

**T. C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İZOMETRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE**

**Selahattin BEYENDİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MALATYA  
2009**

Tezin Başlığı : İzometrilere Diferensiyel Geometriyi Üzerine

Tezi Hazırlayan : Selahattin BEYENDİ

Sınav Tarihi : 01.07.2009

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŐ ( İnönü. Üniv.)

Prof. Dr. Rifat GÜNEŐ ( İnönü. Üniv.)

Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ ( İnönü. Üniv.)

Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ  
Tez DanıŐmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail ÖZDEMİR  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "İzometrilere Diferensiyel Geometri Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Selahattin BEYENDİ

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## İZOMETRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Selahattin BEYENDİ

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana bilim dalı

59+vii sayfa

2009

Danışman: Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin giriş bölümüdür.

İkinci bölümde konunun daha iyi anlaşılması için temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde  $R^{n+1}$  in katı hareketleri tanımlanarak katı hareket örnekleri olarak ötelemeler, dönmeler ve yansımalar sunulmuştur. Katı hareketlerle ilgili çeşitli teorem ve sonuçlar verilmiştir. Daha sonra kongrüent yüzeylerle ilgili teorem ve sonuçlar verilerek bu yüzeyler arasındaki geometrik değişmezler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde bir eğrinin uzunluk ölçüleri yardımıyla türetilen intrinsic geometri özellikleri verilmiştir. Lokal izometri ile ilgili çeşitli örnekler incelenmiştir. Ayrıca yüzey geometrisinin bazı özelliklerinin izometrik invaryant olduğu, bazı özelliklerinin de izometrik invaryant olmadığı gösterilmiştir. Daha sonra izometriler ile kovaryant türev arasındaki ilişkiler verilmiştir. Son olarak da  $g$  Riemann metrikler ile izometriler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca Riemann metrikle ilişkili bazı örnek ve teoremler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Katı hareket, İntrinsic geometri, İzometri, Lokal izometri.

# ABSTRACT

MSc. Thesis

## ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF ISOMETRIES

Selahattin BEYENDİ

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

59+vii sayfa

2009

Supervisor: Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction part of the thesis.

In the second chapter, fundamental concepts have been given to understand the topic well.

In the third chapter, the rigid motions in  $R^{n+1}$  have been defined, and rigid motion examples such as translation, rotation, and reflection have been introduced. Then, theorems and conclusions related to congruent surfaces have been introduced and the invariants between these surfaces have been investigated.

In the fourth chapter, the intrinsic geometric properties derived with the help of length measures of a curve have been given, several examples related to local isometry have been studied. Moreover, it has been shown that some properties of the surface geometry are isometric invariant whereas others are not. Later the relationships between isometries and covariant derivatives have been given. Finally, the relationships between Riemann metrics  $g$  and isometries have been given. In addition to this, some examples and theorems related to Riemann metrics have been given.

**KEYWORDS:** Rigid motion, Intrinsic geometry, Isometry, Local isometry.

## TEŞEKKÜR

Tezimin her aŐamasında yardımlarını esirgemeyen tez danıŐmanım Sayın Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ'a ve lisansüstü öğrenimim boyunca önerilerini ve desteğini aldığım İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e teŐekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında kütüphanesinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĐ'a , tezimin yazımında yardımlarından dolayı Sayın Doç. Dr. Bilal ALTAY'a ve en yoğun dönemlerinde bana destek olan değerli eŐim ve ailemede teŐekkürü bir borç biliyorum.

Selahattin BEYENDİ

# İÇİNDEKİLER

ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
TEŞEKKÜR . . . . .	iii
İÇİNDEKİLER . . . . .	iv
SEMBOLLER . . . . .	v
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	vii
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	3
3 KATI HAREKETLER ve KONGRÜANSLAR . . . . .	15
3.1 Katı hareketler . . . . .	15
3.2 Kongrüent Yüzeyler . . . . .	19
4 İZOMETRİLER . . . . .	29
4.1 İzometrilere ve Lokal İzometrilere . . . . .	29
4.2 Riemann Metrikleri . . . . .	46
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	59

## SEMBOLLER

$R^{n+1}$  :  $(n + 1)$  boyutlu uzay,

$V$  : Tanjant vektör,

$R_p^{n+1}$  :  $p$  noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı,

$V \cdot W$  : İç çarpım

$\|V\|$  : Tanjant vektörün uzunluğu

$X$  : Vektör alanı

$U$  : Açık küme

$\alpha$  : Parametrik eğri

$\dot{\alpha}$  :  $\alpha$  nın hızı

$S$  : Yüzey,

$S_p$  :  $S$  nin  $p$  noktasındaki tanjant uzayı,

$C$  : Düzlemsel eğri,

$N$  : Normal vektör alanı,

$S^n$  : Birim  $n$ - küre,

$\dot{X}$  :  $X$  in türevi,

$X'$  :  $X$  in kovaryant türevi,

$\nabla_V$  :  $V$  yönünde türev,

$D_V$  :  $V$  yönünde kovaryant türev

$L_p$  : Weingarten dönüşümü,

$k_i$  :  $i$  yinci Asli eğrilikler,

$I_p$  : Birinci temel form,

$II_p$  : İkinci temel form,

$K$  : Gauss eğrilik fonksiyonu,

$H$  : Ortalama eğrilik fonksiyonu

$\varphi$  : Parametrik yüzey,

$E_i$  :  $i$  yinci Koordinat vektör alanı,

$\psi|_V$  :  $\psi$  nin  $V$  ye kısıtlanması,

$R$  : Riemann tensör,

$g$  : Riemann metrik,

## Şekiller Dizini

**Şekil 3.1.1:** Düzlemde  $\theta$  açılı dönme.

**Şekil 3.1.2:**  $H$  düzlemine göre yansıma.

**Şekil 4.1.1:** İzometrik yüzeyler.

**Şekil 4.1.2:**  $\psi : R^2 \rightarrow R^3, \psi = \{(\theta, u) = (\cos \theta, \sin \theta, u)\}$  dönüşümünün  $U = \{(\theta, u) \mid -\pi < \theta < \pi, u \in R\}$  sonsuz şeridine kısıtlanışı bir doğrusu çıkarılmış silindir üzerine bir lokal izometri.

**Şekil 4.1.3:** Delinmiş  $S$  düzleminden  $\tilde{S}$  konisi üzerine  $\psi$  lokal izometri.

**Şekil 4.2.1:** Stereografik metrikli  $S^2$  küresi üzerinde tipik bir geodezik.

**Şekil 4.2.2:** Stereografik metrikli  $R^2$  üzerinde tipik bir geodezik.

**Şekil 4.2.3:**  $R^2$  düzleminde stereografik metrikle belli olan  $(1, 0)$  noktası boyunca geçen geodezikler.

**Şekil 4.2.4:** poincare metriği ile üst yarı düzlemin kendi içine  $(0, 1)$  noktasını  $p$  noktasına götüren bir izometrisi.

**Şekil 4.2.5:** poincare metrikli üst yarı düzlemde tipik geodezikler.

## 1. GİRİŞ

Geometrinin esas gerçeklerini ve metodlarını yeni bir anlayış içinde ilkdefa organize eden Öklid olup, o çalışmalarını ELEMENTLER adlı kitabında toplamıştır. Bu eser M.Ö. 300 yılında yazılmış daha sonra bu geometri Öklid geometri olarak adlandırılmıştır[9].

Ancak yüzeyler ve daha genel olan manifoldlar söz konusu olduğunda Öklid anlamında bildiğimiz kavramların yetersiz kaldığı görülür. Özellikle Öklid uzayının katı hareketleri ile izometrilere aynı olmakla birlikte bu, yüzeyler söz konusu olduğunda her zaman doğru değildir. Örneğin  $2\pi$  genişliğindeki düzlem şeridinin silindire şekline dönüştürülmesiyle söz konusu olan bir izometride Öklid anlamındaki uzaklık korunmasına rağmen, düzlemsel uzaklık ile silindir üzerindeki uzaklık aynıdır. Söz konusu olan bu dönüşüm için  $x$  eksenindeki  $2\pi$  uzunluklu doğru parçası silindir üzerinde  $2\pi$  uzunluklu birim çembere dönüşür. Bu doğru parçasının uzunluğu ile görüntü eğrisinin uzunluğu(silindir üzerindeki uzaklık) aynı olur. Halbuki bu doğru parçasının uç noktası için Öklid anlamında uzaklığın korunmadığı açıktır.

Böylece İzometrilere kinematik açıdan olduğu kadar diferensiyel geometri açısından da önemli olduğu ortaya çıkar. Özellikle yüzeylerin geometrik özellikleri izometrilere ilişkilendirilip ele alınması diferensiyel geometride sıkça rastlanan bir durumdur. Yapılan bu çalışmada bunun önemini ortaya koymaktadır. Bu çalışmada önce  $R^{n+1}$  deki katı hareketler ele alınmış ve bir

$$\psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$$

katı hareketi,  $\psi_1$  bir ortogonal dönüşümü ve  $\psi_2$  de bir öteleme olmak üzere  $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$  olacak şekilde iki bileşen cinsinden yazılabileceği ispatlanmıştır. Daha sonra kongrüent yüzeyler ele alınmış ve  $R^{n+1}$  de bir

$$\psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$$

$$S \rightarrow \psi(S) = \tilde{S}$$

olacak şekildeki  $S$  ve  $\tilde{S}$  kongrüent yüzeylerin ikinci temel formları arasında

$$II_p = \tilde{II}_{\psi(p)} \circ d\psi$$

bağıntısının olduğu görülmüştür. Benzer şekilde  $S$  ve  $\tilde{S}$  kongrüent yüzeylerin şekil operatörleri arasında

$$\tilde{L}_{\psi(p)}(d\psi(V)) = d\psi(L_p(V))$$

bağıntısının olduğu gösterilerek bu sayede, eğrilerin uzunluğu, Gauss dönüşümleri, küresel gösterge, geodezikler, normal eğrilikler, Gauss ve ortalama eğrilikleri, odak noktası, hacim ve minimal yüzey olma özelliklerinin korunduğu gösterilmiştir.

Ayrıca izometrilere ile kovaryant türevler arasındaki ilişkiler verilerek yüzeylerin şekil operatörleri ve onların cebirsel değişmezleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bunlara ilaveten lokal izometrilere tanımlanmış ve değişik örnekler sunulmuştur.

$S$  yüzeyinin  $\forall S_p$  tanjant uzayı üzerinde bir iç çarpım verilmesi durumunda  $S$  nin hacmi,  $S$  deki geodezikler,  $S$  de eğriler boyunca paralel vektör alanları ve  $S$  nin Gauss eğriliği hesaplanabilir.  $\forall S_p$  tanjant uzayı üzerinde  $R^{n+1}$  den gelen birbirinden farklı iç çarpımlar verildiğinde intrinsic hesaplamalar yine de yapılabilir. Fakat hesaplamaların sonuçları kullanılan iç çarpımlara bağlı olur. Bu şekilde elde edilen geometri bilinen geometriden oldukça farklıdır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.0.1.**  $S, R^{n+1}$  de bir yüzey olsun.  $S$  nin her bir  $p$  noktasında bir  $X_p \in R_p^{n+1}$  tanjant vektörünü karşılık getiren  $X$  fonksiyonuna  $S$  üzerinde bir **vektör alanı** denir. Buna göre;

$$X : S \rightarrow \bigcup_{p \in S} R_p^{n+1}, X(p) = X_p \in R_p^{n+1}$$

dir.

Eğer  $\forall p \in S$  için  $X(p) \in S_p$  ise  $X$  vektör alanına  $S$  üzerinde bir **tanjant vektör alanı** denir. Burada  $S_p, p$  noktasında  $S$  ye teğet olan bütün tanjant vektörlerin uzayını göstermektedir.

Benzer şekilde  $\forall p \in S$  için  $X_p, S$  yüzeyine ortogonal ( $X_p \in S_p^\perp$ ) ise  $X$  vektör alanına  $S$  üzerinde bir **normal vektör alanı** denir [1].

**Tanım 2.0.2.**  $U, R^2$  uzayının irtibatlı açık alt kümesi ve  $\varphi : U \rightarrow R^3$  diferensiyellenebilir ve regüler bir dönüşüm olsun.  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  dönüşümü bir homeomorfizm ise,  $\varphi(U)$  kümesine,  $R^3$  uzayında bir **basit yüzey** denir.

$S, R^3$  uzayının bir alt kümesi olsun.  $S$  nin herbir  $p$  noktası için,

$$p \in \varphi(U) \text{ ve } \varphi(U) \subset S$$

olacak biçimde bir  $\varphi(U)$  basit yüzeyi bulunabiliyorsa  $S$  kümesine,  $R^3$  de bir **yüzey** denir.  $\varphi(U), S$  yüzeyi içinde bir basit yüzey ise,  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$  dönüşümüne  $S$  yüzeyi içinde bir koordinat sistemi denir [2].

**Tanım 2.0.3.**  $R^n$  de  $(n-1)$  boyutlu bir yüzey diye  $R^n$  de boş olmayan bir  $S$  kümesine denir, öyleki bu  $S$  kümesi

$$S = \{x \in U \subset R^n \mid f : U \rightarrow R, f(x) = c, U \text{ açık alt küme}\}$$

$\forall p \in S$  için  $\nabla f|_p \neq 0$  biçiminde tanımlıdır.  $R^2$  de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir.  $R^n$  de bir  $(n-1)$  yüzey,  $n > 3$  olması halinde daha çok **hiperyüzey** olarak adlandırılır [3].

**Örnek 2.0.1.**

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = b\}$$

kümesi  $(n - 1)$  boyutlu bir yüzeydir.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \end{aligned}$$

$\forall p \in S$  için  $\nabla f|_p = (a_1, a_2, \dots, a_n)|_p \neq \vec{0}$  olduğundan bu  $S$  yüzeyine **hiperdüzlem** denir [3].

**Örnek 2.0.2.**  $\mathbb{R}^n$  de

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

hiperküresi  $(n - 1)$  boyutlu bir yüzeydir. Yani

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ \nabla f|_p &= (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) = 2(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0 \end{aligned}$$

o halde  $\nabla f|_p \neq \vec{0}$  dir [3].

**Tanım 2.0.4.**  $\mathbb{R}^n, n$  boyutlu öklid uzayında bir  $S$  hiperyüzeyi üzerinde diferensiyelenebilir, bir birim normal vektör alanına  $S$  üzerinde bir **yönlendirme** denir.

$\mathbb{R}^n$  deki her bir irtibatlı  $S$  hiperyüzeyi için tam iki farklı yönlendirme vardır. Bunlardan biri  $N_1$  diğeri de  $-N_1$  e karşılık gelir. Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan hiperyüzeye **yönlendirilmiş hiperyüzey** denir.

$\mathbb{R}^3$  de *Möbius şeridi* gibi bazı hiper yüzeyler için bir yönlendirme tespit etmek mümkün değildir. Zira bu şerit üzerindeki kapalı bir eğri boyunca  $180^\circ$  lik dönmeden sonra  $N_1$  in  $-N_1$  e dönüştüğü görülür.  $U \subset \mathbb{R}^3$  bir açık alt cümle olmak üzere, Möbius şeridini

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = c, f(p) \neq \vec{0}, \forall p \in S \end{aligned}$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir  $f$  fonksiyonu ile ifade etmek mümkün değildir. Dolayısıyla Möbius şeridi bu cins yüzey tanımına göre yönlendirilebilir 2– yüzey değildir. Möbius şeridi yönlendirilemeyen bir 2– yüzeydir [3].

**Tanım 2.0.5.**  $S, R^{n+1}$  de bir  $n–$  yüzey olsun.  $S$  nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı  $N$  olsun.

$$\begin{aligned}\eta : S &\rightarrow S^n \subset R^{n+1} \\ p &\rightarrow \eta(p) = \vec{N}(p) = (p, \vec{N}(p)) = \sum_{i=1}^{n+1} q_i(p)\end{aligned}$$

dönüşümü  $\|\vec{N}_p\| = 1$  olduğundan  $S$  yi  $R^{n+1}$  deki  $S^n$  birim küresine resmeder. Böyle tanımlanmış olan diferensiyellenebilir  $\eta$  dönüşümüne  $S$  nin **Gauss dönüşümü** denir [3].

**Tanım 2.0.6.**  $S, R^{n+1}$  de bir yüzey ve  $S$  de parametrik bir eğri de  $\alpha : I \rightarrow S$  olsun.  $\alpha$  nın teğet vektör alanı  $T$  olmak üzere, eğer  $\bar{D}_T^T = 0$  oluyorsa  $\alpha$  ya  $S$  üzerinde bir **geodezik eğri** denir. Burada  $\bar{D}$ ,  $S$  üzerinde Riemann konneksiyon dur.

Geodeziklerin her noktadaki hız vektörlerin uzunlukları sabittir [3].

**Tanım 2.0.7.**  $\alpha : I \rightarrow R^{n+1}$  parametrik eğrisi boyunca bir vektör alanı,  $X$  olmak üzere, eğer  $\forall t_1, t_2 \in I$  için  $X(t_1) = X(t_2)$  ise  $X$  vektör alanına öklid anlamında paraleldir denir. O halde  $X$  vektör alanı için  $\dot{X} = \frac{dX}{dt} = 0$  ise  $X$  vektör alanına  $\alpha$  eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir** denir.

$R^{n+1}$  de bir  $n–$  yüzey  $S$  ve  $S$  üzerinde parametrik bir eğri  $\alpha : I \rightarrow S$  olsun.  $\alpha$  eğrisi boyunca  $S$  ye teğet olan bir  $X$  diferensiyellenebilir vektör alanı için  $\dot{X} = 0$  ise bu  $X$  vektör alanına **Levi-civita anlamında paraleldir** denir. Eğer  $\alpha$  boyunca  $X$  bir sabit vektör alanı ise,  $S$  den bakıldığına göre,  $X$  vektör alanı  $\alpha$  boyunca paraleldir.

