T.C.

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPLANABİLME METOTLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN OPERATÖRLERİN ERGODİKLİĞİ

Abdulkadir BORAZAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2008

İçindekiler

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda danışmanlığımı üstlenen, bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayan, hiçbir zaman yakın ilgi ve alâkalarını esirgemeyen değerli hocam sayın Doç.Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN' a minnet ve şükranlarımı sunarım. Akademik çalışmaları ve bölümdeki görevlerinin yanısıra ikinci tez danışmanlığı gibi zahmetli bir görevi üstlenen ve bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Doç.Dr. Celal ÇAKAN' a, sıcak ilgileri ile her konuda yardımcı olan Doç.Dr. Bilal ALTAY' a ve Dr. İsmet ÖZDEMİR' e devamlı destek ve teşvikte bulunan diğer arkadaşlarıma ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde; lineer fonksiyonel, Banach limitleri ve hemen hemen yakınsaklık hakkında tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; ölçü, ölçü uzayı, ölçülebilir fonksiyon ve matris dönüşümü kavramları verildi. Ayrıca dizi uzaylarında tanımlanan matris dönüşümleri üzerine bazı sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde; ergodik dönüşüm tanıtılarak, hemen hemen yakınsak dizilerin ve matrislerle tanımlanan bir altlineer fonksiyonelin ergodik uygulamaları verildi.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems corcernned with linear functional, Banach limits and almost convergence are given.

In the second chapter, the concepts measure, measure space and measurable functions are given. Futhermore, the matrix transformations and some result on matrix transformations in sequence spaces are also presented.

In the third chapter, the ergodicity of a measure preserving transformations is introduced, an ergodic application of almost convergent sequences and a sublinear functional involving infinite matrices are given.

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$	: Reel sayıların cümlesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
w	: Reel terimli bütün dizilerin uzayı
l_∞	: Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	: Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
cs	: Yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_1	: Reel terimli mutlak yakınsak dizilerin uzayı
f	: Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$B = (b_{nk})$	: Reel terimli sonsuz bir matris
(X, Y)	: X den Y ye tanımlı matrislerin cümlesi
$\lim_n$	: $\lim_{n\to\infty}$
$\sum_k$	: $\sum_{k=0}^{\infty}$
$R(T)$	: T dönüşümünün görüntü cümlesi
$N(T)$	: T dönüşümünün sıfır uzayı
$w - \lim_n$	: Zayıf limit

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Lineer Uzay ve Lineer Fonksiyoneller

Bu kesimde daha sonraki bölümlere hazırlık olması bakımından gerekli görülen temel tanımlara yer verildi.

TANIM 1.1.1. **(Lineer Uzay)** [**15**, syf 69]: L Boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. Eğer $x, y \in L, \quad \lambda \in \mathbb{K}$ için

$$+ : L \times L \to L$$
$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times L \to L$$
$$(\lambda, y) \to \lambda y$$

ile tanımlanan fonksiyonları her $x, y, z \in L$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar ise L cümlesine, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay** denir.

$(L1)$ $x + y = y + x$,

$(L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$(L3)$ Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,

$(L4)$ Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır,

$(L5)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

$(L6)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

$(L7)$ $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,

$(L8)$ $1x = x$.

Lineer uzay tanımında geçen bu $\mathbb{K}$ cismine (lineer uzayın) skaler cismi, $\mathbb{K}$ nın elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzay deyimi yerine vektör uzayı deyimi de kullanılır. Bu durumda L nin elemanlarına genellikle vektör denir. θ bazen 0 ile de gösterilir. $+$ ve $\cdot$ işlemlerine kısaca lineer uzay işlemleri denir. Burada $(L5)$ şartındaki $+$ sembolünün iki anlamda kullanıldığına dikkat edilmelidir. Birinci taraftaki $+$ işareti $\mathbb{K}$ deki toplamayı; ikinci taraftaki ise L deki toplamayı belirtmektedir. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ olması halinde L ye gerçel, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması halinde ise L ye kompleks lineer uzay denir. Burada θ ve $(-x) \in L$ elemanlarına sırasıyla L nin birim elemanı ve $x \in L$ nin toplama işlemine göre tersi denir. $(L8)$ deki $'1'$ ise $\mathbb{K}$ cisminin çarpma işlemine göre birim elemanıdır.

Gerçel terimli bütün dizilerin ω, yani;

$$\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) | \; x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

cümlesi dizilerin koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemi olarak bilinen,
$x = (x_n), y = (y_n) \in \omega$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$+ : (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \qquad \cdot : \lambda.(x_n) = (\lambda x_n)$$

işlemleriyle bir lineer uzay teşkil eder.

Tanım 1.1.2. **(Lineer Altuzay)** [**15**, syf 73]: L, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, L nin bir alt cümlesi olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve her $a \in \mathbb{K}$ için $ax + y \in M$ ise M ye L nin bir **lineer altuzayı** veya sadece altuzayı denir.

Tanım 1.1.3. **(Dizi Uzayı)**[**5**, syf 243]: Gerçel terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her altuzayına **dizi uzayı** denir.

Önemli bazı dizi uzayları; ℓ_∞, c, c_0, cs ve ℓ_1 ile gösterilen; sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak, yakınsak seri oluşturan ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır. Bu uzaylar;

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) \in w| \quad \sup_k |x_k| < \infty\}$$

$$c = \{x = (x_k) \in w| \quad \lim_k x_k \ \text{ mevcut}\}$$

$$c_0 = \{x = (x_k) \in w| \quad \lim_k x_k = 0\}$$

$$cs = \{x = (x_k) \in w| \quad \sum_k x_k \ \text{ yakınsak}\}$$

$$\ell_1 = \{x = (x_k) \in w| \quad \sum_k |x_k| < \infty\}$$

şeklinde karekterize edilebilir. Bu uzaylar arasında $\ell_1 \subset cs \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ şeklinde bir kapsama bağıntısı mevcuttur.

Tanım 1.1.4. **(Lineer Dönüşüm)[15**, syf 109]: L ve M aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to M$ fonksiyonu, her $x, y \in L$ ve $a \in \mathbb{K}$ için,

$$T(ax + y) = aT(x) + T(y)$$

eşitliğini sağlar ise bir **lineer dönüşüm** adı verilir.

Tanım 1.1.5. **(Lineer Fonksiyonel)[15**, syf 109]: L bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay olmak üzere $f : L \to \mathbb{K}$ lineer dönüşümüne bir **lineer fonksiyonel** denir.

Burada görüldüğü üzere lineer fonksiyonel, gerçel veya kompleks değerli lineer bir dönüşümdür.

$$L^* = \{f : L \to \mathbb{R} : f \ \text{ lineer ve sürekli}\}$$

cümlesine L nin sürekli duali denir.

Örnek 1.1.1. Yakınsak dizilerin uzayı üzerinde $\ell(x) = \lim_n x_n$ ile tanımlanan $\ell : c \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 1.1.6. **(Altlineer Fonksiyonel)[16**, syf 55]: $f : L \to \mathbb{K}$ fonksiyoneli verildiğinde, her $x, y \in L$ için

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f ye **alttoplamsal**, her $x \in L$ ve negatif olmayan a gerçel sayısı için,

$$f(ax) = af(x)$$

ise f ye **homojendir** denir.

Hem alttoplamsal hem de homojen olan bir f fonksiyoneline, **altlineer fonksiyonel** denir.

Örnek 1.1.2. Sınırlı dizilerin uzayı üzerinde $f(x) = \limsup_n x_n$ ile tanımlanan $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ bir alt lineer fonksiyoneldir.

Tanım 1.1.7. **(Normlu Lineer Uzay)**[**15**, syf 103]: L, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu, her $x, y \in L$ ve her $a \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna L üzerinde bir **norm** ve $(L, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya kısaca normlu uzay denir.
$(N1)$ $\|x\| \geq 0$,
$(N2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
$(N3)$ $\|ax\| = |a|\|x\|$,
$(N4)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 1.1.8. [**5**, syf 66]: L boş olmayan bir cümle olsun. L nin altcümlelerinin boş olmayan bir sınıfı τ olsun. τ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ'ya L üzerinde bir topoloji ve (L, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir.

