaehlerian manifoldun, R Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki dört özelliği sağlar:
1) B(X,Y,Z,W)=-B(Y,X,Z,W)=-B(X,Y,W,Z),
2) B(X,Y,Z,W)=B(Z,W,X,Y),

3) B(X,Y,Z,W)+B(X,Z,W,Y)+B(X,W,Y,Z)=0,

4) B(JX,JY,Z,W)=B(X,Y,JZ,JW)=B(X,Y,Z,W).

g, V de bir Hermitian iç çarpım olsun. Bu durumda

$$B_0(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) + g(X,JZ)g(Y,JW) - g(X,JW)g(Y,JZ) + 2g(X,JY)g(Z,JW)]$$

şeklinde tanımlanan B_0 yukarıdaki dört şartı sağlar [2].

Tanım 1.5.9. *T_pM tanjant uzayında, her bir P düzlemi için K(P) kesit eğriliği*

$$K(P) = R(X,Y,X,Y) = g(R(X,Y)Y,X)$$

şeklinde tanımlanır, burada $\{X,Y\}$ P için bir ortonormal bazdır. Eğer P, J ye göre invaryant ise bu durumda K(P) ye holomorfik kesit eğriliği denir.

Bir X birim vektör alanı için $K(P)$ holomorfik kesit eğriliği

$$K(P) = R(X,JX,X,JX)g(R(X,JX)JX,X)$$

ile tanımlanır [2].

Teorem 1.5.4. *Bir M Kaehlerian manifoldu, sabit c holomorfik kesit eğrilidir gerek ve yeter şart M de herhangi bir X,Y ve Z vektör alanları için*

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ\}$$

dir [2].

Tanım 1.5.10. *M, hemen hemen J kompleks yapısına sahip, bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. Eğer M de herhangi X ve Y vektör alanları için, M nin J hemen hemen kompleks yapısı*

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0$$

eşitliğini sağlıyor ise bu durumda M ye bir nearly Kaehlerian manifold denir. Bu ifade $(\nabla_X J)X = 0$ eşitliğine denktir [2].

BÖLÜM 2

Kontakt Manifoldlar

Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde, kontakt yapı ve kontakt manifold tanımı verilerek kontakt manifoldlarla ilgili örnekler verildi. İkinci kısımda hemen hemen kontak manifoldların özelliklerine değinildi. Üçüncü kısımda integral alt manifoldlar ve kontakt dönüşümler ele alındı. Dördüncü kısımda hemen hemen normal kontakt manifoldlar tanımlandı. Beşinci kısımda ise K-kontakt manifoldlar incelendi ve bazı önemli özellikleri verildi.

2.1 Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.1.1. *M^{2n+1}, C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir $(2n+1)$ boyutlu bir manifold olsun. Eğer M^{2n+1} üzerinde her yerde diferensiyellenebilir bir η $1-formu$ var ve*

$$\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

şartını şağlıyor ise M^{2n+1} e bir kontakt manifold veya bir kontakt yapıya sahiptir ve η ya da bir kontakt form denir, burada $(d\eta)^n$, n. dış çarpım kuvvetidir, yani $(d\eta)^n = d\eta\Lambda d\eta\Lambda...\Lambda d\eta$ dir. Bir kontakt manifold yönlendirilebilir bir manifolddur [7].

Teorem 2.1.1. *(Darboux). ω, bir M^n diferensiyellenebilir manifoldunda $1-form$ olsun. M^n de*

$$\omega\Lambda(d\omega)^p \neq 0$$

ve

$$(d\omega)^{p+1} = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda M^n manifoldunda

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$$

olacak şekilde herbir nokta civarında bir $(x^1, ..., x^p, y^1, ..., y^{n-p})$ *koordinat sistemi vardır [7].*

Darboux teoremine göre M^{2n+1} kontakt manifoldun herbir noktasında

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$$

olacak şekilde (x^i, y^i, z), $i = 1, ..., n$, koordinat sistemi vardır.

$(x^i, y^i, z), i = 1, ..., n$, $\mathbb{R}^{2n+1}$ öklid uzayında kartezyen koordinatlar olsun ve $\mathbb{R}^{2n+1}$ de η $1-formu$

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} d\eta &= d^2 z - \sum_{i=1}^{n} (dy^i \Lambda dx^i - y^i d^2 x^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i \end{aligned}$$

ve

$$(d\eta)^n \quad = (\sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i)^n$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} \eta\Lambda(d\eta)^n &= \eta\Lambda(\sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i)^n \\ &= (dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i \ )\Lambda(\sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i)^n \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.2. *U ve U', $\mathbb{R}^{2n+1}$ in iki açık alt kümesi olsun.*

$$f^* \eta = \tau \eta$$

olacak şekilde U üzerinde sıfırdan farklı reel değerli bir τ fonksiyonu varsa

$$f : U \longrightarrow U'$$

C^∞ diffeomorfizmine bir kontakt dönüşüm denir. Kontakt dönüşümlerin kümesini Γ ile gösterelim. Bu durumda Γ, dönüşümlerin bileşkesi işlemine göre bir yarı gruptur, yani aşağıdaki özellikler sağlanır:
i) Eğer $f : U \longrightarrow U'$ ve $g : V \longrightarrow V'$ birer kontakt dönüşüm ve $U \cap V \neq \emptyset$ ise bu durumda

$$g \circ f : f^{-1}(U' \cap V) \longrightarrow g(U' \cap V)$$

bileşkesi de bir kontakt dönüşümdür.
ii) $f, g, h \in \Gamma$ için $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ dir.
iii) Γ nın herbir elemanının tersi yine Γ da dır.

$f^*\eta = \eta$ olacak şekilde $f \in \Gamma$ kontakt dönüşümlerinin kümesini Γ_0 ile gösterecek olursak, Γ_0, Γ nın yarı alt gurubudur. [2]

Tanım 2.1.3. *M^{2n+1}, (2n+1)-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.*

$$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n+1}, \quad U_\alpha \subset M^{2n+1}$$

homeomorfizmler ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $f_\alpha \circ f_\beta^{-1} \in \Gamma$ olacak şekilde M^{2n+1} nin $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü var ise M^{2n+1} manifolduna geniş anlamda bir kontakt manifold denir [7].

$\{U_\alpha, f_\alpha\}$ ve $\{U'_\gamma, f'_\gamma\}$, M^{2n+1} in iki atlası olsun. Eğer, tanımlı olduğu yerlerde (yani $U_\alpha \cap U'_\gamma \neq \emptyset$) $f'_\gamma \circ f_\alpha^{-1} \in \Gamma$ ise bu iki atlasa denktir denir. Kolayca gösterilebilir ki bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının bir denklik sınıfına M^{2n+1} üzerinde geniş anlamda bir kontakt yapı denir [7].

Darboux teoremine göre M^{2n+1} üzerinde tanımlı, $\omega\Lambda(d\omega)^p \neq 0$ ve $(d\omega)^{p+1} = 0$ şartlarını sağlayan bir $1-form$ her $x \in M$ noktasında lokal olarak ifade edilebilir. Böylece her kontakt manifold bir geniş anlamda kontakt manifolddur.

Tanım 2.1.4. *M n-boyutlu bir C^∞-manifold olsun. Tanjant demeti TM^n nin (n-1) -boyutlu bir alt distribüsyonu D ye M nin bir hiperdüzlem alanı denir [7].*

Lokal olarak bir hiperdüzlem alanı, sıfırdan farklı bir ω $1-formu$ ile, $\omega = 0$ denklemi ile tanımlanabilir. Aynı düzlem alanı bir ω' $1-formu$ ile de tanımlanıyor ise

$$\omega = \tau\omega' \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde bir τ fonksiyonu vardır, burada (2.1.1) denklemine Pfaffian denklemi denir.

Tanım 2.1.5. *Eğer σ bir hiperdüzlem alanı ve ω $1-formu$ da $x \in M^n$ nin komşuluğunda σ yı tanımlıyor ise*

$$C(x) = \max\{2p+1 \mid \omega\Lambda(d\omega)^p \neq 0\}$$

tamsayısına x de σ nın sınıfı denir. Eğer $C(x) < n$ ise $x \in M^n$ noktasına σ nın bir singüler noktası denir [7].

Geniş anlamda bir kontakt manifold, singüler noktası olmayan bir σ hiperdüzlem alanına sahiptir, yani σ heryerde maksimum sınıfa sahiptir ve manifold tek boyutludur.

σ, M^{2n+1} in bir hiperdüzlem alanı ve $\{U_\alpha\}$ da bir açık örtüsü olsun. Eğer σ her U_α üzerinde tanımlı η_α larla birlikte bir geniş anlamda kontakt yapı ise, TM^{2n+1} in alt demeti D disribüsyonunun $x \in U_\alpha$ noktasındaki lifi

$$D_x = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta_\alpha(X) = 0\}$$

ile verilir.

η_α, U_α da bir kontakt form ve D_x liflerinde $(d\eta_\alpha)^n \neq 0$ olduğu için $d\eta_\alpha$, D_x de bir non-dejenere anti-simetrik bilineer formdur.

Bir $U \cap U' \neq \emptyset$ koordinat komşuluğunda

$$\eta' = f^*\eta = \tau\eta$$

olarak alınırsa bu durumda

$$d\eta' = f^*d\eta = d\tau\Lambda\eta + \tau d\eta$$

olur ve buradan da

$$\eta'\Lambda(d\eta')^n = \tau^{n+1}\eta\Lambda(d\eta)^n \tag{2.1.2}$$

elde edilir.

M^{2n+1} geniş anlamda bir kontakt manifold olsun. Bu durumda $\lambda_\alpha > 0$,

$$\eta_\alpha \Lambda (d\eta_\alpha)^n = \lambda_\alpha dx^1 \Lambda ... \Lambda dx^{2n+1}$$

olacak şekilde bir U_α koordinat komşuluğunda $(x^1, ..., x^{2n+1})$ koordinatları seçilsin. Benzer şekilde, $\lambda_\beta > 0$,

$$\eta_\beta \Lambda (d\eta_\beta)^n = \lambda_\beta dy^1 \Lambda .... \Lambda dy^{2n+1}$$

olacak şekilde bir U_β koordinat komşuluğunda $(y^1, ..., y^{2n+1})$ koordinatları seçilsin. Bu durumda $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ da $\eta_\alpha = \tau_{\alpha\beta}\eta_\beta$ ise, (2.1.2) den

$$\eta_\alpha \Lambda (d\eta_\alpha)^n = \tau_{\alpha\beta}^{n+1} (\eta_\beta \Lambda (d\eta_\beta)^n)$$

olur ve buradan

$$\tau_{\alpha\beta}^{n+1} \lambda_\beta |\frac{\partial y^i}{\partial x^i}| = \lambda_\alpha$$

elde edilir [8].

Eğer M^{2n+1} yönlendirilebilir ve n çift ise $\tau_{\alpha\beta}$ nın determinantı pozitiftir ve D vektör demeti yönlendirilebilirdir.

Teorem 2.1.2. *M^{2n+1}, geniş anlamda yönlendirilebilir bir kontakt manifold ve n çift olsun. Bu durumda M^{2n+1} bir kontakt manifolddur [8].*

İspat. Kabulden dolayı TM^{2n+1} ve D yönlendirilebilirdir. Böylece TM^{2n+1}/D bölüm demetinin sıfırdan farklı bir global S kesiti vardır. Ayrıca M^{2n+1} nin $\{U_\alpha\}$ örtüsü için, U_α üzerinde S nin indirgenmesi ile lokal olarak S_α kesitlerini tanımlayabiliriz, dolayısıyla aynı işaretli sıfırdan farklı h_α fonksiyonları vardır öyleki

$$S_\alpha = h_\alpha S$$

olarak yazılır. Her bir U_α üzerinde

$$\eta_\alpha(S_\alpha) = 1$$

denklemi ile η_α lokal $1 - formlarını$ tanımlayalım. Eğer $\eta = h_\alpha \eta_\alpha$ denilirse global olarak η $1 - formu$ tanımlanmış olur ve her bir U_α üzerinde

$$\eta_\alpha \Lambda (d\eta_\alpha)^n \neq 0$$

olduğundan $\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$ dır. Böylece M^{2n+1} bir kontakt manifolddur. Eğer n tek ise M^{2n+1} in yönlendirilebilir olması, D nin yönlendirilebilir olmasını gerektirmez. □

Tanım 2.1.6. *M^{2n+1} bir kontakt manifold olsun. Bu durmda M^{2n+1} de alt demet veya $2n$ boyutlu distribusyun olan D ye kontakt distribüsyon denir ve*

$$D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

M^{2n+1} ve D nin yönlendirilebilir olması, TM^{2n+1}/D doğru demetinin $\eta(S) = 1$ olacak şekilde bir S kesitinin varlığını garanti eder. Böylece M^{2n+1} de ξ ile gösterilen sıfırdan farklı bir global vektör alanının varlığı garanti olur. M^{2n+1} de bütün X vektör alanları için

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.1.3}$$

ve

$$d\eta(\xi, X) = 0 \tag{2.1.4}$$

dır. Böylece ξ, D nin tümleyeni olan bir 1-boyutlu distribüsyon tanımlar ve ξ ye kontakt yapının karekteristik vektör alanı denir.

ξ nin iki temel özelliği, η ve $d\eta$ nin ξ nin 1-parametreli dönüşüm grubu altında invaryant olmasıdır, yani η ve $d\eta$ nin Lie türevleri sıfırdır. Açık olarak görülürki $\eta(\xi) = 1$, $d\eta(\xi, X) = 0$ olduğundan, Tanım 1.2.7 de Lie türevinin 7. özelliğinden

$$(L_\xi\eta)(X) = \xi\eta(X) - \eta([\xi, X])$$

dir ve

$$d\eta(\xi, X) = \frac{1}{2}\{\xi\eta(X) - X\eta(\xi) - \eta([\xi, X])\}$$

denkleminden

$$2d\eta(\xi, X) = (L_\xi\eta)(X)$$

elde edilir ve (2.1.4) denkleminden

$$L_\xi\eta = 0 \tag{2.1.5}$$

olur. Lie türevinin 6. özelliğinden

$$\begin{aligned} dL_\xi \eta &= d(\xi \circ d\eta) + d(d(\xi \circ \eta)) \\ &= d(\xi \circ d\eta) \end{aligned}$$

dir ve ayrıca

$$\begin{aligned} L_\xi d\eta &= (\xi \circ dd\eta) + d(\xi \circ d\eta) \\ &= d(\xi \circ d\eta) \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$dL_\xi \eta = L_\xi d\eta$$

elde edilir. Bu durumda (2.1.5) denkleminden

$$L_\xi d\eta = 0 \tag{2.1.6}$$

olduğunu buluruz.

Eğer ξ bir regüler vektör alanı ise kontakt yapıya regülerdir denir.

Örnek 2.1.1. *(x^i, y^i, z), $\mathbb{R}^{2n+1}$ de kartezyen koordinatlar olsun. Bu durumda*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

$\mathbb{R}^{2n+1}$ de bir kontakt yapıdır. $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ olmak üzere D kontakt distribisyonu

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}, \qquad i = 1, ..., n$$

ve

$$X_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad i = 1, ..., n$$

tarafından gerilir. Buna göre

$$\begin{aligned} d\eta &= d^2 z - \sum_{i=1}^{n} dy^i \Lambda dx^i - \sum_{i=1}^{n} d^2 y^i \Lambda dx^i \\ d\eta &= -\sum_{i=1}^{n} dy^i \Lambda dx^i \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(d\eta)^n &= (\sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i)^n \\
\eta\Lambda(d\eta)^n &= (dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i)\Lambda(\sum_{i=1}^{n} dx^i \Lambda dy^i)^n \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\eta(X_i) &= dz(X_i) - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i(X_i) \\
&= dz(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}) - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}) \\
&= y^i - y^i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan $\eta(X_i) = 0$, $i = 1, ..., n$ *dır.*

$$
\begin{aligned}
\eta(X_{n+i}) &= dz(X_{n+i}) - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i(X_{n+i}) \\
&= dz(\frac{\partial}{\partial y^i}) - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i(\frac{\partial}{\partial y^i}) \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan $\eta(X_{n+i}) = 0$, $i = 1, ..., n$ *dır. Böylece kontakt distribüsyon*

$$D = \{X_i, X_{n+i} \in TM^{2n+1} \mid \eta(X_i) = 0 \ ve \ \eta(X_{n+i}) = 0\}$$

şeklinde elde edilir [7].

Şimdi kontakt manifold olmayan, bir geniş anlamda kontakt manifold örneği verelim.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^{n+1}$, *(n+1)-boyutlu standart reel vektör uzayı ve* $P\mathbb{R}^n$ *de n-boyutlu reel projektif uzay olsun.* $\mathbb{R}^{n+1}$ *in standart koordinat sistemi* $(x^1, ..., x^{n+1})$ *ve* $P\mathbb{R}^n$ *in bir homojen koordinat sistemi de* $(t_1, ..., t_{n+1})$ *ve*

$$M^{2n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times P\mathbb{R}^n$$

olsun. M^{2n+1} *in bir* $\{U_i\}$ *açık örtüsünü* $i = 1, ..., n+1,\ t_i \neq 0$ *olarak seçelim. Bu durumda* $P\mathbb{R}^n$ *de bir lokal koordinat sistemi* $(y_1^i, ..., y_n^i)$ *olmak üzere*

$$y_a^i = \frac{t_a}{t_i},\ a < i, \qquad y_a^i = \frac{t_{a+1}}{t_i},\quad a > i$$

dır. U_i *üzerindeki lokal* η_i $1-formunu$

$$\eta_i = \frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{n+1} t_j dx^j$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$\eta_i = \frac{t_j}{t_i}\eta_j$$

dir ve

$$d\eta_i = -\frac{1}{t_i^2}\sum_{j=1}^{n+1} t_j dx^j + \frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{n+1} dt_j \Lambda dx^j$$

olur. Böylece

$$\eta_i \Lambda (d\eta_i)^n \neq 0$$

elde edilir ve böylece M^{2n+1} *geniş anlamda bir kontakt yapıya sahiptir. Fakat n-nin çift olması durumunda* M^{2n+1} *bir yönlendirilebilir olmayan manifolddur ve böylece bir global kontakt yapı elde edilemez.*

Bu örneği $n = 2$ *durumu için gösterelim. Bu durumda*

$$M^5 = \mathbb{R}^3 \times P\mathbb{R}^2$$

olur. $\mathbb{R}^3$ *ün standart koordinat sistemi* (x, y, z) *ve* $P\mathbb{R}^2$ *nin homojen koordinat sistemi* (x_1, x_2, x_3) *olsun. Bu durumda* $P\mathbb{R}^2$ *de iki farklı lokal koordinat sistemi* $F = \{u, v\}$ *ve* $F' = \{u', v'\}$ *olmak üzere,* $x_1 \neq 0$ *olacak şekilde*

$$u = \frac{x_2}{x_1}, \qquad v = \frac{x_3}{x_1}$$

ve $x_2 \neq 0$ *olacak şekilde*

$$u' = \frac{x_1}{x_2}, \qquad v' = \frac{x_3}{x_2}$$

dir. Eğer $u = fu'$ *ve* $v = gv'$ *ise*

$$\frac{x_2}{x_1} = f\frac{x_1}{x_2}, \qquad \frac{x_3}{x_1} = g\frac{x_3}{x_2}$$

dir ve buradan

$$f = \frac{x_2^2}{x_1^2}, \qquad g = \frac{x_3 x_2}{x_1 x_3}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_2^2}{x_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 x_2}{x_1 x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin determinantı

$$det[\frac{\partial F}{\partial F'}] = \frac{x_2^3}{x_1^3}$$

olarak elde edilir ve bu değer pozitif de olabilir negatif de. Böylece n=2 için M^5 bir yönlendirilebilir manifold olduğu garanti edilemez [7].

