T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ALTIN YAPILAR VE ALTMANİFOLDLARI

Mustafa GÖK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Temmuz 2019

Tezin Başlığı	:	MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ALTIN YAPILAR VE ALT-MANİFOLDLARI
Tezi Hazırlayan	:	Mustafa GÖK
Sınav Tarihi	:	02.07.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Sadık KELEŞ** ____________
İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: **Prof. Dr. Erol KILIÇ** ____________
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ ____________
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN ____________
Kırıkkale Üniversitesi

Doç. Dr. Müge KARADAĞ ____________
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY ____________
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Manifoldlar Üzerinde Altın Yapılar ve Altmanifoldları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mustafa GÖK

ÖZET

Doktora Tezi

MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ALTIN YAPILAR VE ALTMANİFOLDLARI

Mustafa GÖK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

272+ix sayfa

2019

Danışman : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Eş Danışman : Prof. Dr. Erol KILIÇ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölüm, genel bir literatür özetinin ve doktara tezinin içeriği ile ilgili bilgilerin yer verildiği giriş kısmıdır.

İkinci bölüm, doktara tezi boyunca kullanılan bazı temel kavramları kapsamaktadır.

Diğer bölümler, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölüm, altın manifoldlar üzerinde paralellik, half paralellik, anti half paralellik, integrallenebilirlik ve geodeziklik kavramları ile ilgili bir araştırmayı içermektedir. Bu kavramlar, herhangi bir lineer konneksiyona ve buna bağlı olarak tanımlanan Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre irdelendi.

Dördüncü bölümde, yerel çarpım manifoldları üzerinde bir altın yapının inşasına yer verildi. Buna bağlı olarak, bir yerel çarpım altın Riemann manifold ve bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold kavramları tanıtıldı. Yerel çarpım altın Riemann manifoldların yerel ayrıştırılabilirliği ele alındı. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun bileşenlerinin birer Einstein manifold (ya da

birer sabit eğrilikli manifold) olma durumu incelendi. Bunun yanısıra, herhangi iki Riemann manifoldunun Riemann çarpım manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı tanımlandı ve bu Riemann çarpım manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu gösterildi.

Beşinci bölüm, bir altın Riemann manifoldunun altmanifoldlarının geometrisi ile ilgilidir ve bu çalışmanın geniş bir kısmını oluşturmaktadır. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldunun tanjant ve normal demetleri üzerinde ambient manifoldun altın yapısının tanımladığı kanonik yapıların bazı özellikleri verildi. Bir altın Riemann manifoldunun izometrik immersed non-invaryant, invaryant ve anti-invaryat altmanifoldları üzerlerinde tanımlı indirgenmiş yapılar yardımıyla incelendi. Herhangi bir izometrik immersed non-invaryant altmanifoldun total geodezik (ya da minimal) olma koşulları belirlendi. Bunun yanısıra, izometrik immersed non-invaryant altmanifold üzerindeki indirgenmiş yapının tanjant vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu durumlarda bazı önemli sonuçlar bulundu. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed invaryant altmanifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu gösterildi. İzometrik immersed altmanifoldların invaryantlığına denk ifadeler bulunmaya çalışıldı. İzometrik immersed invaryant altmanifoldların total geodezikliği üzerinde duruldu. İzometrik immersed invaryant altmanifoldlar ile ilgili bazı ilginç sonuçlara ulaşıldı. İzometrik immersed anti-invaryant altmanifoldların bazı özellikleri elde edildi ve hangi koşullar altında total geodezik olduğu ele alındı. Bazı varsayımlar altında, herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun normal demeti için bir yerel ortonormal çatı kuruldu. Bununla birlikte, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun tanjant demetinin bir yerel ortonormal çatısına göre belirlenen normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörlerin sıfır olduğu gösterildi. Ayrıca, bir altın Riemann manifoldunun semi-invaryant altmanifoldlarının geometrik özellikleri incelendi ve bazı örnekler verildi. Herhangi bir semi-invaryant altmanifoldun karakterizasyonları, kanonik yapılarının paralelliği, tanımındaki distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği, total geodezik, mixed total geodezik ve total umbilik gibi bazı sınıflandırılmaları ve de Rham kohomoloji grupları ile ilgili geniş bir araştırma yapıldı.

Altıncı bölüm, diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde bir $f(3,-2,-1)$-yapı veya bir para $f(3,2,1)$-yapı olarak adlandırdığımız yeni bir yapıya ayrılmıştır. Para $f(3,2,1)$-yapılar ve altın yapılar arasındaki ilişkiyi gösteren bazı örnekler elde edildi. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş yapının bir para $f(3,2,1)$-yapı olma koşulları ele alındı. Bir altın Riemann manifoldunun semi-invaryant altmanifoldlarının tanjant ve normal demetleri üzerinde para $f(3,2,1)$-yapıların varlığı araştırıldı. Herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapının kısmi integrallenebilirlik ve integrallenebilirlik kavramları tanımlandı. Para $f(3,2,1)$-yapıların ve doğal olarak tanımladığı distribüsyonların temel özellikleri ve integrallenebilirliği incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: altın yapı, altın Riemann yapı, altın manifold, altın Riemann manifold, yerel çarpım manifold, yerel çarpım altın Riemann manifold, yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold, Schouten konneksiyon, Vrănceanu konneksiyon, non-invaryant altmanifold, invaryant altmanifold, anti-invaryant altmanifold, semi-invaryant altmanifold, extrinsic küre, de Rham kohomoloji grubu, para f(3,2,1)-yapı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GOLDEN STRUCTURES ON MANIFOLDS AND THEIR SUBMANIFOLDS

Mustafa GÖK

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

272+ix pages

2019

Supervisor	:	Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Co-Supervisor	:	Prof. Dr. Erol KILIÇ

This study prepared as a philosophy doctoral thesis consists of six sections.

The first section is the part of of the introduction which is divided into a summary of general literature and the information related to the contents of the philosophy doctoral thesis.

The second section includes some basic concepts which will be used throughout the philosophy doctoral thesis.

The other sections form the original part of the philosophy doctoral thesis.

The third section consists of an investigation related to the concepts of parallelism, half parallelism, anti-half-parallelism, integrability and geodesicity on golden manifolds. These concepts with respect to an arbitrary fixed linear connection and Schouten and Vrănceanu connections, defined by it, are scrutinized.

The fourth section is devoted to the construction of a golden structure on locally product manifolds. Accordingly, the concepts of a locally product golden Riemannian manifold and a locally decomposable golden Riemannian manifold

are introduced. The decomposability of locally product golden Riemannian manifolds is addressed. The condition for each of the components of a locally decomposable golden Riemannian manifold to be an Einstein manifold (or a constant curvature manifold) is examined. Besides, a golden Riemannian structure on the Riemannian product of two Riemannian manifolds is defined and it is shown that the Riemannian product manifold is a locally decomposable golden Riemannian manifold.

The fifth chapter deals with the geometry of the submanifolds of a golden Riemannian manifold and constitutes a large part of this study. Some properties of the canonical structures on the tangent and normal bundles of any isometrically immersed submanifold of a golden Riemannian manifold, induced by the golden structure of the ambient manifold, are given. Isometrically immersed non-invariant, invariant and anti-invariant submanifolds of a golden Riemannian manifold with the help of induced structures on them, by the golden structure of the ambient manifold, are investigated. The conditions for any isometrically immersed non-invariant submanifold to be totally geodesic (or minimal) are determined. In addition, some important results are found in cases where the tangent vector fields of the induced structure on the isometrically immersed non-invariant submanifold are linearly dependent. It is shown that any isometrically immersed invariant submanifold of a locally decomposable golden Riemannian manifold is a locally decomposable golden Riemannian manifold. It is tried to find the equivalent expressions to the invariance of isometrically immersed submanifolds. Totally geodesicity of isometrically immersed invariant submanifolds is dwelt on. Some interesting results regarding isometrically immersed invariant submanifolds are reached. Some properties of isometrically immersed anti-invariant submanifolds are obtained and the conditions under which for them to be totally geodesic are discussed. Under some assumptions, a local orthonormal frame is established for the normal bundle of any isometrically immersed anti-invariant submanifold. Besides, it is shown that the second fundamental tensors corresponding to normal vector fields determined by a local orthonormal frame of the tangent bundle of the isometrically immersed anti-invariant submanifold are zero. Furthermore, the geometric properties of semi-invariant submanifolds of a golden Riemannian manifold are examined and some examples are given on them. A wide investigation is made for any semi-invariant submanifold on characterizations, parallelism of canonical structures on its tangent and normal bundles, integrability and parallelism of the distributions which are defined on it, some classifications such as totally geodesic, mixed totally geodesic and totally umbilical and de Rham cohomology groups.

The sixth section is separated into a new structure called an $f(3,-2,-1)$-structure or a para $f(3,2,1)$-structure on differentiable manifolds. Some examples that show the relationship between para $f(3,2,1)$-structures and golden structures are obtained. The conditions for the induced structure on any isometrically immersed submanifold of a golden Riemannian manifold to be a para $f(3,2,1)$-structure are addressed. The existence of para $f(3,2,1)$-structures on the tangent and normal bundles of semi-invariant submanifolds of a golden Riemannian manifold is researched. The notions of partially integrability and integrability of any para $f(3,2,1)$-structure are described. Fundamental properties and integrability of para $f(3,2,1)$-structures and their distributions, which are naturally defined, are investigated.

KEYWORDS: golden structure, golden Riemannian structure, golden manifold, golden Riemannian manifold, locally product manifold, locally product golden Riemannian manifold, locally decomposable golden Riemannian manifold, Schouten connection, Vrănceanu connection, non-invariant submanifold, invariant submanifold, anti-invariant submanifold, semi-invariant submanifold, extrinsic sphere, de Rham cohomology group, para f(3,2,1)-structure.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen, tecrübeleriyle beni yönlendiren tez danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ' a teşekkür ederim.

Ayrıca, 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında verdiği maddi desteklerden dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Manifold teorisi, modern diferansiyel geometrinin önemli araştırma alanlarından birisidir. Manifoldlar, doğa ve mühendislik bilimlerinin bazı alanlarında birçok problemi çözmek için bir araç olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, bu alanların gelişmesine katkı sağlaması ve doğa ve mühendislik bilimlerinde yeni uygulama alanları bulması nedeniyle popüler bir konu haline gelmiştir.

Bir $[AB]$ doğru parçasını, bu doğru üzerinde bulunan bir C noktası ile $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ oranında bölme probleminin çözümünün sonucu olarak altın oran kavramı ortaya çıkmıştır. $x = \frac{|AC|}{|CB|}$ alınırsa, bu problem $x^2 = x + 1$ cebirsel denkleminin çözümüne indirgenir [1]. Bu denklemin pozitif kökü altın oran değeridir ve yaklaşık olarak M.Ö. 450 yılları civarında yaşayan Yunan heykeltraşcı ve matematikçi Phidias'ın adındaki ilk Yunan harfi ϕ ile gösterilir. Yani, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ olur [2].

"Altın Sayı", "Altın Bölüm", "Altın Orantı" veya "Altın Ortalama" olarak da bilinen Altın Oran, antik ve modern geometriye büyük hayranlığın bir sembolü olduğu için antik çağdan beri geometri, mimarlık, müzik, sanat ve felsefe gibi birçok alanda önemli bir yer işgal etmektedir. Yaklaşık olarak M.Ö. 2560 yılında yapılan Giza Piramidi, altın oranın kullanıldığı ilk örneklerden birisidir [3]. Ayrıca, altın oran birçok ünlü matematikçinin ilgisini ve dikkatini çekmiştir. Örneğin, Fra Luca Pacioli ($1445 - 1517$), 1509 yılında Venice'de yayınladığı De Divina Proportione adlı üç ciltlik kitabının ilk cildini altın oranın özelliklerinin ayrıntılı bir özetine ayırmıştır [4]. Johannes Kepler ($1571 - 1630$), altın oranı "geometrinin iki büyük hazinesinden biri" olarak tarif etmiştir [1].

Son yıllarda altın oran, modern fizik araştırmalarında karşımıza çıkmaktadır [5, 6, 7, 8, 9] ve nükleer fizikte oldukça önemli bir yere sahiptir [10]. Altın oran ile Newton fiziğinden göreceli mekaniğine geçiş arasında yakın bir bağlantı olduğu ortaya koyuldu ve özel görelilik teorisinde, altın dikdörtgen, zaman aralıklarının genişlemesini ve uzunlukların Lorentz küçülmesini elde etmek için kullanılmıştır [11]. Aynı zamanda, altın oran, Kantor uzay-zamanında, konformal alan teorisinde, 4-manifoldların topolojisinde, matematiksel olasılık teorisinde, Kantor fraktal teorisinde ve El Naschie'in alan teorisinde ilginç ve önemli sonuçlar üretmektedir [12, 13, 14]. Dolayısıyla, bu çalışmalar altın oran kavramını bir manifold üzerinde incelemek için yeni bir yapı tanımlamanın fikrini ortaya koymuştur.

K. Yano [15] tarafından bir f-yapı kavramı bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde sabit r ranklı ve $f^3 + f = 0$ denklemini sağlayan bir endomorfizm olarak tanımlandı. Eğer $m = r$ ise f-yapı M manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı tanımlar [16]. S. I. Goldberg ve K. Yano [17], bu kavramı genişleterek bir manifold üzerinde bir polinom yapısı kavramını tanımladı. n-yinci dereceden bir polinom yapı, C^∞ sınıfından bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 I = 0$$

cebirsel denklemini sağlayan $(1,1)$ tipinde bir C^∞-tensör alanıdır. Burada I, özdeşlik tensör alanıdır ve $x = f$ için her $p \in M$ noktasında $f^{n-1}(p)$, $f^{n-2}(p)$, ..., $f(p)$, $I(p)$ tensörleri lineer bağımsızdır. $Q(x)$ monik polinomu ise bir yapı polinomu olarak adlandırılır. Örneğin, $Q_1(x) = x^2 + I$ ve $Q_2(x) = x^2 - I$ yapı polinomları, sırasıyla, bir hemen hemen kompleks yapısı ve bir hemen hemen çarpım yapısı tanımlar. Bir başka deyişle, bir hemen hemen kompleks yapı ve bir hemen hemen çarpım yapı birer polinom yapıdır. Daha sonra A. Bucki [18] tarafından aslında bu polinom yapısının özel bir durumu olan bir para f-yapı kavramını m-boyutlu bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde sabit r ranklı ve $f^3 - f = 0$ denklemini sağlayan bir endomorfizm olarak tanımlandı. Eğer $m = r$ ise para f-yapı M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısı tanımlar [18]. Günümüzde, üzerinde bir f-yapı veya bir para f-yapı tanımlı manifoldlar ve altmanifoldları bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Sonuç olarak, yapı polinomları, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir reel manifoldlar üzerinde yeni geometrik yapılar üretmek için kullanışlı bir araçtır.

C. H. Hreţcanu [19], altın oranın manifoldlar üzerinde bir büyüsü, büyük bir etkisi ve bir gizemi olabileceği, fizikte ve matematikte yeni uygulama alanları bulabileceği ve önemli sonuçlarının elde edilebileceği inancıyla yapı polinomunu kullanarak bir diferansiyelenebilir manifold üzerinde yeni bir yapı inşa etmeyi düşündü. Bu nedenle, $Q(x) = x^2 - x - I$ yapı polinomu ile C^∞ sınıfından bir diferansiyellenebilir reel manifold üzerinde bir polinom yapısı olarak bir altın yapı kavramı tanımladı. Yani, bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir altın yapı, $\Phi^2 = \Phi + I$ denklemini sağlayan $(1,1)$ tipinde bir Φ tensör alanıdır [19, 20]. Ayrıca, (M, Φ) ikilisi ise bir altın manifold olarak adlandırılır. Benzer düşünceyle, sırasıyla, $Q(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}I$ ve $Q(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}I$ yapı polinomları yardımıyla tanjant altın yapı ve kompleks altın yapı kavramları tanımlandı. Kompleks altın yapının yapı polinomunun bir kökü yeni bir kavram olan kompleks altın oran olarak adlandırıldı [20].

Bir (M, Φ) altın manifoldun tanjant demetini distribüsyonların direkt toplamı olarak yazma ve bu distribüsyonlara karşılık gelen projeksiyon operatörler ile manifoldu inceleme fikri daha basit ve kolay bir yöntemdir. O zaman

$$D_p = \{X \in T_pM : \Phi X = \phi X\}$$

ve

$$D_p^\perp = \{X \in T_pM : \Phi X = (1 - \phi) X\}$$

diyelim. Bu durumda $D = \bigcup\limits_{p \in M} D_p$ ve $D^\perp = \bigcup\limits_{p \in M} D_p^\perp$ iki doğal distribüsyon tanımlar. D ve $D^\perp$ distribüsyonları TM tanjant demetinin altdemetleridir. TM tanjant demetinin D ve $D^\perp$ distribüsyonları üzerine projeksiyon operatörlerini, sırasıyla,

r ve s ile gösterelim. Bu durumda

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi I - \Phi)$$

ve

$$s = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\phi - 1) I + \Phi)$$

ile verilir. Burada ϕ ve $1 - \phi$ değerleri, $x^2 - x - 1 = 0$ cebirsel denkleminin köklerididir [20].

M. Crâşmăreanu ve C. H. Hreţcanu [20], bir hemen hemen çarpım yapı ile bir altın yapı arasında doğal bir ilişkinin varlığını gösterdi. Bu iki yapı arasında ilişki aşağıdaki gibidir [20]:

(a) Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir P hemen hemen çarpım yapısı,

$$\Phi_1 = \frac{I + \sqrt{5}P}{2} \text{ ve } \Phi_2 = \frac{I - \sqrt{5}P}{2}$$

eşitlikleri ile M manifoldu üzerinde iki tane altın yapı tanımlar.

(b) Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısı,

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Phi - I) \text{ ve } P_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} (2\Phi - I)$$

eşitlikleri ile M manifoldu üzerinde iki tane hemen hemen çarpım yapısı tanımlar.

M. Crâşmăreanu ve C. H. Hreţcanu [20] tarafından yapılan ve altın manifoldların geometrisi ile ilgili yapılan temel çalışma olma özelliğini taşıyan makalede bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısının geometrisi bu yapıya karşılık gelen hemen hemen çarpım yapısı kullanılarak incelendi. Bu çalışmada Φ altın yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşulun bu yapıya karşılık gelen hemen hemen çarpım yapısının integrallenebilir olması bulundu. (M, Φ) altın manifoldunun tanjant demetinin ayrışımındaki D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının her birinin integrallenebilir olması için birer gerek ve yeter koşul verildi. (M, Φ) altın manifoldu üzerinde bir ∇ lineer konneksiyona bağlı olarak Schouten konneksiyonu ve Vrănceanu konneksiyonu tanımlandı. Φ altın yapısının, D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğu ispatlandı. Φ altın yapısının ve bu yapıya karşılık gelen hemen hemen çarpım yapısının ∇ lineer konneksiyona göre paralelliğinin birbirine denk olduğu kanıtlandı. Φ altın yapısına göre paralel lineer konneksiyonların bir genel formu belirlendi. Bir lif demeti üzerinde Φ altın yapısının bir konneksiyonu temsil etmesi için bir gerek ve yeter koşul verildi. Ayrıca, lif demeti üzerinde Φ altın yapısının integrallenebilir olması için bazı gerek ve yeter koşullar bulundu. Herhangi bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde bir non-lineer konneksiyon ile bir altın yapının nasıl tanımlanabileceği gösterildi.

Bir (M, Φ) altın manifoldu bir Riemann metriği ile donatılarak altın Riemann yapı ve altın Riemann manifold kavramları tanıtıldı [20, 21, 22]. Açık bir ifadeyle, herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y)$$

eşitliğini sağlayan bir (g, Φ) ikilisidir. Burada Φ bir altın yapıdır. Bu durumda g Riemann metriğine Φ-uyumlu denir. (M, g, Φ) üçlüsü ise bir altın Riemann manifold olarak adlandırılır [21]. Daha sonra, C. H. Hreţcanu ve M. C. Crâşmăreanu tarafından bir Riemann manifoldu üzerinde altın yapıların özellikleri Riemann manifoldları üzerinde inşa edilen geometrik yapıların birkaç sonucuna dayandırılarak incelendi [17, 23, 24, 25, 26, 27].

Herhangi bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun n-boyutlu herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M = m - n$ olsun. M manifoldu üzerinde indirgenmiş yapı, $(1,1)$ tipinde bir Φ tensör alanı, g indirgenmiş Riemann metriği, ξ_α tanjant vektör alanları, u_α diferansiyel 1-formları ve $r \times r$ tipinde reel değerli fonksiyonların bir $(a_{\alpha\beta})_{r\times r}$ matrisi ile belirlidir ve $\left(\Phi, g, u_\alpha, \varepsilon\xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_{r\times r}\right)$ beşlisi ile gösterilir. Burada, tüm geometrik nesneler M altmanifoldu üzerindedir. Ayrıca, $TM^\perp$ normal demetinin bir yerel ortonormal çatısı $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ ise her $X \in \Gamma(TM)$ için $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde $\overline{\Phi}(i_* X)$ ve $\overline{\Phi}(N_\alpha)$ vektör alanlarının M altmanifoldunda tanjant ve normal bileşenleri, sırasıyla,

$$\overline{\Phi}\left(i_{*}X\right)=i_{*}\left(\Phi\left(X\right)\right)+\sum_{\alpha=1}^{r}u_{\alpha}\left(X\right)N_{\alpha}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(N_{\alpha}\right)=\varepsilon i_{*}\left(\xi_{\alpha}\right)+\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}\left(X\right)N_{\beta},\varepsilon=\pm1$$

şeklindedir. Burada i_* ile $i : M \longrightarrow \overline{M}$ immersiyonunun türev dönüşümü gösterilmektedir. $\overline{M}$ ve M manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, $\overline{\nabla}$ ve ∇ ise $\overline{M}$ ambient manifoldunda M altmanifoldunun Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_{i_{*}X}i_{*}Y=i_{*}\nabla_{X}Y+\sum_{\alpha=1}^{r}h_{\alpha}\left(X,Y\right)N_{\alpha} \tag{1.0.1}$$

ve

$$\overline{\nabla}_{i_{*}X}N_{\alpha}=-i_{*}A_{\alpha}X+\sum_{\beta=1}^{r}l_{\alpha\beta}\left(X\right)N_{\beta} \tag{1.0.2}$$

ile verilir. Burada h_α, $1 \leq \alpha \leq r$, N_α normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörleri; A_α, N_α normal vektör alanı boyunca şekil operatörünü; $l_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq r$, M altmanifoldu üzerinde $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyonuna göre 1-formları göstermektedir [21].

