T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN NONHOMOJEN KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Osman KARAKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2009

Tezin Başlığı : Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri

Tezi Hazırlayan : Osman KARAKURT

Sınav Tarihi :

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. Bilal ALTAY (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail ÖZDEMİR
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Osman KARAKURT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri

Osman KARAKURT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

43+vi sayfa

2009

Danışman: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, integral denklemler ve lineer olmayan nonhomojen kuadratik Volterra integral denklemlerinin çözümünün varlığı hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak temel tanımlar ve teoremler verildi. Lineer uzay, normlu uzay, topolojik uzay, sürekli operatör ve kompaktlık gibi kavramlardan bahsedildi.

Üçüncü bölümde, Luıtzen Egbertus Jan Brouwer'in sürekli fonksiyonlar için ifade ve ispat ettiği sabit nokta teoremleri verildi.

Dördüncü bölümde, lineer olmayan nonhomojen kuadratik Volterra integral denklemlerinin, sabit nokta teoremi kullanılarak, $[0,T]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli bütün fonksiyonların $C[0,T]$ Banach uzaylarında çözümünün varlığı incelendi. Ayrıca, bu bölümde, sonuçların daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı uygulamalara yer verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Volterra integral denklemleri, Nonkompaktlık ölçüsü, Sabit nokta teoremi.

ABSTRACT

MSc Thesis

Nonlinear Nonhomogen Quadratic Volterra Integral Equations

Osman KARAKURT

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

43+vi pages
2009
Supervisor: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

The present thesis consists of four chapter. In the first chapter of this thesis, some knowledge about the integral equations and the existence of solution of nonlinear nonhomogen quadratic Volterra integral equations were given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems were given to understand other chapters easily. Basic concepts such as linear space, metric space, normed space, topological space, continuous operator and compact set were given.

In the third chapter, the fixed point theorems which were expressed and proved by Luıtzen Egbertus Jan Brouwer were explained.

In the fourth chapter, the existence of solution of nonlinear nonhomogen quadratic Volterra integral equations in the classical Banach space $C[0,T]$ consisting of all real functions defined and continuous on the interval $[0,T]$ were investigated by using of the fixed point theorem. Moreover, in this chapter, some applications were given to understand results more clearly.

KEYWORDS: Volterra integral equations, Measure of noncompactness, Fixed point theorem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda danışmanlığımı yürüten, bu tezin hazırlanmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Akademik çalışmalarının ve bölümdeki görevlerinin yanısıra, bu tezin hazırlanmasında bana büyük yardımı olan Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR' e, sıcak ilgileri ile her konuda yardımlarını gördüğüm Doç. Dr. Bilal ALTAY' a ve Doç. Dr. Celal ÇAKAN'a, devamlı destek ve teşvikte bulunan aileme ve diğer arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$ **:** Reel sayılar cümlesi,

$\mathbb{R}_+$ **:** $[0,\infty)$ aralığı,

$\mathbb{N}$ **:** Doğal sayılar cümlesi,

$\mathbb{C}$ **:** Kompleks sayılar cümlesi,

$C(I)$ **:** I aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,

$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ **:** $\mathbb{R}_+$ da tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,

sup **:** Supremum,

inf **:** İnfimum,

E **:** Banach Uzayı,

$D(T)$ **:** T dönüşümünün tanım cümlesi,

$R(T)$ **:** T dönüşümünün görüntü cümlesi,

$\mathfrak{M}_E$ **:** E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi,

$\mathfrak{N}_E$ **:** E'nin boştan farklı ve ön-kompakt alt kümelerinin ailesi,

$\overline{A}$ **:** A kümesinin kapanışı,

$B(x,r)$ **:** x merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$B[x,r]$ **:** x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$S(x,r)$ **:** x merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi,

conv X **:** X'i ihtiva eden konveks ve kapalı kümelerin en küçüğü,

$w(x,\varepsilon)$ **:** x'in, $\varepsilon \geq 0$ sayısına karşılık gelen süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, uygulamalı matematik ve matematiksel fizikteki bir çok problemin dönüştüğü en önemli denklem tiplerindendir. Bu denklemler, matematiksel analizin günümüz dünya problemleri üzerine uygulanmasında da önemli bir yere sahiptir. Mesela, trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü,

$$x(t) = f(t,x(t)) \int_0^1 u(t,s,x(s))ds, \quad t \in [0,1]$$

formundaki lineer olmayan fonksiyonel integral denkleme dayanır, [13], [15].

İntegral denklemler, genelde integral sınırlarına göre Fredholm ve Volterra olmak üzere iki tipten oluşmaktadır. Fredholm integral denkleminde integralin sınırları sabittir. Volterra tipi integral denklemlerde ise integral sınırlarından biri değişkendir, [15].

İntegral denklem tabiri, ilk olarak 1888 yılında Bois Reymand tarafından kullanılmış olmakla beraber, bu denklemlere ilk olarak 1782 yılında Laplace'ın lineer fark denklemleri ve integral deklemlerin çözümünde kullandığı,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \phi(y)dy$$

integral dönüşümünde rastlanmaktadır, [11].

Volterra tipi integral denklemlere ait çalışmalar ilk olarak, 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçilerinden Vito Volterra tarafından yapılmıştır, [15].

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

ve

$$x(t) = f(t,x(t)) \int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

formundaki lineer olmayan kuadratik Volterra tipi denklemlerin, çözülebilirliğine dair incelemeler daha önce yapılmıştır, [3], [4], [13].

Bu çalışmada,

$$x(t) = a(t) + x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau$$

ve

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds$$

eşitlikleriyle verilen lineer olmayan nonhomojen kuadratik Volterra tipi integral denklemlerin çözülebilirliği incelendi, [6], [7].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımlar ile teoremler verildi.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay) [10, syf. 69] Boş olmayan bir L cümlesi ve bir $\mathbb{F}$ cismi verilmiş olsun. Eğer $x,y \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$ için $+(x,y) = x+y$ ve $\cdot(\lambda,x) = \lambda x$ ile tanımlanan $+ : L \times L \to L$, $\cdot : \mathbb{F} \times L \to L$ fonksiyonları, her $x,y,z \in L$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlıyorsa, L cümlesine, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay** (vektör uzayı) denir.
(a) $x+y = y+x$,
(b) $(x+y)+z = x+(y+z)$,
(c) $\forall x \in L$ için $x+\theta = \theta+x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,
(d) $\forall x \in L$ için $x+(-x) = (-x)+x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır,
(e) $(\lambda+\beta)x = \lambda x+\beta x$,
(f) $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$,
(g) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,
(h) $1x = x$.

$F = \mathbb{R}$ olması halinde L'ye reel, $F = \mathbb{C}$ olması halinde ise L'ye kompleks lineer uzay denir.

Tanım 2.1.2. (Topolojik Yapı) [1, syf. 23] X, bir küme ve τ da $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, τ ya X üzerinde bir **topoloji** (**topolojik yapı**) denir.
(t_1) $X, \emptyset \in \tau$
(t_2) τ da alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ ya aittir. Yani, $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \tau$ (I, herhangi bir indis cümlesi) için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.
(t_3) τ da alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir. Yani, $\forall (A_i)_{i\in J} \subset \tau$ (J, sonlu indis kümesi) için $\bigcap_{i\in J} A_i \in \tau$ dır.

Tanım 2.1.3. (Topolojik Uzay) [1, syf. 24] τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X,τ) ikilisine **topolojik uzay** denir.

Tanım 2.1.4. (Açık Küme) [1, syf. 24] τ nın her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir **açık küme** denir.

Tanım 2.1.5. (Kapalı Küme) [1, syf. 24] X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre **kapalı küme** denir. Yani; $F \subset X$ kapalı $\Leftrightarrow F^c \in \tau$ dır.

Tanım 2.1.6. (Kapanış) [1, syf. 66] X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine A'nın **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. (Sürekli fonksiyon) [1, syf. 81] (X,τ) ve (X',τ') iki topolojik uzay, $f : X \to X'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. X' uzayında $f(x_0)$ ın her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde, X uzayında x_0 ın bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında **τ ve τ' ye göre süreklidir** denir.

Tanım 2.1.8. (Normlu Lineer Uzay) [10, syf. 103] X, bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x,y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya kısaca **normlu uzay** denir.

(a) $\|x\| \geq 0$,

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(c) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 2.1.9. (Yakınsak Dizi) [12, syf. 75] (x_n), $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ ise (x_n) dizisi x_0 noktasına **yakınsıyor** denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.10. [12, syf. 75] Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı, $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. O zaman

$$B(x_0,r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$B[x_0,r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar** ve

$$S(x_0,r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine ise x_0 merkezli r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

Tanım 2.1.11. (Cauchy Dizisi) [12, syf. 77] (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.12. (Banach Uzayı) [12, syf. 82] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya **Banach Uzayı** denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların $C[a,b]$ lineer uzayı, $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.
$(x_n) \subset C[a,b]$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olması halinde, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m > N$ olduğunda,

$$\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir N doğal sayısı bulunacağından, her $t \in [a,b]$ için

$$|x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise, $C[a,b]$ uzayındaki yakınsak bir dizinin aynı zamanda düzgün yakınsak olduğunu gösterir, [9, syf. 36-37].

Tanım 2.1.13. (Operatör) [12, syf. 123] X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin her elemanına Y'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D'den Y'ye bir **operatör veya dönüşüm** denir ve $T : D \to Y$ ile gösterilir. Burada D'ye, T operatörünün tanım kümesi denir ve $D(T)$ ile gösterilir.

$$R = R(T) = \{y \in Y : y = T(x),\ x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün görüntü kümesi denir. T operatörünün yaptığı işlem,

$$X \supset D(T) \xrightarrow{T} R(T) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca $T : X \to Y$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde,

$$D(T) \neq X \text{ veya } R(T) \neq Y$$

olabilir.

Tanım 2.1.14. (Bir operatörün Bir Noktadaki Sürekliliği) [12, syf. 125] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında, T operatörü (dönüşümü) $x_0 \in D(T)$ **noktasında süreklidir** denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ni x \in D(T)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken; $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$,

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$'dır.

Tanım 2.1.15. (Sürekli Operatör) [12, syf. 126] X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.1.16. (Düzgün Sürekli Operatör) [8, syf. 336] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \|x - y\| < \delta$ olacak şekildeki her $x, y \in D(T)$ için $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ oluyorsa T'ye $D(T)$ üzerinde **düzgün süreklidir** denir.

Tanım 2.1.17. (Eşsüreklilik) [14, syf. 276] $X \subset C[a,b]$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t_1, t_2 \in [a,b]$ ve her $x \in X$ için $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa X kümesine **eşsüreklidir** denir.

Tanım 2.1.18. (Sınırlı Operatör) [12, syf. 127] X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $\forall x \in D(T)$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa T operatörü $D(T)$ üzerinde sınırlıdır denir.

