T.C.

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Kenan TAŞKIRAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2008

İçindekiler

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Lineer uzay, metrik uzay, normlu uzay, topolojik uzay, sürekli operatör ve kompaktlık gibi temel kavramlardan bahsedildi.

İkinci bölümde, kompakt olmayan ölçüyle ilgili temel bilgiler verildi. Simetrik Hausdorff ve simetrik olmayan Hausdorff uzaklıkları, Contor'un kesişme teoremi, bazı kompakt olmayan ölçü örneklerinden olan kompakt olmayan Kuratowski ve küre ölçüleri ile kompakt olmayan ölçünün temel özelliklerinden bahsedildi.

Üçüncü bölümde, lineer olmayan kuadratik Volterra integral denklemleri incelenerek kompakt olmayan ölçü ile birleştirilmiş bir teknik yardımıyla, bu denklemlerin $\mathbb{R}_+$'da tanımlı, sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$'de çözülebilirliği incelendi.

Ayrıca, bu çalışmada, bazı sonuçların daha iyi anlaşılabilmesini sağlayacak uygulamalara yer verildi.

ABSTRACT

The present thesis consists of three chapters.

In the first chapter of this thesis, some basic definitions and theorems were given to make other chapters understand easier. Basic concepts like linear space, metric space, normed space, topological space, continuous operator and compact set were given.

In the second chapter, basic knowledge about measures of non-compactness were given. Simetric Hausdorff and non-symmetric Hausdorff distance, Contor's intersection theorem, some examples of measures of non-compactness like Kuratowski and ball, the basic features of measures of non-compactness were given.

In the third chapter, nonlineer quadratic Volterra integral equations were investigated. It was shown that this equations are solvable in the space $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ which elements are continuous and bounded any functions on $\mathbb{R}_+$. The main tool used in this study is associated with the technique of measures of non-compactness.

Furthermore, some examples, which will make the basic consequence more understandable, were solved.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda danışmanlığımı üstlenen, bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayan, hiçbir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen değerli hocam, sayın Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Akademik çalışmaları ve bölümdeki görevlerinin yanısıra bu tezin hazırlanmasında ikinci bir danışman gibi görev üstlenen ve yardımlarını esirgemeyen Dr. İsmet ÖZDEMİR' e, sıcak ilgileri ile her konuda yardımcı olan Doç. Dr. Bilal ALTAY' a ve Doç. Dr. Celal ÇAKAN'a, devamlı destek ve teşvikte bulunan diğer arkadaşlarıma ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$**:** Reel sayılar cümlesi,

$\mathbb{R}_+$**:** $[0,\infty)$ aralığı,

$\mathbb{N}$**:** Doğal sayılar cümlesi,

$\mathbb{C}$**:** Kompleks sayılar cümlesi,

$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$**:** $\mathbb{R}_+$'da tanımlı, reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı,

$\sup$**:** Supremum,

$\inf$**:** İnfimum,

$\limsup$**:** Üst limit,

$\liminf$**:** Alt limit,

$D(T)$**:** T dönüşümünün tanım cümlesi,

$R(T)$**:** T dönüşümünün görüntü cümlesi,

M_E**:** E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi,

N_E**:** E'nin boştan farklı ve ön-kompakt alt kümelerinin ailesi,

$\overline{A}$**:** A kümesinin kapanışı,

dist (x,A)**:** x noktasının A kümesine uzaklığı,

$B(x,r)$**:** x merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$\overline{B}(x,r)$**:** x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

diam A**:** A kümesinin çapı,

$B(X,r)$**:** X küme merkezli r yarıçaplı yuvar,

conv X**:** X'i ihtiva eden konveks ve kapalı kümelerin en küçüğü.

GİRİŞ

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, uygulamalı matematik ve matematiksel fizikteki bir çok problemin dönüştüğü en önemli denklem tiplerindendir. Bu denklemler, matematiksel analizin günümüz dünya problemleri üzerine uygulanmasında da önemli bir yere sahiptir. İntegral denklem tabiri, ilk olarak 1888 yılında Bois Reymand [**9**] tarafından kullanılmış olmakla beraber, bu denklemlere ilk olarak 1782 yılında Laplace'ın lineer fark denklemleri ve integral deklemlerin çözümünde kullandığı,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\phi(y)dy$$

integral dönüşümünde rastlanmaktadır, [**9**].

İntegral denklemler, integral sınırlarına göre Fredholm ve Volterra olmak üzere iki tipten oluşmaktadırlar. Fredholm integral denkleminde integralin sınırları sabittir. İntegral sınırlarından birinin x değişkeni olmasıyla karekterize edilen Volterra tipi integral denklemlere ait çalışmalar ilk olarak 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçilerinden Vito Volterra tarafından yapılmıştır.

İntegral denklemler teorisi, birçok uygulama alanına sahiptir. Mesela, trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü,

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 u(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, 1]$$

formundaki lineer olmayan fonksiyonel integral denkleme dayanır.

Bu çalışmada, integral denklemlerin bir sınıfı olan lineer olmayan kuadratik Volterra tipi denklemleri inceleyeceğiz. Bu denklemlerin, $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı olan $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$'da çözülebilirliğini araştıracağız.

Bunu, kompakt olmayan ölçü ile birleştirilmiş bir tekniği kullanarak yapacağız. Ayrıca, kompakt olmayan ölçünün uygun seçilmesi halinde, bu çözümlerin, asimptotik kararlılık denilen bir özeliğe sahip olduğunu göreceğiz. Son zamanlarda, bazı integral denklemlerin çözülebilirliğine ilişkin yapılan birçok çalışmada bu teknik yaygın olarak kullanılmaktadır.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ile teoremler verildi.

1.1. Bazı Temel Kavramlar

TANIM 1.1.1. **(Lineer Uzay)**[**8**, syf. 69] Boş olmayan bir L cümlesi ve bir F cismi verilmiş olsun. Eğer $x, y \in L, \quad \lambda \in F$ için $+(x, y) = x + y$ ve $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ ile tanımlanan $+ : L \times L \to L, \quad \cdot : F \times L \to L$ fonksiyonları, her $x, y, z \in L$ ve $\lambda, \beta \in F$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlıyorsa, L cümlesine, F cismi üzerinde bir **lineer uzay** denir.

(a) $x + y = y + x$,
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(c) $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,
(d) $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır,
(e) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,
(f) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
(g) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,
(h) $1x = x$.

Lineer uzay tanımında geçen bu F cismine, lineer uzayın skaler cismi, F nin elemanlarına ise, skaler denir. Lineer uzay yerine vektör uzayı deyimi de kullanılır. Bu durumda, L nin elemanlarına genellikle vektör denir. θ bazen 0 ile de gösterilir. $+$ ve $\cdot$ işlemlerine kısaca lineer uzay işlemleri denir. Burada, (e) şartındaki $+$ sembolünün iki anlamda kullanıldığına dikkat edilmelidir. Birinci taraftaki $+$ işareti, F deki toplamayı; ikinci taraftaki ise, L deki toplamayı belirtmektedir. $F = \mathbb{R}$ olması halinde L'ye reel, $F = \mathbb{C}$ olması halinde ise L'ye kompleks lineer uzay denir. Burada,

θ ve $(-x) \in L$ elemanlarına, sırasıyla, L nin birim elemanı ve $x \in L$ nin toplama işlemine göre tersi denir. (h)' deki "1" ise L cisminin çarpma işlemine göre birim elemanıdır.

Tanım 1.1.2. **(Metrik Uzay)**[**11**, syf. 2] X, boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y, z \in X$ için;

(m_1) $d(x, y) \geq 0$

(m_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(m_3) $d(x, y) = d(y, x)$

(m_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartlarını sağlıyorsa, d'ye X üzerinde **metrik** ve (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

d fonksiyonu, $(m_1), (m_3)$ ve (m_4) aksiyomları ile birlikte

(m_2^*) $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

şartını sağlıyorsa d ye **yarı metrik**, (X, d) ikilisine de **yarı metrik uzay** denir.

Tanım 1.1.3. **(Normlu Lineer Uzay)**[**8**, syf. 103] X, bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya kısaca **normlu uzay** denir.

(a) $\|x\| \geq 0$,

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(c) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 1.1.4. **(Cauchy Dizisi)** (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ de bir dizi olsun. $m, n \to \infty$ iken; $\|x_m - x_n\| \to \infty$ ise (bir başka ifade ile verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda, $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

TANIM 1.1.5. **(Yakınsak Dizi)** (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ de bir dizi olsun. $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisine X'te **yakınsak dizi** denir.

TANIM 1.1.6. **(Tam Uzay)** X normlu lineer uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X normlu uzayına tamdır denir. (Buradaki tamlık, X'teki her (x_n) dizisi için $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ olduğunda, $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olması anlamındadır.) Tam olan $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayına **Banach Uzayı** denir.

TANIM 1.1.7. **(Operatör)**[**10**, syf. 123] X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin herbir elemanına Y'nin bir ve yanlız bir elemanını karşılık getiren bir kurala D'den Y'ye bir **operatör veya dönüşüm** denir. D cümlesinden Y cümlesine tanımlı T operatörünün x'e karşılık getirdiği eleman $T(x)$ ile gösterilir. T operatörünün $x \in D$'yi, $T(x) \in Y$'ye dönüştürdüğünü belirtmek için, $T : D \to Y$ gösterimi kullanılır. Bu durumda; D'ye, T operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(T)$ ile gösterilir.

$$R = R(T) = \{y \in Y : y = T(x), x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün görüntü kümesi denir. T operatörünün yaptığı bu işlem,

$$X \supset D(T) \xrightarrow{T} R(T) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca $T : X \to Y$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde,

$$D(T) \neq X \text{ veya } R(T) \neq Y$$

olabilir.

TANIM 1.1.8. **(Bir operatörün Bir Noktadaki Sürekliliği)** [**10**, syf. 125] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında, T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni x \in D(T)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken; $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$,

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$'dır.

Limit tanımına göre, $T : X \to Y$ operatörünün $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli olması için $x \to x_0$ iken $T(x) \to T(x_0)$ olması demektir.

Tanım 1.1.9. **(Sürekli Operatör)**[**10**, syf. 126] X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım 1.1.10. **(Sınırlı Operatör)**[**10**, syf. 127] X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $\forall x \in D(T)$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa T operatörü $D(T)$ üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D(T) = X$ ise, T operatörüne sadece **sınırlı operatör** denir.

Tanım 1.1.11. **(Lineer Operatör)**[**10**, syf. 126] X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X'in bir alt uzayı ise ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ise A operatörüne **lineer operatör** denir.

Teorem 1.1.1. [**10**, Teorem 3.2.3] *X ve Y iki normlu uzay, $T : X \to Y$ lineer operatörünün $D(T)$ üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır.*

Tanım 1.1.12. **(Kompakt Lineer Operatör veya Tamamen Sürekli Lineer Operatör)**[**10**, syf. 238] X ve Y Banach uzayları ve $A : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer A operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön-kompakt kümesine dönüştürüyorsa A'ya **kompakt lineer operatör veya tamamen sürekli lineer operatör** denir.

Tanım 1.1.13. [**10**, syf. 223] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında açık kümelerin bir ailesi $\mathbb{D} = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun. Eğer bir $E \subset X$ kümesi için $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ oluyorsa $\mathbb{D}$ ailesine E kümesinin bir **açık örtüsü** denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} D_\lambda$ ise $\mathbb{D}_0 = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$ ailesine E kümesinin **sonlu alt örtüsü** adı verilir. E kümesini örten $\mathbb{D}$ ailesinin her kümesinin çapı $\varepsilon > 0$'den büyük değilse $\mathbb{D}$ örtüsüne E kümesinin **ε-örtüsü** denir.

Tanım 1.1.14. **(Topolojik Yapı)**[**1**, syf. 23] X, bir küme ve τ da $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, τ ya X üzerinde bir **topoloji** (**topolojik yapı**) denir.
(t_1) $X, \emptyset \in \tau$
(t_2) τ da alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ ya aittir. Yani, $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \tau$ (I, herhangi bir indis cümlesi) için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.
(t_3) τ da alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir. Yani, $\forall (A_i)_{i\in J} \subset \tau$ (J, sonlu indis kümesi) için $\bigcap_{i\in J} A_i \in \tau$ dır. τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X,τ) ikilisine **topolojik uzay** denir. τ nın her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir **açık küme** denir.

Tanım 1.1.15. **(Kapalı Küme)**[**1**, syf. 24] X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre **kapalı küme** denir. Yani;

$$F \subset X \text{ kapalı} \Leftrightarrow F^c \in \tau$$

dır.

Tanım 1.1.16. **(Kümeler Arası Uzaklık)**[**1**, syf. 45] (X,d) bir metrik uzay A ve B de X'in boş olmayan iki altkümesi olsun.

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

sayısına A ile B arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 1.1.17. **(Bir Kümenin Çapı)**[**1**, syf. 46] (X,d) bir metrik uzay ve X'in boş olmayan bir altkümesi A olsun. $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ sayısına A **kümesinin çapı** denir. Eğer $\delta(A) < \infty$ ise A'ya **sınırlı**, $\delta(A) = \infty$ ise **sınırsız küme** denir. ($\delta(A)$ yerine, bazen diam(A) gösterimi de kullanılır.)

Tanım 1.1.18. **(Kapanış)**[**1**, syf. 66] X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine A'nın **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.19. **(Kompakt Küme)**[**10**, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ uzayının bir alt kümesi E olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X' de **kompakt küme** denir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X' te kompakt bir küme ise E'ye X'de bir **ön-kompakt** denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına kompakt (ön-kompakt) normlu uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.20. **(Dizisel Kompakt)**[**10**, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ uzayının bir alt kümesi E olsun. E içindeki her dizinin, limiti E'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa E kümesine, X'te **dizisel kompakt küme** denir. Eğer E'nin $\overline{E}$ kapanışı X'te dizisel kompakt küme ise E'ye, X'te **dizisel ön-kompakt** küme adı verilir.