Örnek 2.1.3. *Her kompakt yönlendirilebilir 3-manifoldu üzerinde bir kontakt yapı vardır. Burada 3-boyutlu T^3 torsu üzerinde bir kontakt yapı vereceğiz.*

$\mathbb{R}^3$ *uzayının standart koordinatları* (x^1, x^2, x^3) *olmak üzere* η *yı*

$$\eta = \cos x^3 dx^1 + \sin x^3 dx^2$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$d\eta = -\sin x^3 dx^3 \Lambda dx^1 + \cos x^3 dx^3 \Lambda dx^2$$

dır ve

$$\begin{aligned} \eta \Lambda d\eta &= (\cos x^3 dx^1 + \sin x^3 dx^2)\Lambda(-dx^3 \sin x^3 dx^1 + dx^3 \cos x^3 dx^2) \\ &= \cos^2 x^3 dx^1 \Lambda dx^2 - \sin^2 x^3 dx^2 \Lambda dx^1 \\ &= (\cos^2 x^3 dx^1 \Lambda dx^2 - \sin^2 x^3 dx^2 \Lambda dx^1)\Lambda dx^3 \\ \eta \Lambda d\eta &= dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda dx^3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir kontakt yapı oluşturur.

Γ, $\{x^i \longrightarrow x^i + 2\pi, i = 1,2,3\}$ üreteçlerine sahip, $\mathbb{R}^3$ de ötelemelerin gurubu olsun. Bu durmda $T^3 = \mathbb{R}^3 \diagup \Gamma$, η kontakt yapısına sahip bir torsdur.

Bu kontakt yapının ξ karakteristik vektör alanı

$$\xi = \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \eta &= \cos x^3 dx^1 + \sin x^3 dx^2 \\ \eta(\xi) &= \cos^2 x^3 dx^1 (\frac{\partial}{\partial x^1}) + \sin^2 x^3 (\frac{\partial}{\partial x^2}) dx^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

dır.

$(0,0,\frac{\pi}{3})$ dan geçen ξ nın integral eğrisi $x^1 = \frac{t}{2}$, $x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, $x^3 = \frac{\pi}{3}$ ile verilir [7].

Teorem 2.1.3. *$\tau : M^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$, $\mathbb{R}^{2n+2}$ de gömülü bir smooth hiperyüzey ve M^{2n+1} ın tanjant uzayının $\mathbb{R}^{2n+2}$ nin orijinini içermediğini kabul edelim. Bu durumda M^{2n+1} bir kontakt yapıya sahiptir [2].*

İspat. $(x^1, ..., x^{2n+2})$, $\mathbb{R}^{2n+2}$ de kartezyen koordinatlar olsun ve bir α $1-formu$

$$\alpha = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + ... + x^{2n+1} dx^{2n+2} - x^{2n+2} dx^{2n+1}$$

ile verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} d\alpha &= 2(dx^1 \Lambda dx^2 + ... + dx^{2n+1} \Lambda dx^{2n+2}) \\ \alpha \Lambda (d\alpha)^n &= 2^{n-1} n! [\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda ... \Lambda dx^{i-1} \Lambda dx^{i+1} \Lambda ... \Lambda dx^{2n+2}] \end{aligned}$$

dır. $V_1, ..., V_{2n+1}$, $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^{2n+2})$ noktasında lineer bağımsız vektörler ve bir ω vektörünün bileşenlerini de

$$\omega^A = *dx^A (V_1, ..., V_{2n+1})$$

ile tanımlayalım, burada $*$, $\mathbb{R}^{2n+2}$ üzerindeki Öklidyen metriğin Hodge Star operatörüdür. Bu durumda ω vektörü, $V_1, ..., V_{2n+1}$ tarafından gerilen hiperdüzleme diktir. x_0 noktasını, bileşenleri x_0^A olan bir vektör olarak gözönüne aldığımızda

$$\alpha \Lambda (d\alpha)^n (V_1, ..., V_{2n+1}) = x_0 . \omega$$

elde edilir. Böylece eğer M^{2n+1} in tanjant uzayları $\mathbb{R}^{2n+1}$ de hiperdüzlemler olarak orijini ihtiva etmiyorsa, $\eta = \tau^*\alpha$, M^{2n+1} üzerinde bir kontakt formdur (orijini ihtiva etmediğinden $x_0.\omega \neq 0$ olur). □

Örnek 2.1.4. $\mathbb{C}^*$, *sıfırdan farklı kompleks sayıların kümesini göstersin* ($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) *ve* (r, θ) *da kutupsal koordinatlar olsun. Bu durumda* $M^3 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ *de bir* η $1 - formu$

$$\eta = dz - r^2 d\theta$$

ile tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan η *bir kontakt yapıdır ve*

$$\begin{aligned} d\eta &= -2rdr\Lambda d\theta \\ \eta\Lambda d\eta &= (dz - r^2 d\theta)\Lambda(2d\theta\Lambda dr) \\ &= 2rdz\Lambda d\theta\Lambda dr \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

dır. $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ *karekteristik vektör alanıdır ve* D *kontakt distribusyonuda*

$$\frac{\partial}{\partial r}$$

ve

$$V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial z}$$

tarafından gerilir. Gerçektende

$$\begin{aligned} \eta(\frac{\partial}{\partial r}) &= dz(\frac{\partial}{\partial r}) - r^2 d\theta(\frac{\partial}{\partial r}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(V) = \eta(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial z}) &= dz(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial z}) - r^2 d\theta(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= r - r^2\frac{1}{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece M^3 *bir kontakt manifolddur.*

V *nin integral eğrileri,* $r =$ *sabit silindirleri üzerindeki helislerdir [7].*

2.2 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

İlk olarak TM^{2n+1} nin yapısal gurubunun üniter matrislerin grubuna indirgendiğini gösteren bir teorem verelim.

Teorem 2.2.1. *M^{2n+1} bir kontakt manifold ve TM^{2n+1} de M^{2n+1} in tanjant demeti olsun. Bu durumda TM^{2n+1} in yapısal grubu $U(n) \times 1$ e indirgenebilir [7].*

İspat. M^{2n+1} yönlendirilebilir olduğu için TM^{2n+1} nin yapısal gurubu $Gl(2n+1, \mathbb{R})$ den $SO(2n+1, \mathbb{R})$ e indirgenebilir. η kontakt formu, sırasıyla $2n$ ve 1 boyutlu ve birbirinin tümleyeni olan iki distribüsyon tanımladığından yapısal gurubu

$$SO(2n, \mathbb{R}) \times SO(1, \mathbb{R}) = SO(2n, \mathbb{R}) \times 1$$

e indirgenebilir (D distribüsyonu ve ξ nin tanımladığı distribüsyon). Şimdi $\{U_\alpha\}$, M^{2n+1} in bir açık örtüsü öyleki θ^i ve θ^{n+i} ler U_α üzerinde $1-formlar$ olmak üzere

$$d\eta = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \Lambda \theta^{n+i}$$

olsun ve

$$G_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(2n, \mathbb{R}) \cong SO(2n, \mathbb{R}) \times 1$$

$\{U_\alpha\}$ örtüsüne göre TM^{2n+1} için geçiş fonksiyonları olsunlar, burada $SO(2n, \mathbb{R})$ deki matrisini $G_{\alpha\beta}$ ile göstereceğiz. Eğer F, $\sum_{i=1}^{n} \theta^i \Lambda \theta^{n+i}$ nin bileşenlerinin matrisi ise bu durumda

$$G_{\alpha\beta} F = F G_{\alpha\beta}$$

ve

$$F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dır, burada I, $n \times n$ birim matristir ve böylece

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris olmak zorundadır, burada ise A ve B, $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ şeklinde $n \times n$ matrislerdir. Şimdi bu $G_{\alpha\beta}$ matrislerinin kümesi üzerinde

$$\Psi(G_{\alpha\beta}) = (a_{ij} + \sqrt{-1} b_{ij})$$

şeklinde bir Ψ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda

$$\Psi(G_{\alpha\beta})^t = \Psi(G^t_{\alpha\beta}) = \Psi(G^{-1}_{\alpha\beta}) = \Psi(G_{\alpha\beta})^{-1}$$

elde edilir, yani

$$\Psi(G_{\alpha\beta}) \in U(n)$$

dir, burada $U(n)$ üniter matrislerinin grubudur ve Ψ^{-1} de $U(n)$ üzerinde

$$GF = FG$$

olacak şekilde bütün G matrislerinin $SO(2n, \mathbb{R})$ kümesi üzerine bir dönüşümdür. Böylece

$$\Psi : \{G \in SO(2n, \mathbb{R}) \mid GF = FG\} \longrightarrow U(n)$$

bir izomorfizimdir ve böylece TM^{2n+1} in yapısal gurubu $U(n)\times 1$ e indirgenebilir. □

Tanım 2.2.1. *M, 2n+1-boyutlu bir manifold, φ M üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ M üzerinde bir vektör alanı ve η da bir $1-form$ olsun. Eğer φ, ξ ve η*

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.2.1}$$

ve

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.2.2}$$

şartlarını sağlıyorsa, M ye bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahiptir veya M ye hemen hemen bir kontakt manifold denir, burada I, TM üzerinde birim dönüşümdür [7].

Önerme 2.2.1. *M^{2n+1}, bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip olsun. Bu durumda*

$$\varphi\xi = 0 \tag{2.2.3}$$

$$\eta(\varphi X) = 0 \tag{2.2.4}$$

$$rank\varphi = 2n$$

dır.

İspat. İlk olarak (2.2.2) ve (2.2.1) den

$$\begin{aligned}\varphi^2\xi &= -\xi + \eta(\xi)\xi \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece ya $\varphi\xi = 0$ veya $\varphi\xi$, φ nin 0 eigen değerine karşılık gelen aşikar olmayan eigen vektörüdür. (2.2.2) den

$$0 = \varphi^2\varphi\xi = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

veya

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi \tag{2.2.5}$$

elde edilir. Eğer $\varphi\xi$, sıfır eigen değerine karşılık gelen bir aşikar olmayan eigen vektör ise

$$\eta(\varphi\xi) \neq 0$$

dır. (2.2.5) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$0 = \varphi^2\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\eta(\varphi\xi)\xi = (\eta(\varphi\xi))^2\xi \neq 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir, dolayısıla $\varphi\xi = 0$ olmak zorundadır. $\varphi\xi = 0$ olduğu için, (2.2.2) den herhangi bir X vektör alanı için

$$\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi$$

veya

$$\begin{aligned}\eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X \\ &= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\ &= -\varphi X + \varphi(\eta(X)\xi) + \varphi X \\ &= \eta(X)\varphi\xi \\ &= 0\end{aligned}$$

olur, yani $\eta \circ \varphi = 0$ elde edilir. Sonuç olarak her yerde $\varphi\xi = 0$, $\xi \neq 0$ olduğu için $rank\varphi < 2n+1$ dır. Eğer bir $\overline{\xi}$ vektör alanı $\varphi\overline{\xi} = 0$ ı sağlayan bir diğer vektör alanı ise (2.2.2) den

$$0 = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi$$

dır ve $\overline{\xi} = \eta(\overline{\xi})\xi$ olarak yazılır, yani $\overline{\xi}$, ξ doğrultusundadır, dolaysıyla $rank\varphi \ = 2n$ dir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Tanım 2.2.2. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η) ile birlikte bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Eğer M^{2n+1} herhangi X ve Y vektör alanları için*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.2.6}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriğine sahip ise M^{2n+1} e (φ, ξ, η, g) yapısına sahiptir veya M^{2n+1} e hemen hemen kontakt metrik yapısına sahiptir ve g metriğine de bağdaşık (compatible metric) metrik denir [7].

Eğer (2.2.6) da Y yerine ξ alınırsa, (2.2.1) ve (2.2.3) denklemlerinden

$$g(\varphi X, \varphi\xi) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(\xi)$$
$$\eta(X) = g(\xi, X) \tag{2.2.7}$$

edilir edilebilir. Şimdi böyle bir metriğin, (φ, ξ, η) yapısına sahip bir manifoldda daima var olduğunu gösterelim.

Önerme 2.2.2. *Eğer M^{2n+1} bir (φ, ξ, η) yapısına sahip bir manifold ise bu durumda M^{2n+1},*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriğine sahiptir [7].

İspat. M^{2n+1} parakompakt manifold olduğundan M^{2n+1} üzerinde bir h' Riemann metriği vardır. M^{2n+1} üzerinde

$$h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

şeklinde bir (0,2) tipinde h tensörünü tanımlayalım. Bu durumda üstteki denklemde Y yerine ξ alınırsa, (2.2.3) den $h(\xi, X) = \eta(X)$ dir ve kolayca gösterilebilir ki h bir

Riemann metriğidir. Şimdi g metriğini

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}(h(X,Y) + h(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y))$$

şeklinde tanımlayalım. g nin bir Riemann metriği olduğu açıktır ve

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(\varphi^2 X + \varphi^2 Y) + \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X,Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Önerme (2.2.2) de iddia edilen g Riemann metriği bir tek olmak zorunda değildir. □

(φ, ξ, η) yapısına sahip bir M^{2n+1} manifoldu üzerinde bir kullanışlı lokal ortonormal baz bulabiliriz. U_α bir koordinat komşuluğu ve U_α üzeride ξ ye dik olan bir birim vektör alanı X_1 olsun. Bu durumda (2.2.6), (2.2.3) ve (2.2.4) den

$$\begin{aligned} g(\varphi X_1, \xi) &= g(\varphi^2 X_1, \varphi\xi) + \eta(\varphi X_1)\eta(\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\varphi X_1, X_1) &= g(\varphi^2 X_1, \varphi X_1) + \eta(\varphi X_1)\eta(X_1) \\ &= -g(X_1, \varphi X_1) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$g(\varphi X_1, X_1) = 0$$

olacak şekilde φX_1, ξ ve X_1 e diktir. Benzer şekilde U_α üzerinde ξ, X_1 ve φX_1 ye dik olacak şekilde bir X_2 birim vektör alanını alabiliriz ve φX_2, ξ, X_1, φX_1 ve X_2 ye diktir. Bu şekilde devam edilirse U_α üzerinde bir $\{X_i, X_{i^*} = \varphi X_i, \xi\}$, $i = 1, ..., n$ bir lokal ortonormal bazı elde edilir ve bu baza φ-bazı denir [2].

Teorem 2.2.2. *M, (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip bir (2n+1)-boyutlu kontakt manifold olsun. Bu durumda M nin tanjant demetinin yapısal grubu $U(n)\times 1$ e indirgenir. Tersine M nin tanjant demetinin yapısal grubu $U(n)\times 1$ e indirgeniyor ise M bir hemen hemen kontakt yapıya sahiptir [2].*

İspat. Kabul edelimki M bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip olsun. M nin $e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi$ şeklinde bir ortanormal çatısını şeçebiliriz. Bu çatıya göre g metriği ve φ tensörünün matrisleri,

$$g = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

olarak elde edilir.

g ve φ ye göre bir başka çatı $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n, \varphi\bar{e}_1, ..., \varphi\bar{e}_n, \xi$ olmak üzere

$$\bar{e}_i = re_i, \quad \varphi\bar{e}_i = r\varphi e_i, \quad \xi = r\xi$$

olacak şekilde bir r matrisi vardır. Bu r matrisi

$$r = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir ortogonal matristir ve bu ortogonal matris de C=-B ve D=A dır, yani

$$r = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir, burada A ve B $n \times n$ tipinde ortogonal matrislerdir. Böylece M nin tanjant demetinin yapısal grubu $U(n) \times 1$ e indirgenir.

Tersine eğer M nin tanjant demetinin yapısal grubu $U(n) \times 1$ e indirgenebiliyor ise, bu durumda g ve φ tensörleri bir çatıya göre (2.2.8) de olduğu gibi seçilebilir. η $1-formu$ ve ξ vektör alanı da $(0, 0, ..., 0, 1)$ ve ${}^t(0, 0, ..., 0, 1)$ olarak şeçilirse, bunlar istenilen özellikleri sağlar [2]. □

Buna göre bir hemen hemen kontakt manifoldun yapısal grubu, $U(n) \times 1$ e indirgendiğinden ve $U(n) \times 1$ in her elemanının determinantı pozitif olduğundan her hemen hemen kontakt manifold yönlendirilebilirdir.

Şimdi hemen hemen kontakt yapının, Tanım 2.2.1 dekinden farklı olan bir tanımı vereceğiz.

Tanım 2.2.3. *M^{2n+1}, bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^{2n+1}*

$$\eta\Lambda\Phi^n \neq 0$$

olacak şekilde bir global η $1-forma$ ve bir global Φ $2-forma$ sahip ise M^{2n+1} e bir hemen hemen kontakt yapıya sahiptir, denir [7].

M^{2n+1} in bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip ve g de M^{2n+1} de bir bağdaşık metrik olsun. Bu durumda Φ $2-formunu$

$$\Phi(X,Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. (2.2.6) da Y yerine φX yazılırsa

$$g(\varphi X, \varphi^2 Y) = g(X, \varphi Y) - \eta(X)\eta(\varphi Y)$$

elde edilir. (2.2.4) den, yani $\eta \circ \varphi = 0$ olduğundan

$$g(\varphi X, \varphi^2 Y) = g(X, \varphi Y)$$

dir, ayrıca (2.2.2) den

$$g(\varphi X, -Y + \eta(Y)\xi) = g(X, \varphi Y)$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$-g(\varphi X, Y) + \eta(Y) g(\varphi X, \xi) = g(X, \varphi Y)$$

dir ve (2.2.4) ve (2.2.7) den de

$$-g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.2.10}$$

bulunur ki bu da Φ nin anti-simetrik olması demektir. Φ ye, (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısının temel $2-formu$ denir. φ nin *rankı* $2n$ olduğundan $\eta\Lambda\Phi^n \neq 0$ olmak zorundadır [7].