Teorem 2.1.1. *[12, Teorem 3.2.3] X ve Y iki normlu uzay olsun. $T : X \to Y$ lineer operatörünün $D(T)$ üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır.*

Tanım 2.1.19. [12, syf. 223] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında açık kümelerin bir ailesi $\mathbb{D} = (D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olsun. Eğer bir $E \subset X$ kümesi için $E \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ oluyorsa $\mathbb{D}$ ailesine E kümesinin bir **açık örtüsü** denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} D_\lambda$ ise $\mathbb{D}_0 = (D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$ ailesine E kümesinin **sonlu alt örtüsü** adı verilir. E kümesini örten $\mathbb{D}$ ailesinin her kümesinin çapı $\varepsilon > 0$'den büyük değilse $\mathbb{D}$ örtüsüne E kümesinin **ε- örtüsü** denir.

Teorem 2.1.2. *[12, syf. 89] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart A içinde x'e yakınsayan bir (x_n) dizisinin olmasıdır.*

Teorem 2.1.3. ***(Weierstrass Yaklaşım Teoremi)*** *[9, syf. 280] W, reel katsayılı bütün polinomların cümlesi olsun. Bu durumda, $\overline{X} = C[a,b]$ olacak şekilde sayılabilir bir $X \subset W$ cümlesi vardır.*

Buna göre $x \in C[a,b]$ iken, Teorem 2.1.2'den, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yakınsaması düzgün olacak şekilde polinomların bir (x_n) dizisi vardır.

Tanım 2.1.20. (Kompakt Küme) [12, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ uzayının bir altkümesi E olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X' te **kompakt küme** denir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X'te kompakt bir küme ise E'ye X'te bir **ön-kompakt küme** denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına kompakt (ön-kompakt) normlu uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.21. (Dizisel Kompakt) [12, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ uzayının bir alt kümesi E olsun. E içindeki her dizinin, limiti E'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa E kümesine, X'te **dizisel kompakt küme** denir. Eğer E'nin $\overline{E}$ kapanışı X'te dizisel kompakt küme ise E'ye, X'te **dizisel ön-kompakt** küme adı verilir.

Lemma 2.1.1. *[12, syf. 225] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ verilsin. E kümesi X'te kompakt ise, bu küme X'te dizisel kompakt bir kümedir.*

3. BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, önce Brouwer Sabit Nokta Teoremi ifade edilecek daha sonra Brouwer Sabit Nokta Teoreminin bazı uygulamalarına yer verilecektir.

3.1 Brouwer Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda, önce Brouwer Sabit Nokta Teoremi ifade edilecek ve daha sonra kıstırma fonksiyonları ile bu teorem arasındaki ilişkiyi belirleyen teoremin ispatı verilecektir.

Teorem 3.1.1. (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) *[2, syf. 6] $B_n[0,1], \mathbb{R}^n$'deki öklidyen birim yuvar olmak üzere; $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$ sürekli bir fonksiyon ise, $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in B_n[0,1]$ vardır.*

Tanım 3.1.1. (Retraction) [2, syf. 7] X ve X_1 iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, X_1'e X'in kıstırılmışı denir.

(a) $X_1 \subset X$'tir,

(b) $\forall x \in X_1$ için $r(x) = x$ olacak şekilde sürekli bir $r : X \to X_1$ fonksiyonu mevcuttur. Buradaki r fonksiyonuna, X'i X_1'e kıstırma (geri çekme) fonksiyonu denir.

Brouwer sabit nokta teoremi ile kıstırma fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 3.1.2. *[2, syf. 7] Brouwer sabit nokta teoremi ile aşağıdaki iddia birbirine denktir. "$B_n[0,1]$ öklidyen birim yuvarından $S_n(0,1)$ yüzeyinin üzerine her mertebeden türevlenebilen kıstırma fonksiyonu yoktur."*

İspat. $\Rightarrow)$: Kabul edelim edelim ki Brouwer Teoremi doğru olsun, fakat buna ilaveten $B_n[0,1]$'den $S_n(0,1)$ üzerine her mertebeden türevlenebilen bir r kıstırma fonksiyonu da mevcut olsun. O zaman r_1'i $r_1(x) = -r(x)$ olarak tanımlayalım. Burada r_1'in $B_n[0,1]$'den $S_n(0,1)$ üzerine sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. Zira; x'ler x_0'a yaklaşırken $r_1(x)$'ler de $r_1(x_0)$'lara yaklaşır. Nitekim r_1'in tanımı ve r'nin kıstırma fonksiyonu olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\|r_1(x)-r_1(x_0)\| &= \|-r(x)+r(x_0)\| \\ &= \|-x+x_0\| = \|x-x_0\| \to 0 \ (x \to x_0)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Ancak r_1, sürekli olduğu halde sabit bıraktığı bir nokta yoktur. Çünkü tanım gereği $r_1(x_0) = -r(x_0) = -x_0 \neq x_0$'dır. Bu durum, Brouwer Teoremi ile çelişir. Bu da Brouwer Teoreminin geçerli olması halinde böyle bir kıstırma fonksiyonunun olamayacağı anlamına gelir.

$\Leftarrow$): Karşıt olarak kabul edelim ki her mertebeden türevlenebilen bir kıstırma fonksiyonu mevcut olmasın.

Öncelikle göstereceğiz ki $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$, her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ise, o zaman f'nin sabit bıraktığı bir nokta vardır.

Gerçekten, eğer f'nin sabit bıraktığı böyle bir nokta olmasaydı o zaman $\forall x \in B_n[0,1]$ için $x \neq f(x)$ olurdu. Bu durumda $f(x)$'i x'e birleştiren yönlü doğru parçası (vektör), yüzeyi bir noktada keser. Buna $g(x)$ diyelim. g fonksiyonunu,
$g : B_n[0,1] \to S_n(0,1)$, $\forall x \in B_n[0,1]$ için $g(x) \neq f(x)$ ve $\forall x \in S_n(0,1)$ için $g(x) = x$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi, g'nin her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu ispatlayacağız. Gerçekten,$\forall x \in B_n[0,1]$ için

$$g(x) = \alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x)$$

eşitliği vardır. Burada $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $< g(x), g(x) >= 1$ iç çarpımını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Buna göre,

$$< g(x), g(x) >= 1 \Leftrightarrow \alpha(x)^2\|x\|^2 + 2\alpha(x)(1-\alpha(x))xf(x) + (1-\alpha(x))^2\|f(x)\|^2 = 1$$

olur. Her mertebeden türevlenebilen katsayılı, 2. dereceden bir denklemin $\alpha(x)$ çözümü mevcutsa, çözüm de aynı özeliğe (yani her mertebeden türevlenebilir olma özeliğine) sahiptir. Böylece, g fonksiyonu, $B_n[0,1]$'den $S_n(0,1)$ üzerine tanımlı olan her mertebeden türevlenebilen bir kıstırma fonksiyonudur.

Demek ki, her mertebeden türevlenebilen f'nin bir noktayı sabit bırakmaması kabulü, bir kıstırma fonksiyonunun mevcudiyetini gerektirmektedir. Bu da her mertebeden türevlenebilen bir kıstırma fonksiyonunun olmaması halinde her mertebeden türevlenebilen f'nin sabit bıraktığı bir noktanın olacağını gösterir. Böylece ilk iddianın ispatı tamamdır. Yani, $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$, her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ise, o zaman f'nin sabit bıraktığı bir nokta vardır.

Şimdi de, $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$ sürekli fonksiyonunun sabit bıraktığı bir noktanın olduğunu gösterelim:

Weierstrass Yaklaşım Teoremi, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ yakınsaması düzgün olacak şekilde her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların bir $(f_n) \subset B_n[0,1]$ dizisini verir. Buna göre, $f_n : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için her mertebeden türevlenebilen fonksiyonlardır. Bu da $f_n(x_n) = x_n$ olacak şekilde $B_n[0,1]$ de bir (x_n) dizisinin mevcut olduğunu gösterir. (x_n), kompakt $B_n[0,1]$ yuvarında bir dizi olduğundan bu dizi, $x_0 \in B_n[0,1]$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. Burada, $\lim_{k\to\infty} f_k(x_{n_k}) = f(x_0)$'dır. Zira, $f_n : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$ sürekli ve $B_n[0,1]$ de kompakt olduğundan $\max_{x\in B_n[0,1]} \|f_n(x)\|$ mevcuttur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 0 \le \|f_k(x_{n_k}) - f(x_0)\| &= \|f_k(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) + f(x_{n_k}) - f(x_0)\| \\ &\le \|f_k(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - f(x_0)\| \end{aligned}$$

olup, $c_k = \max_{x_{n_k}\in B_k[0,1]} \|f_k(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\|$ alınırsa, f_n, f'ye düzgün yakınsak olduğundan $c_k \to 0$ $(k \to \infty)$ olur.

$$\|f_k(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - f(x_0)\| \le c_k + \|f(x_{n_k}) - f(x_0)\|$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ için limit alınırsa, f sürekli olduğundan $\|f(x_{n_k}) - f(x_0)\| \to 0$ ve şu halde $\|f_k(x_{n_k}) - f(x_0)\| \to 0$ olur.

Sonuç olarak, $\lim_{k\to\infty} f_k(x_{n_k}) = f(x_0)$ olur. Ayrıca,
$\lim_{k\to\infty} f_k(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ yazılabilir. Bu nedenle $f(x_0) = x_0$'dır. Böylece x_0, f fonksiyonunun sabit bıraktığı bir noktadır. $\square$

f' nin sabit bıraktığı noktaların kümesini $\mathcal{F}(f)$ ile gösterelim. Bu küme kapalıdır. Gerçekten, $x_0 \in \overline{\mathcal{F}(f)}$ ise Teorem 2.1.2'den, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset \mathcal{F}(f)$ dizisi mevcuttur. Bu durumda, $f(x_n) = x_n$ olacağı açıktır. f sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ eşitliği sağlanır.
Böylece, $f(x_n) = x_n$ eşitliğinde limit alınırsa, $f(x_0) = x_0$ olacağından, $x_0 \in \mathcal{F}(f)$ olur. Şu halde, $\overline{\mathcal{F}(f)} \subset \mathcal{F}(f)$ elde edilir. Halbuki, $\mathcal{F}(f) \subset \overline{\mathcal{F}(f)}$ kapsaması daima geçerli olduğundan $\mathcal{F}(f) = \overline{\mathcal{F}(f)}$ olur ki bu da $\mathcal{F}(f)$ nin kapalı olması demektir.

3.2 Brouwer Sabit Nokta Teoreminin Bazı Uygulamaları

Bu kısımda, Brouwer Sabit nokta teoreminin bazı uygulamaları verilecektir.