Lemma 1.1.1. [**10**, syf. 225] $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayı ve* $E \subset X$ *verilsin.* E *kümesi* X*'te kompakt ise, bu küme* X*'te dizisel kompakt bir kümedir.*

Tanım 1.1.21. **(Tamamen Sınırlılık)**[**10**, syf. 225] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için E kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan $\varepsilon-$ örtüsü varsa E kümesine X'te **tamamen sınırlı** küme adı verilir.

Tamamen sınırlı bir kümenin sınırlı olduğu açıktır. Yani tamamen sınırlılık, sınırlılık şartından daha kuvvetlidir.

Teorem 1.1.2. [**10**, syf. 226] $(X, \|\cdot\|)$ *Banach uzayı ve* $E \subset X$ *kümesi verilmiş olsun.* E*'nin* X*'te ön kompakt olması için gerek ve yeter şart* E*'nin* X*'te tamamen sınırlı olmasıdır.*

Tanım 1.1.22. **(Kama)**[**6**, syf. 89] X, reel vektör uzayı olmak üzere, boştan farklı $P \subset X$ kümesi eğer $\forall x, y \in P$ ve $\alpha \in [0, \infty)$ için $x + y \in P$ ve $\alpha x \in P$ şartlarını sağlıyora P cümlesine **X'te bir kama** denir. P kaması için $P \cap (-P) = \{0\}$ ise P'ye **X'te bir koni** adı verilir.

Lemma 1.1.2. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *olmak üzere;*

$$maks\{a + b, c + d\} \leq maks\{a, c\} + maks\{b, d\}$$

dir.

Teorem 1.1.3. ***(Mazur'un Teoremi)***[**6**, syf. 184] *Eğer* X *kümesi bir Banach uzayı ve* K*'da* X*'in kompakt bir altkümesi ise* $convK$ *kompakttır.*

BÖLÜM 2

KOMPAKT OLMAYAN ÖLÇÜ

2.1. Kompakt Olmayan Ölçüye İlişkin Temel Kavramalar

Bu bölümde, kompakt olmayan ölçüyle ilgili temel bilgileri vereceğiz. Bu temel bilgileri verirken aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

E ile sonsuz boyutlu, standart normla tanımlanmış ve birim elemanı θ olan reel Banach uzayını göstereceğiz.

x merkezli r yarıçaplı açık yuvarı $B(x,r)$ ile kapalı yuvarı da $\bar{B}(x,r)$ ile göstereceğiz.

Kümelerdeki işlemler için de standart notasyonları kullanacağız. Bir A kümesinin kapanışını $\bar{A}$ ile A kümesinin çapını diam$A$ ve bir x noktasının A kümesine uzaklığını dist(x,A) ile göstereceğiz. Eğer X keyfi bir küme ise, $B(X,r)$ ile X merkezli r yarıçaplı bir yuvarı göstereceğiz. Yani;

$$\begin{aligned} B(X,r) = \bigcup_{x\in X} B(x,r) &= \{y \in E : \mathrm{dist}(y,X) < r\} \\ &= \{y \in E : \inf\{d(x,y) : x \in X\} < r\} \end{aligned}$$

dir. $B(X,r)$,

$$\begin{aligned} B(X,r) = \bigcup_{x\in X} B(x,r) &= \{y \in E : \mathrm{dist}(y,X) < r\} \\ &= X + B(\theta,r) = X + rB(\theta,1) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde de yazılabilir.

Kümeler üzerinde tanımlı lineer işlemler,

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

$$aX = \{ax : x \in X\}, a \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlıdır.

M_E ile E'nin boştan farklı ve sınırlı tüm alt kümelerinin ailesini göstereceğiz. Bu aile, kümeler üzerinde tanımlı lineer işlemlere göre kapalı olup koni yapısına sahiptir.

$X, Y \in M_E$ olmak üzere;

$$d(X,Y) = \inf\{r : X \subset B(Y,r)\}$$

$$D(X,Y) = \text{maks}\{d(X,Y), d(Y,X)\}$$

uzaklıklarına, sırasıyla, X ve Y arasındaki **simetrik olmayan Hausdorff** ve **simetrik Hausdorff uzaklıkları** denir. Dikkat edelim ki $Y \notin M_E$ olsa bile $d(X,Y)$ iyi tanımlıdır. Dolayısıyla bu sembolü, sınırsız Y cümleleri için de kullanabiliriz.

D, M_E üzerinde bir yarı metriktir. Şimdi, bunu görmeye çalışalım:

$$\begin{aligned}
(1)\quad D(X,X) &= \text{maks}\{d(X,X), d(X,X)\} \\
&= d(X,X) = \inf\{r : X \subset B(X,r)\} = 0 \\
(2)\quad D(X,Y) &= \text{maks}\{d(X,Y), d(Y,X)\} \\
&= \text{maks}\{d(Y,X), d(X,Y)\} = D(Y,X) \\
(3)\quad D(X,Z) &= \text{maks}\{d(X,Z), d(Z,X)\} \\
&\leq \text{maks}\{d(X,Y) + d(Y,Z), d(Z,Y) + d(Y,X)\} \\
&= \text{maks}\{d(X,Y) + d(Y,Z), d(Y,X) + d(Z,Y)\} \\
&\leq \text{maks}\{d(X,Y), d(Y,X)\} + \text{maks}\{d(Y,Z), d(Z,Y)\} \\
&= D(X,Y) + D(Y,Z)
\end{aligned}$$

olur. Böylece D' nin M_E üzerinde bir yarı metrik olduğu anlaşılır. Aynı D, M_E'nin kapalı tüm kümelerinin ailesi olan M_E^C üzerinde tam metriktir.

Benzer şekilde N_E ile kapanışı kompakt olan boştan farklı E'nin tüm alt kümelerinin ailesini ve N^C ile de, tüm kompakt kümelerin ailesini göstereceğiz. (N_C, D) metrik uzayı (M^C, D)'nin kapalı bir alt uzayıdır. Ayrıca, N ve N^C aileleri lineer işlemlere göre kapalı olup koni yapısına sahiptir.

Şimdi, daha sonra kullanacağımız diğer sınırlı küme aileleri ile ilgili notasyonları verelim:

N^0 ile boştan farklı, sonlu tüm kümelerin ailesini,

N^{loc} ile lokal ön kompakt olan kümelerin ailesini,

M^{conv}, N^{conv} ile de sırasıyla, M ve N'nin konveks tüm kümelerinin alt ailesini göstereceğiz.

$\mathrm{dist}(X, \mathcal{Z})$ ile X kümesinin (Hausdorff anlamında) $\mathcal{Z}$ ailesine olan uzaklığını göstereceğiz.

$$\mathrm{dist}(X, \mathcal{Z}) = \inf\{D(X, Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$$

$\mathrm{dist}(X, \mathcal{Z})$ yerine $D(X, \mathcal{Z})$ ve simetrik olmayan uzaklık yerine de $d(X, \mathcal{Z})$ gösterimlerini kullanacağız.

$$d(X, \mathcal{Z}) = \inf\{d(X, Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$$

Herhangi bir $X \in M$ için X konveks kapanışını $\mathrm{conv}X$ (X'i ihtiva eden konveks ve kapalı kümelerin en küçüğü) ile göstereceğiz. Açık olarak, $\mathrm{diam}X$=$\mathrm{diamconv}X$'tir. Mazur Teoremine göre, $X \in N$ ise $\mathrm{conv}X \in N^c$ dir.

conv işlemi, Hausdorff yarı metriğine göre daralma olup, herhangi bir X, Y için;

$$D(\mathrm{conv}X, \mathrm{conv}Y) \leq D(X, Y)$$

tir.

$(E_1, \|\|_1)$, $(E_2, \|\|_2)$,..., $(E_n, \|\|_n)$ Banach uzaylarının kartezyen çarpım uzayı olan $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$'deki norm olarak,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \mathrm{maks}\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, ..., \|x_n\|_n\}$$

normunu kullanacağız.

2.2. Kompakt Olmayan Ölçü ve Çeşitleri

Kabul edelim ki (M, ϱ) tam metrik uzay ve X, M'nin sınırlı bir alt kümesi olsun.

$$\begin{aligned}\alpha(X) &= \inf\{\varepsilon > 0 : X, \text{çapı } \varepsilon\text{'dan küçük sonlu sayıda küme ile örtüleblilir}\} \\ &= \inf\{\varepsilon : X\text{'in sonlu bir } \varepsilon - \text{örtüsü vardır}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı α fonksiyonuna, **kompakt olmayan Kuratowski** ölçüsü adı verilir.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir, [**3**, syf. 4].

(a) $\alpha(X) = 0 \Leftrightarrow \overline{X}$ kompakttır. (Yani; X kümesi ön-kompakttır.)

(b) $\alpha(X) = \alpha(\overline{X})$ (Kapanış altında değişmezlik)

(c) $X \subset Y \Rightarrow \alpha(X) \leq \alpha(Y)$ (Monotonluk)

(d) $\alpha(X \cup Y) = \text{maks}\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$

(e) $\alpha(X \cap Y) \leq \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$

Bu sonuçlar, Kuratowski tarafından, Cantor'un çok iyi bilinen ve aşağıda verilen genelleştirilmiş kesişme teoreminin ispatı için kullanıldı.

(f) Eğer $(X_n)_{n=1,2,3,...}$ M'nin boştan farklı, azalan, kapalı ve sınırlı cümlelerin bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0$ olsun. O zaman $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_\infty$ boştan farklı ve kompakttır.

İSPAT. İspat için, $x_i \in X_i, i = 1, 2, ...$ olacak şekildeki keyfi $(X_n)_{n=1,2,3,...}$ dizisini alalım. Şimdi, azalan dizinin alt kümelerini,

$$\widetilde{X_k} = \{x_i : i \geq k\}$$

olarak tanımlayalım. Burada,

$$(X_n)_{n=1,2,...} = \{X_1, X_2, ..., X_k, X_{k+1}, ...\}$$

olduğundan açık olarak;

$$\widetilde{X_k} = \{x_k, x_{k+1}, ...\} \subset X_k$$

dır. Yani; $(X_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ azalan dizilerin kümesi olduğundan, X_k kümesi kendisinden sonra gelen kümelerdeki her elemanı kapsar. $\widetilde{X_k}$, $i \geq k$ indisli kümelerden elemanlar seçilerek oluşturulduğundan, $\widetilde{X_k}$ kümesi X_k'nın bir alt kümesidir. Bunların yanısıra, (c)'den,

$$\alpha(\widetilde{X_k}) \leq \alpha(X_k)$$

yazılabilir. Burada $k \to \infty$ için limite geçilirse,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\widetilde{X_k}) \leq \lim_{k\to\infty} \alpha(X_k)$$

olacağından hipotezden $\lim_{k\to\infty} \alpha(\widetilde{X_k}) = 0$ elde edilir.

$(a), (c)$ ve (d)'nin kullanılmasıyla,

$$\alpha(\widetilde{X_1}) = \alpha(\widetilde{X_k}) \leq \alpha(X_k) \tag{2.2.1}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. (2.2.1) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\widetilde{X_1}) \leq \lim_{k\to\infty} \alpha(X_k)$$

olup hipotezden $\alpha(\widetilde{X_1}) = 0$ bulunur. $\alpha(\widetilde{X_1}) = 0$ olduğundan (a)'dan $\widetilde{X_1} = (x_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi ön-kompakttır. X_n'ler kapalı olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_\infty$ kümesi, dizilerin tüm limit noktalarını kapsar. X_∞'un tanımından $X_\infty \subset X_n$ ve (c)'den,

$$\alpha(X_\infty) \leq \alpha(X_n) \tag{2.2.2}$$

olup, $n \to \infty$ için (2.2.2) eşitsizliğinde limite geçilirse, $\alpha(X_\infty) = 0$ elde edilir. $\alpha(X_\infty) = 0$ ise, (a)'dan $\overline{X_\infty}$ kompakttır. Hipotezden, $\overline{X_\infty} = X_\infty$ (kapalı kümelerin sonsuz kesişimi kapalıdır ve dolayısıyla kapalı bir kümenin kapanışı kendisine eşit olur) olup, buradan, X_∞ kümesinin kompakt olduğu sonucuna varılır. □

Eğer $(E, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ise, $\alpha(X)$ fonksiyonu lineer yapıdan dolayı bazı ek özeliklere de sahiptir. Mesela;

(g) $\alpha(X+Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y)$

(h) $\alpha(cX) = |c|\alpha(X),\ c \in \mathbb{R}$

(i) $\alpha(\mathrm{conv}X) = \alpha(X)$

dir, [**3**, syf. 5].

(g) ve (h)'nin geçerliliği görülebilir. (i)'nin ispatı ise bazı tekniklerin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

İSPAT. (i) $B \subset \text{conv}(B)$ olduğundan $\alpha(B) \leq \alpha(\text{conv}(B))$ olduğu, (c) özeliğinden açıktır. Şimdi, $\alpha(\text{conv}(B)) \leq \alpha(B)$ olduğunu görelim. $\forall \varepsilon > 0$ için B'nin, $\text{diam}(B_i) \leq \alpha(B) + \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., n$ olacak şekilde bir $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ sonlu örtüsü mevcuttur. E, Banach uzayı olduğundan $\text{diam}(B) = \text{diam}(\text{conv}B)$ olup, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ için B_i'ler konveks kabul edilebilir.

$$\sigma = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

olmak üzere $i = 1, 2, ..., n$ ve $A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i,\ \lambda \in \sigma$ alalım. Kompakt olmayan Kuratowski ölçüsünün özeliklerinden ve $\alpha(B_i) \leq \text{diam}(B_i)$ eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\alpha(A(\lambda)) &= \alpha(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_n B_n) \\
&\leq \lambda_1 \alpha(B_1) + \lambda_2 \alpha(B_2) + \cdots + \lambda_n \alpha(B_n) \\
&\leq \lambda_1 \text{diam}(B_1) + \lambda_2 \text{diam}(B_2) + \cdots + \lambda_n \text{diam}(B_n) \\
&\leq \lambda_1 (\alpha(B) + \varepsilon) + \lambda_2 (\alpha(B) + \varepsilon) + \cdots + \lambda_n (\alpha(B) + \varepsilon) \\
&= (\alpha(B) + \varepsilon)(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

olup, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ olduğundan, (2.2.3)'ten; $\alpha(A(\lambda)) = \alpha(B) + \varepsilon$ olur.