Önerme 2.2.3. *M^{2n+1}, heryerde*

$$\eta\Lambda\Phi^n \neq 0$$

olacak şekilde bir global η $1-formuna$ ve global bir Φ $2-formuna$ sahip diferensiyellenenebilir manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} hemen hemen kontakt yapısına sahiptir. Eğer M^{2n+1} bir η kontakt formuna sahip ise, bu durumda temel $2-formu$

$$\Phi = d\eta \tag{2.2.11}$$

olacak şekilde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır [7].

İspat. İlk önce birinci durumu ispatlayalım. $\eta\Lambda\Phi^n \neq 0$ olduğundan Φ maksimal ranka sahiptir. M^{2n+1} yönlendirilebilir ve Φ maksimal ranka sahip olduğundan (yani $rank\varphi = 2n$), her bir X vektör alanı için

$$\Phi(\xi', X) = 0$$

olacak şekilde sıfırdan faklı bir ξ' vektör alanı vardır. h, M^{2n+1} üzerinde bir Riamann metriği ve ξ' doğrultusunda birim vektör alanı ξ olmak üzere

$$\eta'(X) = h(X, \xi)$$

ile η' $1-formunu$ tanımlayalım. Böylece, eğer h' M^{2n+1} üzerinde herhangi bir Riemann metriği ise h yı

$$h(X,Y) = h'(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi) + \eta(X)\eta(Y)$$

olarak tanımlarsak h, M^{2n+1} üzerinde bir Riemann metriğidir. Y yerine ξ alınırsa

$$\eta(X) = h(X, \xi)$$

şeklinde elde edilir. Böylece birinci durum için verilen Φ alınarak ve ikinci durum için $\Phi = d\eta$ denilmesiyle, ξ nin ortogonal tümliyeni üzerinde Φ bir simplektik formdur. Böylece ξ nin ortogonal tümliyeni üzerinde bir g' metriği ve bir φ endomorfizmi vardır öyleki

$$g'(X, \varphi Y) = \Phi(X, Y)$$

ve

$$\varphi^2 = -I$$

dır. g' metriğini, ξ doğrultusunda h ile çakışan bir g metriğine genişletebiliriz, benzer şekilde φ de $\varphi\xi = 0$ olacak şekilde genişletilebilir. □

Tanım 2.2.4. *$\Phi = d\eta$ olacak şekilde bir hemen hemen kontakt metrik yapıya, η kontakt yapısı ile birleşen hemen hemen kontakt metrik yapı veya sadece (φ, ξ, η, g)-kontakt metrik yapı ya da birleşen metrik g (associated metric g) denir [7].*

Benzer şekilde (2.2.9) ve (2.2.11) eşitliklerinden,

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.2.12}$$

olacak şekilde bir hemen hemen kontakt metrik yapı varsa g Riemann metriğine, η kontakt yapısı ile birleşen hemen hemen kontakt metrik yapı denir [8].

Örnek 2.2.1. *$\mathbb{R}^{2n+1}$ in Örnek 2.1.1 de bir kontakt manifold yapısına sahip oldugunu göstermiştik.*

$\mathbb{R}^{2n+1}$ de,

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i)$$

1-formunu standart kontakt yapı olarak alalım. ξ karakteristik vektör alanı $2\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\mathbb{R}^{2n+1}$ de,

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{n}((dx^i)^2 + (dy^i)^2))$$

Riemann metriği bir kontakt metrik yapı olarak verilsin. g nin matrisi

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. φ tensör alanını

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi yardımı ile tanımlayalım. Böylece g, $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir kontakt metrik yapıdır ve $\mathbb{R}^{2n+1}$ in φ-bazı ise $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}, X_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \xi\}$, i=1,...,n, dir [8].

Burada verilen g Riemann metriği aşağıdaki özelliklere sahiptir:

ξ vektör alanı g nin izometrilerinin bir 1-parametreli gurubunu üretir, yani ξ bir Killing vektör alanıdır. ξ vektörünü içeren herhangi bir düzlem kesitinin kesit eğriliği 1 e eşittir.

Örnek 2.2.2. *Bu örnekte, bir hemen hemen kompleks manifoldun her bir C^∞ yönlendirilebilir hiperyüzeyinin, bir hemen hemen kontakt yapıya sahip olduğunu ispatlayacağız.*

$(\tilde{M}^{2n+2}, J)$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $\tau : M^{2n+1} \to \tilde{M}^{2n+2}$ bir C^∞ yönlendirilebilir hiperyüzey olsun. JC teğet olacak şekilde M^{2n+1} boyunca bir C transversal vektör alanı vardır. Eğer her bir X teğet vektör alanı için $J\tau_* X$ teğet ise M^{2n+1} de bir $(1,1)$ tipinde f tensör alanı

$$J\tau_* X = \tau_* f X$$

şeklinde tanımlanır. Bu denkleme J yı uygularsak, M^{2n+1} de $f^2 = -I$ olur. Bu da M^{2n+1} in bir hemen hemen komleks manifold olduğunu gösterir ve bu bir çelişkidir. Bu durumda, $C = J\tau_* X$ transversal olacak şekilde M^{2n+1} de bir ξ vektör alanı vardır.

Şimdi, M^{2n+1} de, $(1,1)$ tipinde bir φ tensör alanını ve bir η 1-formunu

$$J\tau_* X = \tau_* \varphi X + \eta(X) C \tag{2.2.13}$$

şeklinde tanımlayalım. (2.2.13) denklemine J yi uygular ve C nin eşitini yazarsak

$$\begin{aligned} J^2 \tau_* X &= J\tau_* \varphi X + \eta(X) JC \\ -\tau_* X &= J\tau_* \varphi X + \eta(X) J(J\tau_* \xi) \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

olur. (2.2.13) denkleminde, X yerine φX alırsak

$$J\tau_* \varphi X = \tau_* \varphi^2 X + \eta(\varphi X) C$$

dir. Böylece (2.2.14) denklemi,

$$-\tau_* X = \tau_* \varphi^2 X + \eta(\varphi X) C - \eta(X) \tau_* \xi$$

şeklinde elde edilir. Bu son denklem teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ *ve* $\eta \circ \varphi = 0$ *elde edilir. (2.2.13) denkleminde* $X = \xi$ *alınırsa*

$$C = \tau_* \varphi \xi + \eta(\xi) C$$

olur ve buradan $\varphi \xi = 0$ *ve* $\eta(\xi) = 1$ *dir. Böylece* (φ, ξ, η)*,* M^{2n+1} *de bir hemen hemen kontakt yapıdır.*

Eğer $\tilde{M}^{2n+2}$*,* $\tilde{g}$ *Hermitian metriğine sahip bir hemen hemen Hermitian manifold ise,* $g = \tau^* \tilde{g}$ *şeklinde tanımlanır ve* M^{2n+1} *de,* C *bir birim normal olarak alınır. Bu durumda,* JC *teğet vektör alanıdır ve* ξ*,* $JC = -\xi$ *ile tanımlanır. (2.2.13) denklemini kullanırsak ve (1.5.2) denkleminden*

$$\begin{aligned} g(X,Y) = \tilde{g}(\tau_* X, \tau_* Y) &= \tilde{g}(J\tau_* X, J\tau_* Y) \\ &= \tilde{g}(\tau_* \varphi X + \eta(X) C, \tau_* \varphi Y + \eta(Y) C) \\ &= \tilde{g}(\tau_* \varphi X, \tau_* \varphi Y) + \eta(Y) \tilde{g}(\tau_* \varphi X, C) \\ &\quad + \eta(X) \tilde{g}(C, \tau_* \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)\tilde{g}(C,C) \\ &= g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda (φ, ξ, η, g) *bir hemen hemen kontakt metrik yapıdır [8].*

2.3 İntegral Alt Manifoldlar ve Kontakt Dönüşümler

M^{2n+1}, η kontakt formuna sahip bir kontakt manifold olsun. Bir 2n-boyutlu D alt demetinde, $\eta = 0$ şeklinde tanımlı ise D ye kontakt distribüsyon veya alt demet denir. Eğer

$$\eta \Lambda (d\eta)^n \neq 0$$

ise D integrallenebilir değildir.

M^r, M^{2n+1} in bir alt manifoldu olmak üzere M^r deki her X tanjant vektörü için $\eta(X) = 0$ ise, M^r ye bir integral alt manifold denir. D nin bir integral alt manifoldunun maksimum boyutu n dir [8].

Teorem 2.3.1. M^{2n+1}*,* η *kontak yapısına sahip bir kontakt manifold olsun. Bu durumda, D kontakt distribsyonun integral alt manifoldları n-boyutludur. Daha yüksek boyutu yoktur [7].*

İspat. M^{2n+1} kontakt manifoldda $\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$ olduğu için, koordinat komşuluğunda

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olacak şekilde $x = (x_0^i, y_0^i, z_0)$ noktası etrafında, $x = (x^i, y^i, z)$, i=1,...,n, lokal koordinatlarını seçebiliriz. Bu durumda x noktasında $x^i = x_0^i, z = z_0$, D nin bir n-boyutlu integral alt manifoldunu tanımlar ve bu koordinat dilimini içeren bir maksimum integral alt manifold, M^{2n+1} de bir integral alt manifolddur.

M^r, D nin bir r-boyutlu integral alt manifoldu olsun ve $r > n$ olduğunu kabul edelim. X_i, $i = 1, ..., r$, M^r ye teğet r-lineer bağımsız lokal vektör alanları olsun ve $X_{r+1}, ..., X_{2n}, X_{2n+1} = \xi$ şeklinde bir baza genişletilsin. Bu durumda $i, j = 1, ..., r$ için

$$\eta(X_i) = 0$$

dır ve buradan

$$d\eta(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\{X_i\eta(X_j) - X_j\eta(X_i) - \eta([X_i, X_j])\} = 0$$

elde edilir. $r > n$ olduğu için

$$(\eta\Lambda(d\eta)^n)(X_1, ..., X_{2n+1}) = 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. □

Eğer X ve Y, D nin bir integral alt manifolduna teğet vektör alanları ise bu durumda $\eta(X) = \eta(Y) = 0$ ve $d\eta(X, Y) = 0$ olur.

Önerme 2.3.1. $\tau : M^r \to M^{2n+1}$ *bir immersed alt manifold olsun. Bu durumda M^r, D kontakt distribüsyonunun bir integral alt manifoldudur gerek ve yeter şart M^r de, $\eta = 0$ ve $d\eta = 0$ dır.*

(φ, ξ, η, g), bir birleşmeli hemen hemen kontakt metrik yapı olsun. Bu durumda M^r, D nin bir integral alt manifoldudur gerek ve yeter şart M^r nin herhangi bir X vektörü D ye aittir ve φX, D ye diktir [7].

İspat. M^r, D nin bir integral alt manifoldu olsun. Bu durumda M^r ye teğet herhangi X ve Y vektör alanları için, $\eta(X) = 0$ ve $\eta(Y) = 0$ olur ve böylece $d\eta(X, Y) = 0$ dır.

Tersine eğer η ve $d\eta$, M^r de sıfır ise, M^r ye teğet herhangi bir $X, Y \in D$ vektör alanları için,

$$0 = d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])) = -\frac{1}{2}\eta([X,Y])$$

dir. Böylece $\eta([X,Y]) = 0$ olduğundan, $[X,Y] \in D$ dir. Bu durumda D integrallenebilirdir ve M^r, D nin bir integral alt manifoldudur.

M^r, D nin bir integral alt manifoldu olsun. Bu durumda X, M^r üzerinde bir vektör alanı ise $X \in D$ dir. Ayrıca bir X vektör alanı için (2.2.12) den, $d\eta(X,X) = g(X,\varphi X)$ olacağından $g(X,\varphi X) = 0$ elde edilir ve böylece φX diktir. □

Tanım 2.3.1. *M^{2n+1} bir kontakt manifold ve $f : M^{2n+1} \to M^{2n+1}$ bir diffeomorfizm olsun. Eğer*

$$f^\star\eta = \tau\eta \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde M^{2n+1} üzerinde bir τ fonksiyonu varsa, f ye bir kontakt dönüşüm ve eğer $\tau = 1$ ise f ye bir strikt kontakt dönüşüm denir [8].

f strikt kontakt dönüşümdür gerek ve yeter şart $d\eta$ invaryanttır. Eğer f strikt ise $\tau = 1$ olacağından (2.3.1) den

$$f^\star\eta = \eta$$

olur ve buradan

$$f^\star d\eta = d\eta$$

elde edilir ve böylece $d\eta$ invaryanttır.

Tersine $d\eta$ invaryant ise (2.3.1) den

$$f^\star d\eta = d\tau\Lambda\eta + \tau d\eta$$

olur. Bu durumda

$$\tau d\eta - f^\star d\eta = -d\tau\Lambda\eta$$

$$(\tau - 1)d\eta = -d\tau\Lambda\eta$$

dir. Ayrıca burada her iki tarafı η ile çarparsak

$$(\tau - 1)\eta\Lambda d\eta = -d\tau\eta\Lambda\eta$$

olur. Bu durumda,

$$(\tau - 1)\eta\Lambda d\eta = 0$$

dır. Bir kontakt metrik manifoldda $\eta\Lambda d\eta \neq 0$ olduğundan $\tau = 1$ olur, yani f strikt kontakt dönüşümdür [8].

Lemma 2.3.1. *M^{2n+1} bir kontakt manifold ve D de M^{2n+1} in bir alt demeti olsun. Bu durumda M^{2n+1} in bir f diffeomorfizmi , bir kontakt dönüşümdür gerek ve yeter şart D de bir X vektör alanı için $f_\star X \in D$ olmasıdır [8].*

İspat. f bir kontakt dönüşüm olsun. Bu durumda $f^\star\eta = \tau\eta$ olacak şekilde bir τ fonksiyonu vardır. Ayrıca, $f^\star$ ve $f_\star$ arasındaki bağıntıdan

$$\eta(f_\star X) = (f^\star\eta)(X) = \tau\eta(X) = 0$$

olur ve buradan $f_\star X \in D$ dir.

Tersine D de herhangi bir X vektör alanı için $f_\star X \in D$ olsun. Bu durumda,

$$0 = \eta(f_\star X) = (f^\star\eta)(X)$$

dir ve böylece f bir kontakt dönüşümdür. □

Teorem 2.3.2. *Bir M^{2n+1} kontakt manifoldun f difeomorfizmi, bir kontakt dönüşümdür gerek ve yeter şart f, D nin n-boyutlu integral alt manifoldlarını, D nin n-boyutlu integtal alt manifoldlarına dönüştürür [8].*

İspat. f bir kontakt dönüşüm ve M^n bir integral alt manifold olsun. Bu durumda, M^n integral alt manifolduna teğet bir X vektör alanı için, $f_\star X \in D$ olur ve bu nedenle $f(M^n)$ bir integral alt manifolddur.

Tersine bir p noktasında $X \in D$ verildiğinde, p noktasında bir X vektörüne sahip, bir M^n integral alt manifoldu vardır. $f(M^n)$ bir integral alt manifold olduğu için, $f_\star X \in D$ dir ve bu durumda f bir kontakt dönüşümdür. □

2.4 Hemen Hemen Normal Kontakt Yapılar

M, (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip bir $(2n+1)$ boyutlu hemen hemen kontakt manifold olsun. Bir $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ de bir vektör alanı $(X, f(\frac{d}{dt}))$ ile verilir, burada X, M^{2n+1} in bir teğet vektör alanı, t, $\mathbb{R}$ nin koordinatı ve f de $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyondur [2].

$M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ nin tanjant uzayında bir J lineer dönüşümünü

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (2.2.1), (2.2.2) ve (2.2.3) eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned} J^2(X, f\frac{d}{dt})) &= J(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\ &= (\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{d}{dt}) \\ &= (\varphi^2 X - f\varphi\xi - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - f\eta(\xi))\frac{d}{dt}) \\ &= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}) \\ &= -(X, f\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $J^2 = -I$ olduğundan J, $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ de bir hemen hemen kompleks yapıdır.

J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensör alanı

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

şeklinde verilir [2].

Tanım 2.4.1. *Eğer N_J Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise J hemen hemen kompleks yapısına integrallenebilirdir denir. Eğer $M\times\mathbb{R}$ de J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirse, (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir [2].*

Aşağıda φ nin N_φ Nijenhuis torsiyonunun ifadesinde normaliği kolayca incelenebilir. φ nin Nijenhuis tensör alanı

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y].$$

dir. N_J, $(1,2)$ tipinde bir tensör alanı olduğu için M de keyfi X ve Y vektör alanları için $N_J((X,0),(Y,0))$ ve $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ yi hesaplamak yeterlidir. (2.4.1) den

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(Y,0)) &= J^2[(X,0),(Y,0)] + [J(X,0), J(Y,0)] \\ &\quad - J[J(X,0),(Y,0)] - J[(X,0),J(Y,0)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -[(X,0),(Y,0)] + [(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (\varphi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})] \\
&\quad - J[(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (Y,0)] - J[(X,0), (\varphi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})] \\
&= (\varphi^2[X,Y] - \eta([X,Y])\xi, 0) + ([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X\eta(Y) - \varphi Y\eta(X))\frac{d}{dt}) \\
&\quad - (\varphi[\varphi X, Y] + (Y\eta(X))\xi, \eta([\varphi X, Y])\frac{d}{dt}) \\
&\quad - (\varphi[X, \varphi Y] - (X\eta(Y))\xi, \eta([X, \varphi Y])\frac{d}{dt}) \\
&= (N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, ((L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X)\frac{d}{dt}),
\end{aligned}
$$

dir ve

$$
\begin{aligned}
N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) &= J^2[(X,0),(0,\frac{d}{dt})] + [J(X,0), J(0,\frac{d}{dt})] \\
&\quad - J[J(X,0),(0,\frac{d}{dt})] - J[(X,0), J(0,\frac{d}{dt})] \\
&= -[(X,0),(0,\frac{d}{dt})] + [(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (-\xi, 0)] \\
&\quad - J[(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (0,\frac{d}{dt})] - J[(X,0)(-\xi,0)] \\
&= -(0, X\frac{d}{dt}) + ([\varphi X, -\xi], -\xi\eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&\quad - J([\varphi X, 0], \varphi X\frac{d}{dt}) - J([X,\xi], 0) \\
&= (-[\varphi X, \xi], (\xi\eta(X)\frac{d}{dt}) + (\varphi[X,\xi], \eta([X,\xi])\frac{d}{dt}) \\
&= ((L_\xi\varphi)X, (L_\xi\eta)X\frac{d}{dt}).
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Burada sırasıyla

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.4.2}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X \tag{2.4.3}$$

$$N^{(3)}(X) = (L_\xi\varphi)X \tag{2.4.4}$$

$$N^{(4)}(X) = (L_\xi\eta)X \tag{2.4.5}$$

şeklinde dört tane tensör tanımlayalım. Bu durumda (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapının normal olması için gerek ve yeter şart bu dört tensörün sıfır olmasıdır.

