

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU  
ELEMEN YÖNTEMİYLE DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW)  
DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hatice YILDIRIM**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR**

**KASIM 2020**

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU  
ELEMEN YÖNTEMİYLE DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW)  
DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hatice YILDIRIM  
(13616140012)**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR**

**KASIM 2020**

## TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, ayrıca tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğün üstesinden gelmem için bana yol gösteren bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim hocalarım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, Prof. Dr. Kemal ÖZDEMİR'e, Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya ve eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bu süreçte büyük motivasyon veren değerli aileme ve eşim Mehmet YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



## ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığıın bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hatice YILDIRIM



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	xi
ÖZET.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR.....</b>	<b>4</b>
2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	4
2.1.1 Kollokasyon Yöntemi.....	6
2.2 Kübik Trigonometrik B-spline Fonksiyonlar.....	8
<b>3. DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİ.....</b>	<b>11</b>
3.1 Giriş.....	11
3.2 Model Problemler.....	13
3.2.1 Problem 1: Tek Dalga Hareketi.....	13
3.2.2 Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi.....	14
3.2.3 Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi.....	14
3.2.4 Problem 4: Dalga Oluşumu.....	15
<b>4. RLW DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ.....</b>	<b>16</b>
4.1 Lineerleştirme-1 (LİN-1).....	16
4.1.1 Kararlılık Analizi.....	22
4.1.2 Nümerik Sonuçlar.....	24
4.2 Lineerleştirme -2 (LİN-2).....	44
4.2.1 Nümerik Sonuçlar.....	49
4.3 Lineerleştirme -3 (LİN-3).....	66
4.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	71
4.4 Lineerleştirme -4 (LİN-4).....	88
4.4.1 Nümerik Sonuçlar.....	93
4.5 Lineerleştirme-5 (LİN-5).....	110
4.5.1 Nümerik Sonuçlar.....	120
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>136</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>139</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>142</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 4.1</b> : Tek dalga hareketinin $t = 0, 10$ ve $20$ zamanlarındaki grafiği ve $t = 20$ zamanındaki mutlak hata grafiği.....	30
<b>Şekil 4.2</b> : İki soliter dalga girişiminin $t = 0, 100, 200, 300$ ve $400$ zamanlarındaki grafiği.	33
<b>Şekil 4.3</b> : Ardışık dalga gelişiminin $d = 2$ eğimi ve $t = 0, 50, 100, 150, 200$ ve $250$ zamanlarındaki grafiği. ....	41
<b>Şekil 4.4</b> : Ardışık dalga gelişiminin $d = 5$ eğimi ve $t = 0, 50, 100, 150, 200$ ve $250$ zamanlarındaki grafiği. ....	43
<b>Şekil 4.5</b> : Dalga oluşumunun $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ olmak üzere $\mu = 0.04$ , $\mu = 0.01$ ve $\mu = 0.001$ değerleri için $t = 25$ zamanındaki grafikleri.....	44



## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 4.1</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).....	27
<b>Çizelge 4.2</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).....	27
<b>Çizelge 4.3</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).....	28
<b>Çizelge 4.4</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).....	28
<b>Çizelge 4.5</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).....	29
<b>Çizelge 4.6</b> : LİN-1 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).....	29
<b>Çizelge 4.7</b> : LİN-1 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ). .....	31
<b>Çizelge 4.8</b> : LİN-1 ile Problem 2'nin $h = 0.12$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ). .....	32
<b>Çizelge 4.9</b> : LİN-1 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.12$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ). .....	33
<b>Çizelge 4.10:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 2, \Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	35
<b>Çizelge 4.11:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 2, h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	36
<b>Çizelge 4.12:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 5, \Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	37
<b>Çizelge 4.13:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 5, h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	38
<b>Çizelge 4.14:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 2, \Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	39
<b>Çizelge 4.15:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 2, \Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	39
<b>Çizelge 4.16:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 5, \Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	40
<b>Çizelge 4.17:</b> LİN-1 ile Problem 3'ün $d = 5, \Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ). .....	40

<b>Çizelge 4.18:</b> LİN-1 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).	42
<b>Çizelge 4.19:</b> LİN-1 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).	43
<b>Çizelge 4.20:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	52
<b>Çizelge 4.21:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	52
<b>Çizelge 4.22:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	53
<b>Çizelge 4.23:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	53
<b>Çizelge 4.24:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	54
<b>Çizelge 4.25:</b> LİN-2 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).	54
<b>Çizelge 4.26:</b> LİN-2 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).	56
<b>Çizelge 4.27:</b> LİN-2 ile Problem 2'nin $h = 0.12$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).	57
<b>Çizelge 4.28:</b> LİN-2 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.12$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).	58
<b>Çizelge 4.29:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	59
<b>Çizelge 4.30:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	60
<b>Çizelge 4.31:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	61
<b>Çizelge 4.32:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	62
<b>Çizelge 4.33:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	63
<b>Çizelge 4.34:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	63
<b>Çizelge 4.35:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).	64

<b>Çizelge 4.36:</b> LİN-2 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	64
<b>Çizelge 4.37:</b> LİN-2 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).....	65
<b>Çizelge 4.38:</b> LİN-2 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).....	66
<b>Çizelge 4.39:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	73
<b>Çizelge 4.40:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	74
<b>Çizelge 4.41:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	74
<b>Çizelge 4.42:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	75
<b>Çizelge 4.43:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	75
<b>Çizelge 4.44:</b> LİN-3 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	76
<b>Çizelge 4.45:</b> LİN-3 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	77
<b>Çizelge 4.46:</b> LİN-3 ile Problem 2'nin $h = 0.12$ ve $\Delta t$ nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	78
<b>Çizelge 4.47:</b> LİN-3 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.12$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	79
<b>Çizelge 4.48:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	80
<b>Çizelge 4.49:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	81
<b>Çizelge 4.50:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	82
<b>Çizelge 4.51:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	83
<b>Çizelge 4.52:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	84
<b>Çizelge 4.53:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	84

<b>Çizelge 4.54:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	85
<b>Çizelge 4.55:</b> LİN-3 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	85
<b>Çizelge 4.56:</b> LİN-3 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).....	87
<b>Çizelge 4.57:</b> LİN-3 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).....	88
<b>Çizelge 4.58:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	96
<b>Çizelge 4.59:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	96
<b>Çizelge 4.60:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	97
<b>Çizelge 4.61:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	97
<b>Çizelge 4.62:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	98
<b>Çizelge 4.63:</b> LİN-4 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	98
<b>Çizelge 4.64:</b> LİN-4 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_2 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	99
<b>Çizelge 4.65:</b> LİN-4 ile Problem 2'nin $h = 0.12$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_2 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	100
<b>Çizelge 4.66:</b> LİN-4 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.12$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ).....	101
<b>Çizelge 4.67:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	103
<b>Çizelge 4.68:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	104
<b>Çizelge 4.69:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	105
<b>Çizelge 4.70:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	106
<b>Çizelge 4.71:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	107

<b>Çizelge 4.72:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	107
<b>Çizelge 4.73:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	108
<b>Çizelge 4.74:</b> LİN-4 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	108
<b>Çizelge 4.75:</b> LİN-4 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ). ....	109
<b>Çizelge 4.76:</b> LİN-4 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ). ....	110
<b>Çizelge 4.77:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	122
<b>Çizelge 4.78:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	123
<b>Çizelge 4.79:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	123
<b>Çizelge 4.80:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $h = 0.1$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	124
<b>Çizelge 4.81:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	124
<b>Çizelge 4.82:</b> LİN-5 ile Problem 1'in $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ , $-40 \leq x \leq 60$ ).....	125
<b>Çizelge 4.83:</b> LİN-5 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ). ....	126
<b>Çizelge 4.84:</b> LİN-5 ile Problem 2'nin $h = 0.12$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ). ....	127
<b>Çizelge 4.85:</b> LİN-5 ile Problem 2'nin $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.12$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6$ , $3c_2 = 0.3$ , $x_1 = -177$ , $x_1 = -147$ $-200 \leq x \leq 400$ ). ....	128
<b>Çizelge 4.86:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	129
<b>Çizelge 4.87:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	130
<b>Çizelge 4.88:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	131
<b>Çizelge 4.89:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $h = 0.24$ ve $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	131

<b>Çizelge 4.90:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	132
<b>Çizelge 4.91:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 2$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	132
<b>Çizelge 4.92:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	133
<b>Çizelge 4.93:</b> LİN-5 ile Problem 3'ün $d = 5$ , $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.24$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).....	133
<b>Çizelge 4.94:</b> LİN-5 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ). .....	134
<b>Çizelge 4.95:</b> LİN-5 ile Problem 4'ün $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ ve $\mu$ 'nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ). .....	135
<b>Çizelge 5.1 :</b> Problem 1'in $3c = 0.3$ , $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerindeki değişim ve $t = 20$ zamanındaki hata normları. ....	136
<b>Çizelge 5.2 :</b> Problem 1'in $3c = 0.09$ , $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ değerleri için $t = 20$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları .....	137
<b>Çizelge 5.3 :</b> Problem 2'nin $h = 0.12$ , $\Delta t = 0.1$ değerleri için $t = 400$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri. ....	137
<b>Çizelge 5.4 :</b> Problem 3'ün $d = 2$ , $h = 0.24$ , $\Delta t = 0.1$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri. ....	137
<b>Çizelge 5.5 :</b> Problem 3'ün $d = 5$ , $h = 0.24$ , $\Delta t = 0.1$ değerleri için $t = 250$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri. ....	138
<b>Çizelge 5.6 :</b> Problem 4'ün $\mu = 0.04$ , $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.01$ değerleri için $t = 25$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri. ....	138

## SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$RLW$	: Regularized Long Wave,
$\Delta t$	: Zaman adım uzunluğu,
$h$	: Konum adım uzunluğu,
$I_1$	: Kütle korunum sabiti,
$I_2$	: Momentum korunum sabiti,
$I_3$	: Enerji korunum sabiti,
$L_\infty$	: Maximum hata normu,
$L_2$	: Ortalama hata normu,
$LIN$	: Lineerleştirme.



# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMEN YÖNTEMİYLE DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

HATİCE YILDIRIM

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

142+xiii sayfa

2020

Danışman: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin temel amacından kısaca bahsedildi ve dalga kavramı hakkında bilgi verildi. Ayrıca bu bölümde tezde göz önüne alınacak olan Düzenli Uzun Dalga (RLW) denkleminin tarihsel gelişiminden bahsedildi.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullandığımız temel kavramlar olan sonlu elemanlar yöntemi, kollokasyon yöntemi ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar hakkında bilgi verildi.

Üçüncü bölümde, RLW denklemi ile ilgili literatürdeki çalışmalar sunuldu ve nümerik çözümü yapılacak olan RLW denkleminin farklı sınır ve başlangıç şartları ile verilen tek dalga hareketi, iki soliter dalga girişimi, ardışık dalga gelişimi ve dalga oluşumu problemleri tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, RLW denklemindeki lineer olmayan  $UU_x$  terimi yerine beş farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik trigonometrik kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile nümerik şemaları elde edildi ve önceki bölümde verilen model problemlere uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler, çizelgeler halinde sunuldu ve mevcut tam çözüm ile literatürdeki farklı çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca tüm lineerleştirme teknikleri ile elde edilen nümerik şemaların kararlılık analizleri benzer olacağından sadece LİN-1 ile elde edilen şemanın kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle incelendi.

Son olarak beşinci bölümde, uygulanan tüm lineerleştirme tekniklerinden elde edilen sonuçlar her bir model problem için kendi içerisinde çizelgeler halinde karşılaştırılarak öne çıkan yöntemler sunuldu.

**Anahtar Kelimeler:** Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denklemi, Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi, Trigonometrik B-Spline, Soliter Dalga

## ABSTRACT

Master Thesis

### NUMERICAL SOLUTIONS OF REGULARIZED LONG WAVE (RLW) EQUATION USING TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

Hatice YILDIRIM

Inonu University  
Graduate School of Nature and Applied Sciences  
Department of Mathematics

142+xiii pages

2020

Supervisor: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

This master thesis consists of five chapters. In the first chapter, the main purpose of the thesis has been briefly mentioned and some information has been given about the wave concept. Also, in this chapter, the historical development of the Regular Long Wave (RLW) equation, which is going to be taken into consideration in the thesis, is mentioned.

In the second chapter, some fundamental information about the basic concepts that we use in this thesis namely the finite element method, the collocation method and the cubic trigonometric B-spline functions are presented.

In the third chapter, studies in the literature on the RLW equation are presented and the problems of single wave motion, two solitary wave interaction, sequential wave evolution and undular bore development problems given with different boundary and initial conditions of the RLW equation whose numerical solution will be made are introduced.

In the fourth chapter, numerical schemes of cubic trigonometric collocation with finite element method are obtained by using five different linearization techniques instead of the nonlinear  $UU_x$  term in the RLW equation, and the model given in the previous section was applied to the problems. The numerical solutions obtained were presented in tables and compared with the results of different studies in the literature with the exact solution. In addition, since the stability analysis of the numerical schemes obtained by all linearization techniques would be similar, the stability analysis of the scheme obtained only with LIN-1 was examined by von Neumann method.

Finally, in the fifth chapter, the results obtained from all applied linearization techniques are compared for each model problem in tables within itself and prominent methods which are presented.

**Keywords:** Regularized Long Wave (RLW) Equation, Collocation Finite Element Method, Trigonometric B-Spline, Solitary Wave

## 1. GİRİŞ

Bilimin temel görevlerinden biri problemleri ortaya çıkararak çözümler üretmektir. Doğa bilimlerinin temel görevi, doğada gerçekleşen olayları daha iyi anlayabilmek, nesnelerin belli koşullar altındaki davranışları hakkında bilgi sahibi olabilmek ve bu davranışları aslına uygun bir şekilde tanımlayabilmektir. Adi diferansiyel denklemler bazı modelleri temsil etmesine rağmen katıların titreşimi, ses yayılımı, ısı akışı, moleküllerin yapısı, elektromanyetik dalga radyasyonu, çeşitli ekolojik popülasyon modelleri, akışkanlardaki dalga hareketleri gibi sayısız doğa olayını gerçeğe en yakın şekliyle temsil etmekte yetersiz kalmışlardır. Bahsedilen doğa olaylarının adi diferansiyel denklemlerle modellenememesinden ötürü bir çok doğa olayını matematiksel olarak modelleme gereksinimi bilim insanları ve araştırmacıların ilgilerini kısmi diferansiyel denklemlere yönlendirmesine neden olmuştur. Böylece uygulamalı matematiğin neredeyse tüm dallarında olduğu gibi fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayların matematiksel modelinin oluşturulmasında da kısmi diferansiyel denklemler büyük rol oynamaktadır. Günümüze kadar süre gelen ve devam eden çalışmalar neticesinde lineer olmayan, akışkanlar mekaniği, gaz dinamiği, kimyasal reaksiyonlar, izafiyet ve elastisite gibi birçok fiziksel olguda, ayrıca tahmin ve görüntü işleme gibi yapay zeka çalışmalarında önemli bir yeri olan tekniklerin uygulanmalarında kısmi diferansiyel denklemlerle sıkça karşılaşılmaktadır [1].

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün yapılamadığı durumlarda nümerik analiz devreye girmektedir. Nümerik analizin amacı; çözümünün elle yapılmasının pratik olmadığı, analitik olarak çözümü güç olan problemlerin çözümlenebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım veren yöntemleri bulmak ayrıca bunlardan anlamlı ve faydalı sonuçlar çıkarmaktır. Nümerik analizde, analitik çözümü yapılamayan kısmi diferansiyel denklem ya da denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için bir çok sayısal yöntem kullanılmaktadır. Bu sayısal yöntemler içerisinde sık kullanılanlardan birisi de sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminin bazıları; Galerkin, Petrov Galerkin, Subdomain ve Kollokasyon yöntemleridir. Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemlerinden Kollokasyon yöntemi kullanılacaktır.

Bu tezde ele alınan RLW denklemi bir dalga denklemi olduğundan bu kısımda dalga kavramı hakkında bilgiler verilecektir.

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olan dalgalar, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla

birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar. Soliton ise sabit bir hızda yayılım gösterirken kendi şeklini koruyan ve kendi kendini güçlendiren tekil dalgalara denir. Solitonlar aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalardan da tanımlanabilir:

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlılırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, soliter dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Soliter dalgaları, soliton dalgalarına benzeyen dalgalardan da tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalardan olarakta adlandırılabilirler. Russel soliter dalgaları bir su kanalında gözlemledikten sonra laboratuvarında su tankları oluşturduktan sonra tanklarının ucuna ağırlık bırakarak soliter dalgaları elde edebileceği deneyler yapmıştır. Deneylerin sonucunda, soliter dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır:

- a) Soliter dalgalar  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.
- b) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız soliter dalga üretir.
- c) Normal dalgaların aksine soliter dalgalar asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir soliter dalga ile büyük genliğe sahip bir soliter dalga birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki soliter dalga birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, soliter dalgalar kararlılıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

d)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir soliter dalga

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır. Dolayısıyla büyük genlikli bir soliter dalga, küçük genlikli bir soliter dalgaya göre daha hızlı hareket eder. Bir soliter dalganın hızı genliği ile orantılı olduğundan,

normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında soliter dalgalar kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi [2].

Soliter dalgaların keşfinden sonra bu alanda çalışmalarda yapılmaya başlanmıştır. Korteweg ve de Vries, sığ su yüzeyindeki soliter dalgaları modellemek için

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0$$

denklemini tanımlamışlardır. Bu denklem Korteweg de Vries (KdV) denklemi diye adlandırılmaktadır. Bu denklemde  $uu_x$  terimi lineer olmayan,  $u_{xxx}$  terimi ise dağılım (dispersif) etkiyi temsil etmektedir.

Düzenli uzun dalga (RLW) denklemi ardışık dalgaların gelişimini modellemek için ilk defa Peregrine tarafından önerilmiştir. Daha sonra Benjamin, Bona ve Mahony tarafından RLW denkleminin KdV denklemi ile benzerliği gösterilmiştir. Bu yüzden

$$u_t + u_x + uu_x - \mu u_{xxx} = 0$$

şeklindeki RLW denklemine Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi de denilmektedir [3].

Bu tez çalışmasında Düzenli Uzun Dalga (RLW) denkleminin kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar yardımı ile kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri bulundu.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Kütle dengesi, enerjinin korunumu ve denge gibi fiziksel prensiplerin uygulanması doğal olarak mühendislik analizini diferansiyel denklemlere yönlendirmektedir. Diferansiyel denklemlerin çeşitli sınıfları için tam çözüm elde etmeye yönelik farklı yöntemler geliştirilmiştir. Fakat, bu yöntemler birçok probleme uygulanamazlar çünkü bunlara karşılık gelen denklemler ya bu sınıflara düşmezler ya da karmaşık geometriler içerirler. İki veya üç boyutlu bölgelerde sınır şartlarını da sağlayan analitik çözümleri bulmak çok zor bir görev olur. Dolayısıyla mühendisliğin tüm dallarında pratik problemlerin çözümü için nümerik yöntemler yaygın olarak kullanılırlar.

Sonlu elemanlar yöntemi, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemlerden biridir. Sonlu elemanlar yöntemi özellikle pratik uygulamalarda yaygın olan karmaşık geometriler üzerinde tanımlı sınır şartlarının üstesinden gelmesi açısından güçlüdür. Keyfi sınırları işlemedeki esnekliği ve son birkaç yılda komplike sonlu eleman yazılımlarının varlığı sayesinde sonlu elemanlar yöntemi bir çok problemin çözümü için önerilen yöntem olmuştur. Bu yöntemde, problemin çözüm bölgesi her birine bir eleman adı verilen birçok alt aralığa bölünür. Elemanlar düğüm adı verilen noktalarda tekrar birleştirilerek denklem takımları oluşturulur. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır. Denklem takımları elde edilirken elemanlar problemin yapısına uygun şekilde yerleştirilmelidir. Çözümün ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar daha küçük seçilerek daha hassas bir yaklaşım yapılabilir. Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra interpolasyon fonksiyonu belirlenir. Sonlu farklar yönteminde, diferansiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar yönteminde diferansiyel denklemin çözümüne yaklaşım yapılmaktadır. Ayrıca sonlu elemanlar yönteminde aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir mertebeye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ve bilinmeyenlerin kombinasyonundan oluşur [4, 5].

Sonlu elemanlar yönteminin avantajları genel olarak [6, 7];

- a) Düşünce esnekliği sağlar. Mühendislik ya da matematiksel açıdan ele alınabilir.
- b) Uygulamada verimlidir ve elde edilen sonuçların hassaslığı kontrol edilebilir.

- c) Düzensiz şekilli cisimleri oldukça kolay bir şekilde modelleyebilir.
- d) Eleman denklemleri ayrı ayrı değerlendirildiğinden dolayı bir takım farklı malzemeden oluşan cisimleri modelleyebilir.
- e) Sınırsız sayıda ve çeşitte sınır şartlarını işleyebilir.
- f) Büyük deformasyon ve lineer olmayan malzemelerde mevcut olan lineer olmayan davranışları işleyebilir.

Sonlu elemanlar yönteminin dezavantajları ise;

- a) Sonlu elemanlar yöntemi kullanılan esas teori kadar doğrudur. Malzemenin fiziksel verilerinin ve eleman verilerinin temininde ve bilgisayara yüklenmesinde yapılan hatalar sonucu olumsuz yönde etki edecektir.
- b) Daha kesin sonuçlar, daha küçük eleman boyutları ile elde edilecektir. Eleman boyutlarının küçülmesi ise daha büyük bilgisayar hafızası gerektirir. Buna göre bilgisayar hafızasının sınırlı oluşu çözümün hassasiyetine bir sınırlama getirecektir.

Verilen bir probleme sonlu eleman yöntemlerinin uygulanması aşağıda verilen altı adımı içerir [8].

1. Verilen bölgenin ayrıklaştırılması :
  - a. Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman kümesinin oluşturulması
  - b. Elemanlarının ve düğüm noktalarının numaralandırılması
  - c. Problem için gerekli olan geometrik özelliklerin (örneğin koordinat ve kesit alanlarının) belirlenmesi
2. Tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi:
  - a. Tipik bir eleman üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formülünün oluşturulması.
  - b. Tipik bir  $u$  bağımlı değişkeninin
$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$
formunda olduğu varsayılarak ve bu yaklaşımın Adım 2a' da yerine yazılmasıyla
$$\mathbf{K}^e u^e = F^e$$
formunda eleman denklemlerinin elde edilmesi

- c. Yaklaşım fonksiyonlarının ve eleman matrislerinin belirlenmesi
3. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi:
    - a. Birincil değişkenlerin elemanlar arası süreklilik şartlarını sağlaması
    - b. İkincil değişkenler arasında denge şartlarının sağlanması
    - c. Adım 3a ve 3b ' nin kullanılmasıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi
  4. Problemin sınır şartlarının uygulanması:
    - a. Problemden verilen birincil değişkenlerin uygulanması
    - b. Problemden verilen ikincil değişkenlerin uygulanması
  5. Birleştirilmiş denklemlerin çözülmesi
  6. Sonuçların değerlendirilmesi:
    - a. Adım 5'te elde edilen birincil değişkenlerden hareketle çözümlerin değişiminin incelenmesi
    - b. Sonuçların grafik/çizelge şeklinde sunulması

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Bir diferensiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının minimum yapılması işlemine ağırlıklı kalan yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı kalan yöntemi denir. Ağırlıklı kalan yönteminde, ağırlık fonksiyonunun seçimine göre yöntem farklı isimler alır. Bunlardan bazıları Galerkin, Petrov-Galerkin, Kolokasyon, En Küçük Kareler yöntemleridir [9]. Bu çalışmada bu yöntemlerden Kolokasyon yöntemi kullanılacaktır.

### 2.1.1 Kollokasyon Yöntemi

Bu kısımda kollokasyon sonlu eleman yöntemi hakkında kısaca bilgi verelim.

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için bir  $\Omega$  bölgesinde

$$A(u) = f \quad (2.1.1)$$

olarak verilen bir operatör denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$  lineer veya lineer olmayan bir operatör,  $u$  bir bağımlı değişken ve  $f$  ise bağımsız değişkenlerin bilinen bir fonksiyonudur.  $u$

çözümüne, bir  $u_N$  yaklaşımı

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.1.2)$$

olarak tanımlanır. (2.1.2) ile verilen yaklaşık çözümde,  $\phi_j$  uygun yaklaşım fonksiyonları olup  $c_j$  parametreleri yaklaşık çözümün ağırlıklı integral formunu sağlayacak şekilde belirlenecek olan parametrelerdir.

Ağırlıklı kalan yöntemlerinde ağırlık fonksiyonları yaklaşım fonksiyonları kümesinden bağımsız olarak seçilebilir. Bu yöntemlerde bilinmeyen  $c_j$  parametrelerinin bulunması için sadece ağırlıklı integral formunun kullanılması yeterlidir.  $u_N$  yaklaşık çözümü (2.1.1) denkleminde yerine yazıldığında  $f_N = A(u_N)$  fonksiyonu elde edilir ki bu fonksiyon genellikle  $f$ 'ye eşit değildir.  $A(u_N)$  ile  $f$  arasındaki farka

$$R = A(u_N) - f = A \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \right) - f \neq 0$$

yaklaşımın kalanı (rezidüsü) denir. Açıkça  $R$  kalan fonksiyonu  $c_j$  parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır.  $\Omega$  iki boyutlu bir bölge ve  $\Psi_i$ ' ler ise ağırlık fonksiyonları olmak üzere ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $c_j$  parametreleri

$$\int_{\Omega} \Psi_i(x,y) R(x,y,c_j) dx dy = 0, \quad (i = 1(1)N) \quad (2.1.3)$$

ağırlıklı integral formundaki  $R$  kalanını sıfır yapacak şekilde aranır. (2.1.3) integralinden elde edilen denklem sisteminde  $c_j$  parametrelerinin tek türlü belirlenebilmesi için  $\Psi_i$  ağırlık fonksiyonlarının kümesi lineer bağımsız olmalıdır.  $x_i = (x_i, y_i)$ , ( $i = 1(1)N$ )' ler  $\Omega$  bölgesinde seçilmiş  $N$  adet nokta olsun. Kollokasyon yönteminde  $\Psi_i$  ağırlık fonksiyonları  $\delta(x - x_i)$  olarak gösterilir ve

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) dx dy = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada  $x_i$  lere kollokasyon noktaları denir ve keyfi olarak seçilir. (2.1.3) denkleminde  $\Psi_i$  ağırlık fonksiyonları yerine  $\delta(x - x_i)$  yazılmasıyla

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x,c_j) dx dy = 0 \quad (2.1.4)$$

elde edilir. Burada (2.1.4) denklemi kapalı formda

$$R(x_i, c_j) = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (2.1.5)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.5) denklemi  $N$  adet kollokasyon noktalarında hesaplanırsa  $N$ -bilinmeyenli  $N$ -tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.  $c_j$

katsayıları bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden kolayca bulunur.  $x_i$  noktalarının seçimi iyi şartlı denklem sisteminin ve sonuçta iyi bir yaklaşık çözümün elde edilmesinde önemlidir [8].

## 2.2 Kübik Trigonometrik B-spline Fonksiyonlar

Bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümlerinde kullanılan spline fonksiyonlar parçalı polinomlar sınıfından olup, tanımlanan  $[a, b]$  aralığını sonlu sayıda alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta düşük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma esasına dayanır. Belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir. Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir [10].

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve  $k = 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_i}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x)$$

bağıntısı kullanılarak trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilir. Eğer  $[a, b]$  aralığındaki parçalanma düzgün ise indirgeme bağıntısı

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.1)$$

şeklindedir.

(2.2.1) bağıntısında  $k = 3$  alınırsa  $T_i^3(x)$  kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere;

$$T_i^3(x) = \frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) + \frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \quad (2.2.2)$$

dir.  $T_i^3(x)$  kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını elde edebilmek için gerekli olan kuadratik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}), & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p^3(x_{i+4}), & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde yazılabildiğinden (2.2.2) eşitliği

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ -p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}) & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}) \\ +p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ +p^2(x_{i+4})p(x_{i+1}), \\ -p^3(x_{i+4}), & x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradaki trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right), \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right), i = 0, \dots, N$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^2(x_{i-2}), & x_{i-2} \leq x < x_{i-1} \\ -p^2(x_{i-2})p(x_i) \\ -p(x_{i-2})p(x_{i+1})p(x_{i-1}) & x_{i-1} \leq x < x_i \\ -p(x_{i+2})p^2(x_{i-1}), \\ p(x_{i-2})p^2(x_{i+1}) \\ +p(x_{i+2})p(x_{i-1})p(x_{i+1}) & x_i \leq x < x_{i+1} \\ +p^2(x_{i+2})p(x_i), \\ -p^3(x_{i+2}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir..

Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak problemin analitik çözümü için genel yaklaşım

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i(t) T_i^3(x)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $\delta_i$  katsayıları zamana bağlı değişkenleri ve  $T_i^3(x)$  fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$T_i^3(x)$  fonksiyonları  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$  aralığının dışında sıfırdır ve  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$  aralığında dört elemanı örter. Her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  sonlu elemanı  $T_{i-1}^3(x)$ ,  $T_i^3(x)$ ,  $T_{i+1}^3(x)$ ,  $T_{i+2}^3(x)$  şeklindeki dört kübik trigonometrik B-spline tarafından örtüleceğinden

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j(t) T_j^3(x), \quad (2.2.3)$$

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) \approx \delta_{i-1}(t) T_{i-1}^3(x) + \delta_i(t) T_i^3(x) + \delta_{i+1}(t) T_{i+1}^3(x) + \delta_{i+2}(t) T_{i+2}^3(x)$$

elde edilir. Bu yaklaşım için kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_i$  noktasındaki  $U(x_i, t)$  ve birinci ve ikinci türevi için yaklaşımlar

$$U_N(x_i, t) = U_i = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j T_j^3(x_i)$$

$$\frac{dU_N(x, t)}{dx} = U_i' = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j \frac{dT_j^3(x_i)}{dx}$$

$$\frac{d^2U_N(x, t)}{dx^2} = U_i'' = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j \frac{d^2T_j^3(x_i)}{dx^2}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1 + 3 \cos(h)) \csc^2\left(\frac{h}{2}\right))}{16(2 \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(\frac{3h}{2}\right))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{2 + 4 \cos(h)}$$

olmak üzere

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_i' = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1} \quad (2.2.4)$$

$$U_i'' = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

eşitlikleri bulunur [10].

### 3. DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİ

#### 3.1 Giriş

Bu bölümde

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilen bir boyutlu RLW denklemi;

$$U(a, t) = \sigma_1(t), \quad t \geq 0$$

$$U(b, t) = \sigma_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alındı. Denklemdaki  $U$ ,  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyonu, indislerdeki  $x$  ve  $t$  türevi,  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreleri,  $U_{xxt}$  dalğanın yayılımını ifade eden lineer dispersiyon terimi,  $U U_x$  ise dalğanın dikleşmesine neden olan lineer olmayan terimi temsil etmektedir.

RLW denklemi ile ilgili literatürdeki ilk çalışma 1966 yılında Peregrine tarafından su yüzeyindeki küçük genlikli dalgaların yayılımını modellemek için yapılmıştır. Son yıllarda da RLW denkleminin nümerik çözümleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin; Gardner ve Dağ [11], çalışmalarında kübik B-spline fonksiyonları kullanarak; Gardner vd. [12] ile Gardner vd. [13] ise kuadratik B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir. Dağ ve Özer [14], 2001 yılında yaptıkları çalışmada RLW denkleminin nümerik çözümlerini kübik B-spline fonksiyonlar ile en küçük kareler yöntemini kullanarak bulmuşlardır. Doğan [15, 16], yaptığı iki farklı çalışmanın ilkinde kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanarak Petrov-Galerkin yöntemi ile ikincisinde lineer sonlu elemanları kullanarak Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin çözümünü elde etti. Saka [17], 2002 yılında yayımladığı tez çalışmasında B-spline kollokasyon yöntemi ile denklemin çözümünü yaptı. Dağ vd. [18], kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonların her ikisi ile kollokasyon yöntemini kullanarak RLW denkleminin çözümlerini sunmuşlardır. Dağ vd. [19], denklemin çözümünü yapabilmek için kollokasyon yöntemi ile kübik B-spline fonksiyonları kullanmışlardır. Saka ve Dağ [20], 2005 yılında yaptıkları çalışmada kübik

B-spline fonksiyonları ve split yöntemini denklemini çözmek için kollokasyon yöntemiyle birlikte kullanmışlardır. Kutluay ve Esen [21,22], yaptıkları iki farklı çalışmada lineerleştirilmiş kapalı sonlu farklar yöntemini ve kuadratik B-spline sonlu elemanlara dayalı Lumped Galerkin yöntemini kullanarak RLW denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir. Aydın [23], 2007 yılında yayımladığı yüksek lisans tezinde lineer sonlu elemanları kullanarak Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemleriyle düzenli uzun dalga denkleminin nümerik çözümlerini sunmuştur. Saka vd. [24], kuintik B-spline Kollokasyon yöntemiyle denklemin çözümlerini elde etmişlerdir. Islam vd. [25], radial baz fonksiyonları kullanarak meshfree yöntemi ile RLW denkleminin çözümlerini verdiler. Keskin [9,10], 2010 yılında yüksek lisans tezinde sonlu farklar yöntemiyle, 2016 yılında doktora tezinde ise kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle RLW denkleminin sonuçlarını elde etmiştir. Pozo vd. [26], meshless sonlu nokta yaklaşımı ile zaman türevi için sonlu fark tekniklerini birleştirerek çözüm elde etmişlerdir. Mei ve Chen [27,28], extrapolasyon yöntemiyle zamanı ayırıştırıp lineer sonlu eleman Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Yılmaz [29], yüksek lisans tezinde kübik B-spline Kollokasyon yöntemi ile denklemin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Korkmaz ve Dağ [30], kübik B-spline fonksiyonlara dayalı diferansiyel kareleme yöntemini kullanmışlardır. Görgülü vd. [31], üstel B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile RLW denkleminin nümerik çözümlerini sunmuşlardır. Irk ve Keskin [32], kübik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Ameen [33], yüksek lisans tezinde en küçük kareler B-spline sonlu elemanlar yöntemiyle RLW denkleminin nümerik sonuçlarını elde etmiştir. Dağ vd. [34], trigonometrik kübik B-spline kollokasyon yöntemini uygulamışlardır. Oruç vd. [35], HW ile sonlu farklar yöntemini kullanarak RLW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Irk ve Keskin [36], çalışmalarında kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemiyle denklemin çözümlerini elde etmişlerdir. Irk vd. [37], kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar yardımıyla Galerkin yöntemini kullanarak RLW denkleminin nümerik sonuçlarını elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, (3.1.1) ile verilen RLW denkleminin, denklemdaki  $UU_x$  lineer olmayan terimi yerine 5 farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik şemaları elde edildi. Elde edilen şemalar kullanılarak denklemlerle birlikte verilen farklı başlangıç ve sınır şartları için problemin nümerik çözümleri bulundu. Ayrıca tüm lineerleştirme teknikleri ile elde edilen nümerik şemaların kararlılık analizleri benzer olduğundan sadece LİN-1 ile elde edilen şemanın kararlılık analizi

von Neumann yöntemiyle incelendi ve tezde ele alınan her bir model problem için sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [U_i + U_{i+1}]$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (U^2 + \mu (U_x)^2) dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [(U_i)^2 + \mu ((U_x)_i)^2 + (U_{i+1})^2 + \mu ((U_x)_{i+1})^2]$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (U^3 + 3U^2) dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [(U_i)^3 + 3(U_i)^2 + (U_{i+1})^3 + 3(U_{i+1})^2]$$

korunum sabitleri hesaplandı. Nümerik çözümlerin analitik sonuçlara ne kadar yakın olduğunu göstermek için

$$L_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^n|$$

$$L_2 = \left[ h \sum_{i=1}^N |U(x_i, t_j) - U_{i,j}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile verilen hata normları hesaplandı ve nümerik çözümler çizelgeler/grafikler halinde verildi.