Şimdi, $\bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim:

$z = tx + (1-t)y$ ve $\eta = t\lambda + (1-t)\mu$ alalım. $0 \leq t \leq 1$ ve $x \in A(\lambda), y \in A(\mu)$ iken; $z \in A(\eta)$ ise ispat tamamdır.

Şimdi de ispatın devamında kullanacağımız η'nın σ'ya ait olduğunu görelim:

$$\begin{aligned}
\eta &= t\lambda + (1-t)\mu \\
&= t(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) + (1-t)(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \\
&= (t\lambda_1 + (1-t)\mu_1, t\lambda_2 + (1-t)\mu_2, \ldots, t\lambda_n + (1-t)\mu_n) \\
&= (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n &= t\lambda_1+(1-t)\mu_1+t\lambda_2+(1-t)\mu_2+\cdots+t\lambda_n+(1-t)\mu_n\\ &= t(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+(1-t)(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\\ &= t+(1-t)\\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Bu ise $\eta\in\sigma$ olduğunu gösterir. $\forall i=1,2,...,n$ için $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\sigma$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\sigma$ ve $x_i,y_i\in B_i$ olmak üzere; $x=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$ ve $y=\sum_{i=1}^n\mu_i y_i$ alındığında,

$$\begin{aligned}z &= tx+(1-t)y\\ &= t\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i+(1-t)\sum_{i=1}^n\mu_i y_i\\ &= t\lambda_1x_1+(1-t)\mu_1y_1+t\lambda_2x_2+(1-t)\mu_2y_2+\cdots+t\lambda_nx_n+(1-t)\mu_ny_n\\ &= t\lambda_1x_1+[t\lambda_1+(1-t)\mu_1-t\lambda_1]y_1+\cdots+t\lambda_nx_n+[t\lambda_n+(1-t)\mu_n-t\lambda_n]y_n\end{aligned}$$

olup, $\eta_i=t\lambda_i+(1-t)\mu_i$ alınırsa, son eşitlikten;

$$\begin{aligned}z &= t\lambda_1x_1+(\eta_1-t\lambda_1)y_1+\cdots+t\lambda_nx_n+(\eta_n-t\lambda_n)y_n\\ &= (t\lambda_1+(1-t)\mu_1)\left[\frac{t\lambda_1x_1}{\eta_1}+\left(1-\frac{t\lambda_1}{\eta_1}\right)y_1\right]+\cdots+\\ &\quad (t\lambda_n+(1-t)\mu_n)\left[\frac{t\lambda_nx_n}{\eta_n}+\left(1-\frac{t\lambda_n}{\eta_n}\right)y_n\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $p_i=t\lambda_i/\eta_i$ olarak tanımlanırsa, eşitlik,

$$\begin{aligned}z &= \eta_1(x_1p_1+(1-p_1)y_1)+\eta_2(x_2p_2+(1-p_2)y_2)+...+\eta_n(x_np_n+(1-p_n)y_n)\\ &= \eta_1z_1+\eta_2z_2+\cdots+\eta_nz_n\end{aligned}$$

halini alır. B_i'ler konveks, $z_i\in B_i$ ve $\eta\in\sigma$ olduğundan, $z\in A(\eta)$ dir. Şimdi (i) nin ispatını verelim: $B\subset\bigcup_{=1}^n B_i\subset\bigcup_{\lambda\in\sigma}A(\lambda)$ ve $\bigcup_{\lambda\in\sigma}A(\lambda)$ konveks olduğundan

$\text{conv}(B) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$ olur. σ kümesi kompakt olduğundan verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall \lambda \in \sigma$ için;

$$\min\{\|\lambda - \lambda^{(i)}\|_1 : i = 1, 2, ..., m\} < \frac{\varepsilon}{M}$$

olacak şekilde sonlu sayıda $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, ..., \lambda^{(m)}$ nokta bulunabilir. Burada,

$$M = \sup\{\|x\| : x \in B_i, i = 1, 2, ..., n\} < \infty$$

olarak tanımlanmaktadır. Şu halde;

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ ve } x \in \bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$$

olmak üzere; öyle bir $j \in \{1, 2, ..., m\}$ vardır ki $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_i^j| < \varepsilon / M$ yazılabilir.

Eğer $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j x_i$ alınırsa,

$$\|x - \overline{x}\| \leq \sum_{i}^{n} |\lambda_i - \lambda_i^j| \|x_i\| < \varepsilon$$

ve böylece,

$$\text{conv}(B) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (A(\lambda^i) + \varepsilon \overline{B}(0, 1))$$

olur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} \alpha(\text{conv}(B)) &\leq \text{maks}_i\{\alpha(A(\lambda^{(i)})) + \alpha(\varepsilon \overline{B}(0, 1))\} \\ &\leq \alpha(B) + \varepsilon + 2\varepsilon \end{aligned}$$

olup ε keyfi olduğundan,

$$\alpha(\text{conv}(B)) \leq \alpha(B)$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. □

Diğer bir özelik ise, $(a), (c), (d), (i)$ özeliklerinden ve

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X \subset \text{conv}\,(hX \cup \{\theta\})$$

kapsamasından elde edilen

(j) $\alpha\left(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right) = h\alpha(X)$ eşitliğidir.

Şimdi, (j) özeliğinin ispatını verelim:

İSPAT. (j)

$$\bigcup_{0\leq\lambda\leq h} \lambda X \subset \operatorname{conv}(hX \cup \{\theta\})$$

olduğundan, sonlu bir kümenin kompakt olmayan Kuratowski ölçüsünün sıfır olacağını da aklımızda tutarak (c)'den;

$$\begin{aligned}\alpha\left(\bigcup_{0\leq\lambda\leq h} \lambda X\right) &\leq \alpha\left(\operatorname{conv}(hX \cup \{\theta\})\right) \\ &= \alpha\left(hX \cup \{\theta\}\right) \ \ ((i) \text{ özeliğinden }) \\ &= \text{maks}\{\alpha(hX), \alpha(\{\theta\})\} \ \ ((d) \text{ özeliğinden }) \\ &= \alpha(hX) \ \ (\alpha(\{\theta\}) = 0 \text{ dır .}) \\ &= h\alpha(X)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin tersi de benzer şekilde gösterilebilir böylece ispat tamamlanır. □

Yukarıda verilen özelikler, $\alpha(X)$'i hesap etmek için yeterli olmamaktadır. Genellikle $\alpha(X)$'in gerçek değerini hesaplamak zordur. Sonsuz boyutlu Banach uzayında $\alpha(B(\theta, 1)) = 2$ eşitliğinin gösterilmesi bile bazı önemli yöntemlerin kullanılmasını gerektirmektedir.

Diğer bir kompakt olmayan ölçü ise birçok durumda daha kullanışlı ve faydalı olan **küre (ball) ölçüsüdür**. Bu ölçü,

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X, \text{ yarıçapı } \varepsilon\text{'dan küçük sonlu sayıda küre ile örtülebilir}\}$$

şekinde tanımlıdır.

Bu ölçü Markus, Gohberg, Goldenstein, Sadowskii, Goebel ve Nussbaum tarafından kullanıldı, [**3**].

Örten kürelerin merkezlerinin X'e ait olması gerekmediğinden $\chi(X)$,

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X, M\text{'nin içinde } \varepsilon\text{-örtüsüne sahiptir}\}$$

şeklinde de verilebilir.

Bu fonksiyon, $(a)-(j)$ ile verilen tüm özeliklere sahiptir. Bu özeliklerin bu fonksiyon bakımından ispatları, önceki ispatlara göre daha kolaydır. Ayrıca, χ fonksiyonu Hausdorff uzaklığı bakımından tanımlanabilir. Dolayısıyla bu fonksiyona, **kompakt olmayan Hausdorff ölçüsü** de denilmektedir. χ ile Hausdorff uzaklığı arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2.2.1.

$$\chi(X) = D(X, N) = d(X, N) = D(X, N^0) = d(X, N^{loc}) = d(X, N^0)$$

eşitlikleri geçerlidir, [**3**, syf. 7].

Sonsuz boyutlu Banach uzaylarında $\chi\left(B(\theta, 1)\right)$'i bulmak, $\alpha\left(B(\theta, 1)\right)$'e nazaran daha kolaydır. Şimdi $\chi(B(\theta, 1)) = 1$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2.2.2. [**7**, syf. 80] *Eğer X normlu uzayında*

$$M = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

kapalı birim yuvarı kompakt ise, X sonlu boyutludur.

İspat. Açık olarak, $\chi(B(\theta, 1)) \leq 1$ dir. Kabul edelim ki $\chi(B(\theta, 1)) = r < 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını, $\varepsilon + r < 1$ olacak şekilde seçelim. $x_1, x_2, ..., x_m, X$'teki noktalar olmak üzere;

$$B(\theta, 1) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, (r+\varepsilon)) = \bigcup_{k=1}^{m} (x_k + (r+\varepsilon)B(\theta, 1)) \tag{2.2.4}$$

yazılabilir. (2.2.4) bağıntısında, (c) özeliğinden ve (2.1.1)'den;

$$r = \chi(B(\theta, 1)) \leq (r+\varepsilon)\chi(B(\theta, 1)) = r(r+\varepsilon)$$

olur ki buradan,

$$r - r(r+\varepsilon) \leq 0 \Rightarrow r\left[1 - (r+\varepsilon)\right] \leq 0 \tag{2.2.5}$$

ve böylece (2.2.5)'in tek çözümü $r = 0$ dır. Bu ise, $\chi(B(\theta,1)) = 0$ olması ve şu halde $B(\theta,1)$'in ön-kompakt yani $\overline{B}(\theta,1)$'in kompakt olması demektir. Halbuki bu, Teorem 2.2.2'den, uzayın sonsuz boyutlu olması ile çelişir. Dolayısıyla $\chi(B(\theta,1)) = 1$ olmalıdır. $\square$

α ve χ ölçüleri arasında,

$$\chi(X) \leq \alpha(X) \leq 2\chi(X) \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bazı Banach uzayları iyi bir geometrik yapıya sahip olduğundan, yukarıdaki (2.2.6) eşitsizliği daha da kuvvetlenir. Örneğin; Hilbert uzayında bu eşitsizlik,

$$\sqrt{2}\chi(X) \leq \alpha(X) \leq 2\chi(X)$$

dir.

Kompakt olmayan farklı ölçü çeşitleri de vardır. Bunlar, Istretescu ve Dones tarafından incelenmiştir, [**3**]. Bu ölçüler, $(a) - (j)$ ile verilen bazı özelikleri sağlamamaktadır. Buraya kadar olan tartışmalardan, kompakt olmayan ölçülerle çalışmanın en iyi yolu, aksiyomatik yaklaşımlar kullanmaktır. Bu yolu ilk seçen, Sadovskii'dir, [**3**]. Örneğin $(a) - (j)$ veya bunlara benzer bazı özelikleri, aksiyomlar olarak kabul edebiliriz.

Aksiyomlar, doğal sonuçları ihtiva etmek ve uygulama için uygun özelikler taşımak şeklinde iki genelliği sağlamalıdır.

Şimdi, çok genel olmayan fakat ihtiyaca cevap veren, uygun, kullanışlı, diferensiyel ve integral denklemler teorisinde kullanılabilecek bir aksiyom sistemi vereceğiz:

2.3. Kompakt Olmayan Ölçüye Aksiyomatik Yaklaşımlar

Bu kısımdan itibaren E Banach uzayında çalışacağız.

Aksiyom sistemimiz iki bölümden oluşacaktır. Birincisi, ölçünün çekirdeğini tanımlamaktır.

TANIM 2.3.1. [**3**, syf. 9] Eğer boştan farklı $P \subset N_E$ ailesi aşağıdaki şartları sağlarsa, P'ye, kompakt olmayan **ölçünün çekirdeği** denir.

(1) $X \in P \Rightarrow \overline{X} \in P$

(2) $X \in P, Y \subset X, \; Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in P$

(3) $X, Y \in P \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in P, \quad \lambda \in [0,1]$

(4) $X \in P \Rightarrow$ conv $X \in P$

(5) Hausdorff topolojisine göre P^c, M^c'nin içinde kapalıdır. Burada P^c, P'deki kompakt kümelerin ailesidir.

TANIM 2.3.2. [**3**, syf. 9] Eğer $\mu : M_E \to [0, \infty)$ foksiyonu, P çekirdeği ile aşağıdaki şartları sağlarsa μ'ye **kompakt olmayan ölçü** adı verilir.

(1) $\mu(X) = 0 \Leftrightarrow X \in P$

(2) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$

(3) $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$

(4) $\mu($ conv $X) = \mu(X)$

(5) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$; $\lambda \in [0,1]$

(6) Eğer $X_n \in M_E, X_n = \overline{X_n}, \quad X_{n+1} \subset X_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ ve $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ ise, bu taktirde; $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$ dır.

$P = N$ olan ölçülere **tam ölçü** denir. α ve χ ölçüleri tam ölçülerdir. $P \neq N$ olan en basit ölçü örnekleri, $\|X\|$ (burada $\|X\| = \sup\{\|x\| : x \in X\}$ ile tanımlanmaktadır) ve diam$X$'tir. $\|X\|$'in çekirdeği $\{\theta\}$ ve diam$X$' in çekirdeği ise tek nokta kümelerinin ailesidir.

TEOREM 2.3.1. [**3**, syf. 10] *Herhangi bir P çekirdeği için*

$$\mu(X) = D(X, P)$$

ölçüsü, P çekirdeğine sahip kompakt olmayan bir ölçüdür.