Lemma 2.4.1. *(φ, ξ, η) bir hemen hemen kontakt yapı olsun. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise bu durumda $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dır [7].*

İspat. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise bu durumda (2.4.2) de Y yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned}0 &= [\varphi, \varphi](X, \xi) + 2d\eta(X, \xi)\xi \\ &= \varphi^2[X, \xi] + [\varphi X, \varphi\xi] - \varphi[\varphi X, \xi] - \varphi[X, \varphi\xi] + (X\eta(\xi))\xi \\ &\quad - (\xi\eta(X))\xi - \eta([X, \xi])\xi\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (2.2.2) ve (2.2.3) den

$$\begin{aligned}&= -[X, \xi] + \eta([X, \xi])\xi - \varphi[\varphi X, \xi] - \xi(\eta(X))\xi - \eta([X, \xi])\xi \\ &= [\xi, X] + \varphi[\xi, \varphi X] - (\xi\eta(X)\xi) \qquad (2.4.6)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (2.4.6) denklemine η yı uygularsak

$$\eta([\xi, X]) - \xi\eta(X) = 0 \qquad (2.4.7)$$

elde ederiz ve buradan $N^{(4)} = L_\xi\eta = 0$ olduğu görülür. (2.4.7) denkleminde X yerine φX alırsak

$$\eta([\xi, \varphi X]) = 0 \qquad (2.4.8)$$

olur. Eğer (2.4.6) denklemine φ yi uygularsak

$$\begin{aligned}0 &= -\varphi[X, \xi] - \varphi^2[\varphi X, \xi] - (\xi\eta(X))\varphi(\xi) \\ &= -\varphi[X, \xi] + [\varphi X, \xi] - \eta([\varphi X, \xi])\xi \\ &= (L_\xi\varphi)X\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $N^{(3)} = (L_\xi\varphi)X = 0$ sonucuna ulaşılır. Tekrar $N^{(1)} = 0$ alırsak ve $N^{(1)} = 0$ da X yerine φX yazarsak

$$\begin{aligned}0 &= [\varphi, \varphi](\varphi X, Y) + 2d\eta(\varphi X, Y)\xi \\ &= \varphi^2[\varphi X, Y] + [\varphi^2 X, \varphi Y] - \varphi[\varphi^2 X, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] \\ &\quad + (\varphi X\eta(Y) - Y\eta(\varphi X) - \eta([\varphi X, Y]))\xi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -[\varphi X, Y] + \eta([\varphi X, Y])\xi + [-X + \eta(X)\xi, \varphi Y] - \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] \\
&\quad - \varphi[\varphi X, \varphi Y] + (\varphi X \eta(Y))\xi - (Y\eta(\varphi X))\xi - (\eta([\varphi X, Y]))\xi \\
&= -[\varphi X, Y] - [X, \varphi Y] - (\varphi Y \eta(X))\xi - \eta(X)[\varphi Y, \xi] \\
&\quad - \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] + (\varphi X \eta(Y))\xi
\end{aligned}
$$

dır. Bu denkleme η yı uygular ve (2.4.8) denklemini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi X \eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y \eta(X) + \eta([\varphi Y, X]) \\
&= (L_{\varphi X}\eta)(Y) - (L_{\varphi Y}\eta)(X)
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

elde ederiz, yani $N^{(2)} = 0$ olur. Ayrıca (2.4.9) denklemini

$$2d\eta(\varphi X, Y) + 2d\eta(X, \varphi Y) = 0 \tag{2.4.10}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.4.10) denkleminde Y yerine φY alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= 2d\eta(\varphi X, \varphi Y) + 2d\eta(X, \varphi^2 Y) \\
&= 2d\eta(\varphi X, \varphi Y) + 2d\eta(X, -Y + \eta(Y)\xi) \\
&= 2d\eta(\varphi X, \varphi Y) - 2d\eta(X, Y) + 2\eta(Y)d\eta(X, \xi)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca (2.1.4) den,

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.4.11}$$

dir. Böylece bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı için $N^2 = 0$ olmasının anlamı $d\eta$ nın φ altında invaryant olmasıdır. □

Lemma 2.4.1 den aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 2.4.1. *M nin (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart*

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \tag{2.4.12}$$

olmasıdır [2].

Lemma 2.4.2. *M, (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip bir kontakt manifold olsun. Bu durmda $N^{(2)}$ ve $N^{(4)}$ sıfırdır. Üstelik $N^{(3)}$ ün sıfır olması için gerek ve yeter şart ξ nin g ye göre bir Killing vektör alanı olmasıdır [8].*

İspat. (φ, ξ, η, g) bir kontakt metrik yapı olsun. İlk önce $N^{(2)} = N^{(4)} = 0$ olduğunu gösterelim. (2.4.11) ve (2.2.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) = d\eta(\varphi X, \varphi Y) = \Phi(\varphi X, \varphi Y) &= g(\varphi X, \varphi^2 Y) \\ &= -g(X, \varphi^3 Y) = g(X, \varphi Y) \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

dir. Bu durumda (2.4.10) ve (2.4.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} N^{(2)} &= 2d\eta(\varphi X, Y) - 2d\eta(\varphi Y, X) \\ &= 2g(\varphi X, \varphi Y) - 2g(\varphi Y, \varphi X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.4.13) denkleminde Y yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 = g(X, \varphi\xi) = d\eta(X, \xi) &= \frac{1}{2}\{X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X,\xi])\} \\ &= \frac{1}{2}\{-\xi\eta(X) - \eta([X,\xi])\} \\ &= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X] \\ &= (L_\xi\eta)(X) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece $N^{(4)} = 0$ olur.

Üstelik $N^{(4)} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X,\xi) &= \xi g(X,\xi) - g([\xi, X], \xi) - g([\xi,\xi], X) \\ &= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \\ &= (L_\xi\eta)(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. (2.1.6) ve (2.2.11) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} 0 = (L_\xi d\eta)(X,Y) &= (L_\xi\Phi)(X,Y) \\ &= \xi g(X, \varphi Y) - g([\xi, X], \varphi Y) - g(X, \varphi[\xi, Y]) \\ &\qquad + g(X, [\xi, \varphi Y]) - g(X, [\xi, \varphi Y]) \\ &= (L_\xi g)(X, \varphi Y) + g(X, N^{(3)}(Y)) \end{aligned}$$

olur. Böylece ξ nin bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır. □

Lemma 2.4.3. *M nin bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı için φ nin kovaryant türevi*

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) \\ &\quad + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \qquad (2.4.14) \end{aligned}$$

şeklinde verilir, burada X, Y ve Z, M üzerindeki teğet vektör alanları, ξ karakteristik vektör alanı ve Φ temel 2-formdur [8].

İspat. X, Y, Z vektör alanları için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 2g(\nabla_X\varphi Y, Z) - 2g(\varphi\nabla_X Y, Z) \\ &= 2g(\nabla_X\varphi Y, Z) + 2g(\nabla_X Y, \varphi Z) \end{aligned}$$

dir. Kozsul eşitliği (1.2.2) den, üstteki denklemin sağ tarafında ilk terim için Y yerine φY, ikinci terim için Z yerine φZ alınırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= Xg(\varphi Y, Z) + \varphi Y g(X, Z) - Zg(X, \varphi Y) \\ &\quad + g([X, \varphi Y], Z) + g([Z, X], \varphi Y) - g([\varphi Y, Z], X) \\ &\quad + Xg(Y, \varphi Z) + Yg(X, \varphi Z) - \varphi Z g(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], \varphi Z) + g([\varphi Z, X], Y) - g([Y, \varphi Z], X) \end{aligned}$$

Bu son denklemde (2.2.9) ve (1.1.1) denklemleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= -X\Phi(Y, Z) + \varphi Y(\Phi(\varphi Z, X) + \eta(Z)\eta(X)) - Z\Phi(X, Y) \\ &\quad - \Phi([X, \varphi Y], \varphi Z) + \eta([X, \varphi Y])\eta(Z) + \Phi([Z, X], Y) \\ &\quad - g(\varphi[\varphi Y, Z], \varphi X) + \eta(X)\eta([Z, \varphi Y]) + X\Phi(\varphi Y, \varphi Z) \\ &\quad - Y\Phi(Z, X) - \varphi Z(\Phi(\varphi Y, X) + \eta(Y)\eta(X)) + \Phi([X, Y], Z) \\ &\quad - \Phi([\varphi Z, X], \varphi Y) + \eta([\varphi Z, X])\eta(Y) - g(\varphi[Y, \varphi Z], \varphi X) \\ &\quad + \eta(X)\eta([\varphi Z, Y]) + \Phi([Y, Z], X) - g([Y, Z], \varphi X) \\ &\quad - \Phi([\varphi Y, \varphi Z], X) + g([\varphi Y, \varphi Z], \varphi X) + g(2d\eta(Y, Z)\xi, \varphi X) \\ &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) \\ &\quad + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Bir kontakt metrik manifoldda $N^{(2)} = 0$ olduğundan ve (2.2.11) denkleminden, (2.4.14) denklemi

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) \\ &\quad - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

şeklinde yazılabilir. (2.4.15) denkleminde X yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_\xi \varphi)Y, Z) &= g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi\xi) + 2d\eta(\varphi Y, \xi)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, \xi)\eta(Y) \\ &= g(\varphi Y, \varphi\xi)\eta(Z) - 2g(\varphi Z, \varphi\xi)\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece bir kontakt metrik manifoldda

$$\nabla_\xi \varphi = 0 \tag{2.4.16}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.4.1. *Bir kontakt metrik manifoldda ξ nin integral eğrisi bir geodeziktir [7].*

İspat. $g(\xi, \xi) = 1$ olduğundan herhangi bir X vektör alanı için

$$g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$$

dır. X, ξ ye ortogonal olan bir vektör alanı olmak üzere, ∇ bir metrik konneksiyon olduğundan $g(\nabla_\xi \xi, \xi) = 0$ olduğu açıktır ve ξ ye ortogonal bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi \xi, X) &= -g(\xi, \nabla_\xi X) = -g(\xi, \nabla_X \xi + [\xi, X]) \\ &= -g(\xi, \nabla_X \xi) - g(\xi, [\xi, X]) \\ &= -\eta([\xi, X]) = 2d\eta(\xi, X) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.4) den dolayı $g(\nabla_\xi \xi, X) = 0$ sonucuna ulaşılır ve buradan da

$$\nabla_\xi \xi = 0 \tag{2.4.17}$$

olur.

2.5 K-Kontakt Yapılar

Tanım 2.5.1. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip olan bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer ξ karakteristik vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise bu durumda M de kontakt metrik yapıya bir K-kontakt yapı denir ve M ye de bir K-kontakt manifold denir [7].*

Bir kontakt metrik yapının K-kontakt olması için gerek ve yeter şart $L_\xi \varphi = N^3 = 0$ olmasıdır. Kontakt metrik manifold üzerinde

$$h = \frac{1}{2} L_\xi \varphi = \frac{1}{2} N^3 \tag{2.5.1}$$

ile bir h-tensör alanını tanımlayalım. h nın birinci özelliği olarak görülürki $h\xi = 0$ dır. Gerçektende (2.4.5) denkleminde X yerine ξ alınır ve bu denklem açılırsa

$$h\xi = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)\xi = \varphi[\xi, \xi] - [\varphi\xi, \xi] = 0 \tag{2.5.2}$$

olduğu görülür [8].

Önerme 2.5.1. *M^{2n+1} bir kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} bir K-kontakt manifolddur gerek ve yeter şart*

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{2.5.3}$$

olmasıdır [2].

İspat. M^{2n+1} bir K-kontakt manifold olsun. Bu durumda bir kontakt metrik manifoldda, X, Y vektör alanları için (2.2.12) den

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, Y) + g(Y, \nabla_X \xi)\} \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) \end{aligned}$$

dir ve ayrıca (2.2.10) dan da

$$g(X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y)$$

veya

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\varphi X, Y) \tag{2.5.4}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X \xi = -\varphi X$ olduğu görülür.

Tersine eğer $\nabla_X \xi = -\varphi X$ ve φ anti-simetrik ise

$$\begin{aligned} 0 &= g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) \\ &= (L_\xi g)(X, Y) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda ξ bir Killing vektör alanıdır ve (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısı bir K-kontakt yapıdır. □

Önerme 2.5.2. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) yapısına sahip bir K-kontakt manifold olsun. Bu durumda ξ yi içeren herhangi bir düzlemin kesit eğriliği 1 dir [7].*

İspat. M^{2n+1} bir K-kontakt manifold olsun. Ayrıca X, ξ ye ortogonal bir birim vektör alanı ve R de g metriğinin bir eğrilik tensörü olsun. Bu durumda (2.5.3) ve (2.4.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} R_{\xi X} \xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi, X]} \xi \\ &= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi[\xi, X] \\ &= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi \nabla_\xi X - \varphi \nabla_X \xi \\ &= -(\nabla_\xi \varphi)(X) - \varphi \nabla_X \xi \\ &= -\varphi \nabla_X \xi \\ &= \varphi^2 X = -X + \eta(X) \xi \\ &= -X + g(\xi, X) \xi = -X \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

olur ve buradan da

$$g(R_{\xi X} \xi, X) = -g(X, X)$$

olarak yazılır ve dolayısıyla $g(R_{\xi X} X, \xi) = 1$ şeklinde elde edilir. □

Lemma 2.5.1. *Bir kontakt metrik manifoldda, h bir simetrik operatördür. Ayrıca*

$$\nabla_X \xi = -\varphi X - \varphi h X \tag{2.5.6}$$

dir. h, φ ile anti-değişmelidir ve $izh = 0$ dır [8].

İspat. Bir kontakt metrik manifoldda (2.4.16) ve (2.4.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g((L_\xi \varphi)X, Y) &= g(\varphi[X,\xi] - [\varphi X, \xi], Y) \\ &= g(\varphi \nabla_X \xi - \varphi \nabla_\xi X - \nabla_{\varphi X}\xi + \nabla_\xi \varphi X, Y) \\ &= g((\nabla_\xi \varphi)(X) - \nabla_{\varphi X}\xi + \varphi \nabla_X \xi, Y) \\ &= g(-\nabla_{\varphi X}\xi + \varphi \nabla_X \xi, Y) \end{aligned}$$

dir, burada X veya Y yerine ξ alırsak denklem sıfır olur. (2.4.9) denklemi, ξ ye ortogonal olan X ve Y vektör alanları için $\eta([\varphi X, Y]) + \eta([X, \varphi Y]) = 0$ olarak elde edilir. Ayrıca metrik konneksiyonu özelliginden

$$-g(\nabla_{\varphi X}\xi, Y) - g(\nabla_X \xi, \varphi Y) = g(\nabla_{\varphi X} Y, \xi) + g(\nabla_X \varphi Y, \xi)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(hX, Y) = g((L_\xi \varphi)X, Y) &= g(\nabla_{\varphi X} Y, \xi) + g(\nabla_X \varphi Y, \xi) \\ &= \eta(\nabla_{\varphi X} Y) + \eta(\nabla_X \varphi Y) \\ &= \eta(\nabla_Y \varphi X) + \eta(\nabla_{\varphi Y} X) \\ &= g((L_\xi \varphi)Y, X) \\ &= g(X, hY) \end{aligned}$$

olur ve böylece h simetriktir.

(2.4.15) denkleminde Y yerine ξ yazıp $L_\xi \varphi$ nin simetriliğini alırsak,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)\xi, Z) &= g(N^{(1)}(\xi, Z), \varphi X) + 2d\eta(\varphi\xi, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(\xi) \\ &= g(\varphi^2[\xi, Z] + [\varphi\xi, \varphi Z] - \varphi[\xi, \varphi Z] - \varphi[\varphi\xi, Z] \\ &\quad + 2d\eta(\xi, Z)\xi, \varphi X) - 2d\eta(\varphi Z, X) \\ &= g(\varphi^2[\xi, Z] - \varphi[\xi, \varphi Z], \varphi X) - 2d\eta(\varphi Z, X) \end{aligned}$$

$$= -g(\varphi(L_\xi\varphi)Z, \varphi X) - 2g(\varphi Z, \varphi X)$$
$$= -g((L_\xi\varphi)Z, X)) + \eta((L_\xi\varphi)Z)\eta(X) - 2g(Z, X) + 2\eta(Z)\eta(X)$$
$$= -g((L_\xi\varphi)X, Z)) - 2g(X, Z) + 2g(\eta(X)\xi, Z)$$

veya

$$2g(\nabla_X\varphi\xi - \varphi\nabla_X\xi, Z) = -g((L_\xi\varphi)X - 2X + 2\eta(X)\xi, Z),$$

elde edilir ve buradan

$$-\varphi\nabla_X\xi = -\frac{1}{2}(L_\xi\varphi)X - X + \eta(X)\xi$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklemin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\nabla_X\xi = -\frac{1}{2}\varphi(L_\xi\varphi)X - \varphi X \qquad (2.5.7)$$

olarak bulunur. h tensör alanı

$$h = \frac{1}{2}L_\xi\varphi = \frac{1}{2}N^{(3)}$$

şeklinde tanımlandığından (2.5.7) denklemi

$$\nabla_X\xi = -\varphi X - \varphi hX$$

olarak yazılabilir.

Şimdi h nın anti-değişmeli olduğunu gösterelim. (2.2.12), (2.5.4) ve (2.5.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned} 2d\eta(X, Y) = 2g(X, \varphi Y) &= g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X) \\ &= g(-\varphi X - \varphi hX, Y) - g(-\varphi Y - \varphi hY, X) \\ &= -g(\varphi X, Y) - g(\varphi hX, Y) + g(\varphi Y, X) + g(\varphi hY, X) \end{aligned}$$

dir. (2.2.10) ve h nın simetrikliği kullanılarak

$$2g(X, \varphi Y) = g(X, \varphi Y) - g(\varphi hX, Y) + g(X, \varphi Y) - g(hY, \varphi X)$$

elde edilir ve bu son denklemden

$$g((\varphi h + h\varphi)X, Y) = 0$$

olur. Bu durumda

$$\mathrm{h}\varphi + \varphi h = 0 \tag{2.5.8}$$

olması h nın anti-simetrik olduğunu gösterir.

Eğer $hX = \lambda X$ ise bu durumda $h\varphi X = -\lambda\varphi X$ dir. λ ve $-\lambda$, h nın eigen değerleri ise $izh = 0$ dır. □

Önerme 2.5.3. *Bir M^{2n+1} kontakt metrik manifoldunda*

$$(\nabla_\xi h)X = \varphi X - h^2\varphi X - \varphi R_{X\xi}\xi,$$

$$\frac{1}{2}(R_{\xi X}\xi - \varphi R_{\xi\varphi X}\xi) = h^2X + \varphi^2 X$$

dir, burada ξ karakteristik vektör alanı ve $X \in M^{2n+1}$ dir [8].

