T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNKOWSKİ UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

M. Aykut AKGÜN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2015

Tezin Başlığı : Minkowski Uzayında Bazı Eğrilerin Karakterizasyonları

Tezi Hazırlayan : M. Aykut AKGÜN

Sınav Tarihi : 06.07.2015

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ** ....

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ ....

Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ ....

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Erol KILIÇ ....

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ ....

Adıyaman Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Minkowski Uzayında Bazı Eğrilerin Karakterizasyonları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

M. Aykut AKGÜN

ÖZET

Doktora Tezi

Minkowski Uzayında Bazı Eğrilerin Karakterizasyonları

M. Aykut AKGÜN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

99+v sayfa

2015
Danışman: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi sunularak bu tezde ele alınan problemler tanıtıldı.

İkinci bölüm ilerleyen bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için temel kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölüm tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde Minkowski uzayında bazı eğrilerin karakterizasyonları verildi.

Dördüncü bölümde ise R_2^4 uzayında bazı eğriler için bazı karakterizasyonlar elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Null eğri, Frenet çatı, Cartan çatı, Cartan eğri, Inclined eğri.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

The Characterizations of Some Curves in Minkowski Space

M. Aykut AKGÜN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

99+v pages
2015
Supervisor: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

This study designed as a philosophy doctoral thesis covers four chapters. In the first Chapter, the historical developments and the problems which are discussed in this thesis are presented. We establish the problems studied in this thesis and give the motivation for studying these topics. We also recall main results obtained so far and outline our results.

In the second chapter, we recall basic definitions and theorems which are used in the rest of the thesis. The third and fourth chapters are original parts of thesis.

In the third chapter we give some characterizations for curves in Minkowski space.

In the fourth chapter we obtain some characterizations for some curves in R_2^4.

KEY WORDS: Null curve, Frenet frame, Cartan frame, Cartan curve, Inclined curve.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ' a, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren bölüm başkanım Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan değerli hocam Doç. Dr. Erol KILIÇ' a, tezin yazılması aşamasında benden bilgi ve tavsiyelerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen Sevgili eşim Sibel' e teşekkürlerimi sunarım.

M. Aykut AKGÜN

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Semi-Öklidyen uzayda eğriler teorisi birçok yazar tarafından çalışılmış ve bu alanda önemli karakterizasyonlar elde edilmiştir ([7], [5], [13], [2], [3]). Ancak null eğrilerin geometrisi non-dejenere eğrilerin geometrisinden çok farklıdır. Buna rağmen null eğrilerin incelemesi aslında non-dejenere eğrilerdeki yöntemlere benzer yöntemlerle yapılmıştır. Bu yöntemlerden biri pseudo-yay parametresini kullanmaktır. Bu anlamda Bonnor ivme vektörünü normalleştirmek için kulandığı pseudo-yay parametresini kullanmış ve kanonik çatı ile Cartan çatıyı elde etmiştir [1]. A. Fernandez ve arkadaşları Lorentz manifold üzerinde bir null eğrinin eğriliklerini kullanarak bir Frenet çatı oluşturmuş ve Lorentz anlamında null helisler ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [3]. C. Çöken ve Ü. Çiftçi, 4-boyutlu R_1^4 Minkowski uzayında null eğrileri çalışmışlar ve pseudo küresel eğriler ve Bertrand eğrileri ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir [2].

R_1^3 uzayında timelike ve null helislerin yer vektörlerinin karakterizasyonları K. İlarslan ve Ö. Boyacığlu tarafından elde edilmiştir [7]. K. İlarslan ve E. Nesovic R_1^4 uzayında null eğrileri çalışarak null normal eğriler ile null oskülatör eğriler arasındaki ilişkileri, null rektifiyen eğriler ve null oskülatör eğriler arasındaki ilişkiye benzer şekilde elde etmişlerdir [12].

K. İlarslan, E_1^3 Minkowski uzayında spacelike normal eğrileri çalışmış ve spacelike, timelike, null asli normalli spacelike normal eğriler için bazı karakterizasyonlar vermiştir [8]. K. İlarslan, E. Nesovic and M. Petrovic-Torgasev Minkowski 3-uzayında tamamen yatan non-null ve null rektifiye eğrileri karakterize etmişlerdir [9].

A. T. Ali ve M. Önder, Minkowski uzayında rektifiye spacelike eğrileri eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize etmişlerdir [5]. M. Önder, H. Kocayiğit ve M. Kazaz Minkowski uzayında spacelike helisler ile ilgili bazı sonuçlar vermiş ve Minkowski 4-uzayında spacelike helisleri karakterize eden diferensiyel denklemler elde etmişlerdir [13].

M. Sakaki, R_1^n Minkowski uzayında n-boyutlu null eğrileri incelemiş ve pseudo null eğrileri eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize etmiştir [24]. R_2^4 Minkowski uzayında pseudo hiperbolik null eğrilerin Cartan eğrilikleri türünden karakterizasyonları ve bir null eğrinin evolütü ile bir timelike eğrinin involütü arasında bir bağıntı M. Sakaki tarafından verilmiştir [25].

A. Fernandez, A. Gimenez ve P. Lucas Lorentz-Minkowski uzayında null eğrileri, farklı ekran distribüsyonlarına göre Frenet denklemleri ile incelemişlerdir. Özel olarak Bonnor ın eğrilik fonksiyonlarını ve Bonnor ın Frenet denklemlerini Duggal-Bejancu yöntemiyle ekran ve null transversal demetlerini kullanarak elde etmişlerdir [4].

J. Walrave 4-boyutlu LP-Sasakian manifold üzerindeki spacelike ve timelike eğrilerin farklı çatılarına göre Frenet formüllerini vermiştir [14]. S. Keleş, S. Y. Perktaş and E. Kılıç 4-boyutlu LP-Sasakian manifold üzerindeki spacelike ve timelike eğrilerin farklı çatılara göre Frenet formüllerini kullanarak biharmonik eğrileri incelemişlerdir [15].

Z. Küçükaslan, M. Bektaş ve H. Balgetir L^{m+2} Lorentz uzayında inclined null eğrilerin harmonik eğriliklerini vermişlerdir. Ayrıca L^{m+2} Lorentz uzayında null eğrilerin inclined eğri olması için gerek ve yeter şartları araştırmışlardır [26].

S. Yılmaz ve M. Turgut Minkowski uzayında spacelike ve timelike bir eğrinin inclined olması için gerek ve yeter şartları vermişlerdir [27].

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, konunun tarihsel gelişimine, ikinci bölüm ise eğriler ile ilgili bazı temel kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, Minkowski uzayında bazı eğrilerin farklı alt uzaylarda kalması ve inclined olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Dördüncü bölümde ise R_2^4 uzayında null eğrilerin farklı alt uzaylarda kalması ve inclined olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\langle , \rangle : V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

ii) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir [19].

Tanım 2.0.2. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde bir simetrik bilineer dönüşüm $\langle , \rangle : V \times V \to R$ olsun. Eğer

$$\langle \xi, v \rangle = 0, \forall v \in V \tag{2.0.1}$$

olacak şekilde V nin en az bir $\xi \neq 0$ vektörü varsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna V de dejeneredir; aksi halde non-dejeneredir denir [3].

Tanım 2.0.3. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde bir simetrik bilineer dönüşüm $\langle , \rangle$ olsun. V vektör uzayının

$$Rad\ V = \{\xi \in V : \langle \xi, v \rangle = 0,\ \forall v \in V\} \tag{2.0.2}$$

ile tanımlı alt uzayına, V nin $\langle , \rangle$ ye göre *radikal uzayı* veya *null uzayı* denir [21].

Tanım 2.0.4. V reel vektör uzayında $\langle , \rangle|_W$ nin negatif tanımlı olduğu en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde $\langle , \rangle$ nin *indeksi* denir [19].

Tanım 2.0.5. V bir reel vektör uzayı olsun. Bu durumda

i) V üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer $\langle , \rangle$ dönüşümü tanımlı ise $(V, \langle , \rangle)$ ye *semi-Öklidyen uzay* ve $\langle , \rangle$ ye V üzerinde bir *skalar çarpım*,

ii) V üzerinde dejenere, simetrik, bilineer $\langle , \rangle$ dönüşümü tanımlı ise $(V, \langle , \rangle)$ ye bir *lightlike uzay* denir [21].

Tanım 2.0.6. $(V,\langle,\rangle)$ bir skalar çarpım uzayı olsun. Bu durumda

$$\|.\|: V \to R$$
$$\|v\| = \sqrt{|\langle v,v\rangle|}, \forall v \in V$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|$ fonksiyonuna V vektör uzayında norm denir. Burada $\|v\|$ skaları v vektörünün uzunluğu olarak adlandırılır. Uzunluğu 1 birim olan yani, $\langle v,v\rangle = \pm 1$ olan vektöre birim vektör denir [19]

Tanım 2.0.7. $(V,\langle,\rangle)$ bir skalar çarpım uzayı olsun. Eğer $u,v \in V$ gibi iki vektör için $\langle u,v\rangle = 0$ ise bu vektörlere ortogonaldir denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir [19].

Tanım 2.0.8. $(V,\langle,\rangle)$ bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin iki alt uzayı U ve W olmak üzere $\forall u \in U$, $\forall w \in W$ için $\langle u,w\rangle = 0$ oluyorsa U ve W ya ortogonal alt uzaylar denir ve $U \perp W$ ile gösterilir [19].

Tanım 2.0.9. $(V,\langle,\rangle)$ bir semi-Öklidyen uzay olsun. $x \in V$ için

i) $\langle x,x\rangle > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne *spacelike vektör*,

ii) $\langle x,x\rangle < 0$ ise x vektörüne *timelike vektör*,

iii) $\langle x,x\rangle = 0$ ise x vektörüne *null* veya *lightlike vektör*

denir [19].

Tanım 2.0.10. R_1^4 uzayında bir α eğrisine, her $s \in R$ için $\langle \alpha'(s),\alpha'(s)\rangle = 0$ ve $\alpha'(s) \neq 0$ ise null eğri; $\langle \alpha'(s),\alpha'(s)\rangle < 0$ ise timelike eğri ve $\langle \alpha'(s),\alpha'(s)\rangle > 0$ ise spacelike eğri denir [10].

Teorem 2.0.1. α, *(M_1^4, g) Lorentz manifoldu üzerinde bir non-geodezik null eğri ve s,* α *nın distinguished parametresi olsun. Her s için $T_{\alpha(s)}M_1^4$ tanjant uzayının $g(\alpha'',\alpha'') = 1$ olacak şekildeki bir bazı $E = \{\alpha',\alpha'',\alpha''',\alpha''''\}$ olsun. O zaman aşağıdaki Cartan Frenet denklemlerini sağlayan $(\alpha(s),F)$ null Cartan eğrisinin bir tek $F = \{L,N,W_1,W_2\}$ Frenet* *çatısı vardır [20].*

$$\begin{aligned}\nabla_L L &= W_1, \\ \nabla_L N &= k_1 W_1 + k_2 W_2, \\ \nabla_L W_1 &= -k_1 L - N, \\ \nabla_L W_2 &= -k_2 L.\end{aligned} \tag{2.0.3}$$

Teorem 2.0.2. $(W, \langle , \rangle)$ *reel n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı ve boy* $RadW = r < n$ *olsun. Bu durumda, radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayı non-dejeneredir [21].*

İspat. W nın tümleyeni SW olmak üzere

$$W = Rad\, W \oplus_{orth} S\, W \tag{2.0.4}$$

dir. Burada, $\oplus$ direkt toplamdır. Kabul edelim ki, her $v \in SW$ için $\langle u, v \rangle = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in SW$ var olsun. Bu durumda $u \in Rad\ W$ dır.
$Rad\ W \cap SW = \{0\}$ olduğundan $u = 0$ dır. Bu ise SW nın non-dejenere olduğunu gösterir. □

Tanım 2.0.11. $(W, \langle , \rangle)$ reel n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayına W nın *ekran uzayı* denir [21].

Tanım 2.0.12. $(V, \langle , \rangle)$ m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $\langle , \rangle|_W$ dejenere ise bu alt uzaya *lightlike alt uzay* denir.

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\} \tag{2.0.5}$$

alt uzayına W uzayının *diki* denir. Eğer W, V nin non-dejenere bir alt uzayı ise

$$W \cap W^{\perp} = \{0\} \tag{2.0.6}$$

dır. Eğer W, V nin lightlike bir alt uzayı ise $W \cap W^{\perp}$ sıfır vektöründen ibaret olmak zorunda değildir [21].

Önerme 2.0.1. $(V,\langle,\rangle)$ *reel m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda,*

i) *boy* $W +$ *boy* $W^{\perp} = m$,

ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

iii) *Rad* $W =$ *Rad* $W^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dir[21].

Sonuç 2.0.1. V bir skalar çarpım uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) W bir non-dejenere alt uzaydır.

ii) $W^{\perp}$ bir non-dejenere alt uzaydır.

iii) W ve $W^{\perp}$ birbirini tümleyen ortogonal alt uzaylardır.

iv) V vektör uzayı W ve $W^{\perp}$ alt vektör uzaylarının ortogonal direkt toplamıdır, yani $W \perp W^{\perp} = V$ dir.

Ayrıca (iv) den görülür ki, bir non-dejenere W alt uzayı için

$$ind\ V = ind\ W + ind\ W^{\perp} \qquad (2.0.7)$$

dir [21].

Tanım 2.0.13. $(V,\langle,\rangle)$ bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu durumda

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0,\ g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij},\ i, j \in \{1,\ldots,q\},$$
$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0,\ g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta \in \{1,\ldots,t\},\ \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekilde V nin bir

$$B = \{f_1,\ldots,f_r, f_1^*,\ldots,f_r^*, u_1,\ldots,u_t\} \qquad (2.0.8)$$

bazı vardır ve bu baza V nin bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Tanım 2.0.14. $(V,\langle,\rangle)$ m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin n-boyutlu bir alt uzayı olsun. $r \leq n$ ve $1 \leq s \leq t$ için $W = Sp\{f_1,\ldots,f_m, u_1,\ldots,u_s\}$ olmak üzere,

$$B = \{f_1,\ldots,f_r, f_1^*,\ldots,f_r^*, u_1,\ldots,u_t\} \qquad (2.0.9)$$

kümesine V nin W alt uzayı boyunca bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Önerme 2.0.2. $(V, \langle , \rangle)$ *bir semi-Öklidyen uzay ve* W *da* V *nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda,* V *nin* W *boyunca bir quasi-ortonormal bazı vardır [21].*

Tanım 2.0.15. $(M, \langle , \rangle)$ bir semi-Riemann manifold olsun. $\langle , \rangle$ metrik tensörünün indeksine M nin indeksi denir ve M nin indeksi *ind M* ile gösterilir.

ind $M = q$ olsun. Bu durumda $0 \leq q \leq boy\, M$ dir. Özel olarak $q = 0$ ise M manifolduna bir *Riemann manifoldu*, $q = 1$ ve $boy\, M > 2$ ise M manifolduna bir *Lorentz manifoldu* denir [19].