Altın Riemann manifoldların altmanifoldlarının geometrisi ile ilgili ilk çalışmalar altmanifoldlar üzerinde tanımlı indirgenmiş yapılar kullanılarak C. H. Hreţcanu ve M. Crâşmăreanu tarafından yapıldı [21, 22]. Özellikle, bu çalışmalarda bir altın Riemann manifoldun invaryant altmanifoldları incelendi ve önemli sonuçlar elde edildi. Bir altın Riemann manifoldunun altmanifoldları üzerinde indirgenmiş yapıların temel özellikleri belirlendi [21]. Öklidyen manifold üzerinde bir Altın yapı örneği verildi ve Öklidyen uzayda iki kürenin bir çarpımı üzerinde bir indirgenmiş yapı inşa edildi. Bu indirgenmiş yapının küre çarpımı üzerinde bir altın yapı olduğu gösterildi [22]. Bir altın Riemann manifoldunun bir altmanifoldu üzerinde indirgenmiş yapının izi hesaplandı [22]. İndirgenmiş yapılar yardımıyla altmanifoldların invaryant olması için bir karakterizasyon verildi [21]. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu üzerinde tanımlı $\left(\Phi, g, u_\alpha, \varepsilon\xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_{r\times r}\right)$ indirgenmiş yapısının Nijenhuis tensörü hesaplandı ve buna bağlı olarak indirgenmiş yapının integrallenebilirlik koşulu araştırıldı. Nijenhuis tensörünün sıfır olması için bir gerek ve yeter koşulun her $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ için A_α şekil operatörlerin indirgenmiş yapıya göre değişimli yani, $\Phi A_\alpha = A_\alpha \Phi$ olduğu bulundu. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir invaryant altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olduğu bulundu ve buna bağlı olarak integrallenebilir olduğu gösterildi [21].

Altın oranın manifoldlar üzerinde etkisini inceleme fikri büyük ilgi görmektedir ve son zamanlarda altın manifoldlar ve altmanifoldlarının geometrisi bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, genel bir literatür bilgisinin ve doktara tezinin içeriği ile ilgili bilgilerin yer verildiği giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, doktara tezi boyunca kullanılan bazı temel kavramlardan bahseldilmiştir.

Diğer bölümler, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçünçü bölüm altın manifoldlar üzerinde paralellik, half paralellik, anti half paralellik, integrallenebilirlik ve geodeziklik kavramları ile ilgilidir ve beş alt bölümden oluşmaktadır. Bu kavramlar, herhangi bir ∇ lineer konneksiyonuna ve buna bağlı olarak tanımlanan Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre [25, 28] numaralı yayınlarda kullanılan yöntem ve teknik yardımıyla incelendi. Birinci ve ikinci alt bölümde, sırasıyla, altın yapılar ve altın Riemann manifoldlar hakkında bazı temel bilgiler hatırlatıldı. Üçüncü alt bölümde, herhangi bir manifold üzerinde bir altın yapının doğal olarak tanımladığı iki distribüsyonun paralelliği, ∇ lineer konneksiyonunun Levi-Civita olduğu ya da olmadığı durumlara göre ele alındı ve distribüsyonların her ikisinin paralelliğine denk ifadeler elde edildi. Herhangi bir altın yapıya göre paralel lineer konneksiyonların formları belirlendi. Herhangi bir altın yapının doğal olarak tanımladığı iki distribüsyonun her birinin Schouten konneksiyonuna (ya da Vrănceanu konneksiyonuna) göre half paralel olması için ayrı ayrı birer gerek ve yeter koşul bulundu. Ayrıca, her iki distribüsyonun hem Schouten konneksiyonuna hem de Vrănceanu konneksiyonuna göre daima anti half paralel olduğu gösterildi. Dördüncü alt bölümde, bir altın yapının ve ilgili iki distribüsyonunun integrallenebilirliği üzerinde duruldu. Vrănceanu konneksiyonunun simetrik olması için bir koşul verildi. Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlardan herhangi biri simetrik olduğunda altın yapının integrallenebilir olduğu kanıtlandı. ∇ lineer konneksiyonu hem Schouten konneksiyonu hem de Vrănceanu konneksiyonu ile karşılaştırılarak Levi-Civita konneksiyon olduğu durumda her iki distribüsyonun integrallenebilirliği ve maksimal integral manifoldlarının total geodezikliği ile ilgili sonuçlar elde edildi. Son alt bölümde ise herhangi bir altın manifold üzerinde bir eğrinin Schouten konneksiyonuna (ya da Vrănceanu konneksiyonuna) göre bir geodezik olması için bir gerek ve yeter koşul bulundu.

Dördüncü bölümde, yerel çarpım manifoldlarının bazı temel özellikleri hakkında kısa bir hatırlatma yapıldı. [16, 29] numaralı yayınlardan yola çıkılarak yerel çarpım manifoldları üzerinde bir altın yapı inşa edildi. Buna dayanarak, bir yerel çarpım altın Riemann manifold ve bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold kavramları tanımlandı. Herhangi bir yerel çarpım altın Riemann manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olması için iki gerek ve yeter koşul verildi. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun bileşenlerinin birer Einstein manifold olması için ambient manifoldun Ricci tensörüne bağlı olarak bir karakterizasyon elde edildi. Bununla birlikte, bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun bileşenlerinin birer sabit eğrilikli manifold olması ifadesine denk olarak ambient manifoldun eğrilik tensörünün hangi formda olduğu belirlendi. Ayrıca, herhangi iki Riemann manifoldunun Riemann çarpım manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı tanımlandı ve bu Riemann çarpım manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu ispatlandı.

Beşinci bölüm, bir altın Riemann manifoldun altmanifoldlarının geometrisine ayrılmıştır ve beş alt bölümden meydana gelmektedir. Bu alt bölümler, sırasıyla, izometrik immersed altmanifoldlar, indirgenmiş yapılar ve non-invaryant altmanifoldlar, invaryant altmanifoldlar, anti-invaryant altmanifoldlar ve semi-invaryant altmanifoldlar başlıkları altında [26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41] numaralı yayınlar ışığında incelendi. Birinci alt bölümde, bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldunun tanjant ve normal demetlerdeki ayrışımındaki endomorfizmler ve 1-formlar için geçerli bazı özellikler verildi. İkinci alt bölümde, herhangi bir izometrik immersed altmanifold üzerindeki indirgenmiş yapı ile ilgili [21, 22] numaralı yayınlarda elde edilen özelliklerden bahsedildi. Bir altın Riemann manifoldunun izometrik immersed non-invaryant, invaryant ve anti-invaryat altmanifoldları üzerlerinde tanımlı indirgenmiş yapılar kullanılarak ele alındı. İndirgenmiş yapının matris elemanının izi ile ilgili sonuçlar bulundu. İzometrik immersed non-invaryant altmanifoldların total geodezik (ya da minimal) olma koşulları irdelendi. Buna bağlı olarak, bazı koşullar verildi ve önemli sonuçlar elde edildi. Ayrıca, herhangi bir izometrik immersed non-invaryant altmanifold üzerindeki indirgenmiş yapının tanjant vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu durumlarda bazı önemli sonuçlara ulaşıldı. Üçüncü alt bölümde, bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun izometrik immersed invaryant altmanifoldlarının birer yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu kanıtlandı. Herhangi bir izometrik immersed altmanifoldun invaryant olması için bir gerek ve yeter koşul verildi. İzometrik immersed invaryant altmanifoldların total geodezik olması için bazı koşullar belirlendi. İzometrik immersed invaryant altmanifoldlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Dördüncü alt bölümde izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldların bazı özellikleri ortaya koyuldu. Herhangi bir izometrik immersed altmanifoldun anti-invaryant olması için iki koşul bulundu. Bunun yanısıra, bu koşullar altında, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun total geodezik olduğu sonucuna ulaşıldı. Herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun total geodezik olması için bir koşul bulundu. Bazı koşullar altında, herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun normal demeti için özel bir yerel ortonormal çatı oluşturuldu. Bununla birlikte, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun tanjant demetinin herhangi bir yerel ortonormal çatısının seçimine göre belirlenen bazı normal vektör alanlarının varlığı gösterildi ve bu normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörlerin sıfır olduğu kanıtlandı. Beşinci alt bölüm, bir altın Riemann manifoldunun semi-invaryant altmanifoldları ile ilgili detaylı bir araştırmanın yapıldığı kısımdır. Altın Riemann manifoldlarda bir semi-invaryant altmanifold kavramından bahsedildi ve örnekler verildi. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldunun semi-invaryant olması için hem tanjant demette hem de normal demette birer karakterizasyon verildi. Semi-invaryant altmanifoldların tanjant ve normal demetlerdeki tanımındaki distribüsyonların karakterizasyonları ile bazı gerçekler ortaya konuldu. Semi-invaryant altmanifoldların tanjant ve normal demetlerdeki karakterizasyonunda kullanılan endomorfizmlerin ve 1-formların paralelliğine denk ifadeler bulundu ve buna bağlı olarak bazı sonuçlar elde edildi. Semi-invaryant altmanifoldların tanımını karakterize eden distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelendi ve bu kavramlar ile ilgili gerek ve yeter koşullar verildi. Semi-invaryant altmanifoldların mixed total geodezik olması için bazı denk ifadeler ve bazı koşullar verildi. Mixed total geodezik semi-invaryant altmanifoldlar için bazı sonuçlar bulundu. Total umbilik semi-invaryant altmanifoldlar için temel bir sınıflandırma yapıldı ve buna ilişkin olarak bir sonuç bulundu. Herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldun tanjant demetinde doğal olarak tanımlı endomorfizmin kovaryant türevinin sıfır olduğu ispatlandı. Herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldun bir total geodezik altmanifold (ya da bir extrinsic küre) olması için bir koşul belirlendi. Pozitif veya negatif eğrilikli yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldların proper total umbilik semi-invaryant altmanifoldlarının olmadığı kanıtlandı ve buna bağlı olarak proper total geodezik altmanifoldlarının da yokluğunun sonucu elde edildi. Semi-invaryant altmanifoldların tanımında kullanılan distribüsyonlar yardımıyla de Rham kohomoloji grupları incelendi. Bazı koşullar altında, herhangi bir semi-invaryant altmanifoldun bir de Rham kohomoloji grubu tanımladığı gösterildi. Bununla birlikte, bu kohomoloji grubu yardımıyla semi-invaryant altmanifoldlar ile ilgili bazı önemli sonuçlara ulaşıldı.

Altıncı bölümde, diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde bir $f(3,-2,-1)$-yapı veya bir para $f(3,2,1)$-yapı olarak adlandırdığımız yeni bir yapı tanımlandı. Para $f(3,2,1)$-yapıların altın yapılar ile ilişkisini gösteren örnekler verildi. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş yapının bir para $f(3,2,1)$-yapı olması için iki koşul elde edildi. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldunun, sırasıyla, tanjant ve normal demetleri üzerinde ambient manifoldun altın yapısının ve tersinin tanımladığı endomorfizmlerin birer para $f(3,2,1)$-yapı olduğu gösterildi. Para $f(3,2,1)$-yapıların bazı temel özellikleri ortaya koyuldu. Para $f(3,2,1)$-yapıların doğal olarak tanımladığı distribüsyonların formları belirlendi ve integrallenebilirliği ile ilgili gerek ve yeter koşullar verildi. Para $f(3,2,1)$-yapıların kısmi integrallenebilirlik ve integrallenebilirlik tanımları yapıldı. Ayrıca, para $f(3,2,1)$-yapıların kısmi integrallenebilirliğine ve integrallenebilirliğine denk bazı ifadeler bulundu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılmasını sağlamak için tensör cebiri; dış cebir; topolojik kavramlar; diffeomorfizm kavramı; diferansiyellenebilir manifoldlar; $C^\infty(M,\mathbb{R})$ halkası; tanjant vektörler, tanjant uzaylar ve tanjant demetler; kotanjant vektörler, kotanjant uzaylar ve kotanjant demetler; kovaryant, kontravaryant ve mixed tensör alanları ve demetleri; manifoldlar üzerinde diferansiyellenebilir dönüşümler; lineer konneksiyonlar; Nijenhuis tensörü; manifoldlarda dış cebir ve kohomoloji; Riemann manifoldlar; Riemann manifoldların altmanifoldları ve manifoldlar üzerinde distribüsyonlar konu başlıkları altında bazı bilgilerin verildiği temel kavramlara ayrılmıştır.

2.1 Tensör Cebiri

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı* V *olsun. O zaman her* $u, v \in V$ *ve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$$

koşulunu sağlayan bir $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümüne* V *vektör uzayı üzerinde lineer fonksiyonel veya lineer form denir [42, 43].*

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm lineer fonksiyonellerin kümesi V^* ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir* V *vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm lineer fonksiyonellerin* V^* *kümesi*

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

ve

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $f+g$ *ve* λf *işlemleri ile* n*-boyutlu bir vektör uzayıdır ve* V *vektör uzayının dual uzayı veya kotanjant uzayı olarak adlandırılır [42].*

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir* V *vektör uzayının dual uzayı* V^* *olsun.* V^* *dual uzayının her bir elemanına bir kovektör veya bir dual vektör denir [43, 44].*

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde herhangi iki vektör uzayı* U *ve* V *olsun. O zaman her* $u, u_1, u_2 \in U,\ v, v_1, v_2 \in V$ *ve* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *için*

(a) $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$,

(b) $f(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(u, v_1) + \alpha_2 f(u, v_2)$

koşullarını sağlayan bir $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonuna bilineer dönüşüm denir [43].*

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu* r*-tane vektör uzayı* $V_1, V_2, \ldots, V_r$ *olsun. O zaman her* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ve* $i = 1, \ldots, n$ *için*

$$f\left(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta v_i', \ldots, v_r\right) = \alpha f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + \beta f\left(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r\right)$$

koşulunu sağlayan bir $f : V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* r*-lineer dönüşüm denir [42].*

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu r-tane vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm r-lineer dönüşümlerin kümesi $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu* r*-tane vektör uzayı üzerinde tüm* r*-lineer dönüşümlerin* $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ *kümesi*

$$(f+g)(v_1,\ldots,v_r) = f(v_1,\ldots,v_r) + g(v_1,\ldots,v_r)$$

ve

$$(\lambda f)(v_1,\ldots,v_r) = \lambda f(v_1,\ldots,v_r),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $f+g$ *ve* λf *işlemleri ile* $\prod_{i=1}^{r} dimV_i$*-boyutlu bir vektör uzayıdır ve* $V_1^*,\ldots,V_n^*$ *dual uzaylarının tensör çarpımı olarak adlandırılır [42].*

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı* V *olsun. Bir*

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

r*-lineer dönüşümüne kovaryant* r*-tensör denir [45].*

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde tüm kovaryant r-tensörlerin kümesi $T^r(V;\mathbb{R})$ veya $T^r(V)$ ile gösterilir. O zaman

$$T^1(V) = V^* \text{ ve } T^0(V) = \mathbb{R}$$

olduğu görülür [46].

Teorem 2.1.3. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde* n*-boyutlu bir* V *vektör uzayı üzerinde tüm kovaryant* r*-tensörlerin* $T^r(V)$ *kümesi*

$$(f+g)(v_1,\ldots,v_r) = f(v_1,\ldots,v_r) + g(v_1,\ldots,v_r)$$

ve

$$(\lambda f)(v_1,\ldots,v_r) = \lambda f(v_1,\ldots,v_r),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $f+g$ *ve* λf *işlemleri ile* n^r*-boyutlu bir vektör uzayıdır [46].*

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı* V *olsun.* V *vektör uzayının dual uzayını* V^* *ile gösterelim. Bir*

$$f : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s\text{-}tane} \longrightarrow \mathbb{R}$$

s-lineer dönüşümüne kontravaryant s-tensör denir [45].

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde tüm kontravaryant s-tensörlerin kümesi $T_s(V;\mathbb{R})$ veya $T_s(V)$ ile gösterilir. O halde

$$T_1(V) = V \text{ ve } T_0(V) = \mathbb{R}$$

olduğu açıktır [47].

Teorem 2.1.4. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu* V *vektör uzayı üzerinde tüm kontravaryant s-tensörlerin* $T_s(V)$ *kümesi*

$$(f+g)(v_1,\ldots,v_s) = f(v_1,\ldots,v_s) + g(v_1,\ldots,v_s)$$

ve

$$(\lambda f)(v_1,\ldots,v_s) = \lambda f(v_1,\ldots,v_s),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $f+g$ *ve* λf *işlemleri ile* n^s*-boyutlu bir vektör uzayıdır [48].*

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı* V *olsun.* V *vektör uzayının dual uzayını* V^* *ile gösterelim. Bir*

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-}tane} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s\text{-}tane} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(r+s)$*-lineer dönüşümüne* (r,s) *tipinde tensör veya* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ *tipinde tensör veya r-kovaryant, s-kontravaryant tensör denir. Burada r tamsayısı f tensörününün kovaryant derecesi, s tamsayısı ise f tensörününün kontravaryant derecesi olarak adlandırılır [42, 45].*

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde (r,s) tipindeki tüm tensörlerin kümesi $T_s^r(V;\mathbb{R})$ veya $T_s^r(V)$ ile gösterilir. Bu durumda

$$T_0^r(V) = T^r(V)\,,\; T_0^1(V) = V^*,\; T_s^0(V) = T_s(V)\,,\; T_1^0(V) = V \text{ ve } T_0^0(V) = \mathbb{R}$$

olur [47].

Teorem 2.1.5. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde (r,s) tipinde tensörlerin $T_s^r(V)$ kümesi*

$$\begin{aligned}(f+g)(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s}) &= f(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s})\\ &\quad + g(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s})\end{aligned}$$

ve

$$(\lambda f)(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s}) = \lambda f(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s})\,,\; \lambda\in\mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $f+g$ ve λf işlemleri ile n^{r+s}-boyutlu bir vektör uzayıdır [49].

2.2 Dış Cebir

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir kovaryant r-tensör φ olsun. Eğer her $1\le i<j\le r$ için*

$$\varphi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_r) = \varphi(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_r)$$

ise φ kovaryant r-tensörüne simetrik denir [49].

Teorem 2.2.1. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir φ kovaryant r-tensörünün simetrik olması için bir gerek ve yeter koşul her $v_1,\ldots,v_r\in V$ ve σ permütasyonu için*

$$\varphi\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(r)}\right) = \varphi(v_1,\ldots,v_r)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [48].

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde simetrik kovaryant r-tensörlerin kümesi $\sum^r(V)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.2. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde simetrik kovaryant r-tensörlerin $\sum^r(V)$ kümesi $T^r(V)$ kovaryant r-tensörlerin uzayının $\binom{n+r-1}{r}$-boyutlu bir altuzayıdır [50].*

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir kovaryant r-tensör φ olsun. Her $v_1, \ldots, v_r \in V$ ve σ permütasyonu için*

$$(\mathcal{S}\varphi)(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right)$$

kuralı ile tanımlı bir $\mathcal{S} : T^r(V) \longrightarrow T^r(V)$ dönüşümüne simetrik operatör denir [44, 49].

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir kovaryant r-tensör φ olsun. Eğer her $1 \leq i < j \leq r$ için*

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$$

ise φ kovaryant r-tensörüne anti-simetrik denir [49].

Teorem 2.2.3. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir φ kovaryant r-tensörünün anti-simetrik olması için bir gerek ve yeter koşul her $v_1, \ldots, v_r \in V$ ve σ permütasyonu için*

$$\varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right) = sgn\sigma\varphi(v_1, \ldots, v_r)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [48].

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde anti-simetrik kovaryant r-tensörlerin kümesi $\Lambda^r(V)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.4. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde* n*-boyutlu bir* V *vektör uzayı üzerinde anti-simetrik kovaryant* r*-tensörlerin* $\Lambda^r(V)$ *kümesi* $T^r(V)$ *kovaryant* r*-tensörlerin uzayının* $\binom{n}{r}$*-boyutlu bir altuzayıdır [50].*

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir* n*-boyutlu* V *vektör uzayı üzerinde herhangi bir kovaryant* r*-tensör* φ *olsun. Her* $v_1, \ldots, v_r \in V$ *ve* σ *permütasyonu için*

$$(\mathcal{A}\varphi)(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma} sgn\sigma\varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right)$$

kuralı ile tanımlı bir $\mathcal{A} : T^r(V) \longrightarrow T^r(V)$ *dönüşümüne anti-simetrik operatör denir [44, 49].*

Önerme 2.2.1. $\mathcal{S}$ *ve* $\mathcal{A}$*, sırasıyla, simetrik ve anti-simetrik operatörler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır [44]:*

(a) $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$ *ve* $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ *eşitlikleri sağlanır. Yani,* $\mathcal{S}$ *ve* $\mathcal{A}$ *projeksiyon operatörlerdir,*

(b) $\mathcal{S}(T^r(V)) = \sum^r(V)$ *ve* $\mathcal{A}(T^r(V)) = \Lambda^r(V)$ *eşitlikleri geçerlidir,*

(c) *Bir* φ *kovaryant* r*-tensörünün simetrik olması için bir gerek ve yeter koşul* $\mathcal{S}(\varphi) = \varphi$ *olmasıdır,*

(d) *Bir* φ *kovaryant* r*-tensörünün anti-simetrik olması için bir gerek ve yeter koşul* $\mathcal{A}(\varphi) = \varphi$ *olmasıdır.*

Tanım 2.2.5. $\varphi \in \Lambda^r(V)$ *ve* $\psi \in \Lambda^s(V)$ *olsun. Her* $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+s}) \in T^r(V) \times T^s(V)$ *için*

$$\varphi \otimes \psi(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+s}) = \varphi(v_1, \ldots, v_r)\,\psi(v_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$$

kuralı ile tanımlı $\varphi \otimes \psi$ *çarpımına* φ *ve* ψ *tensörlerinin tensör çarpımı denir. Ayrıca,* $\varphi \otimes \psi$ *tensör çarpımı kovaryant* $(r+s)$*-tensördür [49].*

Tanım 2.2.6. *$\varphi \in T^r(V)$ ve $\psi \in T^s(V)$ olsun. $\varphi \Lambda \psi = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\varphi \otimes \psi)$ kuralı ile tanımlı $\Lambda : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(V)$ dönüşümüne φ ile ψ anti-simetrik tensörlerin dış çarpımı veya wedge çarpımı denir [49].*

Lemma 2.2.1. *$\varphi \in \Lambda^r(V)$, $\psi \in \Lambda^s(V)$ ve $\theta \in \Lambda^t(V)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir [44, 49]:*

(a) *$\varphi \Lambda \psi = \mathcal{A}\varphi \Lambda \psi = \varphi \Lambda \mathcal{A}\psi$ eşitliği sağlanır,*

(b) *Λ dış çarpımı bilineerdir,*

(c) *$\varphi \Lambda \psi = (-1)^{rs} \psi \Lambda \varphi$ eşitliği vardır. Bir başka deyişle, Λ dış çarpımı anti-komutatiftir,*

(d) *$(\varphi \Lambda \psi) \Lambda \theta = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \mathcal{A}(\varphi \otimes \psi \otimes \theta)$ eşitliği geçerlidir,*

(e) *$(\varphi \Lambda \psi) \Lambda \theta = \varphi \Lambda (\psi \Lambda \theta)$ eşitliği sağlanır. Yani, Λ dış çarpımının birleşme özelliği vardır.*

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde her $r \geq 0$ için $\Lambda^r(V)$ anti-simetrik kovaryant r-tensör uzayların direkt toplamı $\Lambda(V)$ ile gösterilir. Bu durumda $\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V)$ olur.

Teorem 2.2.5. *$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde her $r > 0$ için $\Lambda^r(V)$ anti-simetrik kovaryant r-tensör uzaylarının $\Lambda(V)$ direkt toplamı*

$$\varphi + \psi = \sum_{r=0}^{n} \varphi_r + \sum_{r=0}^{n} \psi_r = \sum_{r=0}^{n} (\varphi_r + \psi_r)$$

ve

$$\lambda \varphi = \left(\lambda \sum_{r=0}^{n} \varphi_r \right) = \sum_{r=0}^{n} \lambda \varphi_r, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $\varphi+\psi$ ve $\lambda\varphi$ işlemleri ile 2^n-boyutlu bir vektör uzayıdır. Ayrıca, $\Lambda(V)$ vektör uzayı

$$\varphi\Lambda\psi = \left(\sum_{r=0}^{n}\varphi_r\right)\Lambda\left(\sum_{r=0}^{n}\psi_r\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\varphi_i\psi_j,\ i+j\leq n$$

kuralı ile tanımlı $\varphi\Lambda\psi$ dış çarpımı ile $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir asosyatif cebirdir. Bu cebire V vektör uzayının dış cebiri veya Grassman cebiri denir [48, 49].