$(T1)$ $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,

$(T2)$ $\forall i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$,

$(T3)$ $i = 1, 2, ..., n$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

TANIM 1.1.9. : $(X,\tau),(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0)$'ın her N komşuluğu için $f^{-1}(N)$ x_0'ın bir komşuluğu ise, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

TANIM 1.1.10. [**15**, syf 93]: $(L,\mathbb{K})$ üzerinde topolojik yapı bulunan bir lineer uzay olsun. Eğer lineer uzayın toplama ve skalerle çarpma işlemleri bu topolojiye göre sürekli ise L uzayına **topolojik lineer uzay** denir.

TANIM 1.1.11. [**15**, syf 79]: L lineer uzayının boş olmayan bir E cümlesi olsun. Eğer $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere $x,y \in E$ ve $\lambda+\mu = 1$ iken $\lambda x + \mu y \in E$ ise E'ye konveks cümle denir.

TANIM 1.1.12. **(Lokal Konveks Uzay)[17]**: Bir L topolojik vektör uzayında, 0 ın her komşuluğu 0 ın konveks bir komşuluğunu kapsıyorsa, L'ye **lokal konveks uzay** denir.

TANIM 1.1.13. [**8**, syf 67]: X bir lineer topolojik uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer her $x^* \in X^*$ için $x^*x = \lim_n x^*x_n$ olacak şekilde bir $x \in X$ var ise (x_n) dizisine zayıf yakınsaktır denir ve x noktasına dizinin zayıf limiti denir. $A \subset X$ olsun. A cümlesindeki her (x_n) dizisi X de bir noktaya zayıf yakınsak olan bir alt dizi içeriyorsa A cümlesine zayıf dizisel kompaktır denir.

TANIM 1.1.14. **(Yakınsak Dizisi)[12**, syf 67]: L normlu uzay ve $(x_n), L$ de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine L de **yakınsak dizi** denir ve $x_n \to x \quad (n \to \infty)$ veya $\lim_n x_n = x$ yazılır.

TANIM 1.1.15. **(Cauchy Dizisi)[12**, syf 67]: (x_n), $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

TANIM 1.1.16. **(Tam Uzay)**: Eğer L normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise L ye tam uzay denir.

TANIM 1.1.17. **(Banach Uzayı)[15,** syf 104]:$(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı tam ise bu uzaya **Banach Uzayı** denir. Buradaki tamlık, L deki her (x_n) dizisi için $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ olduğunda, $n \to \infty$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir $x \in L$ nin mevcut olması demektir.

ÖRNEK 1.1.3. c ve ℓ_∞ dizi uzayları, $\|x\| = \sup |x_n|$ normu ile birer Banach uzayıdırlar.

TEOREM 1.1.1. ***(Hahn-Banach Genişletme Teoremi)*[15,** syf 133]*: L bir lineer uzay, M bunun bir özaltuzayı ve $p : L \to \mathbb{R}$ bir altlineer fonksiyonel olsun. Eğer f, M üzerinde her $x \in M$ için $f(x) \leq p(x)$ olacak şekilde bir lineer fonksiyonel ise bu takdirde her $x \in L$ için $g(x) \leq p(x)$ olacak şekilde f'nin L'ye bir g genişletmesi vardır.*

1.2. Banach Limitleri ve Hemen Hemen Yakınsaklık

Hahn-Banach teoreminin gerçel değerli bütün sınırlı dizilerin lineer uzayına uygulanması, Banach limit kavramının doğmasına neden olmuştur. Banach limitleri ilk olarak fonksiyonel analizin öncülerinden Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından verilmiştir. Lorentz [**13**] ; Banach limitlerinden yola çıkarak hemen hemen yakınsak dizi kavramını tanımlamıştır. Shift(Kaydırma) operatörü altında invaryant kalan ve c üzerindeki $\ell(x) = \lim_n x_n$ lineer fonksiyonelinin ℓ_∞ uzayına genişletmesi olan ve negatif olmayan bazı lineer fonksiyoneller ilk defa Banach tarafından tanıtıldı. Bu tip fonksiyoneller daha sonra Banach limiti olarak isimlendirildi.

TANIM 1.2.1. **(Banach limiti)[5]**: Bir $\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyor ise ϕ'ye bir **Banach limiti** denir:
(i) Her $n = 0, 1, 2, ...$ için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x_n) \geq 0$,
(ii) $\phi(e) = 1, \quad e = (1, 1, 1, ...)$,
(iii) $\phi(x) = \phi(Dx), \quad Dx = D(x_n) = x_{n+1}$.
Bütün Banach limitlerinin cümlesi β olsun. Bu takdirde;

Teorem 1.2.1. [**5**, syf 261]*: $\beta \neq \emptyset$, $q : \ell_\infty \to \mathbb{R}$*

$$q(x) = \limsup_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

ile tanımlansın. Bu taktirde q bir altlineer fonksiyonel ve

$$-q(-x) = \liminf_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

dir. Eğer $x \in c$ ise

$$f(x) = \lim_n x_n = \lim_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = q(x)$$

dir. Öyleyse Hahn-Banach teoremine göre her $x \in \ell_\infty$ için

$$-q(-x) \leq \phi(x) \leq q(x)$$

olacak şekilde f'nin c den ℓ_∞'a bir ϕ genişletmesi vardır. $x \in \ell_\infty$ için

$$q(x - Dx) = \limsup_n \frac{x_{n+1} - x_n}{n} = 0$$

olduğundan ϕ bir Banach limitidir.

Teorem 1.2.2. [**5**, syf 262]*: $\phi \in \beta$ ise $x \in \ell_\infty$ için*

$$\liminf_n x_n \leq \phi(x) \leq \limsup_n x_n$$

dir.

İspat. Sınırlı bir x dizisi için $\liminf_n x_n$ ve $\limsup_n x_n$ sırasıyla $\lim_k \inf_{n \geq k} x_k$ ve $\lim_k \sup_{n \geq k} x_k$ ile tanımlı ve Banach limiti shift operatörü altında değişmez olduğundan sadece

$$\inf x_n \leq \phi(x_{n_0}) \leq \inf x_n + \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 seçebiliriz. O halde her n için

$$x_n + \varepsilon - x_{n_0} > 0$$

dır. ϕ Banach limitinin özelliklerinden

$$\phi(x) + \varepsilon \geq x_{n_0} \geq \inf x_n$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan $\phi(x) \geq \inf x_n$.
Supremum özelliğinden $\phi(x) \leq \sup x_n$ olduğu gösterilir. $\square$

Bütün Banach limitleri çakışık olan dizileri karekterize etmek için diğer bir altlineer fonksiyonel tanımlamak uygundur.

$$p : \ell_\infty \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \inf \lim_j \sup \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i+j}$$

ile tanımlansın. Burada infimum $n_1, n_2, ..., n_k$ tamsayılarının cümlesi üzerinden alınmaktadır. Açık olarak

$$-p(-x) = \sup \lim_j \inf \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i+j}$$

ve p hakkında aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

TEOREM 1.2.3. [**5**, syf 262]*: $\phi \in \beta$ ve $x \in \ell_\infty$ ise bu taktirde*

$$\liminf x_n \leq -p(-x) \leq \phi(x) \leq p(x) \leq \limsup x_n$$

dir.

TEOREM 1.2.4. [**5**, syf 262]*: p, ℓ_∞ üzerinde bir altlineer fonksiyoneldir.*

ℓ_∞ üzerindeki bu p altlineer fonksiyoneli c üzerinde ℓ lineer fonksiyoneline baskın; yani, her $x \in c$ için $\ell(x) \leq p(x)$ olduğundan teorem 1.2.1 i p altlineer fonksiyonelini kullanarak da ispatlayabiliriz.
Gerçekten Hahn-Banach teoremi gereğince $\forall x \in \ell_\infty$ için

$$-p(x) \leq \phi(x) \leq p(x)$$

olacak şekilde ℓ nin ℓ_∞'a bir ϕ genişletmesi vardır ki bu da Banach limitidir.

x bir yakınsak bir dizi ise her $\phi \in \beta$ için

$$\phi(x) = \ell(x) = \lim_n x_n$$

olduğundan, yakınsak bir dizinin bütün Banach limitleri çakışıktır. Bununla beraber, bütün Banach limitleri çakışık olan fakat yakınsak olmayan dizilerde vardır. Örneğin, $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ ise her $\phi \in \beta$ için

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}[\phi(x) + \phi(Dx)] \\ &= \frac{1}{2}\phi(x + Dx) \\ &= \frac{1}{2}\phi(e) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Banach limitlerinin tekliği için aşağıdaki sonuç bilinir.