### 3.2 Model Problemler

Bu kısımda, (3.1.1) ile verilen RLW denklemi ile birlikte göz önüne alınacak farklı başlangıç ve sınır şartlı dört model problem tanıtıldı.

#### 3.2.1 Problem 1: Tek Dalga Hareketi

İlk olarak (3.1.1) ile verilen RLW denklemi,

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt])$$

başlangıç şartı ve  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  sınır şartı ile göz önüne alındı. Bu problemin analitik çözümü,  $v = 1 + \varepsilon c$  ve  $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$  olmak üzere

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt])$$

dir [3]. Bu problemde yapılan tüm hesaplamalarda  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_0 = 0$  alındı.  $3c = 0.3$  ve  $3c = 0.09$  değerleri için ayrı ayrı sonuçlar bulundu.

Bu problem  $v$  hızında,  $3c$  dalga boyunda ve  $k$  genişliğinde soliter dalganın  $x_0$  noktasından başlayan hareketini temsil etmektedir. Bu problem için korunum sabitlerinin analitik değeri

$$I_1 = \frac{6c}{k}, I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, I_3 = \frac{36c^2}{k} \left( 1 + \frac{4c}{5} \right)$$

dir [3].

### 3.2.2 Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi

İkinci olarak, (3.1.1) ile verilen RLW denklemi,

$$k_i = \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{4\mu(1 + \varepsilon c_i)}}, \quad (i = 1, 2)$$

olmak üzere,

$$U(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2 [k_1 (x - x_1)] + 3c_2 \operatorname{sech}^2 [k_2 (x - x_2)]$$

başlangıç şartı ve  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  sınır şartı ile göz önüne alındı. Bu problemde yapılan tüm hesaplamalarda  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_0 = 0$  alındı.

Bu problem  $3c_1$  yüksekliğinde,  $x_1$  başlangıç noktasındaki dalga ve  $3c_2$  yüksekliğinde,  $x_2$  başlangıç noktasındaki iki soliter dalganın birbirleriyle etkileşimlerini temsil eder. Yüksekliği fazla olan dalga daha hızlı olduğundan iki soliter dalganın birbirinin içinden geçmesi için  $c_1 < c_2$  olduğu zaman  $x_2 < x_1$  olması gerekmektedir [3].

### 3.2.3 Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

Bu problemde ise, (3.1.1) ile verilen RLW denklemi,

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - x_0}{d} \right) \right]$$

başlangıç şartı

$$U(a, t) = U_0, \quad U(b, t) = 0$$

ve sınır şartı ile göz önüne alındı. Bu problemde yapılan tüm hesaplamalarda  $\varepsilon = 1.5$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $U_0 = 0.1$  ve  $x_0 = 0$  alındı.  $d = 2$  ve  $d = 5$  değerleri için ayrı ayrı sonuçlar bulundu. Burada  $U(x, 0)$ ,  $t = 0$  zamanındaki denge seviyesinin üstündeki su yüzeyinin yükselmesini gösterir.  $U_0$ ,  $x = x_0$ ' da su seviyesindeki değişimin miktarını,  $d$  ise durgun su ile derin su arasındaki eğimi temsil eder [3]. Bu problemde  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  değerleri sabit değerlerdir, sırasıyla

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} U dx \cong U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075 \quad (3.2.1)$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (U^2 + \mu (U_x)^2) dx \cong U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} U_0^3 = 0.011$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (U^3 + 3U^2) dx \cong 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) \frac{3\varepsilon}{4} U_0^4 = 0.034113$$

oranlarında lineer bir şekilde artarlar [17].

### 3.2.4 Problem 4: Dalga Oluşumu

Son olarak, (3.1.1) ile verilen RLW denklemleri,

$$U(x, 0) = e^{-(x-7)^2}$$

başlangıç şartı

$$U(0, t) = U(50, t) = 0$$

ve sınır şartları ile göz önüne alındı.



#### 4. RLW DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde,

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (4.0.1)$$

ile verilen RLW denkleminin, denklemdeki  $U U_x$  lineer olmayan terimi yerine farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak kübik trigonometrik kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile şemaları elde edildi. Daha sonra bu şemalar kullanılarak önceki bölümde tanıtılan model problemlerin nümerik çözümleri bulundu. Elde edilen bu nümerik çözümler problemlerin mevcut tam çözümü ve/veya literatürdeki diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile çizelgeler halinde karşılaştırıldı.

##### 4.1 Lineerleştirme-1 (LİN-1)

Bu kısımda, (4.0.1) ile verilen RLW denkleminde lineer olmayan  $U U_x$  terimindeki  $U$  yerine  $U = Z_i$  olarak alınırsa

$$U U_x = Z_i (U_x)_i$$

olur. Denklemden görülen  $U_t$  ve  $U_{xxt}$  terimleri yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$
$$U_{xxt} = \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı,  $U_x$  terimi yerine de

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) U_x^{n+1} - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (4.1.1)$$

bulunur.

$U(x,t)$ 'ye bir yaklaşım  $U_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla (2.2.4) ile verilen  $U$  ve  $U'$ 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  katsayıları

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \quad (4.1.2)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3\cos(h)\csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2\cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3\cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4\cos(h)}$$

dir. (4.1.1) ile verilen RLW denkleminde bu yaklaşımlar yerine yazılır

$$(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) - \mu(\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1})$$

$$= (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)(\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - \mu(\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\delta_{i-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu\gamma_1 \right) + \delta_i^{n+1}(\alpha_2 - \mu\gamma_2) + \delta_{i+1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu\gamma_1 \right) = \quad (4.1.3)$$

$$\delta_{i-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu\gamma_1 \right) + \delta_i^n(\alpha_2 - \mu\gamma_2) + \delta_{i+1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu\gamma_1 \right)$$

sistemi elde edilir. Burada

$$Z_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

dir. Bu sistem

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\
a_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
a_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \\
b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\
b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

şeklinde matris formunda gösterilir. Bu sistemde  $(N + 3)$  bilinmeyen,  $(N + 1)$  tane denklem vardır. Bu sistemde sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak sırasıyla  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{i-1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_2 \delta_i - \alpha_1 \delta_{i+1}}{\alpha_1} \\
i = 0 \implies \delta_{-1} &= \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\delta_{i+1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_1 \delta_{i-1} - \alpha_2 \delta_i}{\alpha_1} \\
i = N \implies \delta_{N+1} &= \frac{U(b, t) - \alpha_2 \delta_N - \alpha_1 \delta_{N-1}}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$i = 0$  için  $\delta_{-1}$  değeri (4.1.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \delta_0^{n+1}(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\
\delta_1^{n+1} \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right] &= \left( \frac{U^n(a, t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \\
&\delta_0^n(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_1^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \\
\delta_0^{n+1} & \left[ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] + \delta_1^{n+1} \left[ \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_2 - \beta_1) \right] \\
& = \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \\
\delta_0^n & \left[ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] + \delta_1^n \left[ \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_1 - \beta_2) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$i = N$  için  $\delta_{N+1}$  değeri (4.1.3) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N) \right) (\beta_1 - \mu \gamma_1) + \delta_N^{n+1} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\
& \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\
& \delta_{N-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\
& \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-1}^{n+1} \left[ \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_1 - \beta_2) \right] + \delta_N^{n+1} \left[ \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right] + \\
& \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right] = \\
& \delta_{N-1}^n \left[ \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_2 - \beta_1) \right] + \delta_N^n \left[ \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right] + \\
& \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.4) denklem sistemini elde edilen sonuçlarla tekrar yazarsak,

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
c_2 &= \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) (\beta_2 - \beta_1) \\
c_3 &= \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) (\beta_1 - \beta_2) \\
c_4 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \\
a_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_1 - \mu \gamma_1 \\
a_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
a_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_2 - \mu \gamma_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_1 - \mu \gamma_1 \\
b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_2 - \mu \gamma_1 \\
d_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
d_2 &= \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) (\beta_1 - \beta_2) \\
d_3 &= \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) (\beta_2 - \beta_1) \\
d_4 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] \\
e_2 &= \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right] \\
f_1 &= \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] \\
f_2 &= \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & & c_3 & c_4 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^{n+1} \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & & & & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & & d_3 & d_4 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^n \\ \delta_1^n \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^n \\ \delta_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 - e_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2 - e_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Böylece  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde çözülebilir denklem sistemi bulunur. Bu sistemden  $\delta^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu parametreler problemle verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$t = 0$  için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i^0 T_i^3(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının  $x_i$  düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) = U_i$$

değerleri kullanılarak  $\delta_i^0$  parametreleri için

$$U_0 = \alpha_1 \delta_{-1} + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1$$

$$U_1 = \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_1 + \alpha_1 \delta_2$$

$\vdots$

$$U_N = \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \delta_{N+1}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

matris formunda gösterilen  $(N+3)$  bilinmeyenli  $(N+1)$  tane denklem elde edilir. Bu denklem sistemini  $(N+1) \times (N+1)$  şekline getirebilmek için  $U'$  nun birinci türevi kullanılarak  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametrelerini sistemden yok edelim. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak sırasıyla  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri

$i = 0$  için

$$U'_0 = \beta_1 \delta_{-1} + \beta_2 \delta_1 \implies \delta_{-1} = \frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1}$$

$$\alpha_1 \left( \frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 = \alpha_1 \frac{U'_0}{\beta_1} + \alpha_2 \delta_0 + \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \right] \delta_1$$

$i = N$  için

$$U'_N = \beta_1 \delta_{N-1} + \beta_2 \delta_{N+1} \implies \delta_{N+1} = \frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2}$$

$$\alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \left( \frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2} \right) = \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right] \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \frac{U'_N}{\beta_2}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (4.1.6) denklem sisteminde tekrar yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) & & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & & & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) & \alpha_2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 \frac{U'_0}{\beta_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1 \frac{U'_N}{\beta_2} \end{bmatrix}$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  şeklinde çözülebilir bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminden başlangıç parametreleri bulunur. Bu başlangıç parametreleri (4.1.5) ile verilen sistemde kullanılarak istenilen  $t$  zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyonla elde edilir.

$U_N$  yaklaşık çözümlerini iyileştirmek için (4.1.5) denklem sistemindeki lineer olmayan terimler için herbir zaman adımında

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2} (\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

biçiminde tanımlanan iç iterasyon formülleri birkaç defa uygulandı.

#### 4.1.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.0.1) ile verilen RLW denkleminde uygulanan LİN-1 ile elde edilen ve  $Z_j = \widehat{U}$  olmak üzere

$$\delta_{j-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_j^{n+1} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{j+1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \delta_{j-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_j^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{j+1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right)$$

şeklindeki şemanın kararlılık analizi von Neumann yöntemi kullanılarak incelendi. Bu şemada  $\delta^n$  parametreleri yerine

$$\delta_j^n = \xi^n e^{i\beta jh}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{i\beta(j-1)h} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \xi^{n+1} e^{i\beta jh} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \xi^{n+1} e^{i\beta(j+1)h} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \xi^n e^{i\beta(j-1)h} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \\ & \xi^n e^{i\beta jh} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \xi^n e^{i\beta(j+1)h} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{i\beta jh} \left[ e^{-i\beta h} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + e^{i\beta h} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right] = \\ & \xi^n e^{i\beta jh} \left[ e^{-i\beta h} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + e^{i\beta h} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} e^{i\beta h} &= \cos(\beta h) + i \sin(\beta h) \\ \cos \beta h &= \frac{e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}}{2} \\ \sin \beta h &= \frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2i} \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} & \xi \left[ 2(\alpha_1 - \mu \gamma_1) \cos \beta h + \alpha_2 - \mu \gamma_2 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) (\beta_1 e^{-i\beta h} + \beta_2 e^{i\beta h}) \right] = \\ & 2(\alpha_1 - \mu \gamma_1) \cos \beta h + \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon \widehat{U}) (\beta_1 e^{-i\beta h} + \beta_2 e^{i\beta h}) \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.2) ile verilen  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1 e^{-i\beta h} + \beta_2 e^{i\beta h} &= -\frac{3}{4} \csc \left( \frac{3h}{2} \right) e^{-i\beta h} + \frac{3}{4} \csc \left( \frac{3h}{2} \right) e^{i\beta h} \\ &= \frac{3}{4} \csc \left( \frac{3h}{2} \right) (2i \sin(\beta h)) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} & \xi \left[ 2(\alpha_1 - \mu \gamma_1) \cos(\beta h) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 + i \frac{3\Delta t}{4} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \csc \left( \frac{3h}{2} \right) (2i \sin(\beta h)) \right] = \\ & 2(\alpha_1 - \mu \gamma_1) \cos(\beta h) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 - i \frac{3\Delta t}{4} (1 + \varepsilon \widehat{U}) \csc \left( \frac{3h}{2} \right) (2i \sin(\beta h)) \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos(\beta h) + \alpha_2 - \mu\gamma_2 + i\frac{3\Delta t}{4}(1 + \widehat{\varepsilon U}) \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (2i \sin(\beta h))}{2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos(\beta h) + \alpha_2 - \mu\gamma_2 - i\frac{3\Delta t}{4}(1 + \widehat{\varepsilon U}) \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (2i \sin(\beta h))}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\lambda &= 2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos(\beta h) + \alpha_2 - \mu\gamma_2 \\ \tau &= i\frac{3\Delta t}{4}(1 + \widehat{\varepsilon U}) \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (2i \sin(\beta h))\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\xi = \frac{\lambda - i\tau}{\lambda + i\tau} \quad (4.1.7)$$

bulunur. (4.1.3) ile verilen LİN-1 şemasının kararlı olabilmesi için  $|\xi| \leq 1$  olması gerekir.

Dolayısıyla

$$|\xi| = \frac{|\lambda - i\tau|}{|\lambda + i\tau|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}} = 1$$

olduğundan (4.1.3) ile verilen şema şartsız kararlıdır.

#### 4.1.2 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, LİN-1 ile elde edilen nümerik şemanın Bölüm 3'te tanımlanan dört model probleme uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar çizelge ve grafiksel olarak sunuldu.

##### Problem 1: Tek Dalga Hareketi

Bu kısımda, Problem 1'in, LİN-1 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-40 \leq x \leq 60$  aralığında sağa doğru hareket eden  $3c = 0.3$  ve  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın hareketi  $t = 20$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.1'de Problem 1 için  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın zaman adım uzunluğu  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere konum adım uzunluğu  $h = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerlerinde elde edilen nümerik çözümleri verildi.  $h = 0.1, 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.8844465830e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 5.6950849592e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 8.5684384032e - 09$ ;  $\Delta I_1 = 1.9000244229e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.3022699826e - 10$ ,  $\Delta I_3 = 4.5531431958e - 09$  ve  $\Delta I_1 = 1.9050214125e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 2.5651925029e - 10$ ,  $\Delta I_3 = 8.7641809365e - 09$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde bir miktar artma,  $\Delta I_2$  değerinde küçülme ve  $\Delta I_3$  değerlerinde ise  $h = 0.05$  için küçülme olurken  $h = 0.01$  için bir miktar artma görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0570074844e - 03$ ,  $L_\infty = 3.0258981733e - 04$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  için  $L_2 =$

$3.9251545364e - 04$  ,  $L_\infty = 1.2883428324e - 04$  ve  $h = 0.01$  için  $L_2 = 2.2021254794e - 04$ ,  $L_\infty = 8.4803120450e - 05$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları da önemli ölçüde küçüldü.

Çizelge 4.2’de Problem 1’in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$  farklı değerleri için elde edilen korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları verildi. Çizelgeden  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.8844465830e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 5.6950849592e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 8.5684384032e - 09$  ;  $\Delta I_1 = 1.8824932193e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 9.6779638747e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 3.2472566858e - 09$  ve  $\Delta I_1 = 1.8818684578e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.0953659313e - 08$ ,  $\Delta I_3 = 4.4838888158e - 10$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü;  $\Delta I_2$  değerinde bir miktar artma olduğu görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0570074844e - 03$ ,  $L_\infty = 3.0258981733e - 04$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 9.5398400095e - 04$  ,  $L_\infty = 2.7499675957e - 04$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 9.2452736122e - 04$ ,  $L_\infty = 2.6732465685e - 04$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde görüldüğü ki,  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.3’te  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için Problem 1’in nümerik çözümleri verildi.  $h = 0.1, h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512692811e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0200688919e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9723124551e - 07$ ;  $\Delta I_1 = 2.3800673011e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0349180685e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0171018728e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3892898879e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0395520059e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0314603638e - 07$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1, \Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinde bir miktar artma görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4502654593e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2404770859e - 05$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 6.8864376300e - 05$ ,  $L_\infty = 1.5478587663e - 05$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 1.5637585109e - 05$ ,  $L_\infty = 4.6486780003e - 06$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.4’te  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için Problem 1’in nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512692811e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0200688919e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9723124551e - 07$  ;  $\Delta I_1 = 2.3499312052e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0192941707e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9704018922e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3495030986e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0190464964e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9698265352e - 07$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1,$

$\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de kucldđđđ grldğ.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4502654593e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2404770859e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.3794213737e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0614558270e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.3572851150e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0068282061e - 05$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde grldğ ki,  $\Delta t$  değeri kucldğke  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de kucldğ.

Çizelge 4.5'te korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-1'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-1 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.3$  için  $L_2 = 1.0570074844e - 03$ ,  $L_\infty = 3.0258981733e - 04$  olarak bulundu. Kübik Kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Dağ vd. [18],  $h = 0.1$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 2.2050 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.8448 \times 10^{-4}$ ;  $L_2 = 0.30 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.116 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.36875 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.13204 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Kuintik kollokasyon metoduyla; Saka vd. [24],  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.15192 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.82951 \times 10^{-4}$  olarak; Islam vd. [25], meshfree kollokasyon metodu ile yaptıkları çalışmada  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.06910 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.78027 \times 10^{-4}$  olarak hesaplamışlardır. Dağ vd. [34], kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak  $L_\infty = 3.08 \times 10^{-4}$  bulmuşlardır. Sonuçlardan grldđđđ üzere; LİN-1 ile hesaplanan  $L_2$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalara uyumlu fakat daha kötü sonuçlar verirken,  $L_\infty$  hata normu [18], [20] ve [34]'ten daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.6'da korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-1'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-1 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.09$  için  $L_2 = 2.4502654593e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2404770859e - 05$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 1.2735 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.3467 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.65102 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.43151 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Buradan grldđđđ üzere; LİN-1 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

Problem 1'in  $3c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 0, 10$  ve  $20$  zamanlarındaki grafiği ve  $t = 20$  zamanında mutlak hata grafiği Şekil 4.1'de verildi. Şekil 4.1'den zaman ilerledikçe dalganın Şeklini koruyarak sağa doğru hareket ettiği görülmektedir.  $t = 20$  zamanına geldiğinde dalganın tepe noktasının  $x = 22$  konumunda ve genliği de  $3c = 0.3000220397$

**Çizelge 4.1 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624879	2.5790074374	2.1049058432e-04	5.7587757607e-05
	8	3.9799473303	0.8104624887	2.5790074387	4.2123954020e-04	1.1717571365e-04
	12	3.9799463506	0.8104624900	2.5790074407	6.3247258031e-04	1.7810391863e-04
	16	3.9799384979	0.8104624916	2.5790074432	8.4435904209e-04	2.4000473985e-04
	20	3.9799078278	0.8104624933	2.5790074453	1.0570074844e-03	3.0258981733e-04
$\Delta I_1 = 1.8844465830e-05$ , $\Delta I_2 = 5.6950849592e-09$ , $\Delta I_3 = 8.5684384032e-09$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434298	0.8104624938	2.5790074367	7.9347187405e-05	2.5973584130e-05
	8	3.9799473397	0.8104624937	2.5790074361	1.5841261159e-04	5.2789736919e-05
	12	3.9799463550	0.8104624935	2.5790074352	2.3700626256e-04	7.9026417684e-05
	16	3.9799384741	0.8104624934	2.5790074341	3.1504457420e-04	1.0434293287e-04
	20	3.9799076734	0.8104624929	2.5790074322	3.9251545364e-04	1.2883428324e-04
$\Delta I_1 = 1.9000244229e-05$ , $\Delta I_2 = 8.3022699826e-10$ , $\Delta I_3 = 4.5531431958e-09$						
0.01	0	3.9799266740	0.8104624941	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434327	0.8104624942	2.5790074365	4.6481687221e-05	1.8195907154e-05
	8	3.9799473427	0.8104624942	2.5790074353	9.2175085007e-05	3.6684142321e-05
	12	3.9799463564	0.8104624942	2.5790074335	1.3651694154e-04	5.4083984744e-05
	16	3.9799384665	0.8104624942	2.5790074312	1.7922252808e-04	7.0086375955e-05
	20	3.9799076238	0.8104624939	2.5790074280	2.2021254794e-04	8.4803120450e-05
$\Delta I_1 = 1.9050214125e-05$ , $\Delta I_2 = 2.5651925029e-10$ , $\Delta I_3 = 8.7641809365e-09$						

**Çizelge 4.2 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624879	2.5790074374	2.1049058432e-04	5.7587757607e-05
	8	3.9799473303	0.8104624887	2.5790074387	4.2123954020e-04	1.1717571365e-04
	12	3.9799463506	0.8104624900	2.5790074407	6.3247258031e-04	1.7810391863e-04
	16	3.9799384979	0.8104624916	2.5790074432	8.4435904209e-04	2.4000473985e-04
	20	3.9799078278	0.8104624933	2.5790074453	1.0570074844e-03	3.0258981733e-04
$\Delta I_1 = 1.8844465830e-05$ , $\Delta I_2 = 5.6950849592e-09$ , $\Delta I_3 = 8.5684384032e-09$						
0.05	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434197	0.8104624881	2.5790074372	1.8978949742e-04	5.1809853821e-05
	8	3.9799473291	0.8104624895	2.5790074377	3.7985942801e-04	1.0577465656e-04
	12	3.9799463500	0.8104624917	2.5790074386	5.7045880271e-04	1.6118957579e-04
	16	3.9799385010	0.8104624944	2.5790074396	7.6178594893e-04	2.1767737321e-04
	20	3.9799078474	0.8104624972	2.5790074400	9.5398400095e-04	2.7499675957e-04
$\Delta I_1 = 1.8824932193e-05$ , $\Delta I_2 = 9.6779638747e-09$ , $\Delta I_3 = 3.2472566858e-09$						
0.01	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434193	0.8104624882	2.5790074370	1.8401127699e-04	5.0444938553e-05
	8	3.9799473287	0.8104624898	2.5790074370	3.6826207264e-04	1.0289119373e-04
	12	3.9799463499	0.8104624922	2.5790074370	5.5297598155e-04	1.5672233416e-04
	16	3.9799385019	0.8104624953	2.5790074370	7.3834649590e-04	2.1161283150e-04
	20	3.9799078536	0.8104624985	2.5790074363	9.2452736122e-04	2.6732465685e-04
$\Delta I_1 = 1.8818684578e-05$ , $\Delta I_2 = 1.0953659313e-08$ , $\Delta I_3 = 4.4838888158e-10$						

**Çizelge 4.3 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.8999130370e-05	1.0399691548e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.8000277590e-05	2.0845614293e-05
	12	2.1085087569	0.1273016774	0.3888058715	1.4700476299e-04	3.1331646648e-05
	16	2.1080169890	0.1273015787	0.3888055837	1.9601371515e-04	4.1852742222e-05
	20	2.1068116288	0.1273011574	0.3888043554	2.4502654593e-04	5.2404770859e-05
$\Delta I_1 = 2.3512692811e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0200688919e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9723124551e-07$						
0.05	0	2.1070467985	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081232493	0.1273016040	0.3888056564	1.3774928522e-05	3.0632846623e-06
	8	2.1085394486	0.1273016827	0.3888058856	2.7549399032e-05	6.1432471709e-06
	12	2.1085090178	0.1273016780	0.3888058719	4.1322862258e-05	9.2408108861e-06
	16	2.1080163730	0.1273015790	0.3888055833	5.5094777228e-05	1.2354033216e-05
	20	2.1068087918	0.1273011563	0.3888043510	6.8864376300e-05	1.5478587663e-05
$\Delta I_1 = 2.3800673011e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0349180685e-07$ , $\Delta I_3 = 3.0171018728e-07$						
0.01	0	2.1070468123	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081233945	0.1273016041	0.3888056565	3.1391317346e-06	8.9729163588e-07
	8	2.1085396143	0.1273016828	0.3888058858	6.2752682337e-06	1.8176241424e-06
	12	2.1085091011	0.1273016780	0.3888058720	9.4055012176e-06	2.7546795056e-06
	16	2.1080161756	0.1273015789	0.3888055831	1.2527109103e-05	3.7007347006e-06
	20	2.1068078833	0.1273011559	0.3888043496	1.5637585109e-05	4.6486780003e-06
$\Delta I_1 = 2.3892898879e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0395520059e-07$ , $\Delta I_3 = 3.0314603638e-07$						

**Çizelge 4.4 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

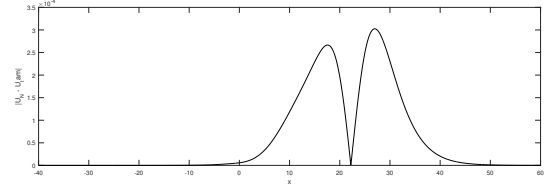
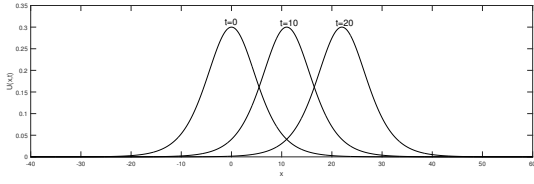
$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.8999130370e-05	1.0399691548e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.8000277590e-05	2.0845614293e-05
	12	2.1085087569	0.1273016774	0.3888058715	1.4700476299e-04	3.1331646648e-05
	16	2.1080169890	0.1273015787	0.3888055837	1.9601371515e-04	4.1852742222e-05
	20	2.1068116288	0.1273011574	0.3888043554	2.4502654593e-04	5.2404770859e-05
$\Delta I_1 = 2.3512692811e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0200688919e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9723124551e-07$						
0.05	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227751	0.1273016035	0.3888056559	4.7580219588e-05	1.0015051685e-05
	8	2.1085389066	0.1273016821	0.3888058851	9.5163018161e-05	2.0091975598e-05
	12	2.1085087454	0.1273016774	0.3888058714	1.4275020044e-04	3.0221924976e-05
	16	2.1080170188	0.1273015787	0.3888055837	1.9034334923e-04	4.0397954895e-05
	20	2.1068117626	0.1273011574	0.3888043556	2.3794213737e-04	5.0614558270e-05
$\Delta I_1 = 2.3499312052e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0192941707e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9704018922e-07$						
0.01	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227686	0.1273016035	0.3888056559	4.7137003310e-05	9.8987213197e-06
	8	2.1085388990	0.1273016821	0.3888058851	9.4276725074e-05	1.9863502383e-05
	12	2.1085087418	0.1273016774	0.3888058714	1.4142108480e-04	2.9884732494e-05
	16	2.1080170284	0.1273015787	0.3888055837	1.8857177346e-04	3.9954950301e-05
	20	2.1068118054	0.1273011575	0.3888043556	2.3572851150e-04	5.0068282061e-05
$\Delta I_1 = 2.3495030986e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0190464964e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9698265352e-07$						

**Çizelge 4.5 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1	0.1	3.9799078278	0.8104624933	2.5790074453	1.0570074844e-03	3.0258981733e-04
LİN-1	0.05	3.9799076734	0.8104624929	2.5790074322	3.9251545364e-04	1.2883428324e-04
LİN-1	0.01	3.9799076238	0.8104624939	2.5790074280	2.2021254794e-04	8.4803120450e-05
[3]	0.125	3.9799617	0.8104575	2.5790071	0.72252×10 <sup>-3</sup>	0.21643×10 <sup>-3</sup>
[9]	0.125	3.97988	0.81046	2.57902	0.52171×10 <sup>-3</sup>	0.19828×10 <sup>-3</sup>
[11]	0.1	3.97989	0.810462	2.57901	0.217×10 <sup>-3</sup>	0.084×10 <sup>-3</sup>
[12]	0.1	3.97989	0.810467	2.57902	0.220×10 <sup>-3</sup>	0.086×10 <sup>-3</sup>
[13]	0.125	3.98203	0.808650	2.57302	4.688×10 <sup>-3</sup>	1.755×10 <sup>-3</sup>
[14]	0.125	3.961597	0.804185	2.558292	0.0184×10 <sup>-3</sup>	1.5664×10 <sup>-3</sup>
[15]	0.125	3.97986	0.810399	2.57880	0.227×10 <sup>-3</sup>	0.081×10 <sup>-3</sup>
[16]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	0.511×10 <sup>-3</sup>	0.198×10 <sup>-3</sup>
[17]	0.125	3.980016	0.8104624	2.579006	2.2050×10 <sup>-4</sup>	0.8448×10 <sup>-4</sup>
[18]	0.125	3.979958	0.8104596	2.578999	2.6086×10 <sup>-4</sup>	1.0299×10 <sup>-4</sup>
[19]	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	0.30×10 <sup>-3</sup>	0.116×10 <sup>-3</sup>
[20]	0.1	3.97994	0.81044	2.57894	0.36875×10 <sup>-3</sup>	0.13204×10 <sup>-3</sup>
[20]	0.125	3.97995	0.81046	2.57900	0.37841×10 <sup>-3</sup>	0.13993×10 <sup>-3</sup>
[21]	0.1	3.97997	0.810459	2.57901	0.55×10 <sup>-3</sup>	0.21×10 <sup>-3</sup>
[22]	0.125	3.97988	0.810465	2.57901	0.219×10 <sup>-3</sup>	0.086×10 <sup>-3</sup>
[23]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	0.511×10 <sup>-3</sup>	0.198×10 <sup>-3</sup>
[24]	0.125	3.9798798	0.8104625	2.5790075	2.15192×10 <sup>-4</sup>	0.82951×10 <sup>-4</sup>
[25]	0.125	3.9798831	0.81046248	2.5790074	2.06910×10 <sup>-4</sup>	0.78027×10 <sup>-4</sup>
[26]	0.1	3.979950	0.810521	2.579202	0.000702	0.000268
[27]	0.125	3.97972	0.81026	2.57873	0.266856×10 <sup>-3</sup>	0.091465×10 <sup>-3</sup>
[28]	0.2	3.9800	0.8104	2.5792	1.7569e-003	6.8432e-004
[29]	0.125	3.9799000	0.8104646	2.5790160	0.04921×10 <sup>-3</sup>	0.02020×10 <sup>-3</sup>
[30]	0.25	3.9799	0.8104	2.5790	0.27×10 <sup>-3</sup>	0.07×10 <sup>-3</sup>
[34]	0.1	3.9798834	0.8104625	2.5790075	-	3.08×10 <sup>-4</sup>
[36]	0.01	3.9799497	0.8104623	2.5790075	-	8.79×10 <sup>-5</sup>
[37]	0.1	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216	-	8.75×10 <sup>-5</sup>

**Çizelge 4.6 :** LİN-1 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1	0.1	2.1068116288	0.1273011574	0.3888043554	2.4502654593e-04	5.2404770859e-05
LİN-1	0.05	2.1068087918	0.1273011563	0.3888043510	6.8864376300e-05	1.5478587663e-05
LİN-1	0.01	2.1068078833	0.1273011559	0.3888043496	1.5637585109e-05	4.6486780003e-06
[3]	0.125	2.1094098	0.1273016386	0.38805990	0.05366×10 <sup>-3</sup>	0.01420×10 <sup>-3</sup>
[11]	0.1	2.10503	0.127302	0.388802	0.527×10 <sup>-3</sup>	0.432×10 <sup>-3</sup>
[12]	0.1	2.105	0.127302	0.388803	0.653×10 <sup>-3</sup>	0.432×10 <sup>-3</sup>
[13]	0.125	2.10769	0.127260	0.388677	0.347×10 <sup>-3</sup>	0.239×10 <sup>-3</sup>
[14]	0.125	2.128869	0.127228	0.388571	0.0281×10 <sup>-3</sup>	1.5506×10 <sup>-3</sup>
[15]	0.125	2.10908	0.127318	0.388854	0.537×10 <sup>-3</sup>	0.316×10 <sup>-3</sup>
[16]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	0.535×10 <sup>-3</sup>	0.198×10 <sup>-3</sup>
[17]	0.125	2.112292	0.1273037	0.388812	1.2735×10 <sup>-3</sup>	0.3467×10 <sup>-3</sup>
[19]	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	0.57×10 <sup>-3</sup>	0.432×10 <sup>-3</sup>
[20]	0.1	2.10948	0.12730	0.38880	0.65102×10 <sup>-3</sup>	0.43151×10 <sup>-3</sup>
[20]	0.125	2.10902	0.12731	0.38881	0.54701×10 <sup>-3</sup>	0.43151×10 <sup>-3</sup>
[21]	0.1	2.109	0.127302	0.388807	0.638×10 <sup>-3</sup>	0.233×10 <sup>-3</sup>
[23]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	0.535×10 <sup>-3</sup>	0.198×10 <sup>-3</sup>
[27]	0.125	2.10902	0.12730	0.38880	0.559402×10 <sup>-3</sup>	0.439145×10 <sup>-3</sup>
[29]	0.125	2.1053880	0.1273009	0.3888025	0.42247×10 <sup>-3</sup>	0.33643×10 <sup>-3</sup>
[31]	0.125	2.1045885	0.1273012	0.3888023	x	4.315×10 <sup>-4</sup>



**Şekil 4.1 :** Tek dalga hareketinin  $t = 0, 10$  ve  $20$  zamanlarındaki grafiği ve  $t = 20$  zamanındaki mutlak hata grafiği.

dir. Bu değerler analitik dalga değerleriyle uyumludur. Grafikten sınırlar civarında hatanın yok denecek kadar az olduğu buna karşın dalganın genliğini en yüksek olduğu  $x$  konumu civarında hatanın büyüdüğü görüldü.

### Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi

Bu kısımda, Problem 2'nin, LİN-1 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-200 \leq x \leq 400$  aralığında sırasıyla  $3c_1 = 0.6$  ve  $3c_2 = 0.3$  yüksekliğinde,  $x_1 = -177$  ve  $x_2 = -147$  konumunda olan iki dalganın girişimi  $t = 400$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.7'de  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.24$  ve  $0.12$  değerleri için Problem 2'nin nümerik çözümleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.6915531578e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.7653723152e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 5.6238362482e - 06$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3961265301e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 7.1350678432e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 1.5689552200e - 06$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $h$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin arttığı,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.8'de  $h = 0.12$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için Problem 2'nin nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960330462e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2183227458e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 1.1307618717e - 06$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü;  $\Delta I_2$  değerinde bir miktar artma olduğu görüldü.

Çizelge 4.9'da korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-1'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$

**Çizelge 4.7 :** LİN-1 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

	$h = 0.24$			$h = 0.12$			
	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$\Delta t = 0.1$	0	9.8582544848	3.2447884540	10.7783293821	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
	40	9.8599337141	3.2447763607	10.7783269586	9.8613403844	3.2447844473	10.7783239213
	80	9.8599454889	3.2447079781	10.7783072142	9.8616125987	3.2447673263	10.7783021151
	120	9.8599456484	3.2445419799	10.7782575041	9.8616371064	3.2447243968	10.7782449125
	160	9.8599455626	3.2442326123	10.7781589787	9.8616394077	3.2446467838	10.7781353260
	200	9.8599453492	3.2440204684	10.7780881335	9.8616395742	3.2445950352	10.7780589234
	240	9.8599454191	3.2442212204	10.7781551643	9.8616395606	3.2446449272	10.7781326372
	280	9.8599456460	3.2445376847	10.7782560591	9.8616395820	3.2447230899	10.7782431272
	320	9.8599459497	3.2447140908	10.7783089709	9.8616397036	3.2447669785	10.7783016813
	360	9.8599461185	3.2447828321	10.7783285875	9.8616398379	3.2447842480	10.7783236580
	400	9.8599460380	3.2448061077	10.7783350059	9.8616398612	3.2447901531	10.7783309320
		$\Delta I_1 = 1.6915531578e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3961265301e - 03$		
		$\Delta I_2 = 1.7653723152e - 05$			$\Delta I_2 = 7.1350678432e - 07$		
		$\Delta I_3 = 5.6238362482e - 06$			$\Delta I_3 = 1.5689552200e - 06$		

zamanında LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Şekil 4.2'de  $h = 0.12$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $3c_1$  yüksekliğinde  $x_1$  başlangıç noktasındaki ve  $3c_2$  yüksekliğinde  $x_2$  başlangıç noktasındaki iki soliter dalganın  $t = 0, 100, 200, 300$  ve  $400$  zamanlarında birbirleriyle etkileşimleri gösterildi. Grafikten büyük dalganın,  $t = 0$  zamanında küçük dalganın gerisinde iken  $t = 100$  zamanında küçük dalgayı içine aldığı görüldü.  $t = 200$  zamanında iç içe geçen dalgaların  $t = 300$  zamanında birbirinden ayrılmaya başladığı ve  $t = 400$  zamanında büyük dalganın, küçük dalgayı geçtiği görüldü. Bu girişim sonunda her iki dalganın da eski şekillerini korudukları gözlemlendi.  $t = 400$  zamanında büyük dalganın tepe noktasının  $x_1 = 311.2$  konumunda  $3c_1 = 0.6003008476$  genliğine, küçük dalganın tepe noktasının  $x_2 = 281.32$  konumunda  $3c_2 = 0.3001627556$  genliğine sahip olduğu hesaplandı.

### Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

Bu kısımda, Problem 3'ün, LİN-1 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $d = 2$  ve  $5$  eğimlerdeki dalgaların girişi  $t = 250$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi. İnvaryantlardaki değişim sabit olmadığı için  $M_1, M_2, M_3$  değerleri hesaplandı.

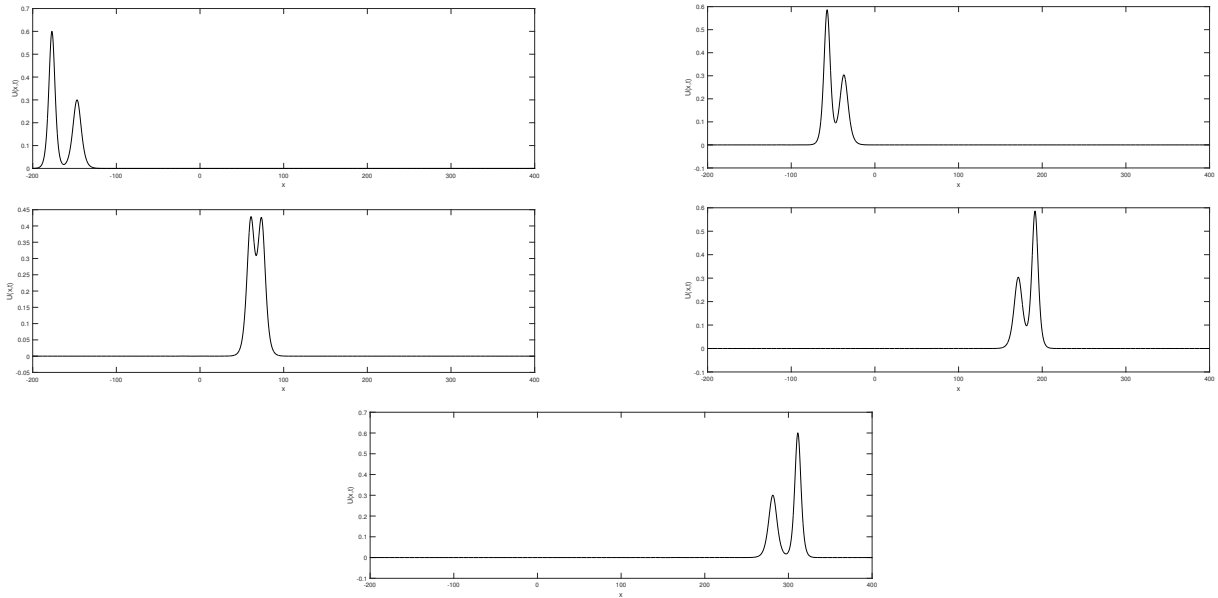
Çizelge 4.10'da Problem 3'ün  $d = 2, \Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504158, M_2 = 0.0109951012, M_3 = 0.0340794724$  bulunurken  $h =$

**Çizelge 4.8 :** LIN-1 ile Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta r$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$  ).

$t$	$\Delta r = 0.1$			$\Delta r = 0.05$			$\Delta r = 0.01$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8613403842	3.2447790988	10.7783044979	9.8613403790	3.2447833870	10.7783242516	9.8613403773	3.2447846874	10.7783302487
80	9.8616125980	3.2447436424	10.7782167677	9.8616125959	3.2447616579	10.7783024025	9.8616125953	3.2447673614	10.7783295286
120	9.8616371101	3.2446529437	10.7779886681	9.8616371088	3.2447068270	10.7782452418	9.8616371085	3.2447240015	10.7783276196
160	9.8616394517	3.2444842201	10.7775463923	9.8616394456	3.2446063087	10.7781354992	9.8616394437	3.2446453543	10.7783239368
200	9.8616396866	3.2443691001	10.7772391148	9.8616396754	3.2445386697	10.7780590078	9.8616396720	3.2445929223	10.7783213624
240	9.8616396855	3.2444799804	10.7775351953	9.8616396807	3.2446041137	10.7781330507	9.8616396793	3.2446437247	10.7783238575
280	9.8616396595	3.2446500528	10.7779794429	9.8616396602	3.2447054047	10.7782437197	9.8616396606	3.2447229619	10.7783275707
320	9.8616396857	3.2447429316	10.7782149916	9.8616396863	3.2447615100	10.7783022563	9.8616396867	3.2447673122	10.7783295248
360	9.8616397448	3.2447786773	10.7783034283	9.8616397412	3.2447833508	10.7783241924	9.8616397402	3.2447847187	10.7783302538
400	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061	9.8616397692	3.2447907635	10.7783314431	9.8616397677	3.2447906579	10.7783304938
	$\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3960330462e - 03$		
	$\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$			$\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$			$\Delta I_2 = 1.2183227458e - 06$		
	$\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$			$\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$			$\Delta I_3 = 1.1307618717e - 06$		

**Çizelge 4.9 :** LİN-1 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_2 = -147 -200 \leq x \leq 400$  ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-1	0.12	9.8616398612	3.2447901531	10.7783309320
[3]	0.12	9.86166027	3.2447357	10.778305
[16]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[22]	0.12	9.85830	3.24478	10.77819
[23]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[27]	0.25	9.8563	3.2351	10.7703
[28]	0.12	9.8631	3.2565	10.8224
[32]	0.12	9.8577	3.2445	10.7779
[36]	0.12	9.8579	3.2453	10.7807



**Şekil 4.2 :** İki soliter dalga girişiminin  $t = 0, 100, 200, 300$  ve  $400$  zamanlarındaki grafiği.

0.12 değeri için  $M_1 = 0.1074878328$ ,  $M_2 = 0.0109988001$ ,  $M_3 = 0.0340913615$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969699$ ,  $M_2 = 0.0109997010$ ,  $M_3 = 0.0340942569$  olarak bulundu.

Çizelge 4.11'de  $d = 2$  ve  $h = 0.24$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için Problem 3'ün nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $M_1 = 0.1074504158$ ,  $M_2 = 0.0109951012$ ,  $M_3 = 0.0340794724$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504167$ ,  $M_2 = 0.0109951021$ ,  $M_3 = 0.0340792140$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504169$ ,  $M_2 = 0.0109951023$ ,  $M_3 = 0.0340791307$  olarak bulundu.

Çizelge 4.12'de  $d = 5$  ve  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.24, 0.12$  ve  $0.06$  değerleri için Problem 3'ün nümerik çözümleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504104$ ,  $M_2 = 0.0109950546$ ,  $M_3 = 0.0340841451$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878299$ ,  $M_2 = 0.0109987878$ ,  $M_3 = 0.0340960282$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969705$ ,  $M_2 = 0.0109996982$ ,  $M_3 = 0.0340989257$  olarak bulundu.

Çizelge 4.13'te  $d = 5$  ve  $h = 0.24$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $0.01$  değerleri için Problem 3'ün nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504104$ ,  $M_2 = 0.0109950546$ ,  $M_3 = 0.0340841451$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504104$ ,  $M_2 = 0.0109950551$ ,  $M_3 = 0.0340839567$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504104$ ,  $M_2 = 0.0109950552$ ,  $M_3 = 0.0340838961$  olarak bulundu.

Çizelge 4.10, Çizelge 4.11, Çizelge 4.12 ve Çizelge 4.13'te verilen  $M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerlerinin (3.2.1) de verilen  $M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.14'te  $d = 2$  için LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.15'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.16'da  $d = 5$  için LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.17'de korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Problem 3'ün  $h = 0.24$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 0, 50, 100, 150, 200$  ve  $250$  zamanlarında  $d = 2$  ve  $d = 5$  eğimleri için elde edilen ardışık dalga oluşumu grafikleri sırasıyla

**Çizelge 4.10 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8988296959	2.7850312495
	100	14.3330410716	1.4485842804	4.4890438188
	150	19.7055616073	1.9983400907	6.1929444800
	200	25.0780818408	2.5480963084	7.8968036840
	250	30.4506039459	3.0978530856	9.6006480949
		$M_1 = 0.1074504158$		
		$M_2 = 0.0109951012$		
		$M_3 = 0.0340794724$		
0.12	0	3.5940000000	0.3496777776	1.0826400000
	50	8.9683915305	0.8996169683	2.7874840029
	100	14.3427830609	1.4495568398	4.4920914057
	150	19.7171745912	1.9994970256	6.1965872140
	200	25.0915661284	2.5494373334	7.9010416580
	250	30.4659581965	3.0993777951	9.6054803836
		$M_1 = 0.1074878328$		
		$M_2 = 0.0109988001$		
		$M_3 = 0.0340913615$		
0.06	0	3.5970000000	0.3499777778	1.0835700000
	50	8.9718485919	0.8999626508	2.7885585839
	100	14.3466971837	1.4499476949	4.4933109709
	150	19.7215457755	1.9999328180	6.1979517929
	200	25.0963943667	2.5499179715	7.9025512034
	250	30.4712424656	3.0999030385	9.6071342242
		$M_1 = 0.1074969699$		
		$M_2 = 0.0109997010$		
		$M_3 = 0.0340942569$		

**Çizelge 4.11** : LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8988296959	2.7850312495
	100	14.3330410716	1.4485842804	4.4890438188
	150	19.7055616073	1.9983400907	6.1929444800
	200	25.0780818408	2.5480963084	7.8968036840
	250	30.4506039459	3.0978530856	9.6006480949
		$M_1 = 0.1074504158$		
		$M_2 = 0.0109951012$		
		$M_3 = 0.0340794724$		
0.05	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988297089	2.7850234559
	100	14.3330410717	1.4485843251	4.4890234720
	150	19.7055616077	1.9983401728	6.1929097552
	200	25.0780819710	2.5480964549	7.8967541188
	250	30.4506041844	3.0978532924	9.6005834910
		$M_1=0.1074504167$		
		$M_2=0.0109951021$		
		$M_3=0.0340792140$		
0.01	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988297130	2.7850209510
	100	14.3330410717	1.4485843394	4.4890169251
	150	19.7055616077	1.9983401992	6.1928985786
	200	25.0780820171	2.5480965029	7.8967381668
	250	30.4506042203	3.0978533507	9.6005626690
		$M_1 = 0.1074504169$		
		$M_2 = 0.0109951023$		
		$M_3 = 0.0340791307$		

**Çizelge 4.12 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836588865	2.7382334273
	100	14.3330411354	1.4334094165	4.4426582243
	150	19.7055616712	1.9831631427	6.1467619226
	200	25.0780822069	2.5329186343	6.1467619226
	250	30.4506027349	3.0826747924	9.5545663644
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109950546$		
		$M_3 = 0.0340841451$		
0.12	0	3.5940001427	0.3345111395	1.0353900899
	50	8.9683915140	0.8844492276	2.7406863467
	100	14.3427830445	1.4343880589	4.4457044240
	150	19.7171745749	1.9843277098	6.1504026865
	200	25.0915661053	2.5342678140	7.8549307309
	250	30.4659576275	3.0842080895	9.5593971374
		$M_1 = 0.1074878299$		
		$M_2 = 0.0109987878$		
		$M_3 = 0.0340960282$		
0.06	0	3.5970001410	0.3348111393	1.0363200888
	50	8.9718484193	0.8847956799	2.7417610469
	100	14.3466970112	1.4347804623	4.4469238897
	150	19.7215456030	1.9847654509	6.1517671049
	200	25.0963941948	2.5347505536	7.8564401422
	250	30.4712427783	3.0847356993	9.5610515134
		$M_1 = 0.1074969705$		
		$M_2 = 0.0109996982$		
		$M_3 = 0.0340989257$		

**Çizelge 4.13 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836588865	2.7382334273
	100	14.3330411354	1.4334094165	4.4426582243
	150	19.7055616712	1.9831631427	6.1467619226
	200	25.0780822069	2.5329186343	6.1467619226
	250	30.4506027349	3.0826747924	9.5545663644
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109950546$		
		$M_3 = 0.0340841451$		
0.05	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836588878	2.7382319496
	100	14.3330411354	1.4334094300	4.4426509867
	150	19.7055616713	1.9831631848	6.1467434862
	200	25.0780822072	2.5329187127	7.8506626211
	250	30.4506027354	3.0826749088	9.5545192752
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109950551$		
		$M_3 = 0.0340839567$		
0.01	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836588882	2.7382314760
	100	14.3330411354	1.4334094343	4.4426486607
	150	19.7055616713	1.9831631984	6.1467375544
	200	25.0780822072	2.5329187379	7.8506522137
	250	30.4506027355	3.0826749462	9.5545041178
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109950552$		
		$M_3 = 0.0340838961$		

**Çizelge 4.14 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8988296959	2.7850312495
	100	14.3330410716	1.4485842804	4.4890438188
LİN-1	150	19.7055616073	1.9983400907	6.1929444800
	200	25.0780818408	2.5480963084	7.8968036840
	250	30.4506039459	3.0978530856	9.6006480949
[3]	250	30.462999	3.099644	9.607216
[17]	250	30.48700	3.10120	9.61074
[20]	250	30.48699	3.10147	9.61200
[21]	250	30.46299	3.09887	9.60482
[22]	250	30.4869971	3.10123	9.61118
[33]	250	30.862500	3.182114	9.867540

**Çizelge 4.15 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

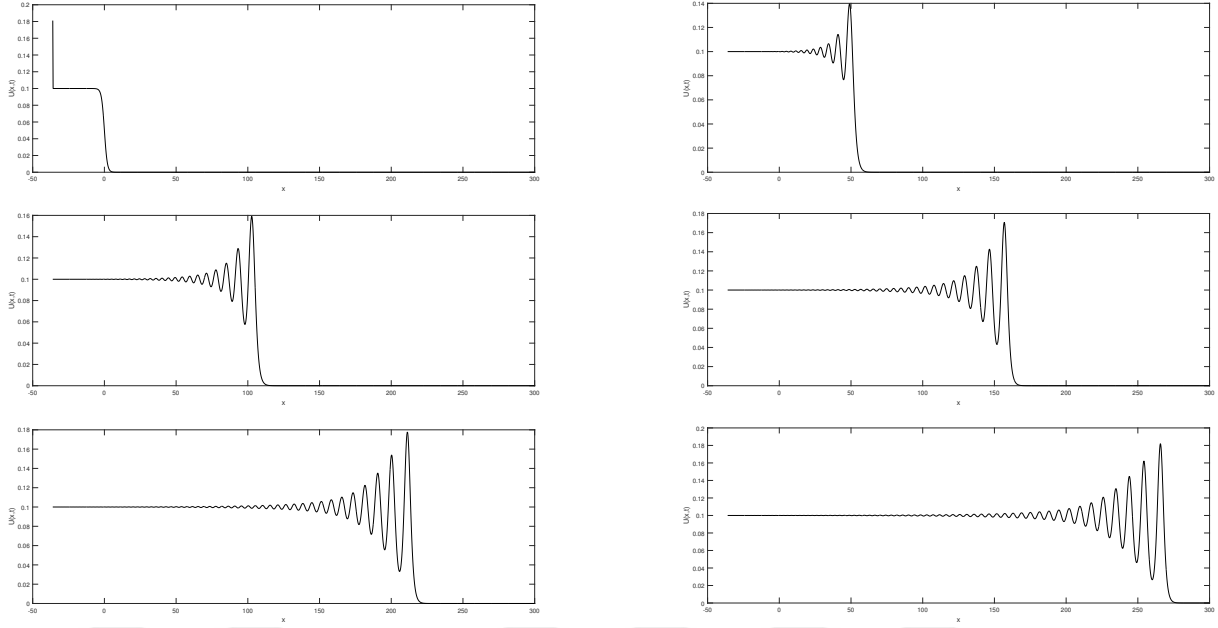
	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-1	0.24	0.1074504158	0.0109951012	0.0340794724
[3]	0.24	0.1074999951	0.0110022	0.0341057
[17]	0.24	0.1075	0.010999	0.034090
[20]	0.24	0.1075	0.010999	0.034095
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034096
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034092
[33]	0.24	0.109002	0.011322544	0.03511728

**Çizelge 4.16 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836588865	2.7382334273
	100	14.3330411354	1.4334094165	4.4426582243
LİN-1	150	19.7055616712	1.9831631427	6.1467619226
	200	25.0780822069	2.5329186343	6.1467619226
	250	30.4506027349	3.0826747924	9.5545663644
[3]	250	30.463000	3.084325	9.560418
[17]	250	30.48705	3.08611	9.56502
[20]	250	30.48705	3.08631	9.56592
[21]	250	30.46305	3.08376	9.55868
[22]	250	30.4869998	3.08613	9.56533
[33]	250	30.687597	3.127201	9.695225

**Çizelge 4.17 :** LİN-1 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-1	0.24	0.1074504104	0.0109950546	0.0340841451
[3]	0.24	0.1074999996	0.01100165	0.0341075
[17]	0.24	0.1075	0.011	0.034096
[20]	0.24	0.1075	0.011	0.034099
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034101
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034097
[33]	0.24	0.108302388	0.01116356	0.03461702



**Şekil 4.3 :** Ardışık dalga gelişiminin  $d = 2$  eğimi ve  $t = 0, 50, 100, 150, 200$  ve  $250$  zamanlarındaki grafiği.

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de verildi.  $d = 2$  eğimi için dalga oluşumunun daha hızlı başladığı ve  $t = 250$  zamanında daha fazla ardışık dalga oluşturduğu gözlemlendi.

#### **Problem 4: Dalga Oluşumu**

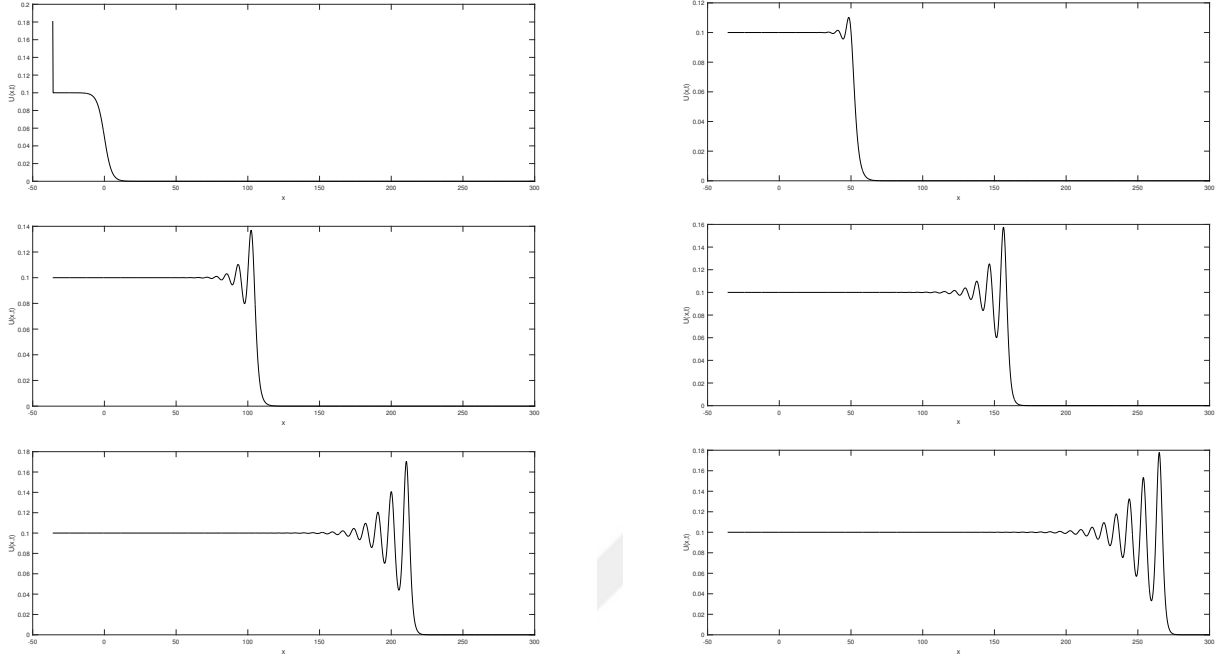
Bu kısımda, Problem 4'ün LİN-1 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgelerde verildi.  $0 \leq x \leq 50$  aralığında dalga oluşumu  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu$  nün farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.18'de  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu = 0.04$  değeri için  $\Delta I_1 = 1.0228386360e - 08$ ,  $\Delta I_2 = 1.0348223620e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 3.0682429717e - 05$  bulunurken  $\mu = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 5.6237063895e - 09$ ,  $\Delta I_2 = 1.0876661856e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 5.2493725709e - 04$  ve  $\mu = 0.001$  değeri için  $\Delta I_1 = 2.7976148417e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.6450183314e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 7.2093270499e - 03$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $\mu$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin  $\mu = 0.01$  değerinde küçüldüğü  $\mu = 0.001$  değerinde bir miktar arttığı,  $\Delta I_2$  değerinin bir miktar arttığı görüldü.

Çizelge 4.19'da korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-1 'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.01$  değerleri için LİN-1 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.18 :** LİN-1 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).

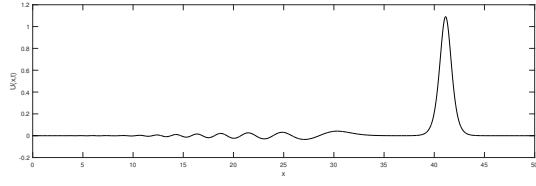
$\mu$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.04	0	1.7724538509	1.3034467028	4.7832691199
	5	1.7724538506	1.3034456262	4.7832992046
	10	1.7724538506	1.3034456651	4.7832998391
	15	1.7724538505	1.3034456678	4.7832998162
	20	1.7724538522	1.3034456679	4.7832998062
	25	1.7724538611	1.3034456679	4.7832998023
			$\Delta I_1 = 1.0228386360e - 08$	
		$\Delta I_2 = 1.0348223620e - 06$		
		$\Delta I_3 = 3.0682429717e - 05$		
0.01	0	1.7724538509	1.2658472787	4.7832691199
	5	1.7724538290	1.2658366443	4.7837678236
	10	1.7724538320	1.2658363802	4.7837918428
	15	1.7724538364	1.2658363760	4.7837936500
	20	1.7724538408	1.2658363881	4.7837939797
	25	1.7724538453	1.2658364020	4.7837940572
			$\Delta I_1 = 5.6237063895e - 09$	
		$\Delta I_2 = 1.0876661856e - 05$		
		$\Delta I_3 = 5.2493725709e - 04$		
0.001	0	1.7724538509	1.2545674515	4.7832691199
	5	1.7724539867	1.2544588489	4.7897141643
	10	1.7724608853	1.2544783019	4.7901092508
	15	1.7724678638	1.2545023588	4.7902443838
	20	1.7724748448	1.2545266609	4.7903628115
	25	1.7724818271	1.2545510013	4.7904784469
			$\Delta I_1 = 2.7976148417e - 05$	
		$\Delta I_2 = 1.6450183314e - 05$		
		$\Delta I_3 = 7.2093270499e - 03$		



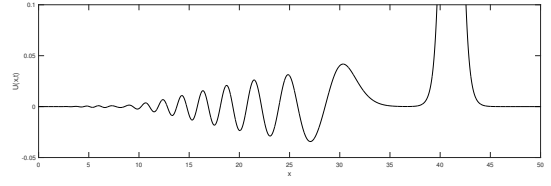
**Şekil 4.4 :** Ardışık dalga gelişiminin  $d = 5$  eğimi ve  $t = 0, 50, 100, 150, 200$  ve  $250$  zamanlarındaki grafiği.

**Çizelge 4.19 :** LİN-1 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).

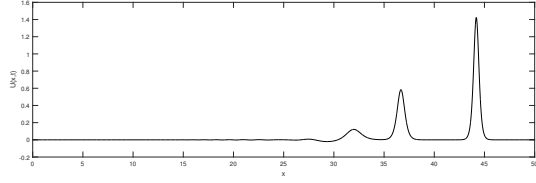
	$\mu$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-1	0.04	1.7724538611	1.3034456679	4.7832998023
LİN-1	0.01	1.7724538453	1.2658364020	4.7837940572
LİN-1	0.001	1.7724818271	1.2545510013	4.7904784469
[17]	0.04	1.772454	1.303447	4.783298
[17]	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
[17]	0.001	1.772484	1.254676	4.790517
[30]	0.04	1.7724	1.1554	4.1864
[30]	0.01	1.8024	0.9209	3.3385
[30]	0.001	1.7724	1.0744	4.0965



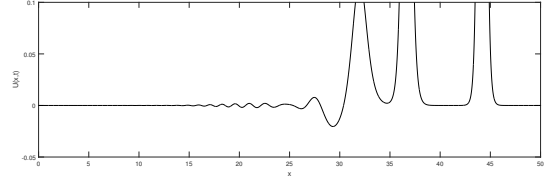
(a)  $\mu = 0.04$



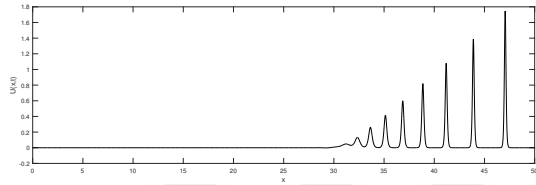
(b)  $\mu = 0.04$



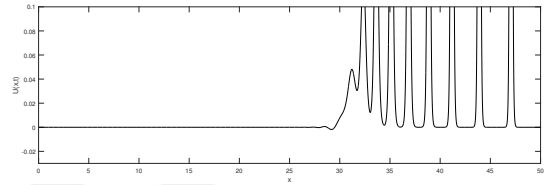
(c)  $\mu = 0.01$



(d)  $\mu = 0.01$



(e)  $\mu = 0.001$



(f)  $\mu = 0.001$

**Şekil 4.5 :** Dalga oluşumunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu = 0.04$  ,  $\mu = 0.01$  ve  $\mu = 0.001$  değerleri için  $t = 25$  zamanındaki grafikleri.

Problem 4'ün  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için,  $\mu = 0.04$  ,  $\mu = 0.01$  ve  $\mu = 0.001$  için elde edilen dalga oluşumu grafikleri  $t = 25$  zamanında ve  $U$  eksenini küçültülerek Şekil 4.5 ile verildi.  $\mu = 0.04$  için küçük salınımlar ile birlikte bir tek dalga oluşumu,  $\mu = 0.01$  değeri kullanıldığında üç tek dalga oluşumu ve  $\mu = 0.001$  değeri içinse tek dalgaların arkasında salınım yapan dalga oluşumu gözlemlendi.

## 4.2 Lineerleştirme -2 (LIN-2)

Bu kısımda, (4.0.1) ile verilen RLW denkleminde lineer olmayan  $UU_x$  terimindeki  $U$  yerine

$$U = Z_i = \frac{U_i + U_{i+1}}{2}$$

olarak alınırsa

$$UU_x = Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

olur. Denkleminde görülen  $U_t$  ve  $U_{xxt}$  terimleri yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$U_{xxt} = \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı,  $U_x$  terimi yerine de

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)U_x^{n+1} - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (4.2.1)$$

bulunur.

$U(x,t)$ 'ye bir yaklaşım  $U_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla (2.2.4) ile verilen  $U$  ve  $U'$ 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_i' = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U_i'' = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  katsayıları

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3 \cos(h) \csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2 \cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4 \cos(h)}$$

dir. (4.2.1) ile verilen RLW denklemine bu yaklaşımlar yerine yazılır

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) - \mu(\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) \\ & = (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)(\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - \mu(\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \delta_{i-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^{n+1}(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{i+1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ \delta_{i-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^n(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{i+1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

elde edilir. Burada

$$Z_i = \frac{\alpha_1 \delta_{i-1} + (\alpha_1 + \alpha_2) \delta_i + (\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{i+1} + \alpha_1 \delta_{i+2}}{2}$$

dir. Bu sistem

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\ a_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ a_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \\ b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\ b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & & & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

şeklinde matris formunda gösterilir. Bu sistemde  $(N + 3)$  bilinmeyen,  $(N + 1)$  tane denklem vardır. Bu sistemde problemle verilen sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta_{i-1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_2 \delta_i - \alpha_1 \delta_{i+1}}{\alpha_1} \\ i = 0 \implies \delta_{-1} &= \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1} \end{aligned}$$

ve

$$\delta_{i+1} = U(x_i, t) - \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i$$

$$i = N \implies \delta_{N+1} = \frac{U(b,t) - \alpha_2 \delta_N - \alpha_1 \delta_{N-1}}{\alpha_1}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$i = 0$  için  $\delta_{-1}$  değeri (4.2.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left( \frac{U^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ \delta_1^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) &= \left( \frac{U^n(a,t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \\ & \delta_0^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_1^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1} \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right) + \\ & \delta_1^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) (\beta_2 - \beta_1) \right) = \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) \\ & + \delta_0^n \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right) + \delta_1^n \left( \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_0) (\beta_1 - \beta_2) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $i = N$  için  $\delta_{N+1}$  değeri (4.2.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^{n+1} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ & \delta_{N-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) (\beta_1 - \beta_2) \right) + \delta_N^{n+1} \left( \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right) + \\ & \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \delta_{N-1}^n \left( \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) (\beta_2 - \beta_1) \right) + \\ & \delta_N^n \left( \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right) + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_N) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.3) matris sistemini elde edilen sonuçlarla yeniden yazarsak,

$$c_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2$$

$$c_2 = \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_2 - \beta_1)$$

$$c_3 = \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_1 - \beta_2)$$

$$c_4 = \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)$$

$$a_1 = \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1$$

$$a_2 = \alpha_2 - \mu \gamma_2$$

$$a_3 = \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1$$

ve

$$b_1 = \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1$$

$$b_2 = \alpha_2 - \mu \gamma_2$$

$$b_3 = \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1$$

$$d_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2$$

$$d_2 = \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_1 - \beta_2)$$

$$d_3 = \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_2 - \beta_1)$$

$$d_4 = \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)$$

ve

$$e_1 = \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right)$$

$$e_2 = \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)$$

$$f_1 = \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right)$$

$$f_2 = \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)$$



$h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 3.2297279160e - 03$ ,  $L_\infty = 1.1063035960e - 03$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının bir miktar arttığı görüldü.

Çizelge 4.21'de  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.4218303227e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 4.9414400490e - 04$ ,  $\Delta I_3 = 1.6306753594e - 03$ ;  $\Delta I_1 = 8.6662011475e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 2.9785461372e - 03$ ,  $\Delta I_3 = 9.8295842320e - 03$  ve  $\Delta I_1 = 1.2886482069e - 02$ ,  $\Delta I_2 = 4.4108361115e - 03$ ,  $\Delta I_3 = 1.4554945985e - 02$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe;  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinde bir miktar artma görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0327144975e - 03$ ,  $L_\infty = 3.1710564898e - 04$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 1.9051746615e - 03$ ,  $L_\infty = 5.8779235765e - 04$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 3.2284171473e - 03$ ,  $L_\infty = 1.2576845018e - 03$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının bir miktar arttığı görüldü.