$\dot{X}(t)$ ,  $\dot{X}(t)$  nin  $S_{\alpha(t)}$  üzerindeki ortogonal izdüşümü olmak üzere  $\forall t \in I$  için  $\alpha$  boyunca  $S$  ye teğet bir vektör alanı olan  $\dot{X}$  kovaryant türevi,

$$\dot{X}(t) = \dot{X}(t) - [\dot{X}(t) \cdot N(\alpha(t))]N(\alpha(t))$$

ile tanımlanır [3].

**Tanım 2.0.8.**  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, V \in \mathbb{R}_p^{n+1}$  ve  $p \in U$  olmak üzere  $f$  nin  $V$  **tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi**,

$$\nabla_V f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

ile ifade edilir. Burada  $\alpha : I \rightarrow U$  bir parametrik eğri ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  dir.  $\nabla_V f$  in değeri  $\alpha$  nın seçiminden bağımsızdır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \nabla_V f &= (f \circ \alpha)'(t_0) \\ &= \nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) \\ &= \nabla f(p) \cdot V \end{aligned}$$

dir.

Benzer şekilde,  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $n$ - boyutlu  $S$  yüzeyi ve diferensiyellenebilir bir  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $f$  in  $S$  yüzeyine teğet  $V$  tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi,

$$\nabla_V f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

olacak şekilde tanımlanır [1].

**Tanım 2.0.9.**  $\alpha : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olmak üzere  $X$  diferensiyellenebilir **vektör alanının  $V_p$  tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi**;

$$\nabla_V X = (X \circ \alpha)'(t_0)$$

ile tanımlanır. Bu ifadeyi açarsak,

$$\begin{aligned} \nabla_V X &= (\alpha(t_0), (X_1 \circ \alpha)'(t_0), \dots, (X_{n+1} \circ \alpha)'(t_0)) \\ &= (p, \nabla_V X_1, \dots, \nabla_V X_{n+1}) \end{aligned}$$

olur. Burada  $X_i$  ler  $X$  in bileşenleridir [1].

**Tanım 2.0.10.**  $S, \mathbb{R}^{n+1}$  de bir  $n$ - yüzey,  $p \in S$  ve  $V \in S_p$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_p : S_p &\rightarrow S_p \\ V &\rightarrow L_p(V) = -\nabla_V N \end{aligned}$$

dönüşümü  $S$  yüzeyinin  $p$  noktasındaki **Weingarten dönüşümü**(**Şekil operatörü**) olarak adlandırılır [1].

**Teorem 2.0.1.**  $S, R^{n+1}$  de  $N$  birim normal vektör alanı tarafından yönlendirilmiş  $n$ -boyutlu yüzey olsun.  $p \in S, V \in S_p$  ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olacak şekilde bir  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisi için,

$$\ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(p) = L_p(V) \cdot V$$

dir.

**İspat.**  $\alpha, S$  de parametrik bir eğri olsun.  $\forall t \in I$  için,

$\dot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)} = [N(\alpha(t))]^\perp$  dir. Diğer bir ifadeyle  $\alpha$  boyunca  $\dot{\alpha} \cdot (N \circ \alpha) = 0$  dir.

Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} 0 &= [\dot{\alpha} \circ (N \circ \alpha)]'(t_0) \\ &= \ddot{\alpha}(t_0) \cdot (N \circ \alpha)(t_0) + \dot{\alpha}(t_0) \cdot (N \circ \alpha)'(t_0) \\ &= \ddot{\alpha}(t_0) N(\alpha(t_0)) + V \cdot \nabla_V N \\ &= \ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(p) - V \cdot L_p(V) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(p) = L_p(V) \cdot V$$

sonucuna ulaşırız [1]. □

**Tanım 2.0.11.**  $f : U \subset R^2 \rightarrow R$  olmak üzere  $C = f^{-1}(c)$  eğrisi  $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$  ile yönlendirilmiş bir düzlem eğrisi olsun.

$\forall p \in C$  için  $L_p$  Weingarten dönüşümü bir boyutlu  $C_p$  uzayı üzerinde bir lineer dönüşümdür.  $\forall p \in C$  ve  $\forall V \in C_p$  için,

$$\begin{aligned} L_p : C_p &\rightarrow C_p \\ V &\rightarrow L_p(V) = \kappa(p) \cdot V \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan  $\kappa(p)$  ye  $C$  nin  $p$  **noktasındaki eğriliği** denir. Eğer  $V$  tanjant vektörü  $p \in C$  noktasında sıfırdan farklı ise,

$$L_p(V) \cdot V = \kappa(p) \cdot \|V\|^2$$

olur. Böylece  $C$  nin  $p$  noktasındaki eğriliği,

$$\kappa(p) = \frac{L_p(V) \cdot V}{\|V\|^2}$$

şeklinde verilir.

Eğer  $\alpha : I \rightarrow C$  eğrisi  $\forall t \in I$  için  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$  olacak şekilde herhangi bir parametrik eğri ise o zaman,

$\ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(p) = L_p(V) \cdot V$  eşitliğinden

$$\kappa(\alpha(t)) = \frac{L_p(\dot{\alpha}(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2} = \frac{\ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(\alpha(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2}$$

elde edilir.  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$  olursa

$$\kappa(\alpha(t)) = \ddot{\alpha}(t) \cdot N(\alpha(t))$$

olur [1].

**Tanım 2.0.12.**  $C$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $a, b \in I$  olmak üzere eğrinin  $\alpha(a)$  ve  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki **yay uzunluğu**,

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, t \in I$$

ile tanımlanır [3].

**Tanım 2.0.13.**  $S, R^{n+1}$  de bir  $n$ - yüzey olsun.  $V \in S_p$  ve  $\|V\| = 1$  olmak üzere

$$k(V) = L_p(V) \cdot V$$

sayısına  $S$  yüzeyinin  $p$  noktasında,  $V$  yönündeki **normal eğriliği** denir [1].

**Tanım 2.0.14.**  $S, R^{n+1}$  de yönlendirilmiş bir  $n$ - yüzey olsun.  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\alpha(t_0) = p$  ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olacak şekilde  $S$  de herhangi bir parametrik eğri ve  $S$  yüzeyinin  $p$  noktasındaki Weingarten dönüşümü  $L_p$  olmak üzere  $S$  nin  $p$  noktasındaki **ikinci temel formu** ;

$$II_p(V) = L_p(V) \cdot V = \ddot{\alpha}(t_0) \cdot N(p)$$

olacak şekilde tanımlanır. Özel olarak  $\|V\| = 1$  olursa  $II_p(V)$ ,  $S$  nin normal eğriliğine eşit olur.  $\forall V \in S_p$  için  $S$  nin  $p$  noktasındaki birinci temel formu,

$$I_p(V) = V \cdot V = \|V\|^2$$

olacak şekilde tanımlanır [1].

Bir  $S$  yüzeyinin parametrik denklemi  $\vec{\phi} = \vec{\phi}(u, v)$  olmak üzere  $u$  ve  $v$  ye bu yüzeyin eğrisel koordinatları denir. Yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin parametrik denklemi  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  olup, vektörel denklem

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}(u(t), v(t))$$

dir.  $d\vec{\phi} = \vec{\phi}_u du + \vec{\phi}_v dv$  olmak üzere yay uzunluğunun diferensiyeli ise,

$$\begin{aligned} \|d\vec{\phi}\|^2 &= \|\vec{\phi}_u\|^2 du^2 + 2\vec{\phi}_u \cdot \vec{\phi}_v dudv + \|\vec{\phi}_v\|^2 dv^2 \\ &= Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

olur. Bu **birinci temel form** dur. Yüzey üzerindeki normal vektör alanı da  $u, v$  parametreleriyle değişir, Yani;

$$\vec{N} = \vec{N}(u, v)$$

dir. Burada;

$$d\vec{N} = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv$$

olur.  $I, II, III$  temel formları göstermek üzere,

$$\begin{bmatrix} I & II & III \\ d\vec{N} & d\vec{\phi} & 0 \\ 0 & d\vec{N} & d\vec{\phi} \end{bmatrix}$$

matrisi yazılabilir. Burada birinci satırdaki her eleman kendi kofaktörüne eşitlenerek

sırasıyla *I*., *II*. ve *III*. temel formları elde edilir.

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{vmatrix} d\vec{\Phi} & 0 \\ d\vec{N} & d\vec{\Phi} \end{vmatrix} = d\vec{\Phi}^2 = (\vec{\Phi}_u \cdot du + \vec{\Phi}_v \cdot dv)^2 \\
 II &= - \begin{vmatrix} d\vec{N} & 0 \\ 0 & d\vec{\Phi} \end{vmatrix} = -d\vec{N} \cdot d\vec{\Phi} = -(\vec{N}_u \cdot du + \vec{N}_v \cdot dv) \cdot (\vec{\Phi}_u \cdot du + \vec{\Phi}_v \cdot dv) \\
 III &= \begin{vmatrix} d\vec{N} & d\vec{\Phi} \\ 0 & d\vec{N} \end{vmatrix} = d\vec{N}^2 = (\vec{N}_u \cdot du + \vec{N}_v \cdot dv)^2
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
 I &= E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \\
 II &= l \cdot du^2 + 2m \cdot dudv + n \cdot dv^2 \\
 III &= e \cdot du^2 + 2f \cdot dudv + g \cdot dv^2
 \end{aligned}$$

olur. Burada;

$$\begin{aligned}
 E &= \Phi_u \cdot \Phi_u \quad , \quad l = N_u \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uu} \\
 F &= \Phi_u \cdot \Phi_v \quad , \quad m = N_u \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{uv} \\
 G &= \Phi_v \cdot \Phi_v \quad , \quad n = N \cdot \Phi_{vv}
 \end{aligned}$$

dir [4].

**Tanım 2.0.15.**  $S, R^{n+1}$  de bir  $n$ - yüzey olsun.

$L_p : S_p \rightarrow S_p$  Weingarten dönüşümü için  $L_p(V_i) = k_i V_i$  ( $i \leq 1 \leq n$ ) olacak şekildeki  $k_1(p), k_2(p), \dots, k_n(p)$  özdeğerlerine  $S$  nin  $p$  noktasındaki **asli eğrilikleri** denir.

Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör olarak adlandırılan vektörlerin belirttiği doğrultulara da  $S$  nin  $p$  noktasındaki **asli eğrilik vektörleri(asli doğrultu)** denir [1].

**Tanım 2.0.16.**  $S, R^{n+1}$  de bir yüzey ve  $S$  nin  $p$  noktasındaki Weingarten dönüşümü  $L_p$

olmak üzere,

$$K : S \subset R^{n+1} \rightarrow R$$
$$p \rightarrow K(p) = \det L_p$$

şeklinde tanımlanan  $K$  fonksiyonuna **Gauss eğrilik fonksiyonu** denir.  $K(p)$  değerine de  $S$  nin,  $p$  noktasındaki **Gauss eğriliği** denir.

Özel olarak  $n = 2$  alınırsa  $K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$  olur [1].

**Tanım 2.0.17.**  $S, R^{n+1}$  de bir yüzey ve  $p \in S$  olmak üzere

$$H : S \subset R^{n+1} \rightarrow R$$
$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(p)$$

olacak şekilde tanımlanan  $H$  fonksiyonuna **ortalama eğrilik fonksiyonu** denir.  $H(p)$  değerine de  $S$  nin  $p$  noktasındaki **ortalama eğriliği** denir [1].

**Tanım 2.0.18.**  $S$  yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ( $H = 0$ ) ise bu yüzeye minimal yüzey denir [2].

**Sonuç 2.0.1.**  $S, R^3$  de minimal yüzey ise  $\forall P \in S$  için  $K(p) \leq 0$  dır [2].

**İspat.**  $S, R^3$  de minimal yüzey olsun. O halde  $H = 0$  dır.  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  olduğu göz önüne alınarak  $k_1 + k_2 = 0$  ve buradan da  $k_1 = -k_2$  bulunur.  $K = k_1 \cdot k_2 = -(k_2)^2$  elde edilir.  $K \leq 0$  olduğu apaçıktır [2]. □

**Tanım 2.0.19.**  $\alpha : I \rightarrow R^{n+1}$  diferensiyellenebilir parametrik bir eğri olsun.  $\forall t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine **regüler eğri** denir [5].

**Tanım 2.0.20.**  $\phi : U \subset R^n \rightarrow R^m$  bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$p \in U, V = (p, v)$  ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olacak şekilde,  $U$  da herhangi bir parametrik eğri  $\alpha : I \rightarrow U$  olmak üzere,

$$d\phi : R_p^n \rightarrow R_{\phi(p)}^m$$
$$V \rightarrow d\phi(V) = \phi \dot{\alpha}(t_0)$$

olacak şekilde tanımlı  $d\varphi$  dönüşümüne  $\varphi$  nin **Türev dönüşümü (diferansiyeli)** denir.  $d\varphi$  nin değeri  $\alpha$  eğrisinin seçiminden bağımsızdır. Buna göre,

$$d\varphi(V) = \varphi \dot{\alpha}(t_0) = (\varphi(p), \nabla_{V_1}^{\varphi_1}, \dots, \nabla_{V_1}^{\varphi_m})$$

olur [1].

**Tanım 2.0.21.** Bir  $\varphi : R^n \rightarrow R^m$  dönüşümü verilsin.  $\forall p \in R^n$  için  $d\varphi_p$  türev dönüşümü birebir ise  $d\varphi_p$  türev dönüşümüne regülerdir denir.

Türev dönüşümler lineer dönüşümler olduğu için aşağıdaki durumlar denktir.

1.  $d\varphi_p$  dönüşümü birebir dir.
2.  $d\varphi(V_p) = 0$  ise  $V_p = 0$  dır.
3.  $\varphi$  nin  $p$  noktasındaki jakobien matrisinin rankı  $n$  dir [6].

**Tanım 2.0.22.**  $U \subset R^n$  de irtibatlı açık bir alt küme olmak üzere  $\varphi : U \rightarrow R^{n+k}$  diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun.  $\varphi$  dönüşümü regüler ise  $\varphi(U)$  ya  $R^{n+k}$  da ( $k > 0$ ) **parametrik bir  $n$ - yüzey** denir [1].

**Tanım 2.0.23.**  $S, R^{n+1}$  de yönlendirilmiş bir yüzey olsun.  $S$  yüzeyi

$$H_p^+ = \{q \in R^{n+1} : (q - p) \cdot N \geq 0\}$$

veya

$$H_p^- = \{q \in R^{n+1} : (q - p) \cdot N \leq 0\}$$

yarı düzlemlerinden sadece birinde kalıyorsa,  $S$  yüzeyine **konveks yüzey** denir [1].

**Tanım 2.0.24.**  $R^{n+1}$  de  $n$ - boyutlu  $S$  yüzeyi üzerindeki tanjant vektör alanların uzayı  $\chi(S)$  olsun.  $\forall X, Y, Z \in \chi(S)$  için,

$$R(X, Y) : \chi(S) \rightarrow \chi(S)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

olarak tanımlanan  $R(X, Y)$  dönüşümüne **Riemann eğrilik tensör alanı** denir. Burada  $\nabla$ ,  $S$  nin Riemann konneksiyonudur .

$g$ , Riemann metriği olmak üzere

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \quad W \in \chi(S)$$

eşitliği vardır[7].

**Tanım 2.0.25.** Bir  $\phi$  dönüşümü için, teğet vektör alanı  $\phi$  olan bir parametrik eğri  $\forall t$  için  $\dot{\phi}(t) = d\phi_t(t, 1)$  olduğundan  $\phi$ ,  $\phi$  boyunca bir teğet vektör alanıdır. Bu teğet vektör alanı şu şekilde genelleştirilebilir.  $U \subset R^n$  bir açık ve  $\phi : U \rightarrow R^{n+k}$  bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.  $\phi$  boyunca ki teğet vektör alanları;

$$E_i(p) = d\phi_p(p, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

şeklinde tanımlansın. Buradaki 1 vektör kısmının  $i$  yinci bileşeni olup  $E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) nin bileşenlerinin aynı zamanda  $\phi$  nin  $p$  noktasındaki jakobien matrisinin  $i$  yinci sütunundan ibaret olduğu görülür. Yani;

$$E_i(p) = (\phi(p), \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(p)) = (\phi(p), \frac{\partial \phi_1}{\partial u_i}(p), \dots, \frac{\partial \phi_{n+k}}{\partial u_i}(p))$$

olur. Burada  $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_{n+k}(p))$  ve  $p \in U$  dir. Bu şekilde tanımlanan  $E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) vektör alanları  $\phi$  yüzeyi boyunca **koordinat vektör alanları** olarak adlandırılır [1].

**Tanım 2.0.26.**  $\phi : U \rightarrow R^{n+1}$  parametrik yüzeyin hacmi

$$V(\phi) = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix} = \int_U \det \begin{pmatrix} E_1(u_1, \dots, u_n) \\ \dots\dots\dots \\ E_n(u_1, \dots, u_n) \\ N(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix} du_1 \dots du_n$$

şeklinde tanımlanır.

$N$  normal vektör alanı hesaplanmadan yüzeyin hacmi aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir [1].

**Teorem 2.0.2.**  $\varphi : U \rightarrow R^{n+1}$  parametrik bir  $n$ - yüzey olsun.  $O$  halde,

$$V(\varphi) = \int_U (\det(E_i \cdot E_j))^{\frac{1}{2}}$$

dir. Burada  $E_1, E_2, \dots, E_n, \varphi$  nin koordinat fonksiyonlarıdır [1].

**Tanım 2.0.27.**  $\varphi : U \rightarrow R^{n+1}$  parametrik  $n$ - yüzey için,

$$\varphi_s : U \rightarrow R^{n+1}, s \in R$$

$$\varphi_s(q) = \psi(q, s) = \varphi(q) + sN^\varphi(q)$$

parametrik yüzey ailesini tanımlayalım. Burada  $s = 0$  için  $\varphi_s = \varphi$  olacağı açıktır.  $s \neq 0$  olduğundan  $\varphi_s$  yüzeyi bazı noktalarda regüler olmayabilir. Böyle noktalarda  $d\varphi_s(V) = 0$  olacak şekilde  $V \in R_p^n (\|V\| = 1)$  doğrultusunun bulunduğu bazı  $p$  noktaları vardır. Eğer  $\alpha$  eğrisi,  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olacak şekilde  $U$  da parametrik bir eğri ise,

$$\varphi_s \circ \dot{\alpha}(t_0) = d\varphi_s(\dot{\alpha}(t_0)) = 0$$

sağlanır. Yani,

$$\varphi_s \circ \alpha(t) = \varphi(\alpha(t)) + sN^\varphi(\alpha(t))$$

eğrisi  $t = t_0$  da sıfır hızına sahip olur.