İspat. X bir vektör alanı olmak üzere M^{2n+1} in Riemann eğrilik tensörü, (2.4.17) den

$$\begin{aligned} R_{\xi X}\xi &= \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_X\nabla_\xi\xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi \\ &= \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi \end{aligned}$$

dir. Bu durumda (2.4.16) ve (2.5.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &= \nabla_\xi(-\varphi X - \varphi hX) + \varphi[\xi, X] + \varphi h[\xi, X] \\ &= -\nabla_\xi\varphi X - \nabla_\xi\varphi hX + \varphi\nabla_\xi X - \varphi\nabla_X\xi + \varphi h\nabla_\xi X - \varphi h\nabla_X\xi \\ &= -\varphi\nabla_\xi X - \varphi\nabla_\xi hX + \varphi\nabla_\xi X - \varphi\nabla_X\xi + \varphi h\nabla_\xi X - \varphi h\nabla_X\xi \\ &= -\varphi\nabla_\xi hX - \varphi(-\varphi X - \varphi hX) + \varphi h\nabla_\xi X - \varphi h(-\varphi X - \varphi hX) \\ &= \varphi^2X - \varphi^2h^2X - \varphi(\nabla_\xi h)X \\ &= \varphi^2X + h^2X - \varphi(\nabla_\xi h)X \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

olur ve bu denkleme φ yi uygularsak

$$\begin{aligned} \varphi R_{\xi X}\xi &= -\varphi^2\nabla_\xi(X + hX) + \varphi^2[\xi, X] + \varphi^2h[\xi, X] \\ &= \nabla_\xi(X + hX) - \eta(\nabla_\xi(X + hX))\xi - [\xi, X] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \eta([\xi, X])\xi - h[\xi, X] + \eta(h[\xi, X])\xi \\
&= \nabla_\xi X + \nabla_\xi hX - \eta(\nabla_\xi X)\xi - \eta(\nabla_\xi hX)\xi - \nabla_\xi X + \nabla_X \xi \\
&+ \eta(\nabla_\xi X)\xi - \eta(\nabla_X \xi)\xi - h\nabla_\xi X + h\nabla_X \xi + \eta(h\nabla_\xi X)\xi - \eta(h\nabla_X \xi)\xi \\
&= (\nabla_\xi h)X + \nabla_X \xi + h\nabla_X \xi
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca (2.5.6) ve (2.5.8) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi R_{\xi X}\xi &= (\nabla_\xi h)X + \nabla_X \xi + h\nabla_X \xi && (2.5.10) \\
&= (\nabla_\xi h)X - \varphi X - \varphi hX - h\varphi X - h\varphi hX \\
&= (\nabla_\xi h)X - \varphi X - \varphi hX + \varphi hX + h^2\varphi X \\
&= (\nabla_\xi h)X - \varphi X + h^2\varphi X && (2.5.11)
\end{aligned}
$$

olur ve bu da bize birinci denklemi verir. (2.5.11) denkleminde X yerine φX yazılırsa

$$\varphi R_{\xi\varphi X}\xi = (\nabla_\xi h)\varphi X - \varphi^2 X + \varphi h^2 \varphi X$$

olur. Ayrıca (2.4.16), (2.5.8) ve (2.5.2) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
&= -\varphi(\nabla_\xi h)X - \varphi^2 X + h^2\varphi^2 X \\
&= -h^2 X - \varphi^2 X - \varphi(\nabla_\xi h)X && (2.5.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda (2.5.9) ve (2.5.12) denklemlerini toplarsak ikinci denklemi elde ederiz, yani

$$\frac{1}{2}(R_{\xi X}\xi - \varphi R_{\xi\varphi X}\xi) = h^2 X + \varphi^2 X \qquad (2.5.13)$$

dir. □

Sonuç 2.5.1. *Bir M^{2n+1} kontakt metrik manifoldunda, ξ doğrultusunda Ricci eğriliği*

$$Ric(\xi) = 2n - izh^2$$

şeklinde verilir [8].

İspat. X, ξ ye ortonormal olan bir vektör alanı olmak üzere, (2.5.13) den

$$K(\xi, X) + K(\xi, \varphi X) = 2(1 - g(h^2 X, X))$$

elde edilir, burada $K(\xi, X)$ ve $K(\xi, \varphi X)$ sırasıyla $\{\xi, X\}$ ve $\{\xi, \varphi X\}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemlerin kesit eğilikleridir. M^{2n+1} de bir φ bazı $\{X_i, X_{n+i} = \varphi X_i, \xi\}$, $i = 1, ..., n$, olmak üzere

$$\begin{aligned} R(\xi,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} K(\xi, X_i) + K(\xi, \varphi X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2(1 - g(h^2 X_i, X_i)) \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

dir. Ayrıca h^2 nin bu baza göre izi

$$izh^2 = \sum_{i=1}^{n}(g(h^2 X_i, X_i) + g(h^2 \varphi X_i, \varphi X_i))$$

veya

$$izh^2 = \sum_{i=1}^{n} g((h^2 - \varphi h^2 \varphi) X_i, X_i) \tag{2.5.15}$$

dir. (2.5.8) den $h\varphi = -\varphi h$ ve $h^2\varphi = -h\varphi h$ ise

$$h^2\varphi^2 = -h\varphi h\varphi = \varphi h^2 \varphi$$

elde edilir. Burada her iki tarafa X_i uygulanırsa

$$(h^2\varphi^2)X_i = (\varphi h^2 \varphi)X_i$$

veya

$$(\varphi h^2 \varphi)X_i = h^2(\varphi^2 X_i) = -h^2 X_i$$

olarak bulunur. Bu son ifade (2.5.15) de yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{n} g(h^2 X_i, X_i) = \frac{1}{2} izh^2$$

olarak bulunur. Bu durumda (2.5.14) den

$$Ric(\xi) = 2n - izh^2$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.5.4. *M^{2n+1} bir K-kontakt manifold olsun. M^{2n+1} de Q Ricci eğrilik operatörü olmak üzere*

$$Q\xi = 2n\xi$$

dir [8].

İspat. M^{2n+1} bir K-kontakt manifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(R_{X\xi}Y, X) = R(X, \xi, X, Y) &= R(X, Y, X, \xi) \\ &= g(R_{XY}\xi, X) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi, X) - g(\nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi, X) \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

dir. Bir K-kontakt manifoldda ξ Killing vektör alanı olduğundan, M^{2n+1} de bir X vektör alanı için

$$g(\nabla_X \xi, X) = -g(X, \nabla_X \xi)$$

dir ve buradan

$$g(\nabla_X \xi, X) = 0 \tag{2.5.17}$$

olur. Ayrıca (2.5.17) denkleminin Y vektör alanına göre türevi alınırsa

$$g(\nabla_Y \nabla_X \xi, X) + g(\nabla_X \xi, \nabla_Y X) = 0 \tag{2.5.18}$$

elde edilir. Diğer taraftan ξ Killing vektör alanı olduğundan

$$g(\nabla_{\nabla_Y X}\xi, X) + g(\nabla_Y X, \nabla_X \xi) = 0 \tag{2.5.19}$$

dir. Bu durumda (2.5.18) ve (2.5.19) denklemlerinden

$$g(\nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi, X) = 0$$

olur ve böylece (2.5.16) denkleminden

$$\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = R_{X\xi}Y$$

elde edilir. Bu durumda bir K-kontakt manifoldda (2.5.3) denkleminden

$$(\nabla_X \varphi)Y = R_{\xi X}Y \tag{2.5.20}$$

olur.

X, ξ ye ortogonal olan bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda (2.4.15) denkleminde Y yerine X alırsak ve (2.5.20) i kullanırsak

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)X,Z) &= g(N^{(1)}(X,Z),\varphi X) + 2d\eta(\varphi X,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(X) \\
&= g([\varphi,\varphi](X,Z) + 2d\eta(X,Z)\xi,\varphi X) + 2g(X,X)\eta(Z) \\
&\qquad - 2\eta(X)\eta(X)\eta(Z) - 2g(Z,X)\eta(X) + 2\eta(Z)\eta(X)\eta(X) \\
&= g(-[X,Z],\varphi X) + g([\varphi X,\varphi Z],\varphi X) \\
&\qquad - g([\varphi X,Z],X) - g([X,\varphi Z],X) + 2\eta(Z) \\
&= g(\varphi\nabla_X Z,X) - g(\varphi\nabla_Z X,X) + g(\nabla_{\varphi X}\varphi Z,\varphi X) \\
&\qquad - g(\nabla_{\varphi Z}\varphi X,\varphi X) - g(\varphi\nabla_{\varphi X}Z,\varphi X) + g(\varphi\nabla_Z\varphi X,\varphi X) \\
&\qquad - g(\varphi\nabla_X\varphi Z,\varphi X) + g(\varphi\nabla_{\varphi Z}X,\varphi X) + 2\eta(Z) \\
&= -g((\nabla_X\varphi)Z,X) + g((\nabla_Z\varphi)X,X) \\
&\qquad + g((\nabla_{\varphi X}\varphi)Z,\varphi X) - g((\nabla_{\varphi Z}\varphi)X,\varphi X) + 2\eta(Z) \\
&= -g(R_{\xi X}Z,X) + g(R_{\xi Z}X,X) + g(R_{\xi\varphi X}Z,X) \\
&\qquad - g(R_{\xi\varphi Z}X,X) + 2\eta(Z) \\
&= 2\eta(Z) = 2g(\xi,Z)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda φ bazına ait bir $\{X_i\}$ lokal ortanormal baz alırsak,

$$Q\xi = \sum_{i=1}^{2n} R_{\xi X_i}X_i = \sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{X_i}\varphi)X_i = 2n\xi$$

elde ederiz. □

Önerme 2.5.5. *M^{2n+1} bir Riemann manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} de, ξ ye ortogonal olan bütün X vektör alanları için*

$$R_{\xi X}\xi = -X$$

olacak şekilde, bir ξ birim Killing vektör alanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda M^{2n+1} bir K-kontakt manifolddur [8].

İspat. η bir 1-form ve φ de $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere sırasıyla, η ve φ yi

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

$$\varphi X = -\nabla_X \xi$$

olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi bir kontakt metrik yapı oluşturmaya çalışalım. ξ bir birim Killing vektör alanı olduğu için $\nabla_\xi \xi = 0$ dır ve buradan $\varphi\xi = 0$ olur. Ayrıca ξ Killing olduğundan

$$\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi = R_{X\xi} Y$$

dır. ξ ye ortogonal herhangi bir X vektör alanı için de

$$\varphi^2 X = \nabla_{\nabla_X \xi} \xi = R_{\xi X} \xi = -X$$

elde edilir. Bu durumda $\varphi^2 = -\mathrm{I} + \eta \otimes \xi$ olur. Üstelik

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X\} \\
&= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\} \\
&= -g(\nabla_Y \xi, X) \\
&= g(X, \varphi Y)
\end{aligned}$$

dir ve (2.2.10)dan

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= -g(X, \varphi^2 Y) \\
&= -g(X, -Y + \eta(Y)\xi) \\
&= g(X,Y) + g(X,\xi)\eta(Y) \\
&= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda M^{2n+1} de (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısı bir K-kontakt yapıdır.

$\square$

BÖLÜM 3

Sasakian Manifoldlar

3.1 Sasakian Manifoldlar

Sasakian manifoldlar ve alt manifoldlarına ayrılan bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Sasakian manifoldlar ve bu manifoldların özellikleri ele alındı. İkinci kısımda CR-manifoldları tanıtıldı. Üçüncü kısımda φ-kesit eğriliği ve bu eğrilikle ilgili bazı sonuçlar alındı. Dördüncü kısımda ise Sasakian manifoldların integral alt manifoldları ve invaryant alt manifoldları incelendi.

Tanım 3.1.1. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer M nin kontakt metrik yapısı normal ise bu durumda M manifoldu bir Sasakian yapıya sahiptir ve M manifolduna da Sasakin manifold denir. Bir Sasakian manifold, bir kontak metrik manifolddur, fakat tersi her zaman doğru değildir [7].*

Teorem 3.1.1. *M^{2n+1} bir kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} de bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı bir Sasakian yapıdır gerek ve yeter şart*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{3.1.1}$$

denkleminin sağlanmasıdır, burada ∇, g ye göre Riemann konneksiyonudur [8].

İspat. M^{2n+1} de (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı bir Sasakian yapı olsun. Eğer (φ, ξ, η, g) yapısı bir normal kontakt metrik yapı ise, $\Phi = d\eta$, $N^{(1)} = 0$

ve $N^{(2)} = 0$ dır. Bu durumda (2.2.12) ve (2.2.6) denklemlerinden (2.4.14) denklemi

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\
&= g(\varphi Y, \varphi X)\eta(Z) - g(\varphi X, \varphi Z)\eta(Y) \\
&= (g(Y, X) - \eta(Y)\eta(X))\eta(Z) - (g(X, Z) - \eta(X)\eta(Z))\eta(Y) \\
&= g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y) \\
&= g(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, Z)
\end{aligned}$$

şeklinde olur ve buradan da (3.1.1) denklemi elde edilir.

Tersine, bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı (3.1.1) denklemini sağlasın. (3.1.1) de Y yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)\xi &= g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X \\
\nabla_X\varphi\xi - \varphi\nabla_X\xi &= \eta(X)\xi - X \\
-\varphi\nabla_X\xi &= \eta(X)\xi - X
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denkleme φ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
-\varphi^2(\nabla_X\xi) &= \eta(X)\varphi\xi - \varphi X \\
\nabla_X\xi &= -\varphi X \qquad (3.1.2)
\end{aligned}$$

olur. (2.2.10) ve (3.1.2) den ξ nin bir Killing vektör alanı olduğunu görülür, yani

$$\begin{aligned}
0 = -g(\varphi X, Y) - g(X, \varphi Y) &= g(\nabla_X\xi, Y) + g(X, \nabla_Y\xi) \\
&= (L_\xi g)(X, Y)
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\nabla_X\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(X)\} \\
&= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X\xi, Y) - g(X, \nabla_Y\xi)\} \\
&= g(\nabla_X\xi, Y) = -g(\varphi X, Y) = \Phi(X, Y)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylece (φ, ξ, η, g) nin bir kontakt metrik yapı olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi Nijenhuis torsuyonu yardımıyla yapının normal olduğunu gösterelim. (3.1.1) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
[\varphi,\varphi](X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \\
&= \varphi^2\nabla_X Y - \varphi^2\nabla_Y X + \nabla_{\varphi X}\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}\varphi X \\
&\quad - \varphi\nabla_{\varphi X}Y + \varphi\nabla_Y\varphi X - \varphi\nabla_X\varphi Y + \varphi\nabla_{\varphi Y}X \\
&= \varphi(\nabla_Y\varphi)X - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y \\
&= \varphi(g(Y,X)\xi - \eta(X)Y) - (g(\varphi Y,X)\xi - \eta(X)\varphi Y) \\
&\quad - \varphi(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \\
&= g(\varphi X,Y)\xi - g(\varphi Y,X)\xi \\
&= 2g(\varphi X,Y)\xi = -2d\eta(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$[\varphi,\varphi] + 2d\eta\otimes\xi = 0$$

dır ve buradan da (φ,ξ,η,g) kontakt metrik yapısının bir Sasakian yapı olduğu görülür.

Lemma 3.1.1. *Bir Sasakian manifoldda, ξ ye ortogonal olan bir X birim vektör alanı için*

$$R_{X\xi}X = -\xi$$

dir [8].

İspat. Bir Sasakian manifoldda, (3.1.1)ve (3.1.2) denklemleri yardımla

$$\begin{aligned}
g(R_{X\xi}X,Y) &= -g(R_{XY}\xi,X) \\
&= -g(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi, X) \\
&= -g(-\nabla_X\varphi Y + \nabla_Y\varphi X + \varphi[X,Y], X) \\
&= g((\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_Y\varphi)X, X) \\
&= g(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(Y,X)\xi + \eta(X)Y, X) \\
&= -g(\eta(Y)X - \eta(X)Y, X) \\
&= -\eta(Y)g(X,X) + g(\xi,X)g(X,Y) \\
&= -\eta(Y) = g(-\xi,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $R_{X\xi}X = -\xi$ olarak bulunur. $\square$

Önerme 3.1.1. *Bir Sasakian manifoldda*

$$R_{XY}\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

dir [8].

İspat. (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
R_{XY}\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= -\nabla_X\varphi Y + \nabla_Y\varphi X + \varphi[X,Y] \\
&= -(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X \\
&= -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + g(Y,X)\xi - \eta(X)Y \\
&= \eta(Y)X - \eta(X)Y \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 3.1.2. *M^{2n+1} bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} de*

$$R_{XY}\xi = g(\xi,Y)X - g(X,\xi)Y$$

olacak şekilde bir ξ birim Killing vektör alanı varsa bu durumda M^{2n+1} bir Sasakian manifolddur [8].

İspat. Önerme 2.5.5 de $\eta(X) = g(X,\xi)$ ve $\varphi X = -\nabla_X\xi$ özellikleri yardımı ile (φ,ξ,η,g) kontakt metrik yapısının bir K-kontakt yapı olduğunu biliyoruz. Ayrıca ξ bir Killing vektör alanı olduğu için

$$\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = R_{X\xi}Y$$

dir ve buradan da $(\nabla_X\varphi)Y = R_{\xi X}Y$ olur. Bu durumda (3.1.3) denkleminden

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= g(R_{\xi X}Y,Z) = g(R_{YZ}\xi,X) \\
&= g(g(\xi,Z)Y - g(Y,\xi)Z,X) \\
&= g(X,Y)g(\xi,Z) - \eta(Y)g(X,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

olur ki bu da M^{2n+1} in bir Sasakian manifold olduğunu gösterir. $\square$

Şimdi Örnek 2.2.2 dan bir M^{2n+2} hemen hemen kompleks manifoldunun hiperyüzeyinin, bir hemen hemen kontakt metrik yapı (φ, ξ, η, g) ye sahip olduğunu biliyoruz. Böylece bir nearly Kahler manifold için aşağıdaki teoremi verebiliriz [7].

Teorem 3.1.3. $\tau : M^{2n+1} \to M^{2n+2}$ *bir nearly Kaehler manifoldun bir* C^∞ *yönlendirilebilir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda* (φ, ξ, η, g) *indirgenmiş hemen hemen kontakt metrik yapının*

$$(\nabla_X \varphi)X = 0$$

durumunu sağlaması için gerek ve yeter şart B *ikinci temel formun* $\eta \otimes \eta$ *ya orantılı olmasıdır [7].*

İspat. Bu hiperyüzeyin Gauss denklemi

$$\widetilde{\nabla}_{\tau_\star X} \tau_\star Y = \tau_\star \nabla_X Y + B(X,Y)C$$

dir, burada C birim normal vektör alanıdır. Bu durumda (2.2.13) denklemini kullanırsak, X, Y ve Z M^{2n+1} de teğet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Phi)(Y,Z) &= X\Phi(Y,Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z) \\
&= \tau_* X \Phi(\tau_* Y, \tau_* Z) - \Phi(\tau_* \nabla_X Y, \tau_* Z) - \Phi(\tau_* Y, \tau_* \nabla_X Z) \\
&= \tau_* X \Phi(\tau_* Y, \tau_* Z) - \Phi(\widetilde{\nabla}_{\tau_* X} \tau_* Y - B(X,Y)C, \tau_* Z) \\
&\qquad\qquad - \Phi(\tau_* Y, \widetilde{\nabla}_{\tau_* X} \tau_* Z - B(X,Z)C) \\
&= (\widetilde{\nabla}_{\tau_\star X} \Omega)(\tau_\star Y, \tau_\star Z) + \Phi(C, \tau_* Z) B(X,Y) + \Phi(\tau_* Y, C) B(X,Z) \\
&= (\widetilde{\nabla}_{\tau_\star X} \Omega)(\tau_\star Y, \tau_\star Z) + g(C, \tau_* \varphi Z) B(X,Y) + g(\tau_* Y, \varphi C) B(X,Z) \\
&= (\widetilde{\nabla}_{\tau_\star X} \Omega)(\tau_\star Y, \tau_\star Z) + g(C, J\tau_* Z - \eta(Z)C) B(X,Y) \\
&\quad - g(C, J\tau_* Y - \eta(Y)C) B(X,Z) \\
&= (\widetilde{\nabla}_{\tau_\star X} \Omega)(\tau_\star Y, \tau_\star Z) - B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y) \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

elde ederiz, burada Ω nearly Kaehler yapısının temel iki formudur. (3.1.4) denkleminde X ve Z vektör alanlarının rollerini değişitirip taraf tarafa toplarsak

$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_Z\Phi)(Y,X)=2\eta(Y)B(X,Z)-\eta(Z)B(X,Y) \\ -\eta(X)B(Z,Y)$$

olur. Eğer B, $\eta\otimes\eta$ ya orantılı ise, (1.5.4) denkleminden Z yerine X yazılırsa

$$g(Y,(\nabla_X\varphi)X)+g(Y,(\nabla_X\varphi)X)=2\eta(Y)\eta(X)\eta(X)-\eta(X)\eta(X)\eta(Y) \\ -\eta(X)\eta(X)\eta(Y)$$

elde edilir. Bu durumda

$$(\nabla_X\varphi)X=0$$

dır.

Tersine eğer $(\nabla_X\varphi)X=0$ ise

$$0=2\eta(Y)B(X,Z)-\eta(Z)B(X,Y)-\eta(X)B(Z,Y) \tag{3.1.5}$$

dir. (3.1.5) denkleminde Y yerine ξ alınırsa

$$2B(X,Z)=\eta(Z)B(X,\xi)+\eta(X)B(Z,\xi) \tag{3.1.6}$$

elde edilir ve (3.1.6) denkleminde de X yerine ξ alınırsa

$$B(\xi,Z)=B(\xi,\xi)\eta(Z)$$

dir ve benzer şekilde (3.1.6) denkleminde Z yerine ξ alınırsa

$$B(\xi,X)=B(\xi,\xi)\eta(X)$$

denklemi elde edilir. Sonuç olarak (3.1.6) denkleminde, $B(\xi,Z)$ ve $B(\xi,X)$ in değerlerini yazarsak

$$B(X,Z)=B(\xi,\xi)\eta(X)\eta(Z)$$

şeklinde istenen sonucu buluruz. □

Tanım 3.1.2. *Eğer bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapısında*

$$(\nabla_X\varphi)X=0 \tag{3.1.7}$$

ise bu yapıya bir nearly kosimplektik yapı denir [7].

Önerme 3.1.2. *Bir nearly kosimplektik manifoldda ξ bir Killing vektör alanıdır [7].*

İspat. Bir nearly kosimplektik manifoldda, bir ξ vektör alanı için $(\nabla_\xi \varphi)\xi = 0$ olduğu açıktır. Bu denklemi açarsak

$$(\nabla_\xi \varphi)\xi = \nabla_\xi \varphi\xi - \varphi\nabla_\xi \xi = 0$$

olur ve buradan $\varphi\nabla_\xi \xi = 0$ elde edilir ve böylece $\nabla_\xi \xi = 0$ dır. (2.2.6) denkleminin ξ ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi \varphi X, \varphi Y) + g(\varphi X, \nabla_\xi \varphi Y) &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y) \\ &\quad - \eta(\nabla_\xi X)\eta(Y) - \eta(X)\eta(\nabla_\xi Y) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

olur. (3.1.8) denkleminde ekleme çıkarma yaparsak,

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi \varphi X - \varphi\nabla_\xi X, \varphi Y) &+ g(\varphi\nabla_\xi X, \varphi Y) \\ &+ g(\varphi X, \nabla_\xi \varphi Y - \varphi\nabla_\xi Y) + g(\varphi X, \varphi\nabla_\xi Y) \\ &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y) - \eta(\nabla_\xi X)\eta(Y) - \eta(X)\eta(\nabla_\xi Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} g((\nabla_\xi \varphi)X, \varphi Y) + g(\varphi X, (\nabla_\xi \varphi)Y) &= g(\nabla_\xi X, \varphi^2 Y) + g(\nabla_\xi Y, \varphi^2 X) + g(\nabla_\xi X, Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_\xi Y) - \eta(\nabla_\xi X)\eta(Y) - \eta(X)\eta(\nabla_\xi Y) \\ &= -g(\nabla_\xi X, Y) + \eta(\nabla_\xi X)\eta(Y) - g(X, \nabla_\xi Y) \\ &\quad + \eta(X)\eta(\nabla_\xi Y) + g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y) \\ &\quad - \eta(X)\eta(\nabla_\xi Y) - \eta(\nabla_\xi X)\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olur. Ayrıca bir nearly kosimplektik yapının özelliğinden

$$g((\nabla_X \varphi)\xi, \varphi Y) + g((\nabla_\xi \varphi)X, \varphi Y) = 0 \tag{3.1.10}$$

dır ve benzer şekilde

$$g(\varphi X, (\nabla_Y \varphi)\xi) + g(\varphi X, (\nabla_\xi \varphi)Y) = 0 \tag{3.1.11}$$

olur. Bu durumda (3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerini toplarsak,

$$g((\nabla_X\varphi)\xi,\varphi Y)+g((\nabla_\xi\varphi)X,\varphi Y)+g(\varphi X,(\nabla_Y\varphi)\xi)+g(\varphi X,(\nabla_\xi\varphi)Y)=0 \tag{3.1.12}$$

olur. (3.1.9) dan (3.1.12) denklemi

$$g((\nabla_X\varphi)\xi,\varphi Y)+g(\varphi X,(\nabla_Y\varphi)\xi)=0 \tag{3.1.13}$$

şeklinde elde edilir. (3.1.13) denklemini açarsak ve (2.2.3) den

$$g(\varphi\nabla_X\xi,\varphi Y)+g(\varphi X,\varphi\nabla_Y\xi)=0$$

dır. (2.2.6) denkleminden

$$\begin{aligned} g(\varphi\nabla_X\xi,\varphi Y)+g(\varphi X,\varphi\nabla_Y\xi) &= g(\nabla_X\xi,Y)-\eta(\nabla_X\xi)\eta(Y)\\ &\quad+g(X,\nabla_Y\xi)-\eta(\nabla_Y\xi)\eta(X)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (2.4.17) den

$$g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi)=0$$

elde edilir. Bu durumda ξ bir Killing vektör alanıdır. □

Önerme 3.1.3. *Bir normal nearly kosimplektik manifoldda*

$$d\eta=0$$

dır [7].

İspat. Yapı normal olduğu için $N^{(1)}=0$ ve $N^{(2)}=0$ olur. Ayrıca yapı nearly kosimplektik olduğundan $(\nabla_X\varphi)X=0$ dır. Bu durumda (2.4.14) denkleminde $Y=X$ ve $Z=\xi$ alırsak, her X vektör alanı için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)X,\xi) &= 3d\Phi(X,\varphi X,\varphi\xi)-3d\Phi(X,X,\xi)\\ &\quad+g(N^{(1)}(X,\xi),\varphi X)+N^{(2)}(X,\xi)\eta(X)\\ &\quad+2d\eta(\varphi X,X)\eta(\xi)-2d\eta(\varphi\xi,X)\eta(X)\\ &= 2d\eta(\varphi X,X)\end{aligned}$$

denkleminden

$$d\eta(X, \varphi X) = 0$$

elde edilir. Böylece $d\eta(X + Y, \varphi(X + Y)) = 0$ olduğu gözönüne alınıp, $d\eta$ nın bilineerliği kullanılırsa

$$d\eta(X, \varphi Y) + d\eta(Y, \varphi X) = 0$$

olur. $N^{(2)} = 0$ olduğundan (2.4.10) denkleminden

$$d\eta(X, \varphi Y) = -d\eta(\varphi X, Y)$$

dir ve böylece $d\eta(X, \varphi Y) = 0$ olur. Ayrıca bir ξ vektör alanı için

$$\begin{aligned} d\eta(X, \xi) &= \frac{1}{2}\{X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X, \xi])\} \\ &= \frac{1}{2}\{-\xi g(X, \xi) - g([X, \xi], \xi)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, \xi) - g(\nabla_\xi \xi, X)\} \end{aligned}$$

dır. Bir normal nearly kosimplektik manifoldda ξ bir Killing vektör alanı olduğundan $d\eta(X, \xi) = 0$ olur. Bu durumda $d\eta = 0$ elde etmiş oluruz. □

Teorem 3.1.4. *Bir normal nearly kosimplektik manifold, kosimplektiktir [7].*

İspat. Bir normal nearly kosimplektik manifoldda $d\eta = 0$ dır. Ayrıca normal yapıda $N^1 = 0$ ve $N^2 = 0$ olacağından, bu durumda (2.4.14) denkleminde Y yerine X alırsak

$$2(g(\nabla_X \varphi)X, Z) = 3d\Phi(X, \varphi X, \varphi Z) - 3d\Phi(X, X, Z)$$

olur ve (1.1.1) denkleminden

$$d\Phi(X, \varphi X, \varphi Z) = 0$$

elde edilir. (2.4.14) denkleminden

$$2g(\nabla_X \varphi)Y, Z) = 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z)$$

ve

$$2g(\nabla_Y \varphi)X, Z) = 3d\Phi(Y, \varphi X, \varphi Z) - 3d\Phi(Y, X, Z)$$

dir ve bu eşitlikleri toplarsak

$$d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) + d\Phi(Y, \varphi X, \varphi Z) = 0$$

elde ederiz. Bu durumda bir ξ vektör alanı için

$$d\Phi(\xi, X, Y) = 0$$

olur ve

$$\begin{aligned} d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) &= d\Phi(\varphi X, Y, \varphi Z) = -d\Phi(\varphi X, \varphi Z, Y) \\ &= d\Phi(X, Z, Y) = -d\Phi(X, Y, Z) \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

olur. Sonuç olarak (2.4.14) ve (3.1.14) denklemlerinden

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &= -6d\Phi(X, Y, Z) \\ &= -6\{X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) \\ &\quad - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X)\} \\ &= -6\{Xg(Y, \varphi Z) + Yg(Z, \varphi X) + Zg(X, \varphi Y) \\ &\quad - g([X, Y], \varphi Z) - g([Z, X], \varphi Y) - g([Y, Z], \varphi X)\} \\ &= -6\{g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) + g(\nabla_Y Z, \varphi X) + g(Z, \nabla_Y \varphi X) \\ &\quad + g(\nabla_Z X, \varphi Y) + g(X, \nabla_Z \varphi Y) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(\nabla_Y X, \varphi Z) \\ &\quad - g(\nabla_Z X, \varphi Y) + g(\nabla_X Z, \varphi Y) - g(\nabla_Y Z, \varphi X) + g(\nabla_Z Y, \varphi X)\} \\ &= -6\{g(\nabla_X \varphi Z - \varphi \nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y \varphi X - \varphi \nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(\nabla_Z \varphi Y - \varphi \nabla_Z Y, X)\} \\ &= 6\{g((\nabla_X \varphi)Y, Z) + g((\nabla_Y \varphi)Z, X) + g((\nabla_Z \varphi)X, Y)\} \\ &= 3g((\nabla_X \varphi)Y, Z) \end{aligned}$$

dır ve böylece $\nabla_X \varphi = 0$ olur ve buradan $d\Phi = 0$ elde edilir. □

Teorem 3.1.5. *$\tau : M^{2n+1} \to M^{2n+2}$, Kaehler manifoldunun bir yönlendirilebir C^∞ hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (φ, ξ, η, g) indirgenmiş hemen hemen kontakt metrik yapıs∈ ınSasakianolması icingerekveyeterşartM^{2n+1} in B ikinci temel formunun*

$$B = -g + \beta\eta \otimes \eta$$

denklemini sağlamasıdır, burada β M^{2n+1} üzerinde bir fonksiyondur [7].

İspat. Gömülen (ambient) uzay Kaehler olduğundan (3.1.4) denkleminden

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) - B(X,Z)\eta(Y)$$

olur. Eğer $B = -g + \beta\eta \otimes \eta$ ise

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Phi)(Y,Z) &= (-g(X,Y) + \beta\eta(X)\eta(Y))\eta(Z) \\ &\quad - (-g(X,Z) + \beta\eta(X)\eta(Z))\eta(Y) \\ &= -g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y) \\ &= g(g(X,Z)\xi - \eta(Z)X, Y) \\ &= g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)\end{aligned}$$

dir ve böylece (φ, ξ, η, g) yapısı bir Sasakian yapıdır.

Tersine, eğer M^{2n+1} bir Sasakian manifold ise, (3.1.1) denkleminden

$$B(X,Y)\eta(Z) - B(X,Z)\eta(Y) = -g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y) \tag{3.1.15}$$

dir. (3.1.15) denkleminde $X = Y = \xi$ alınırsa

$$B(\xi,\xi)\eta(Z) - B(\xi,Z) = 0 \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Tekrar (3.1.15) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$B(X,Y)\eta(\xi) - B(X,\xi)\eta(Y) = -g(X,Y)\eta(\xi) + g(X,\xi)\eta(Y)$$

olur ve burada (3.1.16) denklemi kullanılırsa

$$B(X,Y) - B(\xi,\xi)\eta(X)\eta(Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

dir veya

$$B = -g + \beta\eta \otimes \eta$$

elde edilir, burada $\beta = B(\xi,\xi) + 1$ dir. □

Tanım 3.1.3. *Eğer*

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X = 2g(X,Y)\xi - \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

ise bir (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına nearly Sasakian denir [7].

3.2 CR-Manifoldlar

N, n-boyutlu C^∞ manifold ve $T^{\mathbb{C}}N$, N nin kompleksleştirilmiş tanjant demeti olsun, yani

$$T_p^{\mathbb{C}}N = T_pN \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq T_pN \oplus iT_pN$$

dir. $\mathcal{H}$, kompleks ℓ-boyutlu bir C^∞ kompleks altdemet olsun. Bir reel n-boyutlu CR-manifoldu ve bir kompleks ℓ-boyutlu CR-manifoldu, $\mathcal{H}_p \cap \bar{\mathcal{H}}_p = 0$ olacak şekilde bir $(N, \mathcal{H})$ ikilisidir ve $\mathcal{H}$ involutivdir, yani $X, Y \in \mathcal{H}$ için $[X, Y] \in \mathcal{H}$ dır. Bu durumda $D^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$ olacak şekilde TN tanjant demetinin bir tek D alt demeti ve $\mathcal{J}^2 = -I$, $\mathcal{H} = \{X - i\mathcal{J}X | X \in D\}$ olacak şekilde bir tek

$$\mathcal{J} : D \to D$$

demet dönüşümü vardır [8].

$(M, \mathcal{H})$, reel 2n+1-boyutlu bir M manifolduna ve kompleks n-boyutlu bir $\mathcal{H}$ kompleks alt demetine sahip bir CR-manifoldu olsun. $D \subseteq \text{çek} f$ olacak şekilde bütün $f \in T^*M$ kovektörlerinin uzayını F_x şeklinde alalım. Bu durumda bir $F \subset T^*M$ reel doğru demeti tanımlanır. Eğer M yönlendirilebilir ise bu durmda $F \to M$, sıfırdan farklı bir global η kesiti vardır. Bu η kesitine bir pseudo-Hermitian yapı ve $(M, \mathcal{H}, \eta)$ yapısına da bir pseudo-Hermityan manifold denir. $(M, \mathcal{H}, \eta)$ nin Levi formu, $X, Y \in D$ için

$$L_\eta(X, Y) = -d\eta(X, \mathcal{J}Y)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Eğer L_η non-dejenere ise $(M, \mathcal{H}, \eta)$ pseudo-Hermitian manifoldu da non-dejeneredir. Bu durumda M, bir $\eta\Lambda(d\eta)^n$ doğal hacim formuna sahiptir; böylece η bir kontakt formdur ve ξ karakteristik vektör alanı D ye transversaldır.

Eğer L_η pozitif tanımlı ise $(M, \mathcal{H}, \eta)$ ya kuvvetli (strongly) pseudo-konveks denir.

$TM = D \oplus \{\xi\}$ ayrışımı gözönüne alınırsa her $X, Y \in D$ için

$$g_\eta(X, Y) = L_\eta(X, Y), \quad g_\eta(\xi, \xi) = 1, \quad g_\eta(\xi, X) = 0$$

ile L_η, M üzerinde bir g_η Riemann metriğine genişletilebilir ve bu metriğe Webster metriği denir. Ayrıca $\mathcal{J}$ yardımı ile $X \in D$ için

$$\varphi\xi = 0, \quad \varphi X = \mathcal{J}X$$

ile bir φ $(1,1)$ tipinde tensör alanı tanımlanabilir. Böylece bir kuvvetli pseudo convеks $(M,\mathcal{H},\eta)$ CR-manifoldu üzerinde $(\varphi,\xi,\eta,g_\eta)$ şeklinde bir kontakt yapı oluşturulabilir [8].

Tanım 3.2.1. *(M,J,g) bir hemen hemen Hermitian manifold ve N de M nin bir alt manifoldu olsun. Eğer M de aşağıdaki şartları sağlayan bir $D : p \rightarrow D_p \in T_pM$ diferensiyellenebilir disribüsyonu varsa, M nin bir N alt manifolduna bir CR-alt manifoldu denir [2]:*
1)D, J altında invaryanttır, yani her bir $p \in N$ için

$$JD_p = D_p$$

dir.
2)Ortogonal distribüsyonun, $D^\perp : p \mapsto D_p^\perp \in T_pM$ tümleyeni anti-invaryanttır, yani her bir $p \in N$ için

$$JD_p^\perp \subset T_p^\perp N$$

dir. Açık olarak görülür ki reel hiperyüzeyler, CR-alt manifoldlardır.

P ve Q sırasıyla, TN den D ve $D^\perp$ distribüsyonları üzerine projeksiyonlar olsun. D distribüsyonu bir J-invaryant distribüsyon olduğundan, $\mathcal{J} = JP$ olarak alınmasıyla $T^{\mathbb{C}}N$ nin bir

$$\mathcal{H} = \{X - i\mathcal{J}X | X \in D\}$$

kompleks alt demeti tanımlanabilir. Bu durumda

$$\mathcal{J}(X - i\mathcal{J}X) = JPX - i\mathcal{J}JPX \qquad (3.2.1)$$

dir [8].

Lemma 3.2.1. *N, bir (M,J,g) Hermitian manifoldunun bir CR-alt manifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in D$ için*

$$Q([JX,Y] + [X,JY]) = 0$$

dır [8].

İspat. N, M manifoldunun bir CR-alt manifoldu olsun. Bu durumda M Hermitian olduğu için, $[J,J]=0$ dır ve $X,Y \in D$ için

$$\begin{aligned} 0 = [J,J](JX,Y) &= -[JX,Y] + [J^2X,JY] - J[J^2X,Y] - J[JX,JY]) \\ &= -[JX,Y] - [X,JY] + J([X,Y] - [JX,JY]) \end{aligned}$$

veya

$$[JX,Y] + [X,JY] = J([X,Y] - [JX,JY]) \tag{3.2.2}$$

elde edilir, burada $[X,Y]$ ve $[JX,JY]$, N ye teğet olduğundan $J([X,Y]-[JX,JY])$ nin $D^\perp$ de bileşeni yoktur. Bu durumda $[JX,Y]+[X,JY]$ de $D^\perp$ bileşenine sahip değildir ve böylece $Q([JX,Y]+[X,JY]) = 0$ dır. □

Teorem 3.2.1. *M bir Hermitian manifold ve N bir CR-alt manifold olsun. Bu durumda N bir CR-manifolddur [8].*

İspat. N bir CR-alt manifold olduğundan $TN = D \oplus D^\perp$, $\mathcal{J}D \subset TN$, $\mathcal{J}D^\perp \subset TN^\perp$ olacak şekilde D ve $D^\perp$ distribüsyonları vardır. Bu durumda $X,Y \in D$ için $[J,J]=0$ olduğundan ve Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned} [X - i\mathcal{J}X, Y - i\mathcal{J}Y] &= [X,Y] - [X, i\mathcal{J}Y] - [i\mathcal{J}X, Y] + [i\mathcal{J}X, i\mathcal{J}Y] \\ &= [X,Y] - [JX,JY] - i[JX,Y] - i[X,JY] \\ &= -J[JX,Y] - J[X,JY] - iP[JX,Y] - iP[X,JY] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.1) eşitliğini ve Lemma 3.2.1 i kullanırsak

$$\begin{aligned} [X - i\mathcal{J}X, Y - i\mathcal{J}Y] &= -\mathcal{J}[JX,Y] - \mathcal{J}[X,JY] + i\mathcal{J}^2[JX,Y] + i\mathcal{J}^2[X,JY] \\ &= -\mathcal{J}([JX,Y] - i\mathcal{J}[JX,Y]) - \mathcal{J}([X,JY] - i\mathcal{J}[X,JY]) \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

olur. □

(φ, ξ, η) yapı tensörlerine sahip bir M^{2n+1} hemen hemen kontakt manifoldunu gözönüne alalım. Bir kontakt yapıda $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ ve $\varphi\xi = 0$ olduğundan φ nin eigen değerleri 0 ve $\pm i$ dir. Ayrıca φ, $\eta = 0$ ile tanımlanan D alt demetinde bir hemen hemen kompleks yapıdır. Bu durumda D_p nin kompleksleştirilmesi $D'_p \oplus D''_p$ şeklinde ayrıştırılabilir, yani $D_p = D'_p \oplus D''_p$ dir, burada $\pm i$ nin eigen uzayları sırasıyla

$$D'_p = \{X - i\varphi X | X \in D_p\} \tag{3.2.3}$$

ve

$$D''_p = \{X + i\varphi X | X \in D_p\} \tag{3.2.4}$$

dir.

Lemma 3.2.2. *D, M^{2n+1} hemen hemen kontakt manifoldunda bir alt demet olsun. Bu durumda, $X \in D$ için $\varphi(X - i\varphi X) \in D'_p$ dir [8].*

İspat. D, M^{2n+1} de bir alt demet olduğundan $X \in D$ için $\eta(X) = 0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(X - i\varphi X)) &= \varphi(\varphi X - i\varphi^2 X) \\ &= \varphi(\varphi X - i(-X + \eta(X)\xi) \\ &= \varphi(i(X - i\varphi X)) = i\varphi(X - i\varphi X) \end{aligned}$$

dir ve buradan $\varphi(X - i\varphi X) \in D'_p$ olur. □

Teorem 3.2.2. *Eğer $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir normal hemen hemen kontakt manifold ise bu durumda (M^{2n+1}, D') bir CR-manifolddur [8].*

İspat. M^{2n+1}, bir normal hemen hemen kontakt manifold ve D, M^{2n+1} de bir alt demet olsun. (3.2.3) ve (3.2.4) eşitliklerinden $\bar{D}'_p = D''_p$ ve $D'_p \cap D''_p = 0$ dır. Bu durumda $X, Y \in D$ için $[X - i\varphi X, Y - i\varphi Y] \in D'_p$ dir. Normalliğin tanımından $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ olduğundan

$$0 = -[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \tag{3.2.5}$$

dir. Üstelik $N^{(2)} = 0$ olduğundan

$$(L_{\varphi X}\eta)(Y) - (L_{\varphi Y}\eta)(X) = 0$$

olur ve buradan

$$\eta([\varphi X, Y] + [X, \varphi Y]) = 0 \tag{3.2.6}$$

dır. Şimdi (3.2.5), (3.2.6) ve (2.2.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
[X - i\varphi X, Y - i\varphi Y] &= [X, Y] - [\varphi X, \varphi Y] - i[\varphi X, Y] - i[X, \varphi Y] \\
&= -\varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + i\varphi^2[\varphi X, Y] \\
&- i\eta([\varphi X, Y])\xi + i\varphi^2[X, \varphi Y] - i\eta([X, \varphi Y])\xi \\
&= -\varphi([\varphi X, Y] - i\varphi[\varphi X, Y]) - \varphi([X, \varphi Y] - i\varphi[X, \varphi Y]) \in D'
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (M^{2n+1}, D') bir CR-manifoldudur. □

3.3 φ-Kesit Eğriliği

M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) yapısına sahip bir Sasakian manifold olsun ve $(0, 4)$ tipinde bir P tensör alanı

$$\begin{aligned}
P(X, Y; Z, W) &= d\eta(X, Z)g(Y, W) - d\eta(X, W)g(Y, Z) \\
&- d\eta(Y, Z)g(X, W) + d\eta(Y, W)g(X, Z)
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
P(Z, W; X, Y) &= g(Z, \varphi X)g(W, Y) - g(Z, \varphi Y)g(W, X) \\
&- g(W, \varphi X)g(Z, Y) + g(W, \varphi Y)g(Z, X) \\
&= -P(X, Y; Z, W)
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$P(X, Y; Z, W) = -P(Z, W; X, Y)$$

olur. Eğer $\{X, Y\}$, ξ ye ortogonal olan bir ortonormal ikili ve $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ aralığında

$$g(X, \varphi Y) = \cos\theta \tag{3.3.2}$$

ise, bu durumda (3.3.1) denklemi yardımı ile

$$\begin{aligned}
P(X,Y;X,\varphi Y) &= d\eta(X,X)g(Y,\varphi Y) - d\eta(X,\varphi Y)g(Y,X) \\
&\quad - d\eta(Y,X)g(X,\varphi Y) + d\eta(Y,\varphi Y)g(X,X) \\
&= -g(X,\varphi^2 Y)g(X,Y) - g(Y,\varphi X)g(X,\varphi Y) + g(Y,\varphi^2 Y) \\
&= g(X,Y)g(X,Y) + g(X,\varphi Y)g(X,\varphi Y) - g(Y,Y)
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}
P(X,Y,;X,\varphi Y) &= \cos^2\theta - 1 \\
&= -\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

olur [7].

Lemma 3.3.1. *Bir Sasakian manifoldda*

a) $g(R_{XY}Z,\varphi W) + g(R_{XY}\varphi Z, W) = -P(X,Y;Z,W)$.

ξ *ye ortogonal olan X,Y,Z ve W vektör alanları için*

b) $g(R_{\varphi X\varphi Y}\varphi Z,\varphi W) = g(R_{XY}Z,W)$

ve

c)$g(R_{X\varphi X}Y,\varphi Y) = g(R_{XY}X,Y) + g(R_{X\varphi Y}X,\varphi Y) - 2P(X,Y;X,\varphi Y)$

dir[7].

İspat. Bir direk hesaplama veya Ricci özdeşliği ile

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\nabla_Y\Phi &- \nabla_Y\nabla_X\Phi - \nabla_{[X,Y]}\Phi)(Z,W) \\
&= \nabla_X(Y\Phi(Z,W) - \Phi(\nabla_Y Z,W) - \Phi(Z,\nabla_Y W)) \\
&\quad - \nabla_Y(X\Phi(Z,W) - \Phi(\nabla_X Z,W) - \Phi(Z,\nabla_X W)) \\
&\quad - [X,Y]\Phi(Z,W) + \Phi(\nabla_{[X,Y]}Z,W) + \Phi(Z,\nabla_{[X,Y]}W) \\
&= \nabla_X\nabla_Y\Phi(Z,W) - \Phi(\nabla_X\nabla_Y Z,W) - \Phi(\nabla_Y Z,\nabla_X W) \\
&\quad - \Phi(\nabla_X Z,\nabla_Y W) - \Phi(Z,\nabla_X\nabla_Y Z) - \nabla_Y\nabla_X\Phi(Z,W) \\
&\quad + \Phi(\nabla_Y\nabla_X Z,W) + \Phi(\nabla_X Z,\nabla_Y W) + \Phi(\nabla_Y Z,\nabla_X W) \\
&\quad + \Phi(Z,\nabla_Y\nabla_X W) - [X,Y]\Phi(Z,W) + \Phi(\nabla_{[X,Y]},W) \\
&\quad + \Phi(Z,\nabla_{[X,Y]})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\Phi(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&\quad - \Phi(Z, \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= -g(R_{XY}Z, \varphi W) - g(Z, \varphi R_{XY}W) \\
&= -g(R_{XY}Z, \varphi W) + g(R_{XY}W, \varphi Z) \\
&= -g(R_{XY}Z, \varphi W) - g(R_{XY}\varphi Z, W)
\end{aligned}
$$

olduğunu bulabiliriz. Sol tarafta

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

Sasakian durumu kullanılırsa (a) elde edilir. (a) ve P nin tanımı kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
g(R_{\varphi X\varphi Y}\varphi Z, \varphi W) &= g(R_{\varphi X\varphi Y}Z, W) - P(\varphi X, \varphi Y; Z, \varphi W) \\
&= g(R_{XY}Z, W) - P(Z, W; X, \varphi Y) - P(\varphi X, \varphi Y; Z, \varphi W) \\
&= g(R_{XY}Z, W)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde (b) elde edilir. Son olarak $g(R_{X\varphi X}Y, \varphi Y)$ ye Bianchi özdeşliğini uygular ve (a) yı kullanırsak

$$
\begin{aligned}
g(R_{X\varphi X}Y, \varphi Y) &= g(R_{XY}\varphi X, \varphi Y) + g(R_{X\varphi Y}\varphi X, Y) \\
&= g(R_{XY}X, Y) + g(R_{X\varphi Y}X, \varphi Y) - 2P(X, Y; X, \varphi Y)
\end{aligned}
$$

şeklinde (c) yi elde ederiz. □

Tanım 3.3.1. *Eğer $\{X, \varphi X\}$, düzlem kesitinin bir ortonormal bazı olacak şekilde ξ ye ortogonal bir $X \in T_pM^{2n+1}$ vektör alanı varsa, T_pM^{2n+1} de bir düzlem kesitine bir φ-kesiti denir. $H(X)$ ile gösterilen $K(X, \varphi X) = g(R_{X\varphi X}\varphi X, X)$ kesit eğriliğine bir φ-kesit eğriliği denir [7].*

Herhangi bir X ve Y vektör alanları için

$$B(X,Y) = g(R_{XY}Y, X) \tag{3.3.4}$$

diyelim. Ayrıca ξ ye ortogonal olan herhangi bir X vektör alanı için

$$D(X) = B(X, \varphi X) \tag{3.3.5}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki Önermeyi verelim.

Önerme 3.3.1. *Bir Sasakian manifoldda, ξ ye ortogonal olan X ve Y tanjant vektörleri için*

$$B(X,Y) = \frac{1}{32}[3D(X+\varphi Y) + 3D(X-\varphi Y) - D(X+Y) - D(X-Y) \\ - 4D(X) - 4D(Y) - 24P(X,Y;X,\varphi Y)] \qquad (3.3.6)$$

dir [2].

İspat. Burada Lemma 3.3.1 den faydalanacağız. İlk önce

$$\begin{aligned} D(X+Y) + D(X-Y) &= B(X+Y, \varphi X + \varphi Y) + B(X-Y, \varphi X - \varphi Y) \\ &= g(R_{X+Y,\varphi X+\varphi Y}\varphi X + \varphi Y, X+Y) \\ &\quad + g(R_{X-Y,\varphi X-\varphi Y}\varphi X - \varphi Y, X-Y) \\ &= 2[R(X,\varphi X,X,\varphi X) + R(Y,\varphi Y,Y,\varphi Y) \\ &\quad + R(X,\varphi Y,X,\varphi Y) + R(X,\varphi Y,Y,\varphi X) \\ &\quad + R(X,\varphi X,Y,\varphi Y) + R(Y,\varphi X,Y,\varphi X) \\ &\quad + R(Y,\varphi X,X,\varphi Y) + R(Y,\varphi Y,X,\varphi X)] \qquad (3.3.7) \end{aligned}$$

(3.3.7) denkleminde Y yerine φY alırsak

$$\begin{aligned} 3D(X+\varphi Y) + 3D(X-\varphi Y) &= 6[R(X,\varphi X,X,\varphi X) + R(\varphi Y,\varphi^2 Y,\varphi Y,\varphi^2 Y) \\ &\quad + R(X,\varphi^2 Y,X,\varphi^2 Y) + R(X,\varphi^2 Y,\varphi Y,\varphi X) \\ &\quad + R(X,\varphi X,\varphi Y,\varphi^2 Y) + R(\varphi Y,\varphi X,\varphi Y,\varphi X) \\ &\quad + R(\varphi Y,\varphi X,X,\varphi^2 Y) + R(\varphi Y,\varphi^2 Y,X,\varphi X)] \\ &= 6[R(X,\varphi X,X,\varphi X) + R(\varphi Y,Y,\varphi Y,Y) \\ &\quad + R(X,Y,X,Y) - R(X,Y,\varphi Y,\varphi X) \\ &\quad - R(X,\varphi X,\varphi Y,Y) + R(\varphi Y,\varphi X,\varphi Y,\varphi X) \\ &\quad - R(\varphi Y,\varphi X,X,Y) - R(\varphi Y,Y,X,\varphi X)] \qquad (3.3.8) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (3.3.4) ve (3.3.5) eşitliklerinden

$$4D(X) = 4B(X,\varphi X) = 4g(R_{X\varphi X}\varphi X, X)$$

ve

$$4D(Y) = 4B(Y, \varphi Y) = 4g(R_{Y\varphi Y}\varphi Y, Y)$$

dir. Lemma 3.3.1 in (c) sinden

$$2P(X, Y; X, \varphi Y) = g(R_{XY}X, Y) + g(R_{X\varphi Y}X, \varphi Y) - g(R_{X\varphi X}Y, \varphi Y)$$

olur. Üstelik (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned} D(X+Y) + D(X-Y) = 2[&D(X) + D(Y) + 2B(X, \varphi Y) \\ &+ 2g(R(X, \varphi X)\varphi Y, Y) + 2g(R(X, \varphi Y)\varphi X, Y)] \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

ve

$$\begin{aligned} D(X+\varphi Y) + D(X-\varphi Y) = 2[&D(X) + D(\varphi Y) + 2B(X, Y) \\ &+ 2g(R(X, \varphi X)\varphi Y, Y) + 2g(R(X, Y)\varphi Y, \varphi X)] \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

olur. Bu durumda (3.3.10) denklemini 3 ile çarpıp, (3.3.7) denkleminden çıkarırsak ve ayrıca $D(\varphi Y) = D(Y)$ olduğu için

$$\begin{aligned} 3D(X+\varphi Y) + 3D(X-\varphi Y) - D(X+Y) - D(X-Y) - 4D(X) - 4D(Y) \\ = 12B(X, Y) - 4B(X, \varphi Y) + 8g(R(X, \varphi X)\varphi Y, Y) \\ + 12g(R(X, Y)\varphi Y, \varphi X) + 4g(R(X, \varphi Y)Y, \varphi X) \end{aligned}$$

denklemini elde edebiliriz. Kolayca gösterilebilir ki

$$8g(R(X, \varphi X)\varphi Y, Y) = 8[B(X, Y) + B(X, \varphi Y) + 2P(X, Y; X, \varphi Y)]$$

dir. Ayrıca

$$12g(R(X, Y)\varphi Y, \varphi X) = 12[B(X, Y) + P(X, Y; X, \varphi Y)]$$

ve

$$4g(R(X, \varphi Y)Y, \varphi X) = 4[-B(X, \varphi Y) + P(X, \varphi Y; X, Y)]$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{32}[3D(X+\varphi Y)+3D(X-\varphi X)-D(X+Y)-D(X-Y)\\
&\quad -4D(X)-4D(Y)-24P(X,Y;X,\varphi Y)]\\
&=\frac{1}{32}[6g(R_{XY}Y,X)+6g(R_{\varphi X\varphi Y}\varphi Y,\varphi X)+8g(R_{X\varphi X}\varphi Y,Y)\\
&\quad +12g(R_{XY}\varphi Y,\varphi X)-2g(R_{X\varphi Y}\varphi Y,X)-2g(R_{\varphi XY}Y,\varphi X)\\
&\quad +4g(R_{X\varphi Y}Y,\varphi X)-24P(X,Y;X,\varphi Y)\\
&=g(R_{XY}Y,X)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.3.2. *M^{2n+1} bir Sasakian manifold ve ξ ye ortogonal olan X ve Y vektör lerinden oluşan $\{X,Y\}$, T_pM^{2n+1} tanjant uzayında bir ortonormal ikili olsun. Eğer $g(X,\varphi Y)=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, ise bu durumda $K(X,Y)$ kesit eğriliği,*

$$\begin{aligned}
K(X,Y)=&\frac{1}{8}[3(1+\cos\theta)^2H(X+\varphi Y)+3(1-\cos\theta)^2H(X-\varphi Y)\\
&-H(X+Y)-H(X-Y)-H(X)-H(Y)+6\sin^2\theta] \qquad (3.3.11)
\end{aligned}$$

dir [7].

İspat. M^{2n+1} bir Sasakian manifold olsun. Ayrıca Önerme 3.3.1 den $K(X,Y)=B(X,Y)$ dir. Bu durumda $B(X,Y)$ nin genişlemesinde terimler incelenebilir. ξ ye ortogonal olan herhangi bir X vektör alanı için

$$D(X)=g(X,X)^2H(X) \qquad (3.3.12)$$

olduğu açıktır. Bu durumda $\{X,Y\}$ ikilileri için, (3.3.2) denkleminden

$$\begin{aligned}
g(X+\varphi Y,X+\varphi Y)&=g(X,X)+g(X,\varphi Y)+g(\varphi Y,X)+g(\varphi Y,\varphi Y)\\
&=2(1+\cos\theta),
\end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde

$$g(X-\varphi Y,X-\varphi Y)=2(1-\cos\theta),$$

$$g(\varphi X-Y,\varphi X-Y)=2(1+\cos\theta),$$

$$g(X+Y, X+Y) = 2$$

ve

$$g(X-Y, X-Y) = 2$$

elde edilir. Böylece (3.3.12) denkleminden

$$\begin{aligned} D(X+\varphi Y) &= g(X+\varphi Y, X+\varphi Y)^2 H(X+\varphi Y) \\ &= 4(1+\cos\theta)^2 H(X+\varphi Y) \end{aligned}$$

ve

$$D(X-\varphi Y) = 4(1-\cos\theta)^2 H(X-\varphi Y)$$

$$D(X+Y) = 4H(X+Y)$$

$$D(X-Y) = 4H(X-Y)$$

dir ve ayrıca (3.3.3) denkleminden

$$P(X, Y; X, \varphi Y) = -\sin^2\theta$$

olduğunu görmüştük. Bu durumda bu denklemleri, (3.3.6) denkleminde yerine yazarsak istenen sonucu buluruz. □

Teorem 3.3.1. *φ-kesit eğriliği, bir Sasakian manifoldun eğriliğini belirtir [7].*

İspat. Bir Riemann manifoldunun kesit eğriliği eğri belirttiğinden, tanjant vektörlerinin bir $\{X, Y\}$ ortonormal ikilisi için $K(X, Y)$ kesit eğriliğini, H ve g ile tek bir şekilde belirtmek yeterli olur. Eğer X ve Y, ξ ye ortogonal ise Önerme 3.3.2 uygulanır. Eğer X veya Y, ξ ye eşit ise

$$K(X, Y) = 1$$

olur. X ve Y vektörlerini

$$X = \eta(X)\xi + aZ$$

$$Y = \eta(Y)\xi + bW$$

şeklinde alalım, burada $\eta(X)$, $\eta(Y)$, $a = \sqrt{1-\eta(X)^2}$ ve $b = \sqrt{1-\eta(Y)^2}$ sıfırdan farklıdır. Ayrıca Z ve W vektörleri de ξ ye ortogonal birim vektörlerdir. Bir Sasakian manifolda, ξ ye ortogonal olan herhangi bir Z vektör alanı için

$$R_{\xi Z}\xi = -Z$$

ve

$$R_{Z\xi}Z = -\xi$$

olduğunu daha önce görmüştük. Bu durumda

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= g(R_{XY}X,Y) \\
&= g(R_{\eta(X)\xi+aZ,\eta(Y)\xi+bW}(\eta(Y)\xi+bW),\eta(X)\xi+aZ) \\
&= R(\eta(X)\xi+aZ,\eta(Y)\xi+bW,\eta(X)\xi+aZ,\eta(Y)\xi+bW) \\
&= g(\eta(X)\xi+aZ,\eta(X)\xi+aZ)g(\eta(Y)\xi+bW,\eta(Y)\xi+bW) \\
&\quad - g(\eta(Y)\xi+bW,\eta(X)\xi+aZ)g(\eta(X)\xi+aZ,\eta(Y)\xi+bW) \\
&= (\eta(X)^2g(\xi,\xi)+2\eta(X)g(\xi,aZ)+g(aZ,aZ))(\eta(Y)^2g(\xi,\xi) \\
&\quad + 2\eta(Y)g(\xi,bW)+g(bW,bW)) - (\eta(Y)\eta(X)g(\xi,\xi)+\eta(Y)g(aZ,\xi) \\
&\quad + \eta(X)g(\xi,bW)+g(aZ,bW))(\eta(X)\eta(Y)g(\xi,\xi)+\eta(X)g(\xi,bW) \\
&\quad + \eta(Y)g(bW,\xi)+g(bW,aZ)) \\
&= (\eta(X)^2+a^2)(\eta(Y)^2+b^2) - (\eta(Y)\eta(X)+abg(Z,W))^2 \\
&= a^2\eta(Y)^2+b^2\eta(X)^2-2ab\eta(X)\eta(Y)g(Z,W) \\
&\qquad + a^2b^2(g(Z,Z)g(W,W)+g(Z,W)^2) \\
&= b^2\eta(X)^2-2ab\eta(X)\eta(Y)g(Z,W)+a^2\eta(Y)^2+a^2b^2g(R_{ZW}W,Z)
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

dir. Şimdi Z ve W vektörlerini, $Z = \frac{1}{a}(X-\eta(X)\xi)$ ve $W = \frac{1}{b}(Y-\eta(Y)\xi)$ şeklinde alırsak

$$\begin{aligned}
g(Z,W) &= \frac{1}{ab}g(X-\eta(X)\xi,Y-\eta(Y)\xi) \\
&= -\frac{1}{ab}\eta(X)\eta(Y)
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

olur ve bu durumda

$$g(R_{ZW}W, Z) = [1 - g(Z, W)^2]K(Z, W)$$
$$= [1 - \frac{1}{a^2b^2}\eta(X)^2\eta(Y)^2]K(Z, W) \qquad (3.3.15)$$

dir. Böylece (3.3.13) denkleminde $a = \sqrt{1 - \eta(X)^2}$ ve $b = \sqrt{1 - \eta(Y)^2}$ değerlerini yerine yazar ve (3.3.14) ve (3.3.15) denklemleri kullanırsak

$$K(X, Y) = \eta(X)^2(1 - \eta(Y)^2) + 2\eta(X)^2\eta(Y)^2 + \eta(Y)^2(1 - \eta(X)^2)$$
$$+[(1 - \eta(X)^2)(1 - \eta(Y)^2) - \eta(X)^2\eta(Y)^2]K(Z, W)$$
$$= \eta(X)^2 + \eta(Y)^2 + [1 - \eta(X)^2 - \eta(Y)^2]K(Z, W)$$

elde ederiz. K(Z,W), Önerme 3.3.2 nin ispatıile verilir ve böylece ispat tamamlanır

□

Tanım 3.3.2. *Bir c sabit φ-kesit eğriliğine sahip, bir Sasakian manifolduna bir Sasakian uzay formu denir. Sasakian uzay formunu $M^{2n+1}(c)$ ile göstereceğiz [7].*

3.4 Sasakian Manifoldların Alt Manifoldları

3.4.1 Sasakian Manifoldların İnvaryant Alt Manifoldları

Tanım 3.4.1. *$\bar{M}$, (φ, ξ, η, g) yapısına sahip bir (2m+1)-boyutlu Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin (2n+1)-boyutlu alt manifoldu olsun. Eğer M de heryerde, ξ yapı vektör alanı M ye teğet ve M nin her noktasında, M ye teğet herhangi bir X vektör alanı için φX, M ye teğet ise $\bar{M}$ nin M alt manifolduna invaryantır denir. $\forall p \in M$ için*

$$\varphi T_pM \subset T_pM$$

dir. İndirgenmiş (φ, ξ, η, g) yapısına sahip herhangi bir M invaryant alt manifoldu bir Saskian manifoldur [2].

$\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ nin ve ∇ da M alt manifoldun Levi-Civita konneksiyonları olsunlar. ξ, M ye teğet olduğundan, M ye teğet herhangi bir X vektör alanı için (3.1.2) denkleminden Gauss formülü

$$-\varphi X = \bar{\nabla}_X\xi = \nabla_X\xi + B(X, \xi)$$

dir. Bu durumda $B(X,\xi)=0$ olur, burada B, M nin ikinci temel formudur. M ye teğet herhangi X ve Y vektör alanları için (3.1.1) denkleminden

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\varphi Y &= \nabla_X\varphi Y + B(X,\varphi Y)\\ &= (\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y + B(X,\varphi Y)\\ &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X + \varphi\nabla_X Y + B(X,\varphi Y),\end{aligned}$$

dir veya

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\varphi Y &= (\bar{\nabla}_X\varphi)Y + \varphi\bar{\nabla}_X Y\\ &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X + \varphi\nabla_X Y + \varphi B(X,Y),\end{aligned}$$

olur. Bu son iki denklemden

$$\varphi B(X,Y) = B(X,\varphi Y)$$

elde edilir. B simetrik olduğu için

$$\varphi B(X,Y) = B(\varphi X,Y)$$

dir. Ayrıca (1.3.3) denkleminden aşağıdaki Lemmaya sahip oluruz.

Lemma 3.4.1. *M, bir $\bar{M}$ Sasakian manifoldunun bir invaryant alt manifoldu olsun. Bu durumda M invaryant alt manifoldunun B ikinci temel formu ve A, $V\in\chi(M)^{\perp}$ vektör alanına karşılık gelen Weingarten dönüşümü olmak üzere*
1) $B(X,\xi)=0$ ve $A_V\xi=0 \quad X\in\chi(M)$
2) $B(X,\varphi Y)=B(\varphi X,Y)=\varphi B(X,Y)$,
3) $\varphi A_V X = -A_V\varphi X = A_{\varphi V}X \quad X\in\chi(M)^{\perp}$
eşitliklerini sağlar [2].

Önerme 3.4.1. *Bir $\bar{M}$ Sasakian manifoldunun herhangi bir invaryant alt manifoldu M olsun. Eğer M nin ikinci temel formu paralel ise, bu durumda M total geodeziktir [2].*

İspat. M ye teğet bir X vektör alanı için $\nabla_X B=0$ ise B ye paraleldir denir. Bu durumda B=0 olduğunu göstereceğiz.

$$B(X,Y) = -\varphi^2 B(X,Y) - \eta(B(X,Y))\xi = 0$$

eşitliğinden

$$0 = (\nabla_X B)(Y, \xi) = D_X B(Y, \xi) - B(\nabla_X Y, \xi) - B(Y, \nabla_X \xi)$$

$$0 = (\nabla_X B)(Y, \xi) = B(Y, \varphi X) = \varphi B(X, Y)$$

elde edilir. Böylece M total geodeziktir. $\square$

$\bar{R}$, $\bar{M}$ nin ve R de M nin Riemann eğilik tensörleri olsun.

$$\begin{aligned} g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) + g(B(X, X), B(\varphi X, \varphi X)) \\ - g(B(\varphi X, X), B(X, \varphi X)) \end{aligned}$$

Gauss denkleminden ve $B(X, \varphi Y) = B(\varphi X, Y) = \varphi B(X, Y)$ eşitliğinden

$$g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) - 2g(B(X, X), B(X, X))$$

elde edilir.

Önerme 3.4.2. *M bir $\bar{M}(c)$ Sasakian uzay formunun bir invaryant alt manifoldu olsun. Bu durumda M nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart M nin c sabit φ-kesit eğrilikli olmasıdır [2].*

$\bar{M}$ ambient manifoldun sabit c φ-kesit eğriliğne sahip bir Sasakian uzay formu olsun. Bu durumda Gauss ve Coddazi denklemleri

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = {} & \frac{c+3}{4}[(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ & + \frac{c-1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(Y, Z)\eta(X)\xi \\ & + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z] \\ & + A_{B(Y,Z)}X - A_{B(X,Z)}Y, \end{aligned}$$

ve

$$(\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) = 0$$

şeklinde elde edilir.

M nin Ricci tensörünü S ile ve skaler eğriliğini r ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(X,Y) =& \frac{n(c+3)+(c-1)}{2} g(X,Y) - \frac{(n+1)(c-1)}{2} \eta(X)\eta(Y) \\ & - \Sigma_i g(B(X,e_i), B(Y,e_i)), \end{aligned}$$

ve

$$r = n^2(c+3) + n(c+1) - \Sigma_{i,j} g(B(e_i,e_j), B(e_i,e_j)),$$

dir, burda $\{e_i\}$, M nin bir ortonormal bazıdır.

Tanım 3.4.2. *M, bir $\bar{M}$ Sasakian manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. Eğer M ye teğet her X, Y ve Z vektör alanları için*

$$(\nabla_{\varphi X} B)(\varphi Y, \varphi Z) = 0$$

ise M nin B ikinci temel formuna η-paraleldir denir [2].

B ikinci temel formu η-paraleldir gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = \eta(X)\varphi B(Y,Z) + \eta(Y)\varphi B(X,Z) + \eta(Z)\varphi B(X,Y)$$

dir.

Tanım 3.4.3. *Eğer M Sasakian manifoldunun S Ricci tensörü, M de her X, Y ve Z vektör alanları için*

$$(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = 0$$

ise M nin S Ricci tensörüne η-paraleldir denir [2].

3.4.2 Sasakian Uzay Formların İntegral Altmanifolddları

$M^{2n+1}(c)$, (φ, ξ, η, G) yapısına sahip bir Sasakian uzay form ve $\widetilde{\nabla}$, G nin Riemann konneksiyonu olsun. Bir

$$\tau : M^n \to M^{2n+1}(c)$$

integral alt manifoldunu ele alalım. g indirgenmiş metriğini de

$$g(X,Y) = G(\tau_\star X, \tau_\star Y)$$

şeklinde verelim.

$X_1, ..., X_n$, M^n manifoldunda vektör alanların lokal ortonormal bazları olsun. Bu durumda $\xi_0 = \xi$, $\xi_i = \varphi X_i, i = 1, ..., n$ ortanormal normal vektörlerin bir lokal alanını oluşturur. ∇, g nin Riemann koneksiyonunu ve $\nabla^{\perp}$, normal demetlerin koneksiyonunu göstersin. Bu durumda Gaus-Weingarten denklemleri,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \tag{3.4.1}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_X \xi_\alpha = -A_\alpha X + \nabla^{\perp}_X \xi_\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, ..., n, \tag{3.4.2}$$

şeklinde olur, burada σ ikinci temel formu ve A_α Weingarten dönüşümlerini gösterir. σ ikinci temel formu,

$$\sigma(X, Y) = \sum_\alpha h^\alpha(X, Y)\xi_\alpha \tag{3.4.3}$$

şeklinde verilir, burada h^α tensörü

$$h^\alpha(X, Y) = g(A_\alpha X, Y) \tag{3.4.4}$$

eşitliğini sağlar ve simetriktir.

R ve $\widetilde{R}$ sırasıyla ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ nün eğri dönüşümlerini göstersin. Bu durumda Gauss denklemi

$$g(R_{XY}Z, W) = G(\widetilde{R}_{XY}Z, W) + G(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)) - G(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)).$$

ile verilir. σ nın kovaryant türevi

$$(\nabla'_X \sigma)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)$$

ile tanımlanır [7].

Lemma 3.4.2. *M, bir $\widetilde{M}$ K-kontakt manifoldun integral alt manifoldu olsun. Bu durumda*

$$A_\xi = h^0 = 0$$

dır [8].

İspat. Bu lemmanın ispatı için, manifoldu bir K-kontakt minifold olarak kabul etmemiz yeterlidir. Bu durumda (3.4.1) ve (3.4.2) denklemlerine metriği uygular ve α yı sıfır alırsak

$$\begin{aligned} h^0(X,Y) = g(A_0X,Y) &= G(\sigma(X,Y),\xi) \\ &= G(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -G(Y,\widetilde{\nabla}_Y\xi) = G(Y,\varphi X) = 0 \end{aligned}$$

olur. □

M^n, bir Sasakian uzay formunun bir integral altmanifoldu olsun. Gauss denklemi ve $\widetilde{R}$ eğri dönüşümünün özel formu

$$\begin{aligned} g(R_{XY}Z,W) = &\frac{c+3}{4}(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &+ \sum_\alpha (g(A_\alpha X,W)g(A_\alpha Y,Z) - g(A_\alpha X,Z)g(A_\alpha Y,W)) \end{aligned}$$

şeklinde olur ve böylece M^n manifoldunun $K(X,Y)$ kesit eğriliği $\{X,Y\}$ ortonormal ikilileri için

$$K(X,Y) = \frac{c+3}{4} + \sum_\alpha (g(A_\alpha X,X)g(A_\alpha Y,Y) - g(A_\alpha X,Y)^2)$$

ile verilir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoglu, H. H., Diferensiyel Geometri, Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 2003.

[2] Yano, K. ve Kon, M., Structures on Manifolds, World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd., 1984.

[3] Do Carmo, M.P., Riemannian Geometry, Birkhuser Boston, 1992.

[4] Lee, J.M., Introduction to Smooth Manifolds, Library of Congrees Cataloging in Pub.Data, 1950.

[5] Matsushima, Y., Differentiable Manifolds, Marcel Dekker,Inc. New York, 1972.

[6] Da Silva, Ana. Cannas., Lectures on Symlectic Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[7] Blair,David E., Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[8] Blair,David E.Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Birkhäuser Boston, 2002.

[9] Hacısalihoglu, H. H., ve Ekmekçi, N., Tensör Geometri, Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 2003.

[10] Besse, Arthur L., Einstein Manifolds, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[11] Etnyre, John B., Introductory on Contact Geometry, arxiv: math. SG/0111118v2, 11 Nov. 2002.

[12] Boeckx, Eric and Cho,Jong Taek, η-Parallel Contact Metric Spaces, Differentiable Geometry and Its Applications, S0926-2245(05)00003-3/FLA AID: 469 Difgeo: m2 v 1.32, Prn: 10.02.2005.

[13] Khon, K. A., Khon, V. A. and Sirajuddin, Warped Product Contact CR-Submanifolds of Trans-Sasakian Manifolds, Filomat 21:2, 55-62, (2007)

[14] Nikic, Jovanka, Conditionss for Invariant Submanifold of a Manifold with the (φ, ξ, G)-Structure, Kragujevac J. Math. 25 147-154, 2003.

[15] Cabrerizo, J.L., Carriazo, A., Fernandez, L.M., Fernandez, A., Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds, Glasgow Math. Journal 42, 125-138, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1981 yılında Malatya' nın Darende ilçesine bağlı Ağılbaşı Kasabasında doğdu. İlkokulu Ağılbaşı İlköğretim okulunda, orta ve lise öğrenimini Malatya H. A. Akıncı Lisesinde tamamladı. 1998 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2002 de öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tezsiz yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 2004 de buradan mezun oldu. 2005 te İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 2008 de Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yönetim Bilişim Sistemleri Bölümünde Öğretim Görevilisi olarak göreve başladı.