Ölçülerin sınıfı, çekirdeğin içeriği verilmeden de aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

TANIM 2.3.3. [**3**, syf. 10] Eğer $\mu : M_E \to [0, \infty)$ fonksiyonu, Tanım 2.3.2'deki $(2) - (6)$ özeliklerini sağlasın. Bu taktirde;

$$P = \{X \in M : \mu(X) = 0\}$$

eşitliğiyle verilen P kümesi, "boştan farklı, $P \subset N$ ve P^c, M^c'nin içinde kapalıdır," özelliklerine de sahipse, μ'ye **kompakt olmayan ölçü** denir.

Bazı uygulamalarda, (6)'ya denk olan ve aşağıda verilen $(6')$'nü kullanmak daha elverişlidir.

$(6')$ Eğer $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ ailesi boştan farklı, kapalı, sınırlı kümelerin bir ailesi ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\lambda \in I$ iken $\mu(X_\lambda) < \varepsilon$ ise

$$X_\infty = \bigcap_{\lambda \in I} X_\lambda \neq \emptyset \text{ ve } X_\infty \in P$$

olur.

LEMMA 2.3.1. *$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) = 0$ özeliğine sahip herhangi $\{x_n\}$ dizisi en az bir yığılma noktasına sahiptir. Bu da $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}} \neq \emptyset$ olmasını gerektirir,* [**3**, syf. 11].

Bir ölçünün çekirdeği, kendini oluşturan kümelerin birleşimine göre kapalı olmayabilir. Örneğin; $\mu(X) = \text{diam}X$, bu eşitliği gösterir.

$$(7) \quad \mu(X \cup Y) = \text{maks}\{\mu(X), \mu(Y)\}$$

eşitliği genellikle sağlanmaz. Genel olarak;

$$\text{maks}\{\mu(X), \mu(Y)\} \leq \mu(X \cup Y)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu özeliği sağlayan μ ölçüsüne, **maksimum özeliğine sahiptir** denir.

Herhangi bir $X \in M$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(8) \quad \mu(\lambda X) = |\lambda| \mu(X)$$

özeliğine sahip ölçüye, **homojendir** denir. Bu ölçü,

$$(9) \quad \mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$$

özeliğini de sağlıyorsa, ölçüye alt toplamsaldır denir.

Bir μ ölçüsü (8) ve (9) özeliklerini sağlarsa, μ'ye '**altlineer**'dir denir. Altliner bir ölçünün çekirdeği, toplama ve reel bir skalarla çarpma işlemlerine göre kapalı olmalıdır.

TANIM 2.3.4. μ ölçüsü tam ölçü ($\ker(\mu) = N$), altlineer ve maksimum özeliğine sahipse, bu ölçüye '**regülerdir**' denir, [**3**, syf. 11].

α ve χ ölçüleri regüler ölçülerdir. Her bir regüler ölçü, χ ölçüsüyle karşılaştırılabilir.

TEOREM 2.3.2. *Eğer μ, regüler bir ölçü ise,*

$$\mu(X) \leq \mu(B(\theta,1))\chi(X)$$

dir, [**3**, syf. 12].

İSPAT. $\varepsilon > 0$ alalım. X kümesini $r < \chi(X) + \varepsilon$ olacak şekilde sonlu sayıda $B(a_k, r)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ yuvarları ile örtelim. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\mu(X) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, r)\right) &= \text{maks}\left\{\mu(B(a_k, r)) : k = 1, 2, ..., n\right\} \\
&= \mu(B(a_k, r)) \\
&= \mu(a_k) + \mu(rB(\theta, 1)) \\
&= r\mu(B(\theta, 1)) \\
&\leq (\chi(X) + \varepsilon)\mu(B(\theta, 1))
\end{aligned}$$

olur ki, bu da ispatı tamamlar. □

Son olarak herhangi bir altlineer μ ölçüsü için,

$$|\mu(X) - \mu(Y)| \leq \mu(B(\theta, 1))D(X, Y)$$

eşitsizliği sağlanır ki, bunun anlamı, μ ölçüsünün Hausdorff uzaklığına göre Lipschitziyen olmasıdır.

TEOREM 2.3.3. [**3**, syf. 12] *Her kompakt olmayan ölçü Hausdorff uzaklığına göre lokal olarak "Lipschitziyen (böylece sürekli)" dir.*

İSPAT. Öncelikle dikkat edelim ki, herhangi bir $X \in M_E$ için $\varphi(r) = \mu(B(X,r))$ fonksiyonu, $r \in [0,\infty]$ için azalmayan, konveks ve böylece süreklidir.

Şu halde; $r < 1$ için,

$$\begin{aligned} \mu(B(X,r)) &= \mu(X + B(\theta,r)) = \mu(X + rB(\theta,1)) \\ &\leq \mu(X) + \mu\left(rB(\theta,1)\right) \\ &\leq \mu(X) + r\mu(X + B(\theta,1)) \\ &= \mu(X) + r\mu(B(X,1)) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi, kabul edelim ki X, Y iki küme, $D(X,Y) = r < 1$ ve R yeterince büyük olmak üzere $B(X,1) \subset B(\theta,R)$ ve $B(Y,1) \subset B(\theta,R)$ olsun. $r + \varepsilon < 1$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alalım. Böylece,

$$\begin{aligned} \mu(X) \leq \mu(B(Y, r+\varepsilon)) &\leq \mu(Y) + (r+\varepsilon)\mu(B(Y,1)) \\ &\leq \mu(Y) + (r+\varepsilon)\mu(B(\theta,R)) \end{aligned}$$

ve tersine X ve Y yer değiştirirse,

$$\begin{aligned} \mu(Y) &\leq \mu(B(X, r+\varepsilon)) \\ &\leq \mu(X) + (r+\varepsilon)\mu(B(X,1)) \\ &\leq \mu(X) + (r+\varepsilon)\mu(B(\theta,R)) \end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu iki eşitsizlikten;

$$|\mu(X) - \mu(Y)| \leq D(X,Y)\mu(B(\theta,R))$$

olur ki böylece ispat tamamlanır. □

Ayrıca, bu teorem, çekirdeğe ve ölçüye ilişkin olarak verilen aksiyomların birbirine bağlı olduğunu gösterir. Ölçünün sürekliliği çekirdeğin kapalı olduğu kabulü olmadan da ispatlanabilir. Fakat çekirdeğin kapalılığı, sürekliliğin bir sonucudur.

Dikkate değer başka bir husus da P keyfi bir çekirdek ve C kapalı keyfi konveks bir küme olmak üzere;

$$P \cap C = \{X \cap C : X \in P\}$$

ailesi boştan farklı olsun. Bu durumda, $Ker\mu = P$ ile verilen herhangi bir μ ölçüsü için $\mu(X) + d(X, C)$ de bir ölçüdür ve çekirdeği $P \cap C$ dir.

Kabul edelim ki $\mu_1, \mu_2, ...\mu_n$ ölçüleri sırasıyla $P_1, P_2, ..., P_n$ çekirdekleriyle verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{P} = \bigcap_{k=1}^{n} P_k$$

boştan farklı ise $\mathcal{P}$, çekirdek aksiyomlarını sağlar. Şimdi, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.3.4. [**3**, syf. 14] *Kabul edelim ki* $F : [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ *fonksiyonu konveks ve* $\forall i = 1, 2, ..., n$ *için* $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *eşitliği ancak ve ancak* $x_i = 0$ *olduğunda sağlansın. Buna göre;*

$$\mu(X) = F(\mu_1(X), \mu_2(X), ..., \mu_n(X))$$

fonksiyonu, çekirdeği $\mathcal{P}$ *olan kompakt olmayan bir ölçüdür.*

Benzer yolla verilen sonlu sayıda $E_1, E_2, ..., E_n$ Banach uzaylarıyla, bu uzayların kartezyen çarpım uzayında bir kompakt olmayan ölçü inşa edebiliriz.

Teorem 2.3.5. [**3**, syf. 14] $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, $E_1, E_2, ..., E_n$ *Banach uzaylarında verilmiş ve* $P_1, P_2, ..., P_n$ *çekirdeklerine sahip ölçüler olsun.* $F : [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ *fonksiyonu konveks ve* $\forall i = 1, 2, ..., n$ *için* $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *eşitliği ancak ve ancak* $x_i = 0$ *olduğunda sağlansın. Bu durumda;*

$$\mu(X) = F(\mu_1(X^1), \mu_2(X^2), ..., \mu_n(X^n))$$

ölçüsü $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ *uzayında kompakt olmayan bir ölçüdür.*

Burada X^i ile, X'in E_i' deki doğal izdüşümü kastedilmiştir.
Bu ölçünün çekirdeği ise,

$$P = \{X \subset E : \emptyset \neq X \subset X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, X_i \in P_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

dir.

2.4. Darbo Şartını Sağlayan Operatörler (Ölçü Daralması)

E_1, E_2, Banach uzayları ve μ_1, μ_2, sırasıyla, E_1, E_2'de kompakt olmayan birer ölçü olsun. $M \subset E_1$'de tanımlı ve E_2'de değerler alan operatörlere ilişkin bazı kavramları tanımlayacağız. Bu operatörlerin sürekli olduğunu ve sınırlı kümeleri sınırlı kümelere dönüştürdüğünü kabul edeceğiz.

Tanım 2.4.1. [**3**, syf. 15] Eğer M_{E_1}'e ait her $X \subset M$ kümesinin görüntüsü $TX \in M_{E_2}$ olmak üzere;

$$\mu_2(TX) \leq k\mu_1(X) \tag{2.4.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $T : M \to E_2$ dönüşümü, k sabitiyle, μ_1 ve μ_2'ye göre **Darbo şartını** sağlar denir.

(2.4.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük k sabiti $k(\mu_1, \mu_2, T)$ ile gösterilecektir. $E_1 = E_2$ ve $\mu_1 = \mu_2$ olması durumunda $k(\mu_1, \mu_2, T)$ yerine, $k(\mu_1, T)$ gösterimi kullanılacaktır. Eğer T operatörü (2.4.1) eşitsizliğini sağlamazsa, $k(\mu_1, \mu_2, T) = \infty$ gösterimi kullanılacaktır. Eğer $k(\mu_1, \mu_2, T) < 1$ ise, T'ye bir **ölçü daralması** veya $\mu_1 - \mu_2$ **büzülmesi** veya $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ise, μ **büzülmesi (daralması)** denir.

Aşağıda verilecek olan Lemmalar, Darbo dönüşümünün temel özeliklerini tanımlamaktadır.

Lemma 2.4.1. [**3**, syf. 15] *Eğer* $T : M \subset E_1 \to E_2$ *ve* $S : E_2 \to E_3$ *dönüşümleri, sırasıyla,* (μ_1, μ_2) *ve* (μ_2, μ_3)*'e göre (2.4.1)'deki özelikleri sağlıyorsa,*

$$k(\mu_1, \mu_2, S \circ T) \leq k(\mu_1, \mu_2, T)k(\mu_2, \mu_3, S)$$

dir.

Lemma 2.4.2. [**3**, syf. 16] *Eğer* $T_1 : M \to E_2$ *ve* $T_2 : M \to E_2$ *dönüşümleri Darbo dönüşümleri ise; herhangi* $\lambda \in [0, 1]$ *için* $T = \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$ *olarak tanımlanan* T *dönüşümü,* (2.4.1) *eşitsizliğini sağlar ve*

$$k(\mu_1, \mu_2, T) \leq \lambda k(\mu_1, \mu_2, T_1) + (1 - \lambda)k(\mu_1, \mu_2, T_2)$$

dir.

Lemma 2.4.3. [**3**, syf. 16] *Eğer* $T, S : M \to E_2$ *ve* μ_2 *altlineer ise,*

$$k(\mu_1, \mu_2, T + S) \leq k(\mu_1, \mu_2, T) + k(\mu_1, \mu_2, S)$$

olup herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ *sayısı için*

$$k(\mu_1, \mu_2, cT) = |c|k(\mu_1, \mu_2, T)$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdiye kadar daha çok (2.4.1) eşitsizliğini α ve χ ölçülerine göre sağlayan operatörlerle ilgilenildi. Dikkat edelim ki eğer $T : M \subset E_1 \to E_2$ tamamen sürekli(kompakt) ise

$$k(\alpha_{E_1}, \alpha_{E_2}, T) = k(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, T) = k(\alpha_{E_1}, \chi_{E_2}, T) = k(\chi_{E_1}, \alpha_{E_2}, T) = 0$$

dır.

BÖLÜM 3

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA TİPİ KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

3.1. Bazı Yardımcı Kavramlar ve Sonuçlar

Bu bölümde, daha sonra kullanacağımız bazı sonuçları vereceğiz. Kabul edelim ki x, $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leq \varepsilon\}$$

değerine x fonksiyonunun **süreklilik modülü** denir. Eğer p, $p(t,s) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ şeklinde iki değişkenli bir fonksiyon ise o zaman p'nin süreklilik modülünü,

$$\omega(p,\varepsilon) = \sup\{|p(t,s) - p(u,v)| : t, s, u, v \in \mathbb{R}_+, |t - u| \leq \varepsilon, |s - v| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde ifade edeceğiz. $p(t,s)$ fonksiyonunun süreklilik modülünü, tek değişkene bağlı olarak da verebiliriz. Örneğin, t sabit bir sayı olmak üzere;

$$\omega(p(t,.),\varepsilon) = \sup\{|p(t,s) - p(t,v)| : s, v \in \mathbb{R}_+, |s - v| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Aynı tanımlar, üç değişkenli fonksiyonlar için de verilebilir.

Şimdi, kompakt olmayan ölçüye ilişkin bazı gerçekleri vereceğiz.

Kabul edelim ki E, $\|\cdot\|$ normu ile verilmiş bir Banach uzayı olsun. Eğer X, E nin boş olmayan bir alt kümesi ise $\overline{X}$ ve conv$X$ ile sırasıyla, X'in kapanışını ve konveks kapanışını göstereceğiz. Ayrıca, M_E ile E nin boştan farklı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini, N_E ile de E nin ön-kompakt olan tüm alt kümelerinin ailesini göstereceğiz.