Çizelge 4.22'de  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.1335273393e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 2.1386083604e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 6.6262697234e - 06$ ;  $\Delta I_1 = 1.5258370376e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 4.0071688530e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 1.2383956747e - 04$  ve  $\Delta I_1 = 4.4667477249e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 7.0413763914e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 2.1759651412e - 04$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin  $h = 0.05$  için küçüldüğü  $h = 0.01$  için bir miktar arttığı,  $\Delta I_2$  değerinin ise bir miktar arttığı görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4488187525e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2064633363e - 05$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 9.5209976527e - 05$ ,  $L_\infty = 3.2432140952e - 05$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 1.2154225264e - 04$ ,  $L_\infty = 3.4035517701e - 05$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerinde  $h = 0.05$  için küçülme  $h = 0.01$  için bir miktar artma görüldü.

Çizelge 4.23'te  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.1335273393e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 2.1386083604e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 6.6262697234e - 06$ ;  $\Delta I_1 = 5.9253548543e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 3.6879479532e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 1.1393969354e - 04$  ve  $\Delta I_1 =$

$8.9594805367e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 6.8095794362e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 2.1039818443e - 04$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin de küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin ise bir miktar arttığı görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4488187525e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2064633363e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.4892400024e - 04$ ,  $L_\infty = 6.6101577003e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.6773666063e - 04$ ,  $L_\infty = 7.8781501115e - 05$  olarak bulundu. Buradan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerleri bir miktar arttı.

Çizelge 4.24'te korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile LİN-2'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-2 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.3$  için  $L_2 = 1.0327144975e - 03$ ,  $L_\infty = 3.1710564898e - 04$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Dağ vd. [18],  $h = 0.1$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 2.2050 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.8448 \times 10^{-4}$ ;  $L_2 = 0.30 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.116 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.36875 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.13204 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Kuintik kollokasyon metoduyla; Saka vd. [24],  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.15192 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.82951 \times 10^{-4}$  olarak; Islam vd. [25], meshfree kollokasyon metodu ile yaptıkları çalışmada  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.06910 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.78027 \times 10^{-4}$  olarak hesaplamışlardır. Dağ vd. [34], kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak  $L_\infty = 3.08 \times 10^{-4}$  bulmuşlardır. Sonuçlardan görüldüğü üzere; LİN-2 ile elde ettiğimiz sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalara uyumlu fakat biraz daha kötü sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.25'te korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-2'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-2 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.09$  için  $L_2 = 2.4488187525e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2064633363e - 05$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 1.2735 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.3467 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.65102 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.43151 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki, LİN-2 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

**Çizelge 4.20 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9802314564	0.8105612683	2.5793334128	2.1735274248e-04	7.5477284854e-05
	8	3.9805234473	0.8106600725	2.5796594660	4.2894434616e-04	1.4590540268e-04
	12	3.9808105986	0.8107589005	2.5799855978	6.3509726943e-04	2.0871751753e-04
	16	3.9810909306	0.8108577531	2.5803118116	8.3622205348e-04	2.6487241249e-04
	20	3.9813485026	0.8109566316	2.5806381121	1.0327144975e-03	3.1710564898e-04
$\Delta I_1 = 1.4218303227e-03, \Delta I_2 = 4.9414400490e-04, \Delta I_3 = 1.6306753594e-03$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9816794368	0.8110576679	2.5809715182	3.9645455977e-04	1.4626144070e-04
	8	3.9834197734	0.8116530260	2.5829362272	7.8401632758e-04	2.7609946940e-04
	12	3.9851557188	0.8122486462	2.5849018366	1.1630852673e-03	3.8143712196e-04
	16	3.9868853863	0.8128446218	2.5868686689	1.5358036061e-03	4.6333264623e-04
	20	3.9885928748	0.8134410399	2.5888370210	1.9051746615e-03	5.8779235765e-04
$\Delta I_1 = 8.6662011475e-03, \Delta I_2 = 2.9785461372e-03, \Delta I_3 = 9.8295842320e-03$						
0.01	0	3.9799266740	0.8104624941	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9828377608	0.8114547591	2.5822819295	6.5396564973e-04	2.1805885495e-04
	8	3.9857369013	0.8124473883	2.5855576807	1.3020571356e-03	4.1238592802e-04
	12	3.9886322809	0.8134406139	2.5888354993	1.9448899589e-03	6.3244829934e-04
	16	3.9915222163	0.8144347123	2.5921163359	2.5858686539e-03	8.6357367948e-04
	20	3.9943910055	0.8154299377	2.5954010571	3.2297279160e-03	1.1063035960e-03
$\Delta I_1 = 1.4464331461e-02, \Delta I_2 = 4.9674435329e-03, \Delta I_3 = 1.6393620398e-02$						

**Çizelge 4.21 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9802314564	0.8105612683	2.5793334128	2.1735274248e-04	7.5477284854e-05
	8	3.9805234473	0.8106600725	2.5796594660	4.2894434616e-04	1.4590540268e-04
	12	3.9808105986	0.8107589005	2.5799855978	6.3509726943e-04	2.0871751753e-04
	16	3.9810909306	0.8108577531	2.5803118116	8.3622205348e-04	2.6487241249e-04
	20	3.9813485026	0.8109566316	2.5806381121	1.0327144975e-03	3.1710564898e-04
$\Delta I_1 = 1.4218303227e-03, \Delta I_2 = 4.9414400490e-04, \Delta I_3 = 1.6306753594e-03$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9816794368	0.8110576679	2.5809715182	3.9645455977e-04	1.4626144070e-04
	8	3.9834197734	0.8116530260	2.5829362272	7.8401632758e-04	2.7609946940e-04
	12	3.9851557188	0.8122486462	2.5849018366	1.1630852673e-03	3.8143712196e-04
	16	3.9868853863	0.8128446218	2.5868686689	1.5358036061e-03	4.6333264623e-04
	20	3.9885928748	0.8134410399	2.5888370210	1.9051746615e-03	5.8779235765e-04
$\Delta I_1 = 8.6662011475e-03, \Delta I_2 = 2.9785461372e-03, \Delta I_3 = 9.8295842320e-03$						
0.01	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9773688266	0.8095797593	2.5760944466	6.1797457945e-04	2.3491873552e-04
	8	3.9747984791	0.8086971077	2.5731817523	1.2492689347e-03	4.7711644048e-04
	12	3.9722237382	0.8078147229	2.5702700153	1.8935232431e-03	7.2772322842e-04
	16	3.9696428634	0.8069328343	2.5673600236	2.5523770279e-03	9.8780155252e-04
	20	3.9670401902	0.8060516515	2.5644524908	3.2284171473e-03	1.2576845018e-03
$\Delta I_1 = 1.2886482069e-02, \Delta I_2 = 4.4108361115e-03, \Delta I_3 = 1.4554945985e-02$						

**Çizelge 4.22 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları (  $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$  ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081271502	0.1273020516	0.3888070406	4.8998222247e-05	1.0542286504e-05
	8	2.1085476401	0.1273025784	0.3888086545	9.7984372923e-05	2.1026226731e-05
	12	2.1085218218	0.1273030218	0.3888100255	1.4695982932e-04	3.1444289030e-05
	16	2.1080344088	0.1273033712	0.3888111225	1.9592581604e-04	4.1790863754e-05
	20	2.1068334030	0.1273033980	0.3888112789	2.4488187525e-04	5.2064633363e-05
$\Delta I_1 = 2.1335273393e-04$ , $\Delta I_2 = 2.1386083604e-06$ , $\Delta I_3 = 6.6262697234e-06$						
0.05	0	2.1070467985	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1082013686	0.1273096391	0.3888304846	1.9437275627e-05	6.5659011553e-06
	8	2.1086956883	0.1273177527	0.3888555421	3.8683941461e-05	1.3134294464e-05
	12	2.1087433783	0.1273257830	0.3888803565	5.7732244258e-05	1.9668217431e-05
	16	2.1083288531	0.1273337191	0.3889048962	7.6575864832e-05	2.6116528279e-05
	20	2.1071993822	0.1273413315	0.3889284923	9.5209976527e-05	3.2432140952e-05
$\Delta I_1 = 1.5258370376e-04$ , $\Delta I_2 = 4.0071688530e-05$ , $\Delta I_3 = 1.2383956747e-04$						
0.01	0	2.1070468123	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1082605168	0.1273157078	0.3888492371	2.4478819001e-05	6.9039343012e-06
	8	2.1088138613	0.1273298901	0.3888930464	4.8887809405e-05	1.3817642231e-05
	12	2.1089204736	0.1273439889	0.3889366125	7.3210227829e-05	2.0690098736e-05
	16	2.1085646717	0.1273579932	0.3889799032	9.7431979176e-05	2.7451442487e-05
	20	2.1074934870	0.1273716736	0.3890222492	1.2154225264e-04	3.4035517701e-05
$\Delta I_1 = 4.4667477249e-04$ , $\Delta I_2 = 7.0413763914e-05$ , $\Delta I_3 = 2.1759651412e-04$						

**Çizelge 4.23 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları (  $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$  ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081271502	0.1273020516	0.3888070406	4.8998222247e-05	1.0542286504e-05
	8	2.1085476401	0.1273025784	0.3888086545	9.7984372923e-05	2.1026226731e-05
	12	2.1085218218	0.1273030218	0.3888100255	1.4695982932e-04	3.1444289030e-05
	16	2.1080344088	0.1273033712	0.3888111225	1.9592581604e-04	4.1790863754e-05
	20	2.1068334030	0.1273033980	0.3888112789	2.4488187525e-04	5.2064633363e-05
$\Delta I_1 = 2.1335273393e-04$ , $\Delta I_2 = 2.1386083604e-06$ , $\Delta I_3 = 6.6262697234e-06$						
0.05	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1080512647	0.1272942482	0.3887829281	4.9347196794e-05	1.3172017828e-05
	8	2.1083958852	0.1272869715	0.3887604292	9.8915877445e-05	2.6369630027e-05
	12	2.1082942131	0.1272796113	0.3887376871	1.4870372411e-04	3.9590171853e-05
	16	2.1077309771	0.1272721569	0.3887146704	1.9870797908e-04	5.2833511309e-05
	20	2.1064542202	0.1272643799	0.3886907129	2.4892400024e-04	6.6101577003e-05
$\Delta I_1 = 5.9253548543e-04$ , $\Delta I_2 = 3.6879479532e-05$ , $\Delta I_3 = 1.1393969354e-04$						
0.01	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1079905643	0.1272880052	0.3887636373	5.2821714878e-05	1.5740818770e-05
	8	2.1082744899	0.1272744853	0.3887218471	1.0601559858e-04	3.1485964043e-05
	12	2.1081121285	0.1272608819	0.3886798132	1.5957239782e-04	4.7235904263e-05
	16	2.1074882144	0.1272471841	0.3886375043	2.1348287158e-04	6.3000977856e-05
	20	2.1061508077	0.1272331636	0.3885942544	2.6773666063e-04	7.8781501115e-05
$\Delta I_1 = 8.9594805367e-04$ , $\Delta I_2 = 6.8095794362e-05$ , $\Delta I_3 = 2.1039818443e-04$						

**Çizelge 4.24 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-2	0.1	3.9813485026	0.8109566316	2.5806381121	$1.0327144975e-03$	$3.1710564898e-04$
LİN-2	0.05	3.9885928748	0.8134410399	2.5888370210	$1.9051746615e-03$	$5.8779235765e-04$
LİN-2	0.01	3.9943910055	0.8154299377	2.5954010571	$3.2297279160e-03$	$1.1063035960e-03$
[3]	0.125	3.9799617	0.8104575	2.5790071	$0.72252 \times 10^{-3}$	$0.21643 \times 10^{-3}$
[9]	0.125	3.97988	0.81046	2.57902	$0.52171 \times 10^{-3}$	$0.19828 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	3.97989	0.810462	2.57901	$0.217 \times 10^{-3}$	$0.084 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	3.97989	0.810467	2.57902	$0.220 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	3.98203	0.808650	2.57302	$4.688 \times 10^{-3}$	$1.755 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	3.961597	0.804185	2.558292	$0.0184 \times 10^{-3}$	$1.5664 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	3.97986	0.810399	2.57880	$0.227 \times 10^{-3}$	$0.081 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	3.980016	0.8104624	2.579006	$2.2050 \times 10^{-4}$	$0.8448 \times 10^{-4}$
[18]	0.125	3.979958	0.8104596	2.578999	$2.6086 \times 10^{-4}$	$1.0299 \times 10^{-4}$
[19]	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	$0.30 \times 10^{-3}$	$0.116 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	3.97994	0.81044	2.57894	$0.36875 \times 10^{-3}$	$0.13204 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	3.97995	0.81046	2.57900	$0.37841 \times 10^{-3}$	$0.13993 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	3.97997	0.810459	2.57901	$0.55 \times 10^{-3}$	$0.21 \times 10^{-3}$
[22]	0.125	3.97988	0.810465	2.57901	$0.219 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[24]	0.125	3.9798798	0.8104625	2.5790075	$2.15192 \times 10^{-4}$	$0.82951 \times 10^{-4}$
[25]	0.125	3.9798831	0.81046248	2.5790074	$2.06910 \times 10^{-4}$	$0.78027 \times 10^{-4}$
[26]	0.1	3.979950	0.810521	2.579202	0.000702	0.000268
[27]	0.125	3.97972	0.81026	2.57873	$0.266856 \times 10^{-3}$	$0.091465 \times 10^{-3}$
[28]	0.2	3.9800	0.8104	2.5792	$1.7569e-003$	$6.8432e-004$
[29]	0.125	3.9799000	0.8104646	2.5790160	$0.04921 \times 10^{-3}$	$0.02020 \times 10^{-3}$
[30]	0.25	3.9799	0.8104	2.5790	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.07 \times 10^{-3}$
[34]	0.125	3.9798827	0.8104626	2.5790079	–	$3.08 \times 10^{-4}$
[36]	0.01	3.9799497	0.8104623	2.5790075	–	$8.79 \times 10^{-5}$
[37]	0.1	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216	–	$8.75 \times 10^{-5}$

**Çizelge 4.25 :** LİN-2 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-2	0.1	2.1068334030	0.1273033980	0.3888112789	$2.4488187525e-04$	$5.2064633363e-05$
LİN-2	0.05	2.1071993822	0.1273413315	0.3889284923	$9.5209976527e-05$	$3.2432140952e-05$
LİN-2	0.01	2.1074934870	0.1273716736	0.3890222492	$1.2154225264e-04$	$3.4035517701e-05$
[3]	0.125	2.1094098	0.1273016386	0.38805990	$0.05366 \times 10^{-3}$	$0.01420 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	2.10503	0.127302	0.388802	$0.527 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	2.105	0.127302	0.388803	$0.653 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	2.10769	0.127260	0.388677	$0.347 \times 10^{-3}$	$0.239 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	2.128869	0.127228	0.388571	$0.0281 \times 10^{-3}$	$1.5506 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	2.10908	0.127318	0.388854	$0.537 \times 10^{-3}$	$0.316 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	2.112292	0.1273037	0.388812	$1.2735 \times 10^{-3}$	$0.3467 \times 10^{-3}$
[19]	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	2.10948	0.12730	0.38880	$0.65102 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	2.10902	0.12731	0.38881	$0.54701 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	2.109	0.127302	0.388807	$0.638 \times 10^{-3}$	$0.233 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[27]	0.125	2.10902	0.12730	0.38880	$0.559402 \times 10^{-3}$	$0.439145 \times 10^{-3}$
[29]	0.125	2.1053880	0.1273009	0.3888025	$0.42247 \times 10^{-3}$	$0.33643 \times 10^{-3}$
[31]	0.125	2.1045885	0.1273012	0.3888023	x	$4.315 \times 10^{-4}$

### Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi

Bu kısımda, Problem 2'nin LİN-2 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-200 \leq x \leq 400$  aralığında sırasıyla  $3c_1 = 0.6$  ve  $3c_2 = 0.3$  yüksekliğinde,  $x_1 = -177$  ve  $x_2 = -147$  konumunda olan iki dalganın girişimi  $t = 400$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.26'da Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.24$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.4630410527e + 00$ ,  $\Delta I_2 = 8.2659141320e - 01$ ,  $\Delta I_3 = 2.8950737342e + 00$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $\Delta I_1 = 2.7869151619e - 02$ ,  $\Delta I_2 = 1.3503567350e - 02$ ,  $\Delta I_3 = 4.5890268067e - 02$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $h$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin arttığı,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.27'de  $h = 0.12$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$  değerleri için Problem 2'nin nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 2.7869151619e - 02$ ,  $\Delta I_2 = 1.3503567350e - 02$ ,  $\Delta I_3 = 4.5890268067e - 02$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $\Delta I_1 = 7.9885599420e - 01$ ,  $\Delta I_2 = 4.7384361669e - 01$ ,  $\Delta I_3 = 1.6707014541e + 00$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 1.2964361567e + 00$ ,  $\Delta I_2 = 7.4308334299e - 01$ ,  $\Delta I_3 = 2.6075544321e + 00$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü;  $\Delta I_2$  değerinde bir miktar artma olduğu görüldü.

Çizelge 4.28'de korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile LİN-2'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

### Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

Bu kısımda, Problem 3'ün LİN-2 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $d = 2, 5$  eğimlerdeki dalgaların girişimi  $t = 250$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi. İnvaryantlardaki değişim sabit olmadığı için  $M_1, M_2, M_3$  değerleri hesaplandı.

Çizelge 4.29'da  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1062155131$ ,  $M_2 = 0.0107577423$ ,  $M_3 = 0.0333330028$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri

**Çizelge 4.26 :** LİN-2 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $3c_1 = 0.6$ ,  $3c_2 = 0.3$ ,  $x_1 = -177$ ,  $x_1 = -147$   $-200 \leq x \leq 400$  ).

$t$	$h = 0.24$			$h = 0.12$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582544848	3.2447884540	10.7783293821	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.6391200853	3.1067030829	10.2860329153	9.8583895919	3.2437233596	10.7748025615
80	9.4343444313	2.9824667783	9.8457749132	9.8557487386	3.2426151240	10.7711480161
120	9.2532533575	2.8751046565	9.4677080799	9.8528801236	3.2413771107	10.7670719226
$\Delta t = 0.1$ 160	9.1076384380	2.7916496593	9.1763609438	9.8497810426	3.2398341660	10.7619435696
200	9.0028919590	2.7364448494	8.9861473171	9.8461159470	3.2379180056	10.7553860114
240	8.9177594530	2.6951038030	8.8447135556	9.8424052769	3.2360707806	10.7488598886
280	8.8171477413	2.6428363425	8.6638238778	9.8392342107	3.2346358542	10.7437783941
320	8.6895095274	2.5736215184	8.4229825273	9.8362945144	3.2334526671	10.7397021573
360	8.5449878228	2.4961775849	8.1536942206	9.8333503626	3.2323563516	10.7360095638
400	8.3952134321	2.4181970408	7.8832556479	9.8303745830	3.2312858722	10.7324390950
	$\Delta I_1 = 1.4630410527e + 00$			$\Delta I_1 = 2.7869151619e - 02$		
	$\Delta I_2 = 8.2659141320e - 01$			$\Delta I_2 = 1.3503567350e - 02$		
	$\Delta I_3 = 2.8950737342e + 00$			$\Delta I_3 = 4.5890268067e - 02$		

için  $M_1 = 0.1073594606$ ,  $M_2 = 0.0109731922$ ,  $M_3 = 0.0340106607$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1080036712$ ,  $M_2 = 0.0111041354$ ,  $M_3 = 0.0344240739$  olarak bulundu.

Çizelge 4.30'da  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1062155131$ ,  $M_2 = 0.0107577423$ ,  $M_3 = 0.0333330028$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1057744249$ ,  $M_2 = 0.0106776305$ ,  $M_3 = 0.0330816027$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1054434984$ ,  $M_2 = 0.0106188818$ ,  $M_3 = 0.0328975422$  olarak bulundu.

Çizelge 4.31'de  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1067509529$ ,  $M_2 = 0.0108627071$ ,  $M_3 = 0.0336679610$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074197546$ ,  $M_2 = 0.0109855888$ ,  $M_3 = 0.0340544499$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1077784088$ ,  $M_2 = 0.0110558025$ ,  $M_3 = 0.0342758892$  olarak bulundu.

Çizelge 4.32'de  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1067509529$ ,  $M_2 = 0.0108627071$ ,  $M_3 = 0.0336679610$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1064909201$ ,  $M_2 = 0.0108156447$ ,  $M_3 = 0.0335201637$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1062936622$ ,  $M_2 = 0.0107806563$ ,  $M_3 = 0.0334104663$  olarak bulundu.

Çizelge 4.29, Çizelge 4.30, Çizelge 4.31 ve Çizelge 4.32'de verilen  $M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerlerinin (3.2.1) de verilen  $M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.27 : LIN-2 ile Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$  )**

$t$	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$			$\Delta t = 0.01$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8583895919	3.2437233596	10.7748025615	9.7504110132	3.1750950781	10.5296014268	9.6654626917	3.1217614355	10.3394051977
80	9.8583895919	3.2426151240	10.7711480161	9.6456857262	3.1099574344	10.2978987657	9.4844806382	3.0109446593	9.9461053379
120	9.8528801236	3.2413771107	10.7670719226	9.5515505004	3.0520373634	10.0927158300	9.3247326034	2.9152457219	9.6083381687
160	9.8497810426	3.2398341660	10.7619435696	9.4765417654	3.0070879681	9.9346242267	9.1976500002	2.8416530383	9.3506034467
200	9.8461159470	3.2379180056	10.7553860114	9.4241459084	2.9785911633	9.8358160442	9.1076906148	2.7939245830	9.1856140934
240	9.8424052769	3.2360707806	10.7488598886	9.3781299032	2.9548948359	9.7540362525	9.0338987969	2.7576543063	9.0613466727
280	9.8392342107	3.2346358542	10.7437783941	9.3166793125	2.9198161933	9.6312140595	8.9435901376	2.7095804620	8.89480004742
320	9.8362945144	3.2334526671	10.7397021573	9.2377502897	2.8733783068	9.4678042022	8.8278208012	2.6453801469	8.6710460077
360	9.8333503626	3.2323563516	10.7360095638	9.1498424422	2.8223662204	9.2883001127	8.6970111532	2.5737532137	8.4213865010
400	9.8303745830	3.2312858722	10.7324390950	9.0593877404	2.7709458229	9.1076279090	8.5618075780	2.5017060966	8.1707749309
					$\Delta I_1 = 7.9885599420e-01$			$\Delta I_1 = 1.2964361567e+00$	
					$\Delta I_2 = 4.7384361669e-01$			$\Delta I_2 = 7.4308334299e-01$	
					$\Delta I_3 = 4.5890268067e-02$			$\Delta I_3 = 2.6075544321e+00$	

**Çizelge 4.28 :** LİN-2 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_2$
LİN-2	0.12	9.8303745830	3.2312858722	10.7324390950
[3]	0.12	9.86166027	3.2447357	10.778305
[16]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[22]	0.12	9.85830	3.24478	10.77819
[23]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[27]	0.25	9.8563	3.2351	10.7703
[28]	0.12	9.8631	3.2565	10.8224
[32]	0.12	9.8577	3.2445	10.7779
[36]	0.12	9.8579	3.2453	10.7807

Çizelge 4.33'te  $d = 2$  için LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.34'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.35'te  $d = 5$  için LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.36'da korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

#### **Problem 4: Dalga Oluşumu**

Bu kısımda, Problem 4'ün LİN-2 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgede verildi.  $0 \leq x \leq 50$  aralığında dalga oluşumu  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu$  nün farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.37'de  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\mu = 0.04$  değeri için  $\Delta I_1 = 7.7944524932e - 02$ ,  $\Delta I_2 = 9.9679520885e - 02$ ,  $\Delta I_3 = 4.0992151358e - 01$  bulunurken  $\mu = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 8.1083978428e - 01$ ,  $\Delta I_2 = 1.8027221902e + 00$ ,  $\Delta I_3 = 9.0357944262e + 00$  ve  $\mu = 0.001$  değeri için  $\Delta I_1 =$

**Çizelge 4.29 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9439765777	0.8962095461	2.7768302177
	100	14.2792142464	1.4389259762	4.4587131126
	150	19.5905448480	1.9767326099	6.1250162852
	200	24.8778164274	2.5098141341	7.7764138056
	250	30.1418782802	3.0385133482	9.4140307025
		$M_1 = 0.1062155131$		
		$M_2 = 0.0107577423$		
		$M_3 = 0.0333330028$		
0.12	0	3.5940000000	0.3496777776	1.0826400000
	50	8.9665403505	0.8993216724	2.7865589782
	100	14.3370465119	1.4485190441	4.4888301358
	150	19.7051843271	1.9972068130	6.1893799983
	200	25.0708078675	2.5453609466	7.8882025393
	250	30.4338651640	3.0929758285	9.5853051909
		$M_1 = 0.1073594606$		
		$M_2 = 0.0109731922$		
		$M_3 = 0.0340106607$		
0.06	0	3.5970000000	0.3499777778	1.0835700000
	50	8.9774322380	0.9008389890	2.7913018880
	100	14.3658430508	1.4534227397	4.5042349041
	150	19.7645832793	2.0082747155	6.2242291896
	200	25.1749833056	2.5657225602	7.9524072306
	250	30.5979178176	3.1260116429	9.6895884867
		$M_1 = 0.1080036712$		
		$M_2 = 0.0111041354$		
		$M_3 = 0.0344240739$		

**Çizelge 4.30 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9439765777	0.8962095461	2.7768302177
	100	14.2792142464	1.4389259762	4.4587131126
	150	19.5905448480	1.9767326099	6.1250162852
	200	24.8778164274	2.5098141341	7.7764138056
	250	30.1418782802	3.0385133482	9.4140307025
		$M_1 = 0.1062155131$		
		$M_2 = 0.0107577423$		
		$M_3 = 0.0333330028$		
0.05	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9376097222	0.8952080774	2.7736891501
	100	14.2585863185	1.4352849746	4.4472696107
	150	19.5473168934	1.9688567153	6.1002649053
	200	24.8044087679	2.4963923230	7.7342610668
	250	30.0316062287	3.0184854044	9.3511806695
		$M_1 = 0.1057744249$		
		$M_2 = 0.0106776305$		
		$M_3 = 0.0330816027$		
0.01	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9325617305	0.8944158398	2.7712081767
	100	14.2424503212	1.4324606255	4.4384052189
	150	19.5140145425	1.9628768773	6.0814997126
	200	24.7486497929	2.4863928346	7.7029054143
	250	29.9488745973	3.0037982180	9.3051655446
		$M_1 = 0.1054434984$		
		$M_2 = 0.0106188818$		
		$M_3 = 0.0328975422$		

**Çizelge 4.31** : LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9555828825	0.8830958890	2.7364879004
	100	14.3153881759	1.4308343953	4.4346160935
	150	19.6584570893	1.9750905864	6.1214391164
	200	24.9790110851	2.5146965209	7.7934317273
	250	30.2757383674	3.0495879011	9.4505203466
		$M_1 = 0.1067509529$		
		$M_2 = 0.0108627071$		
		$M_3 = 0.0336679610$		
0.12	0	3.5940001427	0.3345111395	1.0353900899
	50	8.9679033754	0.8843974055	2.7405257081
	100	14.3410584129	1.4341443202	4.4449427420
	150	19.7126315870	1.9835554331	6.1479782321
	200	25.0820110554	2.5324931701	7.8493471974
	250	30.4489387919	3.0809083389	9.5490025666
		$M_1 = 0.1074197546$		
		$M_2 = 0.0109855888$		
		$M_3 = 0.0340544499$		
0.06	0	3.5970001410	0.3348111393	1.0363200888
	50	8.9735892404	0.8849974207	2.7423865370
	100	14.3530169644	1.4357086128	4.4498228318
	150	19.7389782489	1.9878009712	6.1612973067
	200	25.1346046942	2.5420146211	7.8793108552
	250	30.5416023441	3.0987617650	9.6052923841
		$M_1 = 0.1077784088$		
		$M_2 = 0.0110558025$		
		$M_3 = 0.0342758892$		

**Çizelge 4.32 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9555828825	0.8830958890	2.7364879004
	100	14.3153881759	1.4308343953	4.4346160935
	150	19.6584570893	1.9750905864	6.1214391164
	200	24.9790110851	2.5146965209	7.7934317273
	250	30.2757383674	3.0495879011	9.4505203466
		$M_1 = 0.1067509529$		
		$M_2 = 0.0108627071$		
		$M_3 = 0.0336679610$		
0.05	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9536084170	0.8828671929	2.7357773352
	100	14.3083481875	1.4298035283	4.4313902984
	150	19.6399399961	1.9719536798	6.1115895943
	200	24.9410711644	2.5079164426	7.7721306264
	250	30.2107301659	3.0378223084	9.4135710199
		$M_1 = 0.1064909201$		
		$M_2 = 0.0108156447$		
		$M_3 = 0.0335201637$		
0.01	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9520318361	0.8826844371	2.7352101984
	100	14.3027637798	1.4289873057	4.4288397395
	150	19.6254497660	1.9695188856	6.1039556268
	200	24.9118586642	2.5027732351	7.7559970737
	250	30.1614156833	3.0290752241	9.3861466556
		$M_1 = 0.1062936622$		
		$M_2 = 0.0107806563$		
		$M_3 = 0.0334104663$		

**Çizelge 4.33 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9439765777	0.8962095461	2.7768302177
	100	14.2792142464	1.4389259762	4.4587131126
LİN-2	150	19.5905448480	1.9767326099	6.1250162852
	200	24.8778164274	2.5098141341	7.7764138056
	250	30.1418782802	3.0385133482	9.4140307025
[3]	250	30.462999	3.099644	9.607216
[17]	250	30.48700	3.10120	9.61074
[20]	250	30.48699	3.10147	9.61200
[21]	250	30.46299	3.09887	9.60482
[22]	250	30.4869971	3.10123	9.61118
[33]	250	30.862500	3.182114	9.867540

**Çizelge 4.34 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-2	0.24	0.1062155131	0.0107577423	0.0333330028
[3]	0.24	0.1074999951	0.0110022	0.0341057
[17]	0.24	0.1075	0.010999	0.034090
[20]	0.24	0.1075	0.010999	0.034095
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034096
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034092
[33]	0.24	0.109002	0.011322544	0.03511728

**Çizelge 4.35 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9555828825	0.8830958890	2.7364879004
	100	14.3153881759	1.4308343953	4.4346160935
LİN-2	150	19.6584570893	1.9750905864	6.1214391164
	200	24.9790110851	2.5146965209	7.7934317273
	250	30.2757383674	3.0495879011	9.4505203466
[3]	250	30.463000	3.084325	9.560418
[17]	250	30.48705	3.08611	9.56502
[20]	250	30.48705	3.08631	9.56592
[21]	250	30.46305	3.08376	9.55868
[22]	250	30.4869998	3.08613	9.56533
[33]	250	30.687597	3.127201	9.695225

**Çizelge 4.36 :** LİN-2 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması (  $-36 \leq x \leq 300$  ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-2	0.24	0.1067509529	0.0108627071	0.0336679610
[3]	0.24	0.1074999996	0.01100165	0.0341075
[17]	0.24	0.1075	0.011	0.034096
[20]	0.24	0.1075	0.011	0.034099
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034101
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034097
[33]	0.24	0.108302388	0.01116356	0.03461702

**Çizelge 4.37 :** LİN-2 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).

$\mu$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.04	0	1.7724538509	1.3034467028	4.7832691199
	5	1.7861966228	1.3206213956	4.8533921139
	10	1.8015037064	1.3400432384	4.9330836151
	15	1.8173008634	1.3602377392	5.0161377881
	20	1.8335896867	1.3812467310	5.1027547789
	25	1.8503983758	1.4031262236	5.1931906335
		$\Delta I_1 = 7.7944524932e - 02$		
		$\Delta I_2 = 9.9679520885e - 02$		
		$\Delta I_3 = 4.0992151358e - 01$		
0.01	0	1.7724538509	1.2658472787	4.7832691199
	5	1.8218895395	1.3454499718	5.1331958986
	10	1.9182645004	1.5125264988	5.8904718580
	15	2.0490125881	1.7617366957	7.0581675911
	20	2.2424385458	2.1805059334	9.1147907174
	25	2.5832936352	3.0685694689	13.8190635461
		$\Delta I_1 = 8.1083978428e - 01$		
		$\Delta I_2 = 1.8027221902e + 00$		
		$\Delta I_3 = 9.0357944262e + 00$		
0.001	0	1.7724538509	1.2545674515	4.7832691199
	5	1.2777656369	0.6054514795	2.0766148819
	10	0.7598067725	0.2783943901	0.8874897513
	15	0.4756379625	0.1900592838	0.5860935362
	20	0.2856587987	0.1564054225	0.4726815193
	25	0.1328610596	0.1401854124	0.4178640003
		$\Delta I_1 = 1.6395927913e + 00$		
		$\Delta I_2 = 1.1143820390e + 00$		
		$\Delta I_3 = 4.3654051196e + 00$		

$1.6395927913e + 00$ ,  $\Delta I_2 = 1.1143820390e + 00$ ,  $\Delta I_3 = 4.3654051196e + 00$  olarak bulundu.

Bu sonuçlara göre  $\mu$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin arttığı görüldü.

Çizelge 4.38'de korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-2'den elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.01$  değerleri için LİN-2 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.38 :** LİN-2 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).

	$\mu$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-2	0.04	1.7724538447	1.3034467113	4.7832998648
LİN-2	0.01	1.7724538453	1.2658476501	4.7837965215
LİN-2	0.001	1.7724822099	1.2547132663	4.7907778189
[17]	0.04	1.772454	1.303447	4.783298
[17]	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
[17]	0.001	1.772484	1.254676	4.790517
[30]	0.04	1.7724	1.1554	4.1864
[30]	0.01	1.8024	0.9209	3.3385
[30]	0.001	1.7724	1.0744	4.0965

### 4.3 Lineerleştirme -3 (LİN-3)

Bu kısımda, (4.0.1) ile verilen RLW denkleminde lineer olmayan  $UU_x$  terimindeki  $U$  yerine

$$U = Z_i = \frac{U_{i-1} + U_i + U_{i+1}}{3}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

olarak alınırsa

$$UU_x = Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

olur. Denklemden görülen  $U_t$  ve  $U_{xxt}$  terimleri yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$U_{xxt} = \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı,  $U_x$  ve  $UU_x$  terimi yerine

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bu denklemden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)U_x^{n+1} - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (4.3.1)$$

bulunur.