Tanım 2.0.16. E_1^4 uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir eğri olsun. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin tanjant vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit bir açı oluşturuyorsa o zaman bu eğri bir inclined eğridir [26]

R_2^4 Uzayında Kısmen Null Eğrilerin Frenet Denklemleri

Bir spacelike veya timelike α eğrisi boyunca Frenet çatısı null vektörler ihtiva ediyorsa α eğrisine kısmen null veya pseudo null eğri denir [14, 29]. $\alpha : I \to R_2^4$ eğrisi R_2^4 uzayında s yay-parametresi ile verilen bir spacelike veya timelike eğri olsun öyle ki sırasıyla her $s \in I \subset R$ için $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) < 0$ veya $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) > 0$ şartları sağlanır. α nın tanjant ve asli normal vektörleri sırasıyla $T(s) = \alpha'(s)$ ve $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ şeklindedir. Bu durumda $\{T, N\}$ alt uzayı indeksi bir olan bir timelike düzlemdir. Şimdi

$$C^{\perp} = \{X(s) \in R_2^4 : g(X(s), T(s)) = g(X(s), N(s)) = 0\} \tag{2.0.10}$$

alt uzayını göz önüne alalım. O zaman $C^{\perp} = \{T, N\}^{\perp}$ alt uzayı R_2^4 uzayında indeksi 1 olan ve spacelike, timelike, null vektörler içeren bir timelike düzlemdir. Üstelik

$$R_2^4 = C^{\perp} \oplus \{T, N\} \tag{2.0.11}$$

dir. Bu durumda $N'(s) \in R_2^4$ vektörü $a, b, c \in R$ ve $V(s) \in C^{\perp}$ olmak üzere

$$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cV(s) \tag{2.0.12}$$

şeklinde yazılabilir. B_1 binormal vektörünü $\{T, N\}$ düzlemine göre N' nin normal bileşeni olarak tanımlayalım, yani $B_1(s) = V(s)$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisi kısmen null bir eğri olduğundan B_1 vektörü null bir vektördür. O halde $C^{\perp}$ alt uzayında

$$g(T, B_2) = g(N, B_2) = g(B_2, B_2) = 0, \quad g(B_1, B_2) = 1 \tag{2.0.13}$$

olacak şekilde bir B_2 null vektörü vardır. Burada $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının yönlendirmesi R_2^4 uzayının yönlendirmesi ile aynıdır. B_2 vektörü ikinci binormal vektörü olarak adlandırılır.

Ayrıca $g(T,T) = \varepsilon_1 = \mp 1$ ve $g(N,N) = \varepsilon_2 = \mp 1$ dir. Burada $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ dir. Böylece

$$\begin{gathered} g(T,T) = \varepsilon_1, \;\; g(N,N) = \varepsilon_2, \;\; g(B_1,B_2) = 1, \;\; g(B_1,B_1) = g(B_2,B_2) = 0, \\ g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = 0 \end{gathered} \tag{2.0.14}$$

şartları kullanılarak $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına göre

$$\begin{aligned} T' &= g(T',T)\varepsilon_1 T + g(T',N)\varepsilon_2 N + g(T',B_2)B_1 + g(T',B_1)B_2 \\ N' &= g(N',T)\varepsilon_1 T + g(N',N)\varepsilon_2 N + g(N',B_2)B_1 + g(N',B_1)B_2 \\ B_1' &= g(B_1',T)\varepsilon_1 T + g(B_1',N)\varepsilon_2 N + g(B_1',B_2)B_1 + g(B_1',B_1)B_2 \\ B_2' &= g(B_2',T)\varepsilon_1 T + g(B_2',N)\varepsilon_2 N + g(B_2',B_2)B_1 + g(B_2',B_1)B_2 \end{aligned} \tag{2.0.15}$$

denklemleri kolayca elde edilir. (2.0.16) nın s ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} g(T',T) = g(N',N) = g(B_1',B_1) = g(B_2',B_2) = 0, \\ g(T',N) = -g(N',T), \;\; g(T',B_1) = -g(T,B_1'), \\ g(N',B_1) = -g(N,B_1'), \;\; g(B_1',B_2) = -g(B_1,B_2') \\ g(T,B_2') = -g(T',B_2), \;\; g(N',B_2) = -g(N,B_2') \end{aligned} \tag{2.0.16}$$

elde edilir. Buna göre α eğrisinin eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned} k_1(s) &= g(T'(s),N(s))\varepsilon_2, \\ k_2(s) &= g(N'(s),B_2(s)), \\ k_3(s) &= g(B_1'(s),B_2(s)), \end{aligned} \tag{2.0.17}$$

şeklinde tanımlanabilir. (2.0.18) ve (2.0.19) denklemleri (2.0.17) denkleminde kullanılırsa, kısmen null bir eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
T'(s) &= k_1(s)N(s), \\
N'(s) &= k_1(s)T(s) + k_2(s)B_1(s), \\
B_1'(s) &= k_3(s)B_1(s), \\
B_2'(s) &= -\varepsilon_2 k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s),
\end{aligned} \tag{2.0.18}$$

şeklinde elde edilir [28].

$\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısında N normal vektörü timelike alınırsa (2.0.20) ile verilen Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
T'(s) &= k_1(s)N(s), \\
N'(s) &= k_1(s)T(s) + k_2(s)B_1(s), \\
B_1'(s) &= k_3(s)B_1(s), \\
B_2'(s) &= k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s),
\end{aligned} \tag{2.0.19}$$

olur.

R_2^4 Uzayında Null Cartan Eğrilerin Frenet Denklemleri

R_2^4 Uzayında $g(\alpha'', \alpha'') > 0$ olacak şekilde bir α null eğrisinin bir null Cartan eğri olması için her t için $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\}$ lineer bağımsız olmalıdır.

R_2^4 uzayında pseudo-yay parametresi t olan bir null Cartan α eğrisi için

$$L = \alpha'(t), \;\; L' = W_1 \tag{2.0.20}$$

olsun. O halde W_1 vektörü bir birim spacelike vektördür.

Π, $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$ ile gerilen oskülatör 3-uzay olsun. O halde Π üzerindeki $\langle , \rangle$ metriği non-dejeneredir. $\alpha'(t)$ null olduğundan $\alpha''(t)$ birim spacelike bir vektör olur ve $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = 0$ olur. Buradan Π bir Minkowski uzay olduğu görülür. O halde

$$\langle N, L \rangle = 1, \;\; \langle N, W_1 \rangle = 0. \tag{2.0.21}$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde bir tek $N \in \Pi$ null vektörü vardır.

Ayrıca Π ye ortogonal olan bir tek W_2 birim timelike vektörü seçilebilir öyle ki $\{L, N, W_1, W_2\}$ pozitif yönlendirmeye sahiptir. Bu durumda $\{L, N, W_1, W_2\}$ çatısına göre Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} L'(s) &= W_1, \\ N'(s) &= k_1 W_1 + k_2 W_2, \\ W_1'(s) &= -k_1(s) L - N, \\ W_2'(s) &= k_2 L \end{aligned} \tag{2.0.22}$$

şeklinde bulunur. Burada $\{L, N, W_1, W_2\}$ çatısına Cartan çatı, $\{k_1, k_2\}$ eğrilik fonksiyonlarına da Cartan eğrilikleri denir [25].

3. MİNKOWSKİ UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

3.1 R_1^4 Uzayında Cartan Çatılı Null Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde R_1^4 uzayının bazı alt uzaylarında kalan Cartan çatılı null eğrilerin bazı karakterizasyonları incelenecektir.

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ ile verilen Cartan çatılı bir null eğri olsun. α eğrisi için N null ve B_1 spacelike olsun. Bu durumda α null eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{T,N,B_1,B_2\}$ şeklinde sadece bir tek Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= B_1, \\
\nabla_T N &= k_1 B_1 + k_2 B_2, \\
\nabla_T B_1 &= -k_1 T - N, \\
\nabla_T B_2 &= -k_2 T,
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dir [20]. Burada $T = \alpha'(s)$ dir ve T, N, B_1 ve B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\langle T,T\rangle = \langle T,B_1\rangle = \langle T,B_2\rangle = \langle N,N\rangle = \langle N,B_1\rangle = \langle N,B_2\rangle = \langle B_1,B_2\rangle = 0,$$
$$\langle T,N\rangle = \langle B_1,B_1\rangle = \langle B_2,B_2\rangle = 1.$$

1.Durum Öncelikle Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. (3.1.2) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + \mu'(s)N + (\lambda(s) + \mu(s)k_1(s))B_1 + \mu(s)k_2(s)B_2 \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_1(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\mu(s)k_2(s) = 0$ dır ve $\lambda(s) = 0$ olur. Bu ise $\lambda'(s) = 1$ denklemine göre bir çelişkidir. Böylece $\mu(s) \neq 0$ dir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise $\lambda(s) = s + c$ ve $\mu(s) = \frac{-(s+c)}{k_1(s)} = c_1$ olur. Bu sonuç gösterir ki $k_1(s) = \frac{-(s+c)}{c_1} \neq 0$ denklemi, bu şekildeki bir Cartan çatılı null bir eğri için gerekli bir şarttır. Böylece aşağıdaki teorem verilelir.

Teorem 3.1.1. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s) = 0$ ve $k_1(s) = \frac{-(s+c)}{c_1(s)}$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s + c)T + c_1 N$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, B_1\}$ tarfından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 \tag{3.1.5}$$

yazılabilir. (3.1.5) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T - \mu(s)N + (\lambda(s) + \mu'(s))B_1 \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \mu(s) = 0, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Yukarıdaki denklemler göz önüne alındığında çözüm olmadığı görülür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. *R_1^4 uzayının $\{T, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında yatan Cartan çatılı bir null eğri yoktur .*

3.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2 \tag{3.1.8}$$

yazılabilir. (3.1.8) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))T + \lambda(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 1, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

denklemleri bulunur. (3.1.10) denklemleri kullanılarak

$$\mu(s) = \frac{-1}{k_2(s)} = c \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_2(s)}B_2 \tag{3.1.12}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_2(s)}B_2$$

şeklinde olmasıdır.

4.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{3.1.13}$$

yazılabilir. (3.1.13) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & -\mu(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s))N + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))B_1 \\ & + \lambda(s)k_2(s)B_2 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 0, \\ -\mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) = 0, \end{cases} \tag{3.1.15}$$

olduğu görülür. Böylece yukarıdaki ikinci denklemden

$$\mu(s) = \frac{-1}{k_1(s)} \tag{3.1.16}$$

elde edilir. (3.1.16) denklemi (3.1.15) de yerine yazılırsa

$$\lambda(s) = \frac{-k_1'(s)}{k_1^3(s)} \tag{3.1.17}$$

bulunur. Eğer $\lambda(s)k_2(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa iki durum olduğu görülür. Eğer $\lambda(s) = 0$ ise

$$\mu(s) = \frac{-1}{k_1(s)} = sbt. \tag{3.1.18}$$

olur. Buradan görülür ki $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabittir ve

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_1(s)}B_1 \tag{3.1.19}$$

şeklindedir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman (3.1.16) ve (3.1.17) kullanılarak

$$\alpha(s) = -\frac{k_1'(s)}{k_1^3(s)}N - \frac{1}{k_1(s)}B_1 \tag{3.1.20}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.4. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit ve $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = -\frac{k_1'(s)}{k_1^3(s)}N - \frac{1}{k_1(s)}B_1$$

veya $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_1(s)}B_1$$

şeklinde olmasıdır.

5.Durum Cartan çatılı null bir α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarfından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{3.1.21}$$

yazılabilir. (3.1.21) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\mu(s)k_2(s)T + \lambda'(s)N + \lambda(s)k_1(s)B_1 + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s))B_2 \tag{3.1.22}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 0, \\ -\mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) = 0. \end{cases} \tag{3.1.23}$$

Eğer $\lambda(s)k_1(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa iki durum olduğu görülür. Eğer $\lambda(s) = 0$ ise yukarıdaki dördüncü denklemden c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\mu(s) = c \tag{3.1.24}$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha(s) = cB_2 \tag{3.1.25}$$

olur. Eğer $k_1(s) = 0$ ise (3.1.23) denkleminden $\mu(s) = \frac{-1}{k_2(s)}$ ve $\lambda(s) = c_1$ elde edilir. Burada c_1 sabittir. Böylece

$$\alpha(s) = c_1 N - \frac{1}{k_2(s)} B_2 \tag{3.1.26}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.5. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart c sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = cB_2$$

veya $k_1(s) = 0$ ve c_1 sabit olmak üzere

$$\alpha(s) = c_1 N - \frac{1}{k_2(s)} B_2$$

şeklinde olmasıdır.

6.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s) B_1 + \mu(s) B_2 \tag{3.1.27}$$

yazılabilir. (3.1.27) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -(\lambda(s)k_1(s) + \mu(s)k_2(s))T - \lambda(s)N + \lambda'(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.1.28}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 0, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.1.29}$$

bulunur. Bu denklemlerden $\lambda(s) = 0$ ve $\mu(s) = \frac{-1}{k_2(s)}$ elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_2(s)} B_2 \tag{3.1.30}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.6. *Cartan çatılı bir null* α *eğrisinin* R_1^4 *uzayının* $\{B_1, B_2\}$ *ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart* $k_2(s)$ *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \frac{-1}{k_2(s)} B_2$$

şeklinde olmasıdır.

7.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \tag{3.1.31}$$

yazılabilir. (3.1.31) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \gamma(s)k_1(s))T + (\mu'(s) - \gamma(s))N \\ &+ (\lambda(s) + \mu(s)k_1(s) + \gamma'(s))B_1 + \mu(s)k_2(s)B_2 \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \mu'(s) - \gamma(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \gamma(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_1(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{3.1.33}$$

$\mu(s)k_2(s) = 0$ denkleminden eğer $\mu(s) = 0$ ise yukarıdaki denklemlerden çözüm olmadığı görülür. O halde $\mu(s) \neq 0$ dır. Eğer $k_2(s) = 0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit ise o zaman (3.1.33) deki üçüncü denklemde s ye göre türev alınır ve (3.1.33) kullanılırsa

$$\gamma''(s) + 2k_1(s)\gamma(s) + 1 = 0 \tag{3.1.34}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülerek

$$\gamma(s) = c_1 cos\sqrt{2k_1(s)} + c_2 sin\sqrt{2k_1(s)} - \frac{1}{2k_1(s)} \tag{3.1.35}$$

bulunur. (3.1.35) ve (3.1.33) birlikte düşünülürse

$$\mu(s)=\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]s+c_4 \tag{3.1.36}$$

elde edilir. (3.1.33), (3.1.35) ve (3.1.36) kullanılırsa

$$\lambda(s)=\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}\right]k_1(s)s+\frac{s}{2}+c_3 \tag{3.1.37}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[\left(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}\right)k_1(s)s+\frac{s}{2}+c_3\right]T\\&+\left[\left(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right)s+c_4\right]N\\&+\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]B_1\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.7. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N,B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s)=0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[\left(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}\right)k_1(s)s+\frac{s}{2}+c_3\right]T\\&+\left[\left(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right)s+c_4\right]N\\&+\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]B_1\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

8.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,N,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)N+\gamma(s)B_2 \tag{3.1.39}$$

yazılabilir. (3.1.39) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s)=&(\lambda'(s)-\gamma(s)k_2(s))T+\mu'(s)N+(\lambda(s)+\mu(s)k_1(s))B_1\\&+(\gamma'(s)+\mu(s)k_2(s))B_2\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \mu'(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_1(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{3.1.41}$$

Buradan $\mu(s) = c$ olduğu görülür. (3.1.41) den

$$\lambda(s) = -ck_1(s) \tag{3.1.42}$$

elde edilir. (3.1.41) ve (3.1.42) denklemleri kuullanılırsa

$$\gamma(s) = \frac{-ck_1'(s) - 1}{k_2(s)} \tag{3.1.43}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-ck_1(s))\,T + cN + \left(\frac{-ck_1'(s) - 1}{k_2(s)}\right)B_2 \tag{3.1.44}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.8. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart c sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = (-ck_1(s))T + cN + \left(\frac{-ck_1'(s) - 1}{k_2(s)}\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır.

9.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.1.45}$$

yazılabilir. (3.1.45) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) - \gamma(s)k_2(s))T + \mu(s)N + (\lambda(s) \\ &+ \mu'(s))B_1 + \gamma'(s)B_2 \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \mu(s)=0, \\ \lambda'(s)-\mu(s)k_1(s)-\gamma(s)k_2(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \gamma'(s)=0, \end{cases} \tag{3.1.47}$$

bulunur. (3.1.47) den $\gamma(s)=-\frac{1}{k_2(s)}=c$, $\mu(s)=0$ ve $\lambda(s)=0$ yazılabilir. Buradan

$$\alpha(s)=-\frac{1}{k_2(s)}B_2 \tag{3.1.48}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.9. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,B_1,B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s)=-\frac{1}{k_2(s)}B_2$$

şeklinde olmasıdır.