Teorem 3.2.1. *[2, syf. 8] $F, B_n[0,1]$ içindeki boş olmayan kapalı bir küme olsun. O zaman $\mathcal{F}(f) = F$ olacak şekilde sürekli bir $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$ fonksiyonu vardır.*

İspat. $d(.,F)$ fonksiyonunu, $\forall x \in B_n[0,1]$ için

$$d(x,F) = \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$$

olarak alalım. Bu fonksiyon süreklidir. Çünkü $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |d(x,F) - d(x_0,F)| < \varepsilon$$

önermesi doğru olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$\inf A - \inf B \leq \inf(A - B)$ eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left| \inf_{y\in F} \|x-y\| - \inf_{y\in F} \|x_0 - y\| \right| &\leq \left| \inf_{y\in F} (\|x-y\| - \|x_0 - y\|) \right| \\ &\leq \inf_{y\in F} |\|x-y\| - \|x_0-y\|| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Şu halde; $d(x,F) \to d(x_0,F)$ $(x \to x_0)$ olur. $f : B_n[0,1] \to B_n[0,1]$ ve $x_0 \in F$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x - d(x,F)\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} & , \quad x \neq x_0 \text{ ise} \\ x_0 & , \quad x = x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu süreklidir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
0 \leq \|f(x)-f(x_0)\| &= \left\| x - d(x,F)\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} - x_0 \right\| \\
&= \left\| x - x_0 - d(x,F)\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \right\| \\
&\leq \|x-x_0\| + \frac{1}{\|x-x_0\|}\|d(x,F)\|\|x-x_0\| \\
&= \|x-x_0\| + \|d(x,F)\|
\end{aligned}$$

olup $d(x,F)$ sürekli olduğundan, $\|x-x_0\| + \|d(x,F)\| \to d(x_0,F) = 0$ $(x \to x_0)$ olur. Üstelik her kapalı kümeye sürekli bir fonksiyon karşılık gelir ve $\mathcal{F}(f) = F$ olduğu kolayca görülebilir. □

Teorem 3.2.2. *[2, syf. 9] Eğer C, $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan, kompakt ve konveks bir alt kümesi ve f, C üzerinde herhangi bir sürekli fonksiyon ise o zaman f'nin sabit bıraktığı bir nokta vardır.*

İspat. Gerekli çarpma ve öteleme işlemleriyle C'yi $B_n[0,1]$ içine getirebiliriz. C'yi $B_n[0,1]$'in içinde kabul edelim. Daha önce bildiğimiz teorem gereğince, $\forall x \in B_n[0,1]$ için $\|x - P_c(x)\| = \inf_{y\in C}\|x-y\|$ olacak şekilde birtek $P_c(x) \in C$ noktası vardır. Burada, $P_c : B_n[0,1] \to C$ dönüşümü süreklidir ve $\forall x \in C$ için $P_c(x) = x$'tir.

Böylece, $P_c : B_n[0,1] \to C$ fonksiyonu bir kıstırma (retraction) fonksiyonudur. $f \circ P_c : B_n[0,1] \to C$ olup, Brouwer Sabit Nokta Teoremi gereğince, $(f \circ P_c)(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in C$ vardır ve $f(x_0) = x_0$'dır. C'yi $B_n[0,1]$'e genişletirsek;

$$(f \circ P_c)(x_0) = x_0 \Rightarrow f(P_c(x_0)) = x_0 \Rightarrow P_c(x_0) = x_0$$

olduğundan $f(x_0) = x_0$ ve $x_0 \in C$'dir. □

Teorem 3.2.3. *[2, syf. 9] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon ve her pozitif λ sayısı ve $\|u\| = r$ olan her $u \in \mathbb{R}^n$ için $f(u) + \lambda u \neq 0$ olacak şekilde en az bir $r > 0$ sayısı mevcut olsun. O zaman $\|u_0\| < r$ ve $f(u_0) = 0$ olacak şekilde bir u_0 noktası vardır.*

İspat. Kabul edelim ki $\forall u \in B_n[0,r]$ için $f(u_0) \neq 0$ olsun.

$g : B_n[0,r] \to B_n[0,r],\ g(u) = \frac{-f(u)r}{\|f(u)\|}$ ile tanımlanan g fonksiyonu süreklidir. Bu durumda Brouwer Teoremi gereğince, $g(\overline{u}) = \overline{u}$ olacak şekilde bir $\overline{u} \in B_n[0,r]$ mevcut olduğundan,

$$g(\overline{u}) = \overline{u} = \frac{-f(\overline{u})r}{\|f(\overline{u})\|} \tag{3.2.1}$$

ve böylece (3.2.1) den,

$$f(\overline{u})r + \|f(\overline{u})\|\overline{u} = 0 \tag{3.2.2}$$

ve (3.2.2) den de,

$$f(\overline{u}) + \frac{\|f(\overline{u})\|}{r}\overline{u} = 0$$

eşitliği elde edilir. $\frac{\|f(\overline{u})\|}{r} = \lambda$ alınırsa, $f(\overline{u}) + \lambda\overline{u} = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu da $f(u) + \lambda u \neq 0$ kabulüyle çelişir. Demek ki $f(u_0) = 0$ olacak şekilde bir $u_0 \in B_n[0,r]$ vardır. □

Teorem 3.2.4. *[2, syf. 9-10] $f : B_n[0,1] \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon ve $\|x\| = 1$ olan $\forall x \in B_n[0,1]$ için $\|f(x)\| \leq 1$ olsun. O zaman $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in B_n[0,1]$ noktası vardır.*

İspat. İlk olarak f'nin her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu gösterelim. $\forall x \in B_n[0,1]$ için $f(x) \neq x$ olduğunu kabul edelim. $g(x)$, $f(x)$'i x'e birleştiren yönlü doğru parçasının (vektörün) yüzeyi kestiği nokta olsun. Teorem 3.1.2'den g fonksiyonunun, $B_n[0,1]$'den $S_n(0,1)$ üzerine bir kıstırma fonksiyonu olduğu kolayca görülebilir. Eğer f sürekli bir fonksiyon ise Weierstrass Yaklaşım Teoreminden, f'ye düzgün yakınsak olacak şekilde her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların bir $(f_n) \subset B_n[0,1]$ dizisi vardır. $B_n[0,1]$'de $f_n(x_n) = x_n$ olacak şekilde bir x_n dizisi olduğu, Teorem 3.1.2'den bilinmektedir. (x_n), kompakt $B_n[0,1]$ yuvarında bir dizi olduğundan bu dizi, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması, f'nin sürekliliği ve $f_n(x_n) = x_n$ eşitliği dikkate alınarak $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$ olduğu, Teorem 3.1.2'nin ispatından görülebilir. $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olduğundan $f(x_0) = x_0$ olur. Yani, x_0, f fonksiyonunun sabit bıraktığı bir noktadır. □

4. KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN MONOTON ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, kuadratik Volterra integral denklemleri için temel kavram ve teoremler verilerek, bazı uygulamalara değinilecektir.

4.1 Gösterimler, Tanımlar ve Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde, daha sonra kullanacağımız bazı sonuçları vereceğiz. Kabul edelim ki $(E, \| .\|)$, sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve bu uzayın sıfır elemanı θ olsun. x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar $B[x,r]$ ile ve $B[\theta,r]$ yuvarı da kısaca B_r sembolü ile gösterilir. Eğer X kümesi E'nin bir alt kümesi ise o zaman $\overline{X}$ ve Conv$X$ sembolleriyle, sırasıyla, X'in kapanışı ve konveks kapanışı gösterilir. Kümeler üzerindeki cebirsel işlemler λX ve $X+Y$ ile, E kümesinin boş olmayan ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi $\mathfrak{M}_E$ ile ve ön kompakt alt kümelerinden oluşan aile de $\mathfrak{N}_E$ ile gösterilir, [6].

Tanım 4.1.1. [5, syf. 9] Bir $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlarsa, bu fonksiyona E'de bir **nonkompaktlık ölçüsü** denir.

(1) $ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\} \neq \emptyset$ ve $ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$'dir,

(2) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$,

(3) $\mu(\overline{X}) = \mu(ConvX) = \mu(X)$,

(4) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y), \lambda \in [0,1]$,

(5) Eğer $(X_n), (n = 1,2,\ldots), \mathfrak{M}_E$ deki kapalı kümelerin, $X_{n+1} \subset X_n$ ve $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0$ şartlarını sağlayan bir dizisi ise o zaman $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ kümesi boş değildir.

(1) de tanımlanan $ker\mu$ ailesi, "μ nonkompaktlık ölçüsünün çekirdeği" olarak adlandırılır. Şimdi, aşağıdaki sabit nokta teoremini verelim:

Teorem 4.1.1. *Q, E uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $F : Q \to Q$ sürekli bir dönüşüm olsun. X, Q' nun boş olmayan herhangi bir alt kümesi ve*

$k \in [0,1)$ *bir sabit olmak üzere,* $\mu(FX) \leq k\mu(X)$ *olsun. O zaman F'nin Q kümesinde sabit bıraktığı bir nokta vardır, [6].*

Uyarı 4.1.1. *Yukarıdaki hipotezler altında, F fonksiyonunun Q kümesinde sabit bıraktığı noktaların kümesi, kerμ ailesinin bir elemanıdır, [6].*

Çalışmalarımızı, $[0,T]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonların $C[0,T]$ Banach uzayında yapacağız. Kolaylık olması açısından $I=[0,T]$ ve $C(I)=C[0,T]$ yazacağız. $C(I)$ uzayı üzerindeki norm, $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in I\}$ normudur, [6].

X, $C(I)$ nın boş olmayan, sabit ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $x \in X$ ve $\varepsilon \geq 0$ için $w(x,\varepsilon)$ ile, x'in

$$w(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t)-x(s)| : t,s \in I, |t-s| \leq \varepsilon\}$$

eşitliğiyle tanımlı **süreklilik modülünü** göstereceğiz. Bunlara ilaveten;

$$w(X,\varepsilon) = \sup\{w(x,\varepsilon) : x \in X\}$$

$$w_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} w(X,\varepsilon)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca,

$$d(x) \quad = \sup\{|x(s)-x(t)| - [x(s)-x(t)] : t,s \in I, t \leq s\},$$

$$i(x) \quad = \sup\{|x(t)-x(s)| - [x(t)-x(s)] : t,s \in I, t \leq s\},$$

$$d(X) \quad = \sup\{d(x) : x \in X\},$$

$$i(X) \quad = \sup\{i(x) : x \in X\},$$

ile tanımlansın. Buna göre,

$d(X)=0 \Leftrightarrow X$ in I üzerinde kapsadığı bütün fonksiyonlar azalmayandır, [6].

Bunu görelim:

$\Rightarrow)$: $d(X)=0$ olsun. $d(X)=0 \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $d(x)=0$ dır.

$$d(x)=0 \Leftrightarrow |x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)]=0 \Leftrightarrow t\leq s \text{ için } x(s)\geq x(t)$$

olduğundan x azalmayandır.

$\Leftarrow)$: x azalmayan olsun. Yani $t\leq s$ için, $x(t)\leq x(s)$ olsun. O zaman

$$[x(s)-x(t)]\geq 0 \Rightarrow |x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)]=0$$

olup buradan,

$$d(x)=\sup\{|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)] : t,s\in I \text{ ve } t\leq s\}=0$$

olacağından,

$$d(X)=\sup\{d(x) : x\in X\}=0$$

eşitliğine ulaşırız. Benzer bir yolla, X kümesi ile $i(X)=0$ eşitliği karakterize edilebilir. Sonuç olarak μ fonksiyonunu, $\mathfrak{M}_{C(I)}$ ailesi üzerinde $\mu(X)=w_0(X)+d(X)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu ölçünün çekirdeği ker$\mu\neq\emptyset$ olup, sınırlı X kümelerini kapsar, X'teki fonksiyonlar I aralığında eşsüreklidir ve azalmayandır, [6].