$U(x,t)$ 'ye bir yaklaşım  $U_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla (2.2.4) ile verilen  $U$  ve  $U'$ 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  katsayıları

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3\cos(h) \csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2\cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3\cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4\cos(h)}$$

dir. (4.3.1) ile verilen RLW denkleminde bu yaklaşımlar yerine yazılır

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) - \mu (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) \\ & = (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) (\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - \mu (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{i-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^{n+1} (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{i+1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ & \delta_{i-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{i+1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon Z_i) \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

elde edilir. Burada

$$Z_i = \frac{\alpha_1 \delta_{i-2} + (\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{i-1} + (2\alpha_1 + \alpha_2) \delta_i + (\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{i+1} + \alpha_1 \delta_{i+2}}{3}$$

dir. Bu sistem

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\
a_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
a_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \\
b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\
b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formunda gösterilir. Bu sistemde  $(N + 3)$  bilinmeyen ve  $(N + 1)$  tane denklem vardır. Bu sistemde problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\delta_{i-1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_2 \delta_i - \alpha_1 \delta_{i+1}}{\alpha_1} \\
i = 0 \implies \delta_{-1} &= \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\delta_{i+1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_1 \delta_{i-1} - \alpha_2 \delta_i}{\alpha_1} \\
i = N \implies \delta_{N+1} &= \frac{U(b, t) - \alpha_2 \delta_N - \alpha_1 \delta_{N-1}}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$i = 0$  için  $\delta_{-1}$  değeri (4.3.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1}(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\
\delta_1^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) &= \left( \frac{U^n(a, t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \\
&\delta_0^n(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_1^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1} \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right) + \\ & \delta_1^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_2 - \beta_1) \right) = \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \\ & \delta_0^n \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \right) + \delta_1^n \left( \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_1 - \beta_2) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$i = N$  için  $\delta_{N+1}$  değeri (4.3.2) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^{n+1}(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ & \delta_{N-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^n(\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_1 - \beta_2) \right) + \delta_N^{n+1} \left( \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right) + \\ & \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \delta_{N-1}^n \left( \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_2 - \beta_1) \right) + \\ & \delta_N^n \left( \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right) + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)\beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ c_2 &= \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_0)(\beta_2 - \beta_1) \\ c_3 &= \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)(\beta_1 - \beta_2) \\ c_4 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_N)\beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \\ a_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_1 - \mu \gamma_1 \\ a_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ a_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \varepsilon Z_i)\beta_2 - \mu \gamma_1 \end{aligned}$$



### 4.3.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, LİN-3 ile elde edilen nümerik şemanın Bölüm 3'te tanıtilan dört model probleme uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar çizelgeler şeklinde sunuldu.

#### Problem 1: Tek Dalga Hareketi

Bu kısımda, Problem 1'in LİN-3 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-40 \leq x \leq 60$  aralığında sağa doğru hareket eden  $3c = 0.3$  ve  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın hareketi  $t = 20$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.39'da  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.8844482066e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 3.9694053600e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 2.0763443409e - 08$ ;  $\Delta I_1 = 1.9000248290e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 3.7860159452e - 10$ ,  $\Delta I_3 = 9.2939966834e - 10$  ve  $\Delta I_1 = 1.9050212245e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.6113710366e - 10$ ,  $\Delta I_3 = 8.4769999908e - 09$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde bir miktar artma,  $\Delta I_2$  değerinde küçülme ve  $\Delta I_3$  değerinde ise  $h = 0.05$  değeri için küçülme  $h = 0.01$  değeri için bir miktar artma görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0518615785e - 03$ ,  $L_\infty = 2.9920991467e - 04$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 3.9266383845e - 04$ ,  $L_\infty = 1.3019117536e - 04$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.2030526871e - 04$ ,  $L_\infty = 8.4857352541e - 05$  olarak bulundu. Buradan görüldüğü üzere;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.40'da  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.8844482066e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 3.9694053600e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 2.0763443409e - 08$ ;  $\Delta I_1 = 1.8824948227e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 7.2449184430e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 4.7932768865e - 08$  ve  $\Delta I_1 = 1.8818700635e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.2943809598e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 5.8627254163e - 08$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin küçüldüğü;  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de bir miktar artma olduğu görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0518615785e - 03$ ,  $L_\infty = 2.9920991467e - 04$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 9.4659806308e - 04$ ,  $L_\infty = 2.7103010282e - 04$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 9.1634759168e - 04$ ,  $L_\infty =$

$2.6319302803e - 04$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.41’de  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ ’nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$  olmak üzere  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512722309e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0395504507e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0314558019e - 07$ ;  $\Delta I_1 = 2.3800680445e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0349020232e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0170545751e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3892899204e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0395504507e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0314558019e - 07$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin ise bir miktar arttığı görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4497236535e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2360997555e - 05$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 6.8867863110e - 05$ ,  $L_\infty = 1.5509473826e - 05$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 1.5641112469e - 05$ ,  $L_\infty = 4.6505914974e - 06$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerinde bir miktar artma görüldü.

Çizelge 4.42’de  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ ’nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1$  olmak üzere  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512722309e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0395504507e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0314558019e - 07$ ;  $\Delta I_1 = 2.3499341534e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0197546804e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9717684003e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3495060446e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0195530870e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9713294836e - 07$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4497236535e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2360997555e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.3786835754e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0560451121e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.3564822674e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0010942660e - 05$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki,  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.43’te korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-3’ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-3 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.3$  için  $L_2 = 1.0518615785e - 03$ ,  $L_\infty = 2.9920991467e - 04$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Dağ vd. [18],  $h = 0.1$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 2.2050 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty =$

**Çizelge 4.39 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624875	2.5790074360	2.0958076529e-04	5.6908064915e-05
	8	3.9799473303	0.8104624870	2.5790074333	4.1937344394e-04	1.1576608884e-04
	12	3.9799463506	0.8104624861	2.5790074290	6.2958179951e-04	1.7600818928e-04
	16	3.9799384979	0.8104624851	2.5790074233	8.4037328281e-04	2.3723182989e-04
	20	3.9799078278	0.8104624836	2.5790074160	1.0518615785e-03	2.9920991467e-04
$\Delta I_1 = 1.8844482066e - 05$ , $\Delta I_2 = 3.9694053600e - 09$ , $\Delta I_3 = 2.0763443409e - 08$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434298	0.8104624938	2.5790074369	7.9504500629e-05	2.6354292809e-05
	8	3.9799473397	0.8104624940	2.5790074369	1.5867893942e-04	5.3598213130e-05
	12	3.9799463550	0.8104624941	2.5790074368	2.3730771830e-04	8.0133381518e-05
	16	3.9799384741	0.8104624942	2.5790074367	3.1530409432e-04	1.0561818003e-04
	20	3.9799076734	0.8104624941	2.5790074358	3.9266383845e-04	1.3019117536e-04
$\Delta I_1 = 1.9000248290e - 05$ , $\Delta I_2 = 3.7860159452e - 10$ , $\Delta I_3 = 9.2939966834e - 10$						
0.01	0	3.9799266740	0.8104624941	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434327	0.8104624942	2.5790074365	4.6509028187e-05	1.8214030923e-05
	8	3.9799473427	0.8104624942	2.5790074354	9.2226483152e-05	3.6718728530e-05
	12	3.9799463564	0.8104624942	2.5790074336	1.3658731546e-04	5.4129183686e-05
	16	3.9799384665	0.8104624942	2.5790074314	1.7930651153e-04	7.0137579185e-05
	20	3.9799076238	0.8104624940	2.5790074283	2.2030526871e-04	8.4857352541e-05
$\Delta I_1 = 1.9050212245e - 05$ , $\Delta I_2 = 1.6113710366e - 10$ , $\Delta I_3 = 8.4769999908e - 09$						

$0.8448 \times 10^{-4}$ ;  $L_2 = 0.30 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.116 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.36875 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.13204 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Kuintik kollokasyon metoduyla; Saka vd. [24],  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.15192 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.82951 \times 10^{-4}$  olarak; Islam vd. [25], meshfree kollokasyon metodu ile yaptıkları çalışmada  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.06910 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.78027 \times 10^{-4}$  olarak hesaplamışlardır. Dağ vd. [34], kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak  $L_\infty = 3.08 \times 10^{-4}$  bulmuşlardır. Sonuçlardan görüldüğü üzere; LİN-3 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.44'te korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-3'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-3 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.09$  için  $L_2 = 2.4497236535e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2360997555e - 05$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 1.2735 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.3467 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.65102 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.43151 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Buradan görüldüğü üzere; LİN-3 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

**Çizelge 4.40 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624875	2.5790074360	2.0958076529e-04	5.6908064915e-05
	8	3.9799473303	0.8104624870	2.5790074333	4.1937344394e-04	1.1576608884e-04
	12	3.9799463506	0.8104624861	2.5790074290	6.2958179951e-04	1.7600818928e-04
	16	3.9799384979	0.8104624851	2.5790074233	8.4037328281e-04	2.3723182989e-04
	20	3.9799078278	0.8104624836	2.5790074160	1.0518615785e-03	2.9920991467e-04
$\Delta I_1 = 1.8844482066e - 05$ , $\Delta I_2 = 3.9694053600e - 09$ , $\Delta I_3 = 2.0763443409e - 08$						
0.05	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434197	0.8104624873	2.5790074346	1.8826062764e-04	5.0776096380e-05
	8	3.9799473291	0.8104624862	2.5790074278	3.7682005639e-04	1.0387734423e-04
	12	3.9799463500	0.8104624846	2.5790074174	5.6594013637e-04	1.5855173100e-04
	16	3.9799385010	0.8104624827	2.5790074043	7.5582093602e-04	2.1435777660e-04
	20	3.9799078474	0.8104624803	2.5790073888	9.4659806308e-04	2.7103010282e-04
$\Delta I_1 = 1.8824948227e - 05$ , $\Delta I_2 = 7.2449184430e - 09$ , $\Delta I_3 = 4.7932768865e - 08$						
0.01	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434193	0.8104624872	2.5790074340	1.8226203124e-04	4.9347772976e-05
	8	3.9799473287	0.8104624860	2.5790074256	3.6480534423e-04	1.0089639828e-04
	12	3.9799463499	0.8104624842	2.5790074128	5.4787886683e-04	1.5396197392e-04
	16	3.9799385019	0.8104624819	2.5790073968	7.3167907454e-04	2.0814285933e-04
	20	3.9799078536	0.8104624793	2.5790073781	9.1634759168e-04	2.6319302803e-04
$\Delta I_1 = 1.8818700635e - 05$ , $\Delta I_2 = 8.2943809598e - 09$ , $\Delta I_3 = 5.8627254163e - 08$						

**Çizelge 4.41 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.8988612802e-05	1.0393028901e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.7979159447e-05	2.0830454958e-05
	12	2.1085087570	0.1273016774	0.3888058714	1.4697288165e-04	3.1307180459e-05
	16	2.1080169889	0.1273015787	0.3888055836	1.9597083467e-04	4.1818733030e-05
	20	2.1068116285	0.1273011573	0.3888043553	2.4497236535e-04	5.2360997555e-05
$\Delta I_1 = 2.3512722309e - 04$ , $\Delta I_2 = 1.0203844816e - 07$ , $\Delta I_3 = 2.9732496953e - 07$						
0.05	0	2.1070467985	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081232493	0.1273016040	0.3888056564	1.3775807167e-05	3.0658804633e-06
	8	2.1085394486	0.1273016827	0.3888058856	2.7551108411e-05	6.1503652391e-06
	12	2.1085090178	0.1273016780	0.3888058719	4.1325309232e-05	9.2544755223e-06
	16	2.1080163730	0.1273015790	0.3888055833	5.5097828140e-05	1.2375816434e-05
	20	2.1068087917	0.1273011563	0.3888043510	6.8867863110e-05	1.5509473826e-05
$\Delta I_1 = 2.3800680445e - 04$ , $\Delta I_2 = 1.0349020232e - 07$ , $\Delta I_3 = 3.0170545751e - 07$						
0.01	0	2.1070468123	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081233945	0.1273016041	0.3888056565	3.1398609747e-06	8.9763868562e-07
	8	2.1085396143	0.1273016828	0.3888058858	6.2767203711e-06	1.8183560871e-06
	12	2.1085091011	0.1273016780	0.3888058720	9.4076640473e-06	2.7558130561e-06
	16	2.1080161756	0.1273015789	0.3888055831	1.2529964983e-05	3.7022675898e-06
	20	2.1068078833	0.1273011559	0.3888043496	1.5641112469e-05	4.6505914974e-06
$\Delta I_1 = 2.3892899204e - 04$ , $\Delta I_2 = 1.0395504507e - 07$ , $\Delta I_3 = 3.0314558019e - 07$						

**Çizelge 4.42 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.8988612802e-05	1.0393028901e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.7979159447e-05	2.0830454958e-05
	12	2.1085087570	0.1273016774	0.3888058714	1.4697288165e-04	3.1307180459e-05
	16	2.1080169889	0.1273015787	0.3888055836	1.9597083467e-04	4.1818733030e-05
	20	2.1068116285	0.1273011573	0.3888043553	2.4497236535e-04	5.2360997555e-05
$\Delta I_1 = 2.3512722309e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0203844816e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9732496953e-07$						
0.05	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227751	0.1273016035	0.3888056559	4.7565661804e-05	1.0005322926e-05
	8	2.1085389066	0.1273016821	0.3888058850	9.5133851745e-05	2.0071572427e-05
	12	2.1085087455	0.1273016774	0.3888058714	1.4270632493e-04	3.0190413810e-05
	16	2.1080170188	0.1273015787	0.3888055836	1.9028461711e-04	4.0355162619e-05
	20	2.1068117623	0.1273011574	0.3888043554	2.3786835754e-04	5.0560451121e-05
$\Delta I_1 = 2.3499341534e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0197546804e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9717684003e-07$						
0.01	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227687	0.1273016035	0.3888056559	4.71211104441e-05	9.8881270935e-06
	8	2.1085388991	0.1273016821	0.3888058850	9.4244887217e-05	1.9841512037e-05
	12	2.1085087418	0.1273016774	0.3888058714	1.4137322818e-04	2.9851015357e-05
	16	2.1080170284	0.1273015787	0.3888055836	1.8850778002e-04	3.9909409599e-05
	20	2.1068118051	0.1273011574	0.3888043555	2.3564822674e-04	5.0010942660e-05
$\Delta I_1 = 2.3495060446e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0195530870e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9713294836e-07$						

**Çizelge 4.43 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-3	0.1	3.9799078278	0.8104624836	2.5790074160	1.0518615785e-03	2.9920991467e-04
LİN-3	0.05	3.9799076734	0.8104624941	2.5790074358	3.9266383845e-04	1.3019117536e-04
LİN-3	0.01	3.9799076238	0.8104624940	2.5790074283	2.2030526871e-04	8.4857352541e-05
[3]	0.125	3.9799617	0.8104575	2.5790071	$0.72252 \times 10^{-3}$	$0.21643 \times 10^{-3}$
[9]	0.125	3.97988	0.81046	2.57902	$0.52171 \times 10^{-3}$	$0.19828 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	3.97989	0.810462	2.57901	$0.217 \times 10^{-3}$	$0.084 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	3.97989	0.810467	2.57902	$0.220 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	3.98203	0.808650	2.57302	$4.688 \times 10^{-3}$	$1.755 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	3.961597	0.804185	2.558292	$0.0184 \times 10^{-3}$	$1.5664 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	3.97986	0.810399	2.57880	$0.227 \times 10^{-3}$	$0.081 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	3.980016	0.8104624	2.579006	$2.2050 \times 10^{-4}$	$0.8448 \times 10^{-4}$
[18]	0.125	3.979958	0.8104596	2.578999	$2.6086 \times 10^{-4}$	$1.0299 \times 10^{-4}$
[19]	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	$0.30 \times 10^{-3}$	$0.116 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	3.97994	0.81044	2.57894	$0.36875 \times 10^{-3}$	$0.13204 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	3.97995	0.81046	2.57900	$0.37841 \times 10^{-3}$	$0.13993 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	3.97997	0.810459	2.57901	$0.55 \times 10^{-3}$	$0.21 \times 10^{-3}$
[22]	0.125	3.97988	0.810465	2.57901	$0.219 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[24]	0.125	3.9798798	0.8104625	2.5790075	$2.15192 \times 10^{-4}$	$0.82951 \times 10^{-4}$
[25]	0.125	3.9798831	0.81046248	2.5790074	$2.06910 \times 10^{-4}$	$0.78027 \times 10^{-4}$
[26]	0.1	3.979950	0.810521	2.579202	0.000702	0.000268
[27]	0.125	3.97972	0.81026	2.57873	$0.266856 \times 10^{-3}$	$0.091465 \times 10^{-3}$
[28]	0.2	3.9800	0.8104	2.5792	$1.7569e-003$	$6.8432e-004$
[29]	0.125	3.9799000	0.8104646	2.5790160	$0.04921 \times 10^{-3}$	$0.02020 \times 10^{-3}$
[30]	0.25	3.9799	0.8104	2.5790	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.07 \times 10^{-3}$
[34]	0.1	3.9798827	0.8104626	2.5790079	–	$3.08 \times 10^{-4}$
[36]	0.01	3.9799497	0.8104623	2.5790075	–	$8.79 \times 10^{-5}$
[37]	0.1	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216	–	$8.75 \times 10^{-5}$

**Çizelge 4.44 :** LİN-3 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-3	0.1	2.1068116285	0.1273011573	0.3888043553	$2.4497236535e-04$	$5.2360997555e-05$
LİN-3	0.05	2.1068087917	0.1273011563	0.3888043510	$6.8867863110e-05$	$1.5509473826e-05$
LİN-3	0.01	2.1068078833	0.1273011559	0.3888043496	$1.5641112469e-05$	$4.6505914974e-06$
[3]	0.125	2.1094098	0.1273016386	0.38805990	$0.05366 \times 10^{-3}$	$0.01420 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	2.10503	0.127302	0.388802	$0.527 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	2.105	0.127302	0.388803	$0.653 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	2.10769	0.127260	0.388677	$0.347 \times 10^{-3}$	$0.239 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	2.128869	0.127228	0.388571	$0.0281 \times 10^{-3}$	$1.5506 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	2.10908	0.127318	0.388854	$0.537 \times 10^{-3}$	$0.316 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	2.112292	0.1273037	0.388812	$1.2735 \times 10^{-3}$	$0.3467 \times 10^{-3}$
[19]	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	2.10948	0.12730	0.38880	$0.65102 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	2.10902	0.12731	0.38881	$0.54701 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	2.109	0.127302	0.388807	$0.638 \times 10^{-3}$	$0.233 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[27]	0.125	2.10902	0.12730	0.38880	$0.559402 \times 10^{-3}$	$0.439145 \times 10^{-3}$
[29]	0.125	2.1053880	0.1273009	0.3888025	$0.42247 \times 10^{-3}$	$0.33643 \times 10^{-3}$
[31]	0.125	2.1045885	0.1273012	0.3888023	x	$4.315 \times 10^{-4}$

## Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi

Bu kısımda, Problem 2'nin LİN-3 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-200 \leq x \leq 400$  aralığında sırasıyla  $3c_1 = 0.6$  ve  $3c_2 = 0.3$  yüksekliğinde,  $x_1 = -177$  ve  $x_2 = -147$  konumunda olan iki dalganın girişimi  $t = 400$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.45'te  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.6919076290e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1401243783e-05$ ,  $\Delta I_3 = 8.9060508682e-05$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3962409007e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3865248283e-07$ ,  $\Delta I_3 = 1.8742681362e-07$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $h$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin arttığı,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.46'da  $h = 0.12$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 3.3962409007e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3865248283e-07$ ,  $\Delta I_3 = 1.8742681362e-07$  bulunurken  $\Delta t = 0.00.1$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3961695148e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3582073377e-07$ ,  $\Delta I_3 = 2.5513261903e-06$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3961471914e-03$ ,  $\Delta I_2 = 2.2365008112e-07$ ,  $\Delta I_3 = 3.4658475609e-06$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki,  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin küçüldüğü;

**Çizelge 4.45 :** LİN-3 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ ,  $3c_2 = 0.3$ ,  $x_1 = -177$ ,  $x_1 = -147$   $-200 \leq x \leq 400$ ).

	$h = 0.24$			$h = 0.12$				
	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	
$\Delta t = 0.1$	0	9.8582544848	3.2447884540	10.7783293821	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	
	40	9.8599337141	3.2447894853	10.7783812242	9.8613403844	3.2447917851	10.7783505273	
	80	9.8599454901	3.2448208495	10.7787196423	9.8616125990	3.2447991562	10.7784168347	
	120	9.8599456139	3.2448999362	10.7795592046	9.8616370999	3.2448194571	10.7785884295	
	160	9.8599452722	3.2450688256	10.7812017454	9.8616393458	3.2448611422	10.7789126996	
	200	9.8599447028	3.2451957768	10.7823673838	9.8616394202	3.2448916019	10.7791363386	
	240	9.8599447661	3.2450747532	10.7812569980	9.8616393905	3.2448621693	10.7789203118	
	280	9.8599453355	3.2449012235	10.7795764779	9.8616394767	3.2448200849	10.7785935363	
	320	9.8599461801	3.2448160740	10.7786846233	9.8616397266	3.2447992487	10.7784180376	
	360	9.8599466601	3.2447863531	10.7783504779	9.8616399616	3.2447919003	10.7783514109	
	400	9.8599463925	3.2447770527	10.7782403216	9.8616399755	3.2447895782	10.7783291756	
			$\Delta I_1 = 1.6919076290e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3962409007e - 03$		
			$\Delta I_2 = 1.1401243783e - 05$			$\Delta I_2 = 1.3865248283e - 07$		
		$\Delta I_3 = 8.9060508682e - 05$			$\Delta I_3 = 1.8742681362e - 07$			

$\Delta I_2$  değerinin  $\Delta t = 0.05$  değeri için azalıp  $\Delta t = 0.01$  değeri için arttığı;  $\Delta I_3$  değerinin arttığı görüldü.

Çizelge 4.47'de korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-3'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-3 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

### Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

Bu kısımda, Problem 3'ün LİN-3 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $d = 2$  ve  $d = 5$  eğimlerdeki dalgaların girişi  $t = 250$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi. İnvaryantlardaki değişim sabit olmadığı için  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  değerleri hesaplandı.

Çizelge 4.48'de  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504157$ ,  $M_2 = 0.0109929290$ ,  $M_3 = 0.0340727438$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878327$ ,  $M_2 = 0.0109982582$ ,  $M_3 = 0.0340896821$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969699$ ,  $M_2 = 0.0109995656$ ,  $M_3 = 0.0340938372$  olarak bulundu.

Çizelge 4.49'da  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504157$ ,  $M_2 = 0.0109929290$ ,  $M_3 = 0.0340727438$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri

**Çizelge 4.46 :** LIN-3 ile Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

$t$	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$			$\Delta t = 0.01$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8613403844	3.2447917851	10.7783505273	9.8613403791	3.2447915857	10.7783541911	9.8613403775	3.2447915217	10.7783552633
80	9.8616125990	3.2447991562	10.7784168347	9.8616125966	3.2447989937	10.7784371373	9.8616125959	3.2447989417	10.7784435473
120	9.8616370999	3.2448194571	10.7785884295	9.8616371014	3.2448192666	10.7786517618	9.8616371023	3.2448192058	10.7786719296
160	9.8616393458	3.2448611422	10.7789126996	9.8616393725	3.2448610181	10.7790593540	9.8616393817	3.2448609787	10.7791062366
200	9.8616394202	3.2448916019	10.7791363386	9.8616394930	3.2448915194	10.7793409160	9.8616395172	3.2448914935	10.7794063590
240	9.8616393905	3.2448621693	10.7789203118	9.8616394807	3.2448619391	10.7790679093	9.8616395100	3.2448618656	10.7791150076
280	9.8616394767	3.2448200849	10.7785935363	9.8616395397	3.2448197797	10.7786570695	9.8616395595	3.2448196821	10.7786772114
320	9.8616397266	3.2447992487	10.7784180376	9.8616397193	3.2447989514	10.7784374785	9.8616397161	3.2447988563	10.7784435193
360	9.8616399616	3.2447919003	10.7783514109	9.8616398914	3.2447916180	10.7783544402	9.8616398686	3.2447915277	10.7783552437
400	9.8616399755	3.2447895782	10.7783291756	9.8616399041	3.2447893037	10.7783268117	9.8616398818	3.2447892159	10.7783258972
		$\Delta I_1 = 3.3962409007e-03$		$\Delta I_1 = 3.3961695148e-03$		$\Delta I_1 = 3.3961471914e-03$			
		$\Delta I_2 = 1.3865248283e-07$		$\Delta I_2 = 1.3582073377e-07$		$\Delta I_2 = 2.2365008112e-07$			
		$\Delta I_3 = 1.8742681362e-07$		$\Delta I_3 = 2.5513261903e-06$		$\Delta I_3 = 3.4658475609e-06$			

**Çizelge 4.47 :** LİN-3 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_2$
LİN-3	0.12	9.8616399755	3.2447895782	10.7783291756
[3]	0.12	9.86166027	3.2447357	10.778305
[16]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[22]	0.12	9.85830	3.24478	10.77819
[23]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[27]	0.25	9.8563	3.2351	10.7703
[28]	0.12	9.8631	3.2565	10.8224
[32]	0.12	9.8577	3.2445	10.7779
[36]	0.12	9.8579	3.2453	10.7807

için  $M_1 = 0.1074504167, M_2 = 0.0109929194, M_3 = 0.0340724552$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504169, M_2 = 0.0109929163, M_3 = 0.0340723622$  olarak bulundu.

Çizelge 4.50'de  $d = 5, \Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504104, M_2 = 0.0109934759, M_3 = 0.0340792463$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878299, M_2 = 0.0109983940, M_3 = 0.0340948054$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969705, M_2 = 0.0109995998, M_3 = 0.0340986201$  olarak bulundu.

Çizelge 4.51'de  $d = 5, h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$  değerleri için Problem 3'ün nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504104, M_2 = 0.0109934759, M_3 = 0.0340792463$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504104, M_2 = 0.0109934689, M_3 = 0.0340790362$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504104, M_2 = 0.0109934667, M_3 = 0.0340789686$  olarak bulundu.

Çizelge 4.48, Çizelge 4.49, Çizelge 4.50 ve Çizelge 4.51'de verilen  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  değerlerinin (3.2.1) de verilen  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.52'de  $d = 2$  için LİN-3 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.53'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-3

**Çizelge 4.48 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8987548069	2.7848014293
	100	14.3330410716	1.4484055702	4.4884925658
	150	19.7055616073	1.9980438925	6.1920287896
	200	25.0780818333	2.5476776369	7.8955078021
	250	30.4506039304	3.0973100263	9.5989659558
		$M_1 = 0.1074504157$		
		$M_2 = 0.0109929290$		
		$M_3 = 0.0340727438$		
0.12	0	3.5940000000	0.3496777776	1.0826400000
	50	8.9683915305	0.8995982390	2.7874265064
	100	14.3427830609	1.4495122191	4.4919537067
	150	19.7171745912	1.9994231094	6.1963585941
	200	25.0915661284	2.5493328755	7.9007181781
	250	30.4659581981	3.0992423166	9.6050605258
		$M_1 = 0.1074878327$		
		$M_2 = 0.0109982582$		
		$M_3 = 0.0340896821$		
0.06	0	3.5970000000	0.3499777778	1.0835700000
	50	8.9718485919	0.8999579679	2.7885442070
	100	14.3466971837	1.4499365429	4.4932765524
	150	19.7215457755	1.9999143468	6.1978946553
	200	25.0963943667	2.5498918693	7.9024703618
	250	30.4712424657	3.0998691855	9.6070292987
		$M_1 = 0.1074969699$		
		$M_2 = 0.0109995656$		
		$M_3 = 0.0340938372$		

ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.54'te  $d = 5$  için LİN-3 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.55'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-3 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.49 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8987548069	2.7848014293
	100	14.3330410716	1.4484055702	4.4884925658
	150	19.7055616073	1.9980438925	6.1920287896
	200	25.0780818333	2.5476776369	7.8955078021
	250	30.4506039304	3.0973100263	9.5989659558
		$M_1 = 0.1074504157$		
		$M_2 = 0.0109929290$		
		$M_3 = 0.0340727438$		
0.05	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8987545650	2.7847929053
	100	14.3330410717	1.4484048386	4.4884699693
	150	19.7055616077	1.9980426006	6.1919900713
	200	25.0780819620	2.5476757983	7.8954524618
	250	30.4506041737	3.0973076363	9.5988937942
		$M_1 = 0.1074504167$		
		$M_2 = 0.0109929194$		
		$M_3 = 0.0340724552$		
0.01	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8987544871	2.7847901655
	100	14.3330410717	1.4484046030	4.4884626983
	150	19.7055616077	1.9980421845	6.1919776092
	200	25.0780820077	2.5476752071	7.8954346509
	250	30.4506042114	3.0973068585	9.5988705398
		$M_1 = 0.1074504169$		
		$M_2 = 0.0109929163$		
		$M_3 = 0.0340723622$		

**Çizelge 4.50 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836423775	2.7381820819
	100	14.3330411354	1.4333412359	4.4424467235
	150	19.7055616712	1.9830028228	6.1462647265
	200	25.0780822069	2.5326449225	7.8498458475
	250	30.4506027349	3.0822801219	9.5533416662
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109934759$		
		$M_3 = 0.0340792463$		
0.12	0	3.5940001427	0.3345111395	1.0353900899
	50	8.9683915140	0.8844450959	2.7406734945
	100	14.3427830445	1.4343710214	4.4456515535
	150	19.7171745749	1.9842876909	6.1502785204
	200	25.0915661053	2.5341995177	7.8547187590
	250	30.4659576275	3.0841096276	9.5590914487
		$M_1 = 0.1074878299$		
		$M_2 = 0.0109983940$		
		$M_3 = 0.0340948054$		
0.06	0	3.5970001410	0.3348111393	1.0363200888
	50	8.9718484193	0.8847946467	2.7417578329
	100	14.3466970112	1.4347762034	4.4469106722
	150	19.7215456030	1.9847554498	6.1517360710
	200	25.0963941948	2.5347334872	7.8563871670
	250	30.4712427783	3.0847110959	9.5609751195
		$M_1 = 0.1074969705$		
		$M_2 = 0.0109995998$		
		$M_3 = 0.0340986201$		

**Çizelge 4.51** : LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836423775	2.7381820819
	100	14.3330411354	1.4333412359	4.4424467235
	150	19.7055616712	1.9830028228	6.1462647265
	200	25.0780822069	2.5326449225	7.8498458475
	250	30.4506027349	3.0822801219	9.5533416662
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109934759$		
		$M_3 = 0.0340792463$		
0.05	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836423581	2.7381805450
	100	14.3330411354	1.4333410281	4.4424388440
	150	19.7055616713	1.9830021808	6.1462442980
	200	25.0780822072	2.5326437397	7.8498098364
	250	30.4506027354	3.0822783734	9.5532891417
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109934689$		
		$M_3 = 0.0340790362$		
0.01	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836423519	2.7381800524
	100	14.3330411354	1.4333409612	4.4424363116
	150	19.7055616713	1.9830019741	6.1462377250
	200	25.0780822072	2.5326433588	7.8497982460
	250	30.4506027355	3.0822778103	9.5532722347
		$M_1 = 0.1074504104$		
		$M_2 = 0.0109934667$		
		$M_3 = 0.0340789686$		

**Çizelge 4.52 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205358	0.8987548069	2.7848014293
	100	14.3330410716	1.4484055702	4.4884925658
LİN-3	150	19.7055616073	1.9980438925	6.1920287896
	200	25.0780818333	2.5476776369	7.8955078021
	250	30.4506039304	3.0973100263	9.5989659558
[3]	250	30.462999	3.099644	9.607216
[17]	250	30.48700	3.10120	9.61074
[20]	250	30.48699	3.10147	9.61200
[21]	250	30.46299	3.09887	9.60482
[22]	250	30.4869971	3.10123	9.61118
[33]	250	30.862500	3.182114	9.867540

**Çizelge 4.53 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-3	0.24	0.1074504157	0.0109929290	0.0340727438
[3]	0.24	0.1074999951	0.0110022	0.0341057
[17]	0.24	0.1075	0.010999	0.034090
[20]	0.24	0.1075	0.010999	0.034095
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034096
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034092
[33]	0.24	0.109002	0.011322544	0.03511728

**Çizelge 4.54 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205996	0.8836423775	2.7381820819
	100	14.3330411354	1.4333412359	4.4424467235
LİN-3	150	19.7055616712	1.9830028228	6.1462647265
	200	25.0780822069	2.5326449225	7.8498458475
	250	30.4506027349	3.0822801219	9.5533416662
[3]	250	30.463000	3.084325	9.560418
[17]	250	30.48705	3.08611	9.56502
[20]	250	30.48705	3.08631	9.56592
[21]	250	30.46305	3.08376	9.55868
[22]	250	30.4869998	3.08613	9.56533
[33]	250	30.687597	3.127201	9.695225

**Çizelge 4.55 :** LİN-3 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-3	0.24	0.1074504104	0.0109934759	0.0340792463
[3]	0.24	0.1074999996	0.01100165	0.0341075
[17]	0.24	0.1075	0.011	0.034096
[20]	0.24	0.1075	0.011	0.034099
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034101
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034097
[33]	0.24	0.108302388	0.01116356	0.03461702

#### Problem 4: Dalga Oluşumu

Bu kısımda, Problem 4'ün LIN-3 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgede verildi.  $0 \leq x \leq 50$  aralığında dalga oluşumu  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu$  nün farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.56'da  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu = 0.04$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.1023832069e - 08$ ,  $\Delta I_2 = 7.9646103786e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 2.6474422074e - 04$  bulunurken  $\mu = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 5.6837428097e - 09$ ,  $\Delta I_2 = 9.8138449866e - 04$ ,  $\Delta I_3 = 3.5179862952e - 03$  ve  $\mu = 0.001$  değeri için  $\Delta I_1 = 2.1553424690e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.0791834996e - 02$ ,  $\Delta I_3 = 3.9097232334e - 02$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $\mu$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin bir miktar arttığı görüldü.

Çizelge 4.57'de korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlarla LIN-3'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.01$  değerleri için LIN-3 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.56 :** LİN-3 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).