Bunun geometrik anlamı:  $\varphi(p) = \varphi(\alpha(t_0))$  noktası civarında  $\varphi \circ \alpha$  da geçen normal doğrular,  $f = \varphi_s(\alpha(t_0)) = \varphi_s(p)$  odağına yönelir. Böyle  $f$  noktaları  $\varphi$  yüzeyinin odak noktaları olarak adlandırılır [1].

### 3. KATI HAREKETLER ve KONGRÜANSLAR

Bu bölümde katı hareket ve kongrüent yüzey tanımları verilerek öteleme, dönme, yansımalar ve bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Özellikle  $R^{n+1}$  in bir katı hareketinin bir ortogonal dönüşüm ve bir ötelemenin bileşkesi olarak elde edildiği görülmüştür. Daha sonra kongrüent yüzeylerle ilgili teorem ve sonuçlar verilerek kongrüent yüzeylerin aynı geometriye sahip olduğu gösterilmiştir.

#### 3.1 Katı hareketler

**Tanım 3.1.1.**  $\forall p, q \in R^{n+1}$  için,

$$\begin{aligned}\psi : R^{n+1} &\rightarrow R^{n+1} \\ \|\psi(p) - \psi(q)\| &= \|p - q\|\end{aligned}$$

olacak şekilde bir  $\psi$  dönüşümüne  $R^{n+1}$  de bir **katı hareket** denir.

Böylece bir katı hareket uzaklığı koruyan bir dönüşümdür [1].

**Örnek 3.1.1.**  $a \in R^{n+1}$  için ,

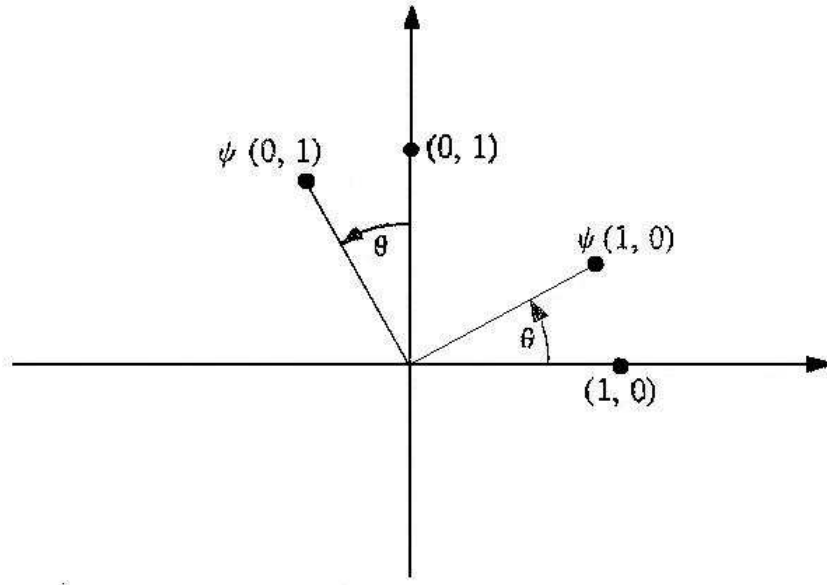
$$\begin{aligned}\psi : R^{n+1} &\rightarrow R^{n+1} \\ \psi(p) &= p + a\end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan  $\psi$  dönüşümü  $R^{n+1}$  in bir katı hareketi olup  $a$  vektörüyle belirli olan bir **öteleme** olarak adlandırılır [1].

**Örnek 3.1.2.**  $\theta \in R$  için,

$$\begin{aligned}\psi : R^2 &\rightarrow R^2 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \psi(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir katı hareket olup, bu hareket 0 merkezli  $\theta$  açılı bir **dönme** olarak adlandırılır (şekil 3.1.1) [1].



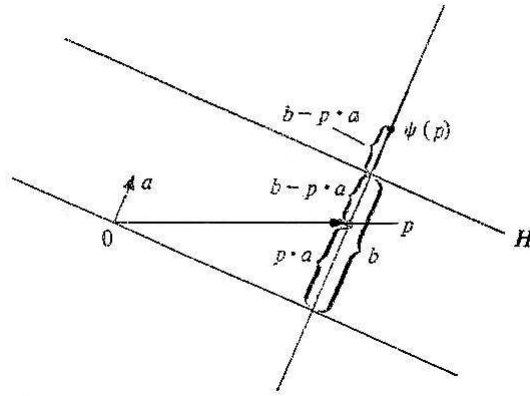
Şekil 3.1.1

**Örnek 3.1.3.**  $a \in R^{n+1}$  için  $\|a\| = 1$  ve  $b \in R$  olmak üzere

$$\psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$$

$$\psi(p) = p + 2(b - p \cdot a)a$$

olarak tanımlanan  $\psi$  dönüşümü bir katı hareket olup,  $H = \{x \in R^{n+1} : a \cdot x = b\}$   $n$ -**düzlemine göre yansıma** olarak adlandırılır (şekil 3.1.2) [1].



Şekil 3.1.2

**Örnek 3.1.4.**  $\forall v \in R^{n+1}$  için  $\|\psi(v)\| = \|v\|$  olacak şekilde tanımlanan  $\psi$  lineer dönüşümü bir katı harekettir. Çünkü  $\forall p, q \in R^{n+1}$  için,

$$\begin{aligned}\|\psi(p) - \psi(q)\| &= \|\psi(p - q)\| \\ &= \|p - q\|\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde tanımlanan  $\psi$  dönüşümüne  $R^{n+1}$  in ortogonal dönüşümü denir.

$R^{n+1}$  in bir lineer dönüşümünün katı hareket olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün ortogonal olmasıdır.

$R^{n+1}$  in iki katı hareketinin  $\psi_2 \circ \psi_1$  bileşimi bir katı harekettir. Özellikle bir ortogonal dönüşüm ile bir ötelemenin bu sıradaki bileşimi de bir katı harekettir [1].

**Teorem 3.1.1.**  $\psi, R^{n+1}$  in bir katı hareketi olsun.  $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$  olacak şekilde bir tek  $\psi_1$  ortogonal dönüşümü ve  $\psi_2$  ötelemesi vardır [1].

**İspat.**  $a = \psi(0)$  olsun.  $\psi_2, a$  ile belli olan bir öteleme ve  $\psi_1 = \psi_2^{-1} \circ \psi$  olsun.  $\psi_1$  in ortogonal dönüşüm olduğunu göstereceğiz. Açıkça  $\psi_1(0) = 0$  olacak şekilde  $\psi_1$  bir katı harekettir.

$\forall v \in R^{n+1}$  için  $\psi_1$  ortogonal dönüşümü,

$$\|\psi_1(v)\| = \|\psi_1(v) - \psi_1(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$$

eşitliğini sağladığından normları korur. Böylece, sadece  $\psi_1$  in lineer olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için önce  $\psi_1$  in iç çarpımları koruduğunu göstereceğiz.

$\forall v, w \in R^{n+1}$  için,

$$\begin{aligned}\psi_1(v) \cdot \psi_1(w) &= \frac{1}{2}(\|\psi_1(v)\|^2 + \|\psi_1(w)\|^2 - \|\psi_1(v) - \psi_1(w)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2) \\ &= v \cdot w\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak lineerliği göstermek için,  $\forall c_1, c_2 \in R$  ve  $v_1, v_2 \in R^{n+1}$  olmak üzere

$$\psi_1(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \psi_1(v_1) + c_2 \psi_1(v_2)$$

eşitliğini veya buna denk olan

$$\Psi_1(c_1v_1 + c_2v_2) - c_1\Psi_1(v_1) - c_2\Psi_1(v_2) = 0$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

Bunun için  $\Psi_1(c_1v_1 + c_2v_2) - c_1\Psi_1(v_1) - c_2\Psi_1(v_2)$  vektörünün  $R^{n+1}$  in bazı bazlarında her vektöre ortogonal olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ ,  $R^{n+1}$  in herhangi bir ortonormal bazı ise o zaman  $\{\Psi(e_1), \Psi(e_2), \dots, \Psi(e_{n+1})\}$  de  $R^{n+1}$  in bir ortonormal bazı olur. Çünkü;  $\Psi_1$  iç çarpımları korur ve  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  için,

$$\begin{aligned} & [\Psi_1(c_1v_1 + c_2v_2) - c_1\Psi_1(v_1) - c_2\Psi_1(v_2)] \cdot \Psi_1(e_i) \\ &= (c_1v_1 + c_2v_2) \cdot e_i - c_1(v_1 \cdot e_i) - c_2(v_2 \cdot e_i) = 0 \end{aligned}$$

olacağından  $\Psi_1$  lineerdir [1].

Şimdi de  $\Psi_1$  ve  $\Psi_2$  nin tekliğini gösterelim. Farzedelim ki  $\bar{\Psi}_2$  ötelemesi ve  $\bar{\Psi}_1$  ortogonal dönüşümü olmak üzere  $\Psi = \bar{\Psi}_2 \circ \bar{\Psi}_1$  olsun. Göstermeliyiz ki  $\bar{\Psi}_2 = \Psi_2$  ve  $\bar{\Psi}_1 = \Psi_1$  dir. Kabul edelim ki  $\Psi_2 \circ \Psi_1 = \bar{\Psi}_2 \circ \bar{\Psi}_1$  olsun. O halde  $\Psi_1 = \Psi_2^{-1} \circ \bar{\Psi}_2 \circ \bar{\Psi}_1$  olur.

$\Psi_1$  ve  $\bar{\Psi}_1$  lineer dönüşümlerdir. Bu dönüşümler orijini kendisine resmeder. Bu da  $(\Psi_2^{-1} \circ \bar{\Psi}_2)(0) = 0$  olduğunu gösterir. Fakat  $\Psi_2^{-1} \circ \bar{\Psi}_2$  ötelemedir. Dolayısıyla  $\Psi_2^{-1} \circ \bar{\Psi}_2 = I$  olmalıdır. Böylece  $\bar{\Psi}_2 = \Psi_2$  bulunur.

$\Psi_2 \circ \Psi_1 = \bar{\Psi}_2 \circ \bar{\Psi}_1$  eşitliğinden,  $\Psi_2 \circ \Psi_1 = \Psi_2 \circ \bar{\Psi}_1$  olur. Heriki tarafı  $\Psi_2^{-1}$  ile işleme tabii tutarsak  $\Psi_1 = \bar{\Psi}_1$  olur [6]. □

**Sonuç 3.1.1.**  $\Psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$  bir katı hareket olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1.  $\Psi$  diferensiyellenebilir dir.
2.  $\Psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$  örtendir.
3.  $d\Psi(V) \cdot d\Psi(W) = V \cdot W$ ,  $\forall V, W \in R_p^{n+1}$  ve  $p \in R^{n+1}$  [1]

**İspat.** 1. Lineer dönüşümler ve ötelemeler diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla katı hareketler de diferensiyellenebilirdir.

2.  $R^{n+1}$  in ortogonal dönüşümleri ve ötelemeler örtendir. Dolayısıyla katı hareketler de örtendir.

3.  $\psi$  katı hareketi  $\psi_2$  ötelemesi ve  $\psi_1$  ortogonal dönüşümü ile verilsin.  $\psi_2$  ve  $\psi_1$  bileşenleri tek olduğundan

$\forall (p, v) \in R_p^{n+1}$  ve  $\forall p \in R^{n+1}$  için

$$d\psi(p, v) = (\psi(p), \psi_1(v)) \quad (3.1.1)$$

olur. Gerçekten de  $\dot{\alpha}(0) = (p, v)$  olacak şekilde ki  $\alpha(t) = p + tv$  eğrisini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki eşitliğe sahip oluruz.

$$\begin{aligned} d\psi(p, v) = \psi \dot{\alpha}(0) &= \left( \psi(p), \frac{d}{dt} \Big|_0 \psi(p + tv) \right) \\ &= \left( \psi(p), \frac{d}{dt} \Big|_0 \psi_2 \circ \psi_1(p + tv) \right) \\ &= \left( \psi(p), \frac{d}{dt} \Big|_0 (\psi_1(p) + t\psi_1(v) + a) \right) \\ &= (\psi(p), \psi_1(v)) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $V = (p, v)$  ve  $W = (p, w) \in R_p^{n+1}$  için,

$$\begin{aligned} d\psi(V) \cdot d\psi(W) &= (\psi(p), \psi_1(v)) \cdot (\psi(p), \psi_1(w)) \\ &= \psi_1(v) \cdot \psi_1(w) \\ &= v \cdot w \\ &= V \cdot W \end{aligned}$$

bulunur [1]. □

### 3.2 Kongrüent Yüzeyler

**Tanım 3.2.1.**  $S$  ve  $\tilde{S}$ ,  $R^{n+1}$  de iki yüzey olmak üzere,

$$\begin{aligned} \psi : R^{n+1} &\rightarrow R^{n+1} \\ S &\rightarrow \psi(S) = \tilde{S} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir  $\psi$  katı hareketi varsa,  $R^{n+1}$  deki  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeylerine **kongrüent yüzeyler** denir [1].

Böyle bir katı hareketinin  $d\psi$  diferensiyeli,  $\forall p \in S$  için  $S$  nin  $p$  noktasındaki  $S_p$  tanjant uzayını,  $\tilde{S}$  nin  $\tilde{S}_{\psi(p)}$  tanjant uzayı üzerine dönüştürür.  $d\psi$  iç çarpımları koruduğundan,

$$d\psi(N(p)) = \mp \tilde{N}(\psi(p))$$

olur. Burada  $N$  ve  $\tilde{N}$  sırasıyla  $S$  ve  $\tilde{S}$  üzerindeki yönlendirmelerdir.  $\forall p \in S$  için  $\tilde{S}$  yüzeyi üzerinde  $\tilde{N}$  yönlendirmesi,

$$d\psi(N(p)) = +\tilde{N}(\psi(p))$$

veya

$$d\psi \circ N = \tilde{N} \circ \psi$$

olacak şekilde daima seçilebilir [1].

**Örnek 3.2.1.**  $R^3$  de aynı yarıçaplı iki küre denktir.

$S_r^2(p), S_r^2(q) \subset R^3$  olmak üzere

$$\psi : T_{q-p} : R^3 \rightarrow R^3$$

$$p \rightarrow T(p) = q$$

ötelemesi ile

$$\psi(S_r^2(p)) = S_r^2(q)$$

olur [3].

**Teorem 3.2.1.**  $S$  ve  $\tilde{S}$ ,  $R^{n+1}$  de kongrüent iki yüzey olsun. Ayrıca

$$\psi : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$$

$$\psi(S) = \tilde{S}$$

olacak şekilde bir katı hareket olsun. Farzedelim ki  $S$  ve  $\tilde{S}$ ,  $d\psi \circ N = \tilde{N} \circ \psi$  olacak şekilde yönlendirilmiş olsun. O zaman  $\forall V, W \in S_p, p \in S$  için

$$1. d\psi(V) \cdot d\psi(W) = V \cdot W$$

2.  $S$  nin  $p$  noktasındaki  $II_p$  ikinci temel formu ve  $\tilde{S}$  nin  $\psi(p)$  noktasındaki  $\tilde{II}_{\psi(p)}$  ikinci temel formu arasında,

$$II_p = \tilde{II}_{\psi(p)} \circ d\psi$$

bağıntısı vardır [1].

**İspat.** 1. Sonuç 3.1.1 den açıktır.

2.  $\psi_1$  dönüşümü, Teorem 3.1.1 deki gibi  $\psi$  nin ortogonal bileşeni olsun.

$p \in S, V \in S_p$  ve  $\dot{\alpha}(t_0) = V$  olacak şekilde  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisi verilsin.

$d\psi(V) = \psi \circ \dot{\alpha}(t_0)$  olduğundan  $\tilde{S}$  nin  $\psi(p)$  noktasında  $d\psi(V)$  üzerinde  $\tilde{L}_{\psi(p)}$  Weingarten dönüşümünün değeri;

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\psi(p)}(d\psi(V)) &= -\nabla_{d\psi(V)} \tilde{N} \\ &= -(\tilde{N} \circ \psi \circ \alpha)(t_0) \\ &= -(d\psi \circ \dot{N} \circ \alpha)(t_0) \\ &= -(\psi(p), (\psi_1 \circ N \circ \alpha)'(t_0)) \quad (3.1.1) \text{ den} \\ &= -(\psi(p), \psi_1((N \circ \alpha)'(t_0))) \quad (\psi_1 \text{ in lineerliğinden}) \\ &= -d\psi(p, (N \circ \alpha)'(t_0)) \quad (3.1.1) \text{ den} \\ &= -d\psi(\nabla_V N) \\ &= d\psi(L_p(V)) \end{aligned}$$

olur. Burada  $L_p$ ,  $S$  nin  $p$  noktasındaki Weingarten dönüşümüdür. Böylece,

$$\begin{aligned} \tilde{II}_{\psi(p)}(d\psi(V)) &= \tilde{L}_{\psi(p)}(d\psi(V)) \cdot d\psi(V) \\ &= d\psi(L_p(V)) \cdot d\psi(V) \\ &= L_p(V) \cdot V \\ &= II_p(V) \end{aligned}$$

olur [1].

□

**Sonuç 3.2.1.**  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  dönüşümü  $\psi$  nin ortogonal kısmı  $\psi_1$  ve  $\tilde{N}o\psi = d\psi oN$  olacak şekilde bir katı hareket ise  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeyleri aynı geometriye sahip olur. Bu durumda;

1.  $\alpha : I \rightarrow S$  nin uzunluğu,  $\psi o\alpha : I \rightarrow \tilde{S}$  nin uzunluğu ile aynıdır.

2.  $N$  ve  $\tilde{N}$  sırasıyla  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeylerinin Gauss dönüşümleri olmak üzere, bunlar arasında  $\tilde{N}o\psi = \psi_1 oN$  bağıntısı vardır. Özellikle  $\tilde{S}$  nin küresel göstergesi,  $S$  nin küresel göstergesinin  $\psi_1$  altındaki görüntüsüdür.