10.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{N,B_1,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)N+\mu(s)B_1+\gamma(s)B_2 \tag{3.1.49}$$

yazılabilir. (3.1.49) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.1.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s)=&-(\mu(s)k_1(s)+\gamma(s)k_2(s))T+(\lambda'(s)-\mu(s))N+(\lambda(s)k_1(s)+\mu'(s))B_1 \\ &+(\lambda(s)k_2(s)+\gamma'(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=0, \\ -(\mu(s)k_1(s)+\gamma(s)k_2(s))=1, \\ \lambda(s)k_1(s)+\mu'(s)=0, \\ \lambda(s)k_2(s)+\gamma'(s)=0, \end{cases} \tag{3.1.51}$$

bulunur. Buradan

$$\lambda'(s)=\mu(s)=-\frac{\gamma''(s)}{k_2(s)} \tag{3.1.52}$$

elde edilir. (3.1.51) ve (3.1.52) kullanılırsa

$$k_1(s)\gamma''(s)-k_2^2(s)\gamma(s)-k_2(s)=0 \tag{3.1.53}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ sıfırdan farklı birer sabit olarak alınırsa (3.1.53) denkleminin çözümü

$$\gamma(s)=c_1e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+c_2e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-\frac{1}{k_2(s)} \tag{3.1.54}$$

olur. (3.1.51) ve (3.1.54) denklemlerinden

$$\lambda(s)=-\frac{c_1}{\sqrt{k_1(s)}}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+\frac{c_2}{\sqrt{k_1(s)}}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s} \tag{3.1.55}$$

bulunur. (3.1.51), (3.1.54) ve (3.1.55) denklemleri kullanılırsa

$$\mu(s)=-c_1\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-c_2\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s} \tag{3.1.56}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[-\frac{c_1}{\sqrt{k_1(s)}}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+\frac{c_2}{\sqrt{k_1(s)}}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}\right]N\\&+\left[-c_1\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-c_2\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}\right]B_1\\&+\left[c_1e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+c_2e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-\frac{1}{k_2(s)}\right]B_2\end{aligned} \tag{3.1.57}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.10. *Cartan çatılı bir null α eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N,B_1,B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[-\frac{c_1}{\sqrt{k_1(s)}}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+\frac{c_2}{\sqrt{k_1(s)}}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}\right]N\\&+\left[-c_1\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-c_2\frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}\right]B_1\\&+\left[c_1e^{\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}+c_2e^{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{k_1(s)}}s}-\frac{1}{k_2(s)}\right]B_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

3.2 R_1^4 Uzayında Timelike Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde R_1^4 uzayının bazı alt uzaylarında kalan timelike eğrilerin bazı karakterizasyonları incelenecektir.

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen bir timelike eğri olsun. α eğrisi için N ve B_1 spacelike olsun. Bu durumda α timelike eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{T, N, B_1, B_2\}$ şeklinde sadece bir tek Frenet çatısı vardır:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 N, \\ \nabla_T N &= k_1 T + k_2 B_1, \\ \nabla_T B_1 &= -k_2 N + k_3 B_2, \\ \nabla_T B_2 &= -k_3 B_1. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Burada T, N, B_1 ve B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\langle B_1, B_1 \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1, \ \ \langle T, T \rangle = -1. \tag{3.2.2}$$

[14]

1.Durum Öncelikle timelike bir α eğrisinin $\{T, N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \tag{3.2.3}$$

yazılabilir. (3.2.3) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N + \mu(s)k_2(s)B_1 \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Eğer $\mu(s) = 0$ ise $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c)T \tag{3.2.6}$$

şeklindedir. Bu ise α nın bir timelike doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman (3.2.5) denkleminden

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. (3.2.7) den $\frac{d\lambda(s)}{ds} + \mu(s)k_1(s) = -1$ elde edilir. Buradan

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d\mu(s)}{ds}\right) + \mu(s)k_1(s) = -1 \tag{3.2.8}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3.2.8) de $t = \int_0^s k_1(u)du$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-\frac{d^2\mu}{dt^2} + \mu = -1 \tag{3.2.9}$$

yazılır. (3.2.9) denkleminin genel çözümü

$$\mu(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - 1 \tag{3.2.10}$$

veya

$$\mu(t) = c_1(cosht + sinht) + c_2(cosht - sinht) - 1 \tag{3.2.11}$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2 \in R$ dir. $c_1 + c_2 = A_1$ ve $c_1 - c_2 = A_2$ şeklinde alınırsa

$$\mu(t) = A_1cosht + A_2sinht - 1 \tag{3.2.12}$$

elde edilir. (3.2.12) denkleminde $t=\int_0^s k_1(u)du$ değişkeni tekrar yerine yazılırsa

$$\mu(s)=A_1cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)+A_2sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-1 \tag{3.2.13}$$

elde edilir. (3.2.7) denkleminden

$$\lambda(s)=-A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) \tag{3.2.14}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[-A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)\right]T\\&+\left[A_1cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)+A_2sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-1\right]N\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. *Bir α timelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart α eğrisinin R_1^4 uzayında bir timelike doğru olması veya $k_2(s)=0$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[-A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)\right]T\\&+\left[A_1cosh\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+A_2sinh\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)-1\right]N\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{T,B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)B_1 \tag{3.2.16}$$

yazılabilir. (3.2.16) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)T+(\lambda(s)k_1(s)-\mu(s)k_2(s))N+\mu'(s)B_1+\mu(s)k_3(s)B_2 \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = -s + c$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (-s + c)T \tag{3.2.19}$$

şeklindedir. Bu ise α nın bir timelike doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_3(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = -s + c$ ve $\mu(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}(-s + c) = sbt.$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (-s + c)T + \frac{k_1(s)}{k_2(s)}(-s + c)B_1 \tag{3.2.20}$$

olması gerekir. Halbuki bu iki sonucu gerçekleyen α timelike eğrilerinin bulunamayacağı kolayca görülür. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2. *R_1^4 uzayının $\{T, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir timelike eğri yoktur.*

3.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2 \tag{3.2.21}$$

yazılabilir. (3.2.21) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + \lambda(s)k_1(s)N - \mu(s)k_2(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.2.22}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ -\mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.23}$$

bulunur. (3.2.23) kullanılırsa $\lambda(s) = -s + c$, $\mu(s) = c_1$ ve $k_3(s) = 0$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (-s + c)T + c_1 B_2 \tag{3.2.24}$$

olması gerekir. Halbuki bu sonucu gerçekleyen bir α timelike eğrisinin bulunamayacağı kolayca görülür. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. *R_1^4 uzayının $\{T, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir timelike eğri yoktur.*

4.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{3.2.25}$$

yazılabilir. (3.2.25) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))N + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s))B_1 + \mu(s)k_3(s)B_2 \tag{3.2.26}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.2.27}$$

Burada $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt.$ ve $k_2(s) = 0$ bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N \tag{3.2.28}$$

şeklindedir. Eğer $k_3(s) = 0$ ise bu durumda $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ ve $\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0$ denklemleri kullanılırsa

$$\mu(s) = \frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)} \tag{3.2.29}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)})B_1 \tag{3.2.30}$$

olması gerekir. Halbuki bu iki sonucu gerçekleyen α timelike eğrilerinin bulunamayacağı kolayca görülür. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4. *R_1^4 uzayının $\{N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir timelike eğri yoktur.*

5.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{3.2.31}$$

yazılabilir. (3.2.31) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda(s)k_1(s)T + \lambda'(s)N + (\lambda(s)k_2(s) - \mu(s)k_3(s))B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.2.32}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) - \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0. \end{cases} \tag{3.2.33}$$

(3.2.33) den $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt$ ve $\mu(s) = -\frac{k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)} = sbt$. elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (-\frac{k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)})B_2 \tag{3.2.34}$$

olması gerekir. Halbuki bu sonucu gerçekleyen bir α timelike eğrisinin bulunamayacağı kolayca görülür. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.5. *R_1^4 uzayının $\{N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir timelike eğri yoktur.*

6.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)B_1 + \mu(s)B_2 \tag{3.2.35}$$

yazılabilir. (3.2.35) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_2(s)N + (\lambda'(s) - \mu(s)k_3(s))B_1 + (\mu'(s) + \lambda(s)k_3(s))B_2 \tag{3.2.36}$$

olur. α bir timelike eğri olduğundan $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -1$ olmalıdır. Fakat (3.2.36) dan görülür ki $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ dır. Bu ise bir çelişki oluşturur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6. *R_1^4 uzayının $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan bir timelike eğri yoktur.*

7.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \tag{3.2.37}$$

yazılabilir. (3.2.37) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_2(s))N \\ &+ (\mu(s)k_2(s) + \gamma'(s))B_1 + \gamma(s)k_3(s)B_2. \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.39}$$

elde edilir. Buradan $\gamma(s) = 0$ ise $\mu(s)k_2(s) = 0$ olur. Bu sonuç ile ya $\mu(s) = 0$ veya $k_2(s) = 0$ olduğu görülür. Burada $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ alınması halinde istenilen şartlarda bir α eğrisi bulunamaz. Eğer $k_2(s) = 0$ ise

$$\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1 \tag{3.2.40}$$
$$\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d\mu(s)}{ds}\right) + \mu(s)k_1(s) = -1 \tag{3.2.41}$$

olur. (3.2.41) denkleminde $t = \int_0^s k_1(u)du$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-\frac{d^2\mu}{dt^2} + \mu = -1 \tag{3.2.42}$$

denklemi elde edilir. (3.2.42) nin genel çözümü

$$\mu(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - 1 \tag{3.2.43}$$

veya

$$\mu(t) = c_1(cosht + sinht) + c_2(cosht - sinht) - 1 \tag{3.2.44}$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2 \in R$ dir. $c_1 + c_2 = A_1$ ve $c_1 - c_2 = A_2$ olarak alınırsa

$$\mu(t) = A_1cosht + A_2sinht - 1 \tag{3.2.45}$$

elde edilir. (3.2.45) de $t = \int_0^s k_1(u)du$ değişkeni yerine yazılırsa

$$\mu(s) = A_1cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) + A_2sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) - 1 \tag{3.2.46}$$

elde edilir. (3.2.46) dan

$$\lambda(s) = -A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) - A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) \tag{3.2.47}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) = &\left[-A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) - A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)\right]T \\ &+ \left[A_1cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) + A_2sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right) - 1\right]N\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

şeklindedir. Eğer $k_3(s) = 0$ ise o zaman

$$\begin{cases} \lambda'(s) + k_1(s)\mu(s) = -1, \\ k_1(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ k_2(s)\mu(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.49}$$

bulunur. Buradan

$$k_1(s)\lambda'(s) + \mu''(s) - k_2(s)\gamma'(s) = 0 \tag{3.2.50}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ sıfırdan farklı sabitlerdir. Eğer (3.2.49) ve (3.2.50) kullanılırsa ikinci mertebeden

$$\mu''(s) + (k_2^2(s) - k_1^2(s))\mu(s) = k_1(s) \tag{3.2.51}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3.2.51) diferensiyel denklemi çözülürse

$$\mu(s) = c_1 cos\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s} + c_2 sin\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s} + \frac{k_1(s)}{k_2^2(s) - k_1^2(s)} \tag{3.2.52}$$

elde edilir. Buradan $\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1$ denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda(s) =& -\left(\frac{k_1(s)}{k_2^2(s) - k_1^2(s)} + 1\right)s \\ & - \frac{k_1(s)}{\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s}}\left(c_2 cos\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s} + c_1 sin\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s}\right) \end{aligned} \tag{3.2.53}$$

bulunur. $k_2(s)\mu(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(s) =& \frac{k_1(s)}{k_2^2(s) - k_1^2(s)}s \\ & + \frac{k_2(s)}{\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s}}\left(c_2 cos\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s} - c_1 sin\sqrt{(k_2^2(s) - k_1^2(s))s}\right) \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\alpha(s) =&[-\left(\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}+1\right)s \\
&-\frac{k_1(s)}{\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}}\left(c_2cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+c_1sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}\right)]T \\
&+\left(c_1cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+c_2sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}\right)N \\
&+[\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}s \\
&+\frac{k_2(s)}{\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}}\left(c_2cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}-c_1sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}\right)]B_1
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.7. *R_1^4 uzayındaki bir α timelike eğrisinin $\{T,N,B_1\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart ya $k_2(s)=0$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\alpha(s) = &\left[-A_1sinh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)-A_2cosh\left(\int_0^s k_1(u)du)\right)\right]T \\
&+\left[A_1cosh\left(\int_0^s k_1(u)du\right)+A_2sinh\left(\int_0^s k_1(u)du)-1\right)\right]N
\end{aligned}$$

veya $k_1(s)$, $k_2(s)$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\alpha(s) =&[-\left(\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}+1\right)s \\
&-\frac{k_1(s)}{\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}}\left(c_2cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+c_1sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}\right)]T \\
&+\left(c_1cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+c_2sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}+\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}\right)N \\
&+[\frac{k_1(s)}{k_2^2(s)-k_1^2(s)}s \\
&+\frac{k_2(s)}{\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}}\left(c_2cos\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}-c_1sin\sqrt{(k_2^2(s)-k_1^2(s))s}\right)]B_1
\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

8.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_2 \tag{3.2.56}$$

yazılabilir. (3.2.56) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N \\ &+ (\mu(s)k_2(s) - \gamma(s)k_3(s))B_1 + \gamma'(s)B_2 \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.2.58}$$

(3.2.58) den $\gamma(s) = c$ ve $\mu(s) = c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ olduğu görülür. Bu ifadeler, $\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0$ denkleminde kullanılırsa,

$$\lambda(s) = c\frac{k_3(s)k_2'(s) - k_3'(s)k_2(s)}{k_1(s)k_2^2(s)} \tag{3.2.59}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = \left(c\frac{k_3(s)k_2'(s) - k_3'(s)k_2(s)}{k_1(s)k_2^2(s)}\right)T + \left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)N + cB_2 \tag{3.2.60}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8. *Bir α timelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart c sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \left(c\frac{k_3(s)k_2'(s) - k_3'(s)k_2(s)}{k_1(s)k_2^2(s)}\right)T + \left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)N + cB_2$$

şeklinde olmasıdır.

9.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.2.61}$$

yazılabilir. (3.2.61) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))N + (\mu'(s) - \gamma(s)k_3(s))B_1 \\ &+ (\gamma'(s) + \mu(s)k_3(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.2.62}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.63}$$

bulunur. (3.2.63) den $\lambda(s) = -s + c$ ve $\mu(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}(-s+c)$ yazılabilir. Eğer $\mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa,

$$\gamma(s) = -\frac{k_1(s)}{k_2(s)k_3(s)} + \frac{k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_1^2(s)}(-s+c) \tag{3.2.64}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (-s+c)T + \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}(-s+c)\right)B_1 \\ &+ \left(-\frac{k_1(s)}{k_2(s)k_3(s)} + \frac{k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_1^2(s)}(-s+c)\right)B_2 \end{aligned} \tag{3.2.65}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.9. *R_1^4 uzayındaki bir α timelike eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (-s+c)T + \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}(-s+c)\right)B_1 \\ &+ \left(-\frac{k_1(s)}{k_2(s)k_3(s)} + \frac{k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_1^2(s)}(-s+c)\right)B_2 \end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

10.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.2.66}$$

yazılabilir. (3.2.66) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =& \lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))N \\ &+ (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s))B_1 + (\gamma'(s) + \mu(s)k_3(s))B_2\end{aligned} \tag{3.2.67}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.2.68}$$

(3.2.68) den $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ ve $\mu(s) = \frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)}$ elde edilir. Eğer $\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa,

$$\gamma(s) = -\frac{k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)} + \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)} \tag{3.2.69}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) =& (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(-\frac{k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)} + \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)}\right)B_2\end{aligned} \tag{3.2.70}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.10. *R_1^4 uzayındaki bir α timelike eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned}\alpha(s) =& (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(-\frac{k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)} + \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)}\right)B_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

3.3 R_1^4 Uzayında Farklı Frenet Çatıları için Spacelike Eğriler ve Karakterizasyonları

Bu bölümde R_1^4 Minkowski uzayında farklı Frenet çatıları kullanılarak spacelike α eğrisinin bazı alt uzaylarda kalması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır. α, R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen bir spacelike eğri olsun. α eğrisinin bir alt uzayda kalması için eğrilik fonksiyonları türünden ifadesi elde edilmeye çalışılacaktır. İncelenecek spacelike eğriler için kullanılacak çatılardan bazılarını aşağıda verelim.