Şimdi, kompakt olmayan ölçüyle bağlantılı Lipschitzyen uygulamalarına ilişkin sabit nokta teoreminin bir versiyonunu ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.1. *Ω, E nin boş olmayan kapalı sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. μ, E üzerinde tanımlı kompakt olmayan bir ölçü ve $T : \Omega \to \Omega$ sürekli operatörü μ ye göre bir daralma dönüşümü ise, yani Ω nın boştan farklı her X alt kümesi için,*

$$\mu(TX) \leq k\mu(X), \; k \in [0,1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu taktirde T'nin Ω kümesinde sabit bıraktığı en az bir nokta vardır, [**5**].

Esas uzay, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ile gösterilecek olup, bu uzay, $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı, sürekli ve sınırlı x fonksiyonlarının uzayıdır. Bu uzaydaki bir fonksiyonun normu, $\parallel x \parallel = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|$ eşitliğiyle verilen maksimum normdur.

Boş olmayan ve sınırlı $X \subset BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ kümesi için

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{\sup\{\omega(x,\varepsilon) : x \in X\}\}$$

ve

$$\mathrm{diam}X = \sup\{|x(t) - y(t)| : x, y \in X\}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere;

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t\to\infty} \mathrm{diam}X \tag{3.1.1}$$

fonksiyonunun kompakt olmayan bir ölçü olduğu bilinmektedir, [**5**].

3.2. Temel Sonuç

Bu bölümde,

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t,s,x(s))ds \tag{3.2.1}$$

lineer olmayan kuadratik Volterra tipi integral denkleminin çözülebilirliğini inceleyeceğiz. (3.2.1) denkleminde,
$T : BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ şeklinde tanımlı bir operatör ve $t \in \mathbb{R}_+$'dır.

(3.2.1) denklemindeki, T operatörünün ve fonksiyonların aşağıdaki şartları sağladığını kabul edeceğiz.

(i) $T : BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ operatörü sürekli ve kompakt olmayan μ ölçüsüne göre ϱ sabitiyle Darbo şartını sağlasın.

(ii) c ve d negatif olmayan sabitler olmak üzere, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ve $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d|x(t)|$$

olsun.

(iii) $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonlar ve $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0,\ b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ve b sınırlı olmak üzere; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, t, s \in \mathbb{R}_+$ için

$$|u(t, s, x)| \leq a(t)b(s)$$

olsun.

(iv) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ve $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}_+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|u(t_2, s, x) - u(t_1, s, x)| \leq |t_2 - t_1|\varphi(s)$$

eşitsizliği geçerli olsun.

(v) $\alpha = \text{maks}\{c, d\}$ ve $\|a\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\{a(t)\}$ olmak üzere;

$$\varrho\|a\|\|b\|_1 < 1 \text{ ve } \alpha\|a\|\|b\|_1 < 1$$

sağlansın.

Dikkat edelim ki (iii) hipotezinden aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

Uyarı 3.2.1. *(iii), a'nın sınırlı olduğunu gösterir. $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı a fonksiyonunun supremumu $\|a\|$ ile gösterilir. $\|a\|$, (v) kabulündeki gibi tanımlanmaktadır.*

Uyarı 3.2.2. *Diğer taraftan (iii) kabulüyle,*

$$\left|\int_o^t u(t, s, x(s))ds\right| \leq \int_0^t |u(t, s, x(s))|ds \leq a(t)\int_0^t b(s)ds$$

olur. Ayrıca, $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ ve $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu dikkate alırsak,

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} a(t)\int_0^t b(s)ds \leq \lim_{t\to\infty} a(t)\|b\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} a(t)\int_0^t b(s)ds = 0$$

sonucuna ulaşırız.

Esas sonucu formüle etmeden önce, ileride kullanacağımız bir Lemmayı verelim.

LEMMA 3.2.1. *Kabul edelim ki* $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *ve* $\varepsilon > 0$ *olsun.*

$$\omega^L(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0, L], |t - s| \le \varepsilon\}$$

olmak üzere;

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon)$$

dır, [**5**].

İSPAT. Açık olarak;

$$\omega(x, \varepsilon) \ge \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon)$$

dır. Kabul edelim ki

$$\omega(x, \varepsilon) > \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon)$$

olsun. Bu taktirde; $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ ve $|t_1 - t_2| \le \varepsilon$ iken;

$$\sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon) < |x(t_1) - x(t_2)|$$

elde edilir. Ayrıca, $L_0 = \text{maks}\{t_1, t_2\}$ olarak seçilirse,

$$\sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon) < |x(t_1) - x(t_2)| \le \omega^{L_0}(x, \varepsilon)$$

elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Şu halde;

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon)$$

bulunur. □

Şimdi esas sonucu verelim:

TEOREM 3.2.1. *(i)-(v) kabulleri altında,* (3.2.1) *ile verilen integral denklemin,* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *uzayında en az bir* $x = x(t)$ *çözümü vardır,* [**5**].

İSPAT. $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanan A ve B operatörlerini gözönüne alalım.

$$(Ax)(t) = (Tx)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$(Bx)(t) = \int_0^t u(t,s,x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$\varepsilon > 0$ keyfi fakat sabit bir sayı, $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ve $t_0 \in \mathbb{R}_+$ olsun. Kabul edelim ki $t_0 \neq 0$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere; $|t - t_0| < \delta$ ve $\delta < \min\{\varepsilon/(\|\varphi\|_1 + M), t_0/2\}$ olsun. Burada,

$$M = \sup\left\{|u(t,s,x)| : t,s \in \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right], x \in [-\|x\|, \|x\|\,]\right\}$$

dir. Böylece u fonksiyonu düzgün süreklidir.

Genelliği bozmaksızın $t > t_0$ olduğu kabul edilebilir. Bu kabuller altında;

$$\begin{aligned}
& |(Bx)(t) - (Bx)(t_0)| = \\
& \left|\int_0^t u(t,s,x(s))ds - \int_0^{t_0} u(t_0,s,x(s))ds\right| \\
\leq\ & \left|\int_0^t u(t,s,x(s))ds - \int_0^t u(t_0,s,x(s))ds\right| + \\
& \left|\int_0^t u(t_0,s,x(s))ds - \int_0^{t_0} u(t_0,s,x(s))ds\right| \\
\leq\ & \int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t_0,s,x(s))|ds + \int_{t_0}^t |u(t_0,s,x(s))|ds \\
\leq\ & (t - t_0)\int_0^t \varphi(s)ds + M\int_{t_0}^t ds \\
\leq\ & (t - t_0)\|\varphi\|_1 + M(t - t_0) \\
<\ & (\|\varphi\|_1 + M)\delta \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t_0 = 0$ için de durum benzerdir. Sonuç olarak; $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ için Bx fonksiyonu süreklidir ve dolayısıyla Ax fonksiyonu da süreklidir.

Şimdi, $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ olmak üzere Ax in sınırlı bir fonksiyon olduğunu görelim.

$t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere; hipotez ve Uyarı 3.2.1 dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
|(Ax)(t)| = |(Tx)(t)| &\left|\int_0^t u(t,s,x(s))ds\right| \\
&\leq (c + d\|x\|) \int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \\
&\leq (c + d\|x\|)a(t) \int_0^t b(s)ds \\
&\leq (c + d\|x\|)\|a\|\|b\|_1 \qquad (3.2.3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.2.3) eşitsizliğinde her iki tarafın supremumu alınırsa,

$$\|Ax\| \leq (c + d\|x\|)\,\|a\|\|b\|_1$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise, A operatörünün $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayından yine aynı uzaya tanımlı olduğunu yani A'nın, sürekli ve sınırlı bir fonksiyonu sürekli ve sınırlı bir fonksiyona dönüştürdüğünü gösterir.

Şimdi de A operatörünün $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de sürekli olduğunu görelim:

Dikkat edelim ki (i)'deki kabulümüzden, A nın sürekliliği için B operatörünün $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için sabit bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alalım.

(iii) kabulünü dikkate alarak (Uyarı 3.2.2'den)

$$\lim_{t \to \infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\tau > 0$ bulunabilir ki eğer $t > \tau$ ise

$$a(t) \int_0^t b(s)ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir.

Diğer taraftan, $u(t,s,x)$ fonksiyonunun $[0,\tau] \times [0,\tau] \times [-\varepsilon,\varepsilon]$ kümesi üzerinde düzgün sürekliliği gözönüne alınarak öyle bir $\delta_1 > 0$ bulunabilir ki,

$$|t-t'| \leq \delta_1, \quad t,t' \in [0,\tau]$$

$$|s-s'| \leq \delta_1, \quad s,s' \in [0,\tau]$$

$$|x-x'| \leq \delta_1, \quad x,x' \in [-\varepsilon,\varepsilon]$$

olduğunda $|u(t,s,x) - u(t',s',x')| < \varepsilon/\tau$ olur.

$\delta = \delta_1, y \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ve $\|x-y\| \leq \delta$ olsun. $t \in \mathbb{R}_+$ sayısı sabit tutulursa,

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &= \left| \int_0^t u(t,s,x(s))ds - \int_0^t u(t,s,y(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))| ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi iki durum söz konusudur:

(1) Eğer $t > \tau$ ise Uyarı 3.2.2'nin de dikkate alınmasıyla,

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &\leq \int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))| ds \\ &\leq \int_0^t |u(t,s,x(s))| ds + \int_0^t |u(t,s,y(s))| ds \\ &\leq 2a(t) \int_0^t b(s) ds < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, B operatörünün sürekliliğini verir.

(2) Eğer $t \leq \tau$ ise $\|x-y\| < \delta$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &\leq \int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))| ds \\ &< \frac{\varepsilon}{\tau} \int_0^t ds \leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (1) ve (2)' deki durumlar gözönüne alındığında, B operatörünün, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de sürekli olduğu dolayısıyla A operatörünün, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli olduğu anlaşılır.

Şimdi ise keyfi fakat sabit bir $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alalım. (3.2.3) eşitsizliğinde $\alpha = \text{maks}\{c, d\}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &\leq (c + d\|x\|)\|a\|\|b\|_1 \\ &\leq \alpha(1 + \|x\|)\|a\|\|b\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu eşitsizlikte $t \in \mathbb{R}_+$ için supremum alınırsa,

$$\|Ax\| \leq \alpha(1 + \|x\|)\|a\|\|b\|_1 \tag{3.2.4}$$

olur. Böylece, $r_0 = \alpha\|a\|\|b\|_1/(1-\alpha\|a\|\|b\|_1)$ olmak üzere; (v) kabulünden A operatörünün, $B(\theta, r_0)$ yuvarını kendi içine dönüştürdüğü anlaşılır. Gerçekten; $x \in B(\theta, r_0)$ ise $\|x\| \leq r_0$ olacağından, (3.2.4) eşitsizliğinden

$$\|Ax\| \leq \alpha(1 + r_0)\|a\|\|b\|_1 \tag{3.2.5}$$

elde edilir. (v) kabulünü de göz önüne alarak

$$r_0 = \frac{\alpha\|a\|\|b\|_1}{1 - \alpha\|a\|\|b\|_1}$$

seçelim. Bu durumda (3.2.5) eşitsizliğinden

$$\|Ax\| \leq \alpha(1 + r_0)\|a\|\|b\|_1 = r_0$$

olur. Şu halde A operatörü, $B(\theta, r_0)$ yuvarını kendi içine dönüştürür.

Şimdi de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayında tanımlı A operatörünün kompakt olmayan μ ölçüsüne göre Darbo şartını sağladığını göstereceğiz.

$X, B(\theta, r)$ kapalı yuvarının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $x \in X$ alalım. $L > 0$ bir sabit, $\varepsilon > 0$ ve $t_1, t_2 \in [0, L]$ için $t_1 < t_2$ ve $t_2 - t_1 < \varepsilon$ olsun.

Böylece;

$$
\begin{aligned}
& |(Ax)(t_2)-(Ax)(t_1)| = \\
& \left|(Tx)(t_2)\int_0^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds - (Tx)(t_1)\int_0^{t_1} u(t_1,s,x(s))ds\right| \\
\leq\ & \left|(Tx)(t_2)\int_0^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds - (Tx)(t_1)\int_0^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds\right| \\
& +\left|(Tx)(t_1)\int_0^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds - (Tx)(t_1)\int_0^{t_1} u(t_1,s,x(s))ds\right| \\
\leq\ & |(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)|\int_0^{t_2} |u(t_2,s,x(s))|ds \\
& +|(Tx)(t_1)|\left|\int_0^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds - \int_0^{t_1} u(t_1,s,x(s))ds\right| \\
\leq\ & \omega^L(Tx,\varepsilon)a(t_2)\int_0^{t_2} b(s)ds + [c+d\|x\|\,] \\
& \times\left(\int_0^{t_1} |u(t_2,s,x(s))-u(t_1,s,x(s))|ds + \int_{t_1}^{t_2} u(t_2,s,x(s))ds\right) \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

olacağından, (3.2.6)'dan;

$$
\begin{aligned}
|(Ax)(t_2)-(Ax)(t_1)| \ \leq\ & \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)[(t_2-t_1)\int_0^{t_1}\varphi(s)ds \\
& +\|a\|\|b\|(t_2-t_1)] \\
\leq\ & \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)(t_2-t_1)\left(\|\varphi\|_1+\|a\|\|b\|\right) \\
\leq\ & \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)\varepsilon\left(\|\varphi\|_1+\|a\|\|b\|\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece,

$$
\omega^L(Ax,\varepsilon) \leq \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)\varepsilon\left(\|a\|\|b\|+\|\varphi\|_1\right)
$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafında L üzerinden supremum alınırsa,

$$
\sup_L \omega^L(Ax,\varepsilon) \leq \|a\|\|b\|_1 \sup_L \omega^L(Tx,\varepsilon) + \alpha(1+r_0)\varepsilon\left(\|a\|\|b\|+\|\varphi\|_1\right)
$$

ve Lemma 3.2.1'i dikkate alarak,

$$
\omega(Ax,\varepsilon) \leq \omega(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)\varepsilon\left(\|a\|\|b\|+\|\varphi\|_1\right)
$$

elde edilir.

Sonuç olarak; bulunan bu son eşitsizlikte $x \in X$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{x\in X} \omega(Ax, \varepsilon) \leq \|a\| \|b\|_1 \sup_{x\in X} \omega(Tx, \varepsilon) + \alpha(1 + r_0)\varepsilon \left(\|a\| \|b\| + \|\varphi\|_1\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Elde edilen bu eşitsizlikte $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in X} \omega(Ax, \varepsilon) \leq \|a\| \|b\|_1 \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in X} \omega(Tx, \varepsilon)$$

olur. Böylece daha önce verilen tanımları da aklımızda tutarak;

$$\omega_0(Ax) \leq \|a\| \|b\|_1 \omega_0(TX)$$

elde ederiz. Kompakt olmayan μ ölçüsünün tanımından ve (i) deki kabulden,

$$\omega_0(Ax) \leq \|a\| \|b\|_1 \omega_0(TX) \leq \|a\| \|b\|_1 \mu(TX) \leq \|a\| \|b\|_1 \varrho\mu(X) \tag{3.2.7}$$

bulunur.

Şimdi, kompakt olmayan μ ölçüsünün ifadesindeki çap terimiyle ilgili çalışacağız.

$X, B(\theta, r_0)$'ın boştan farklı bir altkümesi, $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ alalım. Böylece,

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(t) - (Ay)(t)| = \\
& \left|(Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s))ds - (Ty)(t) \int_0^t u(t, s, y(s))ds\right| \\
\leq\ & \left|(Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)ds) - (Ty)(t) \int_0^t u(t, s, x(s))ds\right| \\
& + \left|(Ty)(t) \int_0^t u(t, s, x(s))ds - (Ty)(t) \int_0^t u(t, s, y(s))ds\right| \\
\leq\ & |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \int_0^t |u(t, s, x(s))|ds \\
& + |(Ty)(t)| \int_0^t |u(t, s, x(s)) - u(t, s, y(s))|ds \\
\leq\ & |(Tx)(t) - (Ty)(t)|a(t) \int_0^t b(s)ds + \alpha(1 + \|y\|)2a(t) \int_0^t b(s)ds \\
\leq\ & \left[\, |(Tx)(t) - (Ty)(t)| + 2\alpha(1 + r_0)\right] a(t) \int_0^t b(s)ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$|(Ax)(t)-(Ay)(t)| \leq [\,|(Tx)(t)-(Ty)(t)|+2\alpha(1+r_0)]\,a(t)\int_0^t b(s)ds$$

eşitsizliğinde her iki tarafta x ve y üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{x,\,y\in X}|(Ax)(t)-(Ay)(t)| \leq \left(\sup_{x,\,y\in X}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|+2\alpha(1+r_0)\right)a(t)\int_0^t b(s)ds$$

olur. Burada çap tanımı kullanılarak,

$$\operatorname{diam}(AX)(t) \leq [\operatorname{diam}(TX)(t)+2\alpha(1+r_0)]\,a(t)\int_0^t b(s)ds$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $t\to\infty$ için üst limit alınırsa,

$$\limsup_{t\to\infty}\operatorname{diam}(AX)(t) \leq \limsup_{t\to\infty}\,[\operatorname{diam}(TX)(t)+2\alpha(1+r_0)]\,a(t)\int_0^t b(s)ds$$

olacağından Uyarı 3.2.2 dikkate alınırsa,

$$\limsup_{t\to\infty}\operatorname{diam}(AX)(t)=0$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\mu(AX)=\omega_0(AX) \leq \varrho\|a\|\|b\|_1\mu(X)$$

olur ki, (v) kabulünden, A 'nın μ kompakt olmayan ölçüsüne göre bir büzülme dönüşümü olduğu anlaşılır ve şu halde Teorem 1.3.1 ile (3.2.1) denkleminin en az bir çözümü olduğu sonucuna varılır. □

3.3. Örnekler

Bu kısımda, Teorem 3.2.1'e ilişkin bazı örnekler verilecektir.

ÖRNEK 3.3.1. *Kabul edelim ki T operatörü $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ uzayında $(Tx)(t)=1$ şeklinde tanımlı olsun. Açık olarak; T operatörü, $\varrho=0, c=1$ ve $d=0$ için Teorem 3.2.1'deki (i) ve (ii) şartlarını sağlar.*

Diğer taraftan; $u:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u(t,s,x)=e^{-s}t$ şeklindeki u fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda; u fonksiyonu süreklidir. Ayrıca, $|u(t,s,x)|=te^{-s}$ olup, $a(t)=t$ ve $b(s)=e^{-s}$ alınırsa $a(t)$, Teorem 3.2.1'deki (iii) şartını sağlamaz.

Teorem 3.2.1*'in* (*iv*) *şartından,*

$$|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| = |t_2e^{-s}-t_1e^{-s}| = |t_2-t_1|e^{-s}$$

eşitliğine sahip oluruz. Burada φ *fonksiyonunu,* $\varphi(s)=e^{-s}$ *olarak alabiliriz.*

Açık olarak $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *ve* $\|\varphi\| = 1$*'dir. Şu halde; denklem,*

$$x(t) = t\int_0^t e^{-s}ds$$

olup,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} t\int_0^t e^{-s}ds = \infty$$

olduğundan, $x(t) \notin BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *dir.*

Örnek 3.3.2. $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *üzerinde tanımlı* T *operatörünün* $(Tx)(t) = 1+x(t)$ *olarak tanımlandığını kabul edelim. Kolayca gösterilebilir ki* $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *nin boştan farklı ve sınırlı her* X *altkümesi için* $\omega_0(TX) = \omega_0(X)$ *ve*

$$\limsup_{t\to\infty} diam(TX)(t) = \limsup_{t\to\infty} diam(X)(t)$$

dir. Sonuç olarak; $\mu(TX) = \mu(X)$ *ve* T *operatörü* $\varrho = 1$ *için Teorem* 3.2.1*'in* (*i*) *şartını sağlar. Diğer taraftan;* $|(Tx)(t)| \leq 1+|x(t)|$ *iken* $c=1$ *ve* $d=1$ *olmak üzere herhangi bir* $x \in BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *için* T *operatörü Teorem* 3.2.1*'in* (*ii*) *şartını sağlar.*

Ayrıca, $u : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olmak üzere;* $u(t,s,x) = 1/(t+1)(s^2+1)$ *şeklinde tanımlı* u *fonksiyonunu gözönüne alalım. Açık olarak;* u *fonksiyonu sürekli ve* $|u(t,s,x)| = 1/(t+1)(s^2+1)$ *dir. Eğer* $a(t) = 1/(t+1)$ *ve* $b(s) = 1/(s^2+1)$ *alınırsa* a *ve* b *fonksiyonları sürekli,* $\|a\| = \|b\| = 1$ *ve* $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ *olur.*

$$\int_0^\infty b(s)ds = \int_0^\infty \frac{ds}{(s^2+1)} = \frac{\pi}{2}$$

olup bu ise $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *olması demektir.*

Sonuç olarak; u fonksiyonu, Teorem 3.2.1*'in* (iii) *şartını sağlar.* (iv) *hipotezinden,*

$$\begin{aligned}|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| &= \left|\frac{1}{(t_2+1)(s^2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)(s^2+1)}\right| \\ &= \frac{1}{s^2+1}\left|\frac{1}{t_2+1}-\frac{1}{t_1+1}\right| = \frac{1}{s^2+1}\left|\frac{t_1-t_2}{(t_1+1)(t_2+1)}\right| \\ &\leq \frac{1}{s^2+1}|t_1-t_2|\end{aligned}$$

olduğundan φ *fonksiyonu,* $\varphi(s)=b(s)=1/(s^2+1)$ *olarak alınabilir. Buradan Teorem* 3.2.1*'in* (iv) *şartı sağlanır.*

Son olarak; $\varrho\|a\|\|b\|_1=\pi/2>1$ *olduğundan* (v) *şartı sağlanmaz.*

$$x(t)=(x(t)+1)\int_0^t \frac{ds}{(t+1)(s^2+1)}$$

veya bu eşitlik,

$$(1+t)x(t)=(1+x(t))\arctan(t)$$

şeklindedir. Açık olarak; $x(t)=0$ *bu denklemin çözümü değildir.*
Eğer $x(t)\in BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *olduğu kabul edilip yukarıdaki eşitlikte* $t\to\infty$ *için limit alınırsa eşitliğin sol tarafının sonsuza yaklaştığını, sağ tarafının ise sınırlı olduğunu görebiliriz. Bu ise, bir çelişki olup yukarıdaki denklemin bir çözümü yoktur.*

3.4. Uygulamalar

T operatörü ile u fonksiyonu bu bölümde ele alınan integral denklemlerin temel elemanlarıdır. Bu bölümde, Teorem 3.2.1'deki kabulleri sağlayacak şekilde u fonksiyonunun ve T operatörünün daha somut örneklerini vereceğiz.

T Operatörü İle İlgili Uygulamalar

Üçüncü kısımda T operatörü ile ilgili olarak Teorem 3.2.1'in (i) ve (ii) şartını sağlayan örnekler verildi. Bu kısımda, başka örnekler vereceğiz.

Öncelikle aşağıdaki Lemmayı verelim.

LEMMA 3.4.1. *Kabul edelim ki* $x(t), y(t) \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *ve* $\varepsilon > 0$ *olsun. Bu taktirde;*

$$\omega(xy, \varepsilon) \leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon)$$

eşitsizliği geçerlidir, [**5**].

İSPAT. $t, t' \in \mathbb{R}_+$ keyfi seçilen sabitler ve $|t - t'| \leq \varepsilon$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}|x(t)y(t) - x(t')y(t')| &\leq |x(t)y(t) - x(t)y(t')| + |x(t)y(t') - x(t')y(t')| \\ &\leq |x(t)||y(t) - y(t')| + |y(t')||x(t) - x(t')| \\ &\leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak; $\omega(xy, \varepsilon) \leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon)$ dir. □

UYARI 3.4.1. *Eğer* $x(t) \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *ve* $x(t)$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}_+$ *üzerinde düzgün sürekli ise* $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(x, \varepsilon) = 0$ *dır.*

ÖRNEK 3.4.1. *T operatörünü,* $x(t) \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *ve* $x(t)$, $\mathbb{R}_+$ *üzerinde düzgün sürekli olmak üzere;*

$$\begin{aligned}T :& BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ & y(t) \quad \to \quad x(t)y(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Açık olarak; T operatörü sürekli bir operatördür.

$X, BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayının sınırlı bir altkümesi olsun. Lemma 3.4.1*'den ve Uyarı* 3.4.1*'den, kolayca ispat edilebilir ki,* $\omega_0(TX) \leq \|x\|\omega_0(X)$ *tir.*

Diğer taraftan; eğer $y_1, y_2 \in X$ *ve* $t \in \mathbb{R}_+$ *ise*

$$\begin{aligned}|(Ty_1)(t) - (Ty_2)(t)| &= |x(t)y_1(t) - x(t)y_2(t)| \\ &= |x(t)||y_1(t) - y_2(t)| \\ &\leq \|x\||y_1(t) - y_2(t)|\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\sup_{y_1,\, y_2 \in X} |(Ty_1)(t) - (Ty_2)(t)| \leq \|x\| \sup_{y_1,\, y_2 \in X} |y_1(t) - y_2(t)|$$

olur ve böylece, $diam(TX)(t) \leq \|x\| diam X(t)$ *elde edilir. Sonuç olarak;*

$$\mu(TX) \leq \|x\| \mu(X)$$

olup T *operatörü,* $\|x\|$ *sabitiyle Darbo şartını sağlar. Öyleyse* T *operatörü, Teorem* 3.2.1*'in* (i) *şartını sağlar.*

Diğer taraftan;

$$|(Ty)(t)| = |x(t)y(t)| \leq \|x\||y(t)|$$

olup, bu ise T *operatörünün Teorem* 3.2.1*'in* (ii) *şartını sağladığını gösterir.*

Örnek 3.4.2. *Kabul edelim ki* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sınırlı türeve sahip bir fonksiyon ve* $|g'| \leq k$ *olsun.*

$$\begin{aligned} T: \quad & BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ & \qquad x(t) \to g(|x(t)|) \end{aligned}$$

operatörünü gözönüne alalım.

Kolayca görüebileceği gibi, T *operatörü iyi tanımlı ve sürekli bir operatördür. Ayrıca,* T *operatörü kompakt olmayan* μ *ölçüsüne göre Darbo şartını sağlar.*

Gerçekten; $\varepsilon > 0$ *bir sabit ve* $t, t' \in \mathbb{R}_+$ *için* $|t - t'| \leq \varepsilon$ *olsun. Ortalama Değer Teoreminden,*

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Tx)(t')| &= |g(|x(t)|) - g(|x(t')|)| \\ &\leq |g'(\xi)| \, ||x(t)| - |x(t')|| \\ &\leq k|x(t) - x(t')| \end{aligned}$$

olacak şekilde $[t, t']$ *aralığına ait bir* ξ *değeri vardır. Sonuç olarak;* $X, BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *nin sınırlı bir altkümesi olmak üzere* $\omega_0(TX) \leq k\omega_0(X)$ *elde edilir.*

Benzer şekilde eğer $x_1, x_2 \in X$ *ve* $t \in \mathbb{R}_+$ *alınırsa,*

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= |g(|x_1(t)|) - g(|x_2(t)|)| \\ &\leq |g'(\xi)||x_1(t) - x_2(t)| \\ &\leq k|x_1(t) - x_2(t)| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $diam(TX)(t) \leq k\, diamX(t)$ *olur. Bu ise,*

$$\mu(TX) \leq k\mu(X)$$

olması demektir. Buradan da T'nin, k sabitiyle Darbo şartını sağladığını söyleyebiliriz. Diğer taraftan; T oeratörü Teorem 3.2.1'in (ii) şartını sağlar. Gerçekten; Ortalama Değer Teoreminin kullanmasıyla, $\xi \in (0, t)$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| = |g(|x(t)|)| &\leq |g(|x(t)|) - g(0)| + |g(0)| \\ &\leq |g'(\xi)||x(t)| + |g(0)| \\ &\leq k|x(t)| + |g(0)| \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.4.2. $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sınırlı türeve sahip fonksiyonları,*

$$g(x) = cos^n(x), g(x) = sin^n(x), g(x) = cos(nx), g(x) = sin(nx), g(x) = \frac{1}{x+1}$$

şeklinde alınabilir.