3.  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisinin bir geodezik olması için gerek ve yeter şart  $\psi o\alpha$  nın  $\tilde{S}$  üzerinde bir geodezik olmasıdır.

4.  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisi boyunca bir  $X$  vektör alanının paralel olması için gerek yeter şart  $d\psi oX$  in  $\psi o\alpha$  boyunca paralel olmasıdır.

5.  $S$  nin  $p$  noktasındaki  $L_p$  Weingarten dönüşümü ile  $\tilde{S}$  nin  $\psi(p)$  noktasındaki  $\tilde{L}_{\psi(p)}$  Weingarten dönüşümü arasında

$$\tilde{L}_{\psi(p)} o d\psi_p = d\psi_p o L_p$$

bağıntısı vardır.

6.  $S$  ve  $\tilde{S}$  nin sırasıyla  $k$  ve  $\tilde{k}$  normal eğrilikleri arasında

$$k = \tilde{k} o d\psi$$

bağıntısı vardır. Özellikle  $S$  nin  $p$  noktasındaki asli eğrilikleri ile  $\tilde{S}$  nin  $\psi(p)$  noktasındaki asli eğrilikleri aynıdır.

7.  $S$  nin  $p$  noktasındaki ve  $\tilde{S}$  nin  $\psi(p)$  noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri aynıdır.

8.  $S$  yüzeyinin  $p \in S$  noktasında konveks olması için gerek ve yeter şart  $\tilde{S}$  yüzeyinin  $\psi(p)$  noktasında konveks olmasıdır.

9.  $S$  nin odak noktasının  $\psi$  altındaki görüntüsü,  $\tilde{S}$  nin odak noktasına eşittir.

10.  $S$  yüzeyinin hacmi,  $\tilde{S}$  yüzeyinin hacmine eşittir.

11.  $S$  yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart  $\tilde{S}$  nin minimal yüzey olmasıdır.

**İspat.** 1.  $\ell(\psi \circ \alpha) = \int_I \|\psi' \circ \alpha\| = \int_I \|d\psi \circ \dot{\alpha}\| = \int_I \|\dot{\alpha}\| = \ell(\alpha)$

2.  $\tilde{N} \circ \alpha = d\psi \circ N$  eşitliğinden görülür.

3. (4) den görülür. Çünkü  $\alpha$  eğrisinin bir geodezik olması için gerek ve yeter şart  $\dot{\alpha}$  nün paralel olmasıdır.

4.  $\tilde{N}(\psi(\alpha(t))) = d\psi(N(\alpha(t)))$  nin bir katının  $d\psi \circ X(t) = d\psi(\dot{X}(t))$  olması için gerek ve yeter şart  $\dot{X}(t)$  nin  $N(\alpha(t))$  nin bir katı olmasıdır.

5. Teorem 3.2.1 in ispatından görülmektedir.

6.  $\tilde{k}(d\psi(V)) = \tilde{H}_{\psi(p)}(d\psi(V)) = H_p(V) = k(V)$  olduğundan  $k$  ve  $\tilde{k}$  asli eğrilikleri aynıdır. Çünkü  $L_p$  ve  $\tilde{L}_p = d\psi_p \circ L_p \circ d\psi_p^{-1}$  şekil peratörleri aynı özdeğerlere sahiptir.

7. (6) dan görülür.

8.

$$\begin{aligned}(\psi(q) - \psi(p)) \cdot \tilde{N}(\psi(p)) &= (\psi_1(q) - \psi_1(p)) \cdot \psi_1(N(p)) \\ &= (q - p) \cdot N(p)\end{aligned}$$

eşitliğinden görülür.

9.

$$\begin{aligned}\psi(p + (\frac{1}{k_i(p)})N(p)) &= \psi_2(\psi_1 + (\frac{1}{k_i(p)})\psi_1(N(p))) \\ &= \psi_1(p) + (\frac{1}{k_i(p)})\psi_1(N(p)) + a \\ &= \psi(p) + (\frac{1}{\tilde{k}_i(\psi(p))})\tilde{N}(\psi(p))\end{aligned}$$

10.  $S$  nin herhangi bir  $\phi$  lokal parametrizasyonu için  $\psi \circ \phi$  de  $\tilde{S}$  nin bir lokal parametrizasyonudur. Böylece,

$$\begin{aligned}\det(E_i^{\psi \circ \phi} \cdot E_j^{\psi \circ \phi}) &= \det(d\psi(E_i^\phi) \cdot (d\psi(E_j^\phi))) \\ &= \det(E_i^\phi \cdot E_j^\phi)\end{aligned}$$

olur. Hacim integrantları eşit olduğundan  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeylerinin hacimleri eşittir.

11. (7) den görülür [1].

□

**Teorem 3.2.2.**  $R^{n+1}$  in irtibatlı ve yönlendirilmiş iki yüzeyi  $S$  ve  $\tilde{S}$  olsun. Aşağıdaki (1) ve (2) şartları sağlayacak şekilde bir  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  diferensiyellenebilir dönüşümü varsa bu iki yüzey kongrüent tir.  $\forall V, W \in S_p, p \in S$  için,

$$1. d\psi(V) \cdot d\psi(W) = V \cdot W$$

2.  $S$  nin ve  $\tilde{S}$  nin sırasıyla  $p$  ve  $\psi(p)$  noktasındaki  $II_p$  ve  $\tilde{II}_{\psi(p)}$  ikinci temel formları arasında  $\forall p \in S$  için,

$$II_p = \tilde{II}_{\psi(p)} \circ d\psi$$

bağıntısı vardır. Gerçekten  $\psi, R^{n+1}$  de bir katı hareketin  $S$  ye kısıtlanmasıdır [1].

**İspat.**  $p_0 \in S$  olsun.  $R^{n+1}$  in bir  $\bar{\psi}$  katı hareketi  $\bar{\psi} = \psi_2 \circ \psi_1$  olacak şekilde tanımlayalım. Burada  $\psi_1, R^{n+1}$  in aşağıdaki (a) ve (b) özelliklerini sağlayan ve birtek şekilde belli olan ortogonal dönüşümdür.

$$(a) \psi_1(N(p_0)) = \tilde{N}(\psi(p_0))$$

$$(b) \forall v \in R^{n+1} \text{ için } v \perp N(p_0) \text{ olacak şekilde } (p_0, \psi_1(v)) = d\psi(p_0, v)$$

dir. Ayrıca  $\psi_2, R^{n+1}$  in  $\psi_1(p_0)$  noktasını  $\psi(p_0)$  noktasına dönüştürecek şekildeki ötelemesidir.  $\forall p \in S$  için  $\psi = \bar{\psi}|_S$  olarak  $(\bar{\psi}^{-1} \circ \psi)(p) = p$  olduğunu göstereceğiz.

$\phi = \bar{\psi}^{-1} \circ \psi$  olsun. Bu durumda  $\phi$  dönüşümü,  $S$  yi  $\bar{S} = \bar{\psi}^{-1}(\tilde{S})$  üzerine dönüştürür. Ayrıca,  $\forall V, W \in S_p, p \in S$  ve  $\forall V \in S_{p_0}$  için

$$(i) d\phi(V) \cdot d\phi(W) = V \cdot W$$

$$(ii) II_p = \bar{II}_{\phi(p)} \circ d\phi$$

$$(iii) \phi(p_0) = p_0$$

$$(iv) d\phi(V) = V$$

özellikleri sağlanır. (i) ve (ii) den  $S$  nin  $L_p$  ve  $\bar{S}$  nin  $\bar{L}_{\phi(p)}$  Weingarten dönüşümleri arasında  $\forall p \in S$  için

$$\bar{L}_{\phi(p)} \circ d\phi = d\phi \circ L_p$$

olduğu sonucuna varılır. Gerçekten de  $\forall V, W \in S_p$  için

$$\begin{aligned}\bar{L}_{\varphi(p)}(d\varphi(V)) \cdot d\varphi(W) &= \frac{1}{2}(\bar{H}_{\varphi(p)}(d\varphi(V+W)) - \bar{H}_{\varphi(p)}(d\varphi(V)) - \bar{H}_{\varphi(p)}(d\varphi(W))) \\ &= \frac{1}{2}(H_p(V+W) - H_p(V) - H_p(W)) \\ &= L_p(V) \cdot W = d\varphi(L_p(V)) \cdot d\varphi(W)\end{aligned}$$

olur. Çünkü  $\forall p \in S$  için  $d\varphi, S_p$  yi  $\bar{S}_{\varphi(p)}$  ye dönüştürür. Dolayısıyla  $d\varphi, S_p$  nin ortonormal bazlarını  $\bar{S}_{\varphi(p)}$  nin ortonormal bazlarına dönüştüreceğinden (i) den dolayı  $\forall V \in S_p$  için

$$\bar{L}_{\varphi(p)}(d\varphi(V)) = d\varphi(L_p(V))$$

olur.

Göstereceğiz ki eğer  $\alpha : I \rightarrow S$  parametrik eğrisi bir  $t_0 \in I$  için  $\varphi(\alpha(t_0)) = \alpha(t_0)$  ise  $d\varphi(\alpha(t_0))$  özdeşlik dönüşümüdür.

Bu durumda  $\forall t \in I$  için  $\varphi(\alpha(t)) = \alpha(t)$  dolayısıyla  $d\varphi(\alpha(t))$  de özdeşlik dönüşümüdür.

$\forall t \in I$  için  $\{\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{n+1}(t)\}$  kümesi  $S_{\alpha(t)}$  nin bir ortonormal bazı olacak şekilde  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, \alpha$  eğrisi boyunca diferensiyellenebilir paralel vektör alanları olsun.

$S_{\alpha(t_0)}$  in bir ortonormal  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  bazları yardımıyla  $\alpha$  eğrisi boyunca bir tek şekilde belirlenen  $\mathbf{X}_i$  paralel vektör alanları,  $\mathbf{X}_i(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_i$  olacak şekilde seçilerek elde edilebilir.

$\forall t \in I$  için  $\varphi \circ \alpha$  boyunca  $\mathbf{Y}_i(t) = d\varphi(\mathbf{X}_i(t))$  olacak şekilde vektör alanları olsun. Bu durumda  $\forall t \in I$  için  $\{\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_n(t)\}$  bazı  $\bar{S}_{\varphi \circ \alpha(t)}$  nin bir ortonormal bazıdır. Böylece  $d\varphi_{\alpha(t_0)}$  özdeşlik dönüşümü olduğundan,  $\forall i$  için  $\mathbf{Y}_i(\mathbf{t}_0) = \mathbf{X}_i(\mathbf{t}_0)$  olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned}\varphi \dot{\alpha} &= \sum_{i=1}^n ((\varphi \dot{\alpha}) \cdot \mathbf{Y}_i) \mathbf{Y}_i = \sum_{i=1}^n (d\varphi(\dot{\alpha}) \cdot d\varphi(\mathbf{X}_i)) \mathbf{Y}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{\alpha} \cdot \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i\end{aligned}$$

elde edilir.

$X_i : I \rightarrow R$  ve  $Y_i : I \rightarrow R$  vektörleri sırasıyla  $\mathbf{X}_i$  ve  $\mathbf{Y}_i$  nin vektör kısımları olmak üzere, eğer  $Y_i = X_i$  olduğunu gösterebilirsek

$$\frac{d}{dt}(\varphi \dot{\alpha}) = \sum_{i=1}^n (\dot{\alpha} \cdot \mathbf{X}_i) Y_i = \sum_{i=1}^n (\dot{\alpha} \cdot \mathbf{X}_i) X_i = \frac{d\alpha}{dt}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece  $\varphi\circ\alpha$  ve  $\alpha$  bir sabit ile farkederler.

$(\varphi\circ\alpha)(t_0) = \alpha(t_0)$  olduğundan  $\forall t \in I$  için  $(\varphi\circ\alpha)(t) = \alpha(t)$  sonucuna varılır. Ayrıca  $\forall i$  için

$$d\varphi(\mathbf{X}_i(t)) = \mathbf{Y}_i(t) = (\varphi(\alpha(t)), Y_i(t)) = (\alpha(t), X(t)) = \mathbf{X}_i(t)$$

olur. Dolayısıyla  $\forall t \in I$  için  $d\varphi(\alpha(t))$  özdeşlik dönüşümü olur. Buda istenendir.

Böylece  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  için  $X_i = Y_i$  olduğunu göstereceğiz. Bunun için,  $\forall t$  için  $R_{\alpha(t)}^{n+1}$  ve  $R_{\varphi\circ\alpha(t)}^{n+1}$  uzaylarının sırasıyla  $\{\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{n+1}(t)\}$  ve  $\{\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_{n+1}(t)\}$  ortonormal bazları olmak üzere,  $\mathbf{X}_{n+1} = N\circ\alpha$  ve  $\mathbf{Y}_{n+1} = \bar{N}\circ\varphi\circ\alpha$  alalım. Bu durumda,

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \mathbf{X}_j \quad \text{ve} \quad \dot{\mathbf{Y}}_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} \mathbf{Y}_j$$

olur. Burada;  $a_{ij} = \dot{\mathbf{X}}_i \cdot \mathbf{X}_j$  ve  $b_{ij} = \dot{\mathbf{Y}}_i \cdot \mathbf{Y}_j$  fonksiyonları  $I$  üzerinde reel değerli fonksiyonlardır.  $\forall i, j$  için  $a_{ij} = b_{ij}$  olduğunu göstereceğiz.

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j) = \dot{\mathbf{X}}_i \cdot \mathbf{X}_j + \mathbf{X}_i \cdot \dot{\mathbf{X}}_j = a_{ij} + a_{ji}$$

olduğundan  $a_{ji} = -a_{ij}$  olur. Benzer şekilde  $b_{ji} = -b_{ij}$  olur.  $i < j$  için  $a_{ij} = b_{ij}$  olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathbf{Y}_i = d\varphi\circ\mathbf{X}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  vektör alanları  $\bar{S}$  deki  $\varphi\circ\alpha$  eğrisi boyunca paraleldir. Bu gerçek,  $(i)$  den ve  $\mathbf{X}$  paralel vektör alanı için  $\mathbf{X}(\dot{t}) = 0$  olmasının bir sonucudur. Bu gerçekler altında  $\dot{\mathbf{X}}_i$  nin  $S$  ye normal olduğu gibi  $\dot{\mathbf{Y}}_i$  de  $\bar{S}$  ye normaldir. Böylece  $1 \leq i, j \leq n$  için

$$b_{ij} = \dot{\mathbf{Y}}_i \cdot \mathbf{Y}_j = 0 = \dot{\mathbf{X}}_i \cdot \mathbf{X}_j = a_{ij}$$

olur. Ayrıca  $i \leq n$  için

$$\begin{aligned} b_{i,n+1} &= \dot{\mathbf{Y}}_i \cdot \mathbf{Y}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_i \cdot \bar{N}\circ\varphi\circ\alpha = -\dot{\mathbf{Y}}_i \cdot \bar{N}\circ\varphi\circ\alpha \\ &= \mathbf{Y}_i \cdot \bar{L}(\varphi\dot{\alpha}) = \mathbf{Y}_i \cdot \bar{L}(d\varphi(\dot{\alpha})) = d\varphi(\mathbf{X}_i) \cdot d\varphi(L(\dot{\alpha})) \\ &= \mathbf{X}_i \cdot L(\dot{\alpha}) = -\mathbf{X}_i \cdot N\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{X}}_i \cdot N\circ\alpha = \dot{\mathbf{X}}_i \cdot \mathbf{X}_{n+1} = a_{i,n+1} \end{aligned}$$

olur. Burada  $L(\dot{\alpha})$ ,  $\alpha$  eğrisi boyunca  $(L(\dot{\alpha}(t))) = L_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))$  ile tanımlanan vektör alanıdır.  $\bar{L}(\varphi\dot{\alpha})$  de benzer şekilde tanımlanmıştır. Böylece  $1 \leq i < j \leq n+1$  için  $a_{ij} = b_{ij}$  sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla  $\forall i, j$  için  $a_{ij} = b_{ij}$  olur.

$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}$  için  $X_i = Y_i$  olduğunu göstererek ispat tamamlanabilir.

$c_{ij} = Y_i \cdot X_j : I \rightarrow R$  olmak üzere  $Y_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} X_j$  için  $(c_{ij}(t_0))$  matrisi birimdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{dc_{ij}}{dt} &= \frac{dY_i}{dt} \cdot X_j + Y_i \cdot \frac{dX_j}{dt} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} Y_k \right) \cdot X_j + Y_i \cdot \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} X_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (a_{ik} c_{kj} + a_{jk} c_{ik}) \end{aligned}$$

olur.

$$c_{ij}(t_0) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerli 1. mertebeden adi diferensiyel denklemler

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonları ile sağlanır. Çünkü  $a_{ij} + a_{ji} = 0$  dır. Böylece adi diferensiyel denklemin çözümünün tekliğinden dolayı  $\forall t \in I$  için  $(c_{ij}(t))$  birim matristir. Bir başka ifadeyle  $\forall t \in I$  ve  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  için  $Y_i(t) = X_i(t)$  olur. Son olarak  $\forall p \in S$  için  $\varphi(p) = p$  olduğunu göstermeliyiz.

$$U = \{p \in S : \varphi(p) \text{ ve } d\varphi(p) = \text{özdeşlik}\}$$

olsun.  $\phi$ ,  $S$  nin bir lokal parametrizasyonu olmak üzere  $\forall p \in U$ ,  $\phi(V)$  formundaki bir açık küme tarafından kapsanacağından  $U$  kümesi  $S$  de bir açıktır. Burada  $V, R^n$  de bir açık yuvardır.  $p, \phi(V)$  deki bir parametrik eğri ile  $\phi(V)$  nin herhangi bir noktasını birleştirebilir. Böylece  $\phi(V) \subset U$  teşkil edilebilir. Diğer taraftan  $\varphi$  ve  $d\varphi$  fonksiyonları sürekli olduklarından  $U$  nun  $S$  deki  $S - U$  tümleyeni  $S$  de bir açık kümedir. Bu ise  $S$  irtibatlı olduğundan sadece  $U$  nun veya  $S - U$  nun boş küme olması ile mümkündür. Eğer  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ ,  $\alpha(a) \in U$  ve  $\alpha(b) \in S - U$  olacak şekilde sürekli bir dönüşüm ise, bu durumda  $\alpha(t_0)$  ne  $U$  ya nede  $S - U$  ya ait olur. Burada  $t_0, \{t \in [a, b] : \alpha(t) \in U\}$  kümesinin en küçük

üst sınırdır.  $p_0 \in S$  olduğundan  $S - U$  boş küme olmak zorunda, böylece  $U = S$  olur.  
Özellikle  $\forall p \in S$  için  $\varphi(p) = p$  olur [1].

□

## 4. İZOMETRİLER

Bu bölümde intrinsic geometrik özellikler; izometri, izometrik yüzeyler, global izometri ve lokal izometri kavramları verilmiştir. Bir  $\psi$  dönüşümü izometri ise birinci temel formları koruduğu, tersine bir  $\psi$  diffeomorfizmi birinci temel formları koruyorsa  $\psi$  nin bir izometri olduğu görülür. Ayrıca çeşitli lokal izometri örnekleri verilmiştir. Daha sonra Riemann metrik ve poicare metriği verilerek bu metriklerle ilgili teorem ve sonuçlar ifade edilmiştir.

### 4.1 İzometriler ve Lokal İzometriler

Uzay araçlarının icadından önce yeryüzünde yapılan ölçümlerden yeryüzü ölçüleri konusunda kesin bir sonuca varmak zordu. Bir eğrinin zaman parametresine göre türevini alarak bu eğrinin uzunluğunu ve çizilme hızını ölçebiliriz. Böyle ölçümlerden türetilmiş olan geometriye **intrinsic geometri** denir.

Bir  $S$  yüzeyinde eğriler boyunca uzaklığı hesaplayabilmek için ihtiyaç duyabileceğimiz esas unsur tanjant vektörlerin iç çarpımıdır. Gerçekten de  $p \in S$  olmak üzere her  $S_p$  tanjant uzayı üzerinde iç çarpımın verilmesiyle bu yüzey üzerindeki parametrik bir  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisinin  $\ell(\alpha)$  uzunluğu,

$$\begin{aligned}\ell(\alpha) &= \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\ &= \int_a^b (\dot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t))^{\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

formülü ile hesaplanabilir. Tersine  $S$  deki keyfi diferensiyellenebilir eğrilerin uzunluğunu hesaplayabilirsek  $S_p$  deki vektörlerin normlarını da hesaplayabiliriz. Gerçekten de  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  eğrisinin  $a$  dan  $t$  ye kadar olan yayın uzunluğu  $s(t)$  ve  $\alpha'(t) = V$  olacak şekildeki  $V \in S_p$  vektörü için,

$$\|V\| = \|\alpha'(t)\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)(t_0)$$

olur. Normlar yardımıyla bütün iç çarpımları;

$$V \cdot W = \frac{1}{2}(\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2)$$

formülü ile hesaplayabiliriz. Böylece  $S$  üzerindeki bir  $\alpha$  eğrisinin uzunluk ölçüleri yardımıyla türetilen intrinsic geometri;  $S$  nin her bir noktasındaki tanjant uzayı üzerindeki iç çarpım bilgisinden elde edilen geometridir [1].

**Tanım 4.1.1.**  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  diffeomorfizmi  $\forall p \in S$  ve  $\forall V, W \in S_p$  için,

$$d\psi(V) \cdot d\psi(W) = V \cdot W$$

eşitliğini sağlıyorsa  $\psi$  dönüşümüne bir **izometri** denir.

Diğer bir ifadeyle;  $d\psi$  dönüşümü tanjant vektörlerin iç çarpımını koruyorsa  $\psi$  diffeomorfizmi bir izometridir [5].

Ayrıca  $\psi$  bir izometri olduğundan  $\forall V \in S_p$  için,

$$\begin{aligned} I_p(V) = V \cdot V &= d\psi_p(V) \cdot d\psi_p(V) \\ &= I_{\psi(p)}(d\psi_p(V)) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından birinci temel formlar korunur.

Tersine bir  $\psi$  diffeomorfizmi birinci temel formları koruyorsa, yani  $\forall V \in S_p$  için

$$I_p(V) = I_{\psi(p)}(d\psi_p(V))$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda;

$$\begin{aligned} 2(V \cdot W) &= I_p(V + W) - I_p(V) - I_p(W) \\ &= I_{\psi(p)}(d\psi_p(V + W)) - I_{\psi(p)}(d\psi_p(V)) - I_{\psi(p)}(d\psi_p(W)) \\ &= 2(d\psi_p(V) \cdot d\psi_p(W)) \end{aligned}$$

olacağından  $\psi$  nin bir izometri olacağı sonucuna varılır [5].

**Tanım 4.1.2.** Eğer  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  dönüşümü bir izometri ise  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeylerine **izometrik** tirlenir denir [3].

**Örnek 4.1.1.** Bir kağıt parçasını değişik şekillere dönüştürürken onu yırtmamaya, yapıştırmamaya dikkat edersek elde edilebilen her bir yeni konumun diğerlerine izometrik olduğunu söyleyebiliriz (şekil 4.1.1) [3].



Şekil 4.1.1

**Tanım 4.1.3.**  $R^{n+1}$  de iki yüzey  $S$  ve  $\tilde{S}$  olsun. Eğer bir

$$\psi : S \rightarrow \tilde{S}$$

dönüşümü için  $d\psi$  iç çarpımları koruyor ise  $\psi$  ye **lokal izometri** denir.

Bu tanıma göre her bir izometri aynı zamanda 1 : 1 ve örten olan bir lokal izometridir.

$\psi$  bir lokal izometri ise  $\psi$  nin, benzer düşüncelerle bir regüler dönüşüm olduğu açıktır. O halde  $\forall p \in S$  için  $p$  nin  $S$  de yatan bir  $U$  komşuluğu mevcut olup bu komşuluk  $\psi$  tarafından  $\tilde{S}$  daki  $\psi(p)$  nin bir  $V$  komşuluğuna diffeomorfik olarak resmedilir. Demek oluyor ki  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  lokal izometrisini  $R^{n+1}$  de başlı başına birer yüzey olarak alabileceğimiz  $U$  ve  $V$  yüzeyleri arasındaki bir izometri olarak düşünebiliriz. Yani  $\psi|_U : U \rightarrow V$  bir izometridir [3].

Eğer  $\forall p \in S$  için  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  dönüşümü bir lokal izometri ve diffeomorfizm ise o zaman  $\psi$  **global bir izometridir** [5].

$S$  yüzeyinin her  $p$  noktasında  $\tilde{S}$  yüzeyi içine bir lokal izometri varsa o halde  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeylerine **lokal izometrik** denir [3].

Bir  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  izometrisi tanjant vektörlerin iç çarpımlarını koruduğundan dolayı bu yüzeyin bütün intrinsic geometrisini de korur. Örneğin;  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  eğrisi parametrik

bir eğri ise o zaman,  $\tilde{S}$  üzerinde bulunan  $\psi \circ \alpha$  eğrisi ile aynı uzunluğa sahip olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\ell(\psi \circ \alpha) &= \int_a^b \|(\psi \circ \alpha)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|d\psi(\dot{\alpha}(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\ &= \ell(\alpha)\end{aligned}$$

olur. Aslında intrinsic geometri; yüzey geometrisinin izometrilere tarafından korunan parçası olarak düşünülebilir [1].

**Teorem 4.1.1.**  $R^3$  de  $S$  ve  $\tilde{S}$  iki yüzey ve  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve

$$\varphi : U \subset R^2 \rightarrow S \text{ ve } \bar{\varphi} = \psi \circ \varphi : U \subset R^2 \rightarrow \tilde{S}$$

birer harita olsun.

$$\psi \text{ lokal izometridir} \Leftrightarrow E = \bar{E}, \quad F = \bar{F} \text{ ve } G = \bar{G} \text{ dir [3].}$$

**İspat.**  $\Rightarrow$   $\psi$  lokal izometri olsun. O zaman

$$\bar{\varphi}_u = d\psi(\varphi_u), \quad \bar{\varphi}_v = d\psi(\varphi_v)$$

yazılabilir. Buna göre  $d\psi$  iç çarpımı koruyacağından.

$$\bar{E} = d\psi(\varphi_u) \cdot d\psi(\varphi_u) = \varphi_u \cdot \varphi_u = E$$

$$\bar{F} = d\psi(\varphi_u) \cdot d\psi(\varphi_v) = \varphi_u \cdot \varphi_v = F$$

$$\bar{G} = d\psi(\varphi_v) \cdot d\psi(\varphi_v) = \varphi_v \cdot \varphi_v = G$$

olur.

$\Leftarrow$   $\varphi : U \rightarrow S$  dönüşümü için  $p \in S$  noktasının dahil olduğu komşuluk  $V = \varphi(U)$  olsun.  $\forall X_p, Y_p \in S_p$  için  $S_p$  uzayı  $\varphi_u$  ve  $\varphi_v$  nin gerdiği uzay olduğundan

$$X_p = a_1 \varphi_u + a_2 \varphi_v, \quad a_1, a_2 \in R$$

$$Y_p = b_1 \varphi_u + b_2 \varphi_v, \quad b_1, b_2 \in R$$

yazılabilir.  $\psi$  nin lokal izometri olduğunu göstermek için;

$$\bar{E} = E, \bar{F} = F \text{ ve } \bar{G} = G \text{ ise } d\psi(X_p) \cdot d\psi(Y_p) = X_p \cdot Y_p$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned} d\psi(X_p) \cdot d\psi(Y_p) &= d\psi(a_1\phi_u + a_2\phi_v) \cdot d\psi(b_1\phi_u + b_2\phi_v) \\ &= (a_1\bar{\phi}_u + a_2\bar{\phi}_v) \cdot (b_1\bar{\phi}_u + b_2\bar{\phi}_v) \quad (d\psi \text{ lineer olduğundan}) \\ &= a_1b_1\bar{E} + (a_1b_2 + a_2b_1)\bar{F} + a_2b_2\bar{G} \end{aligned}$$

olur.  $\bar{E} = E$ ,  $\bar{F} = F$  ve  $\bar{G} = G$  olduğundan

$$\begin{aligned} &= a_1b_1E + (a_1b_2 + a_2b_1)F + a_2b_2G \\ &= a_1b_1\phi_u \cdot \phi_u + (a_1b_2 + a_2b_1)\phi_u \cdot \phi_v + a_2b_2\phi_v \cdot \phi_v \\ &= X_p \cdot Y_p \end{aligned}$$

olur. Bu da  $\psi$  nin iç çarpımları koruması dolayısı ile lokal izometri olması demektir [3]. □

**Örnek 4.1.2.**  $S : \mathbb{R}^2$  de düzlem ve  $\tilde{S} = C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = r^2, z = t\}$  silindir olmak üzere

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$$

dönüşümünü ele alalım.  $\mathbb{R}^2$  de

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (u, v) \end{aligned}$$

dönüşümüne göre  $\phi_u = (1, 0)$ ,  $\phi_v = (0, 1)$  olduğundan

$$\begin{aligned} E &= \phi_u \cdot \phi_u = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1 \\ F &= \phi_u \cdot \phi_v = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0 \\ G &= \phi_v \cdot \phi_v = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1 \end{aligned}$$

olur.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, z = t\}$$

silindirin parametrik denklemi  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  ve  $z = t$  keyfi  $\in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : (\theta, t) \in \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\rightarrow \varphi(\theta, t) = (r \cos \theta, r \sin \theta, t) \end{aligned}$$

dir.  $\varphi = \psi$  düşüncesiyle

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow C \\ (u, v) &\rightarrow \psi(u, v) = (r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r}, v) \\ d\psi(\varphi_u) &= \psi_u = (-\sin \frac{u}{r}, \cos \frac{u}{r}, 0) \\ d\psi(\varphi_v) &= \psi_v = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \bar{E} &= d\psi(\varphi_u) \cdot d\psi(\varphi_u) = \sin^2 \frac{u}{r} + \cos^2 \frac{u}{r} = 1 \\ \bar{F} &= d\psi(\varphi_u) \cdot d\psi(\varphi_v) = 0 \\ \bar{G} &= d\psi(\varphi_v) \cdot d\psi(\varphi_v) = 1 \end{aligned}$$

olur. O halde  $\bar{E} = E = 1$ ,  $\bar{F} = F = 0$  ve  $\bar{G} = G = 1$  olduğundan  $\psi$  bir lokal izometridir [3].

### Örnek 4.1.3.

$$\begin{aligned} S &= \{X(u, v) \mid X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3\} \\ X(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, v) \end{aligned}$$

helisoid (merdiven) yüzeyi ile

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \{Y(u, v) \mid Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3\} \\ Y(u, v) &= (\operatorname{argsh} u, \sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v) \end{aligned}$$

katenoit yüzeyi için

$$\begin{aligned}\psi : S &\rightarrow \tilde{S} \\ X(u, v) &\rightarrow \psi(X(u, v)) = Y(u, v)\end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $\psi$  dönüşümü bir lokal izometridir.

Gerçekten de  $S$  yüzeyi için  $X_u = (\cos v, \sin v, 0)$  ve  $X_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$  olduğundan

$$E = X_u \cdot X_u = 1$$

$$F = X_u \cdot X_v = 0$$

$$G = X_v \cdot X_v = 1$$

olur.  $\tilde{S}$  yüzeyi için

$$Y_u = \left( \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, u(u^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cos v, u(u^2+1)^{-\frac{1}{2}} \sin v \right)$$

$$Y_v = (0, -\sqrt{1+u^2} \sin v, \sqrt{1+u^2} \cos v)$$

olduğundan

$$\bar{E} = Y_u \cdot Y_u = \frac{1}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^2} \cos^2 v + \frac{u^2}{1+u^2} \sin^2 v = 1$$

$$\bar{F} = Y_u \cdot Y_v = 0$$

$$\bar{G} = Y_v \cdot Y_v = 1+u^2$$

dir. O halde  $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}$  olduğundan  $\psi$  bir lokal izometridir [8].

**Örnek 4.1.4.**  $\psi : R^{n+k} \rightarrow R^{n+k}$  bir katı hareket ve  $S$  de  $R^{n+k}$  da bir yüzey olsun. O zaman  $\psi|_S$ ,  $S$  yüzeyinin  $\psi(S)$  üzerine bir izometrisi dir [1].

**Örnek 4.1.5.**

$$\begin{aligned}\psi : R^2 &\rightarrow R^3 \\ \psi(\theta, u) &= (\cos \theta, \sin \theta, u)\end{aligned}$$

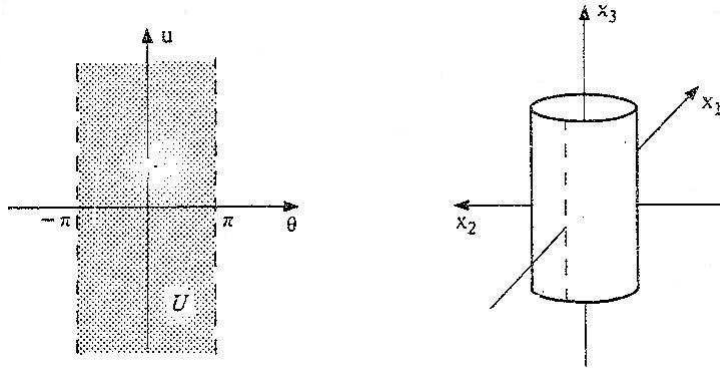
olsun.  $\psi$  dönüşümü düzlemi,  $R^3$  de  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  silindire dönüştürür (şekil 4.1.2).  $\psi$  dönüşümü bir lokal izometridir. Çünkü  $d\psi$  dönüşümü  $\forall(\theta, u) \in R^2$  için  $R^2_{(\theta,u)}$  uzayının  $\{(\theta, u, 1, 0), (\theta, u, 0, 1)\}$  ortonormal bazını, görüntü uzayının

$$\{E_1(\theta, u), E_2(\theta, u)\} = \{(\varphi(\theta, u), -\sin\theta, \cos\theta, 0), (\varphi(\theta, u), 0, 0, 1)\}$$

ortonormal bazına dönüştürür. Dolayısıyla  $d\psi_{(\theta,u)}$  iç çarpımı korur.  $\psi$  dönüşümünün,

$$U = \{(\theta, u) \in R^2 : -\pi < \theta < \pi\}$$

açık kümesine kısıtlanışıyla  $R^2$  deki  $U$  şeridinden, bir doğrusu çıkarılmış silindir üzerine  $\psi|_U$  izometrisi elde edilir [1].



Şekil 4.1.2

**Örnek 4.1.6.**  $a > b > 0$  olmak üzere ,

$$\varphi(\phi, \theta) = ((a + b \cos \phi) \cos \theta, (a + b \cos \phi) \sin \theta, b \sin \phi)$$

ile verilen

$$((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - a)^2 + x_3^2 = b^2$$

tor yüzeyini göz önüne alalım. Bu şekilde verilen  $\varphi$  dönüşümü bir lokal izometri değildir.

Gerçekten de

$$\begin{aligned} \|d\varphi(\phi, \theta, 0, 1)\| &= \|(\varphi(\phi, \theta), -(a + b \cos \phi) \sin \theta, (a + b \cos \phi) \cos \theta, 0)\| \\ &= a + b \cos \phi \end{aligned}$$

olur.  $\forall(\phi, \theta) \in R^2$  için  $\|(\phi, \theta, 0, 1)\| = 1$  olduğundan

$$\|d\varphi(\phi, \theta, 0, 1)\| \neq \|(\phi, \theta, 0, 1)\|$$

olup ortonormal bazı ortonormal baza dönüştürmemektedir. Diğer taraftan,

$$\psi(\phi, \theta) = (\cos \phi, \sin \phi, \cos \theta, \sin \theta)$$

ile verilen

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_3^2 + x_4^2 = 1$$

tor yüzeyini göz önüne alalım. Bu şekilde verilen  $\psi$  dönüşümü bir lokal izometridir. Gerçekten de  $\forall(\phi, \theta) \in R^2$  için,

$$d\psi(\phi, \theta, 1, 0) = (\psi(\phi, \theta), -\sin \phi, \cos \phi, 0, 0)$$

$$d\psi(\phi, \theta, 0, 1) = (\psi(\phi, \theta), 0, 0, -\sin \theta, \cos \theta)$$

vektörleri bir ortonormal baz oluşturur.  $\psi$  dönüşümünün,

$$U = \{(\phi, \theta) \in R^2 : -\pi < \phi < \pi, -\pi < \theta < \pi\}$$

açık kümesine kısıtlanışıyla  $R^2$  de  $U$  karesinden  $R^4$  de iki çemberi çıkarılmış tor üzerine bir  $\psi|_U$  izometrisi elde edilir [1].

**Örnek 4.1.7.**  $S$  yüzeyi  $R^2 - \{(0, 0)\}$  delinmiş düzlemi olsun.  $\tilde{S}$  yüzeyide  $x_3 > 0$  olmak üzere  $R^3$  de

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0$$

denklemini ile verilen koni olsun.  $\psi$  dönüşümü,

$$\psi : S \rightarrow \tilde{S}$$

$$\psi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left( \frac{r}{2} \cos 2\theta, \frac{r}{2} \sin 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2} r \right)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $r > 0$  olmak üzere  $(r, \phi)$ ,  $R^2 - \{(0, 0)\}$  üzerinde kutupsal koordinatlardır. Bu durumda  $\psi$  dönüşümü lokal izometridir. Eğer,

$$U = \{(r, \theta) \in R^2 : r > 0\}$$

olarak verilirse o zaman

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \tilde{\varphi}(r, \theta) &= \left( \frac{r}{2} \cos 2\theta, \frac{r}{2} \sin 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2} r \right)\end{aligned}$$

ile tanımlanan  $\varphi : U \rightarrow S$  ve  $\tilde{\varphi} : U \rightarrow S$  dönüşümleri birer parametrik 2- yüzeydir. Burada  $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$  dir (şekil 4.1.3).  $\varphi$  boyunca  $E_i$  ve  $\tilde{\varphi}$  boyunca  $\tilde{E}_i$  koordinat vektör alanları aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$\begin{aligned}E_1(r, \theta) &= \left( \varphi(r, \theta), \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \right) = (\varphi(r, \theta), \cos \theta, \sin \theta) \\ E_2(r, \theta) &= \left( \varphi(r, \theta), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) \right) = (\varphi(r, \theta), -r \sin \theta, r \cos \theta) \\ \tilde{E}_1(r, \theta) &= \left( \tilde{\varphi}(r, \theta), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}(r, \theta) \right) = (\tilde{\varphi}(r, \theta), \frac{1}{2} \cos 2\theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \tilde{E}_2(r, \theta) &= \left( \tilde{\varphi}(r, \theta), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta}(r, \theta) \right) = (\tilde{\varphi}(r, \theta) - r \sin 2\theta, r \cos 2\theta, 0)\end{aligned}$$

Ayrıca  $i \in \{1, 2\}$  olmak üzere  $\forall p \in U$  için,

$$d\psi(E_i(p)) = \tilde{E}_i(p)$$

olur. Çünkü,

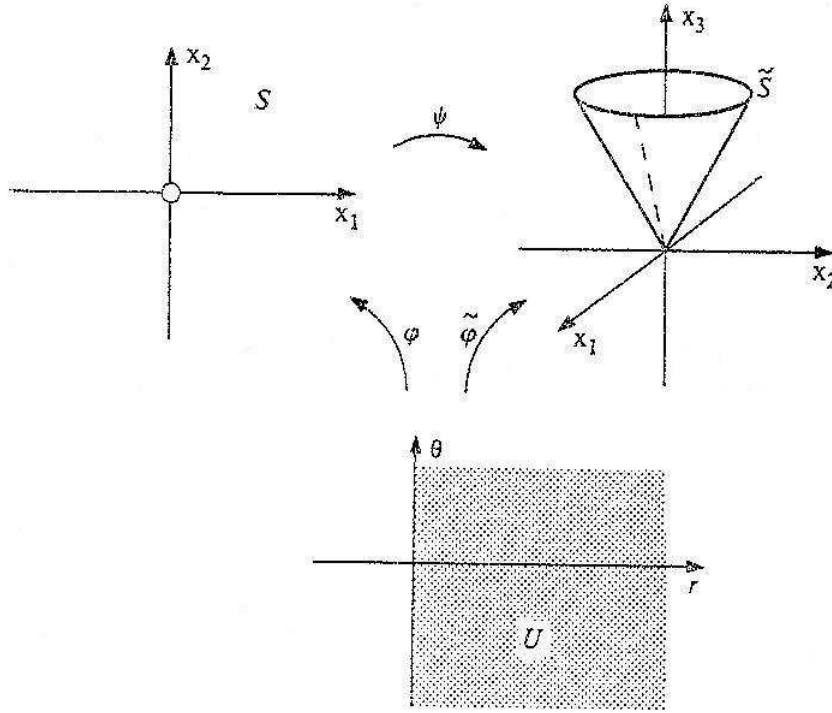
$$\begin{aligned}d\psi(E_i(p)) &= d\psi(d\varphi(e_i)) = d(\psi \circ \varphi)(e_i) \\ &= d\tilde{\varphi}(e_i) = \tilde{E}_i(p)\end{aligned}$$

dir. Burada  $e_1 = (p, 1, 0)$   $e_2 = (p, 0, 1)$  dir.

$$d\psi(E_i(p)) \cdot d\psi(E_j(p)) = \tilde{E}_i(p) \cdot \tilde{E}_j(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 1, & (i=j=1) \text{ ise} \\ 0, & (i,j) = (1,2) \text{ veya } (i,j) = (2,1) \text{ ise} \\ r^2, & (i=j=2) \text{ ise} \end{cases} \\
&= E_i(p) \cdot E_j(p)
\end{aligned}$$

olup baz vektörlerin iç çarpımlarının korunduğu görülür. Dolayısıyla tanjant vektörlerin iç çarpımında korunur [1].



Şekil 4.1.3

Örnek 4.1.5, izometrilere bükülmeler olarak adlandırılan özel bir sınıfa örnektir. Kabaca bir doğrusu çıkarılmış silindir,

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\pi < x_1 < \pi, x_3 = 0\}$$

ile verilen şeridinden uzatma, yırtılma ve yapıştırma olmaksızın silindir şekline bükülmesiyle elde edilmiştir.

Bu örnekte yüzey üzerindeki eğriler boyunca uzunluklar korunur. Diğer bir deyişle bükülme ile biri diğerinden elde edilebilen iki yüzey izometriktir.

$R^{n+k}$  da bir  $\tilde{S}$  yüzeyinin,  $R^{n+k}$  da bir  $S$  yüzeyinden bükülme ile elde edilmesi için aşağıdaki 3 şartı sağlayacak şekilde bir,

$$\psi : [a, b] \times S \rightarrow R^{n+k}$$

diferensiyellenebilir dönüşümün olmasıyla mümkündür.

(i)  $\forall t \in [a, b]$  için

$$\psi_t : S \rightarrow R^{n+k}, \psi_t(p) = \psi(t, p)$$

olacak şekilde tanımlanan dönüşüm bir izometridir.

(ii)  $\forall p \in S$  için  $\psi_a(p) = p$

(iii)  $\psi_b, S$  den  $\tilde{S}$  üzerine bir izometridir.

Örnek 4.1.6 de olduğu gibi  $R^4$  uzayında 2 çemberi çıkarılmış 2- tor ve Örnek 4.1.7 de ise  $R^3$  uzayında bir doğrusu çıkarılmış koni, 2- düzlemin parçalarının bükülmesiyle elde edilir [1].

Örnek 4.1.7,  $n$ - boyutlu  $S$  ve  $\tilde{S}$  yüzeyleri için  $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$  dönüşümünün bir lokal izometri olduğunu kontrol etmek için faydalı bir tekniktir.  $p \in S$  için  $\phi : U \rightarrow S$  dönüşümü  $S$  nin  $p$  noktasındaki bir açık kümesinin lokal bir parametrizasyonu olsun. Eğer  $\psi$  bir lokal parametrizasyon ise o zaman  $E_i$  ve  $\tilde{E}_i$  sırasıyla  $\phi$  ve  $\tilde{\phi}$  boyunca  $E_i \cdot E_j = \tilde{E}_i \cdot \tilde{E}_j$  olacak şekilde koordinat vektör alanları olur. Ayrıca  $\tilde{\phi}(U) \subset \tilde{S}$  olacak şekilde  $\tilde{\phi} = \psi \circ \phi$  parametrik bir  $n$ - yüzey olur. Tersine, Eğer  $\forall p \in S$  için  $p \in \phi(U)$  olacak şekilde  $\phi : U \rightarrow S$  dönüşümü varsa o zaman  $\psi$  bir lokal izometridir.

$S$  yüzeyinin intrinsic geometrisinin bir parçası olan geometrik özellikleri izometriler altında invarianttır. Eğrilerin uzunluğunun izometrik invariant olduğu görülebilir. Parametrik bir  $\alpha$  eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart eğrinin sabit hıza sahip ve integral uzunluğu sabit uç nokta varyasyonlarına göre  $\alpha$  da sabit olması ile mümkündür. Böylece geodezikler izometrik invariantlar dır.

Hacim de izometrik invariantsdır. Çünkü parametrik bir  $\varphi$  yüzeyinin,

$$V(\varphi) = \int_U \det(E_i \cdot E_j)^{\frac{1}{2}}$$

hacim integrali sadece koordinat vektör alanlarının iç çarpımına bağlıdır. Diğer taraftan küresel görüntü, asli eğrilikler, ortalama eğrilik, odak noktası ve  $R^{n+1}$  de minimal yüzey olma özellikleri izometrik invariantslar değildir. Örnek 4.1.5 de olduğu gibi böyle özelliklerin hiçbiri izometri altında korunmazlar.

Yukarıdaki düşüncenin tersine  $R^{n+1}$  de  $n-$  yüzeyin asli eğrilikleri izometrilere altında invariants olmamalarına rağmen çift boyutlulardaki çarpımı izometrilere altında invariantsdır.  $n = 2$  için keşfedilen bu duruma "theorema egregium" denir.

Bir eğri boyunca paralel vektör alanı olma özelliği korunur. Bu gerçekler kovaryant türevlerin intrinsic olmasının bir sonucudur [1].

Kovaryant türevi  $R^{n+k}$  daki  $n-$  boyutlu yüzeylere genişletelim.  $R^{n+k}$  da  $n-$  boyutlu bir  $S$  yüzeyi ve parametrik bir  $\alpha : I \rightarrow S$  eğrisi boyunca  $S$  yüzeyine teğet  $X$  diferensiyel vektör alanı verilsin.  $\alpha$  boyunca  $X$  in kovaryant türevi;  $\forall t \in I$  için  $S_{\alpha(t)}$  tanjant uzayı üzerinde  $\dot{X}(t)$  nin  $\alpha$  eğrisi boyunca ortogonal izdüşümüyle elde edilmiş  $S$  yüzeyine teğet  $X'$  vektör alanıdır. Böylece  $X'(t)$ ,  $\dot{X}(t)$  nin yüzey üzerindeki teğetsel bileşenidir.  $p \in S, V \in S_p$  ve  $S \subset R^{n+k}$  olmak üzere  $n-$  boyutlu  $S$  yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir tanjant vektör alanı  $X$  olsun.  $X$  in  $V$  yönündeki  $D_V X$  kovaryant türevi,  $\nabla_V X$  in teğetsel bileşenidir. Yani  $D_V X, \nabla_V X$  in  $\varphi$  yüzeyinin  $\varphi(p)$  noktasındaki tanjant uzayı üzerine ortogonal iz düşümünden ibarettir. Böylece kovaryant türev operatörleri aşağıdaki gibi birbiri ile ilişkili olurlar.

$X, R^{n+k}$  daki  $n-$  boyutlu  $S$  yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir tanjant vektör alanı ve  $\alpha$  da  $S$  de parametrik bir eğri olsun. Yani  $X, \varphi : U \rightarrow R^{n+k}$  parametrik  $n-$  yüzeyi boyunca diferensiyellenebilir tanjant vektör alanı ve  $\alpha$  da  $U$  da parametrik bir eğri olsun. Bu durumda  $\forall t \in I$  için

$$D_{\alpha'(t)} X = (X \circ \alpha)'(t)$$

olur [1].

Eğer  $X, R^{n+k}$  daki  $n$ - boyutlu  $S$  yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanı ve  $\varphi : U \rightarrow S$  parametrik bir  $n$ - yüzey ise o zaman,  $\forall V \in R^{n+1}$  ve  $p \in U$  için,

$$D_{\alpha(t)}X = (X\alpha)'(t)$$

olur.

$R^{n+k}$  daki  $n$ - boyutlu  $S$  yüzeyi üzerinde iki diferensiyellenebilir  $X$  ve  $Y$  tanjant vektör alanları verilsin.  $p \in S$  olmak üzere  $S$  yüzeyi üzerinde  $Y$  nin  $X$  yönündeki kovaryant türevi,

$$(D_X Y)(p) = D_{X(p)}Y$$

olacak şekilde tanımlanan  $D_X Y$  tanjant vektör alanıdır. Benzer şekilde bir

$\varphi : U \rightarrow R^{n+1}$  parametrik  $n$ - yüzeyi boyunca diferensiyellenebilir iki tanjant vektör alanı  $X$  ve  $Y$  olsun.  $p \in U$  için  $\varphi$  boyunca  $D_X Y$  kovaryant türevi;

$$(D_X Y)(p) = D_{d\varphi^{-1}(p)(X(p))}Y$$

olacak şekilde tanımlanan tanjant vektör alanıdır. Kovaryant türev aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i)  $D_{(X+Y)}Z = D_X Y + D_Y Z$
- (ii)  $D_{fX}Y = fD_X Y$
- (iii)  $D_X^{Y+Z} = D_X Y + D_X Z$
- (iv)  $D_X(fY) = (\nabla_X f)Y + fD_X Y$
- (v)  $\nabla_X(Y \cdot Z) = (D_X) \cdot Z + Y \cdot (D_X Z)$

Burada  $X, Y$  ve  $Z, S$  üzerinde (veya  $\varphi$  boyunca) tanjant vektör alanları ve  $f$  de  $S$  üzerinde (veya  $\varphi$  boyunca) diferensiyellenebilir fonksiyondur [1].

**Teorem 4.1.2.**  $\varphi : U \rightarrow R^{n+k}$  dönüşümü parametrik bir  $n$ - yüzey ve  $E_i, i \in \{1, \dots, n\}$  de  $\varphi$  boyunca koordinat vektör alanları olsun. Bu durumda,  $p \in U$  ve  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  için

$$(D_{E_i} E_j) \cdot E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (4.1.1)$$

dir. Burada  $g_{ij} : U \rightarrow R$  fonksiyonu,  $g_{ij} = E_i \cdot E_j$  ile tanımlanır [1].

**İspat.** Önce  $\forall i, j$  için  $D_{E_i}E_j = D_{E_j}E_i$  olduğunu ifade edelim. Gerçekten  $\forall p \in U$  için,

$$E_j(p) = \left( \varphi(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p) \right)$$

ve

$$(\nabla_{E_i}E_j)(p) = \left( \varphi(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$$

dir. İkinci mertebeden kısmi türevlerin simetrik oluşundan,  $(\nabla_{E_i}E_j)(p) = (\nabla_{E_j}E_i)(p)$  eşitliğine sahip oluruz.  $\varphi(p)$  noktasındaki tanjant uzayı üzerine ortogonal izdüşümü alındığında  $D_{E_i}E_j = D_{E_j}E_i$  elde edilir. Bu simetriyi kullanarak  $g_{ik}$  nın kısmi türevleri hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} &= \nabla_{E_j}(E_i \cdot E_k) = (D_{E_j}E_i) \cdot E_k + E_i \cdot (D_{E_j}E_k) \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} &= \nabla_{E_i}(E_j \cdot E_k) = (D_{E_i}E_j) \cdot E_k + E_j \cdot (D_{E_i}E_k) \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= (D_{E_k}E_i) \cdot E_j + E_i \cdot (D_{E_k}E_j) = (D_{E_i}E_k) \cdot E_j + E_i \cdot (D_{E_j}E_k) \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= (D_{E_j}E_i) \cdot E_k + (D_{E_i}E_j) \cdot E_k \\ &= 2(D_{E_i}E_j) \cdot E_k \end{aligned}$$

olur [1]. □

**Sonuç 4.1.1.** Kovaryant türev intrinsic dir.

**İspat.** Bu sonucu,  $\varphi : U \rightarrow R^{n+k}$  parametrik  $n$ - yüzeyi boyunca ispatlamak yeterlidir.  $\varphi$  boyunca diferensiyellenebilir bir  $X$  vektör alanı verilsin.  $X$  vektör alanı  $\varphi$  nin  $E_i$  koordinat vektör alanlarının bir lineer terkibi olarak ifade edebiliriz. Yani;

$$X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$$

yazılabilir. Burada  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $f_i : U \rightarrow R$  dir. Böylece  $p \in U, V \in R_p^n$  için,

$$\begin{aligned} D_V X &= D_V \left( \sum_{i=1}^n f_i E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\nabla_V f_i) E_i(p) + f_i(p) D_V E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( (\nabla_V f_i) E_i(p) + f_i(p) \sum_{j=1}^n v_j D_{E_j(p)} E_i \right) \end{aligned}$$

dir. Burada  $V = (p, v_1, \dots, v_n)$  dir. Bu son ifadedeki terimlerin tamamı  $\phi$  boyuncaki intrinsic geometri bilgisinden hesaplanabilir. Yani,  $D_{E_j(p)} E_i$ , Teorem 4.1.2 daki formülden hesaplanmış olan  $\{(D_{E_j(p)} E_i) \cdot E_k(p)\}$  nin iç çarpımları kümesinden belirlenebilir. Bundan dolayı  $D_V X$  intrinsic dir [1].  $\square$

**Sonuç 4.1.2.** Paralel Vektör alanları intrinsic dir.

**İspat.** Sonuç 4.1.1 den görülebilir. Çünkü,  $X$  in  $\alpha$  boyunca paralel olması için gerek ve yeter şart  $X' = 0$  olmasıdır [1].  $\square$

**Teorem 4.1.3.**  $R^{n+1}$  de  $n$ - boyutlu yönlendirilmiş  $S$  yüzeyinin Gauss kronecker eğriliği  $n$ - çift ise intrinsic dir

**İspat.** Toremin ispatını  $\phi : U \rightarrow S$  parametrik  $n$ - yüzeyi için yapmak yeterlidir.  $\phi$  boyunca diferensiyellenebilir bir  $Z$  tanjant vektör alanı ve  $\phi$  boyunca  $E_j$  koordinat vektör alanları için

$$(\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} Z)(p) = \left( \phi(p), \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right) = (\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} Z)(p)$$

dir. Böylece  $\forall i, j$  için,

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} Z - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} Z = 0$$

olur. Teoremi teğetsel bileşenin sıfır olması gerçeğinden yola çıkarak eşitliğin sol tarafının teğetsel bileşenini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} Z &= \nabla_{E_i} (D_{E_j} Z + ((\nabla_{E_j} Z) \cdot N) N) \\ &= D_{E_i} D_{E_j} Z + ((\nabla_{E_j} Z) \cdot N) \nabla_{E_i} N + (N \text{ nin bir katı}) \\ &= D_{E_i} D_{E_j} Z - (Z \cdot \nabla_{E_j} N) \nabla_{E_i} N + (N \text{ nin bir katı}) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı,  $\forall p \in U$  için

$$\begin{aligned} (\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} Z)(p) &= (D_{E_i} D_{E_j} Z)(p) \\ &- (L_p(E_j(p)) \cdot Z(p)) L_p(E_i(p)) + (N(p) \text{ nin bir katı}) \end{aligned}$$

$i, j$  indislerinin yerlerini değıştirip çıkartmak suretiyle ve teğetsel bileşenin sıfır olması gerçeğinden hareketle

$$\begin{aligned} (D_{E_i} D_{E_j} Z - D_{E_j} D_{E_i} Z)(p) &= (L_p(E_j(p)) \cdot Z(p)) L_p(E_i(p)) \\ &- (L_p(E_i(p)) \cdot Z(p)) L_p(E_j(p)) \end{aligned}$$

eşitliğı elde edilir.