$\mu$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.04	0	1.7724538509	1.3034467021	4.7832691199
	5	1.7724538506	1.3033676605	4.7830076807
	10	1.7724538506	1.3033668728	4.7830038592
	15	1.7724538505	1.3033669958	4.7830041957
	20	1.7724538523	1.3033670374	4.7830043204
	25	1.7724538619	1.3033670560	4.7830043757
			$\Delta I_1 = 1.1023832069e - 08$ $\Delta I_2 = 7.9646103786e - 05$ $\Delta I_3 = 2.6474422074e - 04$	
0.01	0	1.7724538509	1.2658472785	4.7832691199
	5	1.7724538293	1.2649280552	4.7799634255
	10	1.7724538323	1.2648721257	4.7797713327
	15	1.7724538366	1.2648666155	4.7797535914
	20	1.7724538409	1.2648658543	4.7797510677
	25	1.7724538452	1.2648658940	4.7797511336
			$\Delta I_1 = 5.6837428097e - 09$ $\Delta I_2 = 9.8138449866e - 04$ $\Delta I_3 = 3.5179862952e - 03$	
0.001	0	1.7724538509	1.2545674514	4.7832691199
	5	1.7724536978	1.2445525851	4.7466033407
	10	1.7724590709	1.2438171456	4.7442140115
	15	1.7724645139	1.2437613212	4.7440698290
	20	1.7724699587	1.2437630316	4.7441044138
	25	1.7724754043	1.2437756164	4.7441718876
			$\Delta I_1 = 2.1553424690e - 05$ $\Delta I_2 = 1.0791834996e - 02$ $\Delta I_3 = 3.9097232334e - 02$	

**Çizelge 4.57 :** LİN-3 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).

	$\mu$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-3	0.04	1.7724538619	1.3033670560	4.7830043757
LİN-3	0.01	1.7724538452	1.2648658940	4.7797511336
LİN-3	0.001	1.7724754043	1.2437756164	4.7441718876
[17]	0.04	1.772454	1.303447	4.783298
[17]	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
[17]	0.001	1.772484	1.254676	4.790517
[30]	0.04	1.7724	1.1554	4.1864
[30]	0.01	1.8024	0.9209	3.3385
[30]	0.001	1.7724	1.0744	4.0965

#### 4.4 Lineerleştirme -4 (LİN-4)

Dağ vd. Ref. [34]'teki çalışmalarında (4.0.1) ile verilen RLW denkleminin, denklemdaki  $UU_x$  lineer olmayan terimi yerine Rubin-Graves tipi yaklaşım kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle şemasını elde etmişlerdir. Tezin bu kısmında aynı şema aşağıdaki gibi benzer şekilde elde edilerek dört model problem için uygulandı.

(4.0.1) ile verilen RLW denkleminde görülen  $U_t$  ve  $U_{xxt}$  terimleri yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$U_{xxt} = \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı,  $U_x$  ve  $UU_x$  terimi yerine

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

$$UU_x = \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu farklar yaklaşımları yazılır daha sonra  $(UU_x)^{n+1}$  terimi yerine

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n$$

Rubin-Graves [38] yaklaşımı kullanılır ve tüm bu yaklaşımlar denklemden yerine yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n + (UU_x)^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} U_x^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (U^{n+1} U_x^n + U^n U_x^{n+1}) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2} U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (4.4.1)$$

bulunur.  $U(x, t)$ 'ye bir yaklaşım  $U_N(x, t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla (2.2.4) ile verilen  $U$  ve  $U'$ 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_i' = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U_i'' = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  katsayıları

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3 \cos(h) \csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2 \cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4 \cos(h)}$$

dir. (4.4.1) ile verilen RLW denkleminde

$$L_1 = \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1})$$

$$L_2 = \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (\beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1})$$

olmak üzere bu yaklaşımlar yerine yazılır

$$(1 + L_2) (\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + \left(\frac{\Delta t}{2} + L_1\right) (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) \\ - \mu (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) = (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) \\ - \frac{\Delta t}{2} (\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - \mu (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \delta_{i-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^{n+1} (L_2 \alpha_2 + \alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ \delta_{i+1}^{n+1} \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ \delta_{i-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_i^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_{i+1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \\ a_2 &= L_2 \alpha_2 + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ a_3 &= \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \\ b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \\ b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\ b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & & & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

şeklinde matris formunda gösterilen  $(N+3)$  bilinmeyen ve  $(N+1)$  denklemden oluşan sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  değerleri yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta_{i-1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_2 \delta_i - \alpha_1 \delta_{i+1}}{\alpha_1} \\ i = 0 \implies \delta_{-1} &= \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= \frac{U(x_i, t) - \alpha_1 \delta_{i-1} - \alpha_2 \delta_i}{\alpha_1} \\ i = N \implies \delta_{N+1} &= \frac{U(b, t) - \alpha_2 \delta_N - \alpha_1 \delta_{N-1}}{\alpha_1} \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$i = 0$  için  $\delta_{-1}$  değeri (4.4.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left( \frac{U^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1} (L_2 \alpha_2 + \alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \delta_1^{n+1} \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ & \left( \frac{U^n(a,t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_0^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \delta_1^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \delta_0^{n+1} \left[ -\mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) \right] + \\ & \delta_1^{n+1} \left[ \left( \frac{\Delta t}{2} + L_1 \right) (-\beta_1 + \beta_2) \right] = \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] + \\ & \delta_0^n \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + \mu \gamma_1 \right) - \mu \gamma_2 \right] + \delta_1^n \left[ \frac{\Delta t}{2} (\beta_1 - \beta_2) \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

$i = N$  için  $\delta_{N+1}$  değeri (4.4.2) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^{n+1} (L_2 \alpha_2 + \alpha_2 - \mu \gamma_2) + \\ & \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) = \\ & \delta_{N-1}^n \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) + \delta_N^n (\alpha_2 - \mu \gamma_2) + \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \left( \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left[ \left( \frac{\Delta t}{2} + L_1 \right) (-\beta_1 + \beta_2) + L_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \right] + \delta_N^{n+1} \left[ -\mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right) \right] + \\ & \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right] = \\ & \delta_{N-1}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} (-\beta_1 + \beta_2) \right] + \delta_N^n \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + \mu \gamma_1 \right) - \mu \gamma_2 \right] + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (4.4.3) ile verilen denklem sistemi matris formunda,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \\
 a_2 &= L_2 \alpha_2 + \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
 a_3 &= \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \\
 c_1 &= -\mu \gamma_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right) \\
 c_2 &= \left( \frac{\Delta t}{2} + L_1 \right) (-\beta_1 + \beta_2) \\
 c_3 &= \left( \frac{\Delta t}{2} + L_1 \right) (-\beta_1 + \beta_2) + L_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 c_4 &= -\mu \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \\
 b_2 &= \alpha_2 - \mu \gamma_2 \\
 b_3 &= \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \\
 d_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + \mu \gamma_1 \right) - \mu \gamma_2 \\
 d_2 &= \frac{\Delta t}{2} (\beta_1 - \beta_2) \\
 d_3 &= \frac{\Delta t}{2} (-\beta_1 + \beta_2) \\
 d_4 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + \mu \gamma_1 \right) - \mu \gamma_2
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_1 + L_1 \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] \\
 e_2 &= \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 + L_2 \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} \beta_2 + L_1 \beta_2 - \mu \gamma_1 \right] \\
 f_1 &= \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_1 - \mu \gamma_1 \right] \\
 f_2 &= \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} \beta_2 - \mu \gamma_1 \right]
 \end{aligned}$$



$h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.1248780343e - 04$ ,  $L_\infty = 7.9882543449e - 05$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.59'da  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 1.8844447659e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.6407885939e - 08$ ,  $\Delta I_3 = 4.1122586225e - 08$  ;  $\Delta I_1 = 1.8824921339e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.3631464846e - 08$ ,  $\Delta I_3 = 1.5159415501e - 08$  ve  $\Delta I_1 = 1.8818647960e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.1142613388e - 08$ ,  $\Delta I_3 = 1.2422862739e - 10$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.0620153695e - 03$ ,  $L_\infty = 3.0575415137e - 04$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 9.5571563719e - 04$ ,  $L_\infty = 2.7591496391e - 04$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 9.2460342626e - 04$ ,  $L_\infty = 2.6736214328e - 04$  olarak bulundu. Buradan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.60'ta  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512670221e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0400348385e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9715228106e - 07$ ;  $\Delta I_1 = 2.3800647035e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0349217133e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0171070708e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3892904357e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0400348385e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 3.0329340128e - 07$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde bir miktar artma,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinde ise  $h = 0.05$  değerinde küçülme olurken  $h = 0.01$  değerinde bir miktar artma görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4507107176e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2439595051e - 05$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 6.8856228490e - 05$ ,  $L_\infty = 1.5383863963e - 05$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = 1.5364481067e - 05$ ,  $L_\infty = 4.4972632360e - 06$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki,  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları da kayda değer ölçüde küçüldü.

Çizelge 4.61'de  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3512670221e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0400348385e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9715228106e - 07$  ;  $\Delta I_1 = 2.3499306277e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0191979757e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9701161630e - 07$  ve  $\Delta I_1 = 2.3495028812e - 04$ ,  $\Delta I_2 = 1.0190194799e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 2.9697435239e - 07$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$

ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4507107176e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2439595051e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.3795705287e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0625317508e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.3572915819e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0068737593e - 05$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.62’de Problem 1’in, korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-4 ’ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-4 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.3$  için  $L_2 = 1.0620153695e - 03$ ,  $L_\infty = 3.0575415137e - 04$  bulundu. Kübik Kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Dağ vd. [18],  $h = 0.1$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 2.2050 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.8448 \times 10^{-4}$ ;  $L_2 = 0.30 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.116 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.36875 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.13204 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Kuintik kollokasyon metoduyla; Saka vd. [24],  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.15192 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.82951 \times 10^{-4}$  olarak; Islam vd. [25], meshfree kollokasyon metodu ile yaptıkları çalışmada  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.06910 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.78027 \times 10^{-4}$  olarak hesaplamışlardır. Dağ vd. [34], kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak  $L_\infty = 3.08 \times 10^{-4}$  bulmuşlardır. Buradan görüldüğü üzere; LİN-4 ile hesaplanan  $L_2$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalara uyumlu sonuçlar verirken,  $L_\infty$  hata normu [18], [20] ve [34]’ten daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.63’te Problem 1’in, korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-4’ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-4 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.09$  için  $L_2 = 2.4507107176e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2439595051e - 05$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 1.2735 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.3467 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.65102 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.43151 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Sonuçlardan görüldüğü üzere; LİN-4 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

## **Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi**

Bu kısımda, Problem 2’nin LİN-4 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-200 \leq x \leq 400$  aralığında sırasıyla  $3c_1 = 0.6$  ve  $3c_2 = 0.3$  yüksekliğinde,  $x_1 =$

**Çizelge 4.58 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624885	2.5790074391	2.1143142280e-04	5.8271645600e-05
	8	3.9799473303	0.8104624909	2.5790074451	4.2314223874e-04	1.1853348771e-04
	12	3.9799463506	0.8104624945	2.5790074543	6.3537069585e-04	1.8009412439e-04
	16	3.9799384979	0.8104624991	2.5790074657	8.4829151530e-04	2.4257677880e-04
	20	3.9799078279	0.8104625040	2.5790074779	1.0620153695e-03	3.0575415137e-04
$\Delta I_1 = 1.8844447659e-05, \Delta I_2 = 1.6407885939e-08, \Delta I_3 = 4.1122586225e-08$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434298	0.8104624937	2.5790074364	7.8965775679e-05	2.4710811193e-05
	8	3.9799473397	0.8104624932	2.5790074348	1.5779324545e-04	4.9936729184e-05
	12	3.9799463550	0.8104624925	2.5790074324	2.3637396975e-04	7.5047163875e-05
	16	3.9799384742	0.8104624917	2.5790074294	3.1464107798e-04	9.9720114970e-05
	20	3.9799076734	0.8104624905	2.5790074254	3.9256373834e-04	1.2391081978e-04
$\Delta I_1 = 1.9000178287e-05, \Delta I_2 = 3.2163929298e-09, \Delta I_3 = 1.1390049348e-08$						
0.01	0	3.9799266740	0.8104624941	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434326	0.8104624938	2.5790074354	4.4202028833e-05	1.6586950016e-05
	8	3.9799473425	0.8104624928	2.5790074312	8.7884688942e-05	3.3562946979e-05
	12	3.9799463560	0.8104624913	2.5790074249	1.3063880599e-04	4.9987126033e-05
	16	3.9799384660	0.8104624894	2.5790074171	1.7221149472e-04	6.5440416073e-05
	20	3.9799076233	0.8104624871	2.5790074077	2.1248780343e-04	7.9882543449e-05
$\Delta I_1 = 1.9050749505e-05, \Delta I_2 = 7.0784104134e-09, \Delta I_3 = 2.9012832137e-08$						

**Çizelge 4.59 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434208	0.8104624885	2.5790074391	2.1143142280e-04	5.8271645600e-05
	8	3.9799473303	0.8104624909	2.5790074451	4.2314223874e-04	1.1853348771e-04
	12	3.9799463506	0.8104624945	2.5790074543	6.3537069585e-04	1.8009412439e-04
	16	3.9799384979	0.8104624991	2.5790074657	8.4829151530e-04	2.4257677880e-04
	20	3.9799078279	0.8104625040	2.5790074779	1.0620153695e-03	3.0575415137e-04
$\Delta I_1 = 1.8844447659e-05, \Delta I_2 = 1.6407885939e-08, \Delta I_3 = 4.1122586225e-08$						
0.05	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434197	0.8104624883	2.5790074378	1.9015579695e-04	5.2048307287e-05
	8	3.9799473291	0.8104624903	2.5790074401	3.8058417219e-04	1.0620814566e-04
	12	3.9799463500	0.8104624934	2.5790074435	5.7152996311e-04	1.6180039956e-04
	16	3.9799385010	0.8104624971	2.5790074478	7.6319177292e-04	2.1844408195e-04
	20	3.9799078474	0.8104625012	2.5790074519	9.5571563719e-04	2.7591496391e-04
$\Delta I_1 = 1.8824921339e-05, \Delta I_2 = 1.3631464846e-08, \Delta I_3 = 1.5159415501e-08$						
0.01	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799434193	0.8104624882	2.5790074370	1.8402779309e-04	5.0454893610e-05
	8	3.9799473287	0.8104624898	2.5790074371	3.6829460253e-04	1.0290929296e-04
	12	3.9799463499	0.8104624923	2.5790074373	5.5302375131e-04	1.5674776025e-04
	16	3.9799385020	0.8104624954	2.5790074374	7.3840872739e-04	2.1164431488e-04
	20	3.9799078537	0.8104624987	2.5790074369	9.2460342626e-04	2.6736214328e-04
$\Delta I_1 = 1.8818647960e-05, \Delta I_2 = 1.1142613388e-08, \Delta I_3 = 1.2422862739e-10$						

**Çizelge 4.60 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.9007799343e-05	1.0405239908e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.8017676822e-05	2.0857820065e-05
	12	2.1085087569	0.1273016775	0.3888058715	1.4703101282e-04	3.1351113058e-05
	16	2.1080169890	0.1273015787	0.3888055837	1.9604899078e-04	4.1879799783e-05
	20	2.1068116290	0.1273011574	0.3888043555	2.4507107176e-04	5.2439595051e-05
$\Delta I_1 = 2.3512670221e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0198029601e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9715228106e-07$						
0.05	0	2.1070467985	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081232493	0.1273016040	0.3888056564	1.3772757132e-05	3.0557147598e-06
	8	2.1085394486	0.1273016827	0.3888058856	2.7545199012e-05	6.1223505250e-06
	12	2.1085090178	0.1273016780	0.3888058719	4.1316911662e-05	9.2001145664e-06
	16	2.1080163730	0.1273015790	0.3888055833	5.5087475941e-05	1.2287981343e-05
	20	2.1068087921	0.1273011563	0.3888043510	6.8856228490e-05	1.5383863963e-05
$\Delta I_1 = 2.3800647035e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0349217133e-07$ , $\Delta I_3 = 3.0171070708e-07$						
0.01	0	2.1070468123	0.1273012598	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081233944	0.1273016041	0.3888056565	3.0827091246e-06	8.7013810073e-07
	8	2.1085396142	0.1273016827	0.3888058857	6.1629021988e-06	1.7601883088e-06
	12	2.1085091009	0.1273016780	0.3888058719	9.2381201741e-06	2.6653428246e-06
	16	2.1080161754	0.1273015789	0.3888055830	1.2306038492e-05	3.5796445309e-06
	20	2.1068078832	0.1273011558	0.3888043494	1.5364481067e-05	4.4972632360e-06
$\Delta I_1 = 2.3892904357e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0400348385e-07$ , $\Delta I_3 = 3.0329340128e-07$						

**Çizelge 4.61 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227953	0.1273016035	0.3888056559	4.9007799343e-05	1.0405239908e-05
	8	2.1085389302	0.1273016821	0.3888058851	9.8017676822e-05	2.0857820065e-05
	12	2.1085087569	0.1273016775	0.3888058715	1.4703101282e-04	3.1351113058e-05
	16	2.1080169890	0.1273015787	0.3888055837	1.9604899078e-04	4.1879799783e-05
	20	2.1068116290	0.1273011574	0.3888043555	2.4507107176e-04	5.2439595051e-05
$\Delta I_1 = 2.3512670221e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0198029601e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9715228106e-07$						
0.05	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227751	0.1273016035	0.3888056559	4.7583166259e-05	1.0016986625e-05
	8	2.1085389066	0.1273016821	0.3888058851	9.5168920795e-05	2.0096033276e-05
	12	2.1085087454	0.1273016774	0.3888058715	1.4275907745e-04	3.0228191434e-05
	16	2.1080170188	0.1273015787	0.3888055837	1.9035522779e-04	4.0406464432e-05
	20	2.1068117626	0.1273011575	0.3888043556	2.3795705287e-04	5.0625317508e-05
$\Delta I_1 = 2.3499306277e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0191979757e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9701161630e-07$						
0.01	0	2.1070467557	0.1273012594	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1081227687	0.1273016035	0.3888056559	4.7137131515e-05	9.8988055028e-06
	8	2.1085388990	0.1273016821	0.3888058851	9.4276981771e-05	1.9863677103e-05
	12	2.1085087418	0.1273016774	0.3888058714	1.4142147054e-04	2.9885000385e-05
	16	2.1080170284	0.1273015787	0.3888055837	1.8857228911e-04	3.9955312115e-05
	20	2.1068118054	0.1273011575	0.3888043556	2.3572915819e-04	5.0068737593e-05
$\Delta I_1 = 2.3495028812e-04$ , $\Delta I_2 = 1.0190194799e-07$ , $\Delta I_3 = 2.9697435239e-07$						

**Çizelge 4.62 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-4	0.1	3.9799078279	0.8104625040	2.5790074779	$1.0620153695e-03$	$3.0575415137e-04$
LİN-4	0.05	3.9799076734	0.8104624905	2.5790074254	$3.9256373834e-04$	$1.2391081978e-04$
LİN-4	0.01	3.9799076233	0.8104624871	2.5790074077	$2.1248780343e-04$	$7.9882543449e-05$
[3]	0.125	3.9799617	0.8104575	2.5790071	$0.72252 \times 10^{-3}$	$0.21643 \times 10^{-3}$
[9]	0.125	3.97988	0.81046	2.57902	$0.52171 \times 10^{-3}$	$0.19828 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	3.97989	0.810462	2.57901	$0.217 \times 10^{-3}$	$0.084 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	3.97989	0.810467	2.57902	$0.220 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	3.98203	0.808650	2.57302	$4.688 \times 10^{-3}$	$1.755 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	3.961597	0.804185	2.558292	$0.0184 \times 10^{-3}$	$1.5664 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	3.97986	0.810399	2.57880	$0.227 \times 10^{-3}$	$0.081 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	3.980016	0.8104624	2.579006	$2.2050 \times 10^{-4}$	$0.8448 \times 10^{-4}$
[18]	0.125	3.979958	0.8104596	2.578999	$2.6086 \times 10^{-4}$	$1.0299 \times 10^{-4}$
[19]	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	$0.30 \times 10^{-3}$	$0.116 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	3.97994	0.81044	2.57894	$0.36875 \times 10^{-3}$	$0.13204 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	3.97995	0.81046	2.57900	$0.37841 \times 10^{-3}$	$0.13993 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	3.97997	0.810459	2.57901	$0.55 \times 10^{-3}$	$0.21 \times 10^{-3}$
[22]	0.125	3.97988	0.810465	2.57901	$0.219 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[24]	0.125	3.9798798	0.8104625	2.5790075	$2.15192 \times 10^{-4}$	$0.82951 \times 10^{-4}$
[25]	0.125	3.9798831	0.81046248	2.5790074	$2.06910 \times 10^{-4}$	$0.78027 \times 10^{-4}$
[26]	0.1	3.979950	0.810521	2.579202	0.000702	0.000268
[27]	0.125	3.97972	0.81026	2.57873	$0.266856 \times 10^{-3}$	$0.091465 \times 10^{-3}$
[28]	0.2	3.9800	0.8104	2.5792	$1.7569e-003$	$6.8432e-004$
[29]	0.125	3.9799000	0.8104646	2.5790160	$0.04921 \times 10^{-3}$	$0.02020 \times 10^{-3}$
[30]	0.25	3.9799	0.8104	2.5790	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.07 \times 10^{-3}$
[34]	0.1	3.9798827	0.8104626	2.5790079	–	$3.08 \times 10^{-5}$
[36]	0.01	3.9799497	0.8104623	2.5790075	–	$8.79 \times 10^{-5}$
[37]	0.1	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216	–	$8.75 \times 10^{-5}$

**Çizelge 4.63 :** LİN-4 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09, -40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-4	0.1	2.1068116290	0.1273011574	0.3888043555	$2.4507107176e-04$	$5.2439595051e-05$
LİN-4	0.05	2.1068087921	0.1273011563	0.3888043510	$6.8856228490e-05$	$1.5383863963e-05$
LİN-4	0.01	2.1068078832	0.1273011558	0.3888043494	$1.5364481067e-05$	$4.4972632360e-06$
[3]	0.125	2.1094098	0.1273016386	0.38805990	$0.05366 \times 10^{-3}$	$0.01420 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	2.10503	0.127302	0.388802	$0.527 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	2.105	0.127302	0.388803	$0.653 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	2.10769	0.127260	0.388677	$0.347 \times 10^{-3}$	$0.239 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	2.128869	0.127228	0.388571	$0.0281 \times 10^{-3}$	$1.5506 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	2.10908	0.127318	0.388854	$0.537 \times 10^{-3}$	$0.316 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	2.112292	0.1273037	0.388812	$1.2735 \times 10^{-3}$	$0.3467 \times 10^{-3}$
[19]	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	2.10948	0.12730	0.38880	$0.65102 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	2.10902	0.12731	0.38881	$0.54701 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	2.109	0.127302	0.388807	$0.638 \times 10^{-3}$	$0.233 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[27]	0.125	2.10902	0.12730	0.38880	$0.559402 \times 10^{-3}$	$0.439145 \times 10^{-3}$
[29]	0.125	2.1053880	0.1273009	0.3888025	$0.42247 \times 10^{-3}$	$0.33643 \times 10^{-3}$
[31]	0.125	2.1045885	0.1273012	0.3888023	x	$4.315 \times 10^{-4}$

**Çizelge 4.64 :** LİN-4 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ ,  $3c_2 = 0.3$ ,  $x_1 = -177$ ,  $x_2 = -147$   $-200 \leq x \leq 400$ ).

$t$	$h = 0.24$			$h = 0.12$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582544848	3.2447884540	10.7783293821	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8599337140	3.2447740356	10.7783172092	9.8613403842	3.2447790988	10.7783044979
80	9.8599454882	3.2446870637	10.7782307544	9.8616125980	3.2447436424	10.7782167677
120	9.8599456537	3.2444748707	10.7780135958	9.8616371101	3.2446529437	10.7779868681
$\Delta t = 0.1$ 160	9.8599456146	3.2440744164	10.7775839498	9.8616394517	3.2444842201	10.7775463923
200	9.8599454671	3.2437969248	10.7772752769	9.8616396866	3.2443691001	10.7772391148
240	9.8599455391	3.2440591754	10.7775669585	9.8616396855	3.2444799804	10.7775351953
280	9.8599457030	3.2444690780	10.7780070848	9.8616396595	3.2446500528	10.7779794429
320	9.8599459061	3.2446949413	10.7782384688	9.8616396857	3.2447429316	10.7782149916
360	9.8599460167	3.2447821589	10.7783244231	9.8616397448	3.2447786773	10.7783034283
400	9.8599459714	3.2448115141	10.7783525864	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061
	$\Delta I_1 = 1.6914865273e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$		
	$\Delta I_2 = 2.3060125873e - 05$			$\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$		
	$\Delta I_3 = 2.3204308651e - 05$			$\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$		

$-177$  ve  $x_2 = -147$  konumunda olan iki dalganın girişimi  $t = 400$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.64'te  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.6914865273e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 2.3060125873e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 2.3204308651e - 05$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $h$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin arttığı,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.65'te  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960330462e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2183227458e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 1.1307618717e - 06$  olarak bulundu.

Çizelge 4.66'da Problem 2'nin, korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-4 'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ( $3c_1 = 0.6$ ,  $3c_2 = 0.3$ ,  $x_1 = -177$ ,  $x_2 = -147$   $-200 \leq x \leq 400$ ) bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

### Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

**Çizelge 4.65 :** LIN-4 ile Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_2 = -147 - 200 \leq x \leq 400$ ).

$t$	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$			$\Delta t = 0.01$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8613403842	3.2447790988	10.7783044979	9.8613403790	3.2447833870	10.7783242516	9.8613403773	3.2447846874	10.7783302487
80	9.8616125980	3.2447436424	10.7782167677	9.8616125959	3.2447616579	10.7783024025	9.8616125953	3.2447673614	10.7783295286
120	9.8616371101	3.2446529437	10.7779886681	9.8616371088	3.2447068270	10.7782452418	9.8616371085	3.2447240015	10.7783276196
160	9.8616394517	3.2444842201	10.7775463923	9.8616394456	3.2446063087	10.7781354992	9.8616394437	3.2446453543	10.7783239368
200	9.8616396866	3.2443691001	10.7772391148	9.8616396754	3.2445386697	10.7780590078	9.8616396720	3.2445929223	10.7783213624
240	9.8616396855	3.2444799804	10.7775351953	9.8616396807	3.2446041137	10.7781330507	9.8616396793	3.2446437247	10.7783238575
280	9.8616396595	3.2446500528	10.7779794429	9.8616396602	3.2447054047	10.7782437197	9.8616396606	3.2447229619	10.7783275707
320	9.8616396857	3.2447429316	10.7782149916	9.8616396863	3.2447615100	10.7783022563	9.8616396867	3.2447673122	10.7783295248
360	9.8616397448	3.2447786773	10.7783034283	9.8616397412	3.2447833508	10.7783241924	9.8616397402	3.2447847187	10.7783302538
400	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061	9.8616397692	3.2447907635	10.7783314431	9.8616397677	3.2447906579	10.7783304938
	$\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$		$\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$	$\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$		$\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$			
	$\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$		$\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$	$\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$		$\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$			
	$\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$		$\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$	$\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$		$\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$			

**Çizelge 4.66 :** LİN-4 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_2$
LİN-4	0.12	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061
[3]	0.12	9.86166027	3.2447357	10.778305
[16]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[22]	0.12	9.85830	3.24478	10.77819
[23]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[27]	0.25	9.8563	3.2351	10.7703
[28]	0.12	9.8631	3.2565	10.8224
[32]	0.12	9.8577	3.2445	10.7779
[36]	0.12	9.8579	3.2453	10.7807

Bu kısımda, Problem 3'ün LİN-4 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $d = 2$  ve  $d = 5$  eğimlerdeki dalgaların girişimi  $t = 250$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi. İnvaryantlardaki değişim sabit olmadığı için  $M_1, M_2, M_3$  değerleri hesaplandı.

Çizelge 4.67'de  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504158, M_2 = 0.0109954342, \Delta I_3 = 0.0340805041$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878328, M_2 = 0.0109991309, M_3 = 0.0340923869$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969699, M_2 = 0.0110000313, M_3 = 0.0340952807$  olarak bulundu. (3.2.1) ile hesaplanan değerlere uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.68'de  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504158, M_2 = 0.0109954342, M_3 = 0.0340805041$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504168, M_2 = 0.0109951857, M_3 = 0.0340794729$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504169, M_2 = 0.0109951057, M_3 = 0.0340791411$  olarak bulundu. (3.2.1) ile hesaplanan değerlere uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.69'da  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504103, M_2 = 0.0109952974, M_3 = 0.0340848985$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri

için  $M_1 = 0.1074878299$ ,  $M_2 = 0.0109990290$ ,  $M_3 = 0.0340967771$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969705$ ,  $M_2 = 0.0109999390$ ,  $M_3 = 0.0340996735$  olarak bulundu. (3.2.1) ile hesaplanan değerlere uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.70'te  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$  değerleri için Problem 3'ün nümerik çözümleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invariantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504103$ ,  $M_2 = 0.0109952974$ ,  $M_3 = 0.0340848985$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504103$ ,  $M_2 = 0.0109951160$ ,  $M_3 = 0.0340841458$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504103$ ,  $M_2 = 0.0109950577$ ,  $M_3 = 0.0340839037$  olarak bulundu. (3.2.1) ile hesaplanan değerlere uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.71'de  $d = 2$  için LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.72'de korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.73'te  $d = 5$  için LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.74'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

#### **Problem 4: Dalga Oluşumu**

Bu kısımda, Problem 4'ün LİN-4 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgede verildi.  $0 \leq x \leq 50$  aralığında dalga oluşumu  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu$  nün farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.75'te  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\mu = 0.04$  değeri için Problem 4'ün, korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.0467924527e - 08$ ,  $\Delta I_2 = 2.2911761823e - 05$ ,  $\Delta I_3 = 1.2277263870e - 04$  bulunurken  $\mu = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 2.1225465829e - 11$ ,  $\Delta I_2 = 3.5436758968e - 04$ ,  $\Delta I_3 = 2.1005959878e - 03$  ve  $\mu = 0.001$  değeri için  $\Delta I_1 = 5.4320992149e - 12$ ,  $\Delta I_2 = 4.3961352576e - 03$ ,  $\Delta I_3 = 2.7072848101e - 02$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $\mu$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin bir miktar arttığı görüldü.

**Çizelge 4.67 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988408167	2.7850653868
	100	14.3330410717	1.4486113068	4.4891272103
	150	19.7055616077	1.9983852235	6.1930840495
	200	25.0780818417	2.5481603448	7.8970019491
	250	30.4506039614	3.0979363325	9.6009060277
		$M_1 = 0.1074504158$		
		$M_2 = 0.0109954342$		
		$M_3 = 0.0340805041$		
0.12	0	3.5940000000	0.3496777776	1.0826400000
	50	8.9683915305	0.8996280482	2.7875180255
	100	14.3427830610	1.4495837147	4.4921743626
	150	19.7171745915	1.9995418775	6.1967259733
	200	25.0915661289	2.5495009567	7.9012387297
	250	30.4659581981	3.0994604940	9.6057367310
		$M_1 = 0.1074878328$		
		$M_2 = 0.0109991309$		
		$M_3 = 0.0340923869$		
0.06	0	3.5970000000	0.3499777778	1.0835700000
	50	8.9718485919	0.8999737207	2.7885925785
	100	14.3466971839	1.4499745329	4.4933938219
	150	19.7215457758	1.9999776016	6.1980903549
	200	25.0963943672	2.5499814943	7.9027479847
	250	30.4712424658	3.0999856044	9.6073901868
		$M_1 = 0.1074969699$		
		$M_2 = 0.0110000313$		
		$M_3 = 0.0340952807$		

**Çizelge 4.68 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988298247	2.7850212936
	100	14.3330410718	1.4485846110	4.4890177628
	150	19.7055616077	1.9983406529	6.1928999811
	200	25.0780820197	2.5480971472	7.8967401609
	250	30.4506042343	3.0978541905	9.6005652700
		$M_1 = 0.1074504158$		
		$M_2 = 0.0109954342$		
		$M_3 = 0.0340805041$		
0.05	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988324971	2.7850320128
	100	14.3330410717	1.4485911068	4.4890443919
	150	19.7055616077	1.9983515008	6.1929447762
	200	25.0780819730	2.5481125292	7.8968038725
	250	30.4506041989	3.0978741911	9.6006482249
		$M_1 = 0.1074504168$		
		$M_2 = 0.0109951857$		
		$M_3 = 0.0340794729$		
0.01	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988298247	2.7850212936
	100	14.3330410718	1.4485846110	4.4890177628
	150	19.7055616077	1.9983406529	6.1928999811
	200	25.0780820197	2.5480971472	7.8967401609
	250	30.4506042343	3.0978541905	9.6005652700
		$M_1 = 0.1074504169$		
		$M_2 = 0.0109951057$		
		$M_3 = 0.0340791411$		

**Çizelge 4.69 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205940	0.8836613513	2.7382410973
	100	14.3330411299	1.4334197445	4.4426902718
	150	19.7055616658	1.9831876418	6.1468379189
	200	25.0780822016	2.5329606353	7.8508252812
	250	30.4506027298	3.0827354783	9.5547547188
		$M_1 = 0.1074504103$		
		$M_2 = 0.0109952974$		
		$M_3 = 0.0340848985$		
0.12	0	3.5940001427	0.3345111395	1.0353900899
	50	8.9683915030	0.8844516903	2.7406940113
	100	14.3427830335	1.4343983482	4.4457363623
	150	19.7171745640	1.9843520742	6.1504782956
	200	25.0915660945	2.5343095569	7.8550603105
	250	30.4659576168	3.0842683875	9.5595843708
		$M_1 = 0.1074878299$		
		$M_2 = 0.0109990290$		
		$M_3 = 0.0340967771$		
0.06	0	3.5970001410	0.3348111393	1.0363200888
	50	8.9718483975	0.8847981401	2.7417687041
	100	14.3466969894	1.4347907404	4.4469557954
	150	19.7215455813	1.9847897806	6.1518426137
	200	25.0963941733	2.5347922318	7.8565695344
	250	30.4712427569	3.0847959011	9.5612384677
		$M_1 = 0.1074969705$		
		$M_2 = 0.0109999390$		
		$M_3 = 0.0340996735$		

**Çizelge 4.70 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205940	0.8836613513	2.7382410973
	100	14.3330411299	1.4334197445	4.4426902718
	150	19.7055616658	1.9831876418	6.1468379189
	200	25.0780822016	2.5329606353	7.8508252812
	250	30.4506027298	3.0827354783	9.5547547188
		$M_1 = 0.1074504103$		
		$M_2 = 0.0109952974$		
		$M_3 = 0.0340848985$		
0.05	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205941	0.8836595038	2.7382338663
	100	14.3330411300	1.4334120183	4.4426590163
	150	19.7055616659	1.9831693311	6.1467625469
	200	25.0780822017	2.5329292534	7.8506953184
	250	30.4506027300	3.0826901406	9.5545665371
		$M_1 = 0.1074504103$		
		$M_2 = 0.0109951160$		
		$M_3 = 0.0340841458$		
0.01	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205942	0.8836589118	2.7382315495
	100	14.3330411301	1.4334095369	4.4426489789
	150	19.7055616660	1.9831634435	6.1467383144
	200	25.0780822019	2.5329191590	7.8506535199
	250	30.4506027302	3.0826755553	9.5545060074
		$M_1 = 0.1074504103$		
		$M_2 = 0.0109950577$		
		$M_3 = 0.0340839037$		

**Çizelge 4.71 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880000000	0.3490777757	1.0807800000
	50	8.9605205359	0.8988408167	2.7850653868
	100	14.3330410717	1.4486113068	4.4891272103
LİN-4	150	19.7055616077	1.9983852235	6.1930840495
	200	25.0780818417	2.5481603448	7.8970019491
	250	30.4506039614	3.0979363325	9.6009060277
[3]	250	30.462999	3.099644	9.607216
[17]	250	30.48700	3.10120	9.61074
[20]	250	30.48699	3.10147	9.61200
[21]	250	30.46299	3.09887	9.60482
[22]	250	30.4869971	3.10123	9.61118
[33]	250	30.862500	3.182114	9.867540

**Çizelge 4.72 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-4	0.24	0.1074504158	0.0109954342	0.0340805041
[3]	0.24	0.1074999951	0.0110022	0.0341057
[17]	0.24	0.1075	0.010999	0.034090
[20]	0.24	0.1075	0.010999	0.034095
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034096
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034092
[33]	0.24	0.109002	0.011322544	0.03511728

**Çizelge 4.73 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.5880001461	0.3339111383	1.0335300921
	50	8.9605205940	0.8836613513	2.7382410973
	100	14.3330411299	1.4334197445	4.4426902718
LİN-4	150	19.7055616658	1.9831876418	6.1468379189
	200	25.0780822016	2.5329606353	7.8508252812
	250	30.4506027298	3.0827354783	9.5547547188
[3]	250	30.463000	3.084325	9.560418
[17]	250	30.48705	3.08611	9.56502
[20]	250	30.48705	3.08631	9.56592
[21]	250	30.46305	3.08376	9.55868
[22]	250	30.4869998	3.08613	9.56533
[33]	250	30.687597	3.127201	9.695225

**Çizelge 4.74 :** LİN-4 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-4	0.24	0.1074504103	0.0109952974	0.0340848985
[3]	0.24	0.1074999996	0.01100165	0.0341075
[17]	0.24	0.1075	0.011	0.034096
[20]	0.24	0.1075	0.011	0.034099
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034101
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034097
[33]	0.24	0.108302388	0.01116356	0.03461702

**Çizelge 4.75 :** LİN-4 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).

$\mu$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.04	0	1.7724538509	1.3034467028	4.7832691199
	5	1.7724538509	1.3034691822	4.7833894997
	10	1.7724538509	1.3034696481	4.7833920416
	15	1.7724538508	1.3034696276	4.7833919497
	25	1.7724538525	1.3034696185	4.7833919090
	25	1.7724538614	1.3034696145	4.7833918925
			$\Delta I_1 = 1.0467924527e - 08$ $\Delta I_2 = 2.2911761823e - 05$ $\Delta I_3 = 1.2277263870e - 04$	
0.01	0	1.7724538509	1.2658472787	4.7832691199
	5	1.7724538509	1.2661822747	4.7852656652
	10	1.7724538509	1.2661999756	4.7853616013
	15	1.7724538509	1.2662014215	4.7853685844
	20	1.7724538509	1.2662016391	4.7853696546
	25	1.7724538509	1.2662016463	4.7853697159
			$\Delta I_1 = 2.1225465829e - 11$ $\Delta I_2 = 3.5436758968e - 04$ $\Delta I_3 = 2.1005959878e - 03$	
0.001	0	1.7724538509	1.2545674515	4.7832691199
	5	1.7724538509	1.2587219992	4.8091114285
	10	1.7724538509	1.2589410814	4.8102384634
	15	1.7724538509	1.2589589365	4.8103213721
	20	1.7724538509	1.2589625147	4.8103373010
	25	1.7724538509	1.2589635867	4.8103419680
			$\Delta I_1 = 5.4320992149e - 12$ $\Delta I_2 = 4.3961352576e - 03$ $\Delta I_3 = 2.7072848101e - 02$	

Çizelge 4.76'da Problem 4'ün, korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-4 'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.01$  değerleri için LİN-4 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.76 :** LİN-4 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).