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen spacelike bir eğri olsun. N ve B_1 spacelike vektörler olsun. Bu şartlarda α spacelike eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan sadece bir tek $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı vardır:

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= k_1 N, \\
\nabla_T N &= -k_1 T + k_3 B_1, \\
\nabla_T B_1 &= -k_2 N + k_3 B_{2,} \\
\nabla_T B_2 &= k_3 B_1.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Burada T, N, B_1 ve B_2 vektörleri karşılıklı ortogonal vektörlerdir ve

$$\langle T,T\rangle = \langle N,N\rangle = \langle B_1,B_1\rangle = 1, \ \ \langle B_2,B_2\rangle = -1 \tag{3.3.2}$$

dir [14].

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen spacelike bir eğri olsun. N spacelike ve B_1 null vektörler olsun. Bu şartlarda α spacelike eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan sadece bir tek $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı vardır:

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= k_1 N, \\
\nabla_T N &= -k_1 T + k_2 B_1, \\
\nabla_T B_1 &= k_3 B_1, \\
\nabla_T B_2 &= -k_2 N - k_3 B_2.
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Burada T, N, B_1 ve B_2 vektörleri karşılıklı ortogonaldir ve

$$\begin{aligned} \langle T,T\rangle = \langle N,N\rangle = \langle B_1,B_2\rangle = 1, \quad \langle B_1,B_1\rangle = \langle B_2,B_2\rangle = 0 \\ \langle T,N\rangle = \langle T,B_1\rangle = \langle T,B_2\rangle = \langle N,B_1\rangle = \langle N,B_2\rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

dir [14].

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen spacelike bir eğri olsun. N ve B_1 null vektörler olsun. Bu şartlarda α spacelike eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan sadece bir tek $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı vardır:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 N, \\ \nabla_T N &= k_2 B_2, \\ \nabla_T B_1 &= -k_1 T + k_3 B_2, \\ \nabla_T B_2 &= -k_3 N - k_2 B_1. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Burada T, N, B_1 ve B_2 vektörleri karşılıklı ortogonal vektörlerdir ve

$$\langle B_1,B_1\rangle = \langle N,N\rangle = 0, \ \ \langle T,T\rangle = \langle B_2,B_2\rangle = 1, \ \ \langle N,B_1\rangle = 1 \tag{3.3.6}$$

dir [14].

3.3.1 R_1^4 Minkowski Uzayında (3.3.1) Frenet çatısı ile verilen Spacelike Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde spacelike eğrilerin R_1^4 uzayının bazı alt uzaylarında kalması için gerekli bazı karakterizasyonlar araştırılacaktır. α, R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen bir eğri olsun.

1.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \tag{3.3.7}$$

yazılabilir. (3.3.7) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N + \mu(s)k_3(s)B_1 \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T \tag{3.3.10}$$

şeklindedir. Bu ise α nın bir spacelike doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_3(s) = 0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit ise

$$\mu''(s) + k_1^2(s)\mu(s) + k_1(s) = 0 \tag{3.3.11}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\mu(s) = c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.12}$$

ve

$$\lambda(s) = c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s \tag{3.3.13}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N \tag{3.3.14}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α nın R_1^4 uzayında bir spacelike doğru olması veya $k_3(s) = 0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = (c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 \tag{3.3.15}$$

yazılabilir. (3.3.15) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))N + \mu'(s)B_1 + \mu(s)k_3(s)B_2 \tag{3.3.16}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.17}$$

bulunur. Eğer $k_3 = 0$ ise $\mu(s) = c_2$ ve $\lambda(s) = s + c_1$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_1 \tag{3.3.18}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.2. *α eğrisi R_1^4 de bir spacelike eğri olsun. Eğer α eğrisinin $k_2(s)$ eğriliği sıfır ise α eğrisinin $\{T, B_1\}$ alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_1$$

şeklinde olmasıdır.

3.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2 \tag{3.3.19}$$

yazılabilir. (3.3.19) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + \lambda(s)k_1(s)N + \mu(s)k_3(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.3.20}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0, \\ -\mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.21}$$

bulunur. (3.3.21) den $k_1(s) = k_3(s) = 0$, $\lambda(s) = s + c_1$ ve $\mu(s) = c_2$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2B_2 \tag{3.3.22}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.3. α *eğrisi* R_1^4 *de bir spacelike eğri olsun . Eğer* $k_1(s) = k_3(s) = 0$ *ise* α *eğrisinin* $\{T, B_2\}$ *alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart* c_1 *ve* c_2 *birer sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2B_2$$

şeklinde olmasıdır.

4.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{3.3.23}$$

yazılabilir. (3.3.23) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & -\lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))N \\ & + (\lambda(s)k_3(s) + \mu'(s))B_1 + \mu(s)k_3(s)B_2 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.25}$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt.$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N$$

olur. Eğer $k_3(s) = 0$ ise $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ ve

$$\mu(s) = \frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)} \tag{3.3.26}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)})B_1$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.4. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N$$

veya

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)})B_1$$

olmasıdır.

5.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{3.3.27}$$

yazılabilir. (3.3.27) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_1(s)T + \lambda'(s)N + (\lambda(s)k_3(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 + +\mu'(s)B_2 \quad (3.3.28)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} -\lambda(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_3(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \quad (3.3.29)$$

bulunur. (3.3.29) dan

$$\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt. \quad (3.3.30)$$

ve

$$\mu(s) = \frac{1}{k_1(s)} = sbt. \quad (3.3.31)$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (\frac{1}{k_1(s)})B_2 \quad (3.3.32)$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.5. *α eğrisi R_1^4 de spacelike bir eğri olsun. Eğer $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit ise α eğrisinin $\{N, B_2\}$ alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (\frac{1}{k_1(s)})B_2$$

şeklinde olmasıdır.

6.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)B_1 + \mu(s)B_2 \quad (3.3.33)$$

yazılabilir. (3.3.33) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_2(s)N + (\lambda'(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 + (\lambda(s)k_3(s) + \mu'(s))B_2 \qquad (3.3.34)$$

(3.3.34) den $\langle T,T\rangle = 0$ olduğu görülür. Fakat α bir spacelike eğri olduğundan bir çelişki elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.6. *R_1^4 uzayının $\{B_1,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan bir spacelike eğrisi yoktur.*

7.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T,N,B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ and γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \qquad (3.3.35)$$

yazılabilir. (3.3.35) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_2(s) + \mu'(s))N \\ &+ (\mu(s)k_3(s) + \gamma'(s))B_1 + \gamma(s)k_3(s)B_2 \end{aligned} \qquad (3.3.36)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_2(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \qquad (3.3.37)$$

bulunur. Eğer $k_3(s) = 0$ ise $\gamma(s) = c$ olur. (3.3.37) den

$$\lambda''(s) + k_1^2(s)\lambda(s) = ck_1(s)k_2(s) \qquad (3.3.38)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Buradan

$$\lambda(s) = c_1 sink_1(s)s + c_2 cosk_1(s)s + \frac{c}{k_1^2(s)} \qquad (3.3.39)$$

bulunur. (3.3.39) eşitliği (3.3.37) de yerine yazılırsa

$$\mu(s) = c_1 k_1(s) cos k_1(s) s - c_2 k_1(s) sin k_1(s) s - \frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.40}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (c_1 sin k_1(s) s + c_2 cos k_1(s) s + \frac{c}{k_1^2(s)})T \\ & + (c_1 k_1(s) cos k_1(s) s - c_2 k_1(s) sin k_1(s) s - \frac{1}{k_1(s)})N + cB_1 \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

yazılır. Eğer $\gamma(s) = 0$ ise iki durum ortaya çıkar: $\mu(s) = 0$ ise o zaman $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c)T \tag{3.3.42}$$

olur. Bu ise α eğrisinin spacelike bir doğru olduğunu olmasını gerektirir. Eğer $k_3(s) = 0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit ise o zaman

$$\mu''(s) + k_1^2(s)\mu(s) + k_1(s) = 0 \tag{3.3.43}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\mu(s) = c_1 cos k_1(s) s + c_2 sin k_1(s) s - \frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.44}$$

bulunur. (3.3.37) ve (3.3.44) kullanılırsa

$$\lambda(s) = c_1 sin k_1(s) s - c_2 cos k_1(s) s \tag{3.3.45}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (c_1 sin k_1(s) s - c_2 cos k_1(s) s)T + (c_1 cos k_1(s) s + c_2 sin k_1(s) s - \frac{1}{k_1(s)})N \tag{3.3.46}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.7. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (c_1 sin k_1(s) s + c_2 cos k_1(s) s + \frac{c}{k_1^2(s)})T \\ & + (c_1 k_1(s) cos k_1(s) s - c_2 k_1(s) sin k_1(s) s - \frac{1}{k_1(s)})N + cB_1 \end{aligned}$$

veya $k_3(s)=0$ *ve* $k_1(s)$ *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s)=(c_1 sink_1(s)s-c_2 cosk_1(s)s)T+(c_1 cosk_1(s)s+c_2 sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)})N$$

ya da $\alpha(s)$ *eğrisinin spacelike bir doğru olmasıdır.*

8.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T,N,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ and γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)N+\gamma(s)B_2 \tag{3.3.47}$$

yazılabilir. (3.3.47) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s)=&(\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s))T+(\lambda(s)k_1(s)+\mu'(s))N\\&+(\mu(s)k_3(s)+\gamma'(s)k_3(s))B_1+\gamma'(s)B_2\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases}\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s)=1,\\ \lambda(s)k_1(s)+\mu'(s)=0,\\ \mu(s)k_3(s)+\gamma'(s)k_3(s)=0,\\ \gamma'(s)=0.\end{cases} \tag{3.3.49}$$

(3.3.49) den $\gamma(s)=c$ ve $\mu(s)k_3(s)=0$ olur. Eğer $k_3(s)=0$ ise

$$\lambda''(s)+k_1^2(s)\lambda(s)=0 \tag{3.3.50}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\lambda(s)=c_1 sink_1(s)s+c_2 cosk_1(s)s \tag{3.3.51}$$

bulunur. (3.3.49) denklemi kullanılırsa

$$\mu(s)=c_1 cosk_1(s)s+c_2 sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.52}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) =&(c_1 sink_1(s)s + c_2 cosk_1(s)s)T \\ &+ (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N + cB_2\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

olur. Eğer $\mu(s) = 0$ ise $k_1(s) = 0$ olacağı açıktır. Bu durumda $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen altuzayda spacelike α eğrisi yoktur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.8. *Bir $\alpha(s)$ spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_3(s) = 0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s) =&(c_1 sink_1(s)s + c_2 cosk_1(s)s)T \\ &+ (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N + cB_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

9.Durum Spacelike bir α eğrisinin tarafından $\{T, B_1, B_2\}$ gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ and γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.54}$$

yazılabilir. (3.3.54) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =&\lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))N + (\mu'(s) + \gamma(s)k_3(s))B_1 \\ &+ (\mu(s)k_3(s) + \gamma'(s))B_2\end{aligned} \tag{3.3.55}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.56}$$

bulunur. (3.3.56) dan

$$\lambda(s) = s + c \tag{3.3.57}$$

ve

$$\mu(s) = \frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)} \tag{3.3.58}$$

elde edilir. Eğer (3.3.57) ve (3.3.58) denklemleri (3.3.56) denkleminde yerine yazılırsa

$$\gamma(s) = \frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)k_1'(s)k_2(s) - (s+c)k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_2^2(s)} \tag{3.3.59}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) =& (s+c)T + \left(\frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(\frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)k_1'(s)k_2(s) - (s+c)k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_2^2(s)}\right)B_2\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.9. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned}\alpha(s) =& (s+c)T + \left(\frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(\frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)k_1'(s)k_2(s) - (s+c)k_1(s)k_2'(s)}{k_3(s)k_2^2(s)}\right)B_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

10.Durum Spacelike bir α eğrisinin tarafından $\{N, B_1, B_2\}$ gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ and γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.61}$$

yazılabilir. (3.3.61) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =& -\lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))N \\ &+ (\lambda(s)k_3(s) + \mu'(s) + \gamma(s)k_3(s))B_1 + (\mu(s)k_3(s) + \gamma'(s))B_2\end{aligned} \tag{3.3.62}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_3(s) + \mu'(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.63}$$

bulunur. (3.3.63) den

$$\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.64}$$

ve

$$\mu(s) = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} \tag{3.3.65}$$

elde edilir. Eğer (3.3.64) ve (3.3.65) denklemleri (3.3.63) denkleminde yerine yazılırsa

$$\gamma(s) = \frac{1}{k_1(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1(s)k_1'(s)k_2(s) + 2k_1'(s)k_2(s)}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)} \tag{3.3.66}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(\frac{1}{k_1(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1(s)k_1'(s)k_2(s) + 2k_1'(s)k_2(s)}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)}\right)B_2 \end{aligned} \tag{3.3.67}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.10. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} \alpha(s) =& (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)}\right)B_1 \\ &+ \left(\frac{1}{k_1(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1(s)k_1'(s)k_2(s) + 2k_1'(s)k_2(s)}{k_1^3(s)k_2^2(s)k_3(s)}\right)B_2 \end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

3.3.2 R_1^4 Minkowski Uzayında (3.3.3) Frenet çatısı ile verilen Spacelike Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde spacelike eğrilerin R_1^4 uzayının bazı alt uzaylarında kalması için gerekli bazı karakterizasyonlar araştırılacaktır. α, R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen bir spacelike eğri olsun.

1.Durum Öncelikle Spacelike bir α eğrisinin $\{T,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \tag{3.3.68}$$

yazılabilir. (3.3.68) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N + \mu(s)k_2(s)B_1 \tag{3.3.69}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.70}$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ dır. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c)T \tag{3.3.71}$$

şeklindedir. Bu ise α eğrisinin bir spacelike doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise

$$\mu''(s) + k_1^2(s)\mu(s) + k_1(s) = 0 \tag{3.3.72}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden

$$\mu(s) = c_1 cos k_1(s)s + c_2 sin k_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.73}$$

ve

$$\lambda(s) = c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s \tag{3.3.74}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N \tag{3.3.75}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.11. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α eğrisinin R_1^4 uzayında spacelike bir doğru olması veya $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 cosk_1(s)s + c_2 sink_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 \tag{3.3.76}$$

yazılabilir. (3.3.76) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + \lambda(s)k_1(s)N + (\mu'(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 \tag{3.3.77}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \mu'(s) + k_3(s)\mu(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.78}$$

(3.3.78) denkleminden $k_1 = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ olur. $\mu'(s) + k_3(s)\mu(s) = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünden

$$\mu(s) = ce^{\int k_3(s)ds} \tag{3.3.79}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T + (ce^{\int k_3(s)ds})B_1 \tag{3.3.80}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.12. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s+c)T + (ce^{\int k_3(s)ds})B_1$$

şeklinde olmasıdır.

3.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2 \tag{3.3.81}$$

yazılabilir. (3.3.81) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))N + (\mu'(s) - \mu(s)k_3(s))B_2 \tag{3.3.82}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.83}$$

bulunur. (3.3.83) den $\lambda(s) = s + c$ ve $\mu(s) = (s+c)\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T + \left((s+c)\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\right)B_2 \tag{3.3.84}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.13. *Bir* α *spacelike eğrisinin* R_1^4 *uzayının* $\{T, B_2\}$ *tarafından gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = (s+c)T + \left((s+c)\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır. Burada k_1, k_2 *ve* k_3 *eğrilik fonksiyonları her s için*

$$k_1(s)k_2(s) + (s+c)[k_2'(s) + k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2(s)k_3(s)] = 0$$

denklemini sağlar.