TEOREM 1.2.5. *: Sınırlı bir x dizisinin bütün Banach limitlerinin çakışık olması için gerek ve yeter şart $p(x) = -p(-x)$ dir.*

TANIM 1.2.2. **(Hemen Hemen Yakınsak Dizi)**[**13**]: Sınırlı bir x dizisinin bütün Banach limitleri sabit bir s sayısı ise x dizisi s'ye **hemen hemen yakınsak** dır denir ve $f - \lim x = s$ ile gösterilir. Hemen hemen yakınsak bütün dizilerin cümlesi f ile gösterilir.

Lorentz hemen hemen yakınsak dizileri aşağıdaki teoremle karekterize etti.

TEOREM 1.2.6. [**13**]*: Sınırlı bir x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart n'ye göre düzgün olarak*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + ... + x_{n+p-1}}{p} = s$$

olacak şekilde bir s sayısının bulunmasıdır.

BÖLÜM 2

ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

2.1. Ölçü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar

TANIM 2.1.1. [**1**, syf 15]: X boş olmayan bir cümle ve $\mathcal{A}$, X in boş olmayan altcümlelerinden oluşan bir sınıf olsun. Eğer $\mathcal{A}$ aşağıdaki özellikleri sağlar ise $\mathcal{A}$ ya X üzerinde bir σ-**cebir** denir.

$$(i)\quad X \in \mathcal{A}$$

$$(ii)\quad \text{Her}\quad A \in \mathcal{A}\quad \text{için}\quad A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}, \quad \text{ve}$$

$$(iii)\quad \text{Her}\quad n \in N\quad \text{için}\quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir cümleye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme denir.

TANIM 2.1.2. : X bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{A}, X$' in tüm açık (kapalı) cümlelerini kapsayan en küçük σ-cebir ise $\mathcal{A}$'ya **Borel cebiri** denir. Böylece elde edilen $(X, \mathcal{A})$ ikilisine **Borel uzayı** ve $\mathcal{A}$'nın elemanlarına da **Borel ölçülebilir cümleler** denir.

TEOREM 2.1.1. [**4**]*: $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve Y, X'in boş olmayan bir altcümlesi olsun. Bu durumda $\mathcal{A}_Y = \{Y \cap A | A \in \mathcal{A}\}$ sınıfı Y üzerinde bir σ-cebirdir.*

Bu durumda $(Y, \mathcal{A}_Y)$ ikilisine $(X, \mathcal{A})$ nın altölçülebilir uzayı denir.

TANIM 2.1.3. [**4**]: $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ iki ölçülebilir uzay olmak üzere $f : X_1 \to X_2$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $A_2 \in \mathcal{A}_2$ için $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$ ise f'ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.1.2. [**4**]*: $(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay olmak üzere $f: X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$i)\ \{x \in X: \ f(x) > \alpha\} \text{ ölçülebilirdir.}$$

$$ii)\ \{x \in X: \ f(x) \geq \alpha\} \text{ ölçülebilirdir.}$$

$$iii)\ \{x \in X: \ f(x) < \alpha\} \text{ ölçülebilirdir.}$$

$$iv)\ \{x \in X: \ f(x) \leq \alpha\} \text{ ölçülebilirdir.}$$

Bütün $f: X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların cümlesi $M(X,\mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [**1**, syf 22]: $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde genişletilmiş reel değerli bir μ fonkiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0,$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0,$ ve

(iii) $\mathcal{A}$ sınıfındaki her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyor ise μ'ye X üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir. Böylece elde edilen $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlü sistemine de **ölçü uzayı** denir.

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü**, $\mu(X) = 1$ ise olasılık ölçüsü denir. Bundan böyle ölçüleri sonlu ölçü olarak kabul edeceğiz.

Teorem 2.1.3. [**4**]*: $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçü uzayı olmak üzere $(A,\mathcal{A}_A)$, $(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir uzayının alt ölçülebilir uzayı olsun. $\mu(A) > 0$ olmak üzere her $B \in \mathcal{A}$ için $\mu_A(B) = \frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}$ ile tanımlı $\mu_A : (A,\mathcal{A}_A) \to [0,\infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür.*

Böylece elde edilen $(A,\mathcal{A}_A,\mu_A)$ üçlüsüne $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçü uzayının altölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.5. [**1**, syf 69]: $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in (M,\mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikiside sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde

μ'ye göre integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır.

Bu tanımda f^+ ve f^- ler f nin pozitif ve negatif kısmını göstermektedir.

X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \{f \in M(X, \mathcal{A}) : |f|^p \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$$

cümlesine p.yinci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

2.2. Matris Dönüşümleri

Bu kısımda matris dönüşümleri tanıtılarak; bir matrisin regüler ve hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şartlar verildi.

$B = (b_{nk})$ $(n, k = 1, 2, ...)$ gerçel terimli sonsuz bir matris olsun. Gerçel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisinin Bx matris dönüşümü, her $n \in N$ için

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

serileri yakınsak olmak üzere,

$$Bx = (B_n(x))$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $Bx = (B_n(x))$ dizisine (x_k) dizisinin $B = (b_{nk})$ matrisi ile elde edilen dönüşümü denir. Eğer Bx dizisi mevcut ve

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = a$$

ise (x_n) dizisi a-ya B -toplanabilirdir veya B -limitlenebilirdir denir ve $B - \lim x = a$ şeklinde gösterilir.

X, Y iki dizi uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için Bx dizisi mevcut ve $Bx \in Y$ ise B matrisi X den Y ye tanımlıdır denir ve böyle matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Bir matrisin (X, Y) sınıfında olması için gerek ve yeter şartların belirlenmesine (X, Y) matris sınıfının karekterizasyonu denir. Örneğin, $B \in (\ell_\infty, w)$ olması için gerek ve yeter her n için

$$\sum_k |b_{nk}| < \infty$$

dır. **[16]** ℓ_∞'dan ℓ_∞ ve c'ye tanımlı matrisler aşağıdaki teoremlerle karekterize edildi.

Teorem 2.2.1. **[16]** *$B \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart;*

$$\sup_n \sum |b_{nk}| < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.2. **[15, 16]** *$B \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart;*
(i) n'ye göre düzgün olarak $\sum_k |b_{nk}|$ yakınsak,
(ii) Her bir k için, $\lim_n b_{nk} = b_k$,
olmasıdır.

Tanım 2.2.1. **(Regüler Matris)**: Bir $B = (b_{nk})$ sonsuz matrisi yakınsak dizileri yine yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyor ise B ye regüler matris denir. Regüler matrislerin sınıfı $(c, c)_{reg}$ ile gösterilir.

Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki teorem ile verilmiş olup kısmen kolay olan gerek şartları Silverman ve daha zor olan yeter şartların ispatı ise Toeplitz tarafından yapılmıştır.

Teorem 2.2.3. ***(Silverman-Toeplitz)*****[15, syf 221]**: *$B \in (c, c)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart;*
(i) $\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$,
(ii) her k için, $\lim_n b_{nk} = 0$,
(iii) $\lim_n \sum_k b_{nk} = 1$,
olmasıdır.

Tanım 2.2.2. : Bir B sonsuz matrisi için $Bx \in f$ ise, yani; i ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} B_r(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} b_{rk} x_k$$

mevcut ise x dizisine hemen hemen $\mathcal{B}$-toplanabilirdir denir.

Tanım 2.2.3. **(Hemen Hemen Regüler Matris)**: Bir B sonsuz matrisi yakınsak dizileri hemen hemen yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyor ise B ye hemen hemen regüler matris denir ve $B \in (c, f)_{reg}$ yazılır.

Bir matrisin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şartlar King [**11**] tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.2.4. [**11**]: *$B \in (c, f)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart;*
(a) $\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$,
(b) *Her k için,* $f - \lim b_{nk} = 0$,
(c) $f - \lim \sum_k b_{nk} = 1$,
olmasıdır.

Tanım 2.2.4. **(Kuvvetli Regüler Matris)**: Regüler bir B matrisi hemen hemen yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye limitini koruyarak dönüştürüyor ise, B ye kuvvetli regüler matris denir. Bu durumda $B \in (f, c)_{reg}$ yazılır.

Kuvvetli regüler matrislerin sınıfı, aşağıdaki teoremle karekterize edildi.

Teorem 2.2.5. [**16**, syf 62]: *Regüler bir $B = (b_{nk})$ matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart B'nin translatif, yani;*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k |b_{nk} - b_{n,k+1}| = 0$$

olmasıdır.

Şimdi B matrisi yerine $B^{(i)}$ matrislerinin dizisi alınarak tanımlanan matris dönüşümlerine yer verelim.