	$\mu$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-4	0.04	1.7724538614	1.3034696145	4.7833918925
LİN-4	0.01	1.7724538509	1.2662016463	4.7853697159
LİN-4	0.001	1.7724538509	1.2589635867	4.8103419680
[17]	0.04	1.772454	1.303447	4.783298
[17]	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
[17]	0.001	1.772484	1.254676	4.790517
[30]	0.04	1.7724	1.1554	4.1864
[30]	0.01	1.8024	0.9209	3.3385
[30]	0.001	1.7724	1.0744	4.0965

#### 4.5 Lineerleştirme-5 (LİN-5)

(4.0.1) ile verilen RLW denklemine  $V(x, t) = -U_x(x, t)$  dönüşümü uygulanır ve  $Z_i = 1 + \varepsilon U$  olarak alınırsa

$$U_t - Z_i V + \mu V_{xt} = 0 \quad (4.5.1)$$

$$V + U_x = 0 \quad (4.5.2)$$

biçiminde iki denklem elde edilir.

(4.5.1) denkleminde görülen  $U_t$  ve  $V_{xt}$  terimleri yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$V_{xt} = \frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı,  $V$  terimleri yerine de

$$V = \frac{V^{n+1} + V^n}{2}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılır

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - Z_i \frac{V^{n+1} + V^n}{2} + \mu \frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\Delta t} = 0$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} Z_i V^{n+1} + \mu V_x^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2} Z_i V^n + \mu V_x^n$$

olarak elde edilir.  $U(x,t)$ 'ye bir yaklaşım  $U_N(x,t)$  ve  $V(x,t)$ 'ye bir yaklaşım  $V_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x)$$

$$V_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \rho_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla  $U, V$  ile  $U$  ve  $V$ 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

$$V_i = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_i + \alpha_1 \rho_{i+1}$$

$$V'_i = \beta_1 \rho_{i-1} + \beta_2 \rho_{i+1}$$

$$V''_i = \gamma_1 \rho_{i-1} + \gamma_2 \rho_i + \gamma_1 \rho_{i+1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$  ve  $\gamma_2$  katsayıları

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3 \cos(h) \csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2 \cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4 \cos(h)}$$

dir. (4.5.1) ile verilen denklemde bu yaklaşımlar yerine yazılır

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} Z_i (\alpha_1 \rho_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \rho_i^{n+1} + \alpha_1 \rho_{i+1}^{n+1}) \\ & + \mu (\beta_1 \rho_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \rho_{i+1}^{n+1}) = \\ & (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2} Z_i (\alpha_1 \rho_{i-1}^n + \alpha_2 \rho_i^n + \alpha_1 \rho_{i+1}^n) \\ & + \mu (\beta_1 \rho_{i-1}^n + \beta_2 \rho_{i+1}^n) \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \rho_{i-1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_2 \rho_i^{n+1} \\
& + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \rho_{i+1}^{n+1} = \\
& \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n + \left( \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \rho_{i-1}^n \\
& + \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_2 \rho_i^n + \left( \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \rho_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

bulunur.

Şimdi de (4.5.2) ile verilen denklemde  $V$  ve  $U_x$  terimleri yerine

$$\begin{aligned}
V &= \frac{V^{n+1} + V^n}{2} \\
U_x &= \frac{U_x^{n+1} - U_x^n}{2}
\end{aligned}$$

Crank Nicolson yaklaşımları yazılır

$$\frac{V^{n+1} + V^n}{2} - \frac{U_x^{n+1} - U_x^n}{2} = 0$$

burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$V^{n+1} + U_x^{n+1} = -V^n - U_x^n$$

bulunur. Şimdi  $V$  ve  $U_x$  yerine yukarıda verilen kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla elde edilen yaklaşımlar yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \rho_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \rho_i^{n+1} + \alpha_1 \rho_{i+1}^{n+1} + \beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1} = \\
& -\alpha_1 \rho_{i-1}^n - \alpha_2 \rho_i^n - \alpha_1 \rho_{i+1}^n - \beta_1 \delta_{i-1}^n - \beta_2 \delta_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_1 \\
a_2 &= -\frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_2 \\
a_3 &= -\frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_2 \\
b_1 &= \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_1 \\
b_2 &= \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_2 \\
b_3 &= \frac{\Delta t}{2} Z_i \alpha_1 + \mu \beta_2
\end{aligned}$$



$$[D_{11}] = \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix}, [R_{21}] = \begin{bmatrix} \rho_{-1} \\ \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_N \\ \rho_{N+1} \end{bmatrix}$$

matrisleri kullanılarak (4.5.3) ve (4.5.4) sistemleri,

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^{n+1}] & [A_{12}^{n+1}] \\ [B_{21}^{n+1}] & [B_{22}^{n+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^{n+1}] \\ [R_{21}^{n+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}^n] & [A_{12}^n] \\ [B_{21}^n] & [B_{22}^n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^n] \\ [R_{21}^n] \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

şeklinde matris formunda gösterilir. Bu  $(2N+6) \times (2N+2)$  tipindeki denklem sistemini  $(2N+2) \times (2N+2)$  şekline dönüştürmek için problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\rho_{-1}$  ve  $\rho_{N+1}$  parametreleri sistemden yok edilir.

Şimdi sınır şartlarını kullanarak  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\rho_{-1}$  ve  $\rho_{N+1}$  parametrelerini diğer parametreler cinsinden bulalım. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak

$$\delta_{i-1} = \frac{U(x_i, t) - \alpha_2 \delta_i - \alpha_1 \delta_{i+1}}{\alpha_1}$$

$$i = 0 \implies \delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1}$$

ve

$$\delta_{i+1} = \frac{U(x_i, t) - \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i}{\alpha_1}$$

$$i = N \implies \delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_2 \delta_N - \alpha_1 \delta_{N-1}}{\alpha_1}$$

bulunur ve benzer şekilde

$$V(x_i, t) = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_i + \alpha_1 \rho_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak da

$$\rho_{i-1} = \frac{V(x_i, t) - \alpha_2 \rho_i - \alpha_1 \rho_{i+1}}{\alpha_1}$$

$$i = 0 \implies \rho_{-1} = \frac{V(a, t) - \alpha_2 \rho_0 - \alpha_1 \rho_1}{\alpha_1}$$

ve

$$\rho_{i+1} = \frac{V(x_i, t) - \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_i}{\alpha_1}$$

$$i = N \implies \rho_{N+1} = \frac{V(b, t) - \alpha_2 \rho_N - \alpha_1 \rho_{N-1}}{\alpha_1}$$

şeklinde bulunur.

$i = 0$  için  $\delta_{-1}$  ve  $\rho_{-1}$  parametreleri (4.5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left( \frac{U^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \alpha_2 \delta_0^{n+1} + \alpha_1 \delta_1^{n+1} + \\ & \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \left( \frac{V^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \rho_0^{n+1} - \alpha_1 \rho_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) - \\ & \frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_2 \rho_0^{n+1} + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \rho_1^{n+1} = \alpha_1 \left( \frac{U^n(a,t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) + \alpha_2 \delta_0^n + \alpha_1 \delta_1^n + \\ & \left( \frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \left( \frac{V^n(a,t) - \alpha_2 \rho_0^n - \alpha_1 \rho_1^n}{\alpha_1} \right) + \frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_2 \rho_0^n + \left( \frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \rho_1^n \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & U^{n+1}(a,t) + 0 \cdot \delta_0^{n+1} + 0 \cdot \delta_1^{n+1} + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \left( \frac{V^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \right) \\ & - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mu \beta_1 \rho_0^{n+1} + \mu (\beta_2 - \beta_1) \rho_1^{n+1} = \\ & U^n(a,t) + 0 \cdot \delta_0^n + 0 \cdot \delta_1^n + \left( \frac{\Delta t}{2} Z_0 \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \left( \frac{V^n(a,t)}{\alpha_1} \right) \\ & - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mu \beta_1 \rho_0^n + \mu (\beta_2 - \beta_1) \rho_1^n \end{aligned}$$

elde edilir.

$i = N$  için  $\delta_{N+1}$  ve  $\rho_{N+1}$  parametreleri (4.5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_N^{n+1} + \alpha_1 \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_2 \delta_N^{n+1} - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \rho_{N-1}^{n+1} \\ & - \frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_2 \rho_N^{n+1} + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \left( \frac{V^{n+1}(b,t) - \alpha_2 \rho_N^{n+1} - \alpha_1 \rho_{N-1}^{n+1}}{\alpha_1} \right) \\ & = \alpha_1 \delta_{N-1}^n + \alpha_2 \delta_N^n + \alpha_1 \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_2 \delta_N^n - \alpha_1 \delta_{N-1}^n}{\alpha_1} \right) + \\ & \left( \frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_1 \right) \rho_{N-1}^n + \frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_2 \rho_N^n + \left( \frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \left( \frac{V^n(b,t) - \alpha_2 \rho_N^n - \alpha_1 \rho_{N-1}^n}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & U^{n+1}(b,t) + 0 \cdot \delta_{N-1}^{n+1} + 0 \cdot \delta_N^{n+1} + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \left( \frac{V^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \right) \\ & + \mu (\beta_1 - \beta_2) \rho_{N-1}^{n+1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mu \beta_2 \rho_N^{n+1} = U^n(b,t) + 0 \cdot \delta_{N-1}^n + 0 \cdot \delta_N^n \\ & + \left( -\frac{\Delta t}{2} Z_N \alpha_1 + \mu \beta_2 \right) \left( \frac{V^n(b,t)}{\alpha_1} \right) + \mu (\beta_1 - \beta_2) \rho_{N-1}^n - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mu \beta_2 \rho_N^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de  $i = 0$  için  $\delta_{-1}$  ve  $\rho_{-1}$  parametreleri (4.5.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1 \left( \frac{U^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) + 0 \cdot \delta_0^{n+1} + \beta_2 \delta_1^{n+1} + \alpha_1 \left( \frac{V^{n+1}(a,t) - \alpha_2 \rho_0^{n+1} - \alpha_1 \rho_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \\ + \alpha_2 \rho_0^{n+1} + \alpha_1 \rho_1^{n+1} = -\beta_1 \left( \frac{U^n(a,t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) \\ - 0 \cdot \delta_0^n - \beta_2 \delta_1^n - \alpha_1 \left( \frac{V^n(a,t) - \alpha_2 \rho_0^n - \alpha_1 \rho_1^n}{\alpha_1} \right) - \alpha_2 \rho_0^n - \alpha_1 \rho_1^n \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 \delta_0^{n+1} + (\beta_2 - \beta_1) \delta_1^{n+1} + V^{n+1}(a,t) + 0 \cdot \rho_0^{n+1} + 0 \cdot \rho_1^{n+1} = \\ - \frac{\beta_1 U^n(a,t)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 \delta_0^n - (\beta_2 - \beta_1) \delta_1^n - V^n(a,t) + 0 \cdot \rho_0^n + 0 \cdot \rho_1^n \end{aligned}$$

elde edilir.

$i = N$  için  $\delta_{N+1}$  ve  $\rho_{N+1}$  parametreleri (4.5.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1 \delta_{N-1}^{n+1} + 0 \cdot \delta_N^{n+1} + \beta_2 \left( \frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_2 \delta_N^{n+1} - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \alpha_1 \rho_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \rho_N^{n+1} \\ + \alpha_1 \left( \frac{V^{n+1}(b,t) - \alpha_2 \rho_N^{n+1} - \alpha_1 \rho_{N-1}^{n+1}}{\alpha_1} \right) = \beta_1 \delta_{N-1}^n + 0 \cdot \delta_N^n \\ + \beta_2 \left( \frac{U^n(b,t) - \alpha_2 \delta_N^n - \alpha_1 \delta_{N-1}^n}{\alpha_1} \right) + \alpha_1 \rho_{N-1}^n + \alpha_2 \rho_N^n + \alpha_1 \left( \frac{V^n(b,t) - \alpha_2 \rho_N^n - \alpha_1 \rho_{N-1}^n}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2 U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} + (\beta_1 - \beta_2) \delta_{N-1}^{n+1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 \delta_N^{n+1} + V^{n+1}(b,t) + 0 \cdot \rho_{N-1}^{n+1} + 0 \cdot \rho_N^{n+1} = \\ - \frac{\beta_2 U^n(b,t)}{\alpha_1} + (\beta_2 - \beta_1) \delta_{N-1}^n - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 \delta_N^n - V^n(b,t) + 0 \cdot \rho_{N-1}^n + 0 \cdot \rho_N^n \end{aligned}$$





şeklinde verilen matrislerin kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{n+1} \\ B_{21}^{n+1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{12}^{n+1} \\ B_{22}^{n+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{n+1} \\ R_{21}^{n+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^n \\ B_{21}^n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{12}^n \\ B_{22}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^n \\ R_{21}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.5.6)$$

elde edilir. Böylece  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  şeklindeki denklem sistemi çözülebilir. Bu sistemden  $\delta^{n+1}$  ve  $\rho^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  ve  $\rho^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu parametreler problemle verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$t = 0$  için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i^0 T_i^3(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \rho_i^0 T_i^3(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının  $x_i$  düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) = U_i$$

$$V_N(x_i, 0) = V(x_i, 0) = V_i$$

değerleri kullanılarak  $\delta_i^0$  parametreleri için

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

ve  $\rho_i^0$  parametreleri için

$$V(x_i, t) = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_i + \alpha_1 \rho_{i+1}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{-1} \\ \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_N \\ \rho_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

matris formunda gösterilen  $(N + 3) \times (N + 1)$  tipinde denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerini  $(N + 1) \times (N + 1)$  şeklinde çözülebilir bir sistem haline getirmek için LİN-1 de ayrıntılı olarak anlatıldığı gibi  $U$  ve  $V$ ' nin birinci türevi kullanılarak  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\rho_{-1}$  ve  $\rho_{N+1}$  parametreleri sistemlerden yok edilir. Böylece elde edilen  $\delta^0$  ve  $\rho^0$  parametreleri (4.5.6) ile verilen sistemde kullanılarak istenilen  $t$  zamanındaki nümerik çözümler bulunur.

Burada da  $U_N$  yaklaşık çözümlerini iyileştirmek için (4.2.4) denklem sistemindeki lineer olmayan terimler için herbir zaman adımında

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2} (\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

biçiminde tanımlanan iç iterasyon formülleri birkaç defa uygulandı.

#### 4.5.1 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, LİN-5 ile elde edilen nümerik şemanın Bölüm 3'te tanımlanan dört model probleme uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar çizelgeler halinde sunuldu.

##### Problem 1: Tek Dalga Hareketi

Bu kısımda, Problem 1'in LİN-5 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-40 \leq x \leq 60$  aralığında sağa doğru hareket eden  $3c = 0.3$  ve  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın hareketi  $t = 20$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.77'de  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1, 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 3.9309977800e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.2648563549e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 1.8401000723e - 08$ ;  $\Delta I_1 = 3.9515188976e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.0598797395e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 5.4004654082e - 09$  ve  $\Delta I_1 = , \Delta I_2 = , \Delta I_3 =$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde bir miktar artma,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinde ise küçülme görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.1723329969e - 04$ ,  $L_\infty = 8.3309171248e - 05$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.1695400299e - 04$ ,  $L_\infty = 8.3191327886e - 05$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 = , L_\infty =$  olarak bulundu. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki,  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.78'de  $3c = 0.3$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1, 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 3.9309977800e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.2648563549e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 1.8401000723e - 08$ ;  $\Delta I_1 = 3.9135766392e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.2712853233e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 2.6254986185e - 08$  ve  $\Delta I_1 = 3.9005848486e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 8.2794578971e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 2.6796377117e - 08$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin küçüldüğü;  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de bir miktar artma olduğu görüldü.  $t = 20$

zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.1723329969e - 04$ ,  $L_\infty = 8.3309171248e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 6.1331650792e - 05$ ,  $L_\infty = 2.1093737787e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.9157016955e - 05$ ,  $L_\infty = 1.2352699128e - 05$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.79'da  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  ve  $h = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3119695056e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1749967525e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.8997785725e - 06$ ;  $\Delta I_1 = 2.3169925201e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1868789919e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.9255402895e - 06$  ve  $\Delta I_1 =$ ,  $\Delta I_2 =$ ,  $\Delta I_3 =$  olarak bulundu.  $h$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinde küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin ise bir miktar arttığı görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $h = 0.1$  değeri için  $L_2 = 1.4069676082e - 03$ ,  $L_\infty = 4.2352043436e - 04$  olarak bulunurken  $h = 0.05$  değeri için  $L_2 = 1.4123408593e - 03$ ,  $L_\infty = 4.2658346960e - 04$  ve  $h = 0.01$  değeri için  $L_2 =$ ,  $L_\infty =$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre;  $h$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerinde bir miktar artma görüldü.

Çizelge 4.80'de  $3c = 0.09$  yüksekliğindeki dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları verildi.  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için korunum sabitlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 2.3119695056e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1749967525e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.8997785725e - 06$ ;  $\Delta I_1 = 2.3028333555e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1883333310e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.9432500271e - 06$  ve  $\Delta I_1 = 2.2956089980e - 03$ ,  $\Delta I_2 = 1.1991579732e - 06$ ,  $\Delta I_3 = 2.9783941475e - 06$  olarak bulundu.  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin de küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin ise bir miktar arttığı görüldü.  $t = 20$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $\Delta t = 0.1$  değeri için  $L_2 = 2.4502654593e - 04$ ,  $L_\infty = 5.2404770859e - 05$  olarak bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $L_2 = 2.3794213737e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0614558270e - 05$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $L_2 = 2.3572851150e - 04$ ,  $L_\infty = 5.0068282061e - 05$  olarak bulundu. Buradan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değeri de küçüldü.

Çizelge 4.81'de korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-5 'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-5 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.3$  için  $L_2 = 2.1723329969e - 04$ ,  $L_\infty = 8.3309171248e - 05$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon yöntemiyle yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Dağ vd. [18],

**Çizelge 4.77 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799303964	0.8104624901	2.5790074444	$4.6237845603e-05$	$1.7905965800e-05$
	8	3.9799277398	0.8104624948	2.5790074586	$9.0681546420e-05$	$3.6076392484e-05$
	12	3.9799276141	0.8104624969	2.5790074638	$1.3408271582e-04$	$5.3130654589e-05$
	16	3.9799189631	0.8104624964	2.5790074598	$1.7582062552e-04$	$6.8787108943e-05$
	20	3.9798873623	0.8104624958	2.5790074551	$2.1723329969e-04$	$8.3309171248e-05$
$\Delta I_1 = 3.9309977800e-05$ , $\Delta I_2 = 8.2648563549e-09$ , $\Delta I_3 = 1.8401000723e-08$						
0.05	0	3.9799266736	0.8104624937	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799304981	0.8104624939	2.5790074367	$4.6203435428e-05$	$1.7890159335e-05$
	8	3.9799278021	0.8104624942	2.5790074363	$9.0572917989e-05$	$3.6033484313e-05$
	12	3.9799276811	0.8104624943	2.5790074350	$1.3390913289e-04$	$5.3057424284e-05$
	16	3.9799189964	0.8104624944	2.5790074327	$1.7558642479e-04$	$6.8699206150e-05$
	20	3.9798871584	0.8104624948	2.5790074313	$2.1695400299e-04$	$8.3191327886e-05$
$\Delta I_1 = 3.9515188976e-05$ , $\Delta I_2 = 1.0598797395e-09$ , $\Delta I_3 = 5.4004654082e-09$						

$h = 0.1$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 2.2050 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.8448 \times 10^{-4}$ ;  $L_2 = 0.30 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.116 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.36875 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.13204 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Kuintik kollokasyon metoduyla; Saka vd. [24],  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.15192 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.82951 \times 10^{-4}$  olarak; Islam vd. [25], meshfree kollokasyon metodu ile yaptıkları çalışmada  $h = 0.125$  değeri için hata normlarını  $L_2 = 2.06910 \times 10^{-4}$ ,  $L_\infty = 0.78027 \times 10^{-4}$  olarak hesaplamışlardır. Dağ vd. [34], kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak  $L_\infty = 3.08 \times 10^{-4}$  bulmuşlardır. Sonuçlardan görüldüğü üzere; LİN-5 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalardan daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.82'de korunum sabitleri ve hata normları için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-5'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında LİN-5 ile hesaplanan hata normları  $3c = 0.09$  için  $L_2 = 1.4069676082e-03$ ,  $L_\infty = 4.2352043436e-04$  olarak bulundu. Kübik kollokasyon metoduyla yaptıkları çalışmalarda hata normlarını; Saka [17],  $h = 0.125$  değeri için, Saka vd. [20],  $h = 0.1$  değeri için sırasıyla  $L_2 = 1.2735 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.3467 \times 10^{-3}$ ;  $L_2 = 0.65102 \times 10^{-3}$ ,  $L_\infty = 0.43151 \times 10^{-3}$  olarak bulmuşlardır. Çizelge incelendiğinde görülüyor ki, LİN-5 ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu benzer çalışmalar yapan çalışmalara uyumlu sonuçlar vermiştir.

### **Problem 2: İki Soliter Dalga Girişimi**

Bu kısımda, Problem 2'nin LİN-5 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-200 \leq x \leq 400$  aralığında sırasıyla  $3c_1 = 0.6$  ve  $3c_2 = 0.3$  yüksekliğinde,  $x_1 =$

**Çizelge 4.78 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799303964	0.8104624901	2.5790074444	$4.6237845603e-05$	$1.7905965800e-05$
	8	3.9799277398	0.8104624948	2.5790074586	$9.0681546420e-05$	$3.6076392484e-05$
	12	3.9799276141	0.8104624969	2.5790074638	$1.3408271582e-04$	$5.3130654589e-05$
	16	3.9799189631	0.8104624964	2.5790074598	$1.7582062552e-04$	$6.8787108943e-05$
	20	3.9798873623	0.8104624958	2.5790074551	$2.1723329969e-04$	$8.3309171248e-05$
$\Delta I_1 = 3.9309977800e-05$ , $\Delta I_2 = 8.2648563549e-09$ , $\Delta I_3 = 1.8401000723e-08$						
0.05	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799304896	0.8104624901	2.5790074449	$1.3786129229e-05$	$6.2851888044e-06$
	8	3.9799278834	0.8104624948	2.5790074603	$2.3926321832e-05$	$9.0556121145e-06$
	12	3.9799277536	0.8104624969	2.5790074672	$3.4920986598e-05$	$1.3342507610e-05$
	16	3.9799191105	0.8104624964	2.5790074652	$4.5626408616e-05$	$1.7299382107e-05$
	20	3.9798875365	0.8104624958	2.5790074630	$6.1331650792e-05$	$2.1093737787e-05$
$\Delta I_1 = 3.9135766392e-05$ , $\Delta I_2 = 8.2712853233e-09$ , $\Delta I_3 = 2.6254986185e-08$						
0.01	0	3.9799266723	0.8104624876	2.5790074367	0.0000000000	0.0000000000
	4	3.9799305646	0.8104624901	2.5790074449	$7.6600120104e-06$	$6.2476409663e-06$
	8	3.9799279979	0.8104624948	2.5790074604	$7.6273294714e-06$	$5.1736386394e-06$
	12	3.9799278646	0.8104624969	2.5790074674	$9.6361781120e-06$	$6.1722590244e-06$
	16	3.9799192270	0.8104624964	2.5790074656	$1.2006177621e-05$	$6.0657828724e-06$
	20	3.9798876665	0.8104624958	2.5790074635	$2.9157016955e-05$	$1.2352699128e-05$
$\Delta I_1 = 3.9005848486e-05$ , $\Delta I_2 = 8.2794578971e-09$ , $\Delta I_3 = 2.6796377117e-08$						

**Çizelge 4.79 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012596	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1072160923	0.1273014144	0.3888045415	$5.0291433397e-04$	$4.2346923992e-04$
	8	2.1069236561	0.1273013313	0.3888042892	$5.8188189066e-04$	$2.7484294305e-04$
	12	2.1067121129	0.1273013675	0.3888046554	$7.1548322948e-04$	$3.0536229168e-04$
	16	2.1060799352	0.1273016410	0.3888052901	$9.1301713747e-04$	$3.2428890956e-04$
	20	2.1047347862	0.1273024346	0.3888075524	$1.4069676082e-03$	$4.2352043436e-04$
$\Delta I_1 = 2.3119695056e-03$ , $\Delta I_2 = 1.1749967525e-06$ , $\Delta I_3 = 2.8997785725e-06$						
0.05	0	2.1070467985	0.1273012599	0.3888046527	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1072211485	0.1273014274	0.3888045671	$5.0748552855e-04$	$4.2902889789e-04$
	8	2.1069265516	0.1273013432	0.3888043071	$5.8444058312e-04$	$2.7482156336e-04$
	12	2.1067143774	0.1273013756	0.3888046725	$7.1788637076e-04$	$3.2390968456e-04$
	16	2.1060812985	0.1273016521	0.3888053156	$9.1745357954e-04$	$3.4503053540e-04$
	20	2.1047298060	0.1273024468	0.3888075782	$1.4123408593e-03$	$4.2658346960e-04$
$\Delta I_1 = 2.3169925201e-03$ , $\Delta I_2 = 1.1868789919e-06$ , $\Delta I_3 = 2.9255402895e-06$						

**Çizelge 4.80 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	0	2.1070467557	0.1273012596	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1072160923	0.1273014144	0.3888045415	$5.0291433397e-04$	$4.2346923992e-04$
	8	2.1069236561	0.1273013313	0.3888042892	$5.8188189066e-04$	$2.7484294305e-04$
	12	2.1067121129	0.1273013675	0.3888046554	$7.1548322948e-04$	$3.0536229168e-04$
	16	2.1060799352	0.1273016410	0.3888052901	$9.1301713747e-04$	$3.2428890956e-04$
	20	2.1047347862	0.1273024346	0.3888075524	$1.4069676082e-03$	$4.2352043436e-04$
$\Delta I_1 = 2.3119695056e-03$ , $\Delta I_2 = 1.1749967525e-06$ , $\Delta I_3 = 2.8997785725e-06$						
0.05	0	2.1070467557	0.1273012596	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1072199333	0.1273014135	0.3888045430	$5.0080159157e-04$	$4.2166406516e-04$
	8	2.1069305396	0.1273013310	0.3888042928	$5.7968247068e-04$	$2.7368022260e-04$
	12	2.1067198568	0.1273013679	0.3888046589	$7.1348661649e-04$	$3.0403975373e-04$
	16	2.1060882513	0.1273016434	0.3888053003	$9.1258321078e-04$	$3.2285961239e-04$
	20	2.1047439224	0.1273024479	0.3888075959	$1.4104814673e-03$	$4.2524859834e-04$
$\Delta I_1 = 2.3028333555e-03$ , $\Delta I_2 = 1.1883333310e-06$ , $\Delta I_3 = 2.9432500271e-06$						
0.01	0	2.1070467557	0.1273012596	0.3888046526	0.0000000000	0.0000000000
	4	2.1072230325	0.1273014128	0.3888045444	$4.9912890841e-04$	$4.2023206017e-04$
	8	2.1069360344	0.1273013308	0.3888042956	$5.7795088908e-04$	$2.7274820034e-04$
	12	2.1067260167	0.1273013683	0.3888046617	$7.1193337417e-04$	$3.0297785968e-04$
	16	2.1060949051	0.1273016453	0.3888053087	$9.1233229604e-04$	$3.2172489753e-04$
	20	2.1047511467	0.1273024588	0.3888076310	$1.4134012846e-03$	$4.2666091897e-04$
$\Delta I_1 = 2.2956089980e-03$ , $\Delta I_2 = 1.1991579732e-06$ , $\Delta I_3 = 2.9783941475e-06$						

**Çizelge 4.81 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.3$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-5	0.1	3.9798873623	0.8104624958	2.5790074551	$2.1723329969e-04$	$8.3309171248e-05$
LİN-5	0.05	3.9798871584	0.8104624948	2.5790074313	$2.1695400299e-04$	$8.3191327886e-05$
[3]	0.125	3.9799617	0.8104575	2.5790071	$0.72252 \times 10^{-3}$	$0.21643 \times 10^{-3}$
[9]	0.125	3.97988	0.81046	2.57902	$0.52171 \times 10^{-3}$	$0.19828 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	3.97989	0.810462	2.57901	$0.217 \times 10^{-3}$	$0.084 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	3.97989	0.810467	2.57902	$0.220 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	3.98203	0.808650	2.57302	$4.688 \times 10^{-3}$	$1.755 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	3.961597	0.804185	2.558292	$0.0184 \times 10^{-3}$	$1.5664 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	3.97986	0.810399	2.57880	$0.227 \times 10^{-3}$	$0.081 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	3.980016	0.8104624	2.579006	$2.2050 \times 10^{-4}$	$0.8448 \times 10^{-4}$
[18]	0.125	3.979958	0.8104596	2.578999	$2.6086 \times 10^{-4}$	$1.0299 \times 10^{-4}$
[19]	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	$0.30 \times 10^{-3}$	$0.116 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	3.97994	0.81044	2.57894	$0.36875 \times 10^{-3}$	$0.13204 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	3.97995	0.81046	2.57900	$0.37841 \times 10^{-3}$	$0.13993 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	3.97997	0.810459	2.57901	$0.55 \times 10^{-3}$	$0.21 \times 10^{-3}$
[22]	0.125	3.97988	0.810465	2.57901	$0.219 \times 10^{-3}$	$0.086 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	3.98206	0.811164	2.58133	$0.511 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[24]	0.125	3.9798798	0.8104625	2.5790075	$2.15192 \times 10^{-4}$	$0.82951 \times 10^{-4}$
[25]	0.125	3.9798831	0.81046248	2.5790074	$2.06910 \times 10^{-4}$	$0.78027 \times 10^{-4}$
[26]	0.1	3.979950	0.810521	2.579202	0.000702	0.000268
[27]	0.125	3.97972	0.81026	2.57873	$0.266856 \times 10^{-3}$	$0.091465 \times 10^{-3}$
[28]	0.2	3.9800	0.8104	2.5792	$1.7569e-003$	$6.8432e-004$
[29]	0.125	3.9799000	0.8104646	2.5790160	$0.04921 \times 10^{-3}$	$0.02020 \times 10^{-3}$
[30]	0.25	3.9799	0.8104	2.5790	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.07 \times 10^{-3}$
[34]	0.1	3.9798827	0.8104626	2.5790079	—	$3.08 \times 10^{-4}$
[36]	0.01	3.9799497	0.8104623	2.5790075	—	$8.79 \times 10^{-5}$
[37]	0.1	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216	—	$8.75 \times 10^{-5}$

**Çizelge 4.82 :** LİN-5 ile Problem 1'in  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c = 0.09$ ,  $-40 \leq x \leq 60$ )

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-5	0.1	2.1047347862	0.1273024346	0.3888075524	$1.4069676082e-03$	$4.2352043436e-04$
LİN-5	0.05	2.1047298060	0.1273024468	0.3888075782	$1.4123408593e-03$	$4.2658346960e-04$
[3]	0.125	2.1094098	0.1273016386	0.38805990	$0.05366 \times 10^{-3}$	$0.01420 \times 10^{-3}$
[11]	0.1	2.10503	0.127302	0.388802	$0.527 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[12]	0.1	2.105	0.127302	0.388803	$0.653 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[13]	0.125	2.10769	0.127260	0.388677	$0.347 \times 10^{-3}$	$0.239 \times 10^{-3}$
[14]	0.125	2.128869	0.127228	0.388571	$0.0281 \times 10^{-3}$	$1.5506 \times 10^{-3}$
[15]	0.125	2.10908	0.127318	0.388854	$0.537 \times 10^{-3}$	$0.316 \times 10^{-3}$
[16]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[17]	0.125	2.112292	0.1273037	0.388812	$1.2735 \times 10^{-3}$	$0.3467 \times 10^{-3}$
[19]	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.432 \times 10^{-3}$
[20]	0.1	2.10948	0.12730	0.38880	$0.65102 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[20]	0.125	2.10902	0.12731	0.38881	$0.54701 \times 10^{-3}$	$0.43151 \times 10^{-3}$
[21]	0.1	2.109	0.127302	0.388807	$0.638 \times 10^{-3}$	$0.233 \times 10^{-3}$
[23]	0.125	2.10906	0.127305	0.388815	$0.535 \times 10^{-3}$	$0.198 \times 10^{-3}$
[27]	0.125	2.10902	0.12730	0.38880	$0.559402 \times 10^{-3}$	$0.439145 \times 10^{-3}$
[29]	0.125	2.1053880	0.1273009	0.3888025	$0.42247 \times 10^{-3}$	$0.33643 \times 10^{-3}$
[31]	0.125	2.1045885	0.1273012	0.3888023	x	$4.315 \times 10^{-4}$

$-177$  ve  $x_2 = -147$  konumunda olan iki dalganın girişimi  $t = 400$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.83'te  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 1.6914865273e-03$ ,  $\Delta I_2 = 2.3060125873e-05$ ,  $\Delta I_3 = 2.3204308651e-05$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960403973e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2797930773e-06$ ,  $\Delta I_3 = 3.3431171111e-06$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $h$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerinin arttığı,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.84'te  $h = 0.1$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 3.3960403973e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2797930773e-06$ ,  $\Delta I_3 = 3.3431171111e-06$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960345992e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.3239055021e-06$ ,  $\Delta I_3 = 2.0800409715e-06$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 3.3960330462e-03$ ,  $\Delta I_2 = 1.2183227458e-06$ ,  $\Delta I_3 = 1.1307618717e-06$  olarak bulundu. Sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta t$  değeri küçüldükçe  $\Delta I_1$  ve  $\Delta I_3$  değerlerinin de küçüldüğü;  $\Delta I_2$  değerinde bir miktar artma olduğu görüldü.