4.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{3.3.85}$$

yazılabilir. (3.3.85) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_1(s)T + \lambda'(s)N + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 \tag{3.3.86}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} -\lambda(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.87}$$

(3.3.87) denkleminden $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ ve $k_1(s) = sbt$. olduğu görülür. (3.3.87) den

$$\mu(s) = e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} e^{-\int k_3(s)ds} ds\right) \tag{3.3.88}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}N + \left[e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)} e^{-\int k_3(s)ds} ds\right)\right]B_1$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.14. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N,B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}N + \left[e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int \frac{k_2(s)}{k_1(s)}e^{-\int k_3(s)ds}ds\right)\right]B_1$$

şeklinde olmasıdır.

5.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{3.3.89}$$

yazılabilir. (3.3.89) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))N + \lambda(s)k_2(s)B_1 + (\mu'(s) - \mu(s)k_3(s))B_2 \tag{3.3.90}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) \end{cases} \tag{3.3.91}$$

bulunur. (3.3.91) den $k_2(s) = 0$ ve

$$\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt. \tag{3.3.92}$$

elde edilir. (3.3.91) denkleminden

$$\mu(s) = e^{\int k_3(s)ds} \tag{3.3.93}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (e^{\int k_3(s)ds})B_2 \tag{3.3.94}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.15. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s) = 0$ ve $k_1(s) = sbt.$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + (e^{\int k_3(s)ds})B_2$$

şeklinde olmasıdır.

6.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)B_1 + \mu(s)B_2 \tag{3.3.95}$$

yazılabilir. (3.3.95) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\mu(s)k_2(s)N + (\lambda'(s) + \lambda(s)k_3(s))B_1 + (\mu'(s) - \mu(s)k_3(s))B_2 \tag{3.3.96}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} -\mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda'(s) + \lambda(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.97}$$

bulunur. (3.3.96) ve (3.3.97) den $\langle T, T \rangle = 0$ olduğu görülür. Fakat α bir spacelike eğri olduğundan bir çelişki elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.16. *R_1^4 uzayının $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayında kalan bir spacelike eğri yoktur.*

7.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \tag{3.3.98}$$

yazılabilir. (3.3.98) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =&(\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s))T+(\lambda(s)k_1(s)+\mu'(s))N \\ &+(\mu(s)k_2(s)+\gamma'(s)+\gamma(s)k_3(s))B_1\end{aligned} \tag{3.3.99}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)k_1(s)=1, \\ \lambda(s)k_1(s)+\mu'(s)=0, \\ \mu(s)k_2(s)+\gamma'(s)+\gamma(s)k_3(s)=0. \end{cases} \tag{3.3.100}$$

Burada eğer $k_1(s)=sbt.$ ise

$$\mu''(s)+k_1^2(s)\mu(s)+k_1(s)=0 \tag{3.3.101}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\mu(s)=c_1cosk_1(s)s+c_2sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.102}$$

bulunur. (3.3.100) ve (3.3.102) kullanılırsa

$$\lambda(s)=c_1sink_1(s)s-c_2cosk_1(s)s \tag{3.3.103}$$

bulunur. (3.3.100) denkleminden

$$\gamma(s)=-e^{-\int k_3(s)ds}\int e^{\int k_3(s)ds}k_2(s)\left(c_1cosk_1(s)s+c_2sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)}\right)ds \tag{3.3.104}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) =&(c_1sink_1(s)s-c_2cosk_1(s)s)T+(c_1cosk_1(s)s+c_2sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)})N \\ &+\left[-e^{-\int k_3(s)ds}\int e^{\int k_3(s)ds}k_2(s)\left(c_1cosk_1(s)s+c_2sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)}\right]ds\right]B_1\end{aligned} \tag{3.3.105}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.17. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N,B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s)=sbt.$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&(c_1 sink_1(s)s-c_2 cosk_1(s)s)T+(c_1 cosk_1(s)s+c_2 sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)})N\\&+\left[-e^{-\int k_3(s)ds}\int e^{\int k_3(s)ds}k_2(s)\left(c_1 cosk_1(s)s+c_2 sink_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)}\right)ds\right]B_1\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

8.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T,N,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)N+\gamma(s)B_2 \tag{3.3.106}$$

yazılabilir. (3.3.106) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s)=&(\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s))T+(\lambda(s)k_1(s)+\mu'(s)-\gamma(s)k_2(s))N\\&+(\mu(s)k_2(s))B_1+(\gamma'(s)-\gamma(s)k_3(s))B_2\end{aligned} \tag{3.3.107}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases}\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s)=1,\\ \lambda(s)k_1(s)+\mu'(s)-\gamma(s)k_2(s)=0,\\ \gamma'(s)-\gamma(s)k_3(s)=0,\\ \mu(s)k_2(s)=0\end{cases} \tag{3.3.108}$$

bulunur. (3.3.108) den eğer $k_2(s)=0$ ve $k_1(s)=sbt.$ ise

$$\mu''(s)+k_1^2(s)\mu(s)+k_1(s)=0 \tag{3.3.109}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\mu(s)=c_1 sink_1(s)s+c_2 cosk_1(s)s-\frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.110}$$

elde edilir. (3.3.108) ve (3.3.110) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\lambda(s) = c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s \tag{3.3.111}$$

ve

$$\gamma(s) = e^{\int k_3(s)ds} \tag{3.3.112}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s) =&(c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 sink_1(s)s + c_2 cosk_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N \\ &+ (e^{\int k_3(s)ds})B_2\end{aligned} \tag{3.3.113}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.18. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned}\alpha(s) =&(c_1 sink_1(s)s - c_2 cosk_1(s)s)T + (c_1 sink_1(s)s + c_2 cosk_1(s)s - \frac{1}{k_1(s)})N \\ &+ (e^{\int k_3(s)ds})B_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır. Burada eğrilik fonksiyonları

$$k_2(s) - (s+c)[k_2'(s) - k_2(s)k_3(s)] = 0$$

denklemini sağlar.

9.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.114}$$

yazılabilir. (3.3.114) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =&\lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_2(s))N + (\mu'(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 \\ &+ (\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s))B_2\end{aligned} \tag{3.3.115}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.116}$$

Buradan

$$\lambda(s) = s + c \tag{3.3.117}$$

olur. Eğer (3.3.116) ve (3.3.117) denklemleri kullanılırsa

$$\gamma(s) = \frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)} \tag{3.3.118}$$

elde edilir. (3.3.116) denkleminden

$$\mu(s) = e^{-\int k_3(s)ds} \tag{3.3.119}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T + (e^{-\int k_3(s)ds})B_1 + \left(\frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)}\right)B_2 \tag{3.3.120}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.19. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = (s+c)T + (e^{-\int k_3(s)ds})B_1 + \left(\frac{(s+c)k_1(s)}{k_2(s)}\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır. Burada eğrilik fonksiyonları

$$k_1(s) + (s+c)[k_1'(s) - k_1(s)k_2'(s) - k_1(s)k_3(s)] = 0$$

denklemini sağlar.

10.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.121}$$

yazılabilir. (3.3.121) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = &-\lambda(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \gamma(s)k_2(s))N \\ &+ (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s))B_1 + (\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.3.122}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} -\lambda(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.123}$$

bulunur. (3.3.123) den

$$\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)} \tag{3.3.124}$$

olur. (3.3.123) ve (3.3.124) denklemleri kullanılarak

$$\gamma(s) = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} \tag{3.3.125}$$

elde edilir. (3.3.123) denkleminden

$$\mu(s) = e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int e^{\int k_3(s)ds}\frac{k_2(s)}{k_1(s)}ds\right) \tag{3.3.126}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left[e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int e^{\int k_3(s)ds}\frac{k_2(s)}{k_1(s)}ds\right)\right]B_1 + \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)}\right)B_2 \tag{3.3.127}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.20. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})N + \left[e^{-\int k_3(s)ds}\left(\int e^{\int k_3(s)ds}\frac{k_2(s)}{k_1(s)}ds\right)\right]B_1 + \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)}\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır. Burada α nın eğrilik fonksiyonları

$$k_1''(s)k_1^2(s) - k_1'(s)[k_2'(s)k_1^2(s) + 2k_1(s)k_1'(s) - k_2^2(s)k_3(s)] = 0$$

denklemini sağlar.

3.3.3 R_1^4 Minkowski Uzayında (3.3.5) Frenet çatısı ile verilen Spacelike Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde spacelike eğrilerin R_1^4 uzayının bazı alt uzaylarında kalması için gerekli bazı karakterizasyonlar araştırılacaktır. α eğrisi, R_1^4 uzayında $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen spacelike bir eğri olsun.

1.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \qquad (3.3.128)$$

yazılabilir. (3.3.128) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N + \mu(s)k_2(s)B_2 \qquad (3.3.129)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \qquad (3.3.130)$$

Eğer $\mu(s) = 0$ ise $k_1(s) = 0$ ve $\lambda(s) = s + c$ olur. Buradan

$$\alpha(s) = (s+c)T \tag{3.3.131}$$

dir. Bu ise α eğrisinin spacelike bir doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman $\mu(s) = -\int (s+c)k_1(s)ds$ bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T - \left(\int (s+c)k_1(s)ds\right)N \tag{3.3.132}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.21. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T,N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α eğrisinin bir spacelike doğru olması veya $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s+c)T - \left(\int (s+c)k_1(s)ds\right)N$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 \tag{3.3.133}$$

yazılabilir. (3.3.133) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T + \lambda(s)k_1(s)N + \mu'(s)B_1 + \mu(s)k_3(s)B_2 \tag{3.3.134}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.135}$$

bulunur. $\lambda(s)k_1(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa eğer $\lambda(s) = 0$ ise o zaman $\mu(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = sbt$. ve $k_3(s) = 0$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}B_1 \tag{3.3.136}$$

şeklindedir. Eğer $k_1(s) = 0$ ve $\mu(s) = 0$ ise $\lambda(s) = s + c$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c)T \tag{3.3.137}$$

şeklindedir. Bu ise α eğrisinin spacelike bir doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_1(s) = k_3(s) = 0$ ise o zaman $\mu(s) = c_2$ ve $\lambda(s) = s + c_1$ bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + c_2B_1 \tag{3.3.138}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.22. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya $k_3(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}B_1$$

veya α nın spacelike bir doğru olması yada $k_1(s) = k_3(s) = 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + c_2B_1$$

şeklinde olmasıdır.

3.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2, \tag{3.3.139}$$

yazılabilir. (3.3.139) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_3(s))N - \mu(s)k_2(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{3.3.140}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.141}$$

olur. Yukarıdaki üçüncü denklemden eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = s + c$ ve $k_1(s) = 0$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c)T \tag{3.3.142}$$

şeklindedir. Bu ise α nin spacelike bir doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = s + c_1$ ve $\mu(s) = c_2$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_2 \tag{3.3.143}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.23. *R_1^4 uzayındaki bir α spacelike eğrisinin $\{T, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α nın R_1^4 uzayında spacelike bir doğru olması veya $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s + c_1)T + c_2 B_2$$

olmasıdır. Burada eğrilik fonksiyonları $\frac{k_1(s)}{k_3(s)} = \frac{c_2}{s + c_1}$ denklemini sağlar.

4.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{3.3.144}$$

yazılabilir. (3.3.144) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\mu(s)k_1(s)T + \lambda'(s)N + \mu'(s)B_1 + (\lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s))B_2 \tag{3.3.145}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} -\mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.146}$$

Buradan $\lambda(s) = c_1$ ve $\mu(s) = -\frac{1}{k_1(s)} = c_2$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = c_1 N - \frac{1}{k_1(s)} B_1 \tag{3.3.147}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.24. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = c_1 N - \frac{1}{k_1(s)} B_1$$

şeklinde olmasıdır. Burada eğrilik fonksiyonları $c_1 k_2(s) + c_2 k_3(s) = 0$ denklemini sağlar.

5.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{3.3.148}$$

yazılabilir. (3.3.148) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_3(s))N - \mu(s)k_2(s)B_1 + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s))B_2 \tag{3.3.149}$$

α spacelike bir eğri olduğundan, (3.3.149) göz önüne alındığında bir çelişki ortaya çıkar. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.25. *R_1^4 uzayının $\{N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir spacelike eğri yoktur.*

6.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)B_1 + \mu(s)B_2 \tag{3.3.150}$$

yazılabilir. (3.3.150) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = -\lambda(s)k_1(s)T - \mu(s)k_3(s)N + (\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s))B_1 + (\lambda(s)k_3(s) + \mu'(s))B_2 \tag{3.3.151}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s)k_1(s) = 1, \\ \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.152}$$

bulunur. Yukarıdaki ikinci denklemden eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}B_1 \tag{3.3.153}$$

şeklindedir. Eğer $k_3(s) = 0$ ise $\mu(s) = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} = sbt$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})B_1 + (\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)})B_2 \tag{3.3.154}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.26. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1(s)}B_1$$

veya $k_3(s) = 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = (-\frac{1}{k_1(s)})B_1 + (\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)})B_2$$

şeklinde olmasıdır.

7.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \tag{3.3.155}$$

yazılabilir. (3.3.155) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \gamma(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))N \\ & + \gamma'(s)B_1 + (\mu(s)k_2(s) + \gamma(s)k_3(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.3.156}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \gamma(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.157}$$

olur. Bu denklemlerden $\gamma(s) = c_1 = sbt.$ olduğu görülür. Eğer $\mu(s)k_2(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0$ denklemi kullanılırsa $\mu(s) = -c_1\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ elde edilir. $\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0$ denkleminden $\lambda(s) = c_1\frac{k_3'(s)k_2(s) - k_3(s)k_2'(s)}{k_2^2(s)k_1(s)}$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = \left(c_1\frac{k_3'(s)k_2(s) - k_3(s)k_2'(s)}{k_2^2(s)k_1(s)}\right)T - \left(c_1\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)N + c_1B_1 \tag{3.3.158}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.27. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart c_1 sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \left(c_1\frac{k_3'(s)k_2(s) - k_3(s)k_2'(s)}{k_2^2(s)k_1(s)}\right)T - \left(c_1\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)N + c_1B_1$$

şeklinde olmasıdır.

8.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.159}$$

yazılabilir. (3.3.159) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =& \lambda'(s)T + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s))N + \gamma(s)k_2(s)B_1 \\ &+ (\gamma'(s) + \mu(s)k_2(s))B_2\end{aligned} \tag{3.3.160}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma(s)k_2 = 0, \\ \gamma'(s) + \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{3.3.161}$$

Buradan $\lambda(s) = s + c$ olur. Eğer $\gamma(s) = 0$ ise

$$\begin{aligned}\mu(s)k_2(s) &= 0 \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) &= 0\end{aligned} \tag{3.3.162}$$

denklemleri elde edilir. (3.3.162) den eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = s + c_1$ ve $k_1(s) = 0$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c_1)T \tag{3.3.163}$$

şeklindedir. Bu ise α nin spacelike bir doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman

$$\mu(s) = -\int (s + c_1)k_1(s)ds + c_2 \tag{3.3.164}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + \left(-\int (s+c_1)k_1(s)ds + c_2\right)N \tag{3.3.165}$$

şeklindedir. (3.3.162) den eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman $\gamma(s) = c_2$ ve $\mu(s) = c_2 \int k_3(s)ds - \int k_1(s)(s+c_1)ds + c$ bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + \left(c_2 \int k_3(s)ds - \int k_1(s)(s+c_1)ds + c\right)N + c_2 B_2 \tag{3.3.166}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.28. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α nın R_1^4 uzayında spacelike bir doğru olması veya $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + \left(-\int (s+c_1)k_1(s)ds + c_2\right)N$$

veya

$$\alpha(s) = (s+c_1)T + \left(c_2 \int k_3(s)ds - \int k_1(s)(s+c_1)ds + c\right)N + c_2 B_2$$

şeklinde olmasıdır.