4.2 Temel Sonuç I

Bu kısımda,

$$x(t)=a(t)+x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ \ t\in I \qquad (4.2.1)$$

olarak verilen denklem üzerinde çalışacağız. Burada, $a=a(t)$ ve $v=v(t,\tau,x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar ve $x=x(t)$ de bilinmeyen fonksiyondur. (4.2.1) denklemindeki fonksiyonlar aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $a\in C(I)$ olup, a, I aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur,

(ii) $v : I\times I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $v : I\times I\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ olmak üzere, keyfi bir

$\tau \in I$ sabiti ve $x \in \mathbb{R}_+$ için $t \to v(t,\tau,x)$ fonksiyonu I aralığında azalmayandır,

(iii) $\forall t,\tau \in I$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|v(t,\tau,x)| \leq f(|x|)$ olacak şekilde azalmayan bir $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır,

(iv) $\|a\| + rTf(r) \leq r$ eşitsizliğinin, $Tf(r_0) < 1$ şartını sağlayan bir r_0 pozitif çözümü vardır.

Şimdi temel sonucu ifade edebiliriz.

Teorem 4.2.1. *$(i)-(iv)$ hipotezleri altında $(4.2.1)$ denkleminin $C(I)$ uzayında en az bir $x = x(t)$ çözümü vardır ve bu çözüm I aralığında azalmayandır, [6].*

İspat. $C(I)$ uzayında V operatörünü,

$$(Vx)(t) = a(t) + x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau$$

eşitliğiyle tanımlayalım. (i) ve (ii) şartlarından, herhangi bir $x \in C(I)$ fonksiyonu için Vx fonksiyonu I aralığında süreklidir. Yani, V dönüşümü, $C(I)$ uzayından $C(I)$ uzayına tanımlıdır. Ayrıca, (iii) kabulünü de aklımızda tutarak,

$$\begin{aligned}
|(Vx)(t)| &\leq |a(t)| + |x(t)|\left|\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq \|a\| + \|x\|\int_0^t f(|x(\tau)|)d\tau \\
&\leq \|a\| + \|x\|\int_0^t f(\|x\|)d\tau \\
&\leq \|a\| + \|x\|Tf(\|x\|) \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşırız. (4.2.2)'den,

$$\|Vx\| \leq \|a\| + \|x\|Tf(\|x\|)$$

elde edilir. Böylece,(iv) hipotezini de dikkate alarak, $r_0 > 0$ ve $Tf(r_0) < 1$ olacak şekilde bir r_0'ın mevcut olduğu sonucuna ulaşırız. Böylece V dönüşümü, B_{r_0} yuvarından B_{r_0} yuvarına bir dönüşümdür. B_{r_0} yuvarının alt kümesi olan $B_{r_0}^+$ kümesi,

$$B_{r_0}^+ = \{x \in B_{r_0} : x(t) \geq 0, t \in I\} \qquad (4.2.3)$$

eşitliğiyle tanımlansın. Açık olarak $B_{r_0}^+$, boştan farklı, kapalı ve konveks bir kümedir. Böylece (i) ve (ii) hipotezlerini de dikkate alarak V dönüşümünün, $B_{r_0}^+$ dan $B_{r_0}^+$'a tanımlı olduğu sonucunu kolayca elde edebiliriz.

Şimdi V'nin, $B_{r_0}^+$ kümesinde sürekli olduğunu gösterelim:

$\varepsilon > 0$ sabitini ve $\|x-y\| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki keyfi $x, y \in B_{r_0}^+$ elemanlarını alalım. Bu durumda $t \in I$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Vx)(t) - (Vy)(t)| \\
\leq \;& \left| x(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - y(t) \int_0^t v(t,\tau,y(\tau))d\tau \right| \\
\leq \;& \left| x(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - y(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& + \left| y(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau - y(t) \int_0^t v(t,\tau,y(\tau))d\tau \right| \\
\leq \;& \varepsilon \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau + r_0 \int_0^t |v(t,\tau,x(\tau)) - v(t,\tau,y(\tau))| d\tau \\
\leq \;& \varepsilon \int_0^t f(r_0)d\tau + r_0 \int_0^t B_{r_0}(\varepsilon)d\tau \\
\leq \;& \varepsilon T f(r_0) + r_0 T B_{r_0}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

elde edilir.

$$B_{r_0}(\varepsilon) = \sup\{|v(t,\tau,x) - v(t,\tau,y)| : t,\tau \in I, x,y \in [0,r], |x-y| \leq \varepsilon\}$$

olmak üzere, v'nin düzgün sürekliliği ve (ii)'den $\varepsilon \to 0$ olduğunda $B_{r_0}(\varepsilon) \to 0$ olacağı açıktır. Çünkü v fonksiyonu $I \times I \times [0, r_0]$ kompakt bölgesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir. (4.2.4)'ten,

$$\|Vx - Vy\| \leq \varepsilon T f(r_0) + r_0 T B_{r_0}(\varepsilon)$$

olacağından V operatörü $B_{r_0}^+$ üzerinde süreklidir.

Şimdi bir $X \subset B_{r_0}^+$ kümesini ve $t, s \in [0, T]$ olmak üzere $|t-s| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki $\varepsilon > 0$ sabiti ile $x \in X$ noktasını seçelim. Genelliği bozmaksızın $t \leq s$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$
\begin{aligned}
& |(Vx)(s)-(Vx)(t)| \\
\leq\ & |a(t)-a(s)| + \left| x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
\leq\ & w(a,\varepsilon) + \left| (x(s)-x(t))\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& + \left| x(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^s v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& + \left| x(t)\int_0^s v(t,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
\leq\ & w(a,\varepsilon) + |x(s)-x(t)|\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \\
& + x(t)\int_0^s |v(s,\tau,x(\tau))-v(t,\tau,x(\tau))|d\tau + x(t)\int_t^s |v(t,\tau,x(\tau))|d\tau \\
\leq\ & w(a,\varepsilon) + w(x,\varepsilon)\int_0^s f(r_0)d\tau + r_0\int_0^s \gamma_{r_0}(\varepsilon) + r_0\int_t^s f(r_0)d\tau \\
\leq\ & w(a,\varepsilon) + Tf(r_0)w(x,\varepsilon) + r_0T\gamma_{r_0}(\varepsilon) + r_0\varepsilon f(r_0)
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Böylece,

$$\gamma_{r_0}(\varepsilon) = \sup\{|v(s,\tau,x)-v(t,\tau,x)| : |s-t| \leq \varepsilon, x \in [0,r_0]\}$$

olmak üzere v fonksiyonu $I \times I \times [0,r_0]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\varepsilon \to 0$ olduğunda $\gamma_{r_0}(\varepsilon) \to 0$ olur. Buna göre, (4.2.5) eşitsizliğinde önce

$$w(X,\varepsilon) = \sup\{w(x,\varepsilon) : x \in X\}$$

eşitliği dikkate alınarak $x \in X$'ler üzerinden supremum ve daha sonra

$$w_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} w(X,\varepsilon)$$

eşitliği dikkate alınarak $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$w_0(VX) \leq Tf(r_0)w_0(X) \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Şimdi $x \in X$ sabit, $t, s \in I$ ve $t \leq s$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& |(Vx)(s)-(Vx)(t)| - [(Vx)(s)-(Vx)(t)] \\
= \; & \left| a(s) + x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - a(t) - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& - \left[a(s) + x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - a(t) - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
\leq \; & (|a(s)-a(t)| - [a(s)-a(t)]) + \\
& \left| x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& - \left[x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
\leq \; & \left| x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& + \left| x(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& - \left[x(s)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
& - \left[x(t)\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right] \\
\leq \; & |x(s)-x(t)| \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau + \\
& |x(t)| \left| \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right| \\
& -[x(s)-x(t)] \int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - \\
& x(t) \left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau - \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \right]
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olup, $v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olmak üzere keyfi bir $\tau \in I$ sabiti ve $x \in \mathbb{R}_+$ için $t \to v(t,\tau,x)$ fonksiyonunun I aralığında azalmayan olduğu hipotezi de dikkate alınarak, (4.2.7) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& |(Vx)(s)-(Vx)(t)|-[(Vx)(s)-(Vx)(t)] \\
\leq\; & (|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)])\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau \\
& +x(t)\left|\int_0^t v(s,\tau,x(\tau))d\tau+\int_t^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right| \\
& -x(t)\left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right] \\
\leq\; & (|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)])\int_0^s f(r_0)d\tau \\
& +x(t)\left(\left|\int_0^t [v(s,\tau,x(\tau))-v(t,\tau,x(\tau))]\,d\tau\right|+\left|\int_t^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau\right|\right) \\
& -x(t)\left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right] \\
\leq\; & Tf(r_0)\,(|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)]) \\
& +x(t)\left[\int_0^t v(s,\tau,x(\tau))d\tau+\int_t^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right] \\
& -x(t)\left[\int_0^s v(s,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau\right] \\
=\; & Tf(r_0)\,(|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)]) \\
=\; & Tf(r_0)d(x) \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ve (4.2.8) eşitsizliğinden de

$$d(Vx)\leq Tf(r_0)d(x)$$

eşitsizliğine, yani

$$d(VX)\leq Tf(r_0)d(X) \qquad (4.2.9)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Sonuç olarak (4.2.6) ve (4.2.9) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayıp (1). bölümdeki nonkompaktlık ölçülerini aklımızda tutarak,

$$\mu(VX)\leq Tf(r_0)\mu(X) \qquad (4.2.10)$$

eşitsizliğine ulaşırız. (4.2.9) ve $Tf(r_0)<1$ eşitsizliği ile birlikte, Teorem 4.1.1 de kullanılarak ispat tamamlanır. Yani $V, B_{r_0}^{+}$'ın en az bir x noktasını sabit bırakır. Bu durumda,

$$Vx=x\Rightarrow (Vx)(t)=x(t)\Rightarrow a(t)+x(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau=x(t)$$

olur. $\square$

$(4.2.1)$ integral denkleminin çözümleri, $B_{r_0}^+$ kümesindedir, $I=[0,T]$ aralığında azalmayandır ve süreklidir. Üstelik her $t\in I$ için $a(t)>0$ ise $(4.2.1)$ denkleminin çözümleri pozitiftir.

4.3 Örnekler

Başlangıçta, (iii) ve (iv) hipotezlerine ilişkin bazı örnekler verelim:

Örnek 4.3.1. *Kabul edelim ki $v=v(t,\tau,x)$ fonksiyonu, $I\times I\times\mathbb{R}$ kümesinde sınırlı olsun. Yani; $t,\tau\in I=[0,T]$ ve $x\in\mathbb{R}$ için, k negatif olmayan bir sabit olmak üzere $|v(t,\tau,x)|\le k$ olsun. Bu durumda (iii) şartı, $r\ge 0$ ve $f(r)=k$ fonksiyonu için sağlanır. (iv) hipotezinden,*

$$\|a\|+krT\le r \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. $kT<1$ alınırsa, $f(r_0)=k$ ve $Tf(r_0)=Tk<1$ olacağından; $r_0=\frac{\|a\|}{1-kT}$, $(4.3.1)$ eşitsizliğinin bir çözümü olur.

Örnek 4.3.2. *Kabul edelim ki (iii) deki $f(r)$ fonksiyonu, $f(r)=cr$ olsun. Burada c, $c\le\frac{1}{4}\|a\|$ olacak şekildeki bir sabit ve $T=1$ olsun. O zaman (iv) eşitsizliğinden,*

$$\|a\|+cr^2\le r \tag{4.3.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan; $r_0=\frac{1-\sqrt{1-4ac}}{2c}$ sayısının, $(4.3.2)$ eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu ve

$$Tf(r_0)=f(r_0)=\frac{1-\sqrt{1-4ac}}{2}\le\frac{1}{2}<1$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır.

Örnek 4.3.3. *$a\in C[0,1]$ olmak üzere; a, $[0,1]$ aralığında azalmayan ve $\|a\|\le\frac{4}{27}$ olsun. Kabul edelim ki (iii) hipotezindeki f fonksiyonu, $f(r)=\sqrt{r}$ eşitliğiyle tanımlansın. Bu durumda $T=1$ için (iv) eşitsizliği,*

$$\|a\|+rTf(r)=\|a\|+r\sqrt{r}\le r \tag{4.3.3}$$

halini alır. Bu da $r_0 = \frac{4}{9}$'un (4.3.3) eşitsizliğinin bir çözümü olduğunu gösterir. Burada, $Tf(r_0) = f(r_0) = \frac{2}{3} < 1$ dir.

Teorem 4.2.1'deki sonuç oldukça kullanışlıdır. Bunu aşağıdaki örnekle görelim:

Örnek 4.3.4. *Aşağıdaki nonhomojen lineer olmayan kuadratik integral denklemi gözönüne alalım.*

$$x(t) = t^2 + x(t)\int_0^t \frac{(t+\tau)x(\tau)}{1+x^2(\tau)}d\tau \tag{4.3.4}$$

Şimdi bu denklemin, $T < 1$ olmak üzere $C[0,T]$ uzayındaki çözümünü araştıralım. Denklemden $a(t) = t^2, \|a\| = T^2$ ve $v(t,\tau,x) = \frac{(t+\tau)x}{1+x^2}$ olduğu açıktır. Burada $\forall t,\tau \in [0,T]$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|v(t,\tau,x)| = \left|\frac{t+\tau}{1+x^2}x\right| \leq \left|\frac{2Tx}{1+x^2}\right| = \left|\frac{2x}{1+x^2}T\right| \leq T$$

olur. Böylece, $|v(t,\tau,x)| \leq T$ elde edilir. Bu eşitsizlikten $f(r)$ fonksiyonu $f(r) = T$ şeklindedir. Üstelik $t \to v(t,\tau,x)$ fonksiyonu, $[0,T]$ aralığı üzerinde azalmayandır. Buna göre, (4.3.4) denkleminin $C[0,T]$ uzayında bir $x = x(t)$ çözümünün mevcut ve bu çözümün $[0,T]$ aralığında pozitif ve azalmayan olduğu anlaşılır.

Örnek 4.3.5.

$$x(t) = a(t) + x(t)\int_0^t \frac{t^2\ln(1+\tau|x(\tau)|)}{2\exp(t+\tau)}d\tau \tag{4.3.5}$$

eşitliğiyle verilen kuadratik integral denklemi gözönüne alalım. Bu denklemin $C[0,2]$ uzayındaki çözümlerini araştıralım. Burada $T = 2, a \in C[0,2]$ ve a, $[0,2]$ aralığında azalmayan olsun. Burada, $v(t,\tau,x) = \frac{t^2\ln(1+\tau|x|)}{2\exp(t+\tau)}$ olarak verilmektedir.

$$|v(t,\tau,x)| = v(t,\tau,x) \leq \frac{1}{2}(t^2\exp(-t))(\tau\exp(-\tau))|x| \leq 4|x|$$

olduğundan, $f(r) = 4r$ olur. Şimdi,

$$\|a\| + Trf(r) \leq r$$

eşitsizliğini, yani,

$$8r^2 + \|a\| \leq r$$

eşitsizliğini veya buna denk olan

$$8r^2 + \|a\| - r \leq 0 \tag{4.3.6}$$

eşitsizliğini ele alalım. Bu taktirde; $\|a\| \leq \frac{1}{32}$ *olması durumunda* $r_0 = \frac{1}{16}$ *sayısı,* (4.3.6) *eşitsizliğinin bir çözümüdür. Diğer taraftan;* $Tf(r_0) = 8r_0 < 1$*olur. Şu halde; Teorem* 4.2.1*'in şartları sağlanır. Buna göre,* (4.3.5) *denkleminin* $C[0,2]$ *uzayında bir çözümünün mevcut ve bu çözümün* $[0,2]$ *aralığında pozitif ve azalmayan olduğu anlaşılır.*

4.4 Yardımcı Bilgiler

Şimdi, M kümesinin E Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi olduğunu ve $T : M \to E$ operatörünün de sınırlı kümelerden sınırlı kümeler üzerine tanımlı ve sürekli olduğunu kabul edelim. $k \geq 0$ bir sabit ve μ nankompaktlık ölçüsü olmak üzere M'nin herhangi bir X alt kümesi için $\mu(TX) \leq k\mu(X)$ eşitsizliği sağlanırsa, T dönüşümü **Darbo şartını sağlar** denir. T dönüşümü Darbo şartını $k < 1$ için sağlıyorsa o zaman T dönüşümü μ **ölçüsünün bir daralması** olarak adlandırılır, [7].

Şimdi, aşağıdaki sabit nokta teoremini verelim:

Teorem 4.4.1. *Q,E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve μ de E Banach uzayında bir nonkompaktlık ölçüsü olsun. $F : Q \to Q$, μ ölçüsüne göre bir daralma fonksiyonu olsun. O zaman F'nin Q kümesinde sabit bıraktığı bir nokta vardır, [7].*

Uyarı 4.4.1. *Yukarıdaki teoremin kabulleri altında Q ya ait olan ve F nin sabit bıraktığı noktaların kümesinin $\ker\mu$ nün bir elemanı olduğu görülebilir.*

X,$C(I)$ uzayının boş olmayan ve sınırlı bir alt kümesi olmak üzere $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için $w(x,\varepsilon)$ ile gösterilen x'in süreklilik modülü,

$$w(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t,s \in I, |t-s| \leq \varepsilon\}$$

eşitliğiyle,

$$w(X,\varepsilon) = \sup\{w(x,\varepsilon) : x \in X\} \text{ ve } w_0(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}(X,\varepsilon)$$

ile tanımlanır. Bunlara ilaveten,

$$i(x) = \sup\{|x(s)-x(t)| - [x(s)-x(t)] : s,t \in I, t \leq s\}$$

ve

$$i(X) = \sup\{i(x) : x \in X\}$$

olarak tanımlıdır ve

"$i(X) = 0 \Leftrightarrow X'$e ait olan bütün fonksiyonlar I aralığında azalmayandır "

önermesi doğrudur.

4.5 Temel Sonuç II

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds, t \in I \tag{4.5.1}$$

lineer olmayan nonhomojen Volterra integral denklemini gözönüne alalım.

$a(t), f(u), \varphi(u), \phi(t,s)$ ve $(Tx)(t)$ bilinen fonksiyonlar ve $x = x(t)$ bilinmeyen fonksiyondur. Bu denklem için aşağıdaki hipotezlerin sağlandığını kabul edelim.

(i) $a \in C(I)$ ve a, I aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

(ii) $\phi : I \times I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. $t \to \phi(t,s), \forall s \in I$ için azalmayan bir fonksiyondur.

(iii) $f : Im\phi \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu süreklidir ve kompakt $Im\phi$ (ϕ nin görüntü kümesi) üzerinde azalmayandır.

(iv) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olduğunda sürekli bir fonksiyondur.

(v) $T : C(I) \to C(I)$ operatörü süreklidir ve sabit Q ile birlikte μ nonkompaktlık ölçüsü için Darbo şartını sağlar. Ayrıca T pozitif bir operatördür. Yani $x \geq 0$ için $(Tx) \geq 0$ dır.

(vi) $\forall x \in C(I)$ ve $\forall t \in I$ için $|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan c ve d sabitleri vardır.

(vii) $\|a\| + (c + d_{r_0})\|f\|M_{\varphi, r_0} \leq r_0$ eşitsizliğini sağlayan r_0 vardır ve $Q\|f\|M_{\varphi, r_0} < 1$ dir. Burada $M_{\varphi, r_0} = \max\{|\varphi(u)| : u \in [-r_0, r_0]\}$ dır.

Teorem 4.5.1. *Yukarıdaki* $(i) - (vii)$ *hipotezleri altında* (4.5.1) *denkleminin* $C(I)$ *uzayında en az bir* $x = x(t)$ *çözümü vardır ve bu çözüm* I *aralığında azalmayandır, [7].*

İspat. $C(I)$ uzayında A ve B operatörlerini,

$$(Ax)(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds$$

ve

$$(Bx)(t) = \int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds$$

olarak tanımlayalım ve $x \in C(I)$ ise $Ax \in C(I)$ olduğunu görelim:

$Ax \in C(I)$ olduğunu göstermek için $Bx \in C(I)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varepsilon > 0$ bir sabit, $x \in C(I), t_1, t_2 \in I$, $t_1 \leq t_2$ ve $t_2 - t_1 \leq \varepsilon$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
& |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| \\
= & \left| \int_0^{t_2} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_1} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds \right| \\
\leq & \left| \int_0^{t_2} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_2} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds \right| \\
& + \left| \int_0^{t_2} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_1} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds \right| \\
\leq & \int_0^{t_2} |f(\phi(t_2,s)) - f(\phi(t_1,s))| \, |\varphi(x(s))| \, ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} |f(\phi(t_1,s))| \, |\varphi(x(s))| \, ds
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$w_{f \circ \phi}(\varepsilon, .) = \sup\{|f(\phi(t,s)) - f(\phi(t',s))| : t, t', s \in I, |t - t'| \leq \varepsilon\}$$

olup, $M_{\varphi,\|x\|} = \max\{|\varphi(u)| : u \in [-\|x\|, \|x\|]\}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} |(Bx)(t_2)-(Bx)(t_1)| &\leq w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)M_{\varphi,\|x\|}t_2 + \|f\|M_{\varphi,\|x\|}(t_2-t_1) \\ &\leq w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)M_{\varphi,\|x\|} + \|f\|M_{\varphi,\|x\|}\varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $f\circ\phi$ fonksiyonunun $I\times I$ üzerindeki düzgün sürekliliğinden, $\varepsilon \to 0$ için $w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.) \to 0$ elde edilir. Böylece, $Bx \in C(I)$ ve sonuç olarak, $Ax \in C(I)$ olur. Üstelik $\forall t \in I$ için,

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &= \left|a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds\right| \\ &\leq \|a\| + (c+d\|x\|)\int_0^t |f(\phi(t,s))||\varphi(x(s))|ds \\ &\leq \|a\| + (c+d\|x\|)\|f\|M_{\varphi,\|x\|} \end{aligned}$$

dir. Buna göre, $\|Ax\| \leq \|a\| + (c+d\|x\|)\|f\|M_{\varphi,\|x\|}$ olur. Böylece $\|x\| \leq r_0$ ise (vii) şartından,

$$\|Ax\| \leq \|a\| + (c+dr_0)\|f\|M_{\varphi,r_0} \leq r_0$$

eşitsizliğine ulaşırız. Sonuç olarak A operatörü, $B_{r_0} = B[0,r_0]$ yuvarındaki elemanları yine B_{r_0} yuvarına taşır. Şimdide, A operatörünün B_{r_0} üzerinde sürekli olduğunu görelim. Bunun için $(x_n), B[0,r_0]$'da bir dizi olmak üzere, $x_n \to x$ iken $Ax_n \to Ax$ olduğunu gösterelim. $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned} &|(Ax_n)(t)-(Ax)(t)| \\ = &\left|(Tx_n)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x_n(s))ds - (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds\right| \\ \leq &\left|(Tx_n)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x_n(s))ds - (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x_n(s))ds\right| \\ &+\left|(Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x_n(s))ds - (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds\right| \\ \leq &|(Tx_n)(t)-(Tx)(t)|\int_0^t |f(\phi(t,s))|\,|\varphi(x_n(s))|ds \\ &+|(Tx)(t)|\int_0^t |f(\phi(t,s))|\,|\varphi(x_n(s))-\varphi(x(s))|ds \\ \leq &\|Tx_n - Tx\|\|f\|M_{\varphi,r_0} + (c+d_{r_0})\|f\|\int_0^t |\varphi(x_n(s))-\varphi(x(s))|ds \end{aligned}$$

ve φ fonksiyonu, $[-r_0, r_0]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ için, $|u - u^{'}| \leq \delta$ ve $u, u^{'} \in [-r_0, r_0]$ iken;

$$|\varphi(u) - \varphi(u^{'})| \leq \frac{\varepsilon}{2(c + d_{r_0})\|f\|}$$

olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır. Ayrıca, $\delta > 0$ için $n \geq n_0$ eşitsizliğini sağlayan bütün n'ler için $\|x_n - x\| \leq \delta$ olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır. Yani $\forall t \in I$ için $|x_n(t) - x(t)| \leq \delta$ dır. Sonuç olarak; $\forall s \in I$ için,

$$|\varphi(x_n(s)) - \varphi(x(s))| \leq \frac{\varepsilon}{2(c + d_{r_0})\|f\|}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} |(Ax_n)(t) - (Ax)(t)| &\leq \|Tx_n - Tx\|\|f\|M_{\varphi, r_0} + \\ &\quad + (c + d_{r_0})\|f\| \int_0^t |\varphi(x_n(s)) - \varphi(x(s))| ds \end{aligned}$$

eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax\| &\leq \|Tx_n - x\|\|f\|M_{\varphi, r_0} + (c + d_{r_0})\|f\| \frac{\varepsilon}{2(c + d_{r_0})\|f\|} \\ &\leq \|Tx_n - x\|\|f\|M_{\varphi, r_0} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. T sürekli olduğundan $\forall n \geq n_1$ için

$$\|Tx_n - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|M_{\varphi, r_0}}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç olarak $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ alınırsa, (4.5.2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax\| &\leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|M_{\varphi, r_0}} \|f\|M_{\varphi, r_0} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da A operatörünün B_{r_0} da sürekli olduğunu gösterir.

A operatörünün, B_{r_0} yuvarının alt kümesi olan $B^+_{r_0}$ üzerinde tanımlı olduğunu gözönüne alarak,

$$B^+_{r_0} = \{x \in B_{r_0} : x(t) \geq 0, t \in I\}$$

olarak tanımlayalım. $B_{r_0}^+$ kümesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir küme olduğu açıktır. $x \in B_{r_0}^+$ olsun. $(i),(iii),(iv),(v)$ hipotezlerinden, $t \in I$ için $x(t) \geq 0$ ise $(Ax)(t) \geq 0$ dır. Böylece, A, $B_{r_0}^+$'daki elemanları yine $B_{r_0}^+$'a taşır. Üstelik, A, $B_{r_0}^+$ üzerinde süreklidir.

Genelliği bozmaksızın $t_1 \leq t_2$ olduğunu kabul edelim. O zaman B operatörünün tanımından,

$$(Bx)(t_2) = \int_0^{t_2} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(s))ds,$$
$$(Bx)(t_1) = \int_0^{t_1} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds$$

olup,

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(t_2)-(Ax)(t_1)| \\
= \; & |a(t_2)+(Tx)(t_2)(Bx)(t_2)-a(t_1)-(Tx)(t_1)(Bx)(t_1)| \\
\leq \; & |a(t_2)-a(t_1)|+|(Tx)(t_2)(Bx)(t_2)-(Tx)(t_1)(Bx)(t_2)| \\
& +|(Tx)(t_1)(Bx)(t_2)-(Tx)(t_1)(Bx)(t_2)| \\
& +|(Tx)(t_1)(Bx)(t_2)-(Tx)(t_1)(Bx)(t_1)| \\
\leq \; & w(a,\varepsilon)+|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)|\int_0^{t_2}|f(\phi(t_2,s))||\varphi(x(s))|ds \\
& +|(Tx)(t_1)|\int_0^{t_2}|f(\phi(t_2,s))-f(\phi(t_1,s))||\varphi(x(s))|ds \\
& +|(Tx)(t_1)|\int_{t_1}^{t_2}|f(\phi(t_1,s))||\varphi(x(s))|ds \\
\leq \; & w(a,\varepsilon)+w(Tx,\varepsilon)\|f\|M_{\varphi,r_0}t_2+(c+d_{r_0})w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)M_{\varphi,r_0}t_2 \\
& +(c+d_{r_0})\|f\|M_{\varphi,r_0}(t_2-t_1) \\
\leq \; & w(a,\varepsilon)+w(Tx,\varepsilon)\|f\|M_{\varphi,r_0}+(c+d_{r_0})M_{\varphi,r_0}(w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)+\varepsilon\|f\|)
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$w(Ax,\varepsilon) \leq w(a,\varepsilon)+w(Tx,\varepsilon)\|f\|M_{\varphi,r_0}+(c+d_{r_0})M_{\varphi,r_0}(w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)+\varepsilon\|f\|)$$

olur. Sonuç olarak;

$$w(AX,\varepsilon) \leq w(a,\varepsilon)+w(TX,\varepsilon)\|f\|M_{\varphi,r_0}+(c+d_{r_0})M_{\varphi,r_0}(w_{f\circ\phi}(\varepsilon,.)+\varepsilon\|f\|)$$

dir. $f \circ \phi$ fonksiyonu $I \times I$ kümesi üzerinde ve a fonksiyonu da I üzerinde sürekli olduğundan $\varepsilon \to 0$ için $w_{f\circ\phi}(\varepsilon, .) \to 0$ ve $w(a, \varepsilon) \to 0$ elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için

$$w_0(AX) \leq \|f\| M_{\varphi, r_0} w_0(TX) \tag{4.5.3}$$

eşitsizliği elde edilir. $x \in X$, $t_1, t_2 \in I$ ve $t_1 \leq t_2$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| - [(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)] \\
= \; & |a(t_2) + (Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - a(t_1) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)| \\
& - (a(t_2) + (Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - a(t_1) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)) \\
\leq \; & [|a(t_2) - a(t_1)| - (a(t_2) - a(t_1))] \\
& + |(Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)| \\
& - ((Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)) \\
\leq \; & |(Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_2)| \\
& + |(Tx)(t_1)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)| \\
& - ((Tx)(t_2)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_2)) \\
& - ((Tx)(t_1)(Bx)(t_2) - (Tx)(t_1)(Bx)(t_1)) \\
\leq \; & [|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - ((Tx)(t_2) - (Tx)(t_1))](Bx)(t_2) \\
& + (Tx)(t_1)[|(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| - ((Bx)(t_2) - (Bx)(t_1))]
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

olur. Şimdi, $(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1) \geq 0$ olduğunu görelim:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_2} f(\phi(t_2, s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_1} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(s))ds \\
= \; & \int_0^{t_2} f(\phi(t_2, s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_2} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(s))ds \\
& + \int_0^{t_2} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_1} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(s))ds \\
= \; & \int_0^{t_2} (f(\phi(t_2, s)) - f(\phi(t_1, s)))\varphi(x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(s))ds
\end{aligned}$$

yazılabilir. $t \to \phi(t, s)$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $\phi(t_2, s) \geq \phi(t_1, s)$ dir. Diğer tarafan, f azalmayan olduğundan (iii) hipotezinden,

$$f(\phi(t_2, s)) - f(\phi(t_1, s)) \geq 0$$

dır. Ayrıca, $x(s) \geq 0$ olduğundan $\varphi(x(s)) \geq 0$ dır. O zaman

$$\int_0^{t_2} (f(\phi(t_2,s) - f(\phi(t_1,s)))\varphi(x(s))ds \geq 0 \tag{4.5.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer taraftan; $f \geq 0$ ve $\varphi(x(s)) \geq 0$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds \geq 0 \tag{4.5.6}$$

olur. Sonuç olarak (4.5.5) ve (4.5.6) eşitsizliklerinden,

$$\int_0^{t_2} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(s))ds - \int_0^{t_1} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(s))ds \geq 0$$

eşitsizliğine ve (4.5.4) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & |(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| - ((Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)) \\ \leq \quad & [|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - ((Tx)(t_2) - (Tx)(t_1))] \int_0^{t_2} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(s))ds \\ \leq \quad & \|f\| M_{\varphi,r_0} i(Tx) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece,

$$i(Ax) \leq \|f\| M_{\varphi,r_0} i(Tx)$$

olur. Sonuç olarak,

$$i(AX) \leq \|f\| M_{\varphi,r_0} i(TX) \tag{4.5.7}$$

olur. (4.5.3) ve (4.5.7) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \mu(AX) &= w_0(AX) + i(AX) \\ &\leq \|f\| M_{\varphi,r_0} \mu(TX) \\ &\leq \|f\| M_{\varphi,r_0} Q\mu(X) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.4.1, $\|f\| M_{\varphi,r_0} Q < 1$ olmak üzere (4.5.1) denkleminin bir $x \in B_{r_0}^+$ çözümünün varlığını garanti eder. Ayrıca bu çözüm, Teorem 4.4.1 ve (1). bölümde verilen μ nonkompaktlık ölçüsünün tanımına göre azalmayandır. □

4.6 Uyarılar

Uyarı 4.6.1. *Teorem* 4.5.1*'deki şartlar altında,*

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^1 f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds, \ t \in I$$

(Urysohn tipi) Volterra integral denkleminin $C(I)$ *uzayına ait ve* I *aralığında azalmayan en az bir* $x = x(t)$ *çözümünün mevcut olduğu gösterilebilir.*

Uyarı 4.6.2. $\varphi(x) = x$ *olsun. O zaman bu fonksiyon* (iv) *hipotezini sağlar ve* (4.5.1) *integral denklemi,*

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))x(s)ds$$

olur.

Uyarı 4.6.3. $\phi(t,s) = t - s$ *alalım.* ϕ *fonksiyonun* (ii) *hipotezini sağladığını görmek kolaydır. Bu durumda* (4.5.1) *integral denklemi,*

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(t-s)\varphi(x(s))ds$$

halini alır. Bu da konvolüsyon tipi integral denklemlerin özel bir şeklidir.

Uyarı 4.6.4.

$$\|a\| + (c + dr)\|f\|M_{\varphi,r} \le r \tag{4.6.1}$$

eşitsizliğinin pozitif çözümlerinin varlığı aşağıda incelenmektedir.