$\forall i, j$  için eşitliğın sol tarafı intrinsic olduğı için sağı tarafı da intrinsic dir.  $L_p$  nin lineerliğinden dolayı  $p \in S$  ve  $x, y, z \in S_p$  için

$$R(x, y, z) = [L_p(y) \cdot z] L_p(x) - [L_p(x) \cdot z] L_p(y)$$

şeklinde tanımlı  $R(x, y, z) \in S_p$  vektörü de intrinsic dir. Burada  $R(x, y, z)$  vektörü  $S$  nin Riemann tensörüdür ve  $R, S$  nin intrinsic geometrisine aittir.

Eğer  $n = 2$  ve  $\{e_1, e_2\}$  de  $p \in S$  olmak üzere  $S_p$  nin bir ortonormal bazı ise, o zaman  $S$  nin  $p$  noktasındaki  $K(p)$  Gauss eğriliğı,

$$\begin{aligned} K(p) = \det L_p &= [L_p(e_1) \cdot e_1][L_p(e_2) \cdot e_2] \\ &- [L_p(e_2) \cdot e_1][L_p(e_1) \cdot e_2] \\ &= R(e_2, e_1, e_1) \cdot e_2 \end{aligned}$$

şeklinde olup intrinsicdir.

Eğer  $n > 2$  fakat  $n$  çift ve  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $S_p$  nin bir ortonormal bazı ise, o zaman

$$K(p) = \det L_p = \det [L_p(e_j) \cdot e_i]$$

determinantının  $2 \times 2$  minörlerinin cinsinden açılımı

$$\begin{aligned} K(p) &= ((-1)^{\frac{n}{2}} / 2^n n!) \sum_{\sigma, \tau} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) [R(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(1)}) \cdot e_{\sigma(2)}] \dots \\ &\dots [R(e_{\sigma(n-1)}, e_{\sigma(n)}, e_{\tau(n-1)}) \cdot e_{\tau(n)}] \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada toplam,  $\{1, \dots, n\}$  in bütün  $\sigma$  ve  $\tau$  perütsyonları üzerindedir.  $\varepsilon(\sigma)$ ,  $\sigma$  permütasyonun işaretini belirtir. Dolayısıyla  $n$  çift iken  $K$  intrinsic dir [1].  $\square$

## 4.2 Riemann Metrikler

$n$  boyutlu  $S$  yüzeyinin intrinsic geometrik özellikleri sadece  $S$  ye teğet vektörlerin iç çarpımlarına ve  $S$  deki parametrik eğriler boyunca  $S$  ye teğet vektör alanlarının iç çarpımları olarak elde edilmiş fonksiyonların türevlerine bağlıdır. Diğer bir deyişle,  $p \in S$  olmak üzere  $\forall S_p$  tanjant uzayı üzerinde iç çarpım verildiğinde  $S$  nin intrinsic geometrisi,  $S$  nin  $R^{n+1}$  deki yerine bağlı olmaksızın çalışılabilir.  $\forall S_p$  üzerinde bir iç çarpım verilmesi durumunda  $S$  deki eğrilerin uzunlukları;  $S$  nin hacmi,  $S$  de geodezikler,  $S$  de eğriler boyunca paralel vektör alanları ve  $S$  nin Gauss eğriliği ( $n$  çift olması durumunda)  $S$  nin  $R^{n+1}$  de nasıl eğrildiğine bakılmaksızın hesaplanabilir. Aslında,  $\forall S_p$  tanjant uzayı üzerinde  $R^{n+1}$  den gelen birbirinden farklı iç çarpımlar verildiğinde intrinsic hesaplamalar yine de yapılabilir. Fakat hesaplamaların sonuçları kullanılan iç çarpımlara bağlı olur. Bulduğumuz bu geometri genellikle bilinen geometriden oldukça farklı olacaktır. Böyle iç çarpımlardan elde edilmiş olan bu geometriye **Riemann geometri** denir.  $S_p$  üzerinde kendisinden geometri türetilen bütün iç çarpımların koleksiyonu bir **Riemann metrik** olarak adlandırılır [1].

**Tanım 4.2.1.** Bir  $S$  yüzeyi üzerindeki bir Riemann metrik,  $S_p$  deki vektörlerin her bir  $\{V, W\}$  çiftine  $g(V, W)$  reel sayısını karşılık getiren bir fonksiyondur. Bu fonksiyon

$\forall V, W, X \in S_p, p \in S$  ve  $\lambda \in R$  için aşağıdaki şartları sağlar.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad g(V, W) &= g(W, V) \\
 (ii) \quad g(V + W, X) &= g(V, X) + g(W, X) \\
 g(V, W + X) &= g(V, W) + g(V, X) \\
 (iii) \quad g(\lambda V, W) &= \lambda g(V, W) \\
 g(V, \lambda W) &= \lambda g(V, W) \\
 (iv) \quad g(V, V) &\geq 0, \\
 g(V, V) &= 0 \Leftrightarrow V = 0
 \end{aligned}$$

$S$  nin bir  $U$  açık alt kümesi üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir tanjant vektör alanlarının  $\forall \{X, Y\}$  çifti için,

$$[g(X, Y)](p) = g(X(p), Y(p))$$

olacak şekilde tanımlanan

$$g(X, Y) : U \rightarrow R$$

fonksiyonu diferensiyellenebilirdir.

(i) – (iv) özellikleri iç çarpımın bilinen özellikleridir. Aslında verilen  $g$  fonksiyonu  $\forall S_p$  uzayı üzerinde  $V \cdot W = g(V, W)$  olacak şekilde bir iç çarpım olarak tanımlanabilir.  $g$  nin diferensiyellenebilir özelliği,  $(S, g)$  nin geometrisini araştırmayı ve diferensiyel hesaplamaları yapabilmeyi garantiler [1].

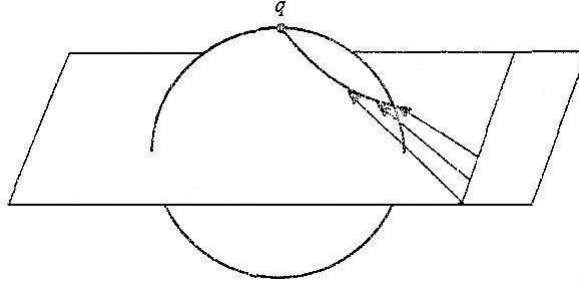
**Örnek 4.2.1.**  $S, R^{n+k}$  da  $n$  boyutlu bir yüzey olsun.  $p \in S$  ve  $V, W \in S_p$  için  $g(V, W) = V \cdot W$  ile tanımlanmış  $g(V, W), R^{n+k}$  da vektörlerin alışılmış iç çarpımı olsun. O halde  $g$  metriği,  $S$  üzerinde bir Riemann metriktir. Bu şekilde tanımlanmış  $g$  metriğine  $S$  üzerinde alışılmış metrik denir [1].

**Örnek 4.2.2.** Bir  $\psi : S^n - \{q\} \rightarrow R^n$  dönüşümü,  $R^{n+1}$  deki  $q$  kutup noktası çıkarılmış  $S^n$  birim küresinden  $R^n \subset R^{n+1}$  ekvatorial hiperdüzlemi üzerine stereografik izdüşümü gösterebilir.  $S^n - \{q\}$  üzerinde tanımlı bir Riemann metrik,

$$g(V, W) = d\psi(V) \cdot d\psi(W) \quad (V, W \in S_p^n, p \in S^n - \{q\})$$

ile tanımlanır. Burada sağ taraftaki iç çarpım,  $R^n_{\psi(p)}$  de alışılmış iç çarpım dır. Böylece  $S^n - \{q\}$  üzerindeki  $g$  metriği  $R^n$  deki alışılmış metrik cinsinden  $\psi$  izometrisi yardımıyla belirlenir.  $\psi$  dönüşümü bir izometri olup ve yüzeyin bütün intrinsic özellikleri koruyacağından aşağıdaki sonuçlara varırız.

(i)  $(S^n - \{q\}, g)$  nin geodezikleri,  $R^n$  nin geodeziklerinin  $\phi = \psi^{-1}$  izometrisi altındaki görüntüleri olur (şekil 4.2.1). Dolayısıyla  $(S^n - \{q\}, g)$  deki maksimal geodeziklerin ailesi,  $S^n$  nin üzerindeki  $q$  noktasından geçen  $q$  noktası çıkarılmış çemberlerin ailesinden ibarettir.



Şekil 4.2.1

(ii) Küre üzerindeki  $\lim_{t \rightarrow b} \alpha(t) = q$  olacak şekilde her parametrik  $\alpha : (a, b) \rightarrow S^n - \{q\}$  eğrisinin uzunluğu sonsuz olur. Çünkü böyle her  $\alpha$  için  $\ell(\psi \circ \alpha) = \infty$  olur.

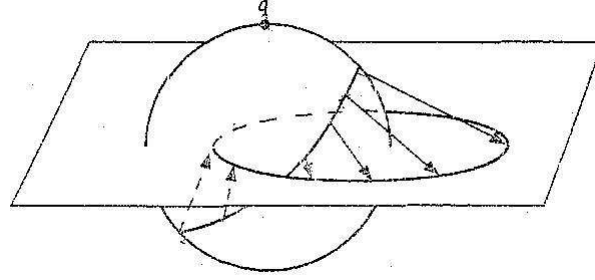
(iii)  $n$  çift olmak üzere  $(S^n - \{q\}, g)$  nin  $K$  Gauss eğriliği özdeş bir şekilde sıfır olur [1].

**Örnek 4.2.3.** Bir  $\phi : R^n \rightarrow S^n$  dönüşümü  $S^n$  birim küresinin kuzey kutbu  $q$  dan ekvatorial hiperdüzlemine stereografik izdüşümünün tersini belirtsin.  $R^n$  üzerindeki  $g$  Riemann metriği,

$$g(V, W) = d\phi(V) \cdot d\phi(W) \quad (V, W \in R^n, p \in R^n)$$

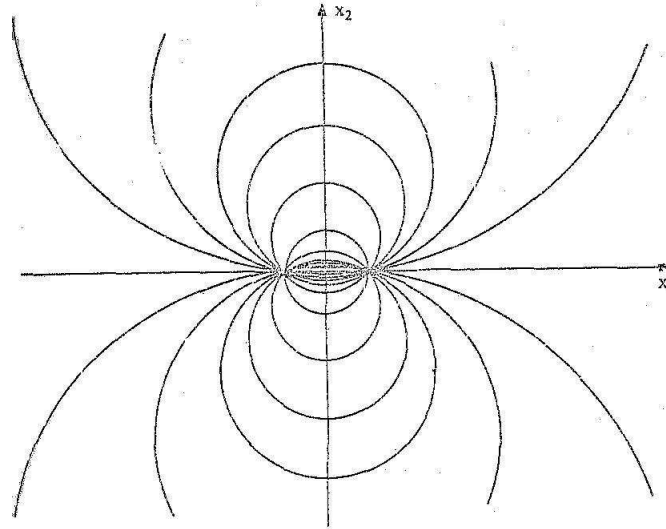
ile tanımlansın. Burada sağ taraftaki iç çarpım  $S^n_{\phi(p)} \subset R^{n+1}_{\phi(p)}$  de alışılmış iç çarpımdır. Böylece  $\phi$  dönüşümü,  $(R^n, g)$  dan alışılmış metrikli  $S^n - \{q\}$  ya bir izometridir.  $\phi$  nin bir izometri olduğu gerçeğinden hareketle (i) ve (ii) sonuçlarına varırız.

(i)  $(R^n, g)$  nin geodezikleri,  $S^n$  nin geodeziklerinin  $\psi = \varphi^{-1}$  izometrisi altındaki görüntüleri olur (şekil 4.2.2). Orijinden yayılan maksimal geodezikler  $R^n$  de doğrular olur [1].



Şekil 4.2.2

Böyle geodeziklerin herbiri  $g$  metrine bağlı  $(2\pi)$  sonlu uzunluğa sahip olur. Uygun bir şekilde parametrize edilmiş böyle geodeziklerin herbiri  $2\pi$  periyodu ile periyodik olurlar (şekil 4.2.3) [1].



Şekil 4.2.3

(ii)  $n$  çift olması halinde  $(R^n, g)$  nin  $K$  Gauss eğriliği sabit olup 1 e eşittir [1].

En ilginç Riemann metrikler alışılmış metrikler için söz konusu olan izometrilere ilgili değildir. Bunların en önemlilerinden biri olan  $R^2$  de birim disk üzerindeki hiperbolik metriği düşünelim. Bu metrik  $R^n$  üzerinde Stereografik metrikler tarafından ileri sürülmüştür.

$R^{n+1}$  de  $r > 0$  olmak üzere  $n$  boyutlu  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$  birim küresi  $S$  olsun.  $S^n$  birim küresiyle  $R^n$  de bir Riemann metriği tanımlamak için Stereografik izdüşüm ile birlikte  $n$  boyutlu  $S$  küresi üzerinde alışılmış metrik kullanılabilir. Bu metrik için bir esas formül türetilebilir.  $p \in R^n$  için  $S$  de kuzey kutbu  $q = (0, \dots, 0, r)$  ve  $(p, 0)$  boyunca  $\alpha(t) = (tp, (1-t)r)$  doğrusudur. Bu doğru  $\|\alpha(t)\|^2 = r^2$  yani  $t = \frac{2r^2}{(\|p\|^2 + r^2)}$  olduğu zaman  $S$  yi keser. Bundan dolayı  $X_{n+1} = 0$  hiperdüzlemi üzerine Stereografik izdüşümün tersi olan

$$\varphi : R^2 \rightarrow S$$

dönüşümü

$$\varphi(p) = \frac{(2r^2 p, r(\|p\|^2 - r^2))}{(\|p\|^2 + r^2)} \quad (4.2.1)$$

ile verilmiştir.  $V = (p, v) \in R_p^n$  ve  $p \in R^n$  için

$$\begin{aligned} d\varphi(V) &= (\varphi(p), \frac{d}{dt} \big|_0 \varphi(p + tv)) \\ &= \left( \frac{2r^2}{(\|p\|^2 + r^2)^2} \right) (\varphi(p), (\|p\|^2 + r^2)v - 2(p \cdot v)p, 2r(p \cdot v)) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olur. Bundan dolayı  $V, W \in R_p^n$  için

$$d\varphi(V) \cdot d\varphi(W) = \frac{4}{(1 + (\frac{\|p\|^2}{r^2}))^2} V \cdot W \quad (4.2.3)$$

olur. Böylece ekvatorial hiperdüzleminde Stereografik izdüşüm yolu ile yarıçapı  $r$  olan  $S$  küresi üzerinde alışılmış metrikten elde edilmiş  $R^n$  üzerinde  $g$  Riemann metriği,

$$g(V, W) = \frac{4}{(1 + (\frac{\|p\|^2}{r^2}))^2} V \cdot W \quad (V, W \in R_p^n, p \in R^n) \quad (4.2.4)$$

ile verilir. Burada eşitliğin sağ tarafı  $R_p^n$  üzerinde alışılmış iç çarpımdır.  $n = 2$  olduğu zaman yukarıdaki eşitlik

$$g(V, W) = \frac{4}{(1 + K\|p\|^2)^2} V \cdot W \quad (V, W \in R_p^2, p \in R^2) \quad (4.2.5)$$

olur. Burada  $K = \frac{1}{r^2}$ ,  $(R^2, g)$  nin Gauss eğriliğidir. Çünkü  $\frac{1}{r^2}$ ,  $S$  nin Gauss eğriliği ve  $\varphi$  bir izometridir [1].

Yukarıdaki tartışmadan  $R^2$  üzerinde bir  $g$  Riemann metriği sabit Gauss eğriliği  $K > 0$  olmak üzere (4.2.5) den elde edilebilir.

Eğer (4.2.5) de  $K = 0$  alınırsa o zaman  $R^2$  üzerinde alışılmış metriğin bir sabit katı elde edilir.