Örnek 3.4.3.

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(t, x) \to f(t, x)$$

fonksiyonu,

(1) f *düzgün sürekli bir fonksiyon,*

(2) $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, k \in (0, 1), t \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathbb{R}$ *ve*

(3) $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *için* $|f(t,0)| < M$ *olacak şekilde* $\exists M > 1$ *vardır*

özeliklerini sağlasın. Bu durumda; $\forall x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *için*

$$(Tx)(t) = f(t, x(t))$$

şeklinde tanımlı operatör, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *uzayından yine bu uzaya tanımlı bir operatör olup, Darbo şartını sağlar. Gerçekten;* $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *için,*

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ t &\to (t, x(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *için*

$$(Tx)(t) = f(t, x(t)) = (f \circ \hat{x})(t)$$

olacağı açıktır.

Sonuç olarak; $\hat{x}$ *fonksiyonun sürekliliği dikkate alınarak,* Tx *fonksiyonunun sürekli olduğunu anlaşılır.*

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| = |f(t, x(t))| &\leq |f(t, x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \\ &\leq k|x(t)| + |f(t,0)| \\ &\leq k\|x\| + M \end{aligned}$$

olduğundan Tx *fonksiyonu sınırlıdır. Şu halde;* T *operatörü,* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *uzayından* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *uzayına tanımlıdır.*

Şimdi, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *şeklinde olan* $(x_n) \subseteq BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *dizisini ele alalım. Böylece,*

$$\begin{aligned} |(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| &= |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \\ &\leq k|x_n(t) - x(t)| \\ &\leq k\|x_n - x\| \end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak T *operatörü süreklidir.*

Şimdi de T operatörünün kompakt olmayan μ ölçüsüne göre Darbo şartını sağladığını ispatlayalım:

Öncelikle sabit bir $\varepsilon > 0$ alalım. f'nin düzgün sürekliliğinden;

$$\|(t,x)-(s,y)\|_\infty < \delta \ \textit{iken} \ |f(t,x)-f(s,y)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ uzayında, $X \subseteq B(\theta,r)$, $x \in X$ ve $t,s \in \mathbb{R}_+$ ve $|t-s| \leq \delta$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)-(Tx)(s)| &= |f(t,x(t))-f(s,x(s))| \\ &\leq |f(t,x(t))-f(t,x(s))| + |f(t,x(s))-f(s,x(s))| \\ &\leq k|x(t)-x(s)| + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\omega_0(TX) \leq k\omega_0(X) \tag{3.4.1}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

Diğer taraftan; $x_1, x_2 \in X$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ alınırsa

$$|(Tx_1)(t)-(Tx_2)(t)| = |f(t,x_1(t))-f(t,x_2(t))| \leq k|x_1(t)-x_2(t)|$$

eşitsizliği elde edilir ki buradan,

$$diam(Tx)(t) \leq k\, diam X(t) \tag{3.4.2}$$

olur. Böylece, (3.4.1) ve (3.4.2) eşitsizliklerini dikkate alarak,

$$\mu(TX) \leq k\mu(X)$$

sonucuna ulaşırız ve bu da T operatörünün k sabitiyle Darbo şartını sağladığı anlamına gelir.

u Fonksiyonuyla İlgili Uygulamalar

Bu bölümde Teorem 3.2.1'deki hipotezi sağlayan u funksiyonlarına ilişkin örnekler vereceğiz.

ÖRNEK 3.4.4. *$r \in \mathbb{R}$ ve $r > 1$ olmak üzere;*

$$u(t,s,x) = \frac{1}{(1+t)(s+1)^r}$$

fonksiyonunu ele alalım. u fonksiyonunun sürekli olduğu açık olup,

$$|u(t,s,x)| = \frac{1}{(1+t)(s+1)^r}$$

dir. Eğer $a(t) = 1/(t+1), b(s) = 1/(s+1)^r$ alınırsa a ve b fonksiyonları sürekli, $\|a\| = \|b\| = 1$ ve $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ olduğu açıktır.

$$\int_0^\infty b(s)\ ds = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+1)^r} = \frac{1}{r-1}$$

olup buradan $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olur. Sonuç olarak; u fonksiyonu Teorem 3.2.1'in (iii) şartını sağlar.

(iv) hipotezinden,

$$\begin{aligned}
|u(t_2,s,x) - u(t_1,s,x)| &= \left|\frac{1}{(t_2+1)(s+1)^r} - \frac{1}{(t_1+1)(s+1)^r}\right| \\
&= \frac{1}{(s+1)^r}\left|\frac{1}{t_2+1} - \frac{1}{t_1+1}\right| = \frac{1}{(s+1)^r}\left|\frac{t_1-t_2}{(t_2+1)(t_1+1)}\right| \\
&\leq \frac{1}{(s+1)^r}|t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

olduğundan $\varphi(s) = b(s) = 1/(s+1)^r$ alınabilir. Bu ise Teoerem 3.2.1'in (iv) şartının sağlandığını gösterir.

ÖRNEK 3.4.5. *$r \in \mathbb{R}, r \geq 1$ olmak üzere;*

$$u(t,s,x) = \frac{1}{(t+1)(s^2+1)^r}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Açık olarak; u fonksiyonu sürekli olup,

$$|u(t,s,x)| = \frac{1}{(t+1)(s^2+1)^r}$$

dir. Eğer;

$$a(t) = \frac{1}{t+1},\ b(s) = \frac{1}{(s^2+1)^r}$$

alınırsa a ve b fonksiyonları sürekli, $\|a\| = \|b\| = 1$ *ve* $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ *olur.*

$$\int_0^\infty b(s)ds = \int_0^\infty \frac{1}{(s^2+1)^r}ds \leq \int_0^\infty \frac{ds}{(s^2+1)} = \frac{\pi}{2}$$

olup, buradan $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$*'dir. Sonuç olarak; u fonksiyonu Teorem* 3.2.1*'in* (iii) *şartını sağlar.*

(iv) *hipotezinden,*

$$\begin{aligned}
|u(t_2,s,x) - u(t_1,s,x)| &= \left| \frac{1}{(t_2+1)(s^2+1)^r} - \frac{1}{(t_1+1)(s^2+1)^r} \right| \\
&= \frac{1}{(s^2+1)^r} \left| \frac{1}{t_2+1} - \frac{1}{t_1+1} \right| = \left| \frac{t_1 - t_2}{(t_2+1)(t_1+1)} \right| \\
&\leq \frac{1}{(s^2+1)^r} |t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

dir. Burada, $\varphi(s) = b(s) = 1/(s^2+1)^r$ *olarak alınırsa Teorem* 3.2.1*'in* (iv) *şartı sağlanır.*

Uyarı 3.4.3. *Örnek* 3.4.5*'de* $r = 1$ *için elde edilen durum, Örnek* 3.3.2*'de incelenmiştir.*

Örnek 3.4.6. $p, q, r \in \mathbb{R},\ p, q \geq 1,\ r > 1$ *ve* $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *herhangi sürekli fonksiyonlar olmak üzere;*

$$u(t,s,x) = \frac{1}{(t+p+f(x))(s+q+h(x))^r}$$

alalım. Bu durumda u fonksiyonu sürekli olup,

$$|u(t,s,x)| = \left| \frac{1}{(t+p+f(x))(s+q+h(x))^r} \right| \leq \frac{1}{(t+1)(s+1)^r}$$

olduğundan $a(t)$ *ve* $b(s)$ *fonksiyonlarını,* $a(t) = 1/(t+1)$, $b(s) = 1/(s+1)^r$ *şeklinde seçebiliriz.*

Böylece, Örnek 3.4.4'te elde edilen sonuçlardan u fonksiyonunun, Teorem 3.2.1'in (iii) şartını sağladığı sonucuna ulaşırız.

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
&|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| = \\
&\left|\frac{1}{(t_2+p+f(x))(s+q+h(x))^r}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))(s+q+h(x))^r}\right| \\
=&\frac{1}{(s+q+h(x))^r}\left|\frac{1}{(t_2+p+f(x))}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))}\right| \\
=&\frac{1}{(s+q+h(x))^r}\left|\frac{t_1-t_2}{(t_2+p+f(x))(t_1+p+f(x))}\right| \\
=&\frac{1}{(s+q+h(x))^r}|t_1-t_2|
\end{aligned}$$

olacağından, φ fonksiyonunu, $\varphi(s) = 1/(s+q+h(x))^r \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olarak alabiliriz. Şu halde;

$$\int_0^\infty \frac{1}{(s+q+h(x))^r}\; ds \leq \int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^r}\; ds = \frac{1}{r-1}$$

olur ve böylece Teorem 3.2.1'in (iv) şartı sağlanır.

Örnek 3.4.7. *$p,q,r \in \mathbb{R},\ p,q,r \geq 1$ ve $f,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ sürekli keyfi fonksiyonlar olmak üzere;*

$$u(t,s,x) = \frac{1}{(t+p+f(x))(s^2+q+h(x))^r}$$

alalım. Şu halde u fonksiyonu süreklidir. Ayrıca,

$$|u(t,s,x)| = \left|\frac{1}{(t+p+f(x))}\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\right| \leq \frac{1}{(t+1)(s^2+1)^r}$$

olduğunu dikkate alarak $a(t)$ ve $b(s)$ fonksiyonlarını

$$a(t) = \frac{1}{t+1},\ b(s) = \frac{1}{(s^2+1)^r}$$

olarak seçebiliriz. Örnek 3.3.2*'de ve Örnek* 3.4.5*'te elde edilen sonuçları da gözönüne alarak u fonksiyonunun Teorem* 3.2.1*'in* (iii) *şartını sağladığı sonucuna ulaşırız.*

(iv) hipotezinden,

$$
\begin{aligned}
&|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| = \\
&\left|\frac{1}{(t_2+p+f(x))(s^2+q+h(x))^r}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))(s^2+q+h(x))^r}\right| \\
=&\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\left|\frac{1}{(t_2+p+f(x))}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))}\right| \\
=&\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\left|\frac{t_1-t_2}{(t_2+p+f(x))(t_1+p+f(x))}\right| \\
=&\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}|t_1-t_2|
\end{aligned}
$$

olduğundan φ fonksiyonunu, $\varphi(s) = 1/(s^2+q+h(x))^r$ olarak alabiliriz. Böylece, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ve

$$\int_0^\infty \frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\,ds \le \int_0^\infty \frac{1}{(s^2+1)^r}\,ds \le \frac{\pi}{2}$$

olup Teorem 3.2.1'in (iv) şartı sağlanır.

Örnek 3.4.8. *Teorem 3.2.1'in (iii) hipotezindeki $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $t,s \in \mathbb{R}_+$ için sağlanan $|u(t,s,x)| \le a(t)b(s)$ eşitsizliğini ve $a(t)$ ve $b(s)$ fonksiyonlarını kullanarak, Teorem 3.2.1'in (iii) ve (iv) şartını sağlayan yeni u fonksiyonları inşa edebiliriz.*

Yeni fonksiyonlar verirken; $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu da $|g(x)| \le 1$ olacak şekilde ve u fonksiyonunu, $p,q \in \mathbb{R},\ p,q \ge 1, f,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sürekli keyfi fonksiyonlar ve

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{t+p+f(x)}, \quad b(s) = \frac{1}{(s+q+h(x))^r}, \quad r>1 \text{ veya} \\
b(s) &= \frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}, \quad r \ge 1
\end{aligned}
$$

olmak üzere, $u(t,s,x) = a(t)b(s)g(x)$ şeklinde alabiliriz.

u fonksiyonunun sürekliliği açıktır ve $|u(t,s,x)| \le a(t)b(s)$ dir.

Ayrıca, Örnek 3.4.6'dan ve Örnek 3.4.7'den elde edilen sonuçların da dikkate alınmasıyla u fonksiyonunun Teorem 3.2.1'in (iii) ve (iv) şartlarını sağladığı gösterilebilir.

Yukarıdaki $|g(x)| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan bazı fonksiyonlar,

$$g(x) = cos^n(x), g(x) = sin^n(x), g(x) = cos(nx),$$
$$g(x) = sin(nx), g(x) = \frac{1}{x+1} \ ve \ g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

şeklinde verilebilir.

3.5. Lineer Olmayan Volterra Tipi İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı ve Bu Çözümlerin Asimptotik Kararlılığı

Trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü, aşağıdaki lineer olmayan fonksiyonel integral denkleme dayanır.

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 u(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, 1]$$

Bu eşitlik, aynı zamanda bir lineer olmayan kuadratik Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.

Bu çalışmada, yukarıdaki denklemin benzeri olan sınırsız bir aralıkta tanımlı ve

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s))ds \tag{3.5.1}$$

eşitliğiyle verilen Volterra integral denklemi ele alınacaktır. Kompakt olmayan ölçülerle ilişkilendirilmiş bir tekniği kullanarak, (3.5.1) denkleminin $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı bir çözümünün varlığını göreceğiz. Kompakt olmayan ölçünün uygun seçilmesi halinde bu çözümlerin daha sonra tanımlanan ve asimptotik kararlılık olarak adlandırılan bir özeliğe sahip olduğu söylenebilir.

Bu kısımda, lineer olmayan (3.5.1) ile belirtilen fonksiyonel integral denklemin, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ Banach uzayındaki çözümünü araştıracağız.

(3.5.1) denklemini, aşağıdaki kabuller altında ele alalım:

(i) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $t \to f(t, 0)$ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ nin bir elemanı,

(ii) $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq m(t)|x - y|$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon,

(iii) u, a ve b fonksiyonları, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olan ve $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0, \quad \lim_{t\to\infty} m(t)a(t) \int_0^t b(s)ds = 0$$

ve $|u(t, s, x)| \leq a(t)b(s)$ şartlarını sağlayan sürekli fonksiyonlar ve

(iv) $k \in [0, 1)$ olmak üzere, $\forall t \geq 0$ için;

$$m(t)a(t) \int_0^t b(s)ds \leq k$$

olsun.

Böylece, aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Teorem 3.5.1. *(i)-(iv) kabulleri altında* (3.5.1) *denklemi,* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *uzayında en az bir* $x = x(t)$ *çözümüne sahiptir. Bu çözüm* $\mathbb{R}_+$ *da asimptotik kararlılık özeliğine sahiptir,* [**4**].

(3.5.1) denkleminin asimptotik kararlılığından şu anlaşılmalıdır: $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists L > 0$ ve $r > 0$ vardır öyle ki eğer $x, y \in B(\theta, r)$ ve $x = x(t), y = y(t)$ (3.5.1) denkleminin çözümleri ise $\forall t \geq L$ için $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ olur.

İspat. $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ üzerinde T operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$(Tx)(t) = f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \quad t \geq 0$$

Hipotezden, $\forall x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ için Tx fonksiyonunun, $\mathbb{R}_+$'da sürekli olduğu görülebilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &\leq |f(t, x(t))| \int_0^t |u(t, s, x(s))|ds \\
&\leq |f(t, x(t))|a(t) \int_0^t b(s)ds \\
&\leq |f(t, x(t)) - f(t, 0)|a(t) \int_0^t b(s)ds + \\
&\quad |f(t, 0)|a(t) \int_0^t b(s)ds \qquad (3.5.2)
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.5.2)'den,

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &\leq |x(t)|m(t)a(t)\int_0^t b(s)ds + |f(t,0)|a(t)\int_0^t b(s)ds \\
&\leq k|x(t)| + |f(t,0)|a(t)\int_0^t b(s)ds \qquad (3.5.3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Tx fonksiyonu, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sınırlıdır. (3.5.3)'ten,

$$
\|Tx\| \leq k|x(t)| + A \qquad (3.5.4)
$$

elde edilir. Burada, $A = \sup\left\{|f(t,0)|a(t)\int_0^t b(s)ds : t \geq 0\right\}$ eşitliğiyle tanımlanmaktadır. Açık olarak, (i) ve (iii) kabullerinden, $A < \infty$ olur.

$k < 1$ ve $r = A/(1-k)$ olmak üzere (3.5.4) eşitsizliğinden T operatörünün, $B(\theta, r)$'yi kendi içine taşıdığı anlaşılır.

Şimdi, T operatörünün $B(\theta, r)$ üzerinde sürekli olduğunu gösterelim:

Bunun için sabit bir $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in B(\theta, r)$ alalım öyle ki $\|x - y\| \leq \varepsilon$ olsun. Böylece, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için;

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \left|[f(t,x(t)) - f(t,y(t))]\int_0^t u(t,s,x(s))ds\right| \\
&\quad + \left|f(t,y(t))\left(\int_0^t u(t,s,x(s))ds - \int_0^t u(t,s,y(s))ds\right)\right| \\
&\leq |f(t,x(t)) - f(t,y(t))|\int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \\
&\quad + |f(t,y(t))|\int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))|ds \\
&\leq m(t)|x(t) - y(t)|a(t)\int_0^t b(s)ds + [\,|f(t,y(t)) - f(t,0)| \\
&\quad + |f(t,0)|\,]\int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))|ds \\
&\leq k|x(t) - y(t)| + [\,m(t)|y(t)| + \\
&\quad f(t,0)\,]\int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))|ds \\
&\leq k\varepsilon + [\,rm(t) + |f(t,0)|\,]\int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))|ds \qquad (3.5.5)
\end{aligned}
$$

dir. (i) ve (iii)'den $t \geq L$ için;

$$
\begin{aligned}
2rm(t)a(t)\int_0^t b(s)ds &\leq (1-k)\frac{\varepsilon}{2} \\
2\sup\{|f(t,0)| : t \geq 0\}\, a(t)\int_0^t b(s)ds &\leq (1-k)\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
\tag{3.5.6}
$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $L > 0$ sayısı seçilebilir.

Şimdi, şu iki durum söz konusudur:

(α) $t \geq L$ olsun. O zaman (3.5.5)'ten ve (3.5.6)'dan;

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq k\varepsilon + (1-k)\frac{\varepsilon}{2} + (1-k)\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur.

(β) $t \leq L$ olsun. Bu durumda;

$$\omega(\varepsilon) = \sup\{|u(t,s,x) - u(t,s,y)| : t,s \in [0,L], x,y \in [-r,r], |x-y| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlı $\omega(\varepsilon) = \omega$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$u(t,s,x)$ fonksiyonunun $[0,L] \times [0,L] \times [-r,r]$ kümesindeki düzgün sürekliliği dikkate alınırsa, $\varepsilon \to 0$ için $\omega(\varepsilon) \to 0$ elde edilir. Böylece, (3.5.6)'dan;

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq k\varepsilon + [r\sup\{m(t) : t \in [0,L]\} \\
&\quad + \sup\{|f(t,0)| : t \in [0,L]\}]\, L\,\omega(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Sonuç olarak; (α) ve (β) ve yukarıda elde edilen gerçekleri aklımızda tutarak, T operatörünün $B(\theta,r)$ üzerinde sürekli olduğu sonucuna ulaşırız.

Şimdi de boş olmayan $X \subset B(\theta,r)$ kümesini ele alalım. $\forall x,y \in X$ ve sabit $t \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq k|x(t) - y(t)| + [\,m(t)|y(t)| + f(t,0)\,] \\
&\quad \times \int_0^t |u(t,s,x(s)) - u(t,s,y(s))|ds
\end{aligned}
\tag{3.5.7}
$$

eşitsizliğinin geçerliliği, (3.5.5)'in elde edilişinden bilinmektedir. Böylece (3.5.7) eşitsizliğinin de gözönüne alınmasıyla,

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)-(Ty)(t)| &\leq k|x(t)-y(t)|+[\,m(t)|y(t)|+|f(t,0)|\,] \\
&\quad \times\left(\int_0^t |u(t,s,x(s))|ds+\int_0^t |u(t,s,y(s))|ds\right) \qquad (3.5.8)
\end{aligned}$$

olacağından (3.5.8)'den;

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)-(Ty)(t)| &\leq k|x(t)-y(t)|+[\,m(t)|y(t)|+|f(t,0)|\,] \\
&\quad \times\left(2a(t)\int_0^t b(s)ds\right) \\
&\leq k|x(t)-y(t)|+2rm(t)a(t)\int_0^t b(s)ds+ \\
&\quad 2|f(t,0)|a(t)\int_0^t b(s)ds \qquad (3.5.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5.9)'da supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(TX)(t) &\leq k\operatorname{diam}X(t)+2rm(t)a(t)\int_0^t b(s)ds+ \\
&\quad 2|f(t,0)|a(t)\int_0^t b(s)ds \qquad (3.5.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezi de dikkate alarak (3.5.10) eşitsizliğinde $t\to\infty$ için limite geçilirse,

$$\limsup_{t\to\infty}\operatorname{diam}(TX)\leq k\limsup_{t\to\infty}\operatorname{diam}X(t) \qquad (3.5.11)$$

elde edilir. $L > 0$ sabit bir sayı, $\varepsilon > 0$, $x \in X$ ve $t, s \in [0, L]$ olmak üzere; $|t - s| \leq \varepsilon$ olsun. Genelliği bozmaksızın, $s < t$ kabul edilebilir. Böylece hipotezden,

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Tx)(s)| &\leq \left|[f(t, x(t)) - f(s, x(s))] \int_0^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau\right| \\
&\quad + \left|f(s, x(s)) \left(\int_0^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau - \int_0^s u(t, \tau, x(\tau))d\tau\right)\right| \\
&\leq |f(t, x(t)) - f(s, x(s))| \int_0^t |u(t, \tau, x(\tau))|d\tau \\
&\quad + |f(s, x(s))| \left|\int_0^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau - \int_0^s u(s, \tau, x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq [\,|f(t, x(t)) - f(t, x(s))| + |f(t, x(s)) - f(s, x(s))|\,] \\
&\quad \times \left(a(t) \int_0^t b(\tau)d\tau\right) + [\,|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|\,] \\
&\quad \times \left(\int_s^t |u(t, \tau, x(\tau))|d\tau + \int_0^s |u(t, \tau, x(\tau)) - u(s, \tau, x(\tau))|d\tau\right) \\
&\leq [\,m(t)|x(t) - x(s)| + |f(t, x(s)) - f(s, x(s))|\,] \\
&\quad \times \left(a(t) \int_0^t b(\tau)d\tau\right) + [\,m(s)|x(s)| + f(s, 0)\,] \\
&\quad \times \left(\int_s^t |u(t, \tau, x(\tau))|d\tau + \int_0^L |u(t, \tau, x(\tau)) - u(s, \tau, x(\tau))|d\tau\right) \\
&\leq \left[m(t)a(t) \int_0^t b(\tau)d\tau\right] |x(t) - x(s)| \omega_r^L(f, \varepsilon) a(t) \int_0^t b(\tau)d\tau \\
&\quad + m(s)ra(t) \int_s^t b(\tau)d\tau + |f(s, 0)| a(t) \int_s^t b(\tau)d\tau + \\
&\quad L\,[\,m(s)r + |f(s, 0)|\,]\, \overline{\omega}_r^L(u, \varepsilon)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada;

$$\begin{aligned}
\omega_r^L(f, \varepsilon) &= \sup\{|f(t, x) - f(s, x)| : t, s \in [0, L], |t - s| \leq \varepsilon, |x| \leq r\} \\
\overline{\omega}_r^L(u, \varepsilon) &= \sup\{|u(t, \tau, x) - u(s, \tau, x)| : t, s \in [0, L], |t - s| \leq \varepsilon, \tau \in [0, L], |x| \leq r\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\omega^L(Tx,\varepsilon) \quad &\le \quad k\omega^L(x,\varepsilon) + \omega_r^L(f,\varepsilon)a(t)\int_0^t b(\tau)d\tau \\
&\quad +\varepsilon r m(s)\sup\{b(\tau) : \tau \in [0,L]\} \\
&\quad +\varepsilon|f(s,0)|a(t)\sup\{b(\tau) : \tau \in [0,L]\} \\
&\quad +L\sup\{m(s)r + |f(s,0)| : s \in [0,L]\}\overline{\omega}_r^L(u,\varepsilon) \qquad (3.5.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Hipotezden, $f = f(t,x)$ fonksiyonunun $[0,L]\times[-r,r]$ üzerinde ve $u = u(t,\tau,x)$ fonksiyonunun da $[0,L]\times[0,L]\times[-r,r]$ üzerinde düzgün sürekli olduğu anlaşılır.

Şu halde; $\varepsilon \to 0$ için $\overline{\omega}_r^L(f,\varepsilon) \to 0$ ve $\omega_r^L(u,\varepsilon) \to 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (3.5.12) eşitsizliğinde $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa

$$\omega_0^L(TX) \le k\omega_0^L(X) \qquad (3.5.13)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5.13) eşitsizliğinde $L \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\omega_0(TX) \le k\omega_0(X) \qquad (3.5.14)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5.10) ve (3.5.14) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve kompakt olmayan ölçünün tanımı dikkate alınırsa,

$$\mu(TX) \le k\mu(X)$$

bulunur. Sonuç olarak; Teorem 3.1.1'in bütün şartları sağlanmış olduğundan, T'nin, $B(\theta,r) \subset BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$'de olan ve $x = Tx$ olacak şekilde başka bir ifadeyle,

$$x(t) = (Tx)(t) = f(t,x(t))\int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

olacak şekilde, sabit bıraktığı bir x noktasının (fonksiyonunun) varlığından bahsedebiliriz ki bu da (3.5.1) denkleminin, $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$' de bir çözümünün var olması anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Kaynakça

[1] G. ASLIM, Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988.

[2] J. M. AYERBE TOLEDANO, T. DOMİNGUEZ BENAVİDES, G. LOPEZ ACEDO, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Basel:Boston:Berlin, 1997.

[3] J. BANAS, K. GOEBEL, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, Vol. **60**, 1980.

[4] J. BANAS, B. RZEPKA, *On Existence and Asymptotic Stability of Solutions of Nonlinear Integral Equation,* J. Math. Anal. Appl. **284**(2003), 165-173.

[5] J. BANAS, J. ROCHA, K.B. SADARANGANİ, *Sovabilility of a Nonlinear Integral Equation of Volterra Type,* Journal of Computational and Applied Mathematics. **157**(2003), 31-48.

[6] J. B. CONWAY, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag New York Inc, 1985.

[7] E. KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.

[8] I. J. MADDOX, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press. Cambridge, 1970.

[9] B. L. MOISEIWITSCH, Integral Equations, Longman Group Limited New York, 1977.

[10] B. MUSAYEV, M. ALP, Fonksiyonel Analiz, Kütahya, 2000.

[11] C. YILDIZ, Genel Topoloji, Gazi Kitabevi, Ankara, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılı Antakya doğumludur. İlk ve Orta öğrenimini Antakya'da tamamladı. 2001 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2005 yılında bu bölümden mezun olup aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığının açmış olduğu sınavı kazanarak Matematik Öğretmenliği kadrosuna atandı.
2005-2006 Eğitim öğretim yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Hâlen Milli Eğitim-Bakanlığına bağlı bir orta öğretim kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.