(vii) hipotezindeki eşitsizlik, (4.6.1) eşitsizliğinin özel bir halidir. $M_{\varphi,r} = \lambda r^3$ ve $\lambda > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varphi(x) = \lambda x^3$ olsun. O zaman aşağıdaki durumları gözönüne alabiliriz:

Eğer $d = 0$ ve $c > 0$ ise (4.6.1) eşitsizliği,

$$\|a\| + c\|f\|\lambda r^3 \le r$$

halini alır.

$$\psi(r) = c\|f\|\lambda r^3 - r + \|a\|$$

alalım. $\psi(0) = \|a\| > 0$ ve $\lim_{r\to-\infty}\psi(r) = -\infty$ için $r_1 \in (-\infty, 0)$ ve $\psi(r_1) = 0$ olacak şekilde bir r_1 vardır.

Şimdi, $\psi(r)$'nin diğer köklerinin kompleks olduğunu kabul edelim ve bu kökleri $\alpha + i\beta$ ve $\alpha - i\beta$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$\psi(r) = c\|f\|\lambda(r - r_1)\left((r-\alpha)^2 + \beta^2\right)$$

ve sonuç olarak $r > 0$ için $\psi(r) > 0$ olur. Böylece, eşitsizliğin pozitif çözümlerinin olmadığı anlaşılır.

Şimdi, $\psi(r)$'nin $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ köklerinin reel ve $\alpha_1 < 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\psi(r) &= c\|f\|\lambda(r-\alpha_1)(r-\alpha_2)(r-\alpha_3)\\ &= c\|f\|\lambda\left(r^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)r^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)r - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan, $c\|f\|\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 0$ veya buna denk olan $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$ eşitliği elde edilir. $\alpha_1 < 0$ ve $\psi(r)$ nin kökü varsa, $\|a\| > 0$ olmak üzere $\alpha_2 > 0$ ya da $\alpha_3 > 0$ dır. Sonuç olarak eşitsizliğin pozitif bir çözümü vardır.

$$d > 0 \text{ ve } \psi(r) = d\|f\|\lambda r^4 + c\|f\|\lambda r^3 - r + \|a\|$$

alalım ve $\psi(r)$ nin $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ köklerinin negatif olduğunu kabul edelim. O zaman Cardano'nun basit uygulamalarından $\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j = 0$ eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki herbir terim pozitif olduğundan toplam pozitiftir ve bu bir çelişkidir. Böylece eşitsizliğin en az bir çözümünün pozitif olması gerektiği anlaşılır.

Şimdi, $\psi(r)$ nin $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2$ şeklinde dört kompleks kökünün olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\psi(r) = d\|f\|\lambda\left((r-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right)\left((r-\alpha_2)^2 + \beta_2^2\right) \tag{4.6.2}$$

olur. (4.6.2) eşitliğinden, $r > 0$ için $\psi(r) > 0$ olduğu görülür. Böylece,

$$\|a\| + c\|f\|\lambda r^3 \leq r$$

eşitsizliğinin pozitif çözümlerinin olmadığı anlaşılır.

Uyarı 4.6.5. *Şimdi, Teorem* 4.5.1 *de verilen hipotezlere ilişkin bazı örnekler vereceğiz.*

Örnek 4.6.1. $a(t) = \frac{1}{2}$ *alalım. O zaman bu fonksiyon* (i) *kabulünü sağlar ve* $\|a\| = \frac{1}{2}$ *olur.* $\phi(t,s) = t$ *aldığımızda bu fonksiyonun* (ii) *kabulünü sağladığını kolayca görebiliriz.* $f \equiv 1$ *aldığımızda bu fonksiyon* (iii) *kabulünü sağlar ve* $\|f\| = 1$ *dir.* φ *özdeşlik fonksiyonu olsun bu durumda* φ *fonksiyonu* (iv) *kabulünü sağlar ve* $M_{\varphi,r} = r$ *dir.* $(Tx)(t) = -\alpha$, $\alpha > 0$ *alalım. Bu durumda* T*, pozitif bir operatör olmadığından* (v) *kabulünü sağlamaz. Burada* $c = \alpha, d = 0, Q = 0$ *alalım.* (vii) *kabülünün ilk eşitsizliği,* $\frac{1}{2} + \alpha r \leq r$ *şeklindedir. Burada* $r_0 = \frac{1}{2(1-\alpha)}$ $(\alpha < 1)$ *olarak alınan* r_0 *bu eşitsizliğin pozitif bir çözümüdür. Üstelik* $Q = 0$ *için* (vii) *kabulündeki ikinci eşitsizlik sağlanır. Bu durumda integral denklem,*

$$x(t) = \frac{1}{2} - \alpha \int_0^t x(s)ds$$

olur. $x(0) = \frac{1}{2}$ *alınırsa integral denklemin azalmayan bir* $x(t)$ *çözümü vardır bu çözüm* $t \in [0,1]$ *için* $x(t) \geq \frac{1}{2}$ *eşitsizliğini sağlar. Özellikle,* $x(1) \geq \frac{1}{2}$ *dir. Diğer taraftan, integral denklemden,*

$$x(1) = \frac{1}{2} - \alpha \int_0^1 x(s)ds$$

eşitliği elde edilir.

$$\alpha \int_0^1 x(s)ds > 0$$

olduğundan, $x(1) \leq \frac{1}{2}$ *olur ki bu bir çelişkidir.*

Örnek 4.6.2. a, ϕ *ve* f *fonksiyonlarını Örnek* 4.6.1*'deki gibi alalım.* $\varphi(x) = x - 1$ *olsun. Bu fonksiyon* (iv) *kabulünü sağlamaz. Üstelik* $M_{\varphi,r} = r + 1$ *dir.* $(Tx)(t) = \frac{1}{2}$ *alalım. Bu operatör,* (v) *ve* (vi) *kabullerini sağlar.* $c = \frac{1}{2}, d = 0, Q = 0$ *olmak üzere* (vii) *kabulündeki ilk eşitsizlik,*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(r+1) \leq r \tag{4.6.3}$$

şeklindedir. $r_0 = 2$, (4.6.3) *eşitsizliğinin pozitif bir çözümüdür. Ayrıca* $Q = 0$ *için* (vii) *kabulündeki ikinci eşitsizlik sağlanır. Bu durumda integral denklem,*

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t (x(s)-1)ds$$

şeklinde olur. $x(0) = \frac{1}{2}$ *alındığında bu integral denklem azalmayan bir* $x(t)$ *çözümüne sahip olur ve integral denklemden,*

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x(s)-1)ds \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x(1)-1)$$

ve böylece $x(1) \le \frac{1}{2}x(1)$ *eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak,* $x(1) \le 0$ *ve* $x(0) = \frac{1}{2}$ *olduğundan bu bir çelişkidir.*

Örnek 4.6.3. $a(t) = 1$ *alalım. O zaman* $\|a\| = 1$ *olur ve* (i) *kabulünü sağlar.* $\phi(t,s) = 1$ *ve* $(Tx)(t) = \frac{1}{2}$ *alalım.* $c = \frac{1}{2}, d = 0, Q = 0$ *alınırsa,* $(ii), (iv), (v)$ *kabulleri sağlanır.* $f(u) = -\frac{1}{2}$ *olarak alınan* f *fonksiyonu* (iii) *kabulünü sağlamaz.* φ *bir özdeşlik fonksiyonu olsun bu takdirde* $M_{\varphi,r} = r$ *olur ve* (vii) *kabulündeki eşitsizlik,*

$$1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}r \le r \tag{4.6.4}$$

olur ve $r_0 = \frac{4}{3}$, (4.6.4) *eşitsizliğinin bir çözümüdür. Bu durumda denklem,*

$$x(t) = 1 - \frac{1}{4}\int_0^t x(s)ds$$

olup, Örnek 4.6.1*'deki nedenlerle bu integral denklemin azalmayan çözümlere sahip olmadığı kolayca görülebilir.*

Uyarı 4.6.6.

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t)\int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds \tag{4.6.5}$$

integral denklemi; a, f, ϕ *ve* φ *fonsiyonları ile* T *operatörüne bağlıdır.* a, T, f, ϕ *ve* φ *fonksiyonları* $(i)-(vii)$ *hipotezlerini sağlarsa* $I(a,T,f,\phi,\varphi)$ *ya* **"kabul edilebilirdir"** *denir. Buna göre, Aşağıdakilerin sağlandığını görmek kolaydır.*

(a) *Kabul edelim ki* $a_1, a_2 \in C(I)$ *fonksiyonları* (i) *şartını sağlasın. O zaman* $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ *fonksiyonu da* $\lambda \in [0,1]$ *için* (i) *şartını sağlar. Yani* $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in C(I)$

dır,

(b) $\phi_1, \phi_2 : I \times I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları* (ii) *kabulünü sağlasın. Bu takdirde* $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ *fonksiyonu da* $\lambda \in [0,1]$ *için* (ii) *şartını sağlar,*

(c) f_1, f_2 *fonksiyonları kompakt D kümesi üzerinde tanımlanan ve* (iii) *şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. O zaman* (iii) *kabulü,* $\lambda \in [0,1]$ *olmak üzere* $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$ *fonksiyonu için de sağlanır,*

(d) φ_1 *ve* φ_2*,* $\mathbb{R}$ *üzerinde tanımlanan ve* (iv) *şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu taktirde* $\lambda \in [0,1]$ *olmak üzere* (iv) *şartı,* $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ *fonksiyonu için de sağlanır,*

(e) $T_1, T_2 : C(I) \to C(I)$ *iki operatör olsun. Bu operatörler* (v) *ve* (vi) *şartlarını* Q_i, c_i, d_i $(i = 1,2)$ *sabitleri için sağladıkları takdirde* $\lambda \in [0,1]$ *için* $\lambda T_1 + (1-\lambda) T_2$ *operatörü de* (v) *ve* (vi) *kabullerini* $\lambda Q_1 + (1-\lambda) Q_2, \lambda c_1 + (1-\lambda) c_2$ *ve* $\lambda d_1 + (1-\lambda) d_2$ *sabitleri ile birlikte sağlar,*

(f) (vii) *kabulü ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:*

Kabul edelim ki $I(a_1, T_1, f_1, \phi_1, \varphi_1)$ *ve* $I(a_2, T_2, f_2, \phi_2, \varphi_2)$ *"kabul edilebilir" olsunlar yani* $(i)-(vii)$ *hipotezlerini sağlasınlar. O zaman*

$I(\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2, \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2, \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2, \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, \lambda\varphi_1 +$

$(1-\lambda)\varphi_2)$ *"kabul edilebilir" olmayacak şekilde bir* $\lambda \in [0,1]$ *bulunabilir. Aşağıdaki örnek buna ilişkindir.*

Kabul edelim ki $I(a_1, T_1, f_1, \phi_1, \varphi_1), a_1(t) = t, (T_1 x)(t) = \frac{1}{2}, \phi_1(t,s) = t$ *ve* $f_1 : I \to \mathbb{R}$ $f_1(u) = u$ *ve* $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir özdeşlik fonksiyonu olsun. Bu durumda* (vii) *kabulündeki eşitsizlik,* $1 + \frac{1}{2} r \leq r$ *olup* $r_0 = 2$*, bu eşitsizliğin pozitif bir çözümüdür. Üstelik* $Q_1 = 0$ *için* (vii) *kabulündeki ikinci eşitsizlik sağlanır. Böylece,* $I(a_1, T_1, f_1, \phi_1, \varphi_1)$ *"kabul edilebilir"dir.*

Şimdi, $I(a_2, T_2, f_2, \phi_2, \varphi_2), a_2(t) = \frac{1}{2}, (T_2 x)(t) = \frac{1}{3} x(t), \phi_1 = \phi_2, f_1 = f_2$ *ve* $\varphi_1 = \varphi_2$ *olarak verilsin. Bu durumda* (vii) *hipotezindeki ilk eşitsizlik,* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} r^2 \leq r$ *olur.* $r_0 = 1$*, bu eşitsizliğin bir çözümüdür. Üstelik,*

$$Q_2 \|f_2\| M_{\varphi_2, r_0} = Q_2 \|f_2\| r_0 = \frac{1}{3} < 1$$

olur. Böylece, $I(a_2, T_2, f_2, \phi_2, \varphi_2)$ *"kabul edilebilir" dir. Bu durumda,*

$I(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2, \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2, \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2, \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, \lambda\varphi_1 +$ $(1-\lambda)\varphi_2)$ "kabul edilebilir" olmayacak şekilde bir $\lambda \in (0,1)$ in olduğunu göstereceğiz. Şu halde,

$$\|\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2\| = \left\|\lambda t + (1-\lambda)\frac{1}{2}\right\| = \lambda + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} |(\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2)(x)(t)| &\leq \lambda|(T_1x)(t)| + (1-\lambda)|(T_2x)(t)| \\ &\leq \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 + (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)\|x\| \\ &= \frac{\lambda}{2} + (1-\lambda)\frac{1}{3}\|x\| \end{aligned}$$

ve $f_1 = f_2$ için,

$$\|\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\| = \|f_1\| = \|f_2\| = 1$$

olur. Üstelik, $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ ise o zaman,

$$M_{\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2, r} = M_{1,r} = r$$

ve (vii) deki ilk eşitsizlik,

$$\frac{1}{2}(\lambda+1) + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{3}r\right)r \leq r$$

veya buna denk olan

$$2(1-\lambda)r^2 + (3\lambda-6)r + 3(\lambda+1) \leq 0$$

eşitsizliğidir. Böylece,

$$2(1-\lambda)r^2 + (3\lambda-6)r + 3(\lambda+1) \leq 0$$

eşitsizliğinin diskriminantı $\Delta = 33\lambda^2 - 36\lambda + 8$ dir. $\lambda \in (0,1)$ için $\Delta < 0$ olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak eşitsizliğin pozitif bir çözümünün olmadığı yani, $I(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2, \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2, \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2, \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, \lambda\varphi_1 +$ $(1-\lambda)\varphi_2)$ nin "kabul edilebilir" olmadığı anlaşılır.

Şimdi, ”kabul edilebilir” iki fonksiyonun herhangi lineer konveks kombinasyonunun da ”kabul edilebilir” olması için yeterli olan şartı verelim:

Teorem 4.6.1. *Kabul edelim ki $I(a_1, T_1, f_1, \phi_1, \varphi_1)$ ve $I(a_2, T_2, f_2, \phi_2, \varphi_2)$ ”kabul edilebilir” olsunlar ve $Im\phi_1 = Im\phi_2$ ve $r_0 > 0$ sayısı,*

$$\max(\|a_1\|, \|a_2\|) + (\max(c_1, c_2) + \max(d_1, d_2)r) \max(\|f_1\|, \|f_2\|) \max(M_{\varphi_1, r}, M_{\varphi_2, r}) \leq r$$

eşitsizliğini sağlasın ve üstelik

$$\max(Q_1, Q_2) \max(\|f_1\|, \|f_2\|) \max(M_{\varphi_1, r}, M_{\varphi_2, r}) < 1$$

olsun. O zaman $I(\lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1)a_2, \lambda_2 T_1 + (1-\lambda_2)T_2, \lambda_3 f_1 + (1-\lambda_3) f_2, \lambda_4 \phi_1 + (1-\lambda_4)\phi_2, \lambda_5 \varphi_1 + (1-\lambda_5)\varphi_2,\ \lambda_i \in [0,1]$ $(i = 1,2,3,4,5)$ için ”kabul edilebilir”dir, [7].

İspat. $(i)-(vi)$ hipotezlerinin sağlandığı açıktır. Şimdi, (vii) kabulündeki eşitsizliği sağlayalım. Bu eşitsizlik,

$$\begin{aligned} & \|\lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1)a_2\| + (\lambda_2 c_1 + (1-\lambda_2)c_2 \\ + \quad & (\lambda_2 d_1 + (1-\lambda_2)d_2)\, r) \|\lambda_3 f_1 + (1-\lambda_3) f_2\| M_{\lambda_5\varphi_1 + (1-\lambda_5)\varphi_2, r} \leq r \qquad (4.6.6) \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.6.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \|\lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1)a_2\| + (\lambda_2 c_1 + (1-\lambda_2)c_2 + \\ & \lambda_2 d_1 + (1-\lambda_2)d_2)\, r \|\lambda_3 f_1 + (1-\lambda_3) f_2\| M_{\lambda_5\varphi_1 + (1-\lambda_5)\varphi_2, r} \\ \leq \quad & (\max(c_1, c_2) + \max(d_1, d_2)r) \max(\|f_1\|, \|f_2\|) \max\left(M_{\varphi_1, r}, M_{\varphi_2, r}\right) \\ & + \max(\|a_1\|, \|a_2\|) \qquad (4.6.7) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Hipotezler de dikkate alınarak (4.6.7) eşitsizliğinin bir $r_0 > 0$ çözümüne sahip olduğu görülür. (vii) kabulündeki ikinci eşitsizliğin sağlandığı da benzer şekilde görülebilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.6.1’in özel bir durumunu, aşağıdaki teorem ile sonuç olarak verelim:

Teorem 4.6.2. *Kabul edelim ki* $I(a_1,T_1,f_1,\phi_1,\varphi_1)$ *ve* $I(a_2,T_2,f_2,\phi_2,\varphi_2)$ *"kabul edilebilir" olsunlar ve Teorem* 4.6.1 *deki hipotezleri sağlasınlar. O zaman* $I(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2,\lambda T_1+(1-\lambda)T_2,\lambda f_1+(1-\lambda)f_2,\lambda\phi_1+(1-\lambda)\phi_2,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2$ *kabul edilebilirdir, [7].*

4.7 Örnekler

Bu kısımda Teorem 4.5.1 deki çözümün varlığıyla ilgili basit örnekler vereceğiz.

Örnek 4.7.1.

$$x(t)=t^3+x(t)\int_0^t \frac{\ln(1+\sqrt{t+s})}{x^2(s)+1}ds$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $a(t)=t^3$*'tür. Bu fonksiyon* (i) *şartını sağlar.* $\|a\|=1$ *dir. Bu durumda* $\phi(t,s)=\sqrt{t+s}$ *olup* ϕ*,* (ii) *kabulünü sağlar.* $f:[0,\sqrt{2}]\to\mathbb{R}_+$*,* $f(u)=\ln(1+u)$ *olarak verilen f fonksiyonu,* (iii) *kabulünü sağlar ve* $\|f\|=\ln(1+\sqrt{2})$ *dir.* $\varphi(v)=\frac{1}{t^2+1}$ *dir ve bu fonksiyon* (iv) *kabulünü sağlar. Üstelik bu fonksiyon* $v_0=0$ *için mutlak maksimuma sahiptir ve* $M_{\varphi,r}=\varphi(0)=1$ *olur.* $(Tx)(t)=x(t)$ *olup T operatörü,* $c=0,d=1$ *ve* $Q=1$ *ile birlikte* (v) *ve* (vi) *kabullerini sağlar. Bu durumda* (vii) *deki ilk eşitsizlik,*

$$1+r\ln(1+\sqrt{2})\leq r \tag{4.7.1}$$

şeklinde olup $r_0=\frac{1}{1-\ln(1+\sqrt{2})}$*,* $(4.7.1)$ *eşitsizliğinin pozitif bir çözümüdür. Ayrıca,*

$$Q\|f\|M_{\varphi,r}=\ln(1+\sqrt{2})<\ln e=1$$

olduğundan Teorem 4.5.1*, verilen integral denklemin azalmayan bir çözümü olduğunu garanti eder.*

Örnek 4.7.2.

$$x(t)=\sqrt{t}+\int_0^t e^{t+\sqrt{s}}\sqrt{x(s)}ds \tag{4.7.2}$$

denklemini gözönüne alalım. $a(t) = \sqrt{t}$ *olsun. Bu fonksiyon* (i) *kabulünü sağlar ve* $\|a\| = 1$ *dir.* $\phi(t,s) = t + \sqrt{s}$ *alalım. Bu fonksiyon da* (ii) *kabulünü sağlar.* $f : [0,2] \to \mathbb{R}_+$ *olsun.* $f(u) = e^u$ *ile verilen* f *fonksiyonu,* (iii) *kabulünü sağlar ve* $\|f\| = e^2$ *dir.* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ve*

$$\varphi(v) = \begin{cases} 0 & , \quad v \leq 0 \text{ ise} \\ \sqrt{v} & , \quad v \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan φ *fonksiyonu* (iv) *kabulünü sağlar ve* $M_{\varphi,r} = \sqrt{r}$ *dir.* $(Tx)(t) = 1$ *olsun.* T *operatörü* (v) *ve* (vi) *şartını,* $Q = 0, c = 1$ *ve* $d = 0$ *için sağlar. Bu durumda* (vii) *kabulü,* $1 + e^2\sqrt{r} \leq r$ *olur ve* $r_0 = 100$*, bu eşitsizliğin bir çözümüdür. Üstelik* $Q = 0$ *için* (vii) *deki ikinci eşitsizlik sağlanır. Teorem* 4.5.1*,* (4.7.2) *integral denkleminin azalmayan bir çözümü olduğunu garanti eder.*

KAYNAKLAR

[1] G. Aslım, Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988.

[2] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Basel: Boston: Berlin, 1997.

[3] J. Banas, B. Rzepka, *On Existence and Asymptotic Stability of Solutions of Nonlinear Integral Equation,* J. Math. Anal. Appl. **284**(2003), 165-173.

[4] J. Banas, J. Rocha, K. B. Sadarangani, *Sovabilility of a Nonlinear Integral Equation of Volterra Type,* Journal of Computational and Applied Mathematics. **157**(2003), 31-48.

[5] J. Banas, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, Vol. **60**, 1980.

[6] J. Banas, A. Martinon, *Monotonic Solutions of a Quadratic Integral Equation of Volterra Type,* Computers and Mathematics with Applications, **47**(2004), 271-279.

[7] J. Caballero, J. Rocha, K. Sadarangani, *On Monotonic Solutions of an Integral Equation of Volterra Type,* Journal of Computational and Applied Mathematics **174**(2005), 119-133.

[8] R. Johnsonbaugh, W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[9] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.

[10] I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press. Cambridge, 1970.

[11] B. L. Moiseiwitsch, Integral Equations, Longman Group Limited New York, 1977.

[12] B. Musayev, M. Alp, Fonksiyonel Analiz, Kütahya, 2000.

[13] K. Taşkıran, Lineer Olmayan Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2008.

[14] A. E. Taylor, Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1967.

[15] Ö. F. Temizer, Volterra İntegral Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılı Malatya doğumludur. İlk ve Orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1994 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 1998 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nın Matematik Öğretmenliği kadrosuna atandı.

2006-2007 Eğitim Öğretim yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir Orta Öğretim Kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.