TANIM 2.2.5. : $(B^{(i)}) = (b_{nk}(i))$ reel terimli bir sonsuz matris dizisi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $n, i \in \mathbb{N}$ için,

$$y_n^i(x) = \sum_k b_{nk}(i) x_k$$

serileri yakınsak ise $(y_n^i(x))$ dizisine (x_k) dizisinin $\mathcal{B} = (B^{(i)})$ matris dizisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir ve $\mathcal{B}x$ ile gösterilir. Eğer i'ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) x_k = s$$

ise (x_n) dizisi s ye $\mathcal{B}$ toplanabilir denir ve bu durumda

$$\mathcal{B} - \lim x = s$$

yazılır.

Özel olarak $\mathcal{B}$ dizisi

$$b_{nk}(i) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \ , & i \leq k \leq i+n \text{ ise} \\ 0 \ , & \text{aksi halde} \end{cases}$$

alınırsa, $\mathcal{B}$ toplanabilme, f metoduna indirgenir. Eğer $\mathcal{B} = B = (b_{nk})$ ise o zaman alışılmış B toplanabilme metodunu elde ederiz. Ayrıca $b_{nk}(i) = \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{n+i} b_{rk}$ olarak alınırsa $\mathcal{B}$ toplanabilme King [**11**] tarafından tanıtılan hemen hemen toplanabilme metoduna indirgenir. Eğer x yakınsak dizisi için $\mathcal{B} - \lim x$ mevcut ise $\mathcal{B}$ metodu konzervatif, üstelik $\lim x_n = \mathcal{B} - \lim x$ ise regülerdir denir.

TEOREM 2.2.6. [**18**]*: $\mathcal{B}$ metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart, limitler i'ye göre düzgün olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}(i)| < \infty,$$

$$\| \mathcal{B} \| = \sup_{i \geq 0, n \geq m} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}(i)| < \infty,$$

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) = 1, \quad ve$$

$$\text{Her bir } k \text{ için} \quad \lim_n b_{nk}(i) = 0.$$

olmasıdır.

Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{n,k-1}(i)-b_{nk}(i)|=0, \qquad i\text{'ye göre düzgün} \tag{2.2.1}$$

ise $\mathcal{B}$ ye translatif dir denir.
Eğer her n,k,i için

$$b_{nk}(i)\geq 0, \tag{2.2.2}$$

ise $\mathcal{B}$ ye pozitiftir denir.

Reel bir λ için

$$\lambda^{+}=maks(\lambda,0), \quad \lambda^{-}=maks(-\lambda,0)$$

tanımlanır ve bu durumda $\lambda=\lambda^{+}-\lambda^{-}$ ve $|\lambda|=\lambda^{+}+\lambda^{-}$ dır. Eğer i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}b_{nk}^{-}(i)=0,$$

ise $\mathcal{B}$ matrisine hemen hemen pozitiftir denir.

$x=(x_k)\in\ell_\infty$ için

$$t(x)=\lim_{n}\sup\sup_{i}\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{i+n-1}x_k, \tag{2.2.3}$$

tanımlansın ve $\phi(x)\leq t(x)$ eşitsizliğini sağlayan $\phi:\ell_\infty\to\mathbb{R}$ lineer fonksiyonellerinin bir cümlesi $\{\ell_\infty,t\}$ olsun. Das [**7**] $\{\ell_\infty,t\}=\beta$ ve $\phi\in\{\ell_\infty,t\}$ tektir gerek ve yeter şart $t(x)=-t(-x)$olduğunu gösterdi. Yani $x\in\ell_\infty$ hemen hemen yakınsaktır gerek ve yeter şart $t(x)=-t(-x)$ dır.

$\mathcal{B}=(b_{nk}(i))$ reel terimli bir matris dizisi ve $\|\mathcal{B}\|<\infty$ olsun. Bu durumda; $R:\ell_\infty\to\mathbb{R}$

$$R(x)=\lim_{n}\sup\sup_{i}\sum_{k=0}^{\infty}b_{nk}(i)x_k \tag{2.2.4}$$

ile tanımlanırsa her $x \in \ell_\infty$ için

(2.2.5) $$|R(x)| \le \|x\|.\|\mathcal{B}\| < \infty$$

olduğundan R sonlu değerlidir ve ℓ_∞ üzerinde bir alt lineer fonksiyoneldir. Hahn-Banach teoremine göre ℓ_∞ üzerinde

(2.2.6) $$-R(-x) \le \phi(x) \le R(x),$$

olacak şekilde bir ϕ lineer fonksiyoneli vardır. $\{\ell_\infty, R\}$ yi, (2.2.6) deki eşitsizliği sağlayan tüm ϕ lineer fonksiyonellerinin kümesi olarak alırsak, yine bilinir ki
$\phi \in \{\ell_\infty, R\}$ tektir gerek ve yeter şart $x \in \ell_\infty$ için

(2.2.7) $$-R(-x) = R(x)$$

ve bunun olması için gerek ve yeter şart i ye göre düzgün olarak

(2.2.8) $$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)x_k$$

mevcuttur.

LEMMA 2.2.1. [**6**]: $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu durumda;

(i) $\liminf x_n \le R(x) \le \limsup x_n$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$ reel, regüler ve hemen hemen pozitiftir.

(ii) $-t(-x) \le -R(-x) \le R(x) \le t(x)$ gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$, regüler, hemen hemen pozitif ve translatifdir.

(iii) Eğer x, s ye hemen hemen yakınsak ise bu durumda i ye göre düzgün olarak

(2.2.9) $$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)x_k = s$$

dir.

BÖLÜM 3

ERGODİK DÖNÜŞÜMLER

3.1. Hemen Hemen Yakınsaklık ve Ergodik Dönüşümler

Bu kısımda, öncelikle klasik ergodik teoriden temel tanım ve bilinen bazı sonuçları vereceğiz.

TANIM 3.1.1. : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $T^{-1}A = A$ ise $A \in \mathcal{A}$ cümlesine invaryant denir.

TANIM 3.1.2. :$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ ise T ye ölçü koruyan dönüşüm denir.

TANIM 3.1.3. : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçü koruyan bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ invaryant cümlesi için $T^{-1}A = A$ olduğunda $\mu(A) = 0$ veya $\mu(A^c) = 0$ ise, T dönüşümüne (veya μ ölçüsüne göre) **ergodiktir** denir.

TANIM 3.1.4. : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(T^{-1}A) = 0$ ise, μ ölçüsüne **sıfır invaryanttır** denir.

TANIM 3.1.5. : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \cap T^{-n}A = \emptyset$ olduğunda $\mu(A) = 0$ ise μ ye koruyandır (veya konzervatifdir) denir.

TANIM 3.1.6. : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $m(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$ ise μ ölçüsü m ölçüsüne denktir denir.

TANIM 3.1.7. :$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer, $A \in \mathcal{A}$ için $A, T^{-1}A, T^{-2}A...$ kümeleri karşılıklı ayrık ise'ler A cümlesine, mükemmel cümle denir.

Tanım 3.1.8. :$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer pozitif tamsayıların artan bir (r_k) dizisi için $A, T^{-r_1}A, T^{-r_2}A...$ kümeleri karşılıklı ayrık ise A cümlesine, zayıf mükemmel cümle denir.

Tanım 3.1.9. : Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\mu(A) < \delta$ iken $q(A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, q ölçüsüne μ-süreklidir denir, her $n \in \mathbb{N}$ için her $\varepsilon > 0$ için $m(A) < \delta$ iken $q_n(A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, $\{q_n\}$ ölçülerin dizisine düzgün μ-süreklidir denir.

Sucheston, hemen hemen yakınsaklık ve ergodik teori arasındaki ilişkileri belirleyen aşağıdaki teoremleri ispatladı.

Lemma 3.1.1. [**19**]: $(X, \mathcal{A}, p)$ bir ölçü uzayı ve (q_n), $q_n(X) = O(1)$ olacak şekilde ölçülerin düzgün p- sürekli bir dizisi olsun. Eğer L bir Banach limiti ise, bu taktirde $A \in \mathcal{A}$ için $q(A) = L(q_n(A))$ ile tanımlanan q, p-sürekli bir ölçüdür.

Teorem 3.1.1. [**19**]: *$(X, \mathcal{A}, p)$ bir olasılık uzayı olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartlar denktir.*
(i) Bazı L Banach limitleri ve her bir A, B cümle ikilisi için,
$L(p(T^{-n}A \cap B)) = p(A)p(B)$,
(ii) Her bir A, B cümle ikilisi için $f - \lim p(T^{-n}A \cap B) = p(A)p(B)$,
(iii) p, ergodik ve invaryanttır.

Sonuç 3.1.1. Eğer bir p olasılık ölçüsü, ergodik ve invaryant ise, bu taktirde A, B cümlelerinin her bir ikilisi için i'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{i+n-1} p(T^{-j}A \cap B) = p(A)p(B)$$

dir.

Teorem 3.1.2. [**19**]: *Bir p ölçüsü invariant ve denk ölçüdür ancak ve ancak p sıfır invaryant, konzervatif ve $A \in \mathcal{A}$ için $\{p(T^{-n}A)\}$ dizileri hemen hemen yakınsaktır.*

Eğer p'nin invaryant ve denk ölçü olduğunu kabul edersek, o zaman $A \in \mathcal{A}$,

$$q(A) = f - \lim p(T^{-n}A)$$

ile tanımlanan q, invariant kümeler üzerinde p ile çakışık, invariant ve denk ölçüdür.

Lemma 3.1.2. [**6**]: $\| \mathcal{B} \| < \infty$, $\phi \in \{\ell_\infty, R\}$ ve $D : \ell_\infty \to \ell_\infty$ shift operatörü yani, $D(x_n) = x_{n+1}$, $D^2(x_n) = x_{n+2}$ olsun. Bu takdirde

(a) $|\phi(Dx) - \phi(x)| \leq \| x \| \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} |b_{n,k-1}(i) - b_{nk}(i)|$

$\mathcal{B}$ translatif ise $x \in \ell_\infty$ için

(b) (i) $R(Dx - x) = R(x - Dx) = 0,$

(ii) $\phi(Dx) = \phi(x),$

(c) $R(Dx) = R(x).$

Ayrıca sabit bir k için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_n b_{nk}(i) = 0 \tag{3.1.1}$$

ise, bu takdirde

(d) $R(\sum_{j=0}^{p} D^{r_j} x) = p.R(x)$

dir. Burada $r_0 = 1, r_1, r_2, ..., r_p$ pozitif tamsayıların bir dizisidir.

İspat.

$$\begin{aligned} R(Dx - x) &= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)(Dx_k - x_k) \\ &= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} (b_{n,k-1}(i) - b_{nk}(i))x_k \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olduğundan,

$$|R(Dx - x)| \leq \| x \| \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} |b_{n,k-1}(i) - b_{nk}(i)| \tag{3.1.3}$$

dir. ϕ lineer olduğundan

$$\phi(Dx) - \phi(x) = \phi(Dx - x) \leq R(Dx - x) \tag{3.1.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz.(3.1.3) ve (3.1.4) de Dx ve x in rolleri değişrilirse (a) yı elde ederiz. $\mathcal{B}$ translatif olduğundan, (b) nin (i) ve (ii) şartları (3.1.3) den elde edilir ve

(3.1.3) de x ve Dx in rolleri değiştirilerek $(b)(ii)$, (a) dan yola çıkarak elde edilir. R altlineer olduğundan (b) (i) kullanılırsa
$R(Dx) = R(Dx - x + x) \leq R(Dx - x) + R(x) = R(x)$
bulunur. Burada Dx ve x in rolleri değiştirilirse, $R(x) \leq R(Dx)$ elde edilir. Böylece (c) elde edilir.
Son olarak
$R(D^{r_1}x+D^{r_2}x) = R(D^{r_1}x-x+D^{r_2}x-x+2x) \leq R(D^{r_1}x-x)+R(D^{r_2}x-x)+2R(x)$
yani,

$$R(D^{r_1}x + D^{r_2}x) - 2R(x) \leq R(D^{r_1}x - x) + R(D^{r_2}x - x) \tag{3.1.5}$$

Fakat,

$$\begin{aligned}
R(D^{r_1}x - x) &= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)(x_{k+r_1} - x_k) \\
&= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} (b_{nk-r_1}(i) - b_{nk}(i))x_k \\
&= \limsup_n \sup_i \{\sum_{k=r_1}^{\infty} (b_{nk-r_1}(i) - b_{nk}(i))x_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk}(i)x_k\} \\
&= \limsup_n \sup_i \{\sum_{k=r_1}^{\infty} (b_{nk-r_1}(i) - b_{nk}(i))x_k\}, \quad ((3.1.1) \text{ eşitliğinden}) \\
&= \limsup_n \sup_i \sum_{k=r_1}^{\infty} x_k \sum_{j=0}^{r_1-1} (b_{nk-j-1}(i) - b_{nk-j}(i)) \\
&\leq \| x \| \sum_{j=0}^{r_1-1} \overline{lim}_n \sup_i \sum_{k=r_1}^{\infty} |b_{nk-j-1}(i) - b_{nk-j}(i)| \\
&= 0, \quad (\mathcal{B} \text{ nin translatifliğinden})
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$R(D^{r_2}x - x) \leq 0$$

elde ederiz. Böylece $x \in \ell_\infty$ için

$$R(D^{r_1}x + D^{r_2}x) \leq 2R(x),$$

dir. Tekrar,

$$\begin{aligned} 2R(x) &= R(2x - D^{r_1}x - D^{r_2}x + D^{r_1}x + D^{r_2}x) \\ &\leq R(x - D^{r_1}x) + R(x - D^{r_2}x) + R(D^{r_1}x + D^{r_2}x) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde yukarıdaki gibi tartışmalar yapılırsa $x \in \ell_\infty$ için

$$2R(x) \leq R(D^{r_1}x + D^{r_2}x),$$

elde edilir. Böylece, $x \in \ell_\infty$ için

$$R(D^{r_1}x + D^{r_2}x) = 2R(x) \tag{3.1.6}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.1.6) nın tekrarlı uygulanmasıyla (d) bulunur. □

$(X, \mathcal{A}, m)$ bir sonlu ölçü uzayı olmak üzere her $B, C \in \mathcal{A}$ için aşağıdaki şartları yazalım.

(3.1.7) *Bazı* $\phi \in \{\ell_\infty, R\}$ *için* $\phi[m(T^{-n}B \cap C)] = m(B)m(C), \quad n \in \mathbb{N}$

(3.1.8) *i ye göre düzgün olarak* $\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)m(T^{-n}B \cap C) = m(B)m(C)$

(3.1.9) *T, ergodik ve ölçü koruyandır.*

Buna göre şu teorem kurulabilir;

TEOREM 3.1.3. **[6]** *: $(X, \mathcal{A}, m)$ sonlu bir ölçü uzayı ve $\| \mathcal{B} \| < \infty$ olsun. Bu durumda*

(a) (3.1.8)⇒(3.1.7)

(b) (i) (3.1.7) sağlanır ise, T ergodiktir.

(ii) Eğer, $\mathcal{B}$ translatif ise bu taktirde (3.1.7)⇒(3.1.8)

(c) $\mathcal{B}$ regüler, hemen hemen pozitif ve translatif ise

$$(3.1.7) \Leftrightarrow (3.1.8) \Leftrightarrow (3.1.9)$$

dir.

İSPAT. (a) (3.1.8) geçerli olsun. Bu taktirde

$$-R[-m(T^{-n}B \cap C)] = R[m(T^{-n}B \cap C)]$$

dir. $x \in \ell_\infty$ için

$$-R(-x) \leq \phi(x) \leq R(x) \tag{3.1.10}$$

olduğundan

$$\phi[m(T^{-n}B \cap C)] = m(B)m(C), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

dir. Yani; (3.1.8) $\Rightarrow$ (3.1.7).

(b) : (3.1.7) de $T^{-1}B = B$ ve $C = X \backslash B = B^c$ alınarak benzer yolla

$$0 = \phi(\emptyset) = m(B).m(B^c)$$

ve dolayısıyla $m(B) = 0$ veya $m(B^c) = 0$ bulunur. O halde T ergodiktir.
(3.1.7) de $C = X$ yazarak

$$\phi[m(T^{-n}B)] = m(B).m(X) \tag{3.1.11}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.1.11) de $T^{-1}B$ ile B nin yerleri değiştirilirse

$$\phi[m(T^{-n-1}B)] = m(T^{-1}B).m(X) \tag{3.1.12}$$

elde edilir. İlave olarak $\mathcal{B}$ translatif ise, Lemma (3.1.2)-(b) den

$$\phi[m(T^{-n-1}B)] = \phi[m(T^{-n}B)]$$

elde edilir. $0 < m(X) < \infty$ olduğundan, (3.1.11) ve (3.1.12) den gerektirir ki

$$m(T^{-1}B) = m(B).$$

Böylece (3.1.7) $\Rightarrow$ (3.1.9).

(c) : (a) ve (b) nin ışığında (3.1.9) $\Rightarrow$ (3.1.8) gerektirmesini göstermek yeterlidir.
$m(B) > 0$ olacak şekilde herhangi sabit $B \in \mathcal{A}$ alalım. $\phi \in \{\ell_\infty, R\}$ ve $C \in \mathcal{A}$ için

$$q_n(C) = \frac{m(T^{-n}B \cap C)}{m(B)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

olmak üzere

$$q(C) = \phi(q_n(C)) \tag{3.1.13}$$

tanımlayalım. Şimdi q nun invaryant ve $m = q$ olduğunu göstereceğiz.
$\mathcal{B}$ hemen hemen pozitif olduğundan, $x \in \ell_\infty$ için i ye düzgün olarak

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}^{-}(i)x_k = 0 \tag{3.1.14}$$

dır.

$$R^+(x) = \lim_n \sup \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}^{+}(i)x_k$$

yazılırsa (3.1.14) den

$$R(x) = R^+(x)$$

dır.

$$x \geq 0 \Rightarrow R^+(x) \geq 0, \quad \text{olduğundan}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow R(x) \geq 0 \tag{3.1.15}$$

dır. Tekrar m bir ölçü olduğundan $q_n(C) \geq 0$ dır. Böylece (3.1.15) den $R(q_n(C)) \geq 0$ dır.
R altlineer olduğundan

$$-R[-q_n(C)] \geq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi (3.1.10) dan $C \in \mathcal{A}$ için $q(C) \geq 0$ dır. $(B_i), \mathcal{A}$ da ayrık kümelerin sayılabilir bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} q(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) &= \phi[q_n(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)] \\ &= \phi[\sum_{i=1}^{\infty} q_n(B_i)], \quad (q_n, \text{ bir ölçü olduğundan}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi[q_n(B_i)] \quad (\phi, \text{ sürekli lineer bir fonksiyonel olduğundan}) \end{aligned}$$

Böylece, q sayılabilir toplamsal ve dolayısıyla bir ölçüdür. Ayrıca, T ölçü koruyan, ϕ shift invaryant olduğundan her $C \in \mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned} q(T^{-1}C) &= \phi[\frac{m(T^{-n}B \cap T^{-1}C)}{m(B)}] \\ &= \phi[\frac{m(T^{-n+1}B \cap C)}{m(B)}] \\ &= \phi[q_{n-1}(C)] \\ &= \phi[q_n(C)] \\ &= q(C). \end{aligned}$$

bulunur ki bu da bu sonuçtan q nun bir invariant bir ölçü olduğunun ispatıdır. T ergodik olduğundan invariant cümleler 0 veya 1 ölçüsüne sahiptirler. m ve q invariant ölçüler olduğundan, bir invariant ölçü, invariant kümeler üzerinde alınan değerle belirlenebilir.[**19**] Buradan $q = m$ eşitliğine ulaşılır. Öyleyse

$$q(C) = m(C) = \phi[\frac{m(T^{-n}B \cap C)}{m(B)}], \quad \text{yani;} \quad \phi[m(T^{-n}B \cap C)] = m(B)m(C)$$

dir. Böylece ϕ, $\{T^{-n}B \cap C\}$, $\quad n = 0, 1, 2, ...$ üzerinde tektir. Fakat $\phi \in \{\ell_\infty, R\}$, λ tek değerine sahiptir ancak ve ancak

$$R(x) = -R(-x) = \lambda$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$R[m(T^{-n}B \cap C)] = -R[-m(T^{-n}B \cap C)] = m(B)m(C)$$

yani (3.1.8) sağlanır ve dolayısıyla (c) nin ispatı tamamlanır. □

3.2. Kuvvetli Regüler Matrisler ve Ergodik Dönüşümler

Bu kısımda denk invariant ölçülerin varlığı için bazı gerek ve yeter şartlar verilecektir.

TEOREM 3.2.1. [**6**] *:* $\|\mathcal{B}\| < \infty$ *olacak şekilde* $\mathcal{B}$ *matris dizisi hemen hemen pozitif ve translatif olsun.* $(X, \mathcal{A}, m)$ *bir ölçü uzayı ve* T *ölçülebilir bir dönüşüm* *olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartlar denktir.*

(3.2.1) *Denk sonlu bir invaryant ölçü vardır.*

(3.2.2) *Bazı* $\phi \in \{l_\infty, R\}$ *ve bütün* $B \in \mathcal{A}$ *için* $m(B) > 0 \Rightarrow \phi[m(T^{-n}B)] > 0$,

(3.2.3) $m(B) > 0 \Rightarrow R[m(T^{-n}B)] > 0$

İSPAT. (3.2.1)$\Rightarrow$(3.2.2): p, m ye denk invariant bir ölçü olsun. (3.2.2) nin doğru olmadığını kabul edelim. Bu taktirde $m(B) > 0$ ve $\phi[m(T^{-n}B)] = 0$ olacak şekilde $B \in \mathcal{A}$ vardır. Fakat, $x \in l_\infty$ için $-R(-x) \leq \phi(x) \leq R(x)$ olduğundan, Lemma 2.2.1 den

$$\liminf_n x_n \leq -R(-x) \leq R(x) \leq \limsup_n x_n$$

elde edilir ki buradan $B \in \mathcal{A}$ için

$$0 = \phi[m(T^{-n}B)] \geq \liminf_n m(T^{-n}B)$$

bulunur. Fakat,

$$\liminf_n m(T^{-n}B) \geq 0$$

olduğundan

$$\liminf_n m(T^{-n}B) = 0$$

dır. Böylece,

$$\liminf_k m(T^{-nk}B) = 0$$

olacak şekilde bir (n_k) alt dizisi vardır. p, m ye denk olduğundan, $p(B) > 0$ ve $\lim_k p(T^{-n_k}B) = 0$ elde ederiz. p invariant olduğundan, $p(T^{-nk}B) = p(B)$ eşitliğine sahip oluruz. Buradan $p(B) = 0$ olur ki bu bir çelişkidir ve (3.2.1) $\Rightarrow$ (3.2.2) dir.
(3.2.2) $\Rightarrow$ (3.2.3) : (3.2.2) geçerli olsun.

$$\phi[m(T^{-n}B)] \leq R[m(T^{-n}B)]$$

olduğundan

$$\phi[m(T^{-n}B)] > 0 \Rightarrow R[m(T^{-n}B)] > 0$$

elde edilir.

(3.2.3) $\Rightarrow$ (3.2.1) : (3.2.3) ün geçerli fakat (3.2.1) in sağlanmadığını farzedelim. (3.2.1) şartı zayıf mükemmel cümlelerin var olmadığına denktir. **[19]** Bu yüzden $B, T^{-r_1}B, T^{-r_2}B, ..., T^{-r_k}B, ...$ karşılıklı olarak ayrık olacak şekilde pozitif tamsayıların $r_0 = 1, r_1, r_2, ...$ dizisi ve $m(B) > 0$ olan bir $B \in \mathcal{A}$ vardır. i ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) = 1$$

$$R[m(T^{-k}X)] = R[m(X)] = m(X)R(1) = m(X)$$

dir. Tekrar

$$\begin{aligned}
m(X) &= R[m(T^{-n}X)] \geq R[m(\bigcup_{j=0}^{s} T^{-rj}B)] \\
m(X) &= \lim_{n\to\infty}\sup \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) m[(\bigcup_{j=0}^{s} T^{-rj-k}B)] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sup \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) \sum_{k=0}^{s} D^{rj}x_k
\end{aligned}$$

Burada $X_k = m(T^{-k}B)$, D shift operatörüdür. Bu taktirde Lemma 3.1.2 (d)den

$$m(X) \geq sR(X) \tag{3.2.4}$$

ve dolayısıyla

$$m(X) \geq sRm(T^{-k}B) \tag{3.2.5}$$

Hipotezden $m(T^{-k}B) > 0$ hipotezi ve s keyfi bir pozitif tamsayı olduğundan, (3.2.5) deki bu çelişkiden (3.2.3) $\Rightarrow$ (3.2.1) sonucunu elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.2. [**6**]: *$\mathcal{B}$, Teorem 3.2.1 in şartlarını sağlasın. $(X, \mathcal{A}, m)$ bir ölçü uzayı olsun. O zaman X üzerinde m ölçüsüne denk invariant bir ölçü vardır ancak ve ancak*

$$m \quad \textit{sıfır koruyandır.} \tag{3.2.6}$$

$$T \quad \textit{konzervatiftir.} \tag{3.2.7}$$

Her $C \in \mathcal{A}$ için i ye göre düzgün

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{nk}(i) m(T^{-k}C), \textit{yakınsak} \tag{3.2.8}$$

İspat. Gereklilik. Farzedelim ki m, μ ölçüsüne denk invaryant bir ölçü olsun. Bu takdirde μ, m-süreklidir.
$\phi \in \{l_\infty, R\}$ için

$$q(C) = \phi[m(T^{-n}C)]$$

tanımlayalım. Biz
(i) q, bir ölçüdür.
(ii) q, m süreklidir.
(iii) q, invarianttır.
olduğunu göstermek istiyoruz. Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi her $C \in \mathcal{A}$ için, $q(C) \geq 0$ olduğunu gösterebiliriz. Yine kolayca gösterilebilir ki

$$C, E \in \mathcal{A}, \quad C \subset E \Rightarrow q(C) \leq q(E)$$

dir. ϕ lineer olduğundan, görülür ki q sonlu toplamsaldır. μ, m-sürekli olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\mu(C) = \mu(T^{-n}C) < \delta$ olduğu zaman $m(T^{-n}C) < \varepsilon$ ve $m(T^{-n}C) < \delta \Rightarrow q(C) < \varepsilon$ dir. Böylece q, m-süreklidir. m nin sayılabilir toplamsallığı ve q nun m sürekliliği **[9]** de gösterildi.

$$\begin{aligned} q(T^{-1}C)-q(C) &= \phi[m(T^{-n-1}C)]-\phi[m(T^{-n}C)] \\ &= \phi[m(T^{-n-1}C)-m(T^{-n}C)], \quad \phi \text{ lineer} \\ &\leq R[m(T^{-n-1}C)-m(T^{-n}C)] \\ &= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)[m(T^{-n-1}C)-m(T^{-n}C)] \end{aligned}$$

yazılır. $b_{n-1}(i)=0$ olduğundan her n ve i için

$$\begin{aligned} &= \limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty}[b_{n,k-1}(i)-b_{nk}(i)]m(T^{-k}C) \\ &\leq m(X)\limsup_n \sup_i \sum_{k=0}^{\infty}|b_{n,k-1}(i)-b_{nk}(i)| \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ translatif olduğundan

$$q(T^{-1}C)-q(C) \to \; 0, \quad (n\to\infty \text{ giderken, } i \text{ ye göre düzgün})$$

Böylece

$$q(T^{-1}C)\leq q(C)$$

$T^{-1}C$ ve C nin rolleri değiştirilirse

$$q(C)\leq q(T^{-1}C)$$

elde ederiz. Böylece

$$q(T^{-1}C)=q(C)$$

bulunur. Yani q, T altında invaryanttır.

Şimdi $T^{-1}C=C$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} q(C) &= \phi[m(T^{-1}C)]=\phi[m(C)], \\ &= m(C).\phi(1)=m(C). \end{aligned}$$

Böylece invariant cümleler üzerinde $q = m$ dir. Böylece $\mathcal{A}$ üzerinde $q = m$ dir. **[19]** Böylece $q(C) = \phi[m(T^{-n}C)]$ tektir. Fakat $\phi \in \{l_\infty, R\}$ tektir ancak ve ancak , $R(x) = -R(-x) = q(C)$ ancak ve ancak i ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) m(T^{-k}C) = q(C)$$

Şimdi $\mathcal{A}$ üzerinde $q = m$ ve $C \in \mathcal{A}$ için $q(T^{-1}C) = q(C)$ olduğundan $C \in \mathcal{A}$ için $m(T^{-1}C) = m(C)$ ve $m(C) = 0 \Rightarrow m(T^{-1}C) = 0$ yani, m sıfır koruyandır.
Yeterlilik. $(3.2.6), (3.2.7), (3.2.8)$ nin sağlandığını kabul edelim.

$$q(C) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) m(T^{-k}C)$$

tanımlanırsa, yukarıdaki şekilde gösterebiliriz ki q bir invaryant ölçüdür. Dolayısıyla, sadece q nun m ye denk olduğunu ispatlayacağız. T sıfır koruyan olduğundan

$$m(C) = 0 \Rightarrow m(T^{-1}C) = 0$$

dir. Bu taktirde i ye göre düzgün olarak

$$q(C) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i) m(T^{-k}C) = 0$$

elde edilir.
Tersine, $q(C) = 0$ olsun. $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}C$ yazılırsa, q invaryant ölçü olduğundan

$$\begin{aligned} q(A^*) &= q(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}C) \\ &\leq q(\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}C) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} q(T^{-i}C) \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} q(C) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. q ve m invariant cümleler üzerinde çakışık olduğundan, $m(A^*) = 0$ elde edilir. T konzervatif olduğundan $m(C/A^*) = 0 \Rightarrow m(C) = 0$ dir.
Böylece q, m ye denktir.

$\square$

TEOREM 3.2.3. ***(Birkhoff'un noktasal ergodik teoremi)*** **[2]**: *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun ve T, X in ölçü koruyan bir dönüşümü olsun. Bu takdirde her $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ için öyle ki*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j = f^*, \quad \mu - a.e$$

ve $\| f^* \|_1 \leq \| f \|_1$ olacak şekilde bir $f^* \in (X, \mathcal{A}_T, \mu)$ vardır.
Burada $\mathcal{A}_T$, $\mathcal{A}$ daki T-invaryant cümlelerin σ-cebridir.
Eğer T ergodik ise o zaman f^* bazı sabit c lere eşittir.

LEMMA 3.2.1. **(Cohen)** **[3]**: B bir Banach uzayı ve T, $L_n (n = 1, 2, ...)$ B'den B'ye lineer dönüşümler olsun. Eğer $TL_n = L_n T$, bazı x'ler için $\lim L_n(x - Tx) = 0$ ve $L_n(x)$, x_0 noktasına zayıf yakınsak ise $Tx_0 = x_0$ dır.

Şimdi Yosida nın local konveks vektör uzayları için verdiği ergodik teoremi genelleştireceğiz.

TEOREM 3.2.4. **[10]**: *X, üzerindeki yarınormların ε ailesi tarafından indirgenmiş topoloji ile dizisel tam, zayıf dizisel kompakt lokal konveks bir vektör uzay olsun. $T : X \to X$, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ operatörlerin ailesi her bir $q \in \varepsilon$ için eşsürekli olacak şekilde sürekli lineer bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her bir $x \in X$ için*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q(T^n x) \leq q^1(x) \tag{3.2.9}$$

olacak şekilde X üzerinde bir q' sürekli yarı normu vardır.
Ayrıca $B = (b_{nj})$ $(n, j \in N)$ kuvvetli regüler bir matris ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{nj} T^j$$

olsun. Bu takdirde $T_n(n \in \mathbb{N})$, X üzerinde iyi tanımlıdır ve her bir $x \in X$ için $\lim_n T_n x$ mevcuttur. Eğer $x \in X$ için $T_\circ x = \lim_n T_n x$ yazılırsa , bu takdirde $T_\circ$, B ye bağlı olmaksızın sürekli lineer bir dönüşümdür öyle ki

$$T_\circ = T_\circ^2 = TT_\circ = T_\circ T \tag{3.2.10}$$

$$R(T_\circ) = N(I-T) \tag{3.2.11}$$

$$N(T_\circ) = \overline{R(I-T)} = R(I-T_\circ) \tag{3.2.12}$$

$$X = \overline{R(I-T)} \oplus N(I-T) \tag{3.2.13}$$

İSPAT. (3.2.9)'u kullanarak, $q \in \varepsilon$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$q(\sum_{j=s}^{t} b_{nj} T^j x) \leq \sum_{j=s}^{t} |b_{nj}| q(T^j x) \leq q^1(x) \sum_{j=s}^{t} |b_{nj}| \to 0, \quad t, s \to \infty \text{ giderken}$$

X dizisel tam olduğundan, T_n $(n = 1, 2, ...)$, X üzerinde tanımlıdır. Açıkça görülürki T_n $(n \in \mathbb{N})$ lineer ve süreklidir. $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n(I-T) = b_{n1}T_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{n,j+1} - b_{nj}) T^{j+1}$$

dir. Eğer $w \in R(I-T)$ ise, bu takdirde $x \in X$ vardır öyle ki $w = (I-T)x$. Böylece (3.2.9)'u kullanarak her $q \in \varepsilon$ için

$$q(T_n w) = q(T_n(I-T)x) \leq q^1(x)(|b_{n1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{n,j+1} - b_{nj}|)$$

elde edilir. B, kuvvetli regüler bir matris olduğundan, her $w \in R(I-T)$

$$\lim_n T_n w = 0 \tag{3.2.14}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\overline{R(I-T)} \subset \{x \in X : \lim_n T_n x = 0\} \tag{3.2.15}$$

olduğunu ispatlayalım.

$x \in \overline{R(I-T)}$ olduğunu varsayalım. $q\,'$, X üzerinde sürekli bir yarınorm olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $w \in R(I-T)$ vardır öyle ki $q\,'(z-w) < \frac{\varepsilon}{M}$ dir. (3.2.9) u kullanarak

$$q(T_n(z-w)) \leq q\,'(z-w)\sum_{j=1}^{\infty}|b_{nj}| < \varepsilon$$

elde edilir ki buradan da $q \in \varepsilon$ için

$$q(T_n z) \leq q(T_n w) + q(T_n(z-w)) \leq q(T_n w) + \varepsilon$$

buluruz. Böylece (3.2.14) kullanılırsa (3.2.15)'in geçerliliği elde edilir.

Şimdi varsayalımki $x \in X$ keyfi olsun. X zayıf dizisel kompakt olduğundan $(T_n x)$ dizisinin bir $(T_{n_k}x)$ altdizisi vardır, öyle ki $w - \lim_n T_{n_k}x = x_0$ mevcuttur. (3.2.15) den görülür ki

(3.2.16) $$\lim_n T_n(x - Tx) = 0$$

T and T_n değişmeli olduğundan T_{n_k} ve T Cohen'nin lemmasının şartlarını sağlar. Bu yüzden $n \in \mathbb{N}$ için

(3.2.17) $$T_n x = (\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj})x_0 + T_n(x - x_0),$$

eşitliğine sahip oluruz. T nin sürekliliğinden $k \in \mathbb{N}$ için $z_{n_k} = \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_kj}(I + T + T^2 + ... + T^{j-1})x$ olmak üzere

(3.2.18) $$\begin{aligned} x - T_{n_k}x &= (1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_kj})x + \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_kj}(I-T)(I + T + T^2 + ... + T^{j-1})x \\ &= (1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_kj})x + (I-T)z_{n_k} \end{aligned}$$

sahip oluruz. Buradan (3.2.18) de k üzerinden zayıf limit alınırsa $x - x_0 = w - \lim_k (I-T)z_{n_k}$ elde ederiz. $(I-T)z_{n_k} \in R(I-T)$ olduğunda, $x - x_0$, $R(I-T)$ nin zayıf kapanışına bir aittir. Fakat lokal konveks vektör uzaylarında, bir konveks altkümenin zayıf kapanışı bu altkümenin orjinal kapanışına eşit olduğundan $x - x_0 \in \overline{R(I-T)}$ dir. O halde (3.2.15) den $\lim_n T_n(x - x_0) = 0$ dır. Böylece (3.2.17) den $\lim_n T_n x = x_0$ elde edilir.$x \in X$ için

$x_0 = T_0 x = \lim_n T_n x = \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j x$, yazılırsa T'nin lineerliği açıktır. (3.2.9)'u kullanarak, $q \in \varepsilon$, her bir $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q(T_n x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_{nj}| q(T^j x) \leq M q\,'(x)$$

elde ederiz. Bundan dolayı $\{T_n, n \in N\}$ operatörler ailesi (3.2.9) anlamında eşsüreklidir. Buradan kolayca görülür ki T_0, sürekli bir operatördür. Şimdi $Tx_0 = x_0$ ve $x_0 = T_0 x$ dan her bir $x \in X$ için

$$Tx_0 = TT_0 x = x_0 = T_0 x$$

eşitliğini elde ederiz ve buradan her bir $j \in \mathbb{N}$ için $TT_0 = T_0 \Rightarrow T^j T_0 = T_0$ elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n T_0 = (\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}) T_0$ eşitliğine sahip oluruz ki bu $T_0^2 = T_0$ eşitliğini gerektirir. Diğer taraftan

$$T_n - T_n T = b_{n1} T + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{nj+1} - b_{nj} T^{j+1})$$

eşitliğine sahip oluruz. (3.2.9) ve B nin kuvvetli regülerliği kullanılarak $T_0 = T_0 T$ elde edilir ki bu da (3.2.10) dur. Şimdi T_0 limit dönüşümünün kuvvetli regüler B matrisine bağlı olmadığını ispatlayalım. Bunun için başka bir kuvvetli regüler matris $C = (c_{nj})$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} T^j$ olsun. Önceki tartışmadan $x \in X$ için

(3.2.19) $$T_1 x = \lim_n w_n x$$

ve

(3.2.20) $$T_1 = T_1^2 = TT_1 = T_1 T$$

olacak şekilde X üzerinde sürekli lineer bir T, dönüşümü vardır. (3.2.20)den her bir $j \in \mathbb{N}$ için

(3.2.21) $$T_1 = T_1^2 = T^j T_1 = T_1 T^j$$

elde edilir. (3.2.21)'i b_{nj} ile çarpılıp ve daha sonra j üzerinden toplam alınırsa, $n \in \mathbb{N}$

(3.2.22) $$(\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}) T_1 = T_n T_1 = T_1 T_n$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa $T_1 = T_0 T_1 = T_1 T_0$ elde edilir. Benzer yolla $T_0 = T_1 T_0 = T_0 T_1$ bulunur. Dolayısıyla $T_0 = T_1$ dir.
Son olarak (3.2.11), (3.2.12) ve (3.2.13) bağıntıları [**20**, syf 214] yer alan sonuçtan elde edilir. $\square$

Kaynakça

[1] M. BALCI, Reel Analiz, Ankara, 1998.

[2] G.D. BIRKHOFF, *Proff of the Ergodic Theorem,* Proc. of National Aca. of Science, U.S.A., **17**(1931), 656-660.

[3] L.W. Cohen, *On The Mean Ergodic Theorem,* Ann. of Math. **3**(41)(1940), 505-509.

[4] D. Cohn, Measure Theory, Birkhöuser, Boston, 1980.

[5] B. Choudhary, Sudarsan Nanda, Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, New York, 1989.

[6] G. DAS, B. K. PATEL, *Sublinear Functionals Ergodicity and Invariant Measures,* Internat. J. Math. Math. Sci., **12**(4)(1989), 809-819.

[7] DAS and MISRA, *Sublinear Functional and Class of Conservative Matrices (Under Communication)*

[8] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, Lineer Operators, Part I. General Theory, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[9] P. R. HALMOS, Lectures on Ergodic Theory, Chelsea, Publishing, 1953.

[10] C. JARDAS, N. SARAPA, *A Summability Method in Some Strong Laws of Large Numbers,* Mathematical Communications, **2**(1997), 107-124.

[11] J. P. KING, *Almost Summable Sequences*, Proc. Amer. Math. Soc., **17**(1966), 1219-1225.

[12] E. KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wıley-Sons, New York, 1978.

[13] G. G., LORENTZ, *A Contribution to the Theory of Divergent Sequences,* Acta Mathematica., **80**(1948), 167-190.

[14] S. LİPSCHUTZ, Theory and Problems of General Topology, Mc.Graw-hill Book Company, New York, 1965.

[15] I. J. MADDOX, Elements of Functional Analysis Cambridge, University Press. Cambridge, 1970.

[16] G. M., PETERSON, Regular Matrix Transformations, Mc.Graw-Hill. London 1966.

[17] A. P. ROBERTSON, W. J. ROBERTSON, Topological Vektör Spaces, Cambridge Univ. Press, New York, 1964.

[18] M. STIEGLITZ, *Eine Verallgemeineinerungdes Begriffder Fastkonvergenz,* Math. Japon., **18**(1973), 53-70.

[19] SUCHESTON, *An Ergodic Application of Almost Convergence Sequence,* Duke Math. Jour., **30**(1963), 417-422.

[20] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılı Malatya doğumludur. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2001 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. 2003 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümününe yatay geçiş yaparak 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığının açmış olduğu sınavı kazanarak Matematik öğretmenliği kadrosuna atandı. 2005-2006 Eğitim öğretim yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Hâlen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir orta öğretim kurumunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.