Eğer (4.2.5) de  $K < 0$  olacak şekilde bir sabit alınırsa, o zaman  $(R^2, g)$  nin sabit  $K < 0$  Gauss eğriliğine sahip olduğu bulunabilir. (4.2.5) eşitliği  $R^2$  üzerinde olmayan fakat sadece  $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{|K|}\}$  diski üzerinde bir Riemann metriği tanımlar ve bu gerçektende beklenen bir durumdur [1].

**Teorem 4.2.1.**  *$K$  negatif bir reel sayı olsun.*

*Ayrıca  $U = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{|K|}\}$  olmak üzere  $g, U$  üzerinde*

$$g(V, W) = \frac{4}{(1 + K\|p\|^2)^2} V \cdot W \quad (V, W \in R_p^2, p \in U)$$

*olacak şekilde tanımlı Riemann metriği olsun. Burada eşitliğin sağ tarafındaki iç çarpım  $R_p^2$  de alışılmış iç çarpımdır. Bu durumda  $(U, g)$ ,  $K < 0$  sabit bir Gauss eğriliğine sahip olur [1].*

**İspat.**  $\forall V, W \in R_p^2, p \in U$  için  $g(V, W) = (\frac{1}{(h(p))^2}) V \cdot W$

olacak şekilde,

$$h : U \rightarrow R$$

$$h(p) = \frac{1}{2}(1 + K\|p\|^2)$$

tanımlanmış olsun. Teorem 4.1.2 nin intrinsic formüllerini kullanarak  $h$  fonksiyonu ve onun türevleri cinsinden  $(U, g)$  nin Gauss eğriliği için bir formül türeteceğiz.  $U$  nun

özdeşlik dönüşümü  $p \in U$  için  $U$  nun koordinat vektör alanları  $E_1(p) = (p, 1, 0)$  ve  $E_2(p) = (p, 0, 1)$  olacak şekilde  $U$  nun bir global parametrizasyonudur.  $g$  nin  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  metrik katsayıları,

$$\begin{aligned} g_{11} &= g(E_1, E_1) = \frac{1}{h^2}, & g_{12} &= g(E_1, E_2) = 0 \\ g_{21} &= g(E_2, E_1) = 0, & g_{22} &= g(E_2, E_2) = \frac{1}{h^2} \end{aligned}$$

ile verilir. Böylece Teorem 4.1.2 den

$$\begin{aligned} g((D_{E_1}E_1), E_1) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_1}, & g((D_{E_1}E_1), E_2) &= \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ g((D_{E_1}E_2), E_1) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_2}, & g((D_{E_1}E_2), E_2) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ g((D_{E_2}E_1), E_1) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_2}, & g((D_{E_2}E_1), E_2) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ g((D_{E_2}E_2), E_1) &= \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_1}, & g((D_{E_2}E_2), E_2) &= -\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{aligned}$$

bulunur.  $\{E_1, E_2\}$ ,  $g(g_{12} = g(E_1, E_2) = 0)$  metriğine göre ortogonal olduğundan  $U$  üzerindeki her bir  $X$  vektör alanı

$$f_1 = \left(\frac{1}{g_{11}}\right)g(X, E_1) \quad \text{ve} \quad f_2 = \left(\frac{1}{g_{22}}\right)g(X, E_2)$$

olmak üzere

$$X = f_1 E_1 + f_2 E_2$$

ile ifade edilebilir. Özellikle,

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_1 &= -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} E_1 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} E_2 \\ D_{E_1}E_2 &= D_{E_2}E_1 = -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} E_1 - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} E_2 \\ D_{E_2}E_2 &= \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} E_1 - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} E_2 \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.1.2 de türetilmiş Gauss eğriliği için intrinsic formülüne göre  $(U, g)$  nin

Gauss eğriliğinin

$$\begin{aligned}
& g\left(R\left(\frac{E_2}{\|E_2\|}, \frac{E_1}{\|E_1\|}, \frac{E_1}{\|E_1\|}\right), \frac{E_2}{\|E_2\|}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\|E_1\|^2\|E_2\|^2}\right)g(R(E_2, E_1, E_1), E_2) \\
&= \left(\frac{1}{g_{11}g_{22}}\right)g(D_{E_2}D_{E_1}E_1 - D_{E_1}D_{E_2}E_1, E_2) \\
&= \left(\frac{1}{g_{11}g_{22}}\right)g\left(D_{E_2}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}E_1 + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}E_2\right) - D_{E_1}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}E_1 - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}E_2\right), E_2\right) \\
&= h\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right) - \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu görülür.

Sonuç olarak  $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1 + K(x_1^2 + x_2^2))$  olduğu için  $(U, g)$  nin Gauss eğriliği kesinlikle  $K$  olduğu görülür [1].  $\square$

$K = -1$  iken Teorem 4.2.1,

$$g(V, W) = \frac{4V \cdot W}{(1 - \|p\|^2)^2}$$

olacak şekilde tanımlı  $R^2$  de  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  birim diski üzerinde sabit Gauss eğriliği  $-1$  olan bir  $g$  Riemann metriği tanımlar. Bu metrik **hiperbolik metrik** olarak adlandırılır. Eğer kompleks değişkenli fonksiyon teorisindeki kavramları kullanmak zorunlu değilse bu metriği kullanmak görüş sahibi olmak için anlamlıdır. Burada üst yarı düzlemde ilgili metriği kullanacağız.

$p = (x, y) \in R^2$  için  $y > 0$  ve  $V, W \in R_p^2$  olmak üzere

$$g(V, W) = \frac{V \cdot W}{y^2}$$

olarak tanımlansın. Burada sağ taraftaki iç çarpım  $R_p^2$  üzerinde alışılmış iç çarpımdır. Şu halde  $g$  metriği  $U = \{(x, y) \in R^2 : y > 0\}$  üst yarı düzlemi üzerinde bir Riemann metriktir.

Bu metriğe  $U$  üzerinde **poincare metriği** denir. Burada  $(U, g)$  nin Gauss eğriliği sabit ve  $-1$  dir. Bu nedenle  $h(x_1, x_2) = x_2$  alınırsa,  $V, W \in R_p^2$  ve  $p \in U$  olmak üzere

$$g(V, W) = \left(\frac{1}{h(p)^2}\right)V \cdot W$$

eşitliğine sahip oluruz. Dolayısıyla Teorem 4.2.1 nin ispatı gibi Gauss eğriliği

$$K = h \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right) - \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^2 \right) = -1$$

olarak bulunur [1].

Aşağıdaki  $\psi : U \rightarrow U$  dönüşümlerinin herbiri poincare metriği ile birlikte  $U$  üst yarı düzleminden kendi üzerine bir izometridir.

$$(i) \quad \psi(x, y) = (x + \lambda, y), \quad \lambda \text{ keyfi bir reel sayıdır.}$$

$$(ii) \quad \psi(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \text{ keyfi bir pozitif reel sayıdır.}$$

$$(iii) \quad \psi(x, y) = (-x, y)$$

$$(iv) \quad \psi(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Gerçekten de  $V, W \in R_p^2$  ve  $p \in U$  olmak üzere (i) veya (iii) deki gibi tanımlanmış  $\psi$  için

$$\begin{aligned} g(d\psi(V), d\psi(W)) &= \frac{d\psi(V) \cdot d\psi(W)}{y^2} \\ &= \frac{V \cdot W}{y^2} \\ &= g(V, W) \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz. (ii) deki gibi tanımlanmış  $\psi$  dönüşümü için,

$$\begin{aligned} g(d\psi(V), d\psi(W)) &= \frac{d\psi(V) \cdot d\psi(W)}{(\lambda y)^2} \\ &= \frac{\lambda V \cdot \lambda W}{\lambda^2 y^2} \\ &= \frac{V \cdot W}{y^2} \\ &= g(V, W) \end{aligned}$$

eşitliği bir izometri için geçerlidir.

$E_1(x, y) = (x, y, 1, 0)$  ve  $E_2(x, y) = (x, y, 0, 1)$  olmak üzere (iv) deki gibi tanımlanmış  $\psi$  dönüşümü için,

$$\begin{aligned} d\psi(E_1(x, y)) &= \left( \psi(x, y), \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ d\psi(E_2(x, y)) &= \left( \psi(x, y), \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz. Böylece,

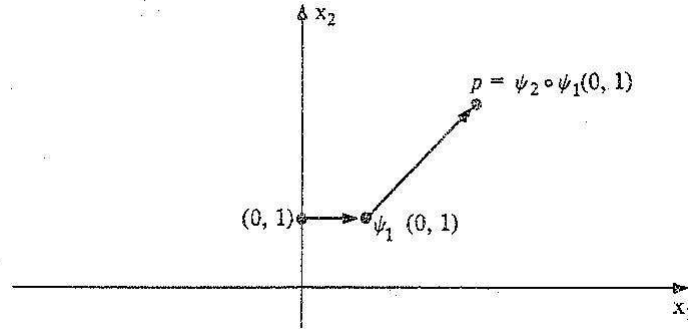
$$\begin{aligned} g(d\psi(E_i(x,y)), d\psi(E_i(x,y))) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} / \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{y^2} \\ &= g(E_i(x,y), E_i(x,y)) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.  $i = 1$  veya  $i = 2$  için

$$g(d\psi(E_1(x,y)), d\psi(E_2(x,y))) = 0 = g(E_1(x,y), E_2(x,y))$$

olur. Böylece  $d\psi$  dönüşümü baz vektörlerin iç çarpımını korur. Dolayısıyla bir izometri-den beklenildiği gibi bütün vektör çiftlerinin de iç çarpımını korur [1].

(i) ve (ii) dönüşümlerinin izometrilere olduğu gerçeğinin bir sonucu;  $S^n$  in geometrisi,  $S^n$  in her noktasında  $p = (0, 0, 1)$  kuzey kutbundan görüldüğü gibidir.  $U$  nun poicare metriğine göre geometrisi her noktasında  $(0, 1)$  noktasında görüldüğü gibidir. Bu durum  $U$  nun herhangi bir  $p$  noktası için  $\psi_2 \circ \psi_1$  izometrisinin varolmasından dolayıdır. Burada  $\psi_1$ , (i) tipinde bir izometri,  $\psi_2$  de (ii) tipinde bir izometridir.  $\psi_2 \circ \psi_1$  izometrisi  $(0, 1)$  noktasını  $p$  üzerine gönderir (şekil 4.2.4).



Şekil 4.2.4

Özellikle  $U$  nun bütün noktaları,  $U$  nun  $x_1$  eksenine aynı uzaklıkta kalır. Bu şartırtıcı olay, böyle uzaklıkların sonsuz olduğu  $g$  metriğinin geometrik gerçeğindedir. Örneğin, eğer  $\alpha(t) = (0, 1 - t)$  ile tanımlanmış  $\alpha : [0, 1) \rightarrow U$  eğrisinin poicare metriği ile ilişkili

uzunluğunu hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_0^1 (g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-t} dt = \infty \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz.

Yukarıdaki (i)-(iv) dönüşümleri poincare metriğiyle ilişkili  $U$  da tanımlı geodeziklerin aynı zamanda izometrilere olduğunu belirtir [1].

**Teorem 4.2.2.**  $U, \mathbb{R}^2$  de bir açık küme olmak üzere  $U$  da bir Riemann metrik  $g$  ve  $\psi : U \rightarrow U$  dönüşümü  $(U, g)$  nin bir izometrisi olsun. Varsayalım ki  $\psi$  nin  $F = \{p \in U : \psi(p) = p\}$  sabit nokta kümesi bağlantılı bir düzlem eğrisi olsun. O zaman  $F$  nin görüntüsü  $(U, g)$  nin bir geodeziktir [1].

**İspat.**  $\alpha : I \rightarrow F$ ,  $F$  nin birim hızlı  $(g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = 1)$  bir global parametrizasyonu olsun.  $\alpha$  nın bir geodezik olduğunu göstereceğiz.

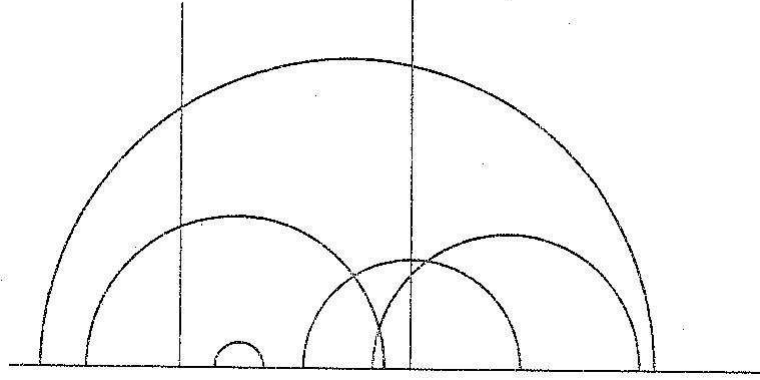
$\forall t \in I$  için  $\alpha$  nın  $t_0$  komşuluğundaki bazı açık aralıklarda geodezik olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için  $t_0 \in I$ ,  $V = \dot{\alpha}(t_0)$  ve  $V$  ilk hızlı  $(U, g)$  nin maksimal geodeziği  $\alpha_V$  olsun.  $\forall t \in I$  için  $t - t_0$ ,  $\alpha_V$  nin bölgesinde olacak şekilde  $\alpha(t) = \alpha_V(t - t_0)$  olduğunu göstereceğiz.

Önce  $\alpha_V$  nin görüntüsünün  $F$  nin alt kümesi olduğunu not edelim. Çünkü  $\psi$  bir izometri olduğu için  $\psi \circ \alpha_V$ ,  $V$  ilk hızlı bir geodeziktir. Böylece  $\psi \circ \alpha_V$  ve  $\alpha_V$  aynı ilk hızlı geodeziklerdir. Geodeziklerin tekliliğinden dolayı  $\psi \circ \alpha_V = \alpha_V$  olur. Böylece  $\alpha_V$  nin görüntüsü  $F$  nin alt kümesi olur.

$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}_V(0)$  ile  $F$  de birim hızlı eğriler olacak şekilde  $\alpha$  ve  $\alpha_V$ ,  $F$  üzerinde aynı birim tanjant vektör alanının integral eğrileridir. İntegral eğrilerin tekliliğinden  $t_0$  komşuluğundaki  $\{t \in I : t - t_0 \in \alpha_V\}$  aralığında  $\forall t$  için  $\alpha(t) = \alpha_V(t - t_0)$  olur. Bu da gösterir ki bu aralıkta  $\alpha$  nın kısıtlanması bir geodeziktir. Keyfi  $t_0 \in I$  için  $\alpha$  bir geodeziktir [1]. □

**Sonuç 4.2.1.** Poincare metriği ile ilişkili  $U$  üst yarı düzlem üzerindeki geodezikler,

- (i) dikey çizgiler,  
(ii) Merkezi  $x_1$  ekseninde bulunan yarı çemberler (şekil 4.2.5)  
olarak parametrize edilir.



Şekil 4.2.5

**İspat.** 4.2.2 Teoremini  $\psi(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$  izometrisine uygulayarak  $x_2 > 0$  olmak üzere,  $x_1 = 0$  doğrusu uygun bir şekilde parametrize edilmiş olarak geodeziktir. Benzer şekilde  $\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)}, \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)}\right)$  izometrisinden görülür ki  $x_2 > 0$  olmak üzere  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  yarı çemberi uygun bir şekilde parametrize edilmiş olarak bir geodeziktir. Çünkü  $U$  da her dikey doğru  $\psi(x_1, x_2) = (x_1 + \lambda, x_2)$  izometrisi altında  $x_2 > 0$  olmak üzere  $x_1 = 0$  doğrusunun görüntüsüdür. Bunu takiple  $U$  da her dikey doğru bir geodeziktir. Benzer bir şekilde orijin merkezli  $U$  daki her yarı çember  $x_2 > 0$  ve  $\lambda > 0$  olmak üzere  $\psi(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$  izometrisi altında  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  yarı çemberinin görüntüsüdür. Böylece yarı çemberler geodeziklerdir. Sonuçta merkezi  $x_1$  ekseninde bulunan  $U$  da her yarı çember,  $\psi(x_1, x_2) = (x_1 + \lambda, x_2)$  izometrisi altında orijin merkezli  $U$  daki bir yarı çemberin görüntüsüdür.

Poincare metriği ile ilişkili  $U$  da her geodezik bu aileye ait olmalı. Çünkü  $U$  nun verilen herhangi  $p$  noktasında geçen  $V$  yönünde tanjant vektörü için bu ailede bir geodezik vardır [1].

□

## KAYNAKLAR

- [1] Thorpe J.A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Academic Press, 1979.
- [2] Sabuncuođlu Arif., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın ve Dağıtım, 2004.
- [3] Hacisalihođlu H.H. , *Diferensiyel Geometri*, Cilt 2,A.Ü.Fen Fakóltesi, Ankara, 1994.
- [4] F.Akbulut, *Vektörel Analiz*, Ege Üniversitesi Fen Fakóltesi Kitaplar Serisi No:25
- [5] De Carmo, M.P., *Diferantial Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey 1976.
- [6] O'Neill Barrett, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1997.
- [7] De Carmo,M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1972.
- [8] Hacisalihođlu H.H. , *Diferensiyel Geometri Problemleri*, Cilt 2,A.Ü.Fen Fakóltesi, Ankara, 1996.
- [9] Hacisalihođlu H.H. , *İki ve Üç Boyutlu uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere*,A.Ü.Fen Fakóltesi, Ankara, 1998.

## ÖZGEÇMİŞ

Selahattin Beyendi: 1974 yılında Adıyaman'ın Kahta ilçesinde doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladıktan sonra 1995 yılında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliği bölümünü kazanmış, 1996 yılında İnönü Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümüne yatay geçiş yapmış ve 1999 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl Malatyanın Arguvan İlçesi Koyuncu İlköğretim Okulunda görev yapmıştır. 2002 yılında Malatya Merkez Cengiz Topel İlköğretim Okuluna atanmıştır. 2006 yılında İnönü Üniversitesi Fen bilimleri Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalının yüksek lisans programına başvurmuş ve programa kabul edilmiştir. Evli ve iki çocuk babasıdır.