9.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.167}$$

yazılabilir. (3.3.167) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T + (\lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_3(s))N \\ &+ (\mu'(s) - \gamma(s)k_2(s))B_1 + (\mu(s)k_3(s) + \gamma'(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.3.168}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.3.169}$$

elde edilir. Yukarıdaki birinci denklemden $\frac{d\lambda(s)}{ds} + \frac{k_1(s)}{k_3(s)}\gamma'(s) = 1$ bulunur. Bu son eşitlikten

$$\frac{d}{ds}(\frac{k_3(s)}{k_1(s)}\gamma(s)) + \frac{k_1(s)}{k_3(s)}\frac{d\gamma(s)}{ds} = 1 \tag{3.3.170}$$

elde edilir. (3.3.170) de $t = \int_0^s \frac{k_3(u)}{k_1(u)}du$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$2\frac{d\gamma(t)}{dt} = 1 \tag{3.3.171}$$

bulunur. (3.3.171) denkleminin çözümünden $\gamma(t) = \frac{t}{2} + c$ elde edilir. Son eşitlikte $t = \int \frac{k_3(u)}{k_1(u)}du$ yerine yazılırsa

$$\gamma(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c \tag{3.3.172}$$

bulunur. Eğer (3.3.172) denklemi (3.3.169) da yerine yazılırsa $\mu(s) = -\frac{1}{2k_1(s)}$ ve

$$\lambda(s) = \frac{k_3(s)}{k_1(s)}\left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c\right) \tag{3.3.173}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{k_3(s)}{k_1(s)}\left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c\right)T - \frac{1}{2k_1(s)}B_1 + \left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c\right)B_2 \tag{3.3.174}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.29. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{T, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = \frac{k_3(s)}{k_1(s)}\left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c\right)T - \frac{1}{2k_1(s)}B_1 + \left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{k_3(s)}{k_1(s)}ds + c\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır.

10.Durum Spacelike bir α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{3.3.175}$$

yazılabilir. (3.3.175) denkleminde s ye göre türev alınıp (3.3.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & -\mu(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \gamma(s)k_3(s))N + (\mu'(s) - \gamma(s)k_2(s))B_1 \\ & + (\lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s))B_2 \end{aligned} \tag{3.3.176}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\left\{ \begin{aligned} -\mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.3.177}$$

Buradan $\mu(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$ yazılabilir. $\gamma(s) = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)}$ denklemi ve (3.3.177) nin dördüncü denklemi göz önüne alınırsa

$$\lambda(s) = \frac{k_3(s)}{k_1(s)k_2(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{(k_1(s)k_2(s))^3} \tag{3.3.178}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left(\frac{k_3(s)}{k_1(s)k_2(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{(k_1(s)k_2(s))^3} \right) N \\ & - (\frac{1}{k_1(s)})B_1 + (\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)})B_2 \end{aligned} \tag{3.3.179}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.30. *Bir α spacelike eğrisinin R_1^4 uzayının $\{N, B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left(\frac{k_3(s)}{k_1(s)k_2(s)} - \frac{k_1''(s)k_1(s)k_2(s) - k_1'(s)(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))}{(k_1(s)k_2(s))^3} \right) N \\ & - (\frac{1}{k_1(s)})B_1 + (\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)})B_2 \end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

3.4 R_1^4 Uzayında Inclined Null Eğriler

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen null bir eğri olsun. N null vektör ve B_1 spacelike vektör olsun. Bu durumda α null eğrisinin aşağıdaki denklemleri sağlayan tek bir $\{T,N,B_1,B_2\}$ Cartan çatısı vardır.

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= k_1 B_1,\\ \nabla_T N &= k_2 B_1 + k_3 B_2,\\ \nabla_T B_1 &= -k_2 T - k_1 N,\\ \nabla_T B_2 &= -k_3 T,\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

dir [20]. Burada T, N, B_1 and B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\langle T,N\rangle = \langle B_1,B_1\rangle = \langle B_2,B_2\rangle = 1, \;\; \langle T,T\rangle = \langle N,N\rangle = 0. \tag{3.4.2}$$

Teorem 3.4.1. $\alpha = \alpha(s)$ *eğrisi* R_1^4 *uzayında bir null eğri olsun.* α *eğrisinin bir inclined eğri olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının*

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}(\frac{k_1(s)}{k_2(s)})\right)\right] + \frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. α eğrisi R_1^4 uzayında bir null eğri olsun. U vektörü bir sabit spacelike vektör olmak üzere inclined eğri tanımından

$$\langle T,U\rangle = cos\theta \tag{3.4.3}$$

yazılabilir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$k_1(s)\langle B_1,U\rangle = 0 \tag{3.4.4}$$

elde edilir. Buradan $B_1 \perp U$ olduğu görülür. Böylece U vektörü

$$U = u_1(s)T + u_2(s)N + u_3(s)B_2 \tag{3.4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_i, $1 \leq i \leq 3$ olacak şekilde keyfi fonksiyonlardır. (3.4.5) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$0 = (u_1'(s) - u_3(s)k_3(s))T + u_2'(s)N + (u_1(s)k_1(s) + u_2(s)k_2(s))B_1 + (u_2(s)k_3(s) + u_3'(s))B_2 \tag{3.4.6}$$

elde edilir. (3.4.6) denkleminden

$$\begin{cases} u_2'(s) = 0, \\ u_1(s)k_1(s) + u_2(s)k_2(s) = 0, \\ u_1'(s) - u_3(s)k_3(s) = 0, \\ u_2(s)k_3(s) + u_3'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.4.7}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$u_2(s) = c = sbt, \tag{3.4.8}$$

$$u_1(s) = -c\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \frac{1}{k_3(s)}\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\frac{du_3(s)}{ds} \tag{3.4.9}$$

ve

$$\frac{du_1'(s)}{ds} = k_3(s)u_3(s) \tag{3.4.10}$$

bulunur. Bu son eşitlikten $u_1(s) = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}(\frac{k_1(s)}{k_2(s)})$ olduğu görülür. $u_3(s)$ in türevi alınırsa

$$\frac{du_3(s)}{ds} = -k_3(s)c \tag{3.4.11}$$

dir. Bu eşitlikte $u_3(s)$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_1(s)}{ds}\right) = k_3(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}u_1(s) \tag{3.4.12}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}u_1(s)\right) - k_3(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}u_1(s) = 0 \tag{3.4.13}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3.4.13) denkleminde $u_1(s)$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}(\frac{k_1(s)}{k_2(s)})\right)\right] + \frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = 0 \tag{3.4.14}$$

bulunur. Tersine, U sabit vektörü ise

$$U = \left\{ c\frac{k_2(s)}{k_1(s)}T + cN + \frac{ck_2'(s)k_1(s) - k_2(s)k_1'(s)}{k_1^2(s)k_3(s)}B_2 \right\} cos\theta \tag{3.4.15}$$

şeklindedir. Gerçekten U vektörünün türevi alınırsa

$$\frac{dU}{ds} = 0 \tag{3.4.16}$$

olduğu görülür. O halde α eğrisi inclined bir null eğridir. □

3.5 R_1^4 Uzayında Inclined Null Cartan Eğriler

α eğrisi R_1^4 uzayında $\{T, N, B_1, B_2\}$ ile verilen Cartan çatılı bir null eğri olsun. N null vektör ve B_1 spacelike vektör olsun. Bu durumda α null eğrisinin aşağıdaki denklemleri sağlayan tek bir $\{T, N, B_1, B_2\}$ Cartan çatısı vardır [20].

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= B_1, \\ \nabla_T N &= k_1 B_1 + k_2 B_2, \\ \nabla_T B_1 &= -k_1 T - N, \\ \nabla_T B_2 &= -k_2 T. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

T, N, B_1 and B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\langle T, N\rangle = \langle B_1, B_1\rangle = \langle B_2, B_2\rangle = 1, \ \ \langle T, T\rangle = \langle N, N\rangle = 0. \tag{3.5.2}$$

Teorem 3.5.1. $\alpha = \alpha(s)$ *eğrisi* R_1^4 *uzayında Cartan çatılı bir null eğri olsun.* α *eğrisinin bir inclined eğri olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının*

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}\right)\right] + k_1'(s) = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. α eğrisi R_1^4 de Cartan çatılı bir inclined null eğri olsun. Bu durumda

$$\langle T, U\rangle = cos\theta \tag{3.5.3}$$

şeklindedir. Burada U vektörü sabit bir spacelike vektördür. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\langle B_1, U \rangle = 0 \tag{3.5.4}$$

elde edilir. Buradan $B_1 \perp U$ olduğu görülür. Böylece U vektörü

$$U = u_1(s)T + u_2(s)N + u_3(s)B_2 \tag{3.5.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_i, $1 \leq i \leq 3$ olacak şekilde keyfi fonksiyonlardır. (3.5.5) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$0 = (u_1'(s) - u_3(s)k_3(s))T + u_2'(s)N + (u_1(s)k_1(s) + u_2(s)k_2(s))B_1 + (u_2(s)k_3(s) + u_3'(s))B_2 \tag{3.5.6}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} u_2'(s) = 0, \\ u_1(s) + u_2(s)k_1(s) = 0, \\ u_1'(s) - u_3(s)k_2(s) = 0, \\ u_2(s)k_2(s) + u_3'(s) = 0, \end{cases} \tag{3.5.7}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$u_2(s) = c = sbt, \tag{3.5.8}$$

$$u_1(s) = -ck_1(s) \tag{3.5.9}$$

ve

$$\frac{du_3(s)}{ds} = -ck_2(s) \tag{3.5.10}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $u_3' = \frac{k_2(s)}{k_1(s)} u_1(s)$ yazılabilir. O halde $u_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} u_3'$ dür. $u_1(s)$ nin türevi alınırsa

$$\frac{du_1(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{du_3(s)}{ds}\right) \tag{3.5.11}$$

dir. Bu eşitlikte $u_1(s)$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{du_3(s)}{ds}\right) = k_2(s)u_3(s) \tag{3.5.12}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{du_3(s)}{ds}\right) + k_2(s)u_3(s) = 0 \tag{3.5.13}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3.5.13) denkleminde $u_3(s)$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}\right)\right] + k_1'(s) = 0 \tag{3.5.14}$$

bulunur. Tersine, U sabit vektörü ise

$$U = \left\{-ck_1(s)T + cN - c\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}B_2\right\} cos\theta \tag{3.5.15}$$

şeklindedir. U vektörünün türevi alınırsa

$$\frac{dU}{ds} = 0 \tag{3.5.16}$$

olduğu görülür. Böylece α eğrisi inclined bir null Cartan eğridir. □

3.6 R_1^3 Uzayında Bir Timelike Yüzey Üzerindeki Eğriler ve Karakterizasyonları

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisi R_1^3 uzayının $y = y(u,v)$ ile verilen bir timelike yüzeyi üzerinde bir timelike eğri olsun. α eğrisi üzerindeki bütün noktalarda aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan bir tek $[t,n,b]$ Frenet çatısı vardır:

$$\begin{aligned} t' &= k_1(s)n \\ n' &= k_1(s)t - k_2(s)b \\ b' &= k_2(s)n \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

y yüzeyi üzerinde α eğrisinin ikinci bir ortonormal bazı vardır. α eğrisi üzerindeki bir p noktasında tanjant birim vektörü t ile ve spacelike birim normal vektörü ise N ile gösterilsin. Bu durumda g spacelike vektörü $t \wedge N = g$ olacak şekilde ikinci bir $[t,g,N]$

çatısı elde edilir. Bu çatıyı $[t,n,b]$ Frenet çatısıyla karşılaştırmak için, n ve N arasındaki açı φ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} N &= ncos\varphi + bsin\varphi, \\ g &= nsin\varphi - bcos\varphi \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

yazılabilir. Burada $t = \alpha'(s)$, $\langle t,t\rangle = -1$, $\langle n,n\rangle = \langle b,b\rangle = 1$ ve $\langle t,n\rangle = \langle t,b\rangle = \langle n,b\rangle = 0$ dır [23].

Bu bölümde timelike eğrilerin R_1^3 uzayının bazı alt uzaylarında kalması için gerekli olan bazı karakterizasyonlar verilecektir.

α eğrisi R_1^3 uzayında bir timelike yüzey üzerinde $[t,g,N]$ çatısı ile verilen bir timelike eğri olsun.

1.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{t,g\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)t + \mu(s)g \tag{3.6.3}$$

yazılabilir. (3.6.3) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s)sin\varphi)t \\ &+ (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s)sin\varphi + \mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \mu(s)k_2(s)cos\varphi)n \\ &+ (-\mu(s)cos\varphi - \mu(s)k_2(s)sin\varphi + \mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds})b \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s)sin\varphi = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s)sin\varphi + \mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \mu(s)k_2(s)cos\varphi = 0, \\ \mu(s)cos\varphi + \mu(s)k_2(s)sin\varphi - \mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} = 0. \end{cases} \tag{3.6.5}$$

(3.6.5) deki

$$\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s)sin\varphi = 1 \tag{3.6.6}$$

denkleminde $\lambda = sbt.$ alınırsa

$$\mu(s) = -\frac{1}{k_1(s)sin\varphi} \tag{3.6.7}$$

yazılabilir. Buradan

$$\alpha(s) = c_1 t - \left(\frac{1}{k_1(s)sin\varphi}\right) g \tag{3.6.8}$$

şeklindedir. Eğer $\mu(s) = c_2 = sbt.$ ve $\varphi(s) = sbt.$ seçilirse (3.6.5) denkleminden

$$\lambda(s) = \frac{ck_2(s)cos\varphi}{k_1(s)} \tag{3.6.9}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = \left(\frac{ck_2(s)cos\varphi}{k_1(s)}\right) t + c_2 g \tag{3.6.10}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.1. *R_1^3 uzayındaki bir timelike yüzey üzerinde bulunan bir α timelike eğrisinin $\{t,g\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = c_1 t - \left(\frac{1}{k_1(s)sin\varphi}\right) g$$

veya $\varphi(s) = sbt.$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\frac{ck_2(s)cos\varphi}{k_1(s)}\right) t + c_2 g$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{t,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)t + \mu(s)N \tag{3.6.11}$$

yazılabilir. (3.6.11) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s)cos\varphi)t \\ &+ (\mu'(s)cos\varphi - \mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \mu(s)k_2(s)sin\varphi + \lambda(s)k_1(s))n \\ &+ (\mu'(s)sin\varphi - \mu(s)k_2(s)cos\varphi + \mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds})b \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \lambda'(s)+\mu(s)k_1(s)cos\varphi=-1, \\ \mu'(s)cos\varphi-\mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}+\mu(s)k_2(s)sin\varphi+\lambda(s)k_1(s)=0, \\ \mu'(s)sin\varphi-\mu(s)k_2(s)cos\varphi+\mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}=0, \end{cases} \tag{3.6.13}$$

bulunur. Buradan

$$\lambda'(s)+\mu(s)k_1(s)cos\varphi=-1 \tag{3.6.14}$$

denkleminde $\varphi = sbt.$ alınırsa

$$\mu'(s)sin\varphi-\mu(s)k_2(s)cos\varphi=0 \tag{3.6.15}$$

bulunur. (3.6.15) denkleminin çözümünden

$$\mu(s)=c.e^{\int k_2(s)cot\varphi ds} \tag{3.6.16}$$

elde edilir. (3.6.16) denklemi (3.6.14) de yerine yazılırsa

$$\lambda(s)=-\frac{c}{k_1(s)}e^{\int k_2(s)cot\varphi ds}(k_1(s)cot\varphi cos\varphi+1) \tag{3.6.17}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s)=\left[-\frac{c}{k_1(s)}e^{\int k_2(s)cot\varphi ds}(k_1(s)cot\varphi cos\varphi+1)\right]t+\left[c.e^{\int k_2(s)cot\varphi ds}\right]N \tag{3.6.18}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.2. *R_1^3 uzayındaki bir timelike yüzey üzerinde bulunan bir α timelike eğrisinin $\{t,N\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart $\varphi = sbt.$ olmak üzere*

$$\alpha(s)=\left[-\frac{c}{k_1(s)}e^{\int k_2(s)cot\varphi ds}(k_1(s)cot\varphi cos\varphi+1)\right]t+\left[c.e^{\int k_2(s)cot\varphi ds}\right]N$$

olmasıdır.