Çizelge 4.85'te korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-5 'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$

**Çizelge 4.83 :** LİN-5 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6$ ,  $3c_2 = 0.3$ ,  $x_1 = -177$ ,  $x_1 = -147$   $-200 \leq x \leq 400$ ).

$t$	$h = 0.24$			$h = 0.12$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582544848	3.2447884540	10.7783293821	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8599337140	3.2447740356	10.7783172092	9.8613403842	3.2447790988	10.7783044979
80	9.8599454882	3.2446870637	10.7782307544	9.8616125980	3.2447436424	10.7782167677
120	9.8599456537	3.2444748707	10.7780135958	9.8616371101	3.2446529437	10.7779868681
$\Delta t = 0.1$ 160	9.8599456146	3.2440744164	10.7775839498	9.8616394517	3.2444842201	10.7775463923
200	9.8599454671	3.2437969248	10.7772752769	9.8616396866	3.2443691001	10.7772391148
240	9.8599455391	3.2440591754	10.7775669585	9.8616396855	3.2444799804	10.7775351953
280	9.8599457030	3.2444690780	10.7780070848	9.8616396595	3.2446500528	10.7779794429
320	9.8599459061	3.2446949413	10.7782384688	9.8616396857	3.2447429316	10.7782149916
360	9.8599460167	3.2447821589	10.7783244231	9.8616397448	3.2447786773	10.7783034283
400	9.8599459714	3.2448115141	10.7783525864	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061
	$\Delta I_1 = 1.6914865273e - 03$			$\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$		
	$\Delta I_2 = 2.3060125873e - 05$			$\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$		
	$\Delta I_3 = 2.3204308651e - 05$			$\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$		

zamanında LİN-5 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

### Problem 3: Ardışık Dalga Gelişimi

Bu kısımda, Problem 3'ün LİN-5 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgeler halinde verildi.  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $d = 2$  ve  $d = 2$  eğimlerindeki dalgaların girişimi  $t = 250$  zamanına kadar  $h$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için gözlemlendi. İnvaryantlardaki değişim sabit olmadığı için  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  değerleri hesaplandı.

Çizelge 4.86'da  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504158$ ,  $M_2 = 0.0109954342$ ,  $M_3 = 0.0340805041$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878327$ ,  $M_2 = 0.0109991308$ ,  $M_3 = 0.0340923869$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969698$ ,  $M_2 = 0.0110000313$ ,  $M_3 = 0.0340952807$  olarak bulundu.

Çizelge 4.87'de  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504158$ ,  $M_2 = 0.0109954342$ ,  $M_3 = 0.0340805041$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504167$ ,  $M_2 = 0.0109951856$ ,  $M_3 = 0.0340794728$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504169$ ,  $M_2 = 0.0109951056$ ,  $M_3 = 0.0340791410$  olarak bulundu.

Çizelge 4.88'de  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $h = 0.24$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri

**Çizelge 4.84 :** LIN-5 ile Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

$t$	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$			$\Delta t = 0.01$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630	9.8582437346	3.2447894396	10.7783293630
40	9.8613403842	3.2447790988	10.7783044979	9.8613403790	3.2447833870	10.7783242516	9.8613403773	3.2447846874	10.7783302487
80	9.8616125980	3.2447436424	10.7782167677	9.8616125959	3.2447616579	10.7783024025	9.8616125953	3.2447673614	10.7783295286
120	9.8616371101	3.2446529437	10.7779868681	9.8616371088	3.2447068270	10.7782452418	9.8616371085	3.2447240015	10.7783276196
160	9.8616394517	3.2444842201	10.7775463923	9.8616394456	3.2446063087	10.7781354992	9.8616394437	3.2446453543	10.7783239368
200	9.8616396866	3.2443691001	10.7772391148	9.8616396754	3.2445386697	10.7780590078	9.8616396720	3.2445929223	10.7783213624
240	9.8616396855	3.2444799804	10.7775351953	9.8616396807	3.2446041137	10.7781330507	9.8616396793	3.2446437247	10.7783238575
280	9.8616396595	3.2446500528	10.7779794429	9.8616396602	3.2447054047	10.7782437197	9.8616396606	3.2447229619	10.7783275707
320	9.8616396857	3.2447429316	10.7782149916	9.8616396863	3.2447615100	10.7783022563	9.8616396867	3.2447673122	10.7783295248
360	9.8616397448	3.2447786773	10.7783034283	9.8616397412	3.2447833508	10.7783241924	9.8616397402	3.2447847187	10.7783302538
400	9.8616397750	3.2447907193	10.77833227061	9.8616397692	3.2447907635	10.7783314431	9.8616397677	3.2447906579	10.7783304938
		$\Delta I_1 = 3.3960403973e - 03$		$\Delta I_1 = 3.3960345992e - 03$		$\Delta I_1 = 3.3960330462e - 03$			
		$\Delta I_2 = 1.2797930773e - 06$		$\Delta I_2 = 1.3239055021e - 06$		$\Delta I_2 = 1.2183227458e - 06$			
		$\Delta I_3 = 3.3431171111e - 06$		$\Delta I_3 = 2.0800409715e - 06$		$\Delta I_3 = 1.1307618717e - 06$			

**Çizelge 4.85 :** LİN-5 ile Problem 2'nin  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.12$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, x_1 = -177, x_1 = -147 -200 \leq x \leq 400$ ).

	$h$	$I_1$	$I_2$	$I_2$
LİN-5	0.12	9.8616397750	3.2447907193	10.7783327061
[3]	0.12	9.86166027	3.2447357	10.778305
[16]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[22]	0.12	9.85830	3.24478	10.77819
[23]	0.12	9.8930	3.2585	10.8251
[27]	0.25	9.8563	3.2351	10.7703
[28]	0.12	9.8631	3.2565	10.8224
[32]	0.12	9.8577	3.2445	10.7779
[36]	0.12	9.8579	3.2453	10.7807

$M_1 = 0.1074504103, M_2 = 0.0109952973, M_3 = 0.0340848985$  bulunurken  $h = 0.12$  değeri için  $M_1 = 0.1074878298, M_2 = 0.0109990289, M_3 = 0.0340967771$  ve  $h = 0.06$  değeri için  $M_1 = 0.1074969704, M_2 = 0.0109999390, M_3 = 0.0340996735$  olarak bulundu.

Çizelge 4.89'da  $d = 5, h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\Delta t = 0.1$  değeri için hesaplanan invaryantların zamana bağlı değişimleri  $M_1 = 0.1074504103, M_2 = 0.0109952973, M_3 = 0.0340848985$  bulunurken  $\Delta t = 0.05$  değeri için  $M_1 = 0.1074504103, M_2 = 0.0109951160, M_3 = 0.0340841457$  ve  $\Delta t = 0.01$  değeri için  $M_1 = 0.1074504103, M_2 = 0.0109950576, M_3 = 0.0340839036$  olarak bulundu.

Çizelge 4.86, Çizelge 4.87, Çizelge 4.88 ve Çizelge 4.89'da verilen  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  değerlerinin (3.2.1) de verilen  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.90'da  $d = 2$  için LİN-5 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.91'de korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-5 ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.92'de  $d = 5$  için LİN-5 ile hesaplanan korunum sabitleri ve Çizelge 4.93'te korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimi, literatürdeki farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında LİN-5

**Çizelge 4.86 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.6097327174	0.3530137007	1.0933005947
	50	8.9509439842	0.8978717648	2.7820774583
	100	14.3258879684	1.4478656244	4.4868581939
	150	19.7008319525	1.9978594258	6.1915270944
	200	25.0757759363	2.5478532051	7.8961544696
	250	30.4507201150	3.0978470148	9.6007658410
		$M_1 = 0.1073639496$		
		$M_2 = 0.0109793333$		
		$M_3 = 0.0340298610$		
0.12	0	3.6049664475	0.3516821605	1.0890194979
	50	8.9629965125	0.8990774034	2.7858152756
	100	14.3379930249	1.4490770211	4.4906144380
	150	19.7171745915	1.9990766352	6.1953020239
	200	25.0879860493	2.5490762479	7.8999481767
	250	30.4629828357	3.0990759149	9.6045784110
		$M_1 = 0.1074320656$		
		$M_2 = 0.0109895750$		
		$M_3 = 0.0340622357$		

ile hesaplanan korunum sabitlerinin ve korunum sabitlerinin zamana bağlı değişiminin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.87 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.6097327174	0.3530137007	1.0933005947
	50	8.9509439842	0.8978717648	2.7820774583
	100	14.3258879684	1.4478656244	4.4868581939
	150	19.7008319525	1.9978594258	6.1915270944
	200	25.0757759363	2.5478532051	7.8961544696
	250	30.4507201150	3.0978470148	9.6007658410
		$M_1 = 0.1073639496$		
		$M_2 = 0.0109793333$		
		$M_3 = 0.0340298610$		
0.05	0	3.6097327174	0.3530137007	1.0933005947
	50	8.9509439843	0.8978717641	2.7820696968
	100	14.3258879686	1.4478656221	4.4868379802
	150	19.7008319528	1.9978594216	6.1914926190
	200	25.0757759368	2.5478531990	7.8961051895
	250	30.4507201168	3.0978470069	9.6007015722
		$M_1 = 0.1073639496$		
		$M_2 = 0.0109793332$		
		$M_3 = 0.0340296039$		
0.01	0	3.6097327174	0.3530137007	1.0933005947
	50	8.9509439843	0.8978717639	2.7820672022
	100	14.3258879686	1.4478656213	4.4868314763
	150	19.7008319529	1.9978594202	6.1914815229
	200	25.0757759369	2.5478531970	7.8960893271
	250	30.4507201121	3.0978470033	9.6006808811
		$M_1 = 0.1073639496$		
		$M_2 = 0.0109793332$		
		$M_3 = 0.0340295211$		

**Çizelge 4.88 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$h$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.24	0	3.6097328509	0.3378470588	1.0460506718
	50	8.9509441190	0.8827053349	2.7352811318
	100	14.3258881042	1.4326993950	4.4404732132
	150	19.7008320890	1.9826932979	6.1453449703
	200	25.0757760730	2.5326871151	7.8500461548
	250	30.4507200484	3.0826809005	9.5546855162
$M_1 = 0.1073639488$				
$M_2 = 0.0109793354$				
$M_3 = 0.0340345394$				
0.12	0	3.6049665840	0.3365155201	1.0417695803
	50	8.9629966436	0.8839107760	2.7390180747
	100	14.3379931571	1.4339104064	4.4442276945
	150	19.7129896701	1.9839100269	6.1491176906
	200	25.0879861821	2.5339096419	7.8538374903
	250	30.4629826858	3.0839092549	9.5584956030
$M_1 = 0.1074320644$				
$M_2 = 0.0109895749$				
$M_3 = 0.0340669041$				

**Çizelge 4.89 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$  ve  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

$\Delta t$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	3.6097328509	0.3378470588	1.0460506718
	50	8.9509441190	0.8827053349	2.7352811318
	100	14.3258881042	1.4326993950	4.4404732132
	150	19.7008320890	1.9826932979	6.1453449703
	200	25.0757760730	2.5326871151	7.8500461548
	250	30.4507200484	3.0826809005	9.5546855162
$M_1 = 0.1073639488$				
$M_2 = 0.0109793354$				
$M_3 = 0.0340345394$				
0.05	0	3.6097328509	0.3378470588	1.0460506718
	50	8.9509441190	0.8827053348	2.7352796539
	100	14.3258881044	1.4326993943	4.4404660054
	150	19.7008320892	1.9826932957	6.1453266508
	200	25.0757760731	2.5326871111	7.8500140462
	250	30.4507200487	3.0826808945	9.5546387698
$M_1 = 0.1073639488$				
$M_2 = 0.0109793353$				
$M_3 = 0.0340343524$				
0.01	0	3.6097328509	0.3378470588	1.0460506718
	50	8.9509441190	0.8827053348	2.7352791803
	100	14.3258881044	1.4326993941	4.4404636891
	150	19.7008320892	1.9826932950	6.1453207567
	200	25.0757760730	2.5326871098	7.8500037123
	250	30.4507200487	3.0826808926	9.5546237232
$M_1 = 0.1073639488$				
$M_2 = 0.0109793353$				
$M_3 = 0.0340342922$				

**Çizelge 4.90 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.6097327174	0.3530137007	1.0933005947
	50	8.9509439842	0.8978717648	2.7820774583
	100	14.3258879684	1.4478656244	4.4868581939
LİN-5	150	19.7008319525	1.9978594258	6.1915270944
	200	25.0757759363	2.5478532051	7.8961544696
	250	30.4507201150	3.0978470148	9.6007658410
[3]	250	30.462999	3.099644	9.607216
[17]	250	30.48700	3.10120	9.61074
[20]	250	30.48699	3.10147	9.61200
[21]	250	30.46299	3.09887	9.60482
[22]	250	30.4869971	3.10123	9.61118
[33]	250	30.862500	3.182114	9.867540

#### Problem 4: Dalga Oluşumu

Bu kısımda, Problem 4'ün LİN-5 yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri çizelgede verildi.  $0 \leq x \leq 50$  aralığında dalga oluşumu  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.01$  olmak üzere  $\mu$  nün farklı değerleri için gözlemlendi.

Çizelge 4.94'te  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$  nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri verildi.  $\mu = 0.04$  değeri için Problem 4'ün korunum sabitlerindeki değişim  $\Delta I_1 = 6.1799634299e - 09$ ,  $\Delta I_2 = 9.2491625470e - 09$ ,  $\Delta I_3 = 3.0744868077e - 05$  bulunurken  $\mu = 0.01$  değeri için  $\Delta I_1 = 5.6209974453e - 09$ ,  $\Delta I_2 = 3.7154224097e - 07$ ,  $\Delta I_3 = 5.2740156795e -$

**Çizelge 4.91 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-5	0.24	0.1073639496	0.0109793333	0.0340298610
[3]	0.24	0.1074999951	0.0110022	0.0341057
[17]	0.24	0.1075	0.010999	0.034090
[20]	0.24	0.1075	0.010999	0.034095
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034096
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034092
[33]	0.24	0.109002	0.011322544	0.03511728

**Çizelge 4.92 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	0	3.6097328509	0.3378470588	1.0460506718
	50	8.9509441190	0.8827053349	2.7352811318
	100	14.3258881042	1.4326993950	4.4404732132
LİN-5	150	19.7008320890	1.9826932979	6.1453449703
	200	25.0757760730	2.5326871151	7.8500461548
	250	30.4507200484	3.0826809005	9.5546855162
[3]	250	30.463000	3.084325	9.560418
[17]	250	30.48705	3.08611	9.56502
[20]	250	30.48705	3.08631	9.56592
[21]	250	30.46305	3.08376	9.55868
[22]	250	30.4869998	3.08613	9.56533
[33]	250	30.687597	3.127201	9.695225

**Çizelge 4.93 :** LİN-5 ile Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $h = 0.24$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin zamana bağlı değişimlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $-36 \leq x \leq 300$ ).

	$h$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-5	0.24	0.1073639488	0.0109793354	0.0340345394
[3]	0.24	0.1074999996	0.01100165	0.0341075
[17]	0.24	0.1075	0.011	0.034096
[20]	0.24	0.1075	0.011	0.034099
[21]	0.24	0.107500	0.010992	0.034101
[22]	0.24	0.1075	0.010999	0.034097
[33]	0.24	0.108302388	0.01116356	0.03461702

**Çizelge 4.94 :** LİN-5 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ( $0 \leq x \leq 50$ ).

$\mu$	$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.04	0	1.7724538509	1.3034467021	4.7832691199
	5	1.7724538506	1.3034467115	4.7832992682
	10	1.7724538506	1.3034467112	4.7832999016
	15	1.7724538507	1.3034467112	4.7832998786
	20	1.7724538510	1.3034467113	4.7832998687
	25	1.7724538447	1.3034467113	4.7832998648
			$\Delta I_1 = 6.1799634299e - 09$	
		$\Delta I_2 = 9.2491625470e - 09$		
		$\Delta I_3 = 3.0744868077e - 05$		
0.01	0	1.7724538509	1.2658472785	4.7832691199
	5	1.7724538290	1.2658475850	4.7837702027
	10	1.7724538320	1.2658476072	4.7837943018
	15	1.7724538364	1.2658476218	4.7837961135
	20	1.7724538408	1.2658476360	4.7837964438
	25	1.7724538453	1.2658476501	4.7837965215
			$\Delta I_1 = 5.6209974453e - 09$	
		$\Delta I_2 = 3.7154224097e - 07$		
		$\Delta I_3 = 5.2740156795e - 04$		
0.001	0	1.7724538509	1.2545674514	4.7832691199
	5	1.7724540014	1.2546125837	4.7899944314
	10	1.7724609913	1.2546387589	4.7904015465
	15	1.7724680620	1.2546636373	4.7905393523
	20	1.7724751353	1.2546884540	4.7906600112
	25	1.7724822099	1.2547132663	4.7907778189
			$\Delta I_1 = 2.8358962357e - 05$	
		$\Delta I_2 = 1.4581490864e - 04$		
		$\Delta I_3 = 7.5086989887e - 03$		

04 ve  $\mu = 0.001$  değeri için  $\Delta I_1 = 2.8358962357e - 05$ ,  $\Delta I_2 = 1.4581490864e - 04$ ,  $\Delta I_3 = 7.5086989887e - 03$  olarak bulundu. Bu sonuçlara göre  $\mu$  değerleri küçüldükçe  $\Delta I_1$  değerlerinin küçüldüğü,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerinin bir miktar arttığı görüldü.

Çizelge 4.95'te korunum sabitleri için literatürdeki farklı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile LİN-5 'ten elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.01$  değerleri için LİN-5 ile hesaplanan korunum sabitlerinin bu çalışmalarda elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

**Çizelge 4.95 :** LİN-5 ile Problem 4'ün  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu$ 'nün farklı değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması ( $0 \leq x \leq 50$ ).

	$\mu$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
LİN-5	0.04	1.7724538447	1.3034467113	4.7832998648
LİN-5	0.01	1.7724538453	1.2658476501	4.7837965215
LİN-5	0.001	1.7724822099	1.2547132663	4.7907778189
[17]	0.04	1.772454	1.303447	4.783298
[17]	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
[17]	0.001	1.772484	1.254676	4.790517
[30]	0.04	1.7724	1.1554	4.1864
[30]	0.01	1.8024	0.9209	3.3385
[30]	0.001	1.7724	1.0744	4.0965

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kübik trigonometrik baz fonksiyonlar yardımı ile kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak RLW denkleminin nümerik çözümleri sunuldu. Denklemin çözümlerini elde etmek için beş farklı lineerleştirme tekniği uygulandı. Herbir lineerleştirme tekniği 4 model probleme uygulanarak, konum adım uzunluğu  $h$  ve zaman adım uzunluğu  $\Delta t$  nin farklı değerleri için elde edilen sonuçlar çizelgeler halinde verildi. Aynı zamanda literatürdeki benzer çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile her bir lineerleştirme tekniğinin karşılaştırma çizelgeleri verildi.

Problem 1'in  $3c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen, sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen korunum sabitlerindeki değişim ve  $t = 20$  zamanındaki hata normları Çizelge 5.1'de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere;  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerleri için LİN-1, LİN-3, LİN-4 ve LİN-5'ten elde edilen değerler birbirlerine yakın olup LİN-2 değerinden nispeten daha iyi sonuçlar vermiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  değerlerine bakıldığında ise LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4'ten elde edilen değerlerin birbirine yakın olduğu LİN-5'in bu değerlerden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Problem 1'in  $3c = 0.09$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen korunum sabitlerindeki değişim ve  $t = 20$  zamanındaki hata normları Çizelge 5.2'de verildi. Çizelgedeki sonuçlardan görüldüğü üzere;  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerleri için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4'ten elde edilen değerler birbirlerine yakın olup LİN-5 değerinden nispeten daha iyi sonuçlar vermiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  değerlerine bakıldığında ise LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4'ten elde edilen değerlerin birbirine yakın olduğu ve LİN-5'e göre bu değerlerin nispeten daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Problem 2'nin  $h = 0.12$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen korunum sabitlerindeki değişim Çizelge 5.3'te verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere;  $\Delta I_1$ ,

**Çizelge 5.1 :** Problem 1'in  $3c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için hesaplanan korunum sabitlerindeki değişim ve  $t = 20$  zamanındaki hata normları.

	$\Delta I_1$	$\Delta I_2$	$\Delta I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1	1.8844465830e-05	5.6950849592e-09	8.5684384032e-09	1.0570074844e-03	3.0258981733e-04
LİN-2	1.4218303227e-03	4.9414400490e-04	1.6306753594e-03	1.0327144975e-03	3.1710564898e-04
LİN-3	1.8844482066e-05	3.9694053600e-09	2.0763443409e-08	1.0518615785e-03	2.9920991467e-04
LİN-4	1.8844447659e-05	1.6407885939e-08	4.1122586225e-08	1.0620153695e-03	3.0575415137e-04
LİN-5	3.9309977800e-05	8.2648563549e-09	1.8401000723e-08	2.1723329969e-04	8.3309171248e-05

**Çizelge 5.2 :** Problem 1'in  $3c = 0.09$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 20$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

	$\Delta I_1$	$\Delta I_2$	$\Delta I_3$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1	$2.3512692811e-04$	$1.0200688919e-07$	$2.9723124551e-07$	$2.4502654593e-04$	$5.2404770859e-05$
LİN-2	$2.1335273393e-04$	$2.1386083604e-06$	$6.6262697234e-06$	$2.4488187525e-04$	$5.2064633363e-05$
LİN-3	$2.3512722309e-04$	$1.0203844816e-07$	$2.9732496953e-07$	$2.4497236535e-04$	$5.2360997555e-05$
LİN-4	$2.3512670221e-04$	$1.0198029601e-07$	$2.9715228106e-07$	$2.4507107176e-04$	$5.2439595051e-05$
LİN-5	$2.3119695056e-03$	$1.1749967525e-06$	$2.8997785725e-06$	$1.4069676082e-03$	$4.2352043436e-04$

**Çizelge 5.3 :** Problem 2'nin  $h = 0.12$ ,  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 400$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri.

	$\Delta I_1$	$\Delta I_2$	$\Delta I_3$
LİN-1	$3.3961265301e-03$	$7.1350678432e-07$	$1.5689552200e-06$
LİN-2	$2.7869151619e-02$	$1.3503567350e-02$	$4.5890268067e-02$
LİN-3	$3.3962409007e-03$	$1.3865248283e-07$	$1.8742681362e-07$
LİN-4	$3.3960403973e-03$	$1.2797930773e-06$	$3.3431171111e-06$
LİN-5	$1.6914865273e-03$	$2.3060125873e-05$	$2.3204308651e-05$

$\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerleri için LİN-1, LİN-3, LİN-4 ve LİN-5'ten elde edilen değerler birbirlerine yakın olup LİN-2 değerinden nispeten daha iyi sonuçlar vermiştir.

Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$ ,  $\Delta t = 0.1$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen korunum sabitlerindeki değişim Çizelge 5.4'te verildi. Çizelge dikkatli incelendiğinde görülüyor ki,  $M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerleri için uygulanan tüm lineerleştirme tekniklerinin yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$ ,  $\Delta t = 0.1$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen korunum sabitlerindeki değişim Çizelge 5.5'te verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere;

**Çizelge 5.4 :** Problem 3'ün  $d = 2$ ,  $h = 0.24$ ,  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-1	0.1074504158	0.0109951012	0.0340794724
LİN-2	0.1062155131	0.0107577423	0.0333330028
LİN-3	0.1074504157	0.0109929290	0.0340727438
LİN-4	0.1074504158	0.0109954342	0.0340805041
LİN-5	0.1073639496	0.0109793333	0.0340298610

**Çizelge 5.5 :** Problem 3'ün  $d = 5$ ,  $h = 0.24$ ,  $\Delta t = 0.1$  değerleri için  $t = 250$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
LİN-1	0.1074504104	0.0109950546	0.0340841451
LİN-2	0.1067509529	0.0108627071	0.0336679610
LİN-3	0.1074504104	0.0109934759	0.0340792463
LİN-4	0.1074504103	0.0109952974	0.0340848985
LİN-5	0.1073639488	0.0109793354	0.0340345394

**Çizelge 5.6 :** Problem 4'ün  $\mu = 0.04$ ,  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  değerleri için  $t = 25$  zamanında hesaplanan korunum sabitleri.

	$\Delta I_1$	$\Delta I_2$	$\Delta I_3$
LİN-1	$1.0228386360e - 08$	$1.0348223620e - 06$	$3.0682429717e - 05$
LİN-2	$7.7944524932e - 02$	$9.9679520885e - 02$	$4.0992151358e - 01$
LİN-3	$1.1023832069e - 08$	$7.9646103786e - 05$	$2.6474422074e - 04$
LİN-4	$1.0467924527e - 08$	$2.2911761823e - 05$	$1.2277263870e - 04$
LİN-5	$6.1799634299e - 09$	$9.2491625470e - 09$	$3.0744868077e - 05$

$M_1$ ,  $M_2$  ve  $M_3$  değerleri için uygulanan tüm lineerleştirme tekniklerinin yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Problem 4'ün  $\mu = 0.04$ ,  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$  değerleri için uygulanan lineerleştirmeler sonucu elde edilen korunum sabitlerindeki değişim Çizelge 5.6'da verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere;  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  ve  $\Delta I_3$  değerleri için LİN-1, LİN-3, LİN-4 ve LİN-5'ten elde edilen değerler birbirlerine yakın olup LİN-2 değerinden nispeten daha iyi sonuçlar vermiştir.

Sonuç olarak, düzenli uzun dalga (RLW) denklemindeki  $UU_x$  lineer olmayan terimi yerine kullanılan beş farklı lineerleştirme tekniğinin başarılı bir şekilde uygulanabildiği ve kübik trigonometrik B-spline sonlu eleman yaklaşımları ile iyi sonuçlar elde edildiği görüldü. Dolayısıyla tezde ele alınan bu yöntemler benzer lineer olmayan ve mühendislikte karşılaşılan problemlere de kolaylıkla uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Zeytinoglu, A.** (2017). *Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiğinde Bir Hibrit Yaklaşım* (Doktora Tezi). Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.
- [2] **İduğ, O.** (2013). *RLW ve KdV Denklemlerinin Solitary Dalga ve Soliton Çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [3] **Yalvaç, S.** (2016). *Düzenli uzun dalga (RLW) denkleminin sonlu fark yöntemleri ile çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [4] **Karakoç, S.** (2011). *Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] **Bhatti, M.** (2005). *Fundamental finite element analysis and applications: with Mathematica and MATLAB computations*, John Wiley, Hoboken, NJ.
- [6] **Güler, M. ve Şen, S.** (2015). SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ HAKKINDA GENEL BİLGİLER, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 56–66.
- [7] **Logan, D.** (2012). *A first course in the finite element method*, Cengage Learning, Stamford, CT.
- [8] **Reddy, J.N.** (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*, Oxford University Press, Oxford.
- [9] **Pınar, K.** (2010). *Solitary dalga çözümlerine sahip bazı KTD'lere sonlu farklar yöntemlerinin uygulanması* (Yüksek Lisans Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [10] **Pınar, K.** (2016). *RLW Denkleminin Trigonometrik B-spline Çözümleri* (Doktora Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [11] **Gardner, L. ve Dağ, .** (1995). The boundary-forced Regularized long wave Equation, *II Nuova Cimento*, (12), 1487–1496.
- [12] **Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. ve Dag, I.** (1995). A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering with Biomedical Applications*, 11(1), 59–68.
- [13] **Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. ve Dogan, A.** (1996). A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12(11), 795–804.
- [14] **Dağ, İ. ve Özer, M.N.** (2001). Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 25(3), 221–231.
- [15] **Doğan, A.** (2001). Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(7), 485–494.

- [16] **Doğan, A.** (2002). Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling*, 26(7), 771–783.
- [17] **Saka, B.** (2002). *RLW ve K-S denklemlerinin B-Spline kolokeyşin metodları ile çözümleri* (Doktora Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [18] **Dağ, I., Doğan, A. ve Saka, B.** (2003). B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 80(6), 743–757.
- [19] **Dağ, I., Saka, B. ve Irk, D.** (2004). Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 159(2), 373–389.
- [20] **Saka, B. ve Dağ, I.** (2005). A collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, *The Arabian Journal for Science and Engineering. Section A. Science*, 30(1), 39–50.
- [21] **Kutluay, S. ve Esen, A.** (2006). A finite difference solution of the regularized long-wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, 1–14.
- [22] **Esen, A. ve Kutluay, S.** (2006). Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 174(2), 833–845.
- [23] **Aydın, S.** (2007). *Düzenli uzun dalğanın (RLW) nümerik çözüümü* (Yüksek Lisans Tezi). Niğde Üniversitesi, Niğde.
- [24] **Saka, B., Dağ, I. ve Irk, D.** (2008). Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation, *The ANZIAM Journal. The Australian & New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal*, 49(3), 389–410.
- [25] **Sirajul, I., Haq, S. ve Ali, A.** (2009). A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(2), 997–1012.
- [26] **Pérez Pozo, L., Meneses, R., Spa, C. ve Durán, O.** (2012). A meshless finite-point approximation for solving the RLW equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Art. ID 802414, 22.
- [27] **Mei, L. ve Chen, Y.** (2012). Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques, *Computer Physics Communications*, 183(8), 1609–1616.
- [28] **Mei, L. ve Chen, Y.** (2012). Explicit multistep method for the numerical solution of RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9547–9554.
- [29] **Yılmaz, E.** (2012). *Solitary dalga çözümlerine sahip bazı KTD'lere sonlu elemanlar yöntemlerinin uygulanması* (Yüksek Lisans Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [30] **Korkmaz, A. ve Dağ, I.** (2013). Numerical simulations of boundary-forced RLW equation with cubic B-spline-based differential quadrature methods, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 38(5), 1151–1160.

- [31] **M. Z. Görgülü, .D. ve Irk, D.** (2015). Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation by using exponential B-splines, *Department of Mathematics-Computer Science*.
- [32] **Irk, D. ve Keskin, P.** (2016). Cubic Trigonometric B-spline Galerkin Methods for the Regularized Long Wave Equation, *Journal of Physics: Conference Series*, 766, 012032.
- [33] **Ameen, R.H.** (2016). *En Küçük Kareler B-Spline Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Problemlerine Uygulaması* (Yüksek Lisans Tezi). Aksaray Üniversitesi.
- [34] **Dag, I., Irk, D., Kaçmaz, O. ve Adar, N.** (2016). Trigonometric B-spline collocation algorithm for solving the RLW equation, *Applied and Computational Mathematics. An International Journal*, 15(1), 96–105.
- [35] **Oruç, O., Bulut, F. ve Esen, A.** (2016). Numerical solutions of regularized long wave equation by Haar wavelet method, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(5), 3235–3253.
- [36] **Irk, D. ve Keskin, P.** (2017). Quadratic trigonometric B-spline Galerkin methods for the regularized long wave equation, *The Journal of Applied Analysis and Computation*, 7(2), 617–631.
- [37] **Irk, D., Keskin Yı ldız, P.n. ve Zorşahin Görgülü, M.** (2019). Quartic trigonometric B-spline algorithm for numerical solution of the regularized long wave equation, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 112–125.
- [38] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *Nasa TR R-436*.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Hatice YILDIRIM  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 25.11.1991, Malatya  
**E-Posta** : haticeyalcin91hy@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü