T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE GRUPLARIN ETKİLERİ

Gazi KUBAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2008

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.0.1 Topolojik Kavramlar

Bu bölümde ileride sıklıkla kullanacağımız temel topolojik kavramlara yer vereceğiz.

Kompaktlık

Bir X uzayının bir açık örtüsü, birleşimleri X' i veren X' in açık altkümelerinin bir $\mathcal{U}$ ailesidir, ve $\mathcal{U}$' nun bir altörtüsü yine $\mathcal{U}$' nun X' i örten, bir altailesidir. Bir X topolojik uzayının her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahip ise X 'e ***kompakttır*** denir.

Kompakt uzaylarla ilgili bir kaç temel özelliği sıralayalım:

- Kompakt uzayların sürekli görüntüleri de kompakttır.
- Bir kompakt uzayın her kapalı altkümesi kompakttır.
- Bir Hausdorff uzayın her kompakt altkümesi kapalıdır.
- Bir kompakt uzayın her bölüm uzayı kompakttır.

Kompakt Hausdorff uzaylar, Öklidyen uzayların bilinen özelliklerinin çoğuna sahiptir. Bir X topolojik uzayında her $q \in X$ için X' de q'nun bir komşuluğunu içeren bir kompakt altküme varsa X' e ***lokal kompakttır*** denir. Hausdorff'luk özelliği ile birleştirildiğinde lokal kompaktlık çok daha kullanışlıdır. Bir X topolojik uzayında bir A altkümesi için $\overline{A}$ kompakt ise A' ya ***önkompakttır (precompact)*** ya da ***relatif kompakttır*** denir [6, 12, 13].

Önerme 1.0.1. *X bir Hausdorff uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

a) *X lokal kompakttır,*

b) *X ' in her bir noktası bir önkompakt komşuluğa sahiptir.*

c) *X önkompakt açık kümelerin bir tabanına sahiptir [6].*

Önerme 1.0.2. ***(Daraltma Lemması)*** *X bir lokal kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer $x \in X$ ve U, x' in bir komşuluğu ise, x' in $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde bir V önkompakt komşuluğu vardır [6, 13].*

Lemma 1.0.1. *Bir lokal kompakt Hausdorff uzayın herhangi açık ya da kapalı altkümesi lokal kompakt Hausdorff' tur [6, 13].*

Lemma 1.0.2. ***(Kapalı Dönüşüm Lemması)*** *F bir kompakt uzaydan bir Hausdorff uzaya sürekli bir dönüşüm olsun.*

a) *F kapalı bir dönüşümdür.*

b) *Eğer F örten ise bir bölüm dönüşümüdür.*

c) *Eğer F bire-bir ise bir topolojik embedding' dir.*

d) *Eğer F bire-bir ve örten ise bir homeomorfizmdir [6].*

Diziler

Tanım 1.0.1. *X bir topolojik uzay ve N doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in N$ için $f(n) = x_n$ olacak şekilde N' den X' e tanımlanan her fonksiyona, X topolojik uzayında bir **dizi** denir ve $(x_n)_{n \in N}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle X topolojik uzayında bir dizi, elemanları doğal sayılar tarafından indislenmiş bir alt kümedir [9].*

Yani

$$(x_n) = \{x_n \in X : n \in N\}$$

dır. Bu tanımda görüldüğü gibi N' den X' e bir fonksiyon varsa, X topolojik uzayında bir dizi vardır. Tersine olarak X topolojik uzayında bir dizi varsa, N den X e bir fonksiyon vardır.

Tanım 1.0.2. *X bir topolojik uzay, (x_n) X' de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. x_0' ın her $U \in U(x_0)$ komşuluğu için*

$$n \geq n_0 \implies x_n \in U$$

olacak şekilde sadece U komşuluğuna bağlı bir $n_0 \in N$ sayısı varsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n \to x_0$$

şeklinde gösterilir [9].

Yani

$$x_n \to x_0 \iff \forall\, U \in U\,(x_0) \text{ için } \exists n_0 \in N \text{ var} \ni \forall\, n \geq n_0 \implies x_n \in U$$

dır. Bunun bize ifade ettiği, x_0 ın her komşuluğunda diziye ait sonlu çokluktaki te-rimler hariç, geriye kalan sonsuz çokluktaki terimlerin komşuluğun içinde olmasıdır.

Dizinin n_0' ıncı terimden sonraki terimlerin kümesine dizinin kuyruğu (sonu) denir ve

$$X_{n_0} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, ...\}$$

ile gösterilir. Bu durumda, yakınsaklık tanımı

$$x_n \to x_0 \iff \forall\, U \in U\,(x_0) \text{ için } \exists n_0 \in N \text{ var} \ni \forall\, n \geq n_0 \implies X_{n_0} \subset U$$

şeklinde yazılır.

$f : N \to X$ bir dizi ve $g : N \to N$ fonksiyonu $g\,(i) = (n_i)$ olarak tanımlansın. Eğer g fonksiyonu artan ise,

$$n \to (f \circ g)\,(i) = f\,(g\,(i)) = f\,(n_i) = x_{n_i}$$

fonksiyonuna (x_n) dizisinin alt dizisi denir. Yani

$$(x_{n_i}) \subset (x_n)$$

dır [9].

Örnek 1.0.1. *X topolojik uzay ve $\forall n \in N$ $x_n = x_0$ olacak şekilde X de sabit bir dizi olsun. Bu durumda $\forall U \in U\,(x_0)$ komşuluğu $\forall n \in N$ için $x_n \in U$ olduğundan $x_n \to x_0$ dır [9].*

Ağlar

Tanım 1.0.3. *$I \neq \emptyset$ kümesi üzerinde "$\prec$" şeklinde göstereceğimiz bağıntı aşağıdaki özelliklere sahip olsun:*

1. $\forall i \in I$ *için* $i \prec i$ *dır,*

2. $\forall i,\ j,\ k \in I$ *için* $i \prec j$ *ve* $j \prec k$ *ise,* $i \prec k$ *dır,*

3. $\forall i,\ j \in I$ *için öyle bir* $k \in I$ *elemanı var* $\ni$ $i \prec k$ *ve* $j \prec k$ *dır.*

Bu durumda "$\prec$" bağıntısına yönlendirme bağıntısı, I kümesine "$\prec$" bağıntısıyla yönlendirilmiş bir küme denir ve $(I, \prec)$ bir ile gösterilir [9].

Örnek 1.0.2. *$X \neq \emptyset$ kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan "$\subset$" kapsama bağıntısıyla kısmi sıralı bir küme olduğu bilinmektedir. Eğer $P(X)$' in herhangi iki A, B elemanı için*

$$A \prec B \iff B \subset A$$

şeklinde tanımlanan "$\prec$" bağıntısı $P(X)$' de bir yönlendirme bağıntısıdır. Gerçekten; (1) ve (2) özellikleri açıktır. Ayrıca A, $B \in P(X)$ için $\exists A \cap B \in P(X)$ var $\ni$

$$A \cap B \subset A \Longrightarrow A \prec A \cap B$$
$$A \cap B \subset B \Longrightarrow B \prec A \cap B$$

olduğundan (3) özelliğinin sağlandığı kolayca görülür [9].

Tanım 1.0.4. *$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve I da yönlendirilmiş bir küme olsun. $\forall i \in I$ için $f(i) = x_i$ olacak şekilde I' dan X' e tanımlanan her fonksiyona X' de bir **ağ** denir ve $(x_i)_{i \in I}$ veya kısaca (x_i) ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle, X kümesinde bir ağ, elemanları yönlendirilmiş bir küme tarafından indislenmiş bir altkümedir. Yani*

$$(x_i) = \{x_i \in X : i \in I\}$$

dır [9].

Örnek 1.0.3. *N doğal sayılar kümesi yönlendirilmiş bir küme olduğundan*

$$f : N \to X$$

fonksiyonu X' de bir ağdır.Ayrıca biliyoruz ki f aynı zamanda X' de bir dizidir. Bu nedenle ağlar, dizilerin genelleştirilmişidir. Bu ifadenin tersi doğru değildir. Gerçekten, $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ alt kümesi "$\leq$" alışılmış sıralama ile yönlendirilmiş bir küme olup, $i \in I$ ve $x \in \mathbb{R}$

$$f_i(x) = \cos ix$$

şeklinde tanımlanan reel değişkenli, reel değerli (f_i) fonksiyonu bir ağdır. Ancak bir dizi değildir [9].

Tanım 1.0.5. *X bir topolojik uzay ve (x_i), X' de bir ağ olsun. Eğer bir $x \in X$ noktasının $\forall U \in U(x)$ komşuluğu sonunda (x_i) ağını kapsıyor ise, (x_i) ağı x noktasına yakınsıyor denir ve*

$$x_i \to x$$

şeklinde gösterilir. Yani

$$x_i \to x \iff \forall U \in U(x) \text{ için } \exists i_0 \in I \text{ var } \ni \forall i,\ i_0 \prec i \implies x_i \in I$$

dır [9].

Örnek 1.0.4. *$I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alışılmış "$\leq$" bağıntısıyla yönlendirilmiş bir kümedir. Bu durumda $f : I \to X$ fonksiyonu X' de bir ağdır. Yani $(x_i)_{i \in I}$, X' de bir ağdır. Bu ağın $x \in X$ noktasına yakınsaması*

$$x_i \to x \iff \forall U \in U(x) \text{ için } \exists i_0 \in I,\ 0 < i_0 < 1 \text{ var } \ni i_0 < i < 1 \text{ iken } x_i \in N$$

şeklindedir[9].

Bölüm Uzayları

X bir topolojik uzay, Y herhangi bir küme ve $\pi : X \to Y$ bir örten dönüşüm olsun. Y üzerinde bir topolojiyi şu şekilde tanımlayalım: Bir $U \subset Y$ altkümesi açıktır gerek ve yeter şart $\pi^{-1}(U)$, X' de açıktır. Bu topolojiye π aracılığıyla indirgenen *bölüm topolojisi* denir.

$\pi : X \to Y$ topolojik uzaylar arasında sürekli, örten bir dönüşüm ve Y, π aracılığıyla indirgenen bölüm topolojisine sahip ise π' ye *bölüm dönüşümü* denir.

Bölüm dönüşümlerinin en yaygın inşası aşağıdaki gibidir. $\sim$, X uzayı üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her bir $q \in X$ için $[q]$ ile q' nun denklik sınıfını ve $X/_{\sim}$ ile de denklik sınıflarının kümesini gösterelim. $X/_{\sim}$ denklik sınıflarının kümesi, X' in bir parçalanmasıdır. $\pi : X \to X/_{\sim}$, X' in her bir elemanını onun denklik sınıfına götüren doğal dönüşüm olsun. Bu takdirde, π ile indirgenen topolojiyle birlikte $X/_{\sim}$' ya, verilen denklik bağıntısı aracılığıyla X' in bölüm uzayı ve π' ye bölüm dönüşümü denir [11].

Eğer $\pi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü ise, bir $V \subset Y$ altkümesi için $U = \pi^{-1}(V)$ olacak şekildeki bir $U \subset X$ altkümesine *π' ye göre doygundur (saturated)* denir. Buna denk olarak U doygundur gerek ve yeter şart $U = \pi^{-1}(\pi(U))$ dur. Eğer Y bir denklik bağıntısı aracılığıyla belirlenen bir bölüm uzayı ise, doygun kümeler denklik sınıflarının birleşimleri olan kümelerdir. Daha genel olarak, herhangi bir $\pi : X \to Y$ bölüm dönüşümü için, $y \in Y$ olmak üzere bir $\pi^{-1}(y) \subset X$ altkümesine π' nin bir *lifidir (fiber)* denir. Doygun bir küme, liflerin birleşimi olan bir kümedir [6].

Bölüm dönüşümleri her zaman açık kümeleri açık kümelere götürmez. Fakat doygun kümeler türünden bölüm dönüşümlerinin kullanışlı bir karakterizasyonu vardır:

Lemma 1.0.3. *Bir $\pi : X \to Y$ sürekli ve örten dönüşümünün bir bölüm dönüşümü olması için gerek ve yeter şart π' nin doygun açık (ya da kapalı) kümeleri doygun açık (ya da kapalı) kümelere götürmesidir [6].*

Lemma 1.0.4. *$f : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. f' nin herhangi bir doygun açık (ya da kapalı) kümeye kısıtlaması da bir bölüm dönüşümüdür [6].*

Sürekli, örten bir dönüşümün bir bölüm dönüşümü olup olmadığını kontrol etmek her zaman kolay bir durum değildir. Aşağıdaki lemma sürekli, örten bir dönüşümün bir bölüm dönüşümü olması için çok kullanışlı bir şart verir.

Lemma 1.0.5. *Eğer $f : X \to Y$ sürekli, örten, açık (ya da kapalı) bir dönüşüm ise bir bölüm dönüşümüdür [6].*

Lemma 1.0.6. *$\pi_1 : X \to Y$ ve $\pi_2 : Y \to Z$ iki bölüm dönüşümü olsun. Bu takdirde $\pi_2 \circ \pi_1 : X \to Z$ de bir bölüm dönüşümüdür [11].*

Şimdi bölüm topolojisinin bazı karakteristik özelliklerini lemmalar halinde verelim.

Lemma 1.0.7. *$\pi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. Herhangi bir Z topolojik uzayı için; $f : Y \to Z$ dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi$ bileşkesi süreklidir [6].*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Lemma 1.0.8. *$\pi : X \to Y$ bölüm dönüşümü, Z bir topolojik uzay ve $f : X \to Z$ de π' nin lifleri üzerinde sabit olan (yani $\pi(p) = \pi(q) \Rightarrow f(p) = f(q)$) sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde $\widetilde{f} : Y \to Z$ olacak şekilde bir tek sürekli dönüşümü vardır [6].*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Lemma 1.0.9. *$\pi_1 : X \to Y_1$ ve $\pi_2 : X \to Y_2$, aynı belirlemeleri yapan (yani $\pi_1(p) = \pi_1(q) \Leftrightarrow \pi_2(p) = \pi_2(q)$) bölüm dönüşümleri olsun. Bu takdirde bir tek $\varphi : Y_1 \to Y_2$ homeomorfizmi vardır öyle ki $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$ [6].*

1.0.2 Topolojik Grup

Tanım 1.0.6. *Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, G kümesine **topolojik grup** denir:*

1. G bir gruptur,

2. G bir topolojik uzaydır,

3. $\mu : G \times G \to G$ ve $i : G \to G$ fonksiyonları süreklidir [2].

Örnek 1.0.5. **1.** $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi alışılmış topoloji ve toplama işlemiyle bir topolojik gruptur.*

2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ *alışılmış topoloji ve çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur.*

3. *Herhangi bir* G *grubu diskret topoloji ile bir topolojik gruptur [20].*

Topolojik Grupların Etkileri

Tanım 1.0.7. G *bir topolojik grup ve* X *bir topolojik uzay olsun. Eğer*

$$\mu = \mu_x : G \times X \to X$$

sürekli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise, G*,* X *üzerine soldan* ***etki*** *eder denir.*

1. $g\left(g'x\right) = \left(gg'\right)x,$

2. $\mu\left(g, x\right) = gx$ *dönüşümü için*

$$ex = x$$

olacak şekilde $e \in G$ *birim elemanı vardır [2].*

Sol etki $L_g : X \to X$, $L_g\left(x\right) = gx$ ve sağ etki $R_g : X \to X$, $R_g\left(x\right) = xg$ olarak tanımlanır. L_g ve R_g süreklidir ve yukarıdaki şartları sağlarlar:

$$L_g \circ L_{g'} = L_{gg'} \quad \left(R_g \circ R_{g'} = R_{gg'}\right)$$

$$L_e = 1_x \quad \left(R_e = 1_x\right)$$

Bu yüzden L_g ve $L_{g^{-1}}$ (R_g ve $R_{g^{-1}}$) birbirlerinin tersidir ve dolayısıyla homeomorfizmlerdir. L_g sol (topolojik) dönüşüm ve R_g sağ topolojik dönüşüm olarak adlandırılır. Bu durumda G' ye X' in **dönüşüm grubu** denir.

Tanım 1.0.8. *Bir G topolojik grubunun X topolojik uzayı üzerine sol (sağ) etkisi μ olsun. Eğer her $x \in X$ için $gx = g^{'}x$ $\left(xg = xg^{'}\right)$ eşitliği*

$$g = g^{'}$$

*olmasını gerektiriyorsa μ etkisine **efektif (effective)** denir [2].*

Tanım 1.0.9. *Bir G topolojik grubunun X topolojik uzayı üzerine sol (sağ) etkisi μ olsun. Eğer her x, $x^{'}$ için,*

$$gx = x^{'} (\textit{ya da } xg = x^{'})$$

*olacak şekilde bir $g \in G$ var ise μ etkisine **geçişlidir (transitive)** denir [2].*

Tanım 1.0.10. *Eğer G topolojik grubu X topolojik uzayı üzerine geçişli bir şekilde etki ediyorsa, X' e, G' nin **homojen uzayı** denir [2].*

Tanım 1.0.11. *Bir G topolojik grubunun X topolojik uzayı üzerine soldan etki ettiğini kabul edelim. Bu durumda $x \in X$ için*

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

*kümesine **izotropi (izotropy)grubu** denir [2].*

Teorem 1.0.1. a) *G geçişli bir şekilde etki eder $\Longleftrightarrow$ μ_x de örtendir.*

b) *G efektif olarak etki eder $\Longleftrightarrow$ $\cap_{x\in X} G_x = \{e\}$ [2].*

Teorem 1.0.2. *X, G' nin homojen uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:*

1. *$\pi_x : G \to G/G_x$ bir izdüşüm dönüşümü olsun. Bu takdirde,*

$$\mu_x = h_x \circ \pi_x$$

şartını sağlayan μ_x için

$$h_x : G/G_x \to X$$

şeklinde bire-bir örten fonksiyonu vardır.

2. *μ_x açık dönüşüm ise, h_x bir homeomorfizmdir [2].*

İspat.

1.

$$\begin{aligned}\pi_x(g_1)=\pi_x(g_2) &\iff g_1^{-1}g_2\in G_x\\ &\iff g_1^{-1}g_2x=x\\ &\iff \mu_x(g_1)=\mu_x(g_2)\end{aligned}$$

Bu yüzden $h_x(\pi_x(g))=\mu_x(g)$ eşitliği h_x' in bire-bir olduğunu gösterir. Teorem 1.0.1' den μ_x örtendir. Dolayısıyla h_x de örtendir. U, X in açık kümesi olduğundan $\mu_x^{-1}(U)=\pi_x^{-1}(h_x^{-1}(U))$ açıktır ve buradan $h_x^{-1}(U)$ açıktır. Böylece h_x sürekli, bire-bir ve örtendir.

2. μ_x açık dönüşüm ve U, $G\,/\,G_x$ de açık ise, $\pi_x^{-1}(U)$ da G' de açıktır ve bu yüzden $h_x(U)=\mu_x(\pi_x^{-1}(U))$ açıktır. Buradan h_x de açık dönüşümdür. Böylece h_x bir homeomorfizmdir.

□

Topolojik Manifold

Tanım 1.0.12. *M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki şartlar mevcut ise M' ye bir* ***n-boyutlu topolojik manifolddur*** *denir [1].*

a) *M bir Hausdorff uzaydır.*

b) *M, E^n veya E^n nin açık altkümelerine homeomorftur.*

c) *M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülmelidir.*

Örnek 1.0.6. *E^n n-boyutlu Öklid uzayı bir topolojik n-manifolddur. Gerçekten;*

a) *E^n n-boyutlu Öklid uzayı bir Hausdorff uzaydır. Gerçekten E^n' de farklı iki P, Q noktaları için A_p ve A_q gibi biri P' yi diğeri Q' yu içinde bulunduran $A_p\cap A_q=\emptyset$ olacak şekilde iki farklı açık altküme bulmak mümkündür.*

b) *$I:E^n\to E^n$ birim fonksiyonu yardımıyla E^n kendisine homeomorftur.*

c) *E^n' nin kendisi açıktır. O halde E^n' yi bir tek açık ile yani kendisiyle örtebiliriz [1].*

Örnek 1.0.7. *$M_1, ..., M_k$ sırasıyla $n_1, ..., n_k$ boyutlu topolojik manifoldlar olsun. $M_1 \times ... \times M_k$ çarpım uzayı $n_1 + ... + n_k$ boyutlu bir topolojik manifolddur. Gerçekten, Hausdorff uzayların çarpımları da Hausdorff olduğundan ve ikinci sayılabilir uzayların çarpımları da ikinci sayılabilir olduğundan topolojik manifold olmanın iki şartı açıkça sağlanır. Dolayısıyla sadece lokal Öklidyenlik özelliğini göstermek yeterlidir. Herhangi bir $(p_1, ..., p_k) \in M_1 \times ... \times M_k$ noktası verilsin. $p_i \in U_i$ ile her bir M_i için bir (U_i, φ_i) koordinat haritası seçebiliriz.*

$$\varphi_1 \times ... \times \varphi_k : U_1 \times ... \times U_k \to \mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$$

çarpım dönüşümü, $\mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$ nın bir açık altkümesi olan kendi görüntüsü üzerine bir homeomorfizmdir. Böylece $M_1 \times ... \times M_k$, $(U_1 \times ... \times U_k, \varphi_1 \times ... \times \varphi_k)$ şeklindeki haritalar ile $n_1 + ... + n_k$ boyutlu bir topolojik manifolddur [6].

1.0.3 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1.0.13. *$U \subset E^n$ bir açık altküme olmak üzere*

$$f : U \to R$$

*fonksiyonunun k' yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyo-nuna C^k**-sınıfından diferensiyellenebilirdir** denir [1].*

Tanım 1.0.14. *M bir topolojik n-manifold ve U da M' nin bir açık altkümesi olsun. U bir φ homeomorfizmi ile $\mathbb{R}^n$ nin bir $\tilde{U}$ açık altkümesine eşlenebilir.*

$$\varphi : U \subset M \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

*$(U,\ \varphi)$ ikilisine M de **koordinat komşuluğu veya harita** denir. $u \in U$ için $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ dir.*

$$\varphi(u) = (x_1(u), ..., x_n(u))$$

dır. Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\varphi(u) \in \mathbb{R}^n$ noktasının i-yinci koordinatı ve

$$x_i : U \to \mathbb{R}$$

*fonksiyonuna da U' nun i-yinci **koordinat fonksiyonu** denir [1].*

Tanım 1.0.15. *M bir topolojik n-manifold ve M' nin bir açık örtüsü* $\{U_\alpha\}$ *olsun.* $\{U_\alpha\}$ *açık kümelerinin* α *indislerinin kümesi* A *olmak üzere* $\{U_\alpha\}$ *örtüsü için* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *yazılır.* E^n *de* U_α *ya* φ_α *homeomorfizmi altında homeomorf olan açık küme* V_α *olsun. Böylece ortaya çıkan* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *haritalarının*

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

kolleksiyonuna ***atlas*** *denir [1].*

Tanım 1.0.16. *M bir topolojik n-manifold ve M' nin bir atlası S=* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *olsun. Eğer S atlası için* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *olmak üzere f ve g fonksiyonları* C^r*-sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye* C^r*-sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinden* C^r*-sınıfından olduğu zaman, S ye M üzerinde* C^r*-sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [1].*

Tanım 1.0.17. *M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde* C^r*-sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa M ye* C^r*-sınıfından* ***diferensiyellenebilir manifold*** *adı verilir [1].*

Örnek 1.0.8. *U, $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesi olsun. Bu takdirde, U bir topolojik n-manifolddur ve tek başına (U, Id_U) haritası U üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı tanımlar. Daha genel olarak, M bir diferensiyellenebilir n-manifold ve U, M' nin herhangi bir açık altkümesi olsun. U üzerinde bir atlası*

$$\mathcal{A}_U = \{M \text{ için } (V, \varphi) \text{ diferensiyellenebilir haritalar} : V \subset U\}$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi $p \in U$ noktası, M' nin en az bir (W, φ) haritasının tanım kümesinde ihtiva edilir. Eğer $V = W \cap U$ alırsak, o zaman $(V, \varphi|_V)$ tanım kümesi p' yi içeren $\mathcal{A}_U$' da bir haritadır. Böylece U, $\mathcal{A}_U$' daki haritaların tanım kümeleri ile örtülür ve bunun U için bir diferensiyellenebilir atlas olduğu kolayca gösterilir. Buradan M' nin herhangi bir açık altkümesinin kendisi doğal bir şekilde bir diferensiyellenebilir n-manifolddur. Bu diferensiyellenebilir yapı ile donatılan herhangi açık altkümeye M' nin bir ***açık altmanifoldu*** *denir [6].*

Örnek 1.0.9. *n-boyutlu Öklid uzayı E^n bir diferensiyellenebilir manifolddur. Ger-çekten E^n nin bir açık örtüsü olarak E^n nin kendisini alabiliriz. I: $E^n \rightarrow E^n$ özdeşlik* *dönüşümünü de gerekli homeomorfizm yerine seçersek E^n için bir atlas S= $\{(E^n, I)\}$ olur. Bu atlas C^∞-sınıfından olduğu için E^n bir diferensiyellenebilir n-manifolddur [1].*

Aşağıdaki lemma bir küme üzerine nasıl diferensiyellenebilir manifold yapısı kurulduğunu gösterir.

Lemma 1.0.10. ***(Diferensiyellenebilir manifold inşaa etme lemması)*** *M boştan farklı bir küme olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde her bir α için bir $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ bire-bir dönüşümü ile birlikte M'nin altkümelerinin bir $\{U_\alpha\}$ kolleksiyonunun verildiğini kabul edelim.*

1. *Her bir α için $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, $\mathbb{R}^n$ nin bir açık altkümesidir,*

2. *Her bir α ve β için $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ de açıktır,*

3. *$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olduğunda $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ bir diffeomorfizmdir,*

4. *Sayılabilir çoklukta U_α kümeleri M' yi örter,*

5. *$p, q \in M$ farklı noktalar olduğunda ya hem p' yi hem de q' yu içeren en az bir U_α vardır ya da $p \in U_\alpha$ ve $q \in U_\beta$ ile ayrık U_α, U_β kümeleri vardır.*

Bu takdirde her bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ bir diferensiyellenebilir harita olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir manifold yapısı vardır [6].

1.0.4 Diferensiyellenebilir Dönüşümler

Tanım 1.0.18. *M bir diferensiyellenebilir n-manifold ve $f : M \to \mathbb{R}^k$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $p \in M$ için M' de tanım kümesi p' yi içeren bir (U, φ) diferensiyellenebilir haritası var öyle ki $f \circ \varphi^{-1}$ bileşke fonksiyonu $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde diferensiyellenebilir ise f' ye* ***diferensiyellenebilirdir*** *denir [6].*

Tanım 1.0.19. *Bir M diferensiyellenebilir manifoldu için bir $f : M \to \mathbb{R}^k$ fonksi-yonu ve bir (U, φ) haritası verilsin. $\widehat{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$, $\widehat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$ fonksiyonuna f nin* ***koordinat temsilcisi*** *denir [6].*

Bu tanımdan görüleceği gibi, f diferensiyellenebilirdir gerek ve yeter şart f' nin koordinat temsilcisi her bir nokta civarında en az bir haritada diferensiyellenebilirdir.

Diferensiyellenebilir fonksiyonların tanımı kolayca manifoldlar arasındaki dönü-şümlere genelleştirilebilir.

Tanım 1.0.20. *M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için p' yi ihtiva eden bir (U, φ) ve $F(p)$' yi ihtiva eden (V, ψ) diferensiyellenebilir haritaları var öyle ki $F(U) \subset V$ ve $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ bileşke dönüşümü $\varphi(U)$' dan $\psi(V)$' ye diferensiyellenebilir ise F' ye bir* ***diferensiyellenebilir dönüşümdür*** *denir [6].*

Diferensiyellenebilirlik kavramı lokaldir. Yani M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde eğer her $p \in M$ noktası $F\,|_U$ kısıtlaması diferensiyellenebilir olacak şekilde bir U komşuluğuna sahip ise o zaman F diferensiyellenebilirdir. Tersine, eğer F diferensiyellenebilir ise onun herhangi bir açık altkümeye kısıtlaması diferensiyellenebilirdir. Şimdi diferensiyellenebilir dönüşümleri inşaa etmenin oldukça kullanışlı bir yolunu veren önemli bir lemma verelim. Bu lemma aynı zamanda diferensiyellenebilirliğin lokal olmasının formal bir ifadesidir.

Lemma 1.0.11. *M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi M' nin bir açık örtüsü olsun. Her bir $\alpha \in A$ için bir $F_\alpha : U_\alpha \to N$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin öyle ki her α, β için $F_\alpha\,|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta\,|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ olsun. Bu takdirde her bir $\alpha \in A$ için $F\,|_{U_\alpha} = F_\alpha$ olacak şekilde bir tek $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşümü vardır [6].*

Lemma 1.0.12. *Diferensiyellenebilir manifoldlar arasındaki her diferensiyellenebilir dönüşüm aynı zamanda süreklidir [6, 14].*

İspat. $F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Diferensiyellenebilirliğin tanımından her bir $p \in M$ için, $F\,(U) \subset V$ ve $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi\,(U) \to \psi\,(V)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olacak şekilde p' yi içeren (U,φ) ve $F(p)$' yi içeren (V,ψ) diferensiyellenebilir haritaları vardır. Dolayısıyla $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ diferensiyellenebilir dönüşümü süreklidir. $\varphi : U \to \varphi(U)$ ve $\psi : V \to \psi(V)$ homeomorfizm olduklarından sürekli dönüşümlerin bileşkesi olan

$$F\mid_U = \psi^{-1} \circ \left(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi : U \to V$$

dönüşümünden bahsedebiliriz. F her bir noktanın komşuluğunda sürekli olduğun-dan M üzerinde süreklidir. □

Eğer $F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ise ve (U,φ) ile (V,ψ) sırasıyla M ve N nin herhangi diferensiyellenebilir haritaları ise o zaman $\widehat{F} : \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ dönüşümüne verilen koordinatlara göre F nin *koordinat temsilcisi* denir [6].

Bir $F : M \to N$ dönüşümünün sürekli olduğu önceden bilinirse F' nin dife-rensiyellenebilirliği, M ve N nin özel diferensiyellenebilir atlaslarının haritalarındaki koordinat temsilcileri aracılığıyla kolayca kontrol edilebilir. Bunu aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 1.0.13. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ bir sürekli dönüşüm olsun. Eğer $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sırasıyla M ve N için diferensiyellenebilir atlaslar ise ve eğer her bir α ve β için $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanım kümesi üzerinde diferensiyellenebilir ise F diferensiyellenebilirdir [6].*

İspat. $p \in M$ verilsin ve verilen atlaslardan $p \in U_\alpha$ ve $F(p) \in V_\beta$ olacak şekilde $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (V_β, ψ_β) haritalarını seçelim. F sürekli olduğundan $U = F^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha$ kümesi M' de açıktır ve $F(U) \subset V_\beta$ dır. Böylece $(U, \varphi_\alpha \mid_U)$ ve (V_β, ψ_β) haritaları diferensiyellenebilirlik tanımındaki gerekli şartları sağlar. □

Lemma 1.0.14. *Diferensiyellenebilir manifoldlar arasındaki diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesi de diferensiyellenebilirdir [6, 14, 15].*

İspat. $F : M \to N$ ve $G : N \to P$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve $p \in M$ keyfi bir nokta olsun. G' nin diferensiyellenebilirliğinden $F(p)$' yi içeren (V,θ) ve $G(F(p))$' yi içeren (W,ψ) diferensiyellenebilir haritaları vardır öyle ki $G(V) \subset W$ dır ve $\psi \circ G \circ \theta^{-1} : \theta(V) \to \psi(W)$ diferensiyellenebilirdir. F sürekli olduğundan $F^{-1}(V)$ kümesi M' de p' nin bir açık komşuluğudur. Böylece M için $p \in U \subset$

$F^{-1}(V)$ olacak şekilde bir (U, φ) diferensiyellenebilir haritası vardır. $\theta \circ F \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \rightarrow \theta(V)$ diferensiyellenebilirdir. Bu takdirde $G \circ F(U) \subset G(V) \subset W$ dır ve

$$\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = \left(\psi \circ G \circ \theta^{-1}\right) \circ \left(\theta \circ F \circ \varphi^{-1}\right) : \varphi(U) \rightarrow \psi(W)$$

diferensiyellenebilirdir. Çünkü bu Öklidyen uzayların açık altkümeleri arasında diferensiyellenebilir dönüşümlerin bir bileşkesidir. □

Bir dönüşümün diferensiyellenebilir olduğunu göstermenin üç yaygın yolu vardır. Dönüşümü, diferensiyellenebilir lokal koordinatlarda yazmak ve diferensiyellenebilir elemanter fonksiyonların bileşkeleri olarak onun bileşen fonksiyonlarını tanımlamak, dönüşümü bilinen diferensiyellenebilir dönüşümlerin bir bileşkesi olarak göstermek ve son olarak da sözkonusu özel duruma uygulanabilecek bazı özel amaçlı teoremleri kullanmak.

Örnek 1.0.10. *Bir sıfır boyutlu topolojik manifolddan bir diferensiyellenebilir mani-folda her dönüşüm otomatik olarak diferensiyellenebilirdir [6].*

Örnek 1.0.11. *$M_1, ..., M_k$ ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $pr_i : M_1 \times .. \times M_k \rightarrow M_i$ dönüşümü i-yinci faktör üzerine izdüşüm olsun. Bir $F : N \rightarrow M_1 \times ... \times M_k$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir gerek ve yeter şart $F_i = pr_i \circ F : N \rightarrow M_i$ bileşen dönüşümlerinin her biri diferensiyellenebilirdir [6].*

Tanım 1.0.21. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldları arasında bir **diffeomorfizm**, bir diferensiyellenebilir terse sahip olan bir $F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bire-bir örten dönüşümdür. Eğer M ve N arasında bir diffeomorfizm varsa onlara diffeomorfiktir denir ve $M \approx N$ ile gösterilir [6].*

Eğer M bir diferensiyellenebilir manifold ve (U, φ) M üzerinde bir diferensiyellenebilir koordinat haritası ise, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ bir diffeomorfizmdir. Daha genel olarak;

Tanım 1.0.22. *$F : M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ noktası $F(U) \subset N$ açık olacak şekilde bir U komşuluğuna sahip ve $F|_U : U \rightarrow F(U)$ bir diffeomorfizm ise F' ye bir **lokal diffeomorfizmdir** denir [11].*

Tanımdan bir lokal diffeomorfizmin bir lokal homeomorfizm ve dolayısıyla bir açık dönüşüm olduğu açıktır. Ayrıca diferensiyellenebilir manifoldlar arasında bir dönüşüm diffeomorfizmdir gerek ve yeter şart bir bire-bir örten lokal diffeomorfizmdir.

Önerme 1.0.3. **1.** *Eğer* $F : M \longrightarrow M'$ *ve* $G : M_1 \longrightarrow M_1'$ *diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise,* $F \times G : M \times M_1 \to M' \times M_1'$ *de diferensiyellenebilirdir.*

2. *Eğer* $F : M \longrightarrow M'$ *ve* $G : M \longrightarrow M_1'$ *diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise* $(F, G) : M \to M' \times M_1'$ *de diferensiyellenebilirdir [14].*

Şimdi altmanifoldlar kavramı için gerekli olacak olan tanjant uzaylardan ve türev dönüşümünden bahsedelim.

Bir M diferensiyellenebilir manifoldundan $\mathbb{R}$' ye giden diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{F}(M)$ ile gösterelim. $\mathcal{F}(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir.

Tanım 1.0.23. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan bir $\upsilon_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, p noktasında bir* ***tanjant vektör*** *denir [16].*

1. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\upsilon_p(af + bg) = a\upsilon_p(f) + b\upsilon_p(g)$,

2. Her $f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\upsilon_p(fg) = \upsilon_p(f).g(p) + f(p).\upsilon_p(g)$.

Bu tanımdaki ikinci eşitliğe *Leibnitz kuralı* denir.

p noktasındaki bütün tanjant vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir. T_pM kümesi aşağıdaki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır ve ona M manifoldunun p noktasındaki *tanjant uzayı* denir.

$$(\upsilon_p + \omega_p)(f) = \upsilon_p(f) + \omega_p(f)$$
$$(\lambda\upsilon_p)(f) = \lambda(\upsilon_p(f))$$

Teorem 1.0.3. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. $\upsilon_p \in T_pM$ olmak üzere $g \in \mathcal{F}(N)$ için $[F_{*p}(\upsilon_p)](g) = \upsilon_p(g \circ F)$ eşitliği ile tanımlanan $F_{*p}(\upsilon_p) : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $T_{F(p)}N$ uzayının bir elemanıdır [16].*

İspat. $F_{*p}(\upsilon_p) : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ dönüşümünün lineer olduğu ve leibnitz kuralını sağladığı kolayca görülür. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ dönüşümü elde edilir. F_{*p} yerine bazen T_pF ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 1.0.24. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ dönüşümüne, $F : M \to N$ fonksiyonunun p noktasındaki* ***türev dönüşümü veya diferensiyeli*** *denir [16].*

Teorem 1.0.4. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere F_{*p} dönüşümü lineerdir [16].*

İspat. v_p, $w_p \in T_pM$ olmak üzere $g \in \mathcal{F}(N)$ için

$$\begin{aligned} [F_{*p}(av_p + w_p)] &= (av_p + w_p)(g \circ F) \\ &= av_p(g \circ F) + w_p(g \circ F) \\ &= aF_{*p}(v_p) + F_{*p}(w_p) \end{aligned}$$

dir. □

Önerme 1.0.4. *Eğer $F : M \to M'$ ve $G : M' \to M''$ diferensiyellenebilir fonksi-yonlar ve m, $G \circ F$' nin tanım kümesinden bir nokta ise*

$$(G \circ F)_{*m} = G_{*(F(m))} \circ F_{*m}$$

dir [16].

Tanım 1.0.25. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun.*

$$TM = \cup\, T_pM$$

şeklindeki tanjant uzayların birleşimine M' nin p noktasındaki ***tanjant demeti*** *denir [16].*

Önerme 1.0.5. *Eğer $F : M \to M'$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise onun diferensiyeli olan $F_* : TM \to TM'$ de diferensiyellenebilirdir [16].*

Önerme 1.0.6. *Eğer pr ve pr', $M \times M'$ çarpım manifoldundan sırasıyla M ve M' üzerine izdüşümler ise, $\lambda = (pr_*, pr'_*) : T(M \times M') \to (TM) \times (TM')$ bir diffeomorfizmdir [16].*

Önerme 1.0.7. *Eğer M bir diferensiyellenebilir manifold ise TM de diferensiyellenebilir manifolddur [6].*

Tanım 1.0.26. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Eğer $T_p(F) : T_pM \to T_{F(p)}N$ bire-bir ise F' ye $p \in M$' de bir* ***immersiyondur****, örten ise F' ye $p \in M$' de bir* ***submersiyondur*** *denir [11].*

Eğer F, p' de bir immersiyon ise $rank_pF = boy_pM$ dir. Bu şart p' nin bir açık komşuluğunda da gerçeklenir. Dolayısıyla F, m' nin bir komşuluğunda bir immersiyondur. Eğer F, p' de bir submersiyon ise $rank_pF = boy_{F(p)}N$ dir. Bu şart p' nin bir açık komşuluğunda da gerçeklenir. Dolayısıyla F, m' nin bir komşuluğunda bir submersiyondur.

Tanım 1.0.27. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer F, M nin her noktasında bir immersiyon ise F' ye bir immersiyondur, M nin her noktasında bir submersiyon ise F' ye bir submersiyondur denir [6, 14].*

Tanım 1.0.28. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Eğer $T_p(F) : T_pM \to T_{F(p)}N$ sabit ranka sahip ise F' ye $p \in M$' de bir* ***subimmersiyondur*** *denir [11].*

Şimdi diferensiyellenebilirlik ile immersiyon ve submersiyonlar arasındaki ilişkileri sonuçlarla verelim.

Sonuç 1.0.1. *$i : M \to N$ bir immersiyon ve $F : P \to M$ bir sürekli dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [6].*

i) *F diferensiyellenebilirdir,*

ii) *$i \circ F$ diferensiyellenebilirdir.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "i \circ F"'] & M \arrow[d, "i"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Sonuç 1.0.2. *$p : M \longrightarrow N$ bir örten submersiyon ve $F : N \longrightarrow P$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [6].*

i) *F diferensiyellenebilirdir,*

ii) *$F \circ p$ diferensiyellenebilirdir.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "F\circ p"'] & N \arrow[d, "F"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Sonuç 1.0.3. *Eğer $G : M' \longrightarrow M$ bir immersiyon ve $F : M' \longrightarrow M_1$ herhangi bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise $(G, F) : M' \longrightarrow M \times M_1$ bir immersiyondur [6].*

Sonuç 1.0.4. *$G : M' \longrightarrow M$ ve $F : M_1' \longrightarrow M_1$ iki immersiyon olsun. Bu takdirde $G \times F : M' \times M_1' \longrightarrow M \times M_1$ bir immersiyondur [6].*

Sonuç 1.0.5.

1. *$pr_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ izdüşümü bir submersiyondur.*

2. *$F : M \to M'$ ve $G : M_1 \to M_1'$ submersiyon ise $F \times G$ bir submersiyondur [6].*

Sonuç 1.0.6. *$F : M \to M'$ bir immersiyon olsun. Eğer $G : M_1 \to M$, $F \circ G$ dife-rensiyellenebilir olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise, G de diferensiyellenebilirdir [6].*

Sonuç 1.0.7. *Bir submersiyon açık dönüşümdür [6].*

Önerme 1.0.8. *Eğer $F : M_1 \to M$ ve $F' : M_1 \to M'$ dönüşümleri, $(F, F') : M_1 \to M \times M'$ bir diffeomorfizm olacak şekildeki diferensiyellenebilir dönüşümler ise $(F_*, F_*') : TM_1 \to TM \times TM'$ bir diffeomorfizmdir [14].*

Şimdi altmanifold tanımını verebiliriz.

Tanım 1.0.29. *M' ve M iki manifold olsun. Eğer M', M' nin bir alt kümesi ve $j : M' \longrightarrow M$ doğal dahil etme dönüşümü bir immersiyon ise M' manifolduna, M manifoldunun bir **altmanifoldu** denir [14].*

Önerme 1.0.9. *M', M' nin bir altmanifoldu ve M'', M' nün bir altmanifoldu ise M'', M' nin bir alt manifoldudur [14].*

Tanım 1.0.30. *M_1' den M' ye bir bire-bir immersiyona M_1' den M' ye bir **imbedding** denir [14].*

Şimdi altmanifoldlar ile ilgili bazı özellikleri verelim..

Lemma 1.0.15. *$F : M \to N$ bire-bir immersiyon olsun. $F : M \to F(M) \subset N$ bir homeomorfizm ise $F(M)$, N' de bir altmanifolddur ve $F : M \to N$ bir diffeomorfizmdir [5].*

Lemma 1.0.16. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu takdirde F' nin Γ_F grafı, $M \times N$' nin bir kapalı altmanifoldudur [5, 13].*

Önerme 1.0.10. *F, M' den M'' ne bir submersiyon olsun. Eğer $G : M' \longrightarrow M''$, $G \circ F$ diferensiyellenebilir olacak şekildeyse G de diferensiyellenebilirdir [14].*

Lemma 1.0.17. *$F : M \longrightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. F' nin bir subimmersiyon olduğunu varsayalım. Bu takdirde, herhangi $n \in N$ için $F^{-1}(n)$, M' nin bir kapalı altmanifoldudur ve herhangi $m \in F^{-1}(n)$ için*

$$T_m\left(F^{-1}(n)\right) = \ker\left(T_m(F)\right)$$

dir [5].

Submersiyonların durumunda daha kuvvetli bir sonuca sahibiz.

Lemma 1.0.18. *$F : M \to N$ bir submersiyon ve P, N' nin bir altmanifoldu olsun. Bu takdirde $F^{-1}(P)$, M' nin bir altmanifoldudur ve*

$$F|_{F^{-1}(P)} : F^{-1}(P) \longrightarrow P$$

kısıtlaması bir submersiyondur. Ayrıca herhangi $m \in F^{-1}(P)$ için

$$T_m\left(F^{-1}(P)\right) = T_m(F)^{-1}\left(T_{F(m)}(P)\right)$$

dir [5].

En genel haliyle bir bölüm manifoldunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

Tanım 1.0.31. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $p : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bir $U \subset N$ açık altmanifoldu üzerinde tanımlanan herhangi bir f fonksiyonu için $p^{-1}(U)$ üzerinde bir $p^{*}f$ fonksiyonunu*

$$(p^{*}f)(x) = f(p(x))$$

*şeklinde tanımlayalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa p dönüşümüne bir **bölüm dönüşümü** denir [17].*

1. *Bir $U \subset N$ altkümesi açıktır $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U)$ M' de açıktır,*

2. *Bir $U \subset N$ açık altkümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu diferensiyellenebilirdir $\Leftrightarrow$ $p^{*}f$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir.*

Bir bölüm dönüşümü aşağıdaki evrensellik özelliğine sahiptir:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & N \arrow[dl, "\phi"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

değişimli üçgeni verilsin, burada p bir bölüm ve q bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Bu taktirde ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Eğer q aynı zamanda bir bölüm dönüşümü ve ϕ bire-bir örten ise, ϕ bir diffeomorfizmdir. Bu son durum şöyle yorumlanabilir: eğer bir M diferensiyellenebilir manifoldundan bir N kümesine bir p dönüşümü verilirse, o zaman N kümesi, p bir bölüm dönüşümü olacak şekilde en fazla bir tane diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [17].

Şimdi bir denklik bağıntısı verilmesi durumunda bölüm manifoldunu inceleyelim.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve $R \subset M \times M$, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $M/_{R}$, R' ye göre M' nin denklik sınıflarının kümesi ve $p : M \to M/_{R}$, herhangi bir $m \in M$' yi onun $M/_{R}$' deki denklik sınıfına götüren doğal dönüşüm olsun.

$M/_{R}$ üzerinde bölüm topolojisini tanımlayalım; yani $U \subset M/_{R}$ açıktır $\Longleftrightarrow$ $p^{-1}(U) \subset M$ açıktır. O zaman $p : M \longrightarrow M/_{R}$ bir sürekli dönüşümdür ve R'

nin denklik sınıfları üzerinde sabit olan herhangi $F : M \longrightarrow N$ sürekli dönüşümü için aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde bir tek

$$\overline{F} : M/_R \longrightarrow N$$

sürekli dönüşümü vardır.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & N \\ M/_R \arrow[ur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Genellikle $M/_R$ bir manifold değildir. Örneğin $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ve R de $(0,1) \times (0,1)$' deki köşegenin ve $x, y \in (0,1)$, $x \neq y$ için $\{(x,y),(y,x)\}$' in birleşimi olsun. Bu takdirde, $M/_R$, x ve y' nin belirlenmesi aracılığıyla M' den elde edilir. Açıkça bu topolojik uzay bir manifold yapısına izin vermez.

Varsayalım ki $M/_R$, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olacak şekilde bir diferensiyellenebilir yapıya sahip olsun. p sürekli olduğundan $M/_R$' deki herhangi U açık kümesi için $p^{-1}(U)$, M' de açıktır. Ayrıca p bir açık dönüşümdür. Buradan $p^{-1}(U)$, M' de açık olacak şekildeki herhangi $U \subset M/_R$ altkümesi için $U = p\left(p^{-1}(U)\right)$ kümesi $M/_R$' de açıktır.

Böylece $M/_R$' deki bir U altkümesi açıktır $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$, M' de açıktır, yani $M/_R$ üzerindeki topoloji bölüm topolojisidir.

Eğer M' den bir N diferensiyellenebilir manifolduna giden F dönüşümü diferensiyellenebilir ise, $\overline{F} : M/_R \longrightarrow N$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

Böyle bir diferensiyellenebilir yapının tek olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim ve $(M/_R)_1$ ve $(M/_R)_2$ bu özelliklerle iki manifoldu göstersin. Bu durumda, yukarıdaki uyarıdan dolayı $(M/_R)_1 \to (M/_R)_2$ ve $(M/_R)_2 \to (M/_R)_1$ birim dönüşümleri diferensiyellenebilirdir. Böylece birim dönüşüm $(M/_R)_1$ ve $(M/_R)_2$' nin bir diffeomorfizmidir, yani $M/_R$ üzerindeki diferensiyellenebilir yapılar birimseldir.

Böylece $M/_R$, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olacak şekilde bir diferensiyellenebilir yapıya izin verirse ona R' ye göre M' nin **bölüm manifoldu** olduğunu söyleriz. Bu durumda, denklik bağıntısı **regülerdir** denir.

Eğer $M/_R$ bölüm manifoldu var ise, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olduğundan p aynı zamanda bir açık dönüşümdür [5, 14, 18].

Teorem 1.0.5. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve R, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [14].*

i) *R bağıntısı regülerdir.*

ii) *R, $M \times M$' nin kapalı altmanifoldudur ve $pr_1, pr_2 : M \times M \longrightarrow M$ doğal izdüşümlerinin $p_1, p_2 : R \longrightarrow M$ kısıtlamaları submersiyondurlar.*

BÖLÜM 2

LIE GRUPLAR

Bu bölümde Lie grupları tanım, teorem ve örneklerle ayrıntılı olarak vereceğiz.

Tanım 2.0.32. *G kümesi için aşağıdaki şartları sağlanıyor ise, G ye bir **Lie gruptur** denir :*

1. G bir diferensiyellenebilir manifolddur,

2. G bir gruptur,

3. $\mu : G \times G \to G,\ (x,\ y) \to xy$ ve $i : G \to G,\ x \to x^{-1}$ diferensiyellenebilir dönüşümlerdir [5].

Örnek 2.0.12. *$S^1 \subset \mathbb{C}^*$ birim çemberi $\mathbb{C}^*$ daki çarpma işlemine göre bir gruptur. S^1 diferensiyellenebilir manifoldu ile bu grup bir Lie gruptur [3, 4]*

Örnek 2.0.13. *V n-boyutlu sonlu bir reel lineer uzay olsun. V' nin lineer endomorfizmlerinin lineer uzayını $End\,(V)$ şeklinde ve determinantı $\det : End\,(V) \to \mathbb{R},\ A \to \det A$ şeklinde bir dönüşüm olarak gösterelim. $End\,(V)$' nin tersi alınabilir elemanlarının kümesini $Aut\,(V)$ ya da $GL\,(V)$ şeklinde gösterelim.*

$$GL\,(V) = \{A \in End\,(V) |\, \det A \neq 0\}$$

Burada $\det : End\,(V) \to \mathbb{R}$ sürekli dönüşüm ve $\mathbb{R}/\,\{0\}$, $\mathbb{R}$' nin açık altkümesidir. Dolayısıyla $GL\,(V) = \det^{-1}\,(\mathbb{R}/\,\{0\})$, $End\,(V)$ lineer uzayının açık altkümesidir. Buna göre, $GL\,(V)$' de n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısı vardır. G grup işlemleri ve ters dönüşümlerin bu manifold yapısı ile bir diferensiyellenebilir dönüşüm olduğunu gösterelim. V için taban $v_1,\ ..., v_n$ olsun. Eğer $A \in End\,(V)$ ise, $mat = (A_{mj})$ şeklinde bu taban ile matrisi gösterebiliriz. mat, $End\,(V)$ den, $M\,(n,\ \mathbb{R})$ reel $n \times n$ matris uzayı üzerine bir lineer izomorfizmdir. Açık bir şekilde bu yolla $\mathbb{R}^{n^2}$ ile $M\,(n,\ \mathbb{R})$ leri tanımlayabiliriz. Dolayısıyla, $1 \leq m,\ j \leq n$ için

$\varepsilon_{mj} : A \to A_{mj}$ fonksiyonları $End\,(V)$' nin koordinat fonksiyonlarının ailesi olarak gösterilebilir. $GL\,(V)$ için bu sınırlamalar $GL\,(V)$' nin global haritasını oluşturabilir. Bu koordinatlar cinsinden çarpımsal dönüşüm $A,\ B \in GL\,(V)$ için

$$\varepsilon_{kl}\,(\mu\,(A,\ B)) = \sum \varepsilon_{km}\,(A)\,\varepsilon_{ml}\,(B)$$

şeklinde verilebilir. μ, diferensiyelenebilirdir. Verilen bu koordinatlar cinsinden determinant fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$\det = \sum Sgn\,(\sigma)\,\varepsilon_{1\sigma(1)}...\varepsilon_{n\sigma(n)}$$

Burada Sgn permütasyonlarının işareti olarak gösteriliyor. Görülüyor ki $\det : GL\,(V) \to \mathbb{R}$ *sıfırlayıcı olmayan diferensiyellenebilir fonksiyondur.* $A \to (\det A)^{-1}$ *$GL\,(V)$' de bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Cramer kuralına göre, i ters dönüşümünün $GL\,(V)$' den kendine diferensiyellenebilir olduğu sonucuna varırız. Bileşke işlemi ile $GL\,(V)$ bir Lie gruptur. $GL\,(V)$ grubu V nin genel Lie grubu olarak adlandırılır [8].*

Bir Lie grup üzerinde iki özel dönüşüm tanımlarız. Bu dönüşümler Lie gruptaki herhangi bir elemanı birim eleman civarına taşımamıza imkan verir. Böylece birim eleman civarında geçerli olan özellikler grubun tamamı için de geçerli olur.

Tanım 2.0.33. *G bir Lie grup ve $a \in G$ olsun. Bu takdirde,*

$$L_a : G \to G,\ g \mapsto L_a(g) = ag,$$
$$R_a : G \to G,\ g \mapsto R_a(g) = ga$$

*dönüşümlerine sırasıyla **sol ve sağ dönüşüm** denir [19].*

Bu dönüşümler G Lie grubunun işlemi ile tanımlandığı için diferensiyellenebilirdir-ler. Ayrıca

$$L_{a_1} \circ L_{a_2} = L_{a_1 a_2} \ \text{ ve } \ R_{a_1} \circ R_{a_2} = R_{a_2 a_1}$$

dir. Eğer $e \in G$ birim eleman ise $L_e = Id = R_e$ dir. Dolayısıyla $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ ve $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$ dir. Böylece her bir $a \in G$ için L_a ve R_a birer diffeomorfizmdir.

Herhangi bir $a \in G$ elemanı , $L_{a^{-1}}$ (veya $R_{a^{-1}}$) dönüşümü aracılığıyla $e \in G$ birimine taşınabilir.

$a, b \in G$ için $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$ olup sol ve sağ dönüşümleri değişimlidir. Zincir kuralından

$$T_{ab}(L_{a^{-1}}) \circ T_b(L_a) = T_b(L_{a^{-1}} \circ L_a) = Id$$

dir. Dolayısıyla $T_b(L_a)$ tersi alınabilirdir. Yani $T_a(L_{a^{-1}}) : T_a(G) \to T_e(G)$ indirgenmiş dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmidir. R_a sağ dönüşümü için de benzer durum söz konusudur.

Lemma 2.0.19. *G_1, G_2 Lie gruplar olsun. Grup yapısı ve çarpım manifoldu yapısı ile donatılmış $G = G_1 \times G_2$ bir Lie gruptur [8].*

İspat. $\mu : G \times G \to G$ çarpım dönüşümü

$$\mu\left(\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right)\right) = \left(\mu_1 \times \mu_2\right)\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right)$$

şeklinde verilsin. Dolayısıyla

$$\mu = \left(\mu_1 \times \mu_2\right) \circ \left(I_{G_1} \times S \times I_{G_2}\right)$$

dir. Burada S,

$$S : G_2 \times G_1 \to G_1 \times G_2,\ S\left(x_2, y_1\right) = \left(y_1, x_2\right)$$

şeklinde verilen yer değiştirme dönüşümüdür. μ diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesidir. Dolayısıyla diferensiyellenebilirdir. G' nin $i = (i_1, i_2)$ ters dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $G = G_1 \times G_2$ bir Lie gruptur. □

Lemma 2.0.20. *G bir Lie grup ve $H \subset G$ hem altgrup hem de altmanifold olsun. H da bir Lie gruptur [8].*

İspat. $\mu = \mu_G : G \times G \to G$, G' nin çarpım dönüşümü olsun. H' nın μ_H çarpım dönüşümü de $\mu_H = \mu \mid_{H \times H}$ şeklinde verilebilir. μ, diferensiyellenebilir ve $H \times H$, $G \times G$' nin altmanifoldu olduğu için $\mu_H : H \times H \to G$ diferensiyellenebilirdir. H altgrup olduğu için H' nın diferensiyellenebilir altmanifoldlarının içerisine bir dönüşümdür. Bu da $\mu_H : H \times H \to H$' ın bir diferensiyellenebilir dönüşüm olduğunu gösterir. $1_H : H \to H$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla H bir Lie gruptur. □

Lemma 2.0.21. *G bir Lie grup ve H da bir altgrup olsun. $h \in H$ bir nokta olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) *H, h noktasında G' nin bir altmanifoldudur,*

b) *H, G' nin bir altmanifoldudur [8].*

İspat. Açık bir şekilde (b), (a)' yı gerektirir. (a)' nın varolduğunu kabul edelim. $m \leq n$ olmak üzere G' nin boyutu n ve H' nın boyutu da m olsun. Üstelik G' de h' nın bir U açık komşuluğu vardır ve χ U dan $\mathbb{R}^n$ açık altkümesi üzerine bir diffeomorfizmdir. Burada $\chi(h) = 0$ ve $\chi(U \cap H) = \chi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ dır. $k \in H$ olmak üzere $a = kh^{-1}$ alalım. Burada L_a h dan k üzerine olacak şekilde G den G' ye bir diffeomorfizmdir. H' ın k noktasında m boyutlu bir altmanifold olduğunu göstereceğiz. $a \in H$ için, L_a dönüşümü, bire-bir ve örten olacak şekilde H altkümesinden H altkümesi üzerine bir dönüşümdür. $U_k = L_a(U)$, G' de k' nın bir açık komşuluğudur. Üstelik $\chi_k = \chi \circ L_a^{-1}$ U_k dan $\mathbb{R}^n$' nin $\chi(U)$ açık altkümesi üzerine diffeomorfizmdir.

$$\begin{aligned} \chi_k(U \cap H) &= \chi_k(L_a U \cap L_a H) \\ &= \chi_k \circ L_a(U \cap H) \\ &= \chi(U \cap H) \\ &= \chi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \end{aligned}$$

Bu da gösteriyor ki H, k noktasında m boyutlu bir altmanifolddur. $k \in H$ keyfi olduğundan (b) ispatlanmış olur. □

Lemma 2.0.22. det : $GL(V) \to \mathbb{R}^*$ *fonksiyonunun* $T_1 \det = tr : End(V) \to \mathbb{R}$ *şeklinde I da bir tanjant dönüşümü vardır [8].*

Örnek 2.0.14. *V sonlu boyutlu bir reel lineer uzay olsun.*

$$SL(V) = \{A \in GL(V) | \det A = 1\}$$

şeklinde özel lineer grupları tanımlayalım. det, *$GL(V)$' den $\mathbb{R}^*$ üzerine bir grup homomorfizmidir. Ayrıca $SL(V)$, det' nın çekirdeğidir ve $SL(V)$, $GL(V)$ nin* *altgrubudur.* $SL(V)$*' nin* $GL(V)$*' nin altmanifoldu olması için* $I = I_V$ *olduğunu göstermek yeterlidir.*

$G = GL(V)$, $End(V)$ *lineer uzayının açık altkümesi olduğu için,* G*' nin* $T_1(G)$ *tanjant uzayı* $End(V)$ *ile tanımlanabilir.* det *fonksiyonu* G *den* $\mathbb{R}$ *üzerine diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla* det *fonksiyonunun tanjant uzayı* $End(V)$*' den* $\mathbb{R}$*' ye bir lineer dönüşümdür. Lemma 2.0.22 de tanjant dönüşümünün* $tr : End(V) \to \mathbb{R}$, $A \to tr(A)$ *şeklinde bir iz olduğu belirtildi. Açık bir şekilde* tr *örten lineer dönüşümdür. Bu da* $\det I$ *nın submersiyon olmasını gerektirir. Dolayısıyla* $SL(V)$*' nin* I *daki altmanifoldları diferensiyellenebilirdir. O halde* $SL(V)$, $GL(V)$*' nin altmanifoldudur [8].*

Teorem 2.0.6. *G bir Lie grup ve H da G' nin bir altgrubu olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

a) *H topolojik anlamda kapalıdır,*

b) *H bir altmanifolddur [8].*

İspat. (b) nin (a) yı gerektirdiğini ispatlayacağız. (b) yi kabul edelim. G' de e' nin bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $U \cap \bar{H} = U \cap H$ dır. $a \in \bar{H}$ olsun. L_a, G' den G' ye bir diffeomorfizm olduğu için, aU G de a nın bir açık komşuluğudur. Dolayısıyla $aU \cap H \neq \emptyset$ dir. $h \in aU \cap H$ seçelim. $a^{-1}h \in U$ dır. Diğer taraftan $a \in \bar{H}$, $h \in H$ dan $a^{-1}h \in \bar{H}$ dır. Dolayısıyla $a^{-1}h \in U \cap \bar{H} = U \cap H$ dır ve buradan $a \in H$ dır. Böylece $\bar{H} \subset H$ sonucu ortaya çıkar. O halde H kapalıdır. □

Sonuç 2.0.8. *G bir Lie grup olsun. G' nin her kapalı altgrubu bir Lie gruptur [8].*

İspat. H, G' nin bir kapalı altgrubu olsun. Teorem 2.0.6 dan H, G' nin bir dife-rensiyellenebilir altmanifoldudur. Dolayısıyla H hem altgrup hem de altmanifold olduğundan bir Lie gruptur. □

2.0.5 Lie Grup Homomorfizmi

Tanım 2.0.34. *G ve H Lie gruplar olsun.*

a) *G den H' ya bir* ***Lie grup homomorfizmi****, grupların homomorfizma şartlarını sağlayan bir $\varphi : G \to H$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür.*

b) *G' den H üzerine bir* ***Lie grup izomorfizmi****, tersi de bir Lie grup homomorfizmi olan bir $\varphi : G \to H$ bire-bir ve örten Lie grup homomorfizmidir [8].*

Uyarı 2.0.1. *Eğer φ bir Lie grup izomorfizmi ise, φ diferensiyellenebilir, bire-bir, örten ve ayrıca φ' nin tersi de diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla φ bir diffeomorfizmdir [8].*

Örnek 2.0.15. *G bir Lie grup ve $g \in G$ olsun. $C_g : G \to G$ dönüşümünü $C_g(h) = ghg^{-1}$ şeklinde eşlenik olarak tanımlayalım. Bu takdirde, grup çarpımı diferensiyellenebilir olduğundan C_g diferensiyellenebilirdir. Kolayca gösterilebileceği gibi C_g aynı zamanda bir grup homomorfizmidir. Böylece C_g bir Lie grup homomorfizmidir [6].*

Önerme 2.0.11. *Lie grup homomorfizmlerinin bileşkesi yine bir Lie grup homomorfizmidir* [*6*].

Tanım 2.0.35. *Bir G Lie grubunun bir* ***Lie altgrubu****, $i : H \to G$ içerme dönüşümü Lie grup homomorfizmi olacak şekilde bir Lie grup yapısı ile donatılmış olan H altgrubudur [8].*

Lemma 2.0.23. *$\varphi : G \to H$ Lie grupların homomorfizmi olsun. φ, e noktasında lokal diffeomorfizm ise, φ, G' nin her noktasında lokal diffeomorfizmdir [8].*

İspat. $a \in G$ olsun. $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x)$ dir. $\varphi \circ L_a = L_{\varphi(a)} \circ \varphi$ den $\varphi = L_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ L_a^{-1}$ olur. L_a ve $L_{\varphi(a)}$ diffeomorfizmdirler. L_a^{-1}, a' dan e' ye dönüşüm olduğu için φ, e noktasında lokal diffeomorfizmdir. O halde $L_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ L_a^{-1}$, a noktasında lokal diffeomorfizmdir. Dolayısıyla φ, a noktasında lokal diffeomorfizmdir. □

Lemma 2.0.24. *$\varphi : G \to H$ Lie grupların immersiyon homomorfizmi olsun. φ submersiyondur gerek ve yeter şart $\varphi(G)$, H' nın açık altgrubudur [8].*

Önerme 2.0.12. *G bir Lie grup ve H kapalı normal altgrup olsun. Bu takdirde G/H, $\pi : G \to G/H$ Lie grup homomorfizmi olacak şekilde bir tek Lie grup yapısına sahiptir [8].*

İspat. G/H, π submersiyon olacak şekilde bir tek manifold yapısıyla donatılmıştır. H normal olduğundan G/H üzerinde π grup homomorfizmi olacak şekilde bir tek grup yapısı vardır. $\bar{\mu}$, G/H bölüm grubunun çarpım dönüşümü olsun. Bu takdirde aşağıdaki diyagramın değişimli olduğu kolayca görülür:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\bar{\mu}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

μ ve π diferensiyellenebilir olduğundan $\pi \circ \mu$ de diferensiyellenebilirdir. Sol dikey dönüşüm submersiyon olduğu için, $\bar{\mu}$' nin diferensiyellenebilir olduğu gelir. Benzer şekilde G/H' nın ters dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Böylece G/H Lie grup ve π Lie grup homomorfizmidir.

Kabul edelim ki G/H' nın, $\pi : G \to G/H$ Lie grup homomorfizmi olacak şekilde iki tane Lie grup yapısı olsun. G/H ve $(G/H)^{'}$ alalım. $I : G/H \to (G/H)^{'}$ birim dönüşümü açık bir şekilde grupların bire-bir homomorfizmidir. Sonuç 1.0.2. den π submersiyon olduğundan I diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla I bir Lie grup homomorfizmidir. I bire-bir olduğundan I her yerde immersiyondur. Dolayısıyla Lemma 2.0.24 den I submersiyondur. Bu da I nın bire-bir örten lokal diffeomorfizm olduğunu gösterir. Yani I bir diffeomorfizmdir. Dolayısıyla I Lie grupların izomorfizmi olur. Bu da I' nın tekliğini gösterir. $\square$

Lemma 2.0.25. *$\varphi : G \to H$ Lie grupların bire-bir homomorfizmi olsun. Bu takdirde φ her yerde immersiyondur [8].*

Teorem 2.0.7. *$\varphi : G \to G^{'}$ Lie grupların homomorfizmi ve $H = \ker\varphi$, G' nin kapalı normal altgrubu olsun. $\bar{\varphi} : G/H \to G^{'}$ homomorfizmi diferensiyellenebilir bire-bir immersiyondur ve eğer φ örten ise, $\bar{\varphi}$ Lie grupların izomorfizmidir [8].*

İspat. Aşağıdaki diyagram grup homomorfizmlerinin değişimli diyagramıdır:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & G/H \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

Üstelik π submersiyon ve φ diferensiyellenebilir olduğundan $\bar{\varphi}$ diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $\bar{\varphi}$ Lie grupların bire-bir homomorfizmidir. Ayrıca Lemma 2.0.25 den φ bir immersiyondur. Kabul edelim ki φ örten olsun. Bu takdirde $\bar{\varphi}$ örtendir ve Lemma 2.0.24' den $\bar{\varphi}$ de submersiyondur. Buradan $\bar{\varphi}$' nin lokal diffeomorfizm olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla $\bar{\varphi}$ diffeomorfizmdir. Bu da $\bar{\varphi}$' nin Lie grup izomorfizmi olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 2.0.13. *$\varphi : G \to G'$ Lie grupların homomorfizmi olsun. $\varphi(G)$, G' nin açık altkümesidir gerek ve yeter şart φ submersiyondur [8].*

İspat. Eğer φ submersiyon ise, $\varphi(G)$ açıktır. H, φ' nin çekirdeği olsun. Teorem 2.0.7 den $\bar{\varphi} : G/H \to G'$ Lie grupların bire-bir homomorfizmidir. Lemma 2.0.24 den $\bar{\varphi}$ submersiyondur. π örten olacak şekilde $\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi$ olduğu için φ her yerde submersiyondur. $\square$

Sonuç 2.0.9. *$\varphi : G \to H$ Lie grupların bir homomorfizmi olsun. φ' nin çekirdeği G' nin kapalı altgrubudur ve $Ker\varphi$ bir Lie gruptur [8].*

İspat. $K = Ker\varphi$ alalım. K, G' nin bir altgrubudur. φ süreklidir ve $\{e_H\}$, H' ın kapalı altkümesidir. Dolayısıyla, $K = \varphi^{-1}(\{e_H\})$ G' nin kapalı altgrubudur. Sonuç 2.0.8' den dolayı K bir Lie gruptur. $\square$

Örnek 2.0.16. *V n-sonlu boyutlu kompleks lineer uzay olsun. $End(V)$ ile V den V' ye kompleks lineer dönüşümlerin kompleks lineer uzaylarını ve $GL(V)$ ile de tersi alınabilir dönüşümlerin altkümesini gösterelim.* $\det : End(V) \to \mathbb{R}^*$ *bir kompleks polinom dönüşümdür ve süreklidir. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}$' de açık olduğu için $GL(V) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$, $End(V)$' de açıktır. $GL(V)$' nin Lie grup olduğu daha önce gösterilmişti.* $\det : GL(V) \to \mathbb{C}^*$ *bir Lie grup homomorfizmidir. Dolayısıyla Sonuç 2.0.9' dan det' ın çekirdeği $SL(V) = \{A \in GL(V) | \det A = 1\}$ bir Lie gruptur [8].*

Değişmez Vektör Alanları

Tanım 2.0.36. *M bir manifold ve G bir Lie grup olsun. M' de diferensiyellenebilir vektör alanlarının reel lineer uzayları $V(M)$ ile gösterilsin. Eğer her $a \in G$ için*

$$(L_a)_* v = v$$

ya da denk olarak $a,\ b \in G$ için

$$v(ab) = T_b(L_a)\, v(b)$$

ise, $v \in V(G)$ vektör alanına sol değişmez vektör alanı denir [8].

Diferensiyellenebilir sol değişmez vektör alanlarının ailesi, $V(G)$' nin bir lineer alt uzayıdır ve $V_l\ (G)$ ile gösterilir. Yukarıdaki eşitlikte $b = e$ alınırsa görebiliriz ki sol değişmez vektör alanı e' de $v(e) \in T_eG$ değeri ile tamamen belirlenebilir. Diğer bir ifadeyle $v \mapsto v(e)$, $V_l(G)$ den T_eG içerisine bire-bir lineer dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Eğer $X \in T_eG$ ise G deki v_X vektör alanı

$$v_X(a) = T_e(L_a)\, X$$

dir.

Lemma 2.0.26. *$X \mapsto v_X$ dönüşümü T_eG den $V_l(G)$ üzerine bir lineer izomorfizm olarak tanımlanır ve bu dönüşümün tersi $v \mapsto v(e)$ ile verilir [8].*

İspat. $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto L_a(b)$ bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. $X \in T_eG$ yönünde $b = e$ de b ye göre diferensiyellenebilirse,

$$\begin{array}{ccc} G & \to & TG \\ a & \mapsto & T_e(L_a)\, X \end{array}$$

bir dönüşüm olarak diferensiyellenebilirdir. Bu ifadeye göre v_X G de bir vektör alanıdır. Burada $X \mapsto v_X$ bir reel lineer $T_eG \to V(G)$ dönüşümü tanımlar. Bu dönüşüm $V_l(G)$' nin üzerinedir.

$X \in T_eG$ olsun.

$$L_{ab} = L_a \circ L_b$$

diferensiyellenebilirdir ve zincir kuralını uygularsak,

$$T_e(L_{ab}) = T_b(L_a)\, T_e(L_b)$$

olduğu gelir. v_X sol değişmez şartlarını sağlar. Dolayısıyla v_X sol değişmezdir.

$v_X(e) = X$ olmak üzere, $\varepsilon : \mathrm{V}_l(G) \to T_eG$, $v \mapsto v(a)$ dönüşümü hem bire-bir hem de örtendir. Dolayısıyla ε, $X \mapsto v_X$ tersi ile bir lineer izomorfizmdir. □

Tanım 2.0.37. *E^{n+1} de parametrik bir eğri*

$$\begin{aligned} \alpha_X : I &\to E^{n+1} \\ t &\mapsto \alpha_X(t) = \left(\alpha_{X_1}(t), ..., \alpha_{X_{n+1}}(t)\right) \end{aligned}$$

olsun. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı v_X olmak üzere $\forall t \in I$ için

$$\frac{d\alpha_X}{dt} = \dot{\alpha}_X = v_X(\alpha_X(t))$$

ise α_X eğrisine v_X vektör alanının ***integral eğrisi*** *denir [1].*

Teorem 2.0.8. *E^n de bir açık U, U üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı v_X ve U nun bir noktası P olsun. O zaman $0 \in I$ olmak üzere v_X in öyle bir*

$$\alpha_X : I \to U$$

integral eğrisi vardır ki

a) $\alpha_X(0) = P$,

b) $\beta_X(0) = P$

olmak üzere v_X in bir diğer

$$\beta_X : \tilde{I} \to U$$

integral eğrisi mevcut ise $\tilde{I} \subset I$ ve $\forall t \in \tilde{I}$ için

$$\beta_X(t) = \alpha_X(t)$$

dir[1].

Tanım 2.0.38. *Teorem 2.0.8. de geçen* α_X *integral eğrisine* v_X *vektör alanının* P *noktasından geçen* ***maksimal integral eğrisi*** *denir [1].*

Lemma 2.0.27. $X \in G$ *olsun.* α_X *integral egrisinin tanım kümesi* $\mathbb{R}$ *dir. Ayrıca her* $s, t \in \mathbb{R}$ *için*

$$\alpha_X(s+t) = \alpha_X(s)\,\alpha_X(t)$$

dir ve

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times T_eG &\rightarrow G, \\ (t, X) &\mapsto \alpha_X(t) \end{aligned}$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir [8].

2.0.6 Üstel Dönüşüm

Tanım 2.0.39. *G bir Lie grup olsun. Bu takdirde* $\exp = \exp_G : T_eG \rightarrow G$, $\exp(X) = \alpha_X(1)$ *dönüsümüne* ***üstel dönüşüm*** *denir*[8].

Burada α_X, $v_X(e) = X$ şeklinde belirtilen G deki sol değişmez vektör alanı v_X in e başlangıç noktası ile maksimal integral eğrisidir.

Lemma 2.0.28. *Her* $s, t \in \mathbb{R}$ *ve* $X \in T_eG$ *için*

a) $\exp(sX) = \alpha_X(s)$

b) $\exp(s+t)X = \exp sX \exp tX$

dir. Ayrıca $\exp : T_eG \rightarrow G$ *dönüşümü diferensiyellenebilirdir,* 0 *noktasında bir lokal diffeomorfizmdir ve* exp*'in orjindeki tanjant dönüşümü* $T_0 \exp = I_{T_eG}$ *şeklinde verilir [8].*

İspat. $c(t) = \alpha_X(st)$ eğrisini düşünelim. $c(0) = e$ ve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= s\dot{\alpha}_X(st) \\ &= sv_X(\alpha_X(st)) \\ &= v_{sX}(c(t)) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla c, e başlangıç noktası ile v_{sX} in maksimal integral eğrisidir. Buradan $c(t) = \alpha_{sX}(t)$ sonucunu çıkarabiliriz. Böylece $t = 1$ değeri ile (a) eşitliğini elde ederiz.

(b) eşitliği de lemma 2.0.27 ve (a)' daki eşitliğin bir sonucudur.

$$\begin{aligned} \alpha_X : \mathbb{R} \times T_e G &\rightarrow G, \\ (t, X) &\mapsto \alpha_X(t) \end{aligned}$$

şeklinde bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Burada $t = 1$ alırsak exp in diferensiyellenebilirliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned} T_0(\exp) X &= \frac{d}{dt} \exp(tX) \mid_{t=0} \\ &= \dot{\alpha}_X(0) \\ &= v_X(e) \\ &= X \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $T_0(\exp) = I_{T_e X}$ olup ters fonksiyon teoreminden, exp(0) bir lokal diffeomorfizmdir. Yani exp, $T_e G$ den 0' ın bir U açık komşuluğu üzerine diffeomorfik bir dönüşümdür. □

Tanım 2.0.40. *G bir Lie grup olsun. Bu takdirde*

$$\alpha : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$$

diferensiyellenebilir grup homomorfizmine G' nin ***1-parametreli altgrubu*** *denir [8].*

Lemma 2.0.29. *Eğer $X \in T_e G$ ise,*

$$\alpha : t \mapsto \exp tX$$

G' nin 1-parametreli altgrubudur. Üstelik bütün 1-parametreli altgruplar bu yolla elde edilebilir. α, G de 1-parametreli altgrup ve $X = \dot{\alpha}(0)$ olsun. O halde

$$\alpha(t) = \exp(tX)$$

dir [8].

İspat. $\alpha : \mathbb{R} \to G$ 1-parametreli altgrup olsun. Burada $\alpha(0) = e$ ve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \frac{d}{ds}\alpha(t+s)\,|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\alpha(t)\,\alpha(s)\,|_{s=0} \\
&= T_e\left(L_{\alpha(t)}\right)\dot{\alpha}(0) \\
&= v_X(\alpha(t))
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla α, e başlangıç noktası ile v_X için bir maksimal integral eğrisidir. Maksimal integral eğrilerinin tekliğinden $\alpha = \alpha_X$ dir. Buradan görülür ki,

$$\alpha(t) = \exp(tX)$$

dir. □

Lemma 2.0.30. $\varphi : G \to H$ *Lie grupların homomorfizmi olsun. Aşağıdaki diyagram değişimlidir:*

$$\begin{tikzcd}
T_eG \arrow[r, "T_e\varphi"] \arrow[d, "exp_G"'] & T_eH \arrow[d, "exp_H"] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] & H
\end{tikzcd}$$

[8].

İspat. $X \in T_eG$ olsun.

$$\alpha(t) = \varphi(\exp_G(tX))$$

H' nın 1-parametreli altgrubudur. Bu dönüşümün $t = 0$' da diferensiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(0) &= T_e(\varphi)\,T_0(\exp_G)\,X \\
&= T_e(\varphi)\,X
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.0.29' u uygularsak

$$\alpha(t) = \exp_H(tT_e(\varphi)\,X)$$

sonucu çıkar. Bu sonuçta $t = 1$ alınırsa ispat tamamlanmış olur. □

BÖLÜM 3

LIE GRUPLARIN ETKİLERİ

Bu bölümde Lie grupların çeşitli etki türlerini ve bunlarla ilgili temel teorem ve sonuçları vereceğiz.

Tanım 3.0.41. *Bir G Lie grubu ve M manifoldu için,*

$$\mu : G \times M \to M$$

diferensiyellenebilir dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa, G Lie grubu M manifoldu üzerine soldan etki eder denir [5].

1. *Her $m \in M$ için $\mu(1_G, m) = m$,*

2. *Her $g,\ h \in G$ ve $m \in M$ için,* $\mu(\mu(g,h), m) = \mu(g, \mu(h,m))$.

Bundan sonraki kısımlarda işlem kolaylığı açısından bazen $\mu(g,m)$ yerine kısaca gm gösterimini kullanacağız.

Üzerine G Lie grubu aracılığıyla etki edilen bir M manifolduna kısaca G-*manifold* denir.

G Lie grubunun M manifoldu üzerine soldan etkisi $\mu : G \times M \to M$ olsun. Bu takdirde her $g \in G$ ve $m \in M$ için,

$$\begin{aligned} \tau(g) : M &\to M \\ m &\mapsto \tau(g)(m) = gm \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlarız.

$$\tau(gh) = \tau(g)\,\tau(h)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $\tau(g)$, diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla, her $g \in G$ için $\tau(g)$ dönüşümü, $\tau(g^{-1})$ tersi ile M' nin diffeomorfizmleridir [5].

Tanım 3.0.42. *Bir G Lie grubunun bir M manifoldu üzerine sol etkisi verilsin. Her $m \in M$ noktası için, m' nin yörüngesi*

$$\Omega = G.m = \{g.m : g \in G\}$$

şeklindeki G nin elemanlarının etkisi altındaki m nin bütün görüntülerinin kümesidir.

$$\rho(m) : G \to M,\ \rho(m)\, g = g.m$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne, m' nin ***yörünge dönüşümü*** *denir [5, 6].*

Lemma 3.0.31. *Her $m \in M$ için,*

$$\rho(m) : G \to M$$

yörünge dönüşümü sabit ranka sahiptir. Ayrıca $\rho(m)$ bir submersiyondur [5].

İspat. τ ve γ etki dönüşümleri olsun. Her $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} (\tau(a) \circ \rho(m))(b) &= \tau(a)(b.m) \\ &= (ab).m \\ &= \rho(m).(ab) \\ &= (\rho(m) \circ \gamma(a))(b) \end{aligned}$$

dir. Yani her $a \in G$ için,

$$\tau(a) \circ \rho(m) = \rho(m) \circ \gamma(a)$$

dır. Eğer G deki birime göre bu dönüşümün diferensiyelini hesaplarsak her $a \in G$ için,

$$T_m(\tau(a)) \circ T_1(\rho(m)) = T_a(\rho(m)) \circ T_1(\gamma(a))$$

olur. $\tau(a)$ ve $\gamma(a)$ birer diffeomorfizm olduğundan, $T_m(\tau(a))$ ve $T_1(\gamma(a))$ tanjant uzayların izomorfizmleridir. Bu da gösterir ki,

$$rankT_1(\rho(m)) = rankT_a(\rho(m))$$

dir. Dolayısıyla $a \mapsto rank_a \rho(m)$, G' de sabittir. □

Tanım 3.0.43. *Bir G Lie grubunun bir M manifoldu üzerine sol etkisi verilsin. $m \in M$ için m nin* ***izotropi grubu***

$$G_m = \{g \in G : g.m = m\}$$

kümesidir [6].

Örnek 3.0.17. *Eğer G bir Lie grup ve M diferensiyellenebilir manifold ise, G Lie grubunun M manifoldu üzerine aşikar etkisi tüm $g \in G$' ler için,*

$$g.m = m$$

şeklinde tanımlıdır. Diferensiyellenebilir etki olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca her bir noktanın izotropi grubu G' nin kendisidir [6].

Lemma 3.0.32. *M bir G-*manifold *ve $m, n \in M$ olsun. Bu takdirde,*

1. $G_{gm} = g.G_m.g^{-1}$

2. $G.m \cap G.n \neq \emptyset \implies G.m = G.n$
dir [10].

İspat. 1. Bir G_{gm} izotropi grubunda herhangi bir a noktası alalım .

$$\begin{aligned} a \in G_{gm} &\iff ag.m = g.m \\ &\iff g^{-1}ag.m = m \\ &\iff g^{-1}ag \in G_m \\ &\iff a \in gG_mg^{-1} \end{aligned}$$

Buradan $G_{gm} = g.G_m.g^{-1}$ olduğu gelir.

2. $z \in G.m \cap G.n$ olacak şekilde bir z noktası alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} z \in G.m \cap G.n &\implies z = g_1.m = g_2.n \\ &\implies m = g_1^{-1}g_2n = g.n \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} G.m &= G.(g.n) \\ &= G.n \end{aligned}$$

olur.

□

Şimdi en önemli etki türlerini verelim.

Tanım 3.0.44. *Bir G Lie grubunun bir M manifoldu üzerine sol etkisi verilsin. Eğer bazı $m \in M$ ler için,*

$$g.m = m$$

*eşitliği $g = e$ için sağlanıyor ise, etkiye **serbesttir (free)** denir [7].*

Örnek 3.0.18. *H, G' nin bir Lie altgrubu olsun. $H \times G \to G$ çarpım dönüşümünün kısıtlanması H' nın G üzerine soldan serbest etkisidir. Benzer şekilde $G \times H \to H$ kısıtlanmasıda H' nın G üzerine sağdan serbest etkisidir [6].*

Tanım 3.0.45. *Bir G Lie grubunun bir M manifoldu üzerine sol etkisi verilsin. Eğer her m, $n \in M$ için*

$$g.m = n$$

*olacak şekilde en az bir $g \in G$ var ise, etkiye **geçişlidir (transitive)** denir [6].*

Örnek 3.0.19. *$GL(n, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun $\mathbb{R}^n$ manifoldu üzerine doğal etkisi matris çarpımı aracılığıyla verilen $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(A, x) \to Ax$ etkisidir. Burada x' i bir sütun matrisi olarak düşünebiliriz. Bu doğal etkinin $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ kısıtlamasını düşünürsek $O(n)$ nin S^{n-1} üzerine bir geçişli etkisini etkisini elde ederiz. S^{n-1}, $\mathbb{R}^n$' nin bir gömülü altmanifoldu olduğundan bu etki diferensiyellenebilirdir [6].*

Tanım 3.0.46. *Bir G Lie grubu M manifoldu üzerine geçişli bir şekilde etki ediyorsa, M manifolduna **homojen uzay** denir [6].*

Tanım 3.0.47. *Eğer $C \subset Y$ kompakt altkümesi için $f^{-1}(C)$ ters görüntüsü kompakt ise, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına f sürekli dönüşümüne **düzgün (proper) dönüşüm** denir [8].*

Tanım 3.0.48. *Eğer aşağıdaki üç denk şarttan biri sağlanırsa, $\mu : G \times M \to M$ diferensiyellenebilir etkisine **düzgün (proper) etki** denir [10].*

1. Her $g \in G$ ve $x \in M$

$$\begin{aligned} (\mu, id) : G \times M &\to M \times M \\ (g, x) &\to (g.x, x) \end{aligned}$$

düzgün dönüşümdür.

2. Bazı $g_n \in G$ ve x_n, x, $y \in M$' ler için M' de $g_n x_n \to y$ ve $x_n \to x$ ise, (g_n) G' de yakınsak bir altdiziye sahiptir.

3. K ve L, M' de kompakt ise,

$$\{g \in G : g.K \cap L \neq \emptyset\}$$

kompakttır.

Şimdi bu üç şartın denkliğini gösterelim:

(1) $\implies$ (2): tanımın direkt sonucudur.

(2) $\implies$ (3): (g_n), $\{g \in G : g.K \cap L \neq \emptyset\}$ de bir dizi ve $g_n.x_n \in L$ olacak şekilde $x_n \in K$ olsun. K kompakt olduğu için x_n' in $x_{n_k} \to x \in K$ yakınsak altdizisini seçebiliriz. L kompakt olduğu için $g_{n_k}.x_{n_k}$ için benzer şeyleri yapabiliriz. (2)' den söyleyebiliriz ki (g_n) yakınsak bir altdiziye sahiptir. Dolayısıyla $\{g \in G : g.K \cap L \neq \emptyset\}$ kompakttır.

(3) $\implies$ (1): R, $M \times M$' nin bir kompakt altkümesi olsun. L ve K kompakt ve $(\mu, id)^{-1}(R) \subseteq \{g \in G : g.K \cap L \neq \emptyset\} \times K$ dır. (3)' den $\{g \in G : g.K \cap L \neq \emptyset\}$ kompakttır. Dolayısıyla $(\mu, id)^{-1}(R)$ kompakt ve (μ, id) düzgündür.

Önerme 3.0.14. *M, G' nin etkisinin düzgün ve serbest olduğu bir G-*manifold *olsun. Bu takdirde M/G, $\pi : M \to M/G$ izdüşümü submersiyon olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [7].*

Sonuç 3.0.10. *M, G kompakt ve G' nin etkisi serbest olacak şekilde bir G-*manifold *olsun. Bu takdirde M/G, $\pi : M \to M/G$ izdüşümü submersiyon olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [7].*

Örnek 3.0.20. *Eğer H altmanifoldu olan bir G Lie grubunun altgrubu ise, $h \in H$ ve $g \in G$' ler için $h.g = g.h^{-1}$ şeklinde H'nın G üzerine etkisini tanımlayabiliriz. Bu etki açık bir şekilde serbest etkidir. Ayrıca düzgün etkidir:*

$$\begin{aligned} (\mu, id) : H \times G &\to G \times G \\ (h, g) &\mapsto \left(g, gh^{-1}\right) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım ve C de $H \times G$' nin kapalı bir altkümesi olsun. Kabul edelim ki, $\left(g_j, g_j h_j^{-1}\right)$, $(x, y) \in G \times G$' e yakınsayan $(\mu, id)(C)$ de bir ağ olsun. g_j' ler x' e yakınsar ve $h_j = \left(g_j^{-1} g_j h_j^{-1}\right)$, $\left(x^{-1} y\right)^{-1} = y^{-1} x$' e yakınsar ve Dolayısıyla $\left(y^{-1} x, x\right) \in C$ olur. Buradan $(x, y) = \left(x, x\left(y^{-1} x\right)^{-1}\right) \in (\mu, id)(C)$ dir. Dolayısıyla $(\mu, id)(C)$ kapalıdır. $(x, y) \in G \times G$ olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
(\mu, id)^{-1}(C) &= \{(h, g) \in H \times G \mid g = x,\ gh^{-1} = y\} \\
&= \{(h, g) \in H \times G \mid g = x,\ h = y^{-1} g\} \\
&= \left\{\left(x, y^{-1} x\right)\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla açık bir şekilde kompakttır. Yukarıdaki önermeden söyleyebiliriz ki G/H bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [7].

3.0.7 Eşdeğer Dönüşümler

Tanım 3.0.49. *M ve N birer G-*manifold *olsun. Eğer $F : M \to N$ dönüşümü her $g \in G$ için*

$$F(g.p) = g.F(p)$$

$$F(p.g) = F(p).g$$

*şartlarını sağlıyor ise, F ye G etkilerine göre eşdeğerdir denir. Denk olarak, θ ve φ sırasıyla M ve N de verilen etkiler olsun. Eğer her $g \in G$ için aşağıdaki diyagram değişimli ise, F ye **eşdeğer dönüşümdür** denir [6].*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\theta_g"'] & N \arrow[d, "\varphi_g"] \\
M \arrow[r, "F"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Örnek 3.0.21. *G ve H Lie grup ve $F : G \to H$ bir Lie grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde,*

$$\theta_g(h) = F(g)\,h$$

şeklinde G' nin H' ya sol etkisini tanımlayabiliriz. θ' nın etki şartlarını sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\theta_e(h) &= F(e)\,h \\ &= h\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(h) &= F(g_1)\,(F(g_2)\,h) \\ &= (F(g_1)\,F(g_2))\,h \\ &= F(g_1 g_2)\,h \\ &= \theta_{g_1 g_2}(h)\end{aligned}$$

*dir. Ayrıca G-*etkisine *göre F eşdeğerdir. Çünkü*

$$\begin{aligned}\theta_g \circ F\left(g^{'}\right) &= F(g)\,F\left(g^{'}\right) \\ &= F\left(gg^{'}\right) \\ &= F \circ L_g\left(g^{'}\right)\end{aligned}$$

dir [6].

Teorem 3.0.9. *M ve N diferensiyellenebilir manifold ve G bir Lie grup olsun. $F : M \to N$' nin N' de diferensiyellenebilir G-*etkisi *ve M' deki geçişli G-*etkisine *göre eşdeğer olan bir diferensiyellenebilir dönüşüm olduğunu kabul edelim. Bu durumda F sabit ranka sahiptir [6].*

İspat. θ ve φ sırasıyla M ve N' nin G*-etkileri* ve $p_0 \in M$ olsun. Her $p \in M$ noktası için,

$$\theta_g(p_0) = p$$

olacak şekilde bir $g \in G$ noktası seçebiliriz.

$$\varphi_g \circ F = F \circ \theta_g$$

eşitliğinin diferensiyelini alırsak,

$$\varphi_{g_{*p}} \circ F_{*p} = F_{*p} \circ \theta_{g_{*p}}$$

olur.

$$\theta_{g*p} : T_{p_0}M \to T_pM$$

ve

$$\varphi_{g*p} : T_{F(p_0)}N \to T_{F(p)}N$$

lineer dönüşümleri izomorfizm olduğu için

$$F_{*p_0} : T_{p_0}M \to T_{F(p_0)}N$$

ve

$$F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$$

lineer dönüşümleri aynı ranka sahip olur. Diğer bir ifadeyle, herhangi bir p_0' daki rankıyla aynıdır. Dolayısıyla F sabit ranka sahiptir. □

Şimdi aşağıdaki önermenin ispatında kullanılacak olan bir lemmayı verelim.

Lemma 3.0.33. *İki topolojik uzay arasındaki $f : X \to Y$ düzgün, sürekli dönüşümü kapalıdır [10].*

İspat. $A \subseteq X$ kapalı altküme olsun ve $f(A)$' nın kapanışında bir y noktasını alalım. $f(a_n) \in f(A)$, y' ye yakınsasın. $f(a_n)$, $B \subset f(A)$ sınırlı altkümesi tarafından içerilir. Dolayısıyla f düzgün olduğundan, $a_n \subseteq f^{-1}(B) \cap A$ dır. Sonuç olarak (a_n), $a \in A$ limitli yakınsak bir altdiziye sahiptir ve f' nin sürekliliğinden dolayı bu $f(a) \in f(A)$ limitli $f(a_n)$' nin yakınsak bir altdizisini verir. $f(a_n)$, y noktasına yakınsadığından $y = f(a) \in f(A)$ olur. □

Önerme 3.0.15. *$\mu : G \times M \to M$ düzgün etkisinin yörüngesi kapalı bir altmanifolddur [10].*

İspat. Bir önceki lemmadan dolayı (μ, id) kapalıdır. Dolayısıyla $(\mu, id)(G, m) = G.m \times \{m\}$ dir ve $G.m$ kapalıdır. $\mu_m : G \to G.m$ dönüşümünün bir açık dönüşüm olduğunu göstereceğiz. μ_m, *G-eşdeğer* olduğu için $\mu_m(U) = U.m$, m' nin bir açık komşuluğu olacak şekilde e' nin bir U açık komşuluğunun var olduğunu gösterelim. Bunun için aksini kabul edelim. $g_n.m \in G.m - U.m$, m' ye yakınsayan bir dizidir. g_n, $g \in G_m$ limitine yakınsayan bir diziye sahiptir. Diğer yandan,

$$g_n.m \notin U.m = U.G_m.m$$

olduğu için, $g_n \notin U.G_m$ dir. $U.G_m$ açık olduğu için, $g \notin U.G_m$ dir. Bu da $g \in G_m$ olması ile çelişir.

Temel vektör alanlarının tam manifoldları için, $G.m$ başlangıç altmanifoldu ve $i : G.m \to G/G_m$ bire-bir immersiyondur. $i \circ p = \mu_m$ açık olduğu için i de açıktır ve i homeomorfizm olduğu için $G.m$, M' de altmanifolddur. $\square$

Tanım 3.0.50. *Bir G Lie grubunun* ***temsilcisi****, V vektör uzayı olacak şekilde $\phi : G \to Aut\,(V)$ homomorfizmidir [19].*

G' nin V' deki temsilcisi, (G, V) ya da basit bir şekilde V ile gösterilir.

Tanım 3.0.51. *(G, V) temsilci olsun. Eğer tüm $g \in G$' ler için $g.U \subset U$ ise, V' nin U altuzayına* ***değişmez*** *ya da* ***G-değişmez*** *denir [19].*

(G, V) temsilcisinin $\{o\}$ ve $\{v\}$ şeklinde en azından iki tane değişmez altuzayı vardır.

Tanım 3.0.52. *M bir G-*manifold *olsun. Eğer M manifoldundaki m' nin U açık komşuluğu değişmez ve bütün $n \in U$' lar için $F : G.m \to G.n$ eşdeğer dönüşüm ise, $G.m$ yörüngesine* ***temel yörünge*** *denir [10].*

Teorem 3.0.10. 1. *$F : G.m \to G.n$ eşdeğer dönüşümü örtendir.*

2. *$F : G.m \to G.n$ eşdeğer dönüşümü vardır $\iff$ bazı $b \in G$' ler için $G_m \subseteq bG_nb^{-1}$ dir [10].*

İspat. 1. $F\,(m) = b.n$ olsun. $z = g.n \in G.n$ keyfi noktası için,

$$\begin{aligned} z &= g.n \\ &= gb^{-1}b.n \\ &= gb^{-1}F\,(m) \\ &= F\left(gb^{-1}.m\right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $F : G.m \to G.n$ eşdeğer dönüşümü örten olur.

2. ($\Longrightarrow$): Bir G_m izotropi grubunda g elemanı alalım .

$$\begin{aligned} g \in G_m \quad &\Longrightarrow \quad g.m = m \\ &\Longrightarrow \quad g.F\,(m) = F\,(g.m) = F\,(m) \end{aligned}$$

ve $F(m) = bn$ için Lemma 3.0.32' den

$$gb.n = b.n \implies g \in G_{bn} = bG_n b^{-1}$$

dır. Dolayısıyla $G_m \subseteq bG_n b^{-1}$ olur.

$(\Longleftarrow)$: $F : G.m \to G.n$ dönüşümünü $F(g.m) = gb.n$ şeklinde tanımlayalım. Eğer

$$g_1.m = g_2.m, \text{ yani } g = g_2^{-1} g_1 \in G_m$$

ise,

$$g_1 b.n = g_2 b.n$$

ya da

$$g \in G_{bn} = bG_n b^{-1}$$

olur. Dolayısıyla $F : G.m \to G.n$ şeklinde F eşdeğer dönüşümü vardır.

□

Eşlenik sınıfları

G' nin kapalı altgrupları aşağıdaki bağıntı ile denklik sınıflarına ayrılır:

$$H \sim H' \iff \exists g \in G \ni H = gH' g^{-1}$$

H' nın denklik sınıfları (H) şeklinde gösterilir. İzotropi altgrupların eşlenik sınıfları $G : (G_m) = (G_{gm})$ etkisi altında değişmezdir. Dolayısıyla (G_m)' nin eşlenik sınıfları her bir $G.m$ yörüngesinden seçilebilir. (G_m)' ye m' de yörüngelerin izotropi tipi denir. Eğer iki yörünge aynı izotropi tipine sahip iseler, iki yörüngenin aynı tip olduğu söylenir.

Eğer G kompakt ise, altgrupların eşlenik sınıflarını şöyle tanımlayabiliriz:

$$(H) \leq \left(H'\right) \iff \exists K \in (H),\ K' \in \left(H'\right) \ni K \subseteq K'$$

Bu tanım kısaca şuna denktir:

$$(H) \leq \left(H'\right) \iff \exists g \in G \ni H \subset gH' g^{-1}$$

dir [10].

Lemma 3.0.34. *G bir kompakt Lie grup ve H G' nin kapalı altgrubu olsun. Bu takdirde*

$$gHg^{-1} \subseteq H \implies gHg^{-1} = H$$

dir[10].

İspat. $gHg^{-1} \subseteq H$, tüm $n \in \mathrm{N}'$ ler için $g^n H g^{-n}$ olmasını gerektirir. $A = \{g^n : n \in \mathrm{N}_0\}$ olsun. g^{-1}' in A' nın kapanışı tarafından ihtiva edildiğini göstereceğiz. İlk olarak kabul edelim ki e, $\bar{A}$' nın yığılma noktasıdır. e' nin her U açık komşuluğu için $n > 0$ olacak şekilde $g^n \in U$ vardır. Bu ise $g^{n-1} \in g^{-1}U \cap A$ olmasını gerektirir. $g^{-1}U$ kümeleri g^{-1}' in komşuluk tabanlarından oluştuğu için g^{-1}, A' nın yığılma noktasıdır. Dolayısıyla $g^{-1} \in \bar{A}$ dır.

Şimdi kabul edelim ki e, $\bar{A}$ diskrettir. G kompakt olduğu için A sonludur. Dolayısıyla bazı $n > 0$ için $g^n = e$ ve $g^{n-1} = g^{-1} \in A$ dır.

$conj : G \times G \to G$ sürekli ve H kapalı olduğundan,

$$conj\left(\bar{A}, H\right) \subseteq H$$

dır. Dolayısıyla $g^{-1}Hg \subseteq H$, $g^{-1}Hg = H$ olmasını sağlar. □

Tanım 3.0.53. *M bir G-*manifold *ve $m \in M$ olsun. Eğer $G.m$' nin U açık komşuluğu G-*değişmez *ve $S = r^{-1}(m)$ olacak şekildeki $r : U \to G.m$ dönüşümü diferensiyellenebilir eşdeğer geri çekme (retraction) ise, $S \subseteq M$ altkümesine m' de bir **iz** denir[10].*

Önerme 3.0.16. *M bir G-*manifold *ve $r : U \to G.m$ olacak şekilde $m \in M$ noktasında $S = r^{-1}(m)$ iz olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır:*

1. $m \in S$ *ve* $G_m.S \subseteq S$,

2. $g.S \cap S \neq \emptyset \implies g \in G_m$,

3. $G.S = \{g.s : g \in G,\ s \in S\} = U$ *[10].*

İspat. 1. $S = r^{-1}(m)$ ve $r(m) = m$ olduğundan, açıkça $m \in S$ dir. $G_m.S \subseteq S$

olduğunu göstermek için $s \in S$ ve $g \in G_m$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} r(g.s) &= g.r(s) \\ &= g.m \\ &= m \end{aligned}$$

olup buradan,

$$g.s \in r^{-1}(m) = S$$

elde edilir.

2.

$$\begin{aligned} g.S \cap S \neq \emptyset &\implies g.s \in S, \quad \text{bazı } s \in S\text{' ler için} \\ &\implies m = r(g.s) = g.r(s) = g.m \\ &\implies g \in G_m. \end{aligned}$$

3. r, U' da tanımlı ve U, G-*değişmez* olduğu için,

$$G.S = G.r^{-1}(m) \subseteq G.U = U$$

dir. Diğer taraftan $r(n) = g.m$ olacak şekilde $n \in U$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} r\left(g^{-1}.n\right) &= g^{-1}.r(n) \\ &= g^{-1}g.m \\ &= m \end{aligned}$$

olduğundan, $n = g(g^{-1}.n)$ ve $g^{-1}.n \in S$ dir. Dolayısıyla $n \in G.S$ olup $U \subseteq G.S$ olduğu görülür. Sonuç olarak G.S=U dur.

□

Sonuç 3.0.11. *M bir G-*manifold *ve S $m \in M$ noktasında bir iz olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır:*

1. S bir G_m-*manifolddur.*

2. Tüm $s \in S$' ler için $G_s \subseteq G_m$ dir.

3. Eğer $G.m$ temel yörünge, G_m kompakt ve m noktasındaki S izi yeterince küçük seçilirse, tüm $n \in S$' ler için $G_n = G_m$ olur.

4. Eğer S' deki iki $G_m.s_1$ ve $G_m.s_2$ G_m-*yörüngeleri* S' de G_m-*yörüngeler* olarak aynı yörünge tipine sahip iseler, $G.s_1$ ve $G.s_2$ M' de G-*yörüngeler* olarak aynı yörünge tipine sahiptir.

5. $S/G_m \cong G.S/G$, M/G yörünge uzayında $G.m$' nin açık komşuluğudur [10].

İspat.

1. S'nin bir G_m-*manifold* olduğu açıktır.

2. Bir G_n izotropi grubunda herhangi bir g noktası alalım.

$$\begin{aligned} g \in G_n \quad &\Longrightarrow \quad g.n = n \in S \\ &\Longrightarrow \quad g \in G_m \end{aligned}$$

olur. Buradan $G_s \subseteq G_m$ elde edilir.

3. (2)' den dolayı $G_n \subseteq G_m$ dir ve dolayısıyla G_n kompakttır. $G.m$, $n \in S$' lerin m' ye yakın değerleri için temel yörünge olduğundan dolayı G_m, G_n' nin altgruplarının eşleniğidir. Yani

$$G_n \subseteq G_m \subseteq g.G_n g^{-1}$$

dir. G_n kompakt olduğundan $G_n \subseteq g.G_n g^{-1}$, $G_n = g.G_n g^{-1}$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $G_n = G_m$ olup $G.n$ temel yörüngedir.

4. Her $s \in S$ için $(G_m)_s \subseteq G_s$ ve tersine (2)' den $G_s \subseteq G_m$ olduğundan $G_s \subseteq (G_m)_s$ olur. Buradan $(G_m)_s = G_s$ dir. Bu da $(G_m)_{s_1} = g\,(G_m)_{s_2}\,g^{-1}$, $G_{s_1} = gG_{s_2}g^{-1}$ olmasını gerektirir ve ayrıca G-*yörüngeler* aynı yörünge tipine sahiptirler.

5. $S/G_m \cong G.S/G$ izomorfizmi $G_m.s \mapsto G.s$ dönüşümü şeklinde verilir. $G.S = U$, M' de $G.m$' nin G-*değişmez* açık komşuluğu olduğu için $G.S/G$, M/G' de $G.m$' nin bir açık komşuluğudur.

$\square$

Teorem 3.0.11. *M bir G-*homojen uzay *ve p, $M^{'}$ nin bir noktası olsun.*

$$F\left(gG_p\right) = g.p$$

şeklinde tanımlanan

$$F : G/G_p \rightarrow M$$

dönüşümü eşdeğer diffeomorfizmdir [6].

İspat. $H = G_p$ olsun. $g_1H = g_2H$ olduğunu kabul edelim. Buradan $g_1^{-1}g_2 \in H$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} F\left(g_2H\right) &= g_2.p \\ &= g_1h.p \\ &= g_1.p \\ &= F\left(g_1H\right) \end{aligned}$$

dir ve F eşdeğerdir. Çünkü

$$\begin{aligned} F\left(g^{'}gH\right) &= \left(gg^{'}\right).p \\ &= g^{'}.F\left(gH\right) \end{aligned}$$

dir. F' nin bire-bir ve örten olduğunu gösterelim. Her q noktası için,

$$\begin{aligned} F\left(gH\right) &= g.p \\ &= q \end{aligned}$$

olup etki geçişli olduğundan bir $g \in G$ elemanı vardır. Diğer taraftan, eğer

$$F\left(g_1H\right) = F\left(g_2H\right)$$

ise,

$$g_1.p = g_2.p$$

dir. Bu da

$$g_1H = g_2H$$

olmasını gerektirir. Böylece F' nin bire-bir ve örten olduğunu göstermiş oluruz. F eşdeğer dönüşüm olduğu için sabit ranka sahiptir. Dolayısıyla F, bire-bir ve örten olduğundan bir diffeomorfizmdir. □

3.0.8 Yörünge Manifoldları

Tanım 3.0.54. *G, bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etki eden bir Lie grup olsun. M üzerinde bir R_G denklik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım.*

$$R_G = \{(g \cdot m, m) \in M \times M \mid g \in G, m \in M\}$$

Bu denklik bağıntısının denklik sınıfları M üzerindeki G-yörüngelerdir. M/R_G bö-lümüne M' nin ***yörünge uzayı*** *denir ve M/G ile gösterilir [5].*

Teorem 3.0.12. *G, bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:*

i) *R_G bağıntısı regülerdir,*

ii) *R_G, $M \times M$' nin bir kapalı altmanifoldudur [5].*

İspat. $(i) \implies (ii)$ olduğu açıktır. $(ii) \implies (i)$ olduğunu ispatlamak için $p_2 : R_G \to M$ nin bir submersiyon olduğunu göstermeliyiz.

$$\theta : G \times M \to M, \ \ (g, m) \mapsto (g.m, m)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Açıkça θ diferensiyellenebilirdir ve $M \times M$' deki görüntüsü R_G' ye eşittir. Dolayısıyla θ' yı $G \times M$' den R_G üzerine bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak gözönüne alabiliriz. Bu takdirde $p_2 \circ \theta = pr_2 : G \times M \to M$ dir. Böylece bu bileşke submersiyondur. θ örten olduğundan p_2 de bir submersiyon olmak zorundadır. □

Bu teoremin bir sonucu olarak, eğer R_G bir kapalı altmanifold ise M/G yörünge uzayı doğal bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir ve $p : M \to M/G$ doğal dönüşümü bir submersiyondur. Bu durumda grup etkisinin regüler olduğunu söyleriz ve M/G' ye M' nin ***yörünge manifoldu*** deriz [5].

Regüler bir etki için M' deki tüm *G-yörüngeler* M' nin kapalı altmanifoldlarıdır. Bu durumda Ω, M' de bir yörüngedir. $G \times \Omega \to \Omega$ indirgenmiş dönüşümü G' nin Ω üzerine bir diferensiyellenebilir etkisidir. Üstelik bu etki geçişlidir. Herhangi $g \in G$ için $\tau(g) : \Omega \to \Omega$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Bu, her $g \in G$ için

$boy_{g\cdot m}\Omega = boy_m\Omega$ olmasını gerektirir. Ayrıca $m \in \Omega$ için $\rho(m) : G \to \Omega$ yörünge dönüşümü bir örten subimmersiyondur.

Ayrıca $\theta : G \times M \to R_G$ dönüşümü bir örten diferensiyellenebilir dönüşümdür. $m \in M$ seçelim ve Ω, m' nin yörüngesi olsun. $j_m : G \to G \times M$ ile $g \in G$ için $j_m(g) = (g, m)$ diferensiyellenebilir dönüşümünü gösterelim. j_m' nin G' den $G \times M$' nin $G \times \{m\}$ kapalı altmanifoldu üzerine bir diffeomorfizm olduğu açıktır. Benzer şekilde $k_m : \Omega \to M \times M$ ile $n \in \Omega$ için $k_m(n) = (n, m)$ diferensiyellenebilir dönüşümünü gösterelim. Açıkça k_m, Ω' dan $\Omega \times \{m\}$ kapalı altmanifoldu üzerine bir diffeomorfizmdir. $\Omega \times \{m\} = R_G \cap (M \times \{m\})$ olduğundan onu R_G' nin bir kapalı altmanifoldu olarak düşünebiliriz. Bu durumda aşağıdaki değişimli diyagrama sahip oluruz.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho(m)"] \arrow[d, "j_m"'] & \Omega \arrow[d, "k_m"] \\ G \times M \arrow[r, "\theta"'] & M \times M \end{tikzcd}$$

Eğer $\theta : G \times M \to R_G$ dönüşümü bir diffeomorfizm ise G Lie grubunun M üzerine bir regüler diferensiyellenebilir etkisine *serbesttir(free)* deriz.

Yukarıdaki diyagram, eğer G' nin etkisi serbest ise tüm yörünge dönüşümlerinin G' den yörüngeler üzerine diffeomorfizm olmasını gerektirir. Ayrıca $m \in M$ için G_m izotropi grupları aşikardır.

Yan Küme Uzayları

G bir Lie grup ve H, G' nin bir Lie altgrubu olsun. Bu takdirde

$$\mu_l : H \times G \to G,$$
$$(h, g) \mapsto \mu_l(h, g) = hg$$

şeklinde H' nın G üzerine bir diferensiyellenebilir sol etkisi tanımlanır. Karşılık gelen $\theta_l : H \times G \to G \times G$ dönüşümü $\theta_l(h,g) = (hg, g)$ ile verilir. Bu dönüşüm

$$\alpha_l : G \times G \to G \times G$$
$$(h,g) \mapsto \alpha_l(h,g) = (hg, g)$$

dönüşümünün $H \times G$' ye kısıtlamasıdır ve açıkça diferensiyellenebilirdir. Ayrıca α_l' nin tersi $\beta_l : G \times G \to G \times G$, $\beta_l(h,g) = (hg^{-1}, g)$ dönüşümüdür. Dolayısıyla α_l bir diffeomorfizmdir. Bu, α_l' nin $H \times G$' ye kısıtlaması olan θ_l' nin de R_G görüntüsü üzerine bir diffeomorfizm olmasını gerektirir. Böylece R_G, $G \times G$' nin bir kapalı altmanifoldudur ve H' nın G üzerine bu etkisi regülerdir ve serbesttir. Bölüm ma-nifoldu $H \backslash G$ ile gösterilir ve H' ya göre G' nin ***sağ yan küme manifoldu*** denir [5].

Benzer şekilde $\mu_r : H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto gh^{-1}$ dönüşümü H' nın G üzerine bir sol diferensiyellenebilir etkisini tanımlar. Karşılık gelen $\theta_r : H \times G \to G \times G$ dönüşümü $\theta_r(h,g) = (gh^{-1}, g)$ ile verilir. Bu dönüşüm

$$\alpha_r : G \times G \to G \times G$$
$$(h,g) \mapsto (gh^{-1}, g)$$

dönüşümünün $H \times G$' ye kısıtlamasıdır. Bu dönüşüm açıkça diferensiyellenebilirdir ve tersi $\beta_r : G \times G \to G \times G$, $(h,g) \mapsto (gh, g)$ dönüşümüdür. Dolayısıyla α_r bir diffeomorfizmdir. Bu, α_r' nin $H \times G$' ye kısıtlaması olan θ_r' nin R_G görüntüsü üzerine bir diffeomorfizm olmasını gerektirir. Böylece R_G, $G \times G$' nin bir kapalı altmanifoldu olup H' nın G üzerine bu etkisi regüler ve serbesttir. Bölüm manifoldu G/H ile gösterilir ve H' ya göre G' nin ***sol yan küme manifoldu*** denir [5].

G, sağ dönüşüm aracılığıyla kendisi üzerine diferensiyellenebilir olarak etki ettiğin-den bir

$$G \times G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{p} H \backslash G$$

diferensiyellenebilir dönüşümünü oluşturabiliriz. Bu dönüşüm sağ yan kümeler üze-rinde sabittir. Yukarıdaki düşünceden dolayı bu dönüşüm bir $\mu_{H,r} : G \times H \backslash G \to H \backslash G$ diferensiyellenebilir dönüşümü indirger. Bu dönüşüm G' nin $H \backslash G$ üzerine bir diferensiyellenebilir etkisidir.

Benzer şekilde G, G/H sol yan küme manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eder.

Teorem 3.0.13. *H, bir G Lie grubunun bir Lie altgrubu olsun. G' de H' nın sol yan kümelerinin G/H kümesi, $p : G \to G/H$, $g \mapsto gH$ kanonik dönüşümü bir bölüm dönüşümü olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir. Ayrıca G/H üzerinde G grubunun (sol dönüşümler aracılığıyla) kanonik etkisi diferensiyellenebilirdir [17].*

G, bir M manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup ve $m \in M$ olsun. G' de m' nin G_m izotropi grubunu alalım. Bu takdirde $\rho(m) : G \to M$ yörünge dönüşümü sol G_m-yan kümeler üzerinde sabittir. Dolayısıyla $\rho(m)$, G/G_m sol yan küme manifoldunu tanımlamamıza imkan verir, yani aşağıdaki değişimli diyagrama sahibiz:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho(m)"] \arrow[d, "p"'] & M \\
G/G_m \arrow[ur, "\delta(m)"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rho(m)$, sabit ranka sahip olduğundan

$$\begin{aligned}
rank_g \rho(m) = rank_e \rho(m) &= boy\ im\,(T_e(\rho(m))) = boy\ T_e(G) - boy\ \ker T_e(\rho(m)) \\
&= boy\ T_e(G) - boy\ T_e(G_m) = boy\ G - boy\ G_m = boy\ G/G_m
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, p bir submersiyon olduğundan

$$rank_{p(g)} \delta(m) = rank_g \rho(m) = boy G/G_m$$

dir. p örten olduğundan bu, $\delta(m)$' nin bir subimmersiyon olmasını gerektirir. Diğer taraftan $\delta(m)$ bire-birdir. Böylece $\delta(m)$ bir immersiyon olmak zorundadır [5].

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 2000.

[2] Mimura M. and Toda H., *Topology of Lie Groups*, Am. Math. Soc., Rhode Island, 1991.

[3] Çallıalp F., *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen yayınevi, İstanbul, 2001.

[4] Hacısalihoğlu H. H., *Yüksel Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi, 1980.

[5] Milicic D., *Lectures on Lie Groups*, http:// www.math.purdue.edu/clharris/lie pdf, 2007.

[6] Lee J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer - Verlag, New York, 2002.

[7] Dupont H. A. E., *Quotient Manifolds by Group Actions*, University of Copenhagen, 2001.

[8] Ban Den V. P. E., *Lectures Notes on Lie Groups*, http:// www.math.uu.nl/people/ban/lecnot.html., 2003.

[9] Yıldız C., *Genel Topoloji*, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 2002.

[10] Michor W. P., *Isometric actions of Lie Groups and Invariants*, **Mathematics Subject Classification**, Austria, 2000.

[11] Gürsoy M. H., *"Lie örtü grupoidleri"*, PhD Thesis, İnönü University Turkey, 2007.

[12] Brown R., *Topology and Grupoids*, BookSurge LLC, Deganwy, United Kingdom, 2006.

[13] Lee J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Sprınger-Verlag, New York, 2000.

[14] Brickell F. and Clark S. R., *Differentiable Manifolds: An Introduction*, Van Nostrand, London, 1970.

[15] Warner W. F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[16] Sabuncuoğlu A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

[17] Gorbatsevich V. V., Onishchik L. A., Vinberg B. E., F*oundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[18] Martin D., *Manifold Theory An Introduction for Mathemetical Physicist*, Ellis Horwood, England, 1970.

[19] Arvanitoyeorgos A. *An Introduction to Lie Groups and The Geometry of Homogenous Spaces*, American Mathematical Society, USA, 2003.

[20] Pontrjagin L. S., *Topological Groups*, Translated from the Russian by Edna Lehmer, Oxford University Pres, London, 1946.

[21] Cartan E., *La théorie des groupes finis et continus et I' analysis situs*, **Mémoral des Sciences Mathematiques**, Vol.42, 1930.

[22] Palais R. S., *On the existence of slices for the non-compact Lie groups*, Ann of Math., 1961.

[23] Schwarz G. W., *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, **Topology 14**, (1975), 63-68.

[24] Sartori G., *A theorem on orbit structures of compact linear Lie groups*, **J. Math Phys**, 1983.

[25] Bourbaki N., *Topologie génerale*, Ch.3, 4. 3-éme ed. Hermann., Paris, 1960.

[26] Dao Van Tra, *On extensions of groups acting transitively on compact manifolds*, In Geom. Metody Zadachakh Algebry Anal., Russian, 1981.

[27] Hsiang W. C. and Hsiang W. Y., *Differentiable actions of compact connected classical groups*, **I. Am. J. Math**, 89, No.3, (1967), 705-786.

[28] Hsiang W. C. and Hsiang W. Y., *On the classification of transitive actions on Stiefel manifolds*, **Trans. Am. Math. Soc.**, 130, No.2, (1968), 322-336.

[29] Onishcik A. L., *On Lie groups, acting transitively on compact manifolds*, **Mat. Sb. Nov. Ser.**, 75, No.2, (1968), 255-263.