3.Durum Timelike bir α eğrisinin $\{g,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)g+\mu(s)N \tag{3.6.19}$$

yazılabilir. (3.6.19) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda(s)k_1(s)sin\varphi + \mu(s)k_1(s)cos\varphi)t \tag{3.6.20}$$
$$+(\lambda'(s)sin\varphi + \lambda(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \lambda(s)k_2(s)cos\varphi + \mu'(s)cos\varphi - \mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \mu(s)k_2(s)sin\varphi)n$$
$$+(-\lambda(s)cos\varphi - \lambda(s)k_2(s)sin\varphi + \lambda(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \mu'(s)sin\varphi - \mu(s)\tau cos\varphi + \mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds})b$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda(s)k_1(s)sin\varphi + \mu(s)k_1(s)cos\varphi = -1, \\ \lambda'(s)sin\varphi + \lambda(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \lambda(s)k_2(s)cos\varphi + \mu'(s)cos\varphi \\ -\mu(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \mu(s)k_2(s)sin\varphi = 0, \\ -\lambda(s)cos\varphi - \lambda(s)k_2(s)sin\varphi + \lambda(s)sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \mu'(s)sin\varphi - \mu(s)k_2(s)cos\varphi + \mu(s)cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} = 0. \end{cases} \tag{3.6.21}$$

(3.6.21) de φ sabit alınırsa,

$$\begin{cases} \lambda(s)sin\varphi + \mu(s)cos\varphi = -\frac{1}{k_1(s)}, \\ \lambda'(s)sin\varphi - \lambda(s)k_2(s)cos\varphi + \mu'(s)cos\varphi + \mu(s)k_2(s)sin\varphi = 0, \\ -\lambda(s)cos\varphi - \lambda(s)k_2(s)sin\varphi + \mu'(s)sin\varphi - \mu(s)k_2(s)cos\varphi = 0, \end{cases} \tag{3.6.22}$$

denklemleri elde edilir. (3.6.22) den

$$-k_2(s)(\lambda(s)sin\varphi + \mu(s)cos\varphi) - \lambda(s)cos\varphi + \mu'(s)sin\varphi = 0 \tag{3.6.23}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} - \lambda(s)cos\varphi + \mu'(s)sin\varphi = 0 \tag{3.6.24}$$

elde edilir. Ayrıca (3.6.22) den

$$\lambda'(s)sin\varphi + \mu'(s)cos\varphi = (-\frac{1}{k_1(s)})' \tag{3.6.25}$$

dir. (3.6.22) ve (3.6.25) birlikte kullanılırsa

$$\lambda(s)cos\varphi - \mu'(s)sin\varphi = \frac{1}{k_2(s)}(-\frac{1}{k_1(s)})' \tag{3.6.26}$$

elde edilir. (3.6.24) ve (3.6.26) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\mu'(s) - \mu(s) = \frac{k_1'(s) - k_2^2(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^2(s)sin\varphi} \tag{3.6.27}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3.6.27) denkleminin çözümünden

$$\mu(s)=\frac{1}{e^{-s+c}sin\varphi}\int e^{-s+c}\frac{k_1'(s)-k_2^2(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^2(s)sin\varphi}ds \tag{3.6.28}$$

elde edilir. (3.6.28) ve (3.6.22) birlikte düşünüldüğünde

$$\lambda(s)=-\frac{1}{k_1(s)sin\varphi}-\frac{cot\varphi}{e^{-s+c}sin\varphi}\int e^{-s+c}\frac{k_1'(s)-k_2^2(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^2(s)sin\varphi}ds \tag{3.6.29}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.3. *R_1^3 uzayındaki bir timelike yüzey üzerinde bulunan bir α timelike eğrisinin $\{g,N\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart $\varphi=sbt.$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[-\frac{1}{k_1(s)sin\varphi}-\frac{cot\varphi}{e^{-s+c}sin\varphi}\int e^{-s+c}\frac{k_1'(s)-k_2^2(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^2(s)sin\varphi}ds\right]g\\&+\left[\frac{1}{e^{-s+c}sin\varphi}\int e^{-s+c}\frac{k_1'(s)-k_2^2(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^2(s)sin\varphi}ds\right]N\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

4. R_2^4 UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

4.1 R_2^4 Uzayında Cartan Çatılı Null Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

α eğrisi R_2^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ ile verilen Cartan çatılı bir null eğri olsun. N null vektör ve B_2 timelike vektör olsun. Bu durumda α null eğrisinin aşağıdaki denklemleri sağlayan tek bir $\{T,N,B_1,B_2\}$ Cartan çatısı vardır [25].

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= B_1 \\ \nabla_T N &= k_1 B_1 + k_2 B_2 \\ \nabla_T B_1 &= -k_1 T - N \\ \nabla_T B_2 &= k_2 T \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

dir. Burada T, N, B_1 and B_2 karşılıklı ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\langle T,N\rangle = \langle B_1,B_1\rangle = 1, \ \ \langle B_2,B_2\rangle = -1 \tag{4.1.2}$$

1.Durum Öncelikle Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N \tag{4.1.3}$$

yazılabilir. (4.1.3) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T + \mu'(s)N + (\lambda(s) + \mu(s)k_1(s))B_1 + \mu(s)k_2(s)B_2 \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_1(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

$\mu(s)k_2(s) = 0$ olduğundan eğer $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s) = s + c$ yazılabilir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c)T \tag{4.1.6}$$

olur. Bu ise α nın Cartan çatılı bir null doğru olmasını gerektirir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman $\mu(s) = c_1$ ve $\lambda(s) = s + c_2$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + c_2)T + c_1N \tag{4.1.7}$$

şeklindedir. Burada k_1 eğrilik fonksiyonu, $k_1(s) = -\frac{s+c_2}{c_1}$ ile verilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 uzayının $\{T(s), N(s)\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart ya α nın R_2^4 uzayında Cartan çatılı bir null doğru olması veya $k_2(s) = 0$ ve $k_1(s) = -\frac{s+c_2}{c_1}$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = (s + c_2)T + c_1N$$

şeklinde olmasıdır.

2.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_1 \tag{4.1.8}$$

yazılabilir. (4.1.8) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))T - \mu(s)N + (\lambda(s) + \mu'(s))B_1 \tag{4.1.9}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \mu(s) = 0, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Yukarıdaki denklemler göz önüne alındığında çözümün olmadığı görülür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. *R_2^4 uzayının $\{T,B_1\}$ ile gerilen alt uzayında yatan Cartan çatılı bir null eğri yoktur.*

3.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)B_2 \tag{4.1.11}$$

yazılabilir. (4.1.11) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s)k_2(s))T + \lambda(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{4.1.12}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s) = 0, \\ \lambda'(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \end{cases} \tag{4.1.13}$$

yazılabilir. Buradan $\mu(s) = \frac{1}{k_2(s)} = sbt$. olur. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2 \tag{4.1.14}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.3. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{T,B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2$$

şeklinde olmasıdır.

4.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{N,B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 \tag{4.1.15}$$

yazılabilir. (4.1.15) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) = &-\mu(s)k_1(s)T + (\lambda'(s) - \mu(s))N + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))B_1 \\ &+ \lambda(s)k_2(s)B_2. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 0, \\ -\mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) = 0, \end{cases} \tag{4.1.17}$$

yazılabilir. Eğer $k_2(s) = 0$ ise o zaman

$$\mu(s) = \frac{-1}{k_1(s)} \tag{4.1.18}$$

olur. (4.1.17) ve (4.1.18) denklemleri kullanılırsa

$$\lambda(s) = \frac{-k_1'(s)}{k_1^3(s)} \tag{4.1.19}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = -\frac{k_1'(s)}{k_1^3(s)}N - \frac{1}{k_1(s)}B_1 \tag{4.1.20}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.4. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{N, B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s) = 0$ olmak üzere*

$$\alpha(s) = -\frac{k_1'(s)}{k_1^3(s)}N - \frac{1}{k_1(s)}B_1$$

şeklinde olmasıdır. Burada $k_1(s)k_1''(s) - 3k_1'^2(s) - k_1^3(s) = 0$ denklemi sağlanır.

5.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_2 \tag{4.1.21}$$

yazılabilir. (4.1.21) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = \mu(s)k_2(s)T + \lambda'(s)N + \lambda(s)k_1(s)B_1 + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s))B_2 \tag{4.1.22}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) = 0. \end{cases} \tag{4.1.23}$$

$\lambda(s)k_1(s) = 0$ denklemi göz önüne alınırsa iki durum olduğu görülür. Eğer $\lambda(s) = 0$ ise o zaman $\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) = 0$ denkleminden

$$\mu(s) = \frac{1}{k_2(s)} = sbt. \tag{4.1.24}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2 \tag{4.1.25}$$

olur. Eğer $k_1(s) = 0$ ise (4.1.23) denkleminden $\mu(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ ve $\lambda(s) = -\frac{k_2'(s)}{k_2^3(s)} = c$ bulunur. Burada c, sabit bir sayıdır. Böylece

$$\alpha(s) = -\frac{k_2'(s)}{k_2^3(s)}N + \frac{1}{k_2(s)}B_2 \tag{4.1.26}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.5. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{N, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2$$

veya $k_1(s) = 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = -\frac{k_2'(s)}{k_2^3(s)}N + \frac{1}{k_2(s)}B_2$$

şeklinde olmasıdır.

6.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)B_1 + \mu(s)B_2 \tag{4.1.27}$$

yazılabilir. (4.1.27) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\alpha'(s) = (\mu(s)k_2(s) - \lambda(s)k_1(s))T - \lambda(s)N + \lambda'(s)B_1 + \mu'(s)B_2 \tag{4.1.28}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 0, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \end{cases} \tag{4.1.29}$$

yazılabilir. Buradan $\lambda(s) = 0$ ve $\mu(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ olur. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2 \tag{4.1.30}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.6. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{B_1, B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)}B_2$$

şeklinde olmasıdır.

7.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T + \mu(s)N + \gamma(s)B_1 \tag{4.1.31}$$

yazılabilir. (4.1.31) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s) =&(\lambda'(s)-\gamma(s)k_1(s))T+(\mu'(s)-\gamma(s))N\\&+(\lambda(s)+\mu(s)k_1(s)+\gamma'(s))B_1+\mu(s)k_2(s)B_2\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases}\mu'(s)-\gamma(s)=0,\\ \lambda'(s)-\gamma(s)k_1(s)=1,\\ \lambda(s)+\mu(s)k_1(s)+\gamma'(s)=0,\\ \mu(s)k_2(s)=0.\end{cases} \tag{4.1.33}$$

$\mu(s)k_2(s)=0$ denkleminden eğer $\mu(s)=0$ ise o zaman bu denklemleri sağlayan bir çözüm bulunamaz. O halde $\mu(s)\neq 0$ olmak zorundadır. Eğer $k_2(s)=0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit sayı ise $\lambda(s)+\mu(s)k_1(s)+\gamma'(s)=0$ denkleminin denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.33) denklemi göz önüne alındığında

$$\gamma''(s)+2k_1(s)\gamma(s)+1=0 \tag{4.1.34}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (4.1.34) denkleminden

$$\gamma(s)=c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)} \tag{4.1.35}$$

bulunur. O halde

$$\mu(s)=\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]s+c \tag{4.1.36}$$

bulunur. (4.1.33), (4.1.34) ve(4.1.35) denklemlerinden

$$\lambda(s)=\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}\right]k_1(s)s+\frac{s}{2}+c \tag{4.1.37}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)})k_1(s)s+\frac{s}{2}+c\right]T\\&+\left[(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)})s+c\right]N\\&+\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]B_1\end{aligned} \tag{4.1.38}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.7. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{T,N,B_1\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_2(s)=0$ ve $k_1(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)})k_1(s)s+\frac{s}{2}+c\right]T\\&+\left[(c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)})s+c\right]N\\&+\left[c_1cos\sqrt{2k_1(s)}+c_2sin\sqrt{2k_1(s)}-\frac{1}{2k_1(s)}\right]B_1\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

8.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,N,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)N+\gamma(s)B_2 \tag{4.1.39}$$

yazılabilir. (4.1.39) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s)=&(\lambda'(s)+\gamma(s)k_2(s))T+\mu'(s)N+(\lambda(s)+\mu(s)k_1(s))B_1\\&+(\gamma'(s)+\mu(s)k_2(s))B_2\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{cases}\mu'(s)=0,\\ \lambda'(s)+\gamma(s)k_2(s)=1,\\ \lambda(s)+\mu(s)k_1(s)=0,\\ \gamma'(s)+\mu(s)k_2(s)=0,\end{cases} \tag{4.1.41}$$

yazılabilir. $\mu'(s)=0$ denkleminden $\mu(s)=c$ yazılabilir. (4.1.41) den

$$\lambda(s)=-ck_1(s) \tag{4.1.42}$$

elde edilir. (4.1.41) ve (4.1.42) denklemlerinden

$$\gamma(s)=\frac{ck_1'(s)+1}{k_2(s)} \tag{4.1.43}$$

bulunur. Eğer $\gamma'(s)+\mu(s)k_2(s)=0$ ve $\mu(s)=c$ denklemleri kullanılırsa $\gamma(s)=-c\int k_2(s)ds$ bulunur. Bu son eşitlik ve (4.1.43) kullanılırsa eğrilik fonksiyonlarının

$$ck_1''(s)k_2(s)-k_2'(s)(1+ck_1'(s))+ck_2^3(s)=0 \tag{4.1.44}$$

denklemini sağladığı görülür. Böylece

$$\alpha(s)=-ck_1(s)T+cN+\left(\frac{ck_1'(s)+1}{k_2(s)}\right)B_2 \tag{4.1.45}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.8. *Cartan çatılı bir α null eğrisinin R_2^4 nin $\{T,N,B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart*

$$\alpha(s)=-ck_1(s)T+cN+\left(\frac{ck_1'(s)+1}{k_2(s)}\right)B_2$$

şeklinde olmasıdır. Burada eğrilik fonksiyonları

$$ck_1''(s)k_2(s)-k_2'(s)(1+ck_1'(s))+ck_2^3(s)=0$$

denklemini sağlar.

9.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{T,B_1,B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T+\mu(s)B_1+\gamma(s)B_2 \tag{4.1.46}$$

yazılabilir. (4.1.46) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(s)=&(\lambda'(s)-\mu(s)k_1(s)+\gamma(s)k_2(s))T-\mu(s)N+(\lambda(s)+\mu'(s))B_1\\&+\gamma'(s)B_2\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} \mu(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) + \gamma(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0. \end{cases} \tag{4.1.48}$$

(4.1.48) den $\gamma(s) = \frac{1}{k_2(s)} = c$, $\mu(s) = 0$ ve $\lambda(s) = 0$ bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)} B_2 \tag{4.1.49}$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.9. *Cartan çatılı bir* α *null eğrisinin* R_2^4 *nin* $\{T, B_1, B_2\}$ *ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart* $k_2(s)$ *eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2(s)} B_2$$

şeklinde olmasıdır.

10.Durum Cartan çatılı bir null α eğrisinin $\{N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)N + \mu(s)B_1 + \gamma(s)B_2 \tag{4.1.50}$$

yazılabilir. (4.1.50) denkleminde s ye göre türev alınıp (4.1.1) Cartan denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) =& (\gamma(s)k_2(s) - \mu(s)k_1(s))T + (\lambda'(s) - \mu(s))N + (\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s))B_1 \\ &+ (\lambda(s)k_2(s) + \gamma'(s))B_2 \end{aligned} \tag{4.1.51}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 0, \\ \gamma(s)k_2(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases} \tag{4.1.52}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lambda''(s)+k_1(s)\lambda(s)=0 \tag{4.1.53}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Eğer $k_1(s)$ eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit sayı ise (4.1.53) denkleminin çözümü

$$\lambda(s)=c_1cos\sqrt{k_1(s)}s+c_2sin\sqrt{k_1(s)}s \tag{4.1.54}$$

olur. (4.1.52) ve (4.1.54) denklemleri kullanılırsa

$$\mu(s)=\frac{k_1(s)}{2\sqrt{k_1(s)}s}(c_1sin\sqrt{k_1(s)}s-c_2cos\sqrt{k_1(s)}s) \tag{4.1.55}$$

bulunur. (4.1.52), (4.1.53) ve (4.1.54) denklemleri kullanılırsa

$$\gamma(s)=\frac{k_1^2(s)}{2k_2(s)\sqrt{k_1(s)}s}(c_1sin\sqrt{k_1(s)}s-c_2cos\sqrt{k_1(s)}s)+\frac{1}{k_2(s)} \tag{4.1.56}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.10. *Cartan çatılı bir $\alpha(s)$ null eğrisinin R_2^4 nin $\{N,B_1,B_2\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s)$ eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere*

$$\begin{aligned}\alpha(s)=&\left[c_1cos\sqrt{k_1(s)}s+c_2sin\sqrt{k_1(s)}s\right]N\\&+\left[\frac{k_1(s)}{2\sqrt{k_1(s)}s}(c_1sin\sqrt{k_1(s)}s-c_2cos\sqrt{k_1(s)}s)\right]B_1\\&+\left[\frac{k_1^2(s)}{2k_2(s)\sqrt{k_1(s)}s}(c_1sin\sqrt{k_1(s)}s-c_2cos\sqrt{k_1(s)}s)+\frac{1}{k_2(s)}\right]B_2\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

4.2 R_2^4 Uzayında Kısmen Null Inclined Eğriler

α eğrisi R_2^4 uzayında $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı ile verilen bir kısmen null eğri olsun. N timelike vektör ve B_1 null vektör olsun. Bu durumda α kısmen null eğrisinin aşağıdaki denklemleri sağlayan tek bir $\{T,N,B_1,B_2\}$ Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= k_1 N, \\
\nabla_T N &= k_1 T + k_2 B_1, \\
\nabla_T B_1 &= k_3 B_1, \\
\nabla_T B_2 &= k_2 N - k_3 B_2,
\end{aligned}$$

dir [28]. T, N, B_1 and B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\langle B_1,B_2\rangle = \langle T,T\rangle = 1, \ \ \langle B_1,B_1\rangle = \langle B_2,B_2\rangle = 0, \ \ \langle N,N\rangle = -1. \tag{4.2.1}$$

Teorem 4.2.1. $\alpha = \alpha(s)$ *eğrisi* R_2^4 *uzayında kısmen null bir eğri olsun.* α *eğrisinin bir inclined eğri olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının*

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2 - \frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2 = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. α eğrisi R_2^4 uzayında Frenet çatılı bir kısmen null inclined eğri olsun. Inclined eğri tanımından

$$\langle T,U\rangle = cos\theta \tag{4.2.2}$$

şeklindedir. Burada U vektörü sabit bir spacelike vektördür. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$k_1(s)\langle N,U\rangle = 0 \tag{4.2.3}$$

elde edilir. Buradan $N \perp U$ olduğu görülür. Böylece U vektörü

$$U = u_1(s)T + u_2(s)B_1 + u_3(s)B_2 \tag{4.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_i, $1 \leq i \leq 3$ olacak şekilde keyfi fonksiyonlardır. (4.2.4) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$0 = u_1'(s)T + (u_1(s)k_1(s) + u_3(s)k_2(s))N + (u_2(s)k_3(s) + u_2'(s))B_1 + (u_3'(s) - u_3(s)k_3(s))B_2 \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} u_1'(s) = 0, \\ u_1(s)k_1(s) + u_3(s)k_2(s) = 0, \\ u_2(s)k_3(s) + u_2'(s) = 0, \\ u_3'(s) - u_3(s)k_3(s) = 0, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

denklemleri elde edilir. (4.2.6) dan

$$u_1(s) = c = sbt, \tag{4.2.7}$$

$$u_2(s) = \frac{1}{c}\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \tag{4.2.8}$$

ve

$$u_3(s) = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. $u_3'(s) - u_3(s)k_3(s) = 0$ denkleminden

$$\frac{du_3(s)}{ds} = -c^2 u_2(s)k_3(s) \tag{4.2.10}$$

yazılabilir. Buradan (4.2.10) un türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3(s)}{ds}\right) = -\frac{d}{ds}(c^2 u_2(s)) \tag{4.2.11}$$

olur. Bu eşitlikte $u_2'(s)$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3(s)}{ds}\right) = -k_3(s)u_3(s) \tag{4.2.12}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3(s)}{ds}\right) + k_3(s)u_3(s) = 0 \tag{4.2.13}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (4.2.13) de $t = \int_0^s k_3(u)du$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-\frac{d^2u_3}{dt^2} + u_3 = 0 \tag{4.2.14}$$

denklemi elde edilir. (4.2.14) denkleminin genel çözümü

$$u_3(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \tag{4.2.15}$$

veya

$$u_3(t) = c_1(cosht + sinht) + c_2(cosht - sinht) \tag{4.2.16}$$

şeklindedir öyle ki $c_1, c_2 \in R$ dir. $c_1 + c_2 = A_1$ and $c_1 - c_2 = A_2$ şeklinde alınırsa

$$u_3(t) = A_1 cosht + A_2 sinht \tag{4.2.17}$$

yazılabilir. (4.2.17) denkleminde $t = \int_0^s k_1(u)du$ yerine yazılırsa

$$u_3(s) = \frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) = A_1 cosh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) + A_2 sinh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) \tag{4.2.18}$$

bulunur. (4.2.15) denkleminden

$$u_2(s) = c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -A_1 sinh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) - A_2 cosh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) \tag{4.2.19}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten A_1 ve A_2 sayıları Cramer metodu yardımıyla

$$A_1 = A_2 = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} cosh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) + \frac{c}{k_3(s)} \frac{d}{ds} (\frac{k_1(s)}{k_2(s)}) sinh \left(\int_0^s k_3(u)du \right) \tag{4.2.20}$$

şeklinde bulunur. $A_1^2 - A_2^2$ ifadesi hesaplandığında $c = 1$ olmak üzere

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)^2 - \frac{1}{k_3^2(s)} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) \right]^2 = 0 \tag{4.2.21}$$

elde edilir. Tersine, U vektörü

$$U = \left\{ T + \frac{k_1(s)}{k_2(s)} B_1 - \frac{1}{k_3(s)} \frac{d}{ds} (\frac{k_1(s)}{k_2(s)}) B_2 \right\} cos\theta \tag{4.2.22}$$

şeklinde alalım. U vektörünün türevi alınırsa $\frac{dU}{ds} = 0$ olduğu görülür. Böylece U sabit bir vektördür ve α eğrisi de bir inclined eğridir. $\square$

4.3 R_2^4 Uzayında Inclined Null Cartan Eğriler

α eğrisi R_2^4 uzayında $\{T, N, B_1, B_2\}$ ile verilen Cartan çatılı bir null eğri olsun. N null vektör ve B_1 spacelike vektör olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ null eğrisinin aşağıdaki denklemleri sağlayan tek bir $\{T, N, B_1, B_2\}$ Cartan çatısı vardır:

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= B_1, \\
\nabla_T N &= k_1 B_1 + k_2 B_2, \\
\nabla_T B_1 &= -k_1 T - N, \\
\nabla_T B_2 &= k_2 T,
\end{aligned}$$

dir [25]. Burada T, N, B_1 and B_2 karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemler sağlar:

$$\langle T, N \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = 1, \ \ \langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = 0, \ \ \langle B_2, B_2 \rangle = -1. \tag{4.3.1}$$

Teorem 4.3.1. $\alpha = \alpha(s)$ *eğrisi* R_2^4 *uzayında Cartan çatılı bir null eğri olsun.* α *eğrisinin bir inclined eğri olması için gerek ve yeter şart eğrilik fonksiyonlarının*

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}\right)\right] + k_1'(s) = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. α eğrisi R_2^4 uzayında Cartan çatılı bir null inclined eğri olsun. Inclined eğri tanımından

$$\langle T, U \rangle = cos\theta \tag{4.3.2}$$

şeklindedir. Burada U vektörü sabit bir spacelike vektördür. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\langle B_1, U \rangle = 0 \tag{4.3.3}$$

elde edilir. Buradan $B_1 \perp U$ olduğu görülür. Böylece U vektörü

$$U = u_1(s)T + u_2(s)N + u_3(s)B_2 \tag{4.3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_i, $1 \leq i \leq 3$ olacak şekilde keyfi fonksiyonlardır. (4.3.4) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$0 = (u_1'(s) + u_3(s)k_2(s))T + u_2'(s)N + (u_1(s) + u_2(s)k_1(s))B_1 + (u_2(s)k_2(s) + u_3'(s))B_2 \tag{4.3.5}$$

elde edilir. (4.3.5) denkleminden

$$\begin{cases} u_2'(s) = 0, \\ u_1' + u_3(s)k_2(s) = 0, \\ u_1(s) + u_2(s)k_1(s) = 0, \\ u_2(s)k_2(s) + u_3'(s) = 0, \end{cases} \tag{4.3.6}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$u_2(s) = c = sbt, \tag{4.3.7}$$

$$u_1(s) = -ck_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{du_3(s)}{ds} \tag{4.3.8}$$

elde edilir. (4.3.6) dan $u_1'(s) = -u_3(s)k_2(s)$ dir. Burada $u_1(s)$ in türevi alınırsa

$$\frac{du_1(s)}{ds} = -k_2(s)u_3(s) \tag{4.3.9}$$

dir. Bu eşitlikte $u_1(s)$ nin değeri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{du_3(s)}{ds}\right) + k_2(s)u_3(s) = 0 \tag{4.3.10}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Son eşitlikte $u_3(s)$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}\right)\right] + k_1'(s) = 0 \tag{4.3.11}$$

bulunur. Tersine, U sabit vektörü ise

$$U = \left\{-ck_1(s)T + cN + c\frac{k_1'(s)}{k_2(s)}B_2\right\} cos\theta \tag{4.3.12}$$

şeklindedir. U vektörünün türevi alınırsa $\frac{dU}{ds} = 0$ olduğu görülür. Böylece U sabit bir vektördür ve α eğrisi de Cartan çatılı null bir inclined eğridir. □

KAYNAKLAR

[1] Bonnor W. B. , *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor N.S. 20, (1969), 229-242.

[2] Çöken A. C., Çiftçi Ü. , *On the Cartan Curvatures of a Null Curve in Minkowski Spacetime*, Geometriae Dedicate 114 (2005), 71-78.

[3] Fernandez A., Gimenez A. and Lucas P. , *Null helices in Lorentzian space forms*, Int. J. Mod. Phys. A. 16 (2001), 4845-4863.

[4] Fernandez A., Gimenez A. and Lucas P. ,*Characterization of Null Curves in Lorentz-Minkowski Space*, Publicaciones de la RSME, vol.3(2001),221-226.

[5] Ali A. T., Önder M. , *Some Characterizations of Rectifying Spacelike Curves in the Minkowski Space-Time*, Global J of Sciences Frontier Research Math, Vol 12, Is 1, 2012, 2249-4626.

[6] Çamcı C., İlarslan K., Kula L., Hacisalihoğlu H. H. , *Harmonic Curvatures and Generalized Helices in* E^n, Chaos,Solitions and Fractals 40 (2009), 2590-2596.

[7] İlarslan K., Boyacıoğlu Ö., *Position vectors of a timelike and a null helix in Minkowski 3-space*, Chaos Solitions and Fractals (2008), 1383-1389.

[8] İlarslan K., *Spacelike Normal Curves in Minkowski Space* E_1^3, Turk. J. Math 29(2005), 53-63.

[9] İlarslan K., Nesovic E., Petrovic-Torgasev M., *Some Characterizations of Rectifying Curves in Minkowski 3-space*, Novi Sad J Math 2003, 33(2), 23-32.

[10] İlarslan K., Nesovic E., *Spacelike and timelike normal curves in Minkowski Space-time*, Publications de l'Institut Mathmatique, Nouvelle serie, tome 85(99) (2009) 111-118.

[11] İlarslan K., Nesovic E., *Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4*, Turk. J. Math. 32 (2008), no. 1, 21-30.

[12] İlarslan K., Nesovic E., *Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 61, I (2012), 1-8.

[13] Önder M., Kocayiğit H. and Kazaz M., *Spacelike Helices in Minkowski 4-space*, Ann. Univ. Ferrera 2010, 56, 335-343.

[14] Walrave J., *Curves and Surfaces in Minkowski space*, PhD Thesis, K.U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[15] Keleş S., PerktaşnS. Y. and Kılıç E., *Biharmonic Curves in LP-Sasakian Manifolds*, Bulletin of the Malasyian Mathematical Society, (2) 33(2), 2010, 325-344.

[16] Akgün M. A., Sivridağ A. İ., *On The Null Cartan Curves of R_1^4*, Global Journal of Mathematics, Vol.1 No.1,2015,41-50.

[17] Akgün M. A., Sivridağ A. İ., *On The Characterizations of Timelike Curves in R_1^4*, Global Journal of Mathematics, Vol.2 No.2,2015,116-127.

[18] Akgün M. A., Sivridağ A. İ.,*Some Characterizations of a Spacelike Curve in R_1^4*, Pure Mathematical Sciences, Vol. 4, 2015, no. 1, 43-55 http://dx.doi.org/10.12988/pms.2015.41134.

[19] O'Neil B., (1983), *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity* , Academic Press.

[20] Duggal K. L., Jin D. H. (2007), *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Sci.

[21] Duggal K. L., Bejancu A. (1996), *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publisher, **364**.

[22] Duggal K. L. (2007), *On scalar curvature in lightlike geometry*, J. Geom. Phys. **57**, 473-481.

[23] Uğurlu H.H and Çalışkan A. (1997), *Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometresi*, Dok. Tez.

[24] Sakaki M., *Notes on null curves in Minkowski spaces*, Turk J Math 34 (2010), 417 424.c TUBITAK doi:10.3906/mat-0812-14.

[25] Sakaki M., *Null Cartan Curves of R_2^4*, Toyama Mathematical Journal, 32 (2009), 31-39

[26] Küçükaslan Z., Bektaş M. and Balgetir H., *Inclined Curves of Null Curves in L^{m+2} and Their Characterizations*, International Journal of Physical and Mathematical Sciences, vol.3, no.1 (2012).

[27] Yılmaz S. and Turgut M., *On The Characterizations of Inclined Curves in Minkowski Space-Time E_1^4*, International Mathematical Forum, 3, (2008), no.16, 783-792.

[28] Petrovic-Torgasev M., İlarslan K. and Nesovic E., *On partially null and pseudo null curves in the semi-euclidian space R_2^4*, Journal of Geometry, 84(2005), 106-116.

[29] Bonnor W. B., *Curves with null normals in Minkowski space-time*, A random walk in relativity and cosmology, Wiley Eastern Limited, (1985), 33-47.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : M. Aykut AKGÜN

Doğum Yeri ve Tarihi : Adıyaman, 02.05.1978

Adres : İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, MALATYA

E-Posta : maakgun@hotmail.com

Lisans : Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik

Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı

Mesleki Deneyim ve Ödüller :

Yayın Listesi : 1- **Akgün M. A.**, Sivridağ A.İ.(2015). On The Null Cartan Curves of R_1^4

Global Journal of Mathematics, vol1, no:1, 41-50.

2- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2015), On The Characterizations of Timelike Curves in R_1^4 .

Global Journal of Mathematics, vol2, no:2, 116-127.

3- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2015), Some Characterizations of Spacelike Curves in R_1^4.

Hikari Journals, Pure Mathematical Sciences, vol4, no:1-4(online edition).

4- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2014), On The Null Cartan Curves of R_1^4.

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, XII.Geometri Sempozyumu, Bilecik.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR :

1- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2015), On The Null Cartan Curves of R_1^4

Global Journal of Mathematics, vol1, no:1, 41-50.

2- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2015), On The Characterizations of Timelike

Curves in R_1^4. *Global Journal of Mathematics*, vol2, no:2, 116-127.

3- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2015), Some Characterizations of Spacelike Curves in R_1^4.

Hikari Journals, Pure Mathematical Sciences, vol4, no:1-4(online edition)

4- **Akgün M. A.**, Sivridağ A. İ., (2014), On The Null Cartan Curves of R_1^4.

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,

XII.Geometri Sempozyumu, Bilecik.