Teorem 2.2.6. *$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı olsun. Her $\omega^1,\ldots,\omega^r\in\Lambda^1(V)$ ve $X_1,\ldots,X_r\in V$ için*

$$\left(\omega^1\Lambda\omega^2\Lambda\cdots\Lambda\omega^r\right)(X_1,X_2,\ldots,X_r) = \det\left[\omega^i(X_j)\right],\ 1\leq i,j\leq r \tag{2.2.1}$$

veya

$$\left(\omega^1\Lambda\omega^2\Lambda\cdots\Lambda\omega^r\right)(X_1,X_2,\ldots,X_r) = \det\begin{bmatrix}\omega^1(X_1) & \omega^1(X_2) & \cdots & \omega^1(X_r)\\ \omega^2(X_1) & \omega^2(X_2) & \cdots & \omega^2(X_r)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega^k(X_1) & \omega^k(X_2) & \cdots & \omega^k(X_r)\end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [48].

Teorem 2.2.7. *$\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir V vektör uzayı olsun. Her $\omega^1,\ldots,\omega^r\in\Lambda^1(V)$ için*

$$\omega^1\Lambda\omega^2\Lambda\cdots\Lambda\omega^r = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)\,\omega^{\sigma(1)}\otimes\omega^{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes\omega^{\sigma(r)}$$

eşitliği geçerlidir [48].

2.3 Topolojik Kavramlar

Tanım 2.3.1. *X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin altkümelerinin bir ailesini τ ile gösterelim. Eğer*

(a) $\emptyset, X\in\tau$,

(b) *Her* $i \in I$ *için* $A_i \in \tau$ *ise* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$,

(c) $i, j \in I$ *için* $A_i, A_j \in \tau$ *ise* $A_i \cap A_j \in \tau$

aksiyomları sağlanıyorsa τ *ailesine* X *kümesi üzerinde bir topoloji denir.* (X, τ) *ikilisi ise bir topolojik uzay olarak adlandırılır [51].*

Tanım 2.3.2. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* τ *ailesinin her bir elemanına bir açık küme denir [52].*

Tanım 2.3.3. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun.* X *kümesinin her bir elemanına* (X, τ) *topolojik uzayının bir noktası denir [51].*

Tanım 2.3.4. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun. Eğer* $X - A \in \tau$ *ise* A *kümesine* τ *topolojisine göre bir kapalı küme denir [53].*

Tanım 2.3.5. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun.* A *kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye* A *kümesinin kapanışı denir ve* $\overline{A}$ *ile gösterilir. Bu durumda* A *kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin ailesi* κ_A *ise* A *kümesinin kapanışı*

$$\overline{A} = \bigcap_{K \in \kappa_A} K$$

ile verilir [52].

Tanım 2.3.6. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Bir* $x \in X$ *noktasını içeren her* $A \subseteq X$ *açık altkümesine* x *noktasının bir açık komşuluğu denir [53].*

Tanım 2.3.7. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Bir* $x \in X$ *noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her* $A \subseteq X$ *altkümesine* x *noktasının komşuluğu denir [53].*

Tanım 2.3.8. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun.* $A \subseteq U \subseteq B$ *olacak şekilde bir* U *açık kümesi varsa* B *kümesine* A *kümesinin bir komşuluğu denir [53].*

Tanım 2.3.9. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $\beta \subseteq \tau$ *olsun. Eğer* τ *topolojisinin her elemanı* β *altailesinin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa* β *altailesine* τ *topolojisinin bir bazı denir [51].*

Tanım 2.3.10. X *boştan farklı bir küme olsun. Her* $x, y, z \in X$ *için*

(a) $x \neq y$ *ise* $d(x, y) > 0$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

(d) $d(x, y) = 0$ *ancak ve ancak* $x = y$

koşullarını sağlayan bir $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* X *kümesi üzerinde bir metrik denir.* (X, d) *ikilisi ise bir metrik uzay olarak adlandırılır [53].*

Tanım 2.3.11. n*-boyutlu* $\mathbb{R}^n$ *reel vektör uzayı üzerinde her* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$d(x, y) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)}$$

kuralı ile tanımlı $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonuna Pisagor metriği veya Öklid metriği denir.* $(\mathbb{R}^n, d)$ *ikilisi ise* n*-boyutlu Öklid uzay olarak adlandırılır ve* E^n *ile gösterilir [48].*

Tanım 2.3.12. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun.* X *kümesinin altkümelerinin bir ailesini* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *ile gösterelim. Eğer bir* $A \subseteq X$ *kümesi için* $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ *ise* $\mathcal{A}$ *ailesine* A *kümesinin bir örtüsü denir [52].*

Tanım 2.3.13. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* $A \subseteq X$ *kümesinin bir örtüsü* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *olsun. Eğer* I *indis kümesi sonlu ise* $\mathcal{A}$ *örtüsüne* A *kümesinin bir sonlu örtüsü denir [51].*

Tanım 2.3.14. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* $A \subseteq X$ *kümesinin bir örtüsü* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *olsun. Eğer* I *indis kümesi sayılabilir ise* $\mathcal{A}$ *örtüsüne* A *kümesinin bir sayılabilir örtüsü denir [51].*

Tanım 2.3.15. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* $A \subseteq X$ *kümesinin bir örtüsü* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *olsun. Eğer* $J \subseteq I$ *ve* $\{A_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{A}$ *altailesi* A *kümesi için bir örtü ise* $\{A_j : j \in J\}$ *ailesine* $\mathcal{A}$ *örtüsünün bir altörtüsü denir [53].*

Tanım 2.3.16. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* $A \subseteq X$ *kümesinin bir örtüsü* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *olsun. Eğer her* $i \in I$ *için* A_i *altkümeleri açık ise* $\mathcal{A}$ *örtüsüne* A *kümesinin bir açık örtüsü denir [52].*

Tanım 2.3.17. *Herhangi bir* (X, τ) *topolojik uzayında* $A \subseteq X$ *kümesinin bir örtüsü* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *olsun. Eğer her* $i \in I$ *için* A_i *altkümeleri kapalı ise* $\mathcal{A}$ *örtüsüne* A *kümesinin bir kapalı örtüsü denir [51].*

Tanım 2.3.18. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Eğer bir* $A \subseteq X$ *kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü var ise* A *kümesine bir kompakt küme denir [52].*

Tanım 2.3.19. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Eğer* X *kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü var ise* (X, τ) *topolojik uzayına bir kompakt uzay denir [53].*

Tanım 2.3.20. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A, B \subseteq X$ *olsun. Eğer* $\overline{A} \cap B = \emptyset$ *ve* $A \cap \overline{B} = \emptyset$ *ise* A *ve* B *kümelerine bağlantısız küme denir [51].*

Tanım 2.3.21. (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A, B \subseteq X$ *olsun. Eğer* $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ *veya* $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ *ise* A *ve* B *kümelerine bağlantılı küme denir [51].*

Tanım 2.3.22. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Eğer* X *boştan farklı bağlantısız iki kümenin birleşimi ise* (X, τ) *topolojik uzayına bir bağlantısız uzay denir. Yani,*

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ ve $X = A \cup B$ olacak şekilde $A, B \in \tau$ mevcut ise (X, τ) topolojik uzayı bir bağlantısız uzay olarak adlandırılır [51].

Tanım 2.3.23. *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X bağlantılı iki kümenin birleşimi değilse (X, τ) topolojik uzayına bir bağlantısız uzay denir [51]. Bir başka deyişle, (X, τ) topolojik uzayı bağlantılı değil ise bir bağlantısız uzay olarak adlandırılır [52].*

Tanım 2.3.24. *X ve Y herhangi iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $V \subset Y$ açık kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}(V) \subset X$ bir açık küme ise f fonksiyonuna sürekli denir [54].*

Tanım 2.3.25. *X ve Y herhangi iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir [54].*

Tanım 2.3.26. *X ve Y herhangi iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda X ve Y topolojik uzaylarına homeomorfik veya topolojik denk denir ve $X \approx Y$ ile gösterilir [54].*

2.4 Diffeomorfizm Kavramı

Tanım 2.4.1. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilir veya C^k-diferansiyellenebilir denir [54].*

Tanım 2.4.2. *$U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilir veya C^k-diferansiyellenebilir denir [43].*

Tanım 2.4.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ *bir açık küme ve* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda* f *fonksiyonuna* C^0 *sınıfından diferansiyellenebilir veya* C^0*-diferansiyellenebilir denir [43].*

Tanım 2.4.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ *bir açık küme ve* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $i = 1, \ldots, m$ *için* $f^i = \pi^i \circ f$ *ile verilen koordinat fonksiyonları* C^k*-diferansiyellenebilir ise* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *fonksiyonuna* C^k*-diferansiyellenebilir fonksiyon denir. Burada* $\pi^i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\pi^i\left(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m\right) = x^i$ *ile tanımlı projeksiyondur [49, 54].*

Tanım 2.4.5. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ *birer açık küme ve* $f : U \longrightarrow V$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $x \in U$ *için*

$$f(x) = \left(f^1(x), \ldots, f^m(x)\right)$$

ile verilen f^i, $i = 1, \ldots, m$ *koordinat fonksiyonları* C^k*-diferansiyellenebilir ise* $f : U \longrightarrow V$ *fonksiyonuna* C^k*-diferansiyellenebilir denir [43].*

Tanım 2.4.6. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *herhangi iki açık küme ve* $f : U \longrightarrow V$ *bir homeomorfizm olsun. Eğer* f *ve* f^{-1} *diferansiyellenebilir ise* f *homeomorfizmine bir diffeomorfizm denir [54].*

2.5 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.5.1. (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Eğer herhangi iki farklı* $p, q \in X$ *için* $p \in U$, $q \in V$ *ve* $U \cap V = \emptyset$ *olacak biçimde* U *ve* V *açık kümeleri mevcut ise* (X, τ) *topolojik uzayına bir Hausdorff uzay denir [46].*

Tanım 2.5.2. M *bir topolojik uzay olsun. Eğer*

(a) M *bir Hausdorff uzaydır,*

(b) M *topolojik uzayının topolojisi için sayılabilir bir baz mevcuttur,*

(c) *M topolojik uzayının her noktasının n-boyutlu E^n Öklid uzayının bir açık kümesine homeomorfik bir komşuluğu vardır*

koşulları sağlanıyorsa M topolojik uzayına bir topolojik n-manifold veya n-boyutlu topolojik manifold denir [46].

Tanım 2.5.3. *M bir n-boyutlu topolojik manifold olsun. Eğer $U \subseteq M$ ve $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeleri için $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise (U, φ) ikilisine M topolojik manifoldu üzerinde bir harita denir [46].*

Tanım 2.5.4. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde bir harita (U, φ) olsun. U açık kümesine bir koordinat komşuluğu veya bir koordinat bölgesi denir [46].*

Tanım 2.5.5. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde bir harita (U, φ) olsun. φ homeomorfizmine bir yerel koordinat dönüşümü veya bir koordinat sistemi denir [46].*

Tanım 2.5.6. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde bir harita (U, φ) olsun. Eğer $p \in U$ için $\varphi(p) = 0$ ise (U, φ) haritası p-merkezli olarak adlandırılır [46].*

Tanım 2.5.7. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde bir harita (U, φ) olsun. φ yerel koordinat dönüşümünün her $p \in U$ için*

$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$$

kuralı ile tanımlı $(x_1, \ldots, x_n)$ bileşen fonksiyonlarına U koordinat bölgesinde yerel koordinatlar denir [46]. Ayrıca, $i \in \{1, \ldots n\}$ ise $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ yerel koordinatı (U, φ) haritası için i-yinci koordinat fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$x_i = r_i \varphi$$

ile verilir. Burada $r_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bir projeksiyondur [55].

Tanım 2.5.8. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde* $\mathbb{R}^n$*-değerli haritaların bir kolleksiyonu* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *olsun. Eğer* $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ *ise* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *kolleksiyonuna bir atlas denir [55].*

Tanım 2.5.9. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde* $\mathbb{R}^n$*-değerli bir atlas* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *olsun. Her* $\alpha, \beta \in A$ *için* $\varphi_\beta \circ \varphi_{\alpha^{-1}} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$ *homeomorfizmlerine geçiş fonksiyonları veya koordinat dönüşümleri denir [55].*

Tanım 2.5.10. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde* $\mathbb{R}^n$*-değerli bir atlas* $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *olsun. Eğer*

(a) *Her* $\alpha, \beta \in A$ *için* $\varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$ *formundaki kümeler* $\mathbb{R}^n$ *Öklid uzayında açıktır,*

(b) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *olduğunda* $\varphi_\beta \circ \varphi_{\alpha^{-1}} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$ *fonksiyonu bir* C^k*-diffeomorfizmdir*

koşulları sağlanıyorsa $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *atlasına* C^k *sınıfından* $\mathbb{R}^n$*-değerli bir atlas veya* $\mathbb{R}^n$*-değerli bir* C^k*-atlas denir [55].*

Tanım 2.5.11. $\mathcal{A}_1$ *ve* $\mathcal{A}_2$ *herhangi iki* $\mathbb{R}^n$*-değerli* C^k*-atlas olsun. Eğer* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *birleşimi bir* C^k*-atlas ise* $\mathcal{A}_1$ *ve* $\mathcal{A}_2$ *atlasları denk olarak adlandırılır [55].*

Tanım 2.5.12. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde* C^k *sınıfından* $\mathbb{R}^n$*-değerli bir* $\mathcal{A}$ *atlası daha büyük herhangi bir atlasta kapsanmıyorsa bu durumda* $\mathcal{A}$ *atlasına bir* C^k*-maksimal atlas denir [55].*

Tanım 2.5.13. *Herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde* $\mathbb{R}^n$*-değerli* C^k*-atlasların bir denklik sınıfına bir* C^k*-diferansiyellenebilir yapı denir. Başka bir deyişle, herhangi bir n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde herhangi bir* $\mathbb{R}^n$*-değerli* C^k*-maksimal atlas bir* C^k*-diferansiyellenebilir yapı olarak adlandırılır [55].*

Tanım 2.5.14. *Herhangi bir M topolojik manifold üzerinde bir C^k-diferansiyellenebilir yapı $\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $(M, \mathcal{A})$ ikilisine bir C^k-diferansiyellenebilir manifold denir. Eğer $k = \infty$ ise $(M, \mathcal{A})$ ikilisi bir C^∞-diferansiyellenebilir manifold veya bir diferansiyellenebilir manifold olarak adlandırılır [55].*

Tanım 2.5.15. *M herhangi bir n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldunu örten sonlu sayıda koordinat komşulukları varsa M manifolduna kompakt denir [56].*

Tanım 2.5.16. *Bir M manifoldunun herhangi iki noktası p ve q olsun. Eğer $\alpha(a) = p$ ve $\alpha(b) = q$ olacak şekilde p ve q noktalarını birleştiren M manifoldu üzerinde bir $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ sürekli eğrisi varsa M manifolduna bağlantılı denir [46, 55].*

Tanım 2.5.17. *n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ altuzayına n-boyutlu kapalı $\mathbb{H}^n$ üst yarı uzay denir [46].*

Tanım 2.5.18. *n-boyutlu kapalı $\mathbb{H}^n$ üst yarı uzayının $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n : x_n = 0\}$ altuzayına n-boyutlu kapalı $\mathbb{H}^n$ üst yarı uzayının kenarı denir ve $\partial\mathbb{H}^n$ ile gösterilir [46].*

Tanım 2.5.19. *M bir topolojik uzayı olsun. Eğer*

(a) *M bir Hausdorff uzaydır,*

(b) *M topolojik uzayının topolojisi için sayılabilir bir baz mevcuttur,*

(c) *M topolojik uzayının her noktasının n-boyutlu H^n üst yarı uzayının bir açık kümesine homeomorfik bir komşuluğu vardır*

koşulları sağlanıyorsa M topolojik uzayına bir kenarlı topolojik n-manifold veya bir n-boyutlu kenarlı topolojik manifold denir [46].

Tanım 2.5.20. *Herhangi bir kenarlı n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde $\mathbb{H}^n$-değerli bir atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Bazı φ_α homeomorfizmleri altında $\varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ olacak şekildeki M manifoldunun bir p noktasına M manifoldunun bir kenar noktası denir [55].*

Tanım 2.5.21. *Herhangi bir kenarlı n-boyutlu M topolojik manifoldunun bütün kenar noktalarının kümesine M manifoldunun kenarı denir ve ∂M gösterilir [55].*

Tanım 2.5.22. *M herhangi bir n-boyutlu kenarlı topolojik manifold olsun. Eğer $\partial M = \emptyset$ ise M manifolduna kenarsız denir [55].*

2.6 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ Halkası

Tanım 2.6.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold ve $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir C^k-diferansiyellenebilir fonksiyon olacak şekilde M manifoldunun herhangi bir $p \in M$ noktasını içeren bir (φ_i, U) haritası varsa f fonksiyonuna $p \in M$ noktasında C^k sınıfından diferansiyellenebilir veya C^k-diferansiyellenebilir denir [43].

Tanım 2.6.2. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold ve $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu M manifoldunun her noktasında C^k-diferansiyellenebilir ise bu burumda f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilir veya C^k-diferansiyellenebilir denir [43].*

Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tanımlı reel değerli tüm C^∞-diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tanımlı reel değerli tüm C^{∞}-diferansiyellenebilir fonksiyonların $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ kümesi*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } (fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

kuralları ile tanımlı $f+g$, cf ve fg işlemleri ile bir halka yapısına sahiptir [47].

2.7 Tanjant Vektörler, Tanjant Uzaylar ve Tanjant Demetler

Tanım 2.7.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasını düşünelim. Eğer $f, g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için*

$$X_p(fg) = X_p(f)\,g + fX_p(g)$$

koşulunu sağlayan bir $X_p : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir [55].

Bir M manifoldunun herhangi bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi T_pM ile gösterilir.

Teorem 2.7.1. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant vektörlerinin kümesi her $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için*

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$$

ve

$$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

kuralları ile tanımlı $X_p + Y_p$ ve λX_p işlemleri ile bir vektör uzayıdır ve M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır [43].

Teorem 2.7.2. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayı n-boyutludur. Eğer $p \in M$ noktasını içeren herhangi bir harita $(U_i, (x^i))$ ise*

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right)$$

koordinat vektörleri T_pM tanjant uzayı için bazdır [43, 54, 55, 57].

Tanım 2.7.2. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için $X(p) = X_p \in T_pM$ kuralı ile tanımlı bir diferansiyellebilir $X : M \longrightarrow \bigcup\limits_{p\in M} T_pM$ dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. Bir başka deyişle, bir M diferansiyellenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasına bir X_p tanjant vektörü karşılak getiren bir X diferansiyellenebilir dönüşümü vektör alanı olarak adlandırılır [43, 44].*

Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer X vektör alanının $\left\{\frac{\partial}{\partial x^h}\right\}$ doğal çatısına göre yerel bileşenleri X^h ise bu durumda bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun X vektör alanı yönünde türevi $Xf = \sum\limits_{h=1}^{n} X^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$ ile verilir [38]. Ayrıca, her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(Xf)(p) = X_pf$ kuralı ile tanımlı $Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilirdir [44].

Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$ ile gösterilir.

Teorem 2.7.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının $\Gamma(TM)$ kümesi her $p \in M$ için*

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p$$

ve

$$(fX)_p = f(p)\, X_p$$

kuralları ile tanımlı $X + Y$ ve fX işlemleri ile $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir [50].

Tanım 2.7.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun tüm noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimine M manifoldunun tanjant demeti denir ve TM ile gösterilir. Bu durumda $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ olur [46].*

2.8 Kotanjant Vektörler, Kotanjant Uzaylar ve Kotanjant Demetler

Tanım 2.8.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının dual uzayına kotanjant uzay denir ve T_p^*M ile gösterilir [54].*

Tanım 2.8.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki T_p^*M kotanjant uzayının her bir elemanına $p \in M$ noktasında bir tanjant kovektör veya bir kovektör denir [46].*

Tanım 2.8.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun tüm noktalarındaki kotanjant uzaylarının ayrık birleşimine M manifoldunun kotanjant demeti denir ve T^*M ile gösterilir. Bu durumda $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ olur [46].*

Tanım 2.8.4. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için $X(p) = X_p$ kuralı ile tanımlı diferansiyellebilir bir $X : M \longrightarrow \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ dönüşümüne bir kovektör vektör alanı veya bir 1-form denir. Bir başka deyişle, bir M diferansiyellenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasına bir X_p kovektör karşılık getiren bir X diferansiyellenebilir dönüşümü bir kovektör vektör alanı veya bir 1-form olarak adlandırılır [54].*

2.9 Kovaryant, Kontravaryant, Mixed Tensör Alanları ve Demetleri

Tanım 2.9.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için $f(p) = f_p \in T^r(T_pM)$ kuralı ile tanımlı bir $f : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T^r(T_pM)$ diferansiyellenebilir dönüşümüne bir r-kovaryant tensör alanı denir. Bir başka deyişle, bir M diferansiyellenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasına f_p ile gösterilen bir r-kovaryant tensörü karşılık getiren bir f diferansiyellenebilir dönüşümü r-kovaryant tensör alanı olarak adlandırılır [49].*

Tanım 2.9.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun tüm noktalarındaki r-kovaryant tensör uzaylarının ayrık birleşimine M manifoldunun r-kovaryant tensör demeti denir ve T^rM ile gösterilir. Bu durumda $T^rM = \bigcup_{p \in M} T^r(T_pM)$ olur [46].*

Tanım 2.9.3. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için $f(p) = f_p \in T_s(T_pM)$ kuralı ile tanımlı bir $f : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_s(T_pM)$ diferansiyellenebilir dönüşümüne bir s-kontravaryant tensör alanı denir. Yani, bir M diferansiyellenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasına f_p ile gösterilen bir s-kontravaryant tensörü karşılık getiren bir f diferansiyellenebilir dönüşümü s-kontravaryant tensör alanı olarak adlandırılır [46].*

Tanım 2.9.4. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun tüm noktalarındaki s-kontravaryant tensör uzaylarının ayrık birleşimine M manifoldunun s-kontravaryant tensör demeti denir ve T_sM ile gösterilir. Bu durumda $T_sM = \bigcup_{p \in M} T_s(T_pM)$ olur [46].*

Tanım 2.9.5. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için $f(p) = f_p \in T_s^r(T_pM)$ kuralı ile tanımlı bir $f : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_pM)$ diferansiyellenebilir dönüşümüne bir (r, s) tipinde tensör alanı denir. Bir başka deyişle,* *bir M diferansiyellenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasına f_p ile gösterilen (r, s) tipinde bir tensör karşılık getiren bir f diferansiyellenebilir dönüşümü (r, s) tipinde tensör alanı olarak adlandırılır [43].*

Tanım 2.9.6. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun tüm noktalarındaki (r, s) tipinde tensör uzaylarının ayrık birleşimine M manifoldunun (r, s)-mixed tensör demeti denir ve $T_s^r M$ ile gösterilir. Bu durumda $T_s^r M = \bigcup_{p \in M} T_s^r (T_p M)$ olur [46].*

2.10 Manifoldlar Üzerinde Diferansiyellenebilir Dönüşümler

Tanım 2.10.1. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $f : M \longrightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $f(U) \subset V$ koşulunu sağlayan M ve N manifoldlarının, sırasıyla, her (U, φ) ve (V, ψ) haritası için*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $f : M \longrightarrow N$ dönüşümüne diferansiyellenebilir veya C^∞-diferansiyellenebilir denir [16].

Tanım 2.10.2. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $f : M \longrightarrow N$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer f^{-1} ters fonksiyonu mevcut ve diferansiyellenebilir ise bu durumda $f : M \longrightarrow N$ dönüşümüne diffeomorfizm denir. Bu durumda M ve N manifoldları diffeomorfik manifoldlar olarak adlandırılır [54].*

Tanım 2.10.3. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. M manifoldunda seçilen bir α eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında teğet olacak şekildeki her $X_p \in T_p M$ tanjant vektörü için $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $F(\alpha(t_0))$ eğrisine teğet $F_*(X_p)$ tanjant vektörünü* *karşılık getiren bir* $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *dönüşümüne* F *dönüşümünün* p *noktasındaki diferansiyel dönüşümü, türev dönüşümü veya tanjant dönüşümü denir.* F_* *türev dönüşümü* dF *ile de gösterilir. Gerektiği zaman herhangi bir* $p \in M$ *noktasındaki* F_* *türev dönüşümü belirtmek için* $(F_*)_p$ *veya* $(dF)_p$ *yazılır [16, 50].*

Tanım 2.10.4. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. M manifoldunun bir $p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının F_* türev dönüşümü altında $F_*(T_pM)$ görüntüsünün boyutuna $p \in M$ noktasında $F : M \longrightarrow N$ dönüşümünün rankı denir. Eğer $p \in M$ noktasında $F : M \longrightarrow N$ dönüşümünün rankı $m = \dim M$ ise bu durumda $(F_*)_p$ türev dönüşümü birebirdir ve* $\dim M \leq \dim N$ *olur. Eğer $p \in M$ noktasında $F : M \longrightarrow N$ dönüşümünün rankı $n = \dim N$ ise bu durumda $(F_*)_p$ türev dönüşümü örtendir ve* $\dim M \geq \dim N$ *olur [16].*

Tanım 2.10.5. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için $(F_*)_p$ türev dönüşümü birebir ise F dönüşümüne bir immersiyon denir [16].*

Tanım 2.10.6. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir immersiyon olsun. Eğer F immersiyonu birebir ise bir imbedding olarak adlandırılır [16].*

Tanım 2.10.7. *M ve N herhangi iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Bir $p \in M$ noktasında her $\omega \in T^*_{F(p)}N$ için*

$$(F^*\omega)(X_p) = \omega F_*(X_p)\,,\ X_p \in T_pM$$

kuralı ile tanımlı $F^* : T^*_{F(p)}N \longrightarrow T^*_pM$ dönüşüme pull-back dönüşümü denir [44].

2.11 Lineer Konneksiyonlar

Tanım 2.11.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

kuralı ile tanımlı bir $[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümüne Lie braket operatörü denir [58].

Teorem 2.11.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ Lie braket operatörü için*

(a) *$\mathbb{R}$-bilineerdir,*

(b) *Anti-simetriktir,*

(c) *Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ eşitliği vardır,*

(d) *Her $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ eşitliği sağlanır*

özellikleri geçerlidir [50].

Tanım 2.11.2. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

(a) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(b) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(c) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(d) $\nabla_X fY = X(f) Y + f \nabla_X Y$

koşullarını sağlayan $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ *kuralı ile tanımlı bir* $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ *dönüşümüne* M *manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon denir.* ∇_X *operatörü ise* X *vektör alanına göre kovaryant türev olarak adlandırılır [44].*

Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir vektör alanı X olsun. Bir $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ fonksiyonunun $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanına göre kovaryant türevi $\nabla_X f = X(f)$ ile tanımlanır. Bu nedenle, herhangi bir $(0,s)$ ya da $(1,s)$ tipinde S tensör alanının $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanına göre kovaryant türevi her $X_i \in \Gamma(TM)$, $i = 1,,\ldots,s$ için

$$(\nabla_X S)(X_1,\ldots,X_s) = \nabla_X S(X_1,\ldots,X_s) - \sum_{1=1}^{s} \{S(X_1,\ldots,\nabla_X X_i,\ldots,X_s)\}$$

ile tanımlanır [38].

Tanım 2.11.3. *Herhangi bir* M *diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde* $(0,s)$ *ya da* $(1,s)$ *tipinde bir tensör alanı* S *olsun. Eğer her* $X \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\nabla_X S = 0$$

ise S *tensör alanına* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paralel denir [38].*

Tanım 2.11.4. *Herhangi bir* M *diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon* ∇ *olsun. Her* $X,Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\tau(\nabla)(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

kuralı ile tanımlı $(1,2)$ *tipindeki bir* $\tau(\nabla)$ *tensör alanına* ∇ *lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü denir [38].*

Tanım 2.11.5. *Herhangi bir* M *diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir* ∇ *lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü* $\tau(\nabla)$ *olsun. Eğer* $\tau(\nabla) = 0$ *ise* ∇ *lineer konneksiyonuna simetrik veya torsiyonsuz denir [44].*

Tanım 2.11.6. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

kuralı ile tanımlı $(1,3)$ tipindeki bir R tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [38].

Tanım 2.11.7. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü R olsun. Eğer $R = 0$ ise ∇ lineer konneksiyonuna flat veya düzlemsel denir [44].*

2.12 Nijenhuis Tensörü

Tanım 2.12.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı φ olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

kuralı ile tanımlı $(1,2)$ tipindeki bir $N_\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ tensör alanına φ tensör alanının Nijenhuis tensörü veya torsiyon tensörü denir [58].

Önerme 2.12.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi iki $(1,1)$ tipinde φ_1 ve φ_2 tensör alanları için*

$$\begin{aligned}[\varphi_1, \varphi_2]_{FN}(X,Y) &= [\varphi_1 X, \varphi_2 Y] - [\varphi_1 Y, \varphi_2 X] - \varphi_2[\varphi_1 X, Y] + \varphi_2[\varphi_1 Y, X] \\ &\quad - \varphi_1[\varphi_2 X, Y] + \varphi_1[\varphi_2 Y, X] + \varphi_2\varphi_1[X,Y] + \varphi_1\varphi_2[X,Y]\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $[.,.]_{FN}$, vektör-değerli formların Frölicher-Nijenhuis braketidir. Buna bağlı olarak, M manifoldu üzerinde bir $(1,1)$ tipinde φ tensör alanının Nijenhuis tensörü

$$N_\varphi = \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]_{FN} \tag{2.12.1}$$

ile verilir. Üstelik,

$$[I, \varphi]_{FN} = 0 \tag{2.12.2}$$

ve

$$N_{\varphi_1+\varphi_2} = N_{\varphi_1} + N_{\varphi_2} + [\varphi_1, \varphi_2]_{FN} \tag{2.12.3}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada I, M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde birim tensör alanıdır [59].

2.13 Manifoldlarda Dış Cebir ve Kohomoloji

Tanım 2.13.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir anti-simetrik r-kovaryant tensör alanına bir diferansiyel r-form veya bir r dereceli dış diferansiyel form veya bir r-form denir [49].*

Tanım 2.13.2. *Bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun her noktasında sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir n-form mevcut ise M manifolduna yönlendirilebilir denir [43, 49].*

Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm r-formların kümesi $\Lambda^r(M)$ ile gösterilir.

Teorem 2.13.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm diferansiyel r-formların $\Lambda^r(M)$ kümesi M manifoldunun r-kovaryant T^rM tensör demetinin bir altuzayıdır [49].*

Teorem 2.13.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm dış diferansiyel formların $\mathbb{R}$-vektör uzayını ΛM ile gösterelim. O zaman $\varphi \in \Lambda^r(M)$ ve $\psi \in \Lambda^s(M)$ için herhangi bir $p \in M$ noktasında $(\varphi\Lambda\psi)_p = \varphi_p\Lambda\psi_p$ kuralı ile tanımlı $\varphi\Lambda\psi = (-1)^{rs}\psi\Lambda\varphi$ özelliğini sağlayan bir $\varphi\Lambda\psi$ asosyatif çarpımla ΛM vektör uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir cebirdir [49].*

Teorem 2.13.3. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her ω, ω_1, $\omega_2 \in \Lambda(M)$ için*

(a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, $d(\lambda\omega) = \lambda d(\omega)$,

(b) *Eğer ω_1 bir r-form ise $d(\omega_1 \Lambda \omega_2) = d\omega_1 \Lambda \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \Lambda d\omega_2$ eşitliği sağlanır,*

(c) $d^2\omega = 0$,

(d) *Eğer $f \in \Lambda^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise o zaman df, f fonksiyonunun diferansiyelidir*

koşullarını sağlayan her $r \geq 0$ için bir tek $d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ dönüşümü vardır. Bu d dönüşümüne dış türev denir [43, 49].

Önerme 2.13.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel r-formun dış türevi her $X_0, X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(TM)$ için*

$$d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}\left\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\left(\omega\left(X_0, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots X_r\right)\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{r+1}\left\{\sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i, X_j], X_0, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_r\right)\right\}$$

ile verilir. Burada $\widehat{\ }$, sembolü bulunduğu terimin çıkarıldığını ifade etmektedir [58].

Tanım 2.13.3. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel r-formu için $d\omega = 0$ ise ω formuna kapalı denir [43].*

Tanım 2.13.4. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel r-formu için $\omega = d\theta$ olacak şekilde bir $\theta \in \Lambda^{r-1}(M)$ mevcut ise ω formuna tam denir [43]*

Önerme 2.13.2. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm kapalı r-formların kümesini $Z^r(M)$ ile gösterelim. Bu durumda $Z^r(M)$, $d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ dış türevinin çekirdeğidir [55].*

Teorem 2.13.4. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm kapalı r-formların $Z^r(M)$ kümesi r-formlarının $\Lambda^r(M)$ vektör uzayının bir altuzayıdır [43].*

Önerme 2.13.3. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm tam r-formların kümesini $B^r(M)$ ile gösterelim. Bu durumda $B^r(M)$, $d : \Lambda^{r-1}(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)$ dış türevinin görüntüsüdür [55].*

Teorem 2.13.5. *Herhangi bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm tam r-formların $B^r(M)$ kümesi r-formların $\Lambda^r(M)$ vektör uzayının bir altuzayıdır [43].*

Tanım 2.13.5. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $H^r_{dR}(M) = \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}$ ile tanımlı bölüm uzayına M manifoldunun r-yinci de Rham kohomoloji grubu denir. Yani, M manifoldunun r-yinci de Rham kohomoloji grubu*

$$H^r_{dR}(M) = \frac{\ker\left(d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)\right)}{\operatorname{Im}\left(d : \Lambda^{r-1}(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)\right)}$$

ile verilir [43, 46, 54, 55].

Tanım 2.13.6. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel kapalı r-formunun $H^r_{dR}(M)$ de Rham kohomoloji grubunda denklik sınıfına ω diferansiyel r-formunun kohomoloji sınıfı denir ve $[\omega]$ ile gösterilir [46]. O zaman $H^r_{dR}(M)$ de Rham kohomoloji grubu, tüm kohomoloji sınıflarının kümesidir [54].*

Tanım 2.13.7. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldunun r-yinci de Rham kohomoloji grubunun boyutuna r-yinci Betti sayısı denir ve $b_r(M)$ ile gösterilir. Yani, M manifoldunun r-yinci Betti sayısı $b_r(M) = \dim H^r_{dR}(M)$ ile verilir [43, 54].*

2.14 Riemann Manifoldları

Tanım 2.14.1. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Simetrik ve pozitif tanımlı $(0,2)$ tipinde bir $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ tensör alanına bir Riemann metriği veya bir metrik tensör denir. Bu durumda (M, g) ikilisi ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır [38].*

Bir Riemann metriği M manifoldunun her bir p noktasındaki T_pM tanjant uzayları üzerinde bir iç çarpım tanımlar [16]. O zaman bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde Riemann metriğinin tanımlı olması bir vektör alanının uzunluğunu ve herhangi iki vektör alanı arasındaki açıyı tanımlamamıza olanak sağlar [44].

(M, g) bir Riemann manifold olsun. M manifoldunun herhangi bir p noktasını düşünelim. p noktasındaki bir $X_p \in T_pM$ tanjant vektörünün uzunluğu veya normu

$$\|X_p\| = \sqrt{g(X_p, X_p)}$$

ile tanımlanır. Buna bağlı olarak, p noktasındaki sıfırdan farklı herhangi iki $X_p, Y_p \in T_pM$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı

$$\theta = \arccos\left(\frac{g(X_p, Y_p)}{\|X_p\| \, \|Y_p\|}\right)$$

ile tanımlanır. Burada θ açısı, $[0, \pi]$ kapalı aralığında değer alır [44].

Tanım 2.14.2. *M herhangi bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki sıfırdan farklı herhangi iki $X_p, Y_p \in T_pM$ tanjant vektörleri için eğer $g(X_p, X_p) = 0$ ise X_p ve Y_p ortogonal tanjant vektörleri olarak adlandırılır [45].*

Tanım 2.14.3. *Herhangi iki* (M, g) *ve* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldları arasında bir diffeomorfizm* φ *olsun. Eğer* $\varphi^{*}\overline{g} = g$ *ise* φ *diffeomorfizmine bir izometri denir. Bu durumda* (M, g) *ve* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *ise izometrik Riemann manifoldları olarak adlandırılır [45].*

Tanım 2.14.4. *Herhangi bir* (M, g) *Riemann manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon* ∇ *olsun. Eğer* g *Riemann metriği paralel, diğer bir deyişle, her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

ise ∇ *lineer konneksiyonuna bir Riemann konneksiyon veya bir metrik konneksiyon denir [38].*

Teorem 2.14.1. *Herhangi bir* (M, g) *Riemann manifoldu üzerinde bir tek torsiyonsuz* ∇ *Riemann konneksiyonu vardır [38].*

Teorem 2.14.1'de belirtilen ∇ Riemann konneksiyonu Levi-Civita konneksiyon olarak adlandırılır ve Koszul formulü adı verilen her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \tag{2.14.1}$$

eşitliği ile verilir [38].

Tanım 2.14.5. *Herhangi bir* (M, g) *Riemann manifoldunun eğrilik tensör* R *olsun. Her* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için*

$$K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

kuralı ile tanımlı $(0, 4)$ *tipindeki bir* K *tensör alanına* (M, g) *Riemann manifoldunun Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir [44].*

Teorem 2.14.2. *Herhangi bir* (M, g) *Riemann manifoldunun Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* K *olsun. Bu durumda her* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için*

(a) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$,

(b) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0$,

(c) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$,

(d) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$

eşitlikleri sağlanır [43].

Tanım 2.14.6. *Herhangi bir* n*-boyutlu* (M, g) *Riemann manifoldunun eğrilik tensörü* R *ve yerel ortonormal vektör alanlarının bir çatısı* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *olsun. Her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X) Y, E_i)$$

kuralı ile tanımlı $(0, 2)$ *tipindeki bir* S *tensör alanına* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci tensörü denir [38].*

Tanım 2.14.7. *Herhangi bir* n*-boyutlu* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci tensörü* S *olsun. Her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$g(QX, Y) = S(X, Y)$$

ile tanımlı $(1, 1)$ *tipindeki bir* Q *tensör alanına* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci operatörü denir [16].*

Tanım 2.14.8. *Herhangi bir* n*-boyutlu* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci tensörü* S *ve yerel ortonormal vektör alanlarının bir çatısı* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *olsun. O zaman*

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i)$$

ile tanımlı bir ρ *global skaler alanına* (M, g) *Riemann manifoldunun skaler eğriliği denir [38].*

Tanım 2.14.9. *Herhangi bir n-boyutlu (M, g) Riemann manifoldunun bir p noktasındaki T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu bir Π altuzayına (M, g) Riemann manifoldunun tanjant düzlemi denir [57].*

Tanım 2.14.10. *Herhangi bir n-boyutlu (M, g) Riemann manifoldunun eğrilik tensörü R ve bir p noktasındaki tanjant düzlemi Π olsun. Eğer $\Pi = Span\{X_p, Y_p\}$ ise*

$$K_M(\Pi) = K_M(X_p \wedge Y_p) = \frac{g(R(X_p, Y_p)Y_p, X_p)}{g(X_p, X_p)\, g(Y_p, Y_p) - g(X_p, Y_p)^2}$$

ile tanımlı $K_M(\Pi)$ veya $K_M(X_p \wedge Y_p)$ reel sayısına Π tanjant düzleminin kesit eğriliği denir [55].

Herhangi bir n-boyutlu (M, g) Riemann manifoldunun bir p noktasındaki Π tanjant düzleminin $K_M(\Pi)$ kesit eğriliği Π tanjant düzleminin baz seçiminden bağımsızdır [43].

Tanım 2.14.11. *Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldunun her bir $p \in M$ noktasındaki tüm Π tanjant düzlemleri için $K_M(\Pi)$ kesit eğriliği sabit ise M manifolduna bir sabit eğrilikli uzay veya bir uzay form denir [16].*

Teorem 2.14.3. *Herhangi bir sabit k eğrilikli (M, g) Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

formundadır [16].

Tanım 2.14.12. *Herhangi bir sabit eğrilikli (M, g) Riemann manifoldunun kesit eğriliği negatif ise (M, g) Riemann manifolduna bir hiperbolik uzay form denir [16].*

Tanım 2.14.13. *Herhangi bir sabit eğrilikli (M, g) Riemann manifoldunun kesit eğriliği sıfır ise (M, g) Riemann manifolduna bir flat uzay form denir [16].*

Tanım 2.14.14. *Herhangi bir sabit eğrilikli* (M, g) *Riemann manifoldunun kesit eğriliği pozitif ise* (M, g) *Riemann manifolduna bir eliptik uzay form denir [16].*

Tanım 2.14.15. *Herhangi bir n-boyutlu* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci tensörü* S *olsun. Bir* $p \in M$ *noktasındaki sıfırdan farklı* X_p *tanjant vektörü için*

$$k\left(X_p\right) = \frac{S\left(X_p, X_p\right)}{g\left(X_p, X_p\right)}$$

ile tanımlı $k\left(X_p\right)$ *reel sayısına* (M, g) *Riemann manifoldunun* X_p *tanjant vektörüne göre Ricci eğriliği denir. Eğer* $k\left(X_p\right)$ *Ricci eğriliği* X_p *tanjant vektörünün* $p \in M$ *noktasının seçiminden bağımsız ise o zaman Ricci tensörü*

$$S = kg$$

ile verilir. Burada her $X_p \in T_pM$ *için* $k = k\left(X_p\right)$ *eşitliği geçerlidir [38].*

Tanım 2.14.16. *Herhangi bir n-boyutlu* (M, g) *Riemann manifoldunun Ricci tensörü* S *olsun. Eğer*

$$S = kg$$

olacak şekilde bir k *sabiti var ise* (M, g) *Riemann manifolduna bir Einstein uzay veya bir Einstein manifold denir [16, 38].*

Tanım 2.14.17. (M, g) *ve* (N, h) *herhangi iki Riemann manifold ve* $F : M \longrightarrow N$ *bir dönüşüm olsun. Eğer* M *Riemann manifoldunun bir* p *noktasında her* $X_p, Y_p \in T_pM$ *için* $g\left(X_p, Y_p\right) = h\left(F_*X_p, F_*Y_p\right)$ *ise* $F : M \longrightarrow N$ *dönüşümüne* $p \in M$ *noktasında izometrik denir [60].*

Tanım 2.14.18. (M, g) *herhangi bir Riemann manifold,* N *herhangi bir manifold ve* $\iota : N \longrightarrow M$ *bir immersiyon olsun. Eğer* N *manifoldu* $h = \iota^* g$ *indirgenmiş Riemann metriği ile verilirse o zaman* ι *immersiyonuna bir izometrik immersiyon denir [45].*

Tanım 2.14.19. (M,g) *herhangi bir Riemann manifold, N herhangi bir manifold ve* $\iota : N \longrightarrow M$ *bir imbedding olsun. Eğer N manifoldu* $h = \iota^* g$ *indirgenmiş Riemann metriği ile verilirse o zaman* ι *imbeddingine bir izometrik imbedding denir [45].*

Tanım 2.14.20. (M,g) *herhangi bir n-boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifold olsun. Eğer bir* $p \in M$ *noktasının U koordinat bölgesinde yerel koordinatları* $x^1, \ldots, x^n$ *ise* $\sigma = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \Lambda \cdots \Lambda dx^n$ *ile tanımlı diferansiyel n-formuna M Riemann manifoldunun hacim formu denir [54].*

Tanım 2.14.21. *Herhangi bir n-boyutlu* (M,g) *yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde bir diferansiyel r-formu* ω *olsun. Her* $(n-r)$*-form* μ *için*

$$\omega \Lambda \mu = g(\star\omega, \mu)\, \sigma$$

eşitliği sağlayan $\star\omega$ *diferansiyel* $(n-r)$*-formuna* ω *formunun Hodge duali denir. Burada* σ*, M Riemann manifoldunun hacim formunu göstermektedir [54].*

Tanım 2.14.22. *Herhangi bir n-boyutlu* (M,g) *yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde her* ω *diferansiyel r-formu için*

$$\delta\omega = (-1)^{nr+n+1} \star d \star \omega \tag{2.14.2}$$

kuralı ile tanımlı $\delta : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r-1}(M)$ *dönüşümüne ko-diferansiyel operatör denir [47, 54].*

Tanım 2.14.23. *Herhangi bir n-boyutlu yönlendirilebilir* (M,g) *Riemann manifoldu üzerinde bir* ω *diferansiyel r-formu için* $\delta\omega = 0$ *ise* ω *formuna ko-kapalıdır denir [54].*

Tanım 2.14.24. *Herhangi bir n-boyutlu yönlendirilebilir* (M,g) *Riemann manifoldu üzerinde her* ω *diferansiyel r-formu için* $\Delta\omega = (d\delta + \delta d)\,\omega = d\delta\omega + \delta d\omega$ *kuralı ile tanımlı* $\Delta : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)$ *dönüşümüne Laplace–de Rham operatör denir [54].*

Tanım 2.14.25. *Herhangi bir n-boyutlu yönlendirilebilir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel r-formu için $\Delta\omega = 0$ ise ω formuna harmonik denir [54].*

Önerme 2.14.1. *Herhangi bir kompakt, yönlendirilebilir ve kenarsız (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir ω diferansiyel r-formunun harmonik olması için bir gerek ve yeter koşul $d = 0$ ve $\delta = 0$ olmasıdır [47].*

Teorem 2.14.4. *(Hodge Teoremi) Herhangi bir kompakt, yönlendirilebilir ve kenarsız (M, g) Riemann manifoldu üzerinde her kapalı r-form bir tek harmonik kohomoloji sınıf temsilcisine sahiptir. Başka bir deyişle, de Rham kohomolojisi $H^r_{dR}(M)$ ile M manifoldu üzerinde harmonik r-formların uzayı $Y_r(M)$ izomorfiktir [54].*

Teorem 2.14.5. *(Poincaré Duality Teoremi) (M, g) herhangi bir n-boyutlu kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir ve kenarsız Riemann manifold olsun. Bu durumda her $r \leq n$ için*

$$H^{n-r}_{dR}(M) \cong H^r_{dR}(M)^*$$

olur. Özellikle, $b_{n-k} = b_k$ ise izomorfiklik doğal olarak vardır [54].

2.15 Riemann Manifoldların Altmanifoldları

Tanım 2.15.1. *M ve $\overline{M}$ herhangi iki diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer $F : M \longrightarrow \overline{M}$ dönüşümü bir immersiyon ise M manifolduna $\overline{M}$ manifoldunun bir immersed altmanifoldu denir [16, 56].*

Tanım 2.15.2. *M ve $\overline{M}$ herhangi iki diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer $F : M \longrightarrow \overline{M}$ dönüşümü bir imbedding ise M manifolduna veya $F(M)$ görüntüsüne $\overline{M}$ manifoldunun bir imbedding altmanifoldu denir [16, 56].*

Bir $\overline{M}$ manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M ise bu durumda M altmanifoldu ya bir immersed altmanifolddur ya da bir imbedded altmanifolddur [16]. $\overline{M}$ manifolduna ise ambient manifold denir [45].

Tanım 2.15.3. *Bir $\overline{M}$ manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldu üzerinde bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanını düşünelim. Eğer $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde tanımlı bir $\overline{X}$ vektör alanının M altmanifolduna kısıtlanması X, başka bir deyişle $\overline{X}|_M = X$ ise $\overline{X}$ vektör alanına X vektör alanının bir genişlemesi denir [56].*

Tanım 2.15.4. *Bir $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M ve $\iota : M \longrightarrow \overline{M}$ bir immersiyon olsun. Eğer ι immersiyonu birebir ise M altmanifolduna $\overline{M}$ Riemann manifoldunun Riemann altmanifoldu denir [45].*

Tanım 2.15.5. *Bir $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(X,Y) = \overline{g}(X,Y)$$

ile tanımlı g Riemann metriğine M altmanifoldu üzerinde bir indirgenmiş metrik denir. Ayrıca, M altmanifoldu g Riemann metriği ile bir Riemann manifolddur [56].

Tanım 2.15.6. *Bir $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bir $p \in M$ noktasında $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde V_p tanjant vektörünü düşünelim. Eğer $p \in M$ noktasında her $X_p \in T_pM$ tanjant vektörü için $\overline{g}(X_p, V_p) = 0$ ise V_p tanjant vektörüne M altmanifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldunda bir normal vektörü denir [16].*

Tanım 2.15.7. *Bir $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldunda bir birim normal vektör alanına M altmanifoldu üzerinde bir normal kesit denir [16].*

Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldunda tüm normal vektörlerinin vektör demeti $TM^{\perp}$ ile gösterilir. Bu durumda $\overline{M}$ ambient manifoldunun tanjant demeti M altmanifoldunun TM tanjant demeti ile $TM^{\perp}$ normal demetinin direkt toplamıdır. Yani, $\overline{M}$ ambient manifoldunun $T\overline{M}$ tanjant demeti $T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp}$ ayrışımına sahiptir [16].

Teorem 2.15.1. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir M altmanifoldu üzerinde tanımlı X ve Y vektör alanlarının genişlemeleri, sırasıyla, $\overline{X}$ ve $\overline{Y}$ olsun. Bu durumda $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\big|_M$ ve $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\big|_M$ vektör alanları X ve Y vektör alanlarının $\overline{M}$ ambient manifolduna genişlemelerinden bağımsızdır. Buna ek olarak, $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\big|_M = [X,Y]$ ve $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\big|_M = \overline{\nabla}_X Y$ eşitlikleri geçerlidir. Burada $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu göstermektedir [16].*

Tanım 2.15.8. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann $\overline{M}$ manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$h(X,Y) = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^{\perp}$$

kuralı ile tanımlı $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ dönüşümüne M altmanifoldunun ikinci temel formu denir [45].

Lemma 2.15.1. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann $\overline{M}$ manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu h için*

(a) *M altmanifold üzerinde tanımlı vektör alanlarının $\overline{M}$ ambient manifolduna genişlemelerinden bağımsızdır,*

(b) *$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-bilineerdir,*

(c) *Simetriktir*

özellikleri geçerlidir [45].

Lemma 2.15.2. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için*

$$\nabla(X,Y)=\nabla_X Y=\left(\overline{\nabla}_X Y\right)^{\top}$$

kuralı ile tanımlı $\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$ dönüşümü M altmanifoldu üzerinde simetrik ve torsiyonsuz bir lineer konneksiyondur. Yani, ∇ bir Levi-Civita konneksiyondur ve indirgenmiş konneksiyon olarak adlandırılır [45].

Teorem 2.15.2. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\overline{M}$ ambient manifolduna genişlemesi mevcut her $X,Y\in\Gamma(TM)$ vektör alanları için M altmanifoldu boyunca*

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe Gauss formülü denir [45].

Tanım 2.15.9. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Her $X\in\Gamma(TM)$ ve $V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için*

$$A(V,X)=A_V X=-\left(\overline{\nabla}_X V\right)^{\top}$$

kuralı ile tanımlı $A:\Gamma(TM)\times\Gamma\left(TM^{\perp}\right)\longrightarrow\Gamma(TM)$ dönüşümüne M altmanifoldunun şekil operatörü, Weingarten temel tensörü veya Weingarten dönüşümü denir. $A_V:\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$ dönüşümü ise V normal vektör alanına göre M altmanifoldunun şekil operatörü, Weingarten temel tensörü veya Weingarten dönüşümü olarak adlandırılır [38, 55].

Önerme 2.15.1. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun A şekil operatörü $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-bilineerdir [56].*

Önerme 2.15.2. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g})$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* M *altmanifoldunun* A *şekil operatörü self adjointtir. Yani, her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *ve* $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ *için*

$$\overline{g}(A_V X, Y) = \overline{g}(A_V Y, X) \tag{2.15.1}$$

eşitliğini sağlar [56].

Önerme 2.15.3. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g})$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* M *altmanifoldunun ikinci temel formu* h *ile şekil operatörü* A *arasında her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *ve* $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ *için*

$$\overline{g}(h(X, Y), V) = \overline{g}(A_V X, Y) \tag{2.15.2}$$

şeklinde bir bağıntı vardır [56].

Önerme 2.15.4. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g})$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Her* $X \in \Gamma(TM)$ *ve* $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ *için*

$$\nabla^{\perp}(X, V) = \nabla^{\perp}_X V = \left(\overline{\nabla}_X V\right)^{\perp}$$

kuralı ile tanımlı $\nabla^{\perp} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM^{\perp}) \longrightarrow \Gamma(TM^{\perp})$ *dönüşümü* M *altmanifoldunun* $TM^{\perp}$ *normal demeti üzerinde indirgenmiş metriğe göre* $TM^{\perp}$ *normal demetinde bir metrik konneksiyondur ve normal konneksiyon olarak adlandırılır [16, 56].*

Teorem 2.15.3. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g})$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda* $\overline{M}$ *ambient manifolduna genişlemesi mevcut her* $X \in \Gamma(TM)$ *ve* $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ *vektör alanları için* M *altmanifoldu boyunca*

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe Weingarten formülü denir [45].

Tanım 2.15.10. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* M *altmanifoldu üzerinde bir* $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *normal vektör alanını düşünelim. Eğer her* $X \in \Gamma(TM)$ *için* $\nabla_X^{\perp} V = 0$ *ise* V *normal vektör alanı* $TM^{\perp}$ *normal vektör demetinde paralel olarak adlandırılır. Burada* $\nabla^{\perp}$, M *altmanifoldu üzerindeki normal konneksiyonu göstermektedir [16].*

Tanım 2.15.11. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Eğer* M *altmanifoldunun ikinci temel formu* h *veya şekil operatörü* A *sıfır vektör alanına eşit ise* M *total geodezik bir altmanifold olarak adlandırılır [38].*

Tanım 2.15.12. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Eğer bir* V *normal kesiti ve bir* $\alpha \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ *için* $A_V = \alpha I$ *ise* M *altmanifolduna* V *normal kesitine göre bir total umbilik altmanifold denir.* V *normal kesiti ise* M *altmanifoldu üzerinde bir umbilik kesit olarak adlandırılır [38].*

Tanım 2.15.13. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Eğer* M *altmanifoldu her normal kesite göre total umbilik ise* M *bir total umbilik altmanifold olarak adlandırılır [38].*

Tanım 2.15.14. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun n-boyutlu herhangi bir* M *altmanifoldunun ikinci temel formu* h *ve bir* $p \in M$ *noktasında* T_pM *tanjant uzayının bir ortonormal bazı* $\{E_1, \ldots, E_n\}_p$ *olsun. O zaman*

$$Tr(h) = \sum_{i=1}^{n} h(E_i, E_i)_p$$

ile tanımlı $Tr(h)$ *normal vektör alanına* h *ikinci temel formunun izi denir.* h *ikinci temel formunun* $Tr(h)$ *izi* $p \in M$ *noktasında* T_pM *tanjant uzayının baz seçiminden bağımsızdır [38].*

Tanım 2.15.15. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun n-boyutlu herhangi bir* M *altmanifoldunun* h *ikinci temel formu* $Tr\,(h)$ *olsun. O zaman*

$$H=\frac{1}{n}Tr\,(h)$$

ile tanımlı H *normal vektör alanına* M *altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü denir [38].*

Tanım 2.15.16. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun n-boyutlu herhangi bir* M *altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü* H *olsun. Eğer* $H=0$ *ise* M *altmanifolduna bir minimal altmanifold denir [38].*

Önerme 2.15.5. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun n-boyutlu herhangi bir* M *altmanifoldunun ikinci temel formu* h *ve ortalama eğrilik vektörü* H *olsun. O zaman* M *altmanifoldunun bir total umbilik altmanifold olması için bir gerek ve yeter koşul her* $X,Y\in\Gamma\,(TM)$ *için*

$$h\,(X,Y)=\overline{g}\,(X,Y)\,H \tag{2.15.3}$$

veya denk olarak her $X,Y\in\Gamma\,(TM)$ *ve* $V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *için*

$$A_VX=\overline{g}\,(H,V)\,X \tag{2.15.4}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [38].

Teorem 2.15.4. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* $\overline{M}$ *ve* M *manifoldlarının eğrilik tensör alanlarını, sırasıyla,* $\overline{R}$ *ve* R *ile gösterelim. Bu durumda* $\overline{M}$ *ambient manifolduna genişlemesi mevcut her* $X,Y,Z,W\in\Gamma\,(TM)$ *vektör alanları için* M *altmanifoldu boyunca*

$$\overline{g}\left(\overline{R}\,(X,Y)\,Z,W\right)=\overline{g}\,(R\,(X,Y)\,Z,W)-\overline{g}\,(h\,(X,W),h\,(Y,Z))+\overline{g}\,(h\,(Y,W),h\,(X,Z))$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe Gauss denklemi denir [16, 38, 56].

Tanım 2.15.17. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\left(\overline{\nabla}h\right)(X,Y,Z) = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp}(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.15.5)$$

kuralı ile tanımlı $\overline{\nabla}h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *dönüşümüne* h *ikinci temel formunun kovaryant türevi denir.* $\overline{\nabla}_X h$ *operatörü ise* X *vektör alanına göre* h *ikinci temel formunun kovaryant türevi olarak adlandırılır [38].*

Tanım 2.15.18. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Eğer her* X *için* $\overline{\nabla}_X h = 0$ *ise* h *ikinci temel formu paralel olarak adladırılır [16].*

Teorem 2.15.5. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* $\overline{M}$ *ve* M *manifoldlarının eğrilik tensör alanlarını, sırasıyla,* $\overline{R}$ *ve* R *ile gösterelim. Bu durumda* $\overline{M}$ *ambient manifolduna genişlemesi mevcut her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *vektör alanları için* M *altmanifoldu boyunca*

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe Codazzi denklemi denir. Eğer M *altmanifoldu total umbilik ise bu durumda Codazzi denklemi her* $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *için*

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z, V\right) = \overline{g}(Y,Z)\,\overline{g}\left(\nabla_X^{\perp}H, V\right) - \overline{g}(X,Z)\,\overline{g}\left(\nabla_Y^{\perp}H, V\right) \qquad (2.15.6)$$

ile verilir [16, 38, 56].

Teorem 2.15.6. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* $\overline{M}$ *ve* M *manifoldlarının eğrilik tensör alanlarını, sırasıyla,* $\overline{R}$ *ve* R *ile gösterelim. Bu durumda* $\overline{M}$ *ambient manifolduna genişlemesi mevcut her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *ve* $U, V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *vektör alanları için* M *altmanifoldu boyunca*

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)V, U\right) = \overline{g}\left(R^{\perp}(X,Y)V, U\right) + \overline{g}\left([A_U, A_V]X, Y\right)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe Ricci denklemi denir [16, 38, 56].

2.16 Manifoldlar Üzerinde Distribüsyonlar

Tanım 2.16.1. *Herhangi bir diferansiyellenebilir manifold M olsun. Her bir $p \in M$ noktasına T_pM tanjant uzayının r-boyutlu D_p altuzayını karşılık getiren D dönüşümüne bir r-boyutlu tanjant distribüsyon veya bir r-boyutlu distribüsyon veya bir r-düzlem alan denir [38, 46].*

$X \in \Gamma(TM)$ olsun. Eğer her $p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanı D distribüsyonuna aittir ve $X \in \Gamma(D)$ ile gösterilir [38].

Tanım 2.16.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir r-boyutlu distribüsyon D olsun. Her $p \in M$ noktasının bir komşuluğunda r-tane diferansiyellenebilir $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(D)$ lineer bağımsız vektör alanları mevcut ise D distribüsyonuna diferansiyellenebilir denir [38].*

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, tüm distribüsyonların C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım.

Tanım 2.16.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir distribüsyon D olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutif denir [38].*

Tanım 2.16.4. *Herhangi bir $\overline{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde bir $\overline{D}$ distribüsyonunu düşünelim. Eğer her $p \in M$ için $\overline{D}_p = F_*(T_pM)$ ise M altmanifolduna $\overline{D}$ distribüsyonunun bir integral manifoldu denir. Burada $F : M \longrightarrow \overline{M}$ bir imbeddingtir [16, 38].*

Tanım 2.16.5. *Herhangi bir $\overline{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde bir $\overline{D}$ distribüsyonunu düşünelim. Eğer $\overline{D}$ distribüsyonunun M altmanifoldunu içeren başka bir integral manifoldu* *yoksa M altmanifolduna $\overline{D}$ distribüsyonunun bir maksimal integral manifoldu denir [38].*

Tanım 2.16.6. *Herhangi bir $\overline{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde bir $\overline{D}$ distribüsyonunu düşünelim. Eğer her bir $p \in M$ noktasını içeren $\overline{D}$ distribüsyonunun bir integral manifoldu varsa $\overline{D}$ distribüsyonuna integrallenebilir denir [38].*

Teorem 2.16.1. *Herhangi bir $\overline{M}$ diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir distribüsyon $\overline{D}$ olsun. Eğer $\overline{D}$ distribüsyonunu involutif ise integrallenebilirdir. Ayrıca, her bir $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasından geçen bir tek M maksimal integral manifoldu vardır ve $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasını içeren diğer integral manifoldlar M maksimal integral manifoldunun bir açık altmanifoldudur. Bu teoreme Frobenius Teoremi denir [38].*

Tanım 2.16.7. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ve bir distribüsyon D olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ ise $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel denir [38].*

Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde iki tamamlayıcı distribüsyon D ve $D^{'}$ olsun. Bu durumda TM tanjant demeti $TM = D \oplus D^{'}$ ayrışımı ile verilir [38].

Teorem 2.16.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde iki tamamlayıcı distribüsyon D ve $D^{'}$ olsun. TM tanjant demetinin D ve $D^{'}$ distribüsyonlarına projeksiyon operatörlerini, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. Bu durumda D ve $D^{'}$ distribüsyonlarına göre paralel ∇ lineer konneksiyonlar her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla_X Y = r\nabla^{'}_X rY + s\nabla^{'}_X sY + rQ(X, rY) + sQ(X, sY)$$

ile verilir. Burada ∇' ve Q, sırasıyla, M manifoldu üzerinde herhangi bir lineer konneksiyon ve $(1,2)$ tipinde bir tensör alanıdır [38].

Teorem 2.16.3. *Herhangi bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde iki tamamlayıcı ve ortogonal distribüsyon D ve $D^{\perp}$ olsun. (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile gösterelim. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması için bir gerek ve yeter koşul D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının integrallenebilir ve maksimal integral manifoldlarının M ambient manifoldunda total geodezik olmasıdır [38].*

Teorem 2.16.4. *Herhangi bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde iki tamamlayıcı ve ortogonal distribüsyon D ve $D^{\perp}$ olsun. (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile gösterelim. D distribüsyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması için bir gerek ve yeter koşul $D^{\perp}$ distribüsyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır [38].*

3. ALTIN MANİFOLDLAR

Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır ve altın manifoldlar üzerinde paralellik, half paralellik, anti half paralellik, integrallenebilirlik ve geodeziklik kavramlarına yer verilmiştir. Bu kavramlar araştırılırken herhangi bir lineer konneksiyon ve buna bağlı olarak tanımlanan Schouten ve Vrănceanu konneksiyonları kullanılmıştır. Birinci ve ikinci alt bölümlerde, sırasıyla, altın yapılar ve altın Riemann manifoldlar ile ilgili bazı temel bilgilerden bahsedildi. Üçünçü alt bölümde, herhangi bir manifold üzerinde bir altın yapının doğal olarak tanımladığı iki distribüsyonun paralelliği herhangi bir lineer konneksiyonunun Levi-Civita olduğu ya da olmadığı durumlara göre incelendi ve distribüsyonların her ikisinin paralelliği için gerek ve yeter koşullar verildi. Herhangi bir altın yapıya göre paralel lineer konneksiyonlar için genel bir form saptandı. Herhangi bir altın yapının doğal iki distribüsyonunun her birinin Schouten konneksiyonuna (ya da Vrănceanu konneksiyonuna) göre half paralel olması için ayrı ayrı birer karakterizasyon elde edildi. Bunun yanısıra, her iki distribüsyonun hem Schouten konneksiyonuna hem de Vrănceanu konneksiyonuna göre daima anti half paralel olduğu kanıtlandı. Dördüncü alt bölümde, herhangi bir altın yapının ve ilgili iki distribüsyonunun integrallenebilirliği araştırıldı. Vrănceanu konneksiyonunun simetrik olması için bir koşul belirlendi. Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarından herhangi biri simetrik ise altın yapının integrallenebilir olduğu gösterildi. Ayrıca, her iki distribüsyonun integrallenebilirliği ve maksimal integral manifoldlarının total geodezikliği ile ilgili sonuçlar ortaya konuldu. Beşinci alt bölümde ise herhangi bir altın manifold üzerinde bir eğrinin Schouten konneksiyonuna (ya da Vrănceanu konneksiyonuna) göre bir geodezik olmasına denk bir ifade bulundu.

3.1 Altın Yapılar

Tanım 3.1.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde* $(1,1)$ *tipinde bir tensör alanı F olsun. Eğer her $p \in M$ noktasında $F^{n-1}(p)$, $F^{n-2}(p)$, …, $F(p)$, $I(p)$ tensörleri lineer bağımsız olacak şekilde F tensör alanı*

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 I = 0$$

cebirsel denklemini sağlıyorsa F tensör alanına bir polinom yapı denir. $Q(x)$ monik polinomu ise bir yapı polinomu olarak adlandırılır. Burada I, M manifoldu üzerindeki $(1,1)$ *tipinde özdeşlik tensör alanı göstermektedir [17].*

Tanım 3.1.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde* $(1,1)$ *tipinde bir tensör alanı P olsun. Eğer P tensör alanı*

$$P^2 = I$$

denklemini sağlıyorsa P tensör alanına M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı denir [61]. Başka bir deyişle, herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir P hemen hemen çarpım yapısı, yapı polinomu $Q(x) = x^2 - I$ ile verilen 2. dereceden bir polinom yapıdır [17].

Tanım 3.1.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde* $(1,1)$ *tipinde bir tensör alanı Φ olsun. Eğer Φ tensör alanı*

$$\Phi^2 = \Phi + I \tag{3.1.1}$$

denklemini sağlıyorsa Φ tensör alanına M manifoldu üzerinde bir altın yapı denir. Başka bir deyişle, herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısı, yapı polinomu $Q(x) = x^2 - x - I$ ile verilen 2. dereceden bir polinom yapıdır [20].

Önerme 3.1.1. *(F_n) Fibonacci dizisi olsun. Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapının kuvveti her $n \in \mathbb{Z}^+$ için*

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}I$$

şeklindedir [20].

Önerme 3.1.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir [20]:*

(a) *Φ altın yapısının öz değerleri altın oran ϕ ve $1 - \phi$ reel sayılarıdır,*

(b) *Φ altın yapısı M manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzaylar üzerinde bir izomorfizmdir,*

(c) *Φ altın yapısının tersi vardır. Eğer tersi Φ^{-1} ise $\Phi^{-1} = \Phi - I$ ile verilir ve $(\Phi^{-1})^2 = -\Phi^{-1} + I$ eşitliğini sağlar.*

Önerme 3.1.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Bu durumda Φ altın yapısının tersi bir altın yapı değildir [20].*

Önerme 3.1.4. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Bu durumda $\Psi = I - \Phi$ ile tanımlı $(1,1)$ tipinde tensör alanı bir altın yapıdır [20].*

Teorem 3.1.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir P hemen hemen çarpım yapısı*

$$\Phi_1 = \frac{I + \sqrt{5}P}{2},\ \Phi_2 = \frac{I - \sqrt{5}P}{2} \tag{3.1.2}$$

şeklinde iki tane Φ_1 ve Φ_2 altın yapılarını tanımlar. Tersine, M manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısı

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Phi - I) \, , \, P_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} (2\Phi - I) \tag{3.1.3}$$

şeklinde iki tane P_1 ve P_2 hemen hemen çarpım yapılarını tanımlar [20].

Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. M manifoldunun tanjant demeti üzerinde r ve s dönüşümlerini, sırasıyla,

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\phi - 1) I + \Phi) \tag{3.1.4}$$

ve

$$s = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi I - \Phi) \tag{3.1.5}$$

ile tanımlayalım. Burada ϕ ve $1 - \phi$ değerleri, $x^2 - x - 1 = 0$ cebirsel denkleminin kökleridir. Bu durumda

$$r + s = I, \, r^2 = r, \, s^2 = s, \, rs = 0, \, sr = 0 \tag{3.1.6}$$

eşitlikleri geçerlidir. Yani, r ve s dönüşümleri TM tanjant demetini iki tamamlayıcı kısma ayıran projeksiyon operatörlerdir. Böylece, r ve s projeksiyon operatörleri iki tane tamamlayıcı distribüsyon tanımlar. r ve s projeksiyon operatörlerine karşılık gelen distribüsyonlar, sırasıyla, R ve S olsun. O halde, R ve S distribüsyonları, sırasıyla,

$$R = \bigcup_{p \in M} R_p, \, R_p = \{X_p \in T_pM : \Phi X_p = \phi X_p\} \tag{3.1.7}$$

ve

$$S = \bigcup_{p \in M} S_p, \; S_p = \{X_p \in T_pM : \Phi X_p = (1-\phi) X_p\} \tag{3.1.8}$$

ile verilir. Yani, TM tanjant demeti $TM = R \oplus S$ ayrışımına sahiptir. Ayrıca, Φ altın yapısı

$$\Phi = \phi r + (1-\phi) s \tag{3.1.9}$$

formunda yazılabilir. Buradan ise

$$\Phi r = r\Phi = \phi r = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}} I \tag{3.1.10}$$

ve

$$\Phi s = s\Phi = (1-\phi) s = -\frac{(1-\phi)}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1}{\sqrt{5}} I \tag{3.1.11}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür [20].

Tersine, M manifoldu üzerinde iki tamamlayıcı R ve S distribüsyonları var olsun. R ve S distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. Bu durumda M manifoldu üzerinde

$$\Phi = \phi r + (1-\phi) s$$

ile tanımlı $(1,1)$ tipinde Φ tensör alanının bir altın yapı olduğu açıktır.

Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. $\overset{Sc}{\nabla}$ ve $\overset{V}{\nabla}$ dönüşümleri, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY) \tag{3.1.12}$$

ve

$$\overset{V}{\nabla}_X Y = r\left(\nabla_{rX} rY\right) + s\left(\nabla_{sX} sY\right) + r\left[sX, rY\right] + s\left[rX, sY\right] \tag{3.1.13}$$

kuralları ile tanımlayalım. $\overset{Sc}{\nabla}$ ve $\overset{V}{\nabla}$ dönüşümlerini, sırasıyla, Schouten konneksiyon ve Vrănceanu konneksiyon olarak adlandırılır [62, 63]. Ayrıca, Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarının birer lineer konneksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

3.2 Altın Riemann Manifoldlar

Tanım 3.2.1. *Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y) \tag{3.2.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa g Riemann metriğine Φ-uyumlu denir [21].

Tanım 3.2.2. *Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Eğer g Riemann metriği Φ-uyumlu ise (g, Φ) ikilisine M manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı, (M, g, Φ) üçlüsüne ise bir altın Riemann manifold denir [21].*

Önerme 3.2.1. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldunda aşağıdaki ifadeler sağlanır [20]:*

(a) *Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için* $\begin{cases} g(rX, Y) = g(X, rY) \\ g(sX, Y) = g(X, sY) \end{cases}$*, yani, r ve s projeksiyon operatörleri g-simetriktir,*

(b) *Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(rX, sY) = 0$, bir başka deyişle, R ve S distribüsyonları g-ortogonaldir.*

Bir Φ altın yapısının kovaryant türevi her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Phi) Y = \nabla_X \Phi Y - \Phi \nabla_X Y \tag{3.2.2}$$

ile tanımlanır. Eğer

$$\nabla\Phi = 0$$

ise Φ altın yapısı ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir.

Tanım 3.2.3. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. Eğer Φ altın yapısı ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise M bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olarak adlandırılır [20].*

3.3 Paralellik, Half Paralellik ve Anti Half Paralellik Kavramları

[28] numaralı yayında Lagrangian $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$-yapı manifoldunda tanımlı distribüsyonlar için half paralellik ve anti half paralellik kavramları verildi. Şimdi, bir (M, Φ) altın manifoldunun R ve S distribüsyonlarına benzer tanımları uygulayalım.

Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\Delta\Phi)(X, Y) = \Phi\nabla_X Y - \Phi\nabla_Y X - \nabla_{\Phi X} Y + \nabla_Y \Phi X \tag{3.3.1}$$

diyelim. O zaman aşağıdaki tanımları yapabiliriz.

Tanım 3.3.1. *(M, Φ) herhangi bir altın manifold olsun. $TM = R \oplus S$ olacak şekilde R ve S distribüsyonlarının mevcut olduğunu varsayalım. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(R)$ için $(\Delta\Phi)(X, Y) \in \Gamma(R)$ ise R distribüsyonuna ∇ lineer konneksiyonuna göre half paralel denir.*

Tanım 3.3.2. *(M, Φ) herhangi bir altın manifold olsun. $TM = R \oplus S$ olacak şekilde R ve S distribüsyonlarının mevcut olduğunu varsayalım. Eğer her $X \in$*

$\Gamma(TM)$ *ve* $Y \in \Gamma(R)$ *için* $(\Delta\Phi)(X,Y) \in \Gamma(S)$ *ise* S *distribüsyonuna* ∇ *lineer konneksiyonuna göre anti half paralel denir.*

Aynı şekilde, S distribüsyonu için half paralellik ve anti half paralellik tanımlanabilir.

Önerme 3.3.1. (M,Φ) *herhangi bir altın manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) R *ve* S *distribüsyonlarının her ikisi* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paralleldir,*

(b) Φ *altın yapısı* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(c) r *ve* s *projeksiyon operatörlerinin her ikisi* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir.*

İspat. $r+s=I$ gerçeği kullanılırsa, her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Phi)Y &= \nabla_X\Phi Y - \Phi\nabla_X Y\\ &= \nabla_X\Phi rY + \nabla_X\Phi sY - \Phi\nabla_X rY - \Phi\nabla_X sY\end{aligned}$$

olur. R ve S distribüsyonlarının her ikisinin de ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olduğunu varsayalım. Bu durumda ∇ bir lineer konneksiyon olduğu için (3.1.9) eşitliğinden açık bir şekilde $\nabla\Phi = 0$ olduğu görülür. Bu ise (a)$\Rightarrow$(b) önermesinin doğru olduğunu gösterir. $\nabla I = 0$ olduğu dikkate alınırsa, (3.1.4) ve (3.1.5) eşitliklerinden

$$\nabla r = -\nabla s = \frac{1}{\sqrt{5}}\nabla\Phi$$

olduğu anlaşılır. Eğer Φ altın yapısı ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise

$$\nabla r = \nabla s = 0$$

elde edilir. Yani, (b)⇒(c) önermesi geçerlidir. Eğer r ve s projeksiyon operatörleri ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X rY = r\nabla_X Y \in \Gamma(R) \tag{3.3.2}$$

ve

$$\nabla_X sY = s\nabla_X Y \in \Gamma(S) \tag{3.3.3}$$

ifadeleri sağlanır. Yani, (3.3.2) ve (3.3.3) ifadeleri, sırasıyla, R ve S distribüsyonlarının ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olduğunu belirtir. Böylece, (c)⇒(a) önermesinin sağlandığı gösterilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 3.3.2. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *R distribüsyonu ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir,*

(b) *S distribüsyonu ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir.*

İspat. $\nabla g = 0$ olması nedeniyle her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_X rY, sZ) = -g(rY, \nabla_X sZ) \tag{3.3.4}$$

elde edilir. Bu ise (a) ile (b) ifadelerinin denk olduğunu gösterir. □

Teorem 3.3.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Bu durumda $\nabla\Phi = 0$ olacak şekildeki ∇ lineer konneksiyonları her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla_X Y = \Phi\nabla'_X \Phi Y - \nabla'_X \Phi Y + \Phi Q(X, \Phi Y) - Q(X, \Phi Y)$$

veya

$$\nabla_X Y = r\nabla'_X rY + s\nabla'_X sY + rQ(X, rY) + sQ(X, sY)$$

ile verilir. Burada ∇' ve Q, sırasıyla, M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ve $(1, 2)$ tipinde bir tensör alanıdır.

İspat. M manifoldu üzerinde bir $\nabla' : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümünü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla'(X,Y) = \nabla'_X Y = \nabla_X Y - Q(X,Y) \tag{3.3.5}$$

kuralı ile tanımlayalım. Bu durumda ∇ dönüşümü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}\nabla'_{X+Y} Z &= \nabla_{X+Y} Z - Q(X+Y, Z)\\ &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z - Q(X,Z) - Q(Y,Z)\\ &= \nabla_X Z - Q(X,Z) + \nabla_Y Z - Q(Y,Z)\\ &= \nabla'_X Z + \nabla'_Y Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla'_X (Y+Z) &= \nabla_X (Y+Z) - Q(X, Y+Z)\\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z - Q(X,Y) - Q(X,Z)\\ &= \nabla_X Y - Q(X,Y) + \nabla_X Z - Q(X,Z)\\ &= \nabla'_X Y + \nabla'_X Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla'_{fX} Y &= \nabla_{fX} Y - Q(fX, Y)\\ &= f\nabla_X Y - fQ(X,Y)\\ &= f\nabla'_X Y\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla'_X fY &= \nabla_X fY - Q(X, fY)\\ &= X(f)Y + f\nabla_X Y - fQ(X,Y)\\ &= X(f)Y + f(\nabla_X Y - Q(X,Y))\\ &= X(f)Y + f\nabla'_X Y\end{aligned}$$

koşullarını sağlar. O zaman ∇ bir lineer konneksiyondur. Eğer Φ altın yapısı paralel ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Phi) Y = \nabla_X \Phi Y - \Phi \nabla_X Y = 0$$

veya

$$\nabla_X \Phi Y = \Phi \nabla_X Y \tag{3.3.6}$$

eşitliği geçerlidir. O halde (3.3.6) eşitliğine Φ altın yapısının tersi $\Phi^{-1} = \Phi - I$ uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \Phi^{-1} \nabla_X \Phi Y \\
&= (\Phi - I) \nabla_X \Phi Y \\
&= \Phi \nabla_X \Phi Y - \nabla_X \Phi Y
\end{aligned}$$

olur. Böylece, (3.3.5) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \Phi \nabla_X \Phi Y - \nabla_X \Phi Y \\
&= \Phi \left(\nabla'_X \Phi Y + Q(X, \Phi Y) \right) - \left(\nabla'_X \Phi Y + Q(X, \Phi Y) \right) \\
&= \Phi \nabla'_X \Phi Y + \Phi Q(X, \Phi Y) - \nabla'_X \Phi Y - Q(X, \Phi Y) \\
&= \Phi \nabla'_X \Phi Y - \nabla'_X \Phi Y + \Phi Q(X, \Phi Y) - Q(X, \Phi Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, Φ altın yapısına göre paralel ∇ lineer konneksiyonların hangi formda olduğunu r ve s projeksiyon operatörleri cinsinden ifade edelim. Φ altın yapısının paralel olduğunu varsayalım. Bu durumda Önerme 3.3.1'den R ve S distribüsyonları ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir. Bu yüzden, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X rY \in \Gamma(R) \text{ veya } s \nabla_X rY = 0 \tag{3.3.7}$$

ve

$$\nabla_X sY \in \Gamma(S) \text{ veya } r \nabla_X sY = 0 \tag{3.3.8}$$

olur. (3.3.7) ve (3.3.8) ifadelerinin her ikisi de her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r\nabla_X sY + s\nabla_X rY = 0$$

eşitliği ile verilebilir. Buradan ise $r + s = I$ olduğu dikkate alınırsa, (3.3.5) eşitliği yardımıyla her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
0 &= r\nabla_X sY + s\nabla_X rY \\
&= r\left(\nabla'_X sY + Q(X, sY)\right) + s\left(\nabla'_X rY + Q(X, rY)\right) \\
&= r\left(\nabla'_X Y - \nabla'_X rY + Q(X, Y) - Q(X, rY)\right) \\
&+ s\left(\nabla'_X Y - \nabla'_X sY + Q(X, Y) - Q(X, sY)\right) \\
&= r\left(\nabla'_X Y + Q(X, Y) - \nabla'_X rY - Q(X, rY)\right) \\
&+ s\left(\nabla'_X Y + Q(X, Y) - \nabla'_X sY - Q(X, sY)\right) \\
&= r\left(\nabla_X Y - \nabla'_X rY - Q(X, rY)\right) + s\left(\nabla_X Y - \nabla'_X sY - Q(X, sY)\right) \\
&= r\nabla_X Y - r\nabla'_X rY - rQ(X, rY) + s\nabla_X Y - s\nabla'_X sY - sQ(X, sY) \\
&= r\nabla_X Y + s\nabla_X Y - r\nabla'_X rY - s\nabla'_X sY - rQ(X, rY) - sQ(X, sY) \\
&= \nabla_X Y - r\nabla'_X rY - s\nabla'_X sY - rQ(X, rY) - sQ(X, sY)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X Y = r\nabla'_X rY + s\nabla'_X sY + rQ(X, rY) + sQ(X, sY)$$

olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, ispat tamamlanış olur. □

Önerme 3.3.3. *(M, Φ) herhangi bir altın manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir [20]:*

(a) *R ve S distribüsyonları Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paraleldir,*

(b) *r ve s projeksiyon operatörleri Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paraleldir,*

(c) *Φ altın yapısı Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.*

İspat. $Y \in \Gamma(R)$ olsun. Bu durumda $sY = 0$ ve $rY = Y$ olur. (3.1.12) ve (3.1.13) eşitliklerinden, sırasıyla, her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY) = s(\nabla_X sY) \in \Gamma(R) \tag{3.3.9}$$

ve

$$\begin{aligned}\overset{V}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY] \\ &= r(\nabla_{rX} rY) + r[sX, rY] \in \Gamma(R)\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Böylece, (3.3.9) ve (3.3.10) eşitlikleri R distribüsyonunun Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğunu ifade eder. Benzer şekilde S distribüsyonunun Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğu gösterilebilir. Böylece, (a) ifadesi ispatlanmış olur. (3.1.12) ve (3.1.13) eşitlikleri dikkate alınırsa, Schouten ve Vrănceanu konneksiyonların kovaryant türevlerinin, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\left(\overset{Sc}{\nabla}_X r\right) Y &= \overset{Sc}{\nabla}_X rY - r\left(\overset{Sc}{\nabla}_X Y\right) \\ &= r\left(\nabla_X r^2 Y\right) - r^2(\nabla_X rY) \\ &= r(\nabla_X rY) - r(\nabla_X rY) \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\overset{V}{\nabla}_X r\right) Y &= \overset{V}{\nabla}_X rY - r\left(\overset{V}{\nabla}_X Y\right) \\ &= r\left(\nabla_{rX} r^2 Y\right) + r\left[sX, r^2 Y\right] - r^2(\nabla_{rX} rY) - r^2[sX, rY] \\ &= r(\nabla_{rX} rY) + r[sX, rY] - r(\nabla_{rX} rY) - r[sX, rY] \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

olduğu bulunur. Yani, (3.3.11) ve (3.3.12) eşitlikleri r projeksiyon operatörünün Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğunu belirtir. Benzer şekilde s projeksiyon operatörünün Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğunu gösterilebilir. O halde (b) ifadesinin geçerli olduğu elde edilir. (b) ifadesi yardımıyla (3.1.9) eşitliğinden Φ altın yapısının Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralel olduğu açıktır. Bu ise (c) ifadesinin doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.3.2. (M, Φ) *herhangi bir altın manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *R ve S distribüsyonlarının her ikisi ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(b) *$\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonu ile ∇ lineer konneksiyonu birbirine eşittir.*

İspat. R ve S distribüsyonlarının ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise direkt bir hesaplama ile her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\overset{Sc}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)\\ &= \nabla_X rY + \nabla_X sY\\ &= \nabla_X Y\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise (a)⇒(b) önermesinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi, $\overset{Sc}{\nabla} = \nabla$ olduğunu varsayalım. Schouten konneksiyonunun (3.1.12) eşitliğinde verilen ifadesi yardımıyla her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X rY = \overset{Sc}{\nabla}_X rY = r\left(\nabla_X r^2 Y\right) + s(\nabla_X srY) = r\nabla_X rY \in \Gamma(R) \qquad (3.3.13)$$

ve

$$\nabla_X sY = \overset{Sc}{\nabla}_X sY = r(\nabla_X rsY) + s\left(\nabla_X s^2 Y\right) = s(\nabla_X sY) \in \Gamma(S) \qquad (3.3.14)$$

elde edilir. Yani, (3.3.13) ve (3.3.14) ifadelerinden, sırasıyla, R ve S distribüsyonlarının ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olduğunu anlaşılır. O halde (b)⇒(a) önermesi geçerlidir. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

Sonuç 3.3.1. (M, Φ) *herhangi bir altın manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) R *ve* S *distribüsyonlarının her ikisi* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(b) Φ *altın yapısı* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(c) r *ve* s *projeksiyon operatörlerinin her ikisi* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(d) $\overset{Sc}{\nabla}$ *Schouten konneksiyonu ile* ∇ *lineer konneksiyonu birbirine eşittir.*

İspat. Önerme 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 birleştirilirse, ispat elde edilir. □

Teorem 3.3.3. *Herhangi bir* (M, g, Φ) *altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon* ∇ *olsun.* $\overset{Sc}{\nabla}$ *Schouten konneksiyonunun* ∇ *Levi-Civita konneksiyonuna eşit olması için bir gerek ve yeter koşul* R *ve* S *distribüsyonlarından herhangi birisinin* ∇ *Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.*

İspat. Önerme 3.3.2, Teorem 3.3.2'ye uygulanırsa, ispat gösterilmiş olur. □

Teorem 3.3.4. (M, Φ) *herhangi bir altın manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) $\overset{V}{\nabla}$ *Vrănceanu konneksiyonu* ∇ *lineer konneksiyonuna eşit ise o zaman* R *ve* S *distribüsyonlarının her ikisi de* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paraleldir,*

(b) ∇ *lineer konneksiyonunun simetrik olduğunu varsayalım. Eğer* R *ve* S *distribüsyonları* ∇ *lineer konneksiyonuna göre paralel ise o zaman* $\overset{V}{\nabla}$ *Vrănceanu konneksiyonu ile* ∇ *lineer konneksiyonu birbirine eşittir.*

İspat. $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonu ile ∇ lineer konneksiyonu birbirine eşit olduğunu varsayalım. Vrănceanu konneksiyonunun (3.1.13) eşitliğinde verilen ifadesi kullanılırsa, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X rY = \overset{V}{\nabla}_X rY = r(\nabla_{rX} rY) + r[sX, rY] \in \Gamma(R) \tag{3.3.15}$$

ve

$$\nabla_X sY = \overset{V}{\nabla}_X sY = s\left(\nabla_{sX} sY\right) + s\left[rX, sY\right] \in \Gamma\left(S\right) \tag{3.3.16}$$

olduğu görülür. O zaman (3.3.15) ve (3.3.16) ifadeleri, sırasıyla, R ve S distribüsyonlarının ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olduğunu belirtir. Yani, (a) ifadesi gösterilmiş olur. Eğer ∇ lineer konneksiyonu simetrik ise Vrănceanu konneksiyonunun (3.1.13) eşitliğinde verilen ifadesi her $X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overset{V}{\nabla}_X Y &= r\left(\nabla_{rX} rY\right) + s\left(\nabla_{sX} sY\right) + r\left[sX, rY\right] + s\left[rX, sY\right] \qquad (3.3.17)\\
&= r\left(\nabla_{rX} rY\right) + s\left(\nabla_{sX} sY\right) + r\left(\nabla_{sX} rY\right)\\
&- r\left(\nabla_{rY} sX\right) + s\left(\nabla_{rX} sY\right) - s\left(\nabla_{sY} rX\right)\\
&= r\left(\nabla_{rX+sX} rY\right) + s\left(\nabla_{rX+sX} sY\right) - r\left(\nabla_{rY} sX\right) - s\left(\nabla_{sY} rX\right)\\
&= r\left(\nabla_X rY\right) + s\left(\nabla_X sY\right) - r\left(\nabla_{rY} sX\right) - s\left(\nabla_{sY} rX\right)
\end{aligned}$$

halini alır. Ayrıca, eğer R ve S distribüsyonları ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise bu durumda (3.3.17) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\overset{V}{\nabla}_X Y &= r\left(\nabla_X rY\right) + s\left(\nabla_X sY\right) - r\left(\nabla_{rY} sX\right) - s\left(\nabla_{sY} rX\right)\\
&= \nabla_X rY + \nabla_X sY\\
&= \nabla_X Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (b) ifadesinin ispatıdır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.3.5. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna eşit olması için bir gerek ve yeter koşul R ve S distribüsyonlarından herhangi birisinin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.*

İspat. Önerme 3.3.2 ve Teorem 3.3.4'ten ispat açıktır. □

Sonuç 3.3.2. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *R ve S distribüsyonlarından herhangi birisi ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir,*

(b) *Hem $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonu hem de $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonu ∇ Levi-Civita konneksiyonuna eşittir.*

İspat. Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.5 yardımıyla ispat kolayca görülebilir. $\square$

Teorem 3.3.6. *(M, Φ) herhangi bir altın manifold olsun. R distribüsyonunun $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre half paralel olması için bir gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla_X sY \in \Gamma(R) \tag{3.3.18}$$

ifadesinin geçerli olmasıdır.

İspat. (3.3.1) eşitliği dikkate alınırsa, her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$s\left(\overset{Sc}{\Delta}\Phi\right)(X,Y) = s\Phi\overset{Sc}{\nabla}_X Y - s\Phi\overset{Sc}{\nabla}_Y X - s\overset{Sc}{\nabla}_{\Phi X} Y + s\overset{Sc}{\nabla}_Y \Phi X \tag{3.3.19}$$

olur. (3.1.7) ve (3.1.11) ifadeleri (3.3.19) eşitliğine uygulanırsa,

$$\begin{aligned} s\left(\overset{Sc}{\Delta}\Phi\right)(X,Y) &= s\Phi\overset{Sc}{\nabla}_X Y - s\Phi\overset{Sc}{\nabla}_Y X - s\overset{Sc}{\nabla}_{\Phi X} Y + s\overset{Sc}{\nabla}_Y \Phi X \\ &= (1-\phi)\, s\overset{Sc}{\nabla}_X Y - (1-\phi)\, s\overset{Sc}{\nabla}_Y X - \phi s\overset{Sc}{\nabla}_X Y + \phi s\overset{Sc}{\nabla}_Y X \\ &= (1-2\phi)\, s\left(\overset{Sc}{\nabla}_X Y - \overset{Sc}{\nabla}_Y X\right) \\ &= -\sqrt{5}s\left(\nabla_X sY\right) \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. Bu ise R distribüsyonunun $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre half paralel olma koşulunun her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X sY \in \Gamma(R)$$

ifadesine denk olduğunu ifade eder. $\square$

Teorem 3.3.7. (M,Φ) *herhangi bir altın manifold olsun.* S *distribüsyonunun* $\overset{Sc}{\nabla}$ *Schouten konneksiyonuna göre half paralel olması için bir gerek ve yeter koşul her* $X \in \Gamma(S)$ *ve* $Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\nabla_X rY \in \Gamma(S) \tag{3.3.21}$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

İspat. İspat, Teorem 3.3.6'nınkine benzer şekilde gösterilebilir. □

Teorem 3.3.8. (M,Φ) *herhangi bir altın manifold olsun.* R *distribüsyonunun* $\overset{V}{\nabla}$ *Vrănceanu konneksiyonuna göre half paralel olması için bir gerek ve yeter koşul her* $X \in \Gamma(R)$ *ve* $Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$[X, sY] \in \Gamma(R) \tag{3.3.22}$$

ifadesinin geçerli olmasıdır.

İspat. (3.3.1) eşitliği dikkate alınırsa, her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$s\left(\overset{V}{\Delta}\Phi\right)(X,Y) = s\Phi\overset{V}{\nabla}_X Y - s\Phi\overset{V}{\nabla}_Y X - s\overset{V}{\nabla}_{\Phi X} Y + s\overset{V}{\nabla}_Y \Phi X \tag{3.3.23}$$

olur. Burada (3.1.7) ve (3.1.11) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} s\left(\overset{V}{\Delta}\Phi\right)(X,Y) &= s\Phi\overset{V}{\nabla}_X Y - s\Phi\overset{V}{\nabla}_Y X - s\overset{V}{\nabla}_{\Phi X} Y + s\overset{V}{\nabla}_Y \Phi X \\ &= (1-\phi)\, s\overset{V}{\nabla}_X Y - (1-\phi)\, s\overset{V}{\nabla}_Y X - \phi s\overset{V}{\nabla}_X Y + \phi s\overset{V}{\nabla}_Y X \\ &= (1-2\phi)\, s\left(\overset{V}{\nabla}_X Y - \overset{V}{\nabla}_Y X\right) \\ &= -\sqrt{5}s\,[X, sY] \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

elde edilir. Böylece, (3.3.24) eşitliğinden R distribüsyonunun $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonuna göre half paralel olması için bir gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, sY] \in \Gamma(R)$$

ifadesinin sağlanmasıdır. □

Teorem 3.3.9. *(M,Φ) herhangi bir altın manifold olsun. S distribüsyonunun $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonuna göre half paralel olması için bir gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(S)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$[X, rY] \in \Gamma(S) \tag{3.3.25}$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

İspat. İspat, Teorem 3.3.8'inkine benzerdir. □

Önerme 3.3.4. *Herhangi bir (M,Φ) altın manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. R ve S distribüsyonları ∇ lineer konneksiyonuna göre anti half paraleldir.*

İspat. (3.3.1) eşitliğinden her $X \in \Gamma(R)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$

$$r(\Delta\Phi)(X,Y) = r\Phi\nabla_X Y - r\Phi\nabla_Y X - r\nabla_{\Phi X} Y + r\nabla_Y \Phi X \tag{3.3.26}$$

olur. ∇ bir lineer konneksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} r(\Delta\Phi)(X,Y) &= \phi r\nabla_X Y - \phi r\nabla_Y X - r\nabla_{\phi X} Y + r\nabla_Y \phi X \\ &= \phi r\nabla_X Y - \phi r\nabla_Y X - \phi r\nabla_X Y + \phi r\nabla_Y X \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

elde edilir. O halde (3.3.27) eşitliği R distribüsyonunun ∇ lineer konneksiyonuna göre half paralel olduğunu belirtir. Benzer şekilde, S distribüsyonunun ∇ lineer konneksiyonuna göre half paralel olduğunu gösterebilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

∇ herhangi bir lineer konneksiyon olduğu için Önerme 3.3.4, R ve S distribüsyonlarının Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre anti half paralel olduğunu ifade eder.

3.4 İntegrallenebilirlik Kavramı

Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısının Nijenhuis tensörünü N_Φ ile gösterelim. Bilindiği gibi, Φ altın yapısı $\Phi^2 = \Phi + I$ denklemini sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır. O zaman Φ altın yapısının Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_\Phi(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi[X,Y] + [X,Y]$$

ile verilir. Ayrıca, N_Φ Nijenhuis tensörünün

$$N_{\lambda\Phi} = \lambda^2 N_\Phi \tag{3.4.1}$$

ve

$$N_{\Phi+I} = N_{\Phi^2} = N_\Phi = N_{\Phi^{-1}} \tag{3.4.2}$$

temel özelliklere sahip olduğu basit bir hesaplama ile gösterilebilir. Burada λ bir reel sabittir.

Önerme 3.4.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapının Nijenhuis tensörü N_Φ olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_\Phi(\Phi X, Y) = N_\Phi(X, \Phi Y)$$

eşitliği sağlanır. Bir diğer deyişle, Φ altın yapısı N_Φ-simetriktir. Buna ek olarak, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{cases} s[rX, rY] = \frac{1}{5} s N_\Phi(rX, rY) \\ r[sX, sY] = \frac{1}{5} r N_\Phi(sX, sY) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir [20].

Önerme 3.4.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Eğer Φ altın yapısı integrallenebilir ise R ve S distribüsyonları integrallenebilirdir [20].*

Önerme 3.4.3. *Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda Φ altın yapısının N_Φ Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_\Phi(X,Y) = (\nabla_{\Phi X}\Phi)Y - (\nabla_{\Phi Y}\Phi)X - \Phi(\nabla_X\Phi)Y + \Phi(\nabla_Y\Phi)X$$

ile verilir [20].

Önerme 3.4.4. *(M, g, Φ) herhangi bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olsun. Bu durumda Φ altın yapısı integrallenebilirdir [20].*

Lemma 3.4.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_r(X,Y) = N_s(X,Y), \tag{3.4.3}$$

$$N_r(X,Y) = -\frac{1}{2}[r,s]_{FN}(X,Y), \tag{3.4.4}$$

$$N_r(X,Y) = \frac{1}{5}N_\Phi(X,Y), \tag{3.4.5}$$

$$N_r(X,Y) = s[rX, rY] + r[sX, sY] \tag{3.4.6}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Öncelikle (2.12.1) eşitliğinden r ve s projeksiyon operatörlerinin Nijenhuis tensörlerinin, sırasıyla,

$$N_r = \frac{1}{2}[r,r]_{FN}$$

ve

$$N_s = \frac{1}{2}[s,s]_{FN}$$

ile verildiğini hatırlayalım. $r+s=I$ olduğu dikkate alınırsa, Frölicher-Nijenhuis braketinin bilineer olması nedeniyle

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{1}{2}[r,r]_{FN} \\ &= \frac{1}{2}[I-s,I-s]_{FN} \\ &= \frac{1}{2}[I-s,I]_{FN} - \frac{1}{2}[I-s,s]_{FN} \\ &= \frac{1}{2}[I,I]_{FN} - \frac{1}{2}[s,I]_{FN} - \frac{1}{2}[I,s]_{FN} + \frac{1}{2}[s,s]_{FN} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise (2.12.2) eşitliğinden $N_r = \frac{1}{2}[s,s]_{FN}$ olur. Böylece, (3.4.3) eşitliğinin geçerli olduğunu gösterilir. $r+s=I$ ve Frölicher-Nijenhuis braketinin bilineer olduğu dikkate alınırsa, (2.12.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[r,s]_{FN} &= \frac{1}{2}[r,I-r]_{FN} \\ &= \frac{1}{2}[r,I]_{FN} - \frac{1}{2}[r,r]_{FN} \\ &= -\frac{1}{2}[r,r]_{FN} \\ &= -N_r \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

elde edilir. Bu ise (3.4.3) eşitliğini doğrular. Φ altın yapısının r ve s projeksiyon operatörlerine bağlı olarak $\Phi = \phi r + (1-\phi)s$ formunda olduğunu hatırlayalım. O zaman (2.12.3) eşitliği yardımıyla Φ altın yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_\Phi = N_{\phi r} + N_{(1-\phi)s} + [\phi r,(1-\phi)s]_{FN}$$

ile verilir. Basit bir hesaplama ile (3.4.1) ve (3.4.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} N_\Phi &= \phi^2 N_r + (1-\phi)^2 N_s + \phi(1-\phi)[r,s]_{FN} \\ &= \phi^2 N_r + (1-\phi)^2 N_r - 2\phi(1-\phi)N_r \\ &= 5N_r \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (3.4.5) eşitliği gösterilmiş olur. Bilindiği gibi, r projeksiyon operatörün Nijenhuis tensörü aynı zamanda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_r(X,Y) = [rX,rY] - r[rX,Y] - r[X,rY] + r[X,Y] \tag{3.4.8}$$

ile verilir. $r+s=I$ olması nedeniyle (3.4.8) eşitliği

$$\begin{aligned} N_r(X,Y) &= [rX,rY]+r^2[X,Y]-r[rX,Y]-r[X,rY] \\ &= (r+s)[rX,rY]+r[X,Y] \\ &- r[(I-s)X,Y]-r[X,rY] \\ &= r[rX,rY]+s[rX,rY]+r[X,Y] \\ &- r[X,Y]+r[sX,Y]-r[X,rY] \\ &= r[rX,rY]+s[rX,rY]+r[sX,Y]-r[X,rY] \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

halini alır. (3.4.9) ifadesinde tekrar $r+s=I$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_r(X,Y) &= r[rX,rY]+s[rX,rY]+r[sX,Y]-r[X,rY] \\ &= r[rX,rY]+s[rX,rY] \\ &+ r[sX,(r+s)Y]-r[(r+s)X,rY] \\ &= r[rX,rY]+s[rX,rY]+r[sX,rY]+r[sX,sY] \\ &- r[rX,rY]-r[sX,rY] \\ &= s[rX,rY]+r[sX,sY] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, (3.4.6) eşitliği bulunur. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 3.4.1, Φ altın yapısı ile R ve S distribüsyonlarının integrallenebilirliği arasında yakın bir ilişki kurmamızı sağlar. Bu nedenle, aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.4.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olmasıdır.*

İspat. (3.4.5) ve (3.4.6) eşitliklerinden her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\frac{1}{5}N_\Phi(X,Y)=s[rX,rY]+r[sX,sY] \tag{3.4.10}$$

olur. İyi bilindiği gibi, R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olması için birer gerek ve yeter koşul, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $s[rX, rY] = 0$ ve $r[sX, sY] = 0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır. Ayrıca, $N_\Phi = 0$ ise Φ altın yapısının integrallenebilir olduğunu hatırlayalım. Böylece, (3.4.10) eşitliğinin bir sonucu olarak ispat açıktır. □

M. C. Crâşmăreanu ve C. E. Hreţcanu, Teorem 3.4.1'in gerekliliğini bir önerme olarak ispatlamışlardı [20]. Biz buna ek olarak, R ve S distribüsyonlarının her ikisi de integrallenebilirse, Φ altın yapısının integrallenebilir olduğunu gösterdik.

Şimdi, Lemma 3.4.1 yardımıyla Φ altın yapısının integrallenebilirliği ile ilgili başka bir teorem verelim.

Teorem 3.4.2. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir Φ altın yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul R ve S distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörlerin Frölicher-Nijenhuis braket çarpımının sıfır olmasıdır.*

İspat. (3.4.4) ve (3.4.5) eşitlikleri birleştirilirse istenen ispat elde edilir. □

Önerme 3.4.5. *Herhangi bir (M, Φ) altın manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. ∇ lineer konneksiyonu simetrik ve Φ altın yapısının integrallenebilir ise o zaman $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonu simetriktir.*

İspat. $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonunun torsiyon tensörünü $\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)$ ile gösterelim. O zaman $\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)$ torsiyon tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X, Y) = {} & r\left(\nabla_{rX} rY\right) + s\left(\nabla_{sX} sY\right) + r[sX, rY] \\ & + s[rX, sY] - r\left(\nabla_{rY} rX\right) - s\left(\nabla_{sY} sX\right) \\ & - r[sY, rX] - s[rY, sX] - [X, Y]\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

ile verilir. r projeksiyon operatörü (3.4.11) eşitliğinin sol tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} r\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) &= r^2\left(\nabla_{rX}rY\right)+rs\left(\nabla_{sX}sY\right)+r^2\left[sX,rY\right] \\ &+rs\left[rX,sY\right]-r^2\left(\nabla_{rY}rX\right)-rs\left(\nabla_{sY}sX\right) \\ &-r^2\left[sY,rX\right]-rs\left[rY,sX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left(\nabla_{rX}rY\right)+r\left[sX,rY\right]-r\left(\nabla_{rY}rX\right) \\ &-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left(\nabla_{rX}rY-\nabla_{rY}rX\right)+r\left[sX,rY\right] \\ &-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

elde edilir. ∇ lineer konneksiyonu simetrik olması nedeniyle (3.4.12) eşitliği

$$\begin{aligned} r\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) &= r\left(\nabla_{rX}rY-\nabla_{rY}rX\right)+r\left[sX,rY\right]-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left[rX,rY\right]+r\left[sX,rY\right]-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \end{aligned}$$

halini alır. $[.,.]$ Lie braketinin bilineer ve anti-komütatif olma özellikleri dikkate alınırsa, (3.1.6) ifadesindeki bağıntılardan

$$\begin{aligned} r\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) &= r\left[rX,rY\right]+r\left[sX,rY\right]-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left[rX+sX,rY\right]-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left[X,rY\right]-r\left[sY,rX\right]-r\left[X,Y\right] \\ &=r\left[X,rY-Y\right]-r\left[sY,rX\right] \\ &=-r\left[X,sY\right]-r\left[sY,rX\right]=r\left[sY,X\right]-r\left[sY,rX\right] \\ &=r\left[sY,X-rX\right] \\ &=r\left[sY,sX\right] \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$s\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y)=s\left[rY,rX\right] \tag{3.4.14}$$

olduğu bulunabilir. Φ altın yapısının integrallenebilir olduğu dikkate alınırsa, Teorem 3.4.1 sayesinde R ve S distribüsyonları integrallenebilirdir. Yani, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r[sY, sX] = s[rY, rX] = 0$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman (3.4.13) ve (3.4.14) eşitliklerinden

$$r\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) = s\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) = 0 \tag{3.4.15}$$

elde edilir. Böylece,

$$\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) = r\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) + s\tau\left(\overset{V}{\nabla}\right)(X,Y) = 0$$

olur. Bu ise $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonunun simetrik olduğunu belirtir. □

Teorem 3.4.3. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir reel manifoldu üzerinde bir altın yapı Φ olsun. Schouten ve Vrănceanu konneksiyonlarından herhangi biri simetrik ise o zaman Φ altın yapısı integrallenebilirdir.*

İspat. Schouten konneksiyonu simetrik ise o zaman her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y - \overset{Sc}{\nabla}_Y X = [X,Y] \tag{3.4.16}$$

olur. (3.4.16) eşitliğinde X ve Y vektör alanları yerine, sırasıyla, rX ve rY yazılırsa,

$$s[rX, rY] = s\overset{Sc}{\nabla}_{rX} rY - s\overset{Sc}{\nabla}_{rY} rX.$$

elde edilir. R distribüsyonunun Schouten konneksiyonuna göre paralel olduğu dikkate alınırsa, Önerme 3.3.3'ün (a) ifadesinden

$$s[rX, rY] = 0 \tag{3.4.17}$$

olduğu bulunur. Benzer şekilde, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r[sX, sY] = 0 \tag{3.4.18}$$

olduğu gösterilebilir. O zaman (3.4.17) ve (3.4.18) eşitlikleri R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olduğu gösterir. Böylece, Teorem 3.4.1'den Φ altın yapısı integrallenebilirdir. Benzer bir düşünce ile Vrănceanu konneksiyonu simetrik ise Φ altın yapısının integrallenebilir olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.4.4. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna eşit olması için bir gerek ve yeter koşul R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir ve bu distribüsyonların maksimal integral manifoldlarının M manifoldunda total geodezik olmasıdır.*

İspat. $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonu ile ∇ Levi-Civita konneksiyonunun birbirine eşit olduğunu varsayalım. ∇ Levi-Civita konneksiyonu simetrik olması nedeniyle, Önerme 3.3.3'ün (a) ifadesinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[rX, rY] = \nabla_{rX} rY - \nabla_{rY} rX = \overset{Sc}{\nabla}_{rX} rY - \overset{Sc}{\nabla}_{rY} rX \in \Gamma(R) \tag{3.4.19}$$

ve

$$[sX, sY] = \nabla_{sX} sY - \nabla_{sY} sX = \overset{Sc}{\nabla}_{sX} sY - \overset{Sc}{\nabla}_{sY} sX \in \Gamma(S) \tag{3.4.20}$$

elde edilir. O zaman (3.4.19) ve (3.4.20) ifadelerinden, sırasıyla, R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olduğunu anlaşılır. M^R, R distribüsyonunun bir maksimal integral manifoldu olsun. R distribüsyonunun $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre daima paralel olduğu dikkate alınırsa, M^R maksimal integral manifoldunun tanımından her $X, Y \in \Gamma\left(M^R\right)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y \in \Gamma\left(M^R\right) \tag{3.4.21}$$

elde edillir. Diğer taraftan, Gauss formülünden her $X, Y \in \Gamma\left(M^R\right)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y = \nabla^R_X Y + h^R(X, Y) \tag{3.4.22}$$

olur. Burada ∇^R, M^R maksimal integral manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu; h^R, M^R maksimal integral manifoldunun M manifoldundaki ikinci temel formu göstermektedir ve her $X, Y \in \Gamma\left(M^R\right)$ için $h^R(X,Y) \in \Gamma(S)$ ifadesi geçerlidir. O zaman (3.4.21) ve (3.4.22) ifadeleri birleştirilirse,

$$h^R = 0$$

elde edilir. Bu ise M^R maksimal integral manifoldunun M manifoldunda total geodezik olduğunu ifade eder. Benzer şekilde, S distribüsyonunun herhangi bir maksimal integral manifoldunun M manifoldunda total geodezik olduğu gösterilebilir. Tersine, R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir ve bu distribüsyonların maksimal integral manifoldlarının M manifoldunda total geodezik olduğunu varsayalım. Gauss formülü sayesinde her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_{rX} rY \in \Gamma(R) \tag{3.4.23}$$

ve

$$\nabla_{sX} sY \in \Gamma(S) \tag{3.4.24}$$

elde edilir. g Riemann metriğinin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması nedeniyle (3.4.23) ve (3.4.24) ifadelerinden, sırasıyla, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_X rY, sZ) = g(\nabla_{sX} rY, sZ) = -g(rY, \nabla_{sX} sZ) = 0 \tag{3.4.25}$$

ve

$$g(\nabla_X sY, rZ) = g(\nabla_{rX} sY, rZ) = -g(sY, \nabla_{rX} rZ) = 0 \tag{3.4.26}$$

olduğu anlaşılır. O zaman (3.4.25) ve (3.4.26) eşitlikleri, sırasıyla, R ve S distribüsyonlarının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olduğunu ifade eder. Böylece, Teorem 3.3.2'den,

$$\overset{Sc}{\nabla} = \nabla$$

elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.4.5. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonu ile ∇ Levi-Civita konneksiyonunun birbirine eşit olması için bir gerek ve yeter koşul R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir ve bu distribüsyonların maksimal integral manifoldlarının M manifoldunda total geodezik olmasıdır.*

İspat. İspat, Teorem 3.4.4'ünkine benzer bir şekilde yapılabilir. □

Sonuç 3.4.1. *Herhangi bir (M, g, Φ) altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ∇ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *R ve S distribüsyonlarının her ikisi integrallenebilir ve bu distribüsyonların maksimal integral manifoldları M manifoldunda total geodeziktir,*

(b) *Hem $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonu hem de $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonu ∇ Levi-Civita konneksiyonu ile çakışıktır.*

İspat. Teorem 3.4.4 ve Teorem 3.4.5 birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. □

3.5 Geodezikler

Bir (M, Φ) altın manifoldunda herhangi bir α eğrisinin tanjant vektör alanını T ile gösterelim.

Teorem 3.5.1. *Bir (M, Φ) altın manifoldunda herhangi bir α eğrisinin $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre bir geodezik olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\nabla_T rT \in \Gamma(S) \ \ ve\ \nabla_T sT \in \Gamma(R) \tag{3.5.1}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

İspat. (3.1.12) eşitliğinde verilen Schouten konneksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\overset{Sc}{\nabla}_T T = r(\nabla_T rT) + s(\nabla_T sT) \tag{3.5.2}$$

olur. Eğer α eğrisi $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre bir geodezik ise

$$r\left(\nabla_T rT\right) + s\left(\nabla_T sT\right) = 0 \tag{3.5.3}$$

elde edilir. Bu ise

$$\nabla_T rT \in \Gamma\left(S\right) \text{ ve } \nabla_T sT \in \Gamma\left(R\right)$$

ifadelerinin geçerli olduğunu gösterir. Tersine, (3.5.1) ifadesindeki bağıntılar geçerli ise

$$\overset{Sc}{\nabla}_T T = 0 \tag{3.5.4}$$

olduğu açıktır. Yani, α eğrisi $\overset{Sc}{\nabla}$ Schouten konneksiyonuna göre bir geodeziktir. □

Teorem 3.5.2. *Bir (M, Φ) altın manifoldunda herhangi bir α eğrisinin $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonuna göre bir geodezik olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\nabla_{rT} rT + [sT, rT] \in \Gamma\left(S\right) \text{ ve } \nabla_{sT} sT + [rT, sT] \in \Gamma\left(R\right) \tag{3.5.5}$$

ifadelerinin geçerli olmasıdır.

İspat. Vrănceanu konneksiyonunun (3.1.13) eşitliğinde verilen ifadesinden dolayı

$$\overset{V}{\nabla}_T T = r\left(\nabla_{rT} rT\right) + s\left(\nabla_{sT} sT\right) + r\,[sT, rT] + s\,[rT, sT] \tag{3.5.6}$$

olur. Eğer (3.5.5) ifadesindeki bağıntılar sağlanırsa o zaman açık bir şekilde

$$\overset{V}{\nabla}_T T = 0 \tag{3.5.7}$$

olduğu görülür. Yani, α eğrisi $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonuna göre bir geodeziktir. Şimdi, α eğrisinin $\overset{V}{\nabla}$ Vrănceanu konneksiyonuna göre bir geodezik olduğunu varsayalım. O halde (3.5.6) eşitliği

$$\nabla_{rT} rT + [sT, rT] \in \Gamma\left(S\right) \text{ ve } \nabla_{sT} sT + [rT, sT] \in \Gamma\left(R\right) \tag{3.5.8}$$

ifadelerinin geçerli olduğunu belirtir. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

4. ÇARPIM MANİFOLDLARI ÜZERİNDE ALTIN YAPILAR

Bu bölüm üç alt bölümden meydana gelmektedir. Birinci alt bölüm, konunun bütünlüğünün sağlanması amacıyla yerel çarpım manifoldları hakkında [16, 29] numaralı yayınlarda verilen bazı temel bilgilerden bahsedildi. İkinci alt bölümde, yerel çarpım manifoldları üzerinde bir altın yapının nasıl inşa edileceği gösterildi. Üçüncü alt bölümde ise bir yerel çarpım altın Riemann manifold ve bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold kavramları tanımlandı. Herhangi bir yerel çarpım altın Riemann manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olmasına denk koşullar araştırıldı. Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun bileşenlerinin her ikisinin de birer Einstein manifold (ya da birer sabit eğrilikli manifold) olması için bir gerek ve yeter koşul elde edilmeye çalışıldı. Buna ek olarak, herhangi iki Riemann manifoldunun Riemann çarpım manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı tanımlandı ve buna bağlı olarak, bu Riemann çarpım manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu kanıtlandı.

4.1 Yerel Çarpım Manifoldlar

Bir n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun herhangi bir koordinat komşuluğu sistemi $\left(\xi^{h}\right)$ olsun. Eğer $\left(\xi^{h^{'}}\right)$, M manifoldunun başka bir koordinat komşuluğu sistemi ve bu iki koordinat komşuluğunun herhangi bir arakesitinde

$$\xi^{a^{'}} = \xi^{a^{'}}\left(\xi^{a}\right), \xi^{x^{'}} = \xi^{x^{'}}\left(\xi^{x}\right) \tag{4.1.1}$$

koordinat dönüşümlerinin Jacobien determinantı

$$\left|\partial_a \xi^{a^{'}}\right| \neq 0, \ \left|\partial_x \xi^{x^{'}}\right| \neq 0$$

ise $\left(\xi^{h}\right)$ koordinat komşuluğu sistemine M manifoldunun bir ayrık koordinat sistemi denir. Burada $a, b, c, \ldots$ ve $x, y, z, \ldots$ indisleri, sırasıyla, $1, 2, 3, \ldots, p$ ve $p+1, p+2, p+3, \ldots, p+q = n$ sırasında tekrar etmektedir [16, 29].

Eğer M manifoldunun bir ayrık koordinat sistemi var ise M manifoldu üzerinde bir yerel çarpım yapısı vardır ve bu durumda M manifolduna bir yerel çarpım manifoldu denir [16, 29].

Tanım 4.1.1. *Bir M yerel çarpım manifoldunda bir T_i^h tensörü (ya da bir T_{ji} tensörü) $T_i^h = \begin{pmatrix} T_b^a & 0 \\ 0 & T_y^x \end{pmatrix}$ formunda (ya da $T_{ji} = \begin{pmatrix} T_{cb} & 0 \\ 0 & T_{zy} \end{pmatrix}$ formunda) bileşenlere sahip ise pür tensör olarak adlandırılır [29].*

Tanım 4.1.2. *Bir M yerel çarpım manifoldunda bir T_i^h tensörü (ya da bir T_{ji} tensörü) $T_i^h = \begin{pmatrix} 0 & T_y^a \\ T_b^x & 0 \end{pmatrix}$ formunda (ya da $T_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & T_{zb} \\ T_{cy} & 0 \end{pmatrix}$ formunda) bileşenlere sahip ise hibrit tensör olarak adlandırılır [29].*

$\xi^x = sabit$ ve $\xi^a = sabit$ koordinatları ile tanımlı altuzayların sistemlerini, sırasıyla, M_p ve M_q ile gösterelim. Bu durumda M_p ve M_q birer manifolddur. Bunun yanısıra, M manifoldu M_p ve M_q manifoldlarının bir yerel çarpımıdır [16, 29].

$\Gamma^h_{ji}(\xi)$, M yerel çarpım manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda (4.1.1) ifadesindeki koordinatların uygun bir dönüşümü altında, $\Gamma^h_{ji}(\xi)$ lineer konneksiyonu

$$\Gamma^{h'}_{j'i'} = \frac{\partial \xi^{h'}}{\partial \xi^h}\left\{\frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^{j'}}\frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{i'}}\Gamma^h_{ji} - \frac{\partial^2 \xi^h}{\partial \xi^{j'}\partial \xi^{i'}}\right\}$$

dönüşüm kuralına sahiptir. Γ^h_{ji} lineer konneksiyonunun tüm bileşenleri

$$\Gamma^a_{cy},\ \Gamma^a_{zb},\ \Gamma^a_{zy},\ \Gamma^x_{cb},\ \Gamma^x_{zy},\ \Gamma^x_{cy}$$

şeklindedir [16, 29].

Herhangi bir $v^h = (v^a, v^x)$ kontravaryant vektörün kovaryant diferansiyeli

$$\delta v^a = dv^a + \Gamma^a_{cb} d\xi^c v^b + \Gamma^a_{cy} d\xi^c v^y + \Gamma^a_{zb} d\xi^z v^b + \Gamma^a_{zy} d\xi^z v^y, \qquad (4.1.2)$$

$$\delta v^x = dv^x + \Gamma^x_{cb} d\xi^c v^b + \Gamma^x_{cy} d\xi^c v^y + \Gamma^x_{zb} d\xi^z v^b + \Gamma^x_{zy} d\xi^z v^y \qquad (4.1.3)$$

eşitlikleri ile verilir [29].

Önerme 4.1.1. *M_p manifolduna teget herhangi bir kontravaryant vektörün M_p boyunca paralel yer değiştirmesinin yine M_p manifolduna teğet olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^x_{cb} = 0 \qquad (4.1.4)$$

olmasıdır [16, 29].

Eğer (4.1.4) eşitliği sağlanıyorsa bu durumda M_p manifoldu M yerel çarpım manifoldunda total geodeziktir [16, 29].

Önerme 4.1.2. *M_p manifolduna teget herhangi bir kontravaryant vektörün M_q boyunca paralel yer değiştirmesinin yine M_p manifolduna teğet olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^x_{zb} = 0 \tag{4.1.5}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [16, 29].

Önerme 4.1.3. *M_p manifolduna teget herhangi bir kontravaryant vektörün herhangi bir yönde paralel yer değiştirmesinin yine M_p manifolduna teget olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^x_{cb} = 0 \text{ ve } \Gamma^x_{zb} = 0 \tag{4.1.6}$$

eşitliklerinin geçerli olmasıdır [16, 29].

Eğer (4.1.6) ifadesindeki eşitlikler sağlanıyorsa bu durumda M_p manifoldu M yerel çarpım manifoldunda paraleldir [16, 29].

Önerme 4.1.4. *M_q manifolduna teğet herhangi bir kontravaryant vektörün M_q boyunca paralel yer değiştirmesinin yine M_q manifolduna teğet olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^a_{zy} = 0 \tag{4.1.7}$$

olmasıdır [16, 29].

Eğer (4.1.7) eşitliği sağlanıyorsa bu durumda M_q manifoldu M yerel çarpım manifoldunda total geodeziktir [16, 29].

Önerme 4.1.5. *M_q manifolduna teğet herhangi bir kontravaryant vektörün M_p boyunca paralel yer değiştirmesinin yine M_q manifolduna teğet olması için bir* *gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^a_{cy} = 0 \tag{4.1.8}$$

olmasıdır [16, 29].

Önerme 4.1.6. *M_q manifolduna teğet herhangi bir kontravaryant vektörün herhangi bir yönde paralel yer değiştirmesinin yine M_q manifolduna teğet olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^a_{zy} = 0 \ \textit{ve} \ \Gamma^a_{cy} = 0 \tag{4.1.9}$$

eşitliklerin sağlanmasıdır [16, 29].

Eğer (4.1.9) ifadesindeki eşitlikler sağlanıyorsa bu durumda M_q manifoldu M yerel çarpım manifoldunda paraleldir [16, 29].

4.2 Yerel Çarpım Manifoldları Üzerinde Altın Yapıların İnşası

$x^2 - x - 1 = 0$ cebirsel denkleminin köklerini ϕ ve $1-\phi$ ile gösterelim. Bir M yerel çarpım manifoldunda herhangi bir $v^h = (v^a, v^x)$ kontravaryant vektörünü başka bir $(\phi v^a, (1-\phi)\, v^x)$ kontravaryant vektörüne karşılık getirelim. Bu işlem bir $v^h \longrightarrow \Phi^h_i v^i$ lineer dönüşümü ile ifade edilebilir. Burada Φ^h_i,

$$\Phi^h_i = \begin{pmatrix} \phi\delta^a_b & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,\delta^x_y \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

ile verilen $n \times n$ tipinde bir matristir. O zaman bir ayrık koordinat sisteminde Φ^h_i matrisi bir mixed tensördür. Bunun yanısıra, herhangi bir $v^h = (v^a, v^x)$ kontravaryant vektörü için

$$\begin{aligned}
\Phi_j^i \Phi_i^h v^h &= \begin{pmatrix} \phi\delta_c^b & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,\delta_z^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi\delta_b^a & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,\delta_y^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^a \\ v^x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi^2\delta_c^b\delta_b^a v^b & 0 \\ 0 & (1-\phi)^2\,\delta_z^y\delta_y^x v^y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi^2\delta_c^a v^c & 0 \\ 0 & (1-\phi)^2\,\delta_z^x v^z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\phi+1)\,\delta_c^a v^c & 0 \\ 0 & (2-\phi)\,\delta_z^x v^z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi\delta_c^a v^c & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,\delta_z^x v^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_c^a v^c & 0 \\ 0 & \delta_z^x v^z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi\delta_c^a & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,\delta_z^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^a \\ v^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_c^a & 0 \\ 0 & \delta_z^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^a \\ v^x \end{pmatrix} \\
&= \Phi_j^h v^h + I_j^h v^h \\
&= \left(\Phi_j^h + I_j^h\right) v^h
\end{aligned}$$

olur. Yani, Φ_i^h tensörü $\Phi_j^i\Phi_i^h = \Phi_j^h + I_j^h$ denklemini sağlar. Burada I_j^h, I birim tensörünün bileşenleridir ve

$$I_j^h = \delta_j^h = \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 \\ 0 & \delta_y^x \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi, bir $\left(\xi^h\right)$ ayrık koordinat sisteminde

$$r_i^h = \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } s_i^h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_y^x \end{pmatrix}$$

diyelim. O zaman r_i^h ve s_i^h, sırasıyla, herhangi bir $v^h = (v^a, v^x)$ kontravaryant vektörünü

$$r_i^h\left(v^h\right) = r_i^h v^i = (v^a, 0)$$

ve

$$s_i^h\left(v^h\right)=s_i^h v^i=(0,v^x)$$

kontravaryant vektörlerine dönüştüren operatörlerlerdir. Ayrıca, r_i^h ve s_i^h operatörleri

$$r_j^i r_i^h=r_j^h,\ r_j^i s_i^h=0,\ s_j^i r_i^h=0,\ s_j^i s_i^h=s_j^h$$

ve

$$I_i^h=r_i^h+s_i^h \tag{4.2.2}$$

bağıntılarını sağlar. Yani, r_i^h ve s_i^h projeksiyon operatörlerdir. Üstelik, Φ_i^h tensörü

$$\begin{aligned}\Phi_i^h&=\begin{pmatrix}\phi\delta_b^a & 0\\ 0 & (1-\phi)\,\delta_y^x\end{pmatrix} \\ &=\phi\begin{pmatrix}\delta_b^a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(1-\phi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \delta_y^x\end{pmatrix} \\ &=\phi r_i^h+(1-\phi)\,s_i^h\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

formunda yazılabilir. Böylece, (4.2.2) ve (4.2.3) eşitlikleri dikkate alınırsa, r_i^h ve s_i^h projeksiyon operatörleri, sırasıyla,

$$r_i^h=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi I_i^h-\Phi_i^h\right)$$

ve

$$s_i^h=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)\,I_i^h+\Phi_i^h\right)$$

şeklinde ifade edilir.

4.3 Yerel Çarpım Altın Riemann Manifoldlar ve Yerel ayrıştırılabilir Altın Riemann Manifoldlar

Tanım 4.3.1. *Herhangi bir n-boyutlu M yerel çarpım manifoldunda bir*

$$ds^2 = g_{ji}(\xi)\, d\xi^j d\xi^i$$

Riemann metriği

$$\Phi_j^t \Phi_i^s g_{ts} = \Phi_j^t g_{ti} + g_{ji} \tag{4.3.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa M manifolduna bir yerel çarpım altın Riemann manifoldu denir.

M bir yerel çarpım altın Riemann manifoldu olsun. Bu durumda (4.3.1) eşitliğinden g_{ji} tensörü

$$g_{ji} = \begin{pmatrix} g_{cb} & 0 \\ 0 & g_{zy} \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Bu ise g_{ji} tensörünün pür olduğunu ifade eder. Bu yüzden, ds^2 Riemann metriği

$$ds^2 = g_{cb}(\xi)\, d\xi^c d\xi^b + g_{zy}(\xi)\, d\xi^z d\xi^y$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani, M_q ve M_q manifoldları ortogonaldir. Aynı zamanda, g^{ih} tensörünün de pür olduğu kolayca görülür. $\Phi_{ji} = \Phi_j^t g_{ti}$ diyelim. O zaman

$$\Phi_{ji} = \Phi_{ij}$$

olur. Ayrıca, Φ_{ji} tensörü

$$\Phi_{ji} = \begin{pmatrix} \phi g_{cb} & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, g_{zy} \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

matris formuna sahiptir. Bu ise Φ_{ji} tensörünün pür olduğunu gösterir. Şimdi, $r_{ji} = r_j^t g_{ti}$ ve $s_{ji} = s_j^t g_{ti}$ diyelim. Bu durumda

$$r_{ji} = \begin{pmatrix} g_{cb} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, s_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{zy} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise

$$\begin{aligned} \Phi_{ji} &= \begin{pmatrix} \phi g_{cb} & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, g_{zy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi g_{cb} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, g_{zy} \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} g_{cb} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-\phi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{zy} \end{pmatrix} \\ &= \phi r_{ji} + (1-\phi)\, s_{ji} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.3.2. *Bir n-boyutlu M yerel çarpım altın Riemann manifoldunda*

$$ds^2 = g_{cb}(\xi)\, d\xi^c d\xi^b + g_{zy}(\xi)\, d\xi^z d\xi^y$$

ile verilen bir Riemann metriği

$$ds^2 = g_{cb}(\xi^a)\, d\xi^c d\xi^b + g_{zy}(\xi^x)\, d\xi^z d\xi^y \tag{4.3.4}$$

formuna sahip ise o zaman M yerel çarpım altın Riemann manifolduna bir yerel ayrıştırılabilir Riemann manifold denir.

Aslında, (4.3.4) eşitliği $g_{cb}(\xi)$ fonksiyonlarının sadece ξ^a koordinatlarına bağlı, $g_{cy} = 0$ ve $g_{zy}(\xi)$ fonksiyonlarının sadece ξ^x koordinatlarına bağlı olduğuna denktir.

Teorem 4.3.1. *Herhangi bir M yerel altın Riemann manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\Gamma^x_{cb} = 0,\ \Gamma^x_{zb} = 0,\ \Gamma^a_{zy} = 0,\ \Gamma^a_{cy} = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. M yerel çarpım altın Riemann manifoldu üzerinde g Riemann metriği

$$g = ds^2 = g_{cb}(\xi)\, d\xi^c d\xi^b + g_{zy}(\varepsilon)\, d\xi^z d\xi^y$$

ile verilir. Eğer M bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold ise o zaman g Riemann metriği

$$g = ds^2 = g_{cb}(\xi^a)\, d\xi^c d\xi^b + g_{zy}(\xi^x)\, d\xi^z d\xi^y$$

formuna sahiptir. Yani, $g_{cb}(\xi)$ fonksiyonları sadece ξ^a koordinatlarına bağlı, $g_{cy} = 0$ ve $g_{zy}(\xi)$ fonksiyonları sadece ξ^x koordinatlarına bağlı olur. Buradan ise

$$\Gamma^h_{ji} = \frac{1}{2} g^{hr} \{\partial_j g_{ir} + \partial_i g_{jr} - \partial_r g_{ji}\}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{cb} &= \frac{1}{2} g^{xr} \{\partial_c g_{br} + \partial_b g_{cr} - \partial_r g_{cb}\} = 0, \\
\Gamma^x_{zb} &= \frac{1}{2} g^{xr} \{\partial_z g_{br} + \partial_b g_{zr} - \partial_r g_{zb}\} = 0, \\
\Gamma^a_{zy} &= \frac{1}{2} g^{ar} \{\partial_z g_{yr} + \partial_y g_{zr} - \partial_r g_{zy}\} = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\Gamma^a_{cy} = \frac{1}{2} g^{ar} \{\partial_c g_{yr} + \partial_y g_{cr} - \partial_r g_{cy}\} = 0$$

elde edilir.

Tersine, $\Gamma^x_{cb} = 0$, $\Gamma^x_{zb} = 0$, $\Gamma^a_{zy} = 0$ ve $\Gamma^a_{cy} = 0$ ise o zaman $g_{cb}(\xi)$ fonksiyonlarının sadece ξ^a koordinatlarına bağlı, $g_{cy} = 0$ ve $g_{zy}(\xi)$ fonksiyonlarının ξ^x koordinatlarına bağlı olduğu görülür. Bu ise M manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olması demektir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda Γ^a_{cb} ve Γ^x_{zy} haricindeki Christoffel sembolleri sıfırdır. Ayrıca, Γ^a_{cb} Christoffel sembolleri sadece ξ^a koordinatlarına bağlı fonksiyonlardır, Γ^x_{zy} Christoffel sembolleri ise sadece ξ^x koordinatlarına bağlı fonksiyonlardır.

Teorem 4.3.2. *Herhangi bir $M_p \times M_q$ yerel çarpım altın Riemann manifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olması için bir gerek ve yeter koşul M_p ve M_q bileşenlerinin $M_p \times M_q$ yerel çarpım altın Riemann manifoldunda paralel olmasıdır.*

İspat. Önerme 4.1.1, Önerme 4.1.3, Önerme 4.1.4, Önerme 4.1.6 ve Teorem 4.3.1 göz önünde bulundurulursa, ispat açık bir şekilde görülür. □

Teorem 4.3.3. *Herhangi bir yerel çarpım altın Riemann manifoldun bir yerel ayrıştırılabilir Riemann manifold olması için bir gerek ve yeter koşul*

$$\nabla_j \Phi^h_i = 0$$

olmasıdır.

İspat. Φ^h_i tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j \Phi^h_i = \partial \Phi^h_i + \Gamma^h_{jk} \Phi^k_i - \Gamma^k_{ji} \Phi^h_k$$

ile verilir. O zaman Φ^h_i tensörünün (4.2.1) eşitliğinde verilen formu kullanılırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} \nabla_j \Phi^a_b &= \partial \Phi^a_b + \Gamma^a_{jk} \Phi^k_b - \Gamma^k_{jb} \Phi^a_k \\ &= \phi \partial I^a_b + \Gamma^a_{jk} \Phi^k_b - \Gamma^k_{jb} \Phi^a_k \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_j \Phi^a_y &= \partial \Phi^a_y + \Gamma^a_{jk} \Phi^k_y - \Gamma^k_{jy} \Phi^a_k \\
&= (1-\phi)\, \Gamma^a_{jy} - \phi \Gamma^a_{jy} \\
&= (1-2\phi)\, \Gamma^a_{jy} \\
&= -\sqrt{5} \Gamma^a_{jy},
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_j \Phi^x_y &= \partial \Phi^x_y + \Gamma^x_{jk} \Phi^k_y - \Gamma^k_{jy} \Phi^x_k \\
&= (1-\phi)\, \partial I^x_y + \Gamma^x_{jk} \Phi^k_y - \Gamma^k_{jy} \Phi^x_k \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nabla_j \Phi^x_b &= \partial \Phi^x_b + \Gamma^x_{jk} \Phi^k_b - \Gamma^k_{jb} \Phi^x_k \\
&= \phi \Gamma^x_{jb} - (1-\phi)\, \Gamma^x_{jb} \\
&= (2\phi - 1)\, \Gamma^x_{jb} = \sqrt{5} \Gamma^x_{jb}
\end{aligned} \tag{4.3.6}
$$

elde edilir. Eğer M bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold ise Teorem 4.3.1 yardımıyla

$$
\Gamma^x_{cb} = 0, \Gamma^x_{zb} = 0, \Gamma^a_{zy} = 0, \Gamma^a_{cy} = 0
$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan ise

$$
\nabla_j \Phi^a_b = 0,\ \nabla_j \Phi^a_y = 0,\ \nabla_j \Phi^x_y = 0,\ \nabla_j \Phi^x_b = 0 \tag{4.3.7}
$$

olur. Bu yüzden, (4.3.7) ifadesindeki eşitlikler

$$
\nabla_j \Phi^h_i = 0
$$

olduğunu gösterir.

Tersine, $\nabla_j \Phi^h_i = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$
\nabla_j \Phi^a_b = 0,\ \nabla_j \Phi^a_y = 0,\ \nabla_j \Phi^x_y = 0,\ \nabla_j \Phi^x_b = 0
$$

olur. O zaman (4.3.5) ve (4.3.6) eşitliklerden sırasayla

$$\Gamma^a_{jy} = 0 \tag{4.3.8}$$

ve

$$\Gamma^x_{jb} = 0 \tag{4.3.9}$$

olduğu görülür. (4.3.8) ve (4.3.9) eşitlikleri ise

$$\Gamma^a_{zy} = 0, \Gamma^a_{cy} = 0, \Gamma^x_{cb} = 0, \Gamma^x_{zb} = 0$$

olduğunu ifade eder. Böylece, Teorem 4.3.1'den M bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifolddur. □

Teorem 4.3.4. *$p, q > 2$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda M_p ve M_q bileşenlerinin her ikisinin de Einstein manifold olması için bir gerek yeter koşul $M_p \times M_q$ manifoldunun Ricci tensörünün*

$$R_{ji} = a g_{ji} + b\Phi_{ji}$$

formunda olmasıdır. Burada a ve b sabitlerdir.

İspat. M_p ve M_q bileşenlerinin birer Einstein manifold olduğunu varsayalım. O zaman

$$R_{cb} = \lambda g_{cb} \tag{4.3.10}$$

ve

$$R_{zy} = \mu g_{zy} \tag{4.3.11}$$

olacak şekilde λ ve μ sabitleri vardır. Burada R_{cb} ve R_{zy}, sırasıyla, M_p ve M_q Einstein manifoldlarının Ricci tensörleridir. Bu durumda (4.3.2), (4.3.3), (4.3.10) ve (4.3.11) eşitlikleri yardımıyla $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun R_{ji} Ricci tensörü

$$R_{ji} = \frac{(\phi - 1)\lambda + \phi\mu}{2\sqrt{5}} g_{ji} + \left(\frac{\lambda - \mu}{\sqrt{5}}\right)\Phi_{ji} \tag{4.3.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ϕ ve $1-\phi$ değerleri, $x^2-x-1=0$ cebirsel denkleminin kökleridir. Böylece,

$$a=\frac{(\phi-1)\,\lambda+\phi\mu}{2\sqrt{5}}$$

ve

$$b=\left(\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{5}}\right)$$

alınırsa, (4.3.12) eşitliği

$$R_{ji}=ag_{ji}+b\Phi_{ji}$$

halini alır.

Tersine, $M_p\times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun Ricci tensörünün

$$R_{ji}=ag_{ji}+b\Phi_{ji}$$

formunda olduğunu varsayalım. O zaman

$$R_{cb}=(a+\phi b)\,g_{cb} \tag{4.3.13}$$

ve

$$R_{zy}=(a+(1-\phi)\,b)\,g_{zy} \tag{4.3.14}$$

olur. Böylece, (4.3.13) ve (4.3.14) eşitlikleri, sırasıyla, M_r ve M_s bileşenlerinin birer Einstein manifold olduğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur.

□

Sonuç 4.3.1. *$p,q>2$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $M_p\times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda M_p ve M_q bileşenleri Einstein manifold olsun. Bu durumda $M_p\times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun Ricci tensörü*

$$R_{ji}=\frac{(\phi-1)\,\lambda+\phi\mu}{2\sqrt{5}}g_{ji}+\left(\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{5}}\right)\Phi_{ji}$$

ile verilir. Burada λ ve μ, sırasıyla, M_p ve M_q Einstein manifoldlarının kesit eğrilikleridir.

İspat. M_p ve M_q bileşenlerinin her ikisi de Einstein manifold olduğu için $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun Ricci tensörü

$$R_{ji} = ag_{ji} + b\Phi_{ji}$$

olacak şekilde a ve b sabitleri vardır. O halde (4.3.2) ve (4.3.3) eşitliklerinden,

$$R_{cb} = (a + \phi b)\, g_{cb} \tag{4.3.15}$$

ve

$$R_{zy} = (a + (1 - \phi)\, b)\, g_{zy} \tag{4.3.16}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan, M_p ve M_q bileşenlerinin Einstein manifold olduğu dikkate alınırsa,

$$R_{cb} = \lambda g_{cb} \tag{4.3.17}$$

ve

$$R_{zy} = \mu g_{zy} \tag{4.3.18}$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece, (4.3.15), (4.3.16), (4.3.17) ve (4.3.18) eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$a + \phi b = \lambda$$

$$a + (1 - \phi)\, b = \mu$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem isteminin çözümü

$$a = \frac{(\phi - 1)\, \lambda + \phi\mu}{2\sqrt{5}}$$

ve

$$b = \left(\frac{\lambda - \mu}{\sqrt{5}}\right)$$

olur. Buradan ise $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun Ricci tensörünün

$$R_{ji} = \frac{(\phi - 1)\, \lambda + \phi\mu}{2\sqrt{5}} g_{ji} + \left(\frac{\lambda - \mu}{\sqrt{5}}\right) \Phi_{ji}$$

formunda olduğu elde edilir. □

Teorem 4.3.5. *$p, q > 2$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda M_p ve M_q bileşenlerinin her ikisinin de sabit kesit eğrilikli manifold olması için bir gerek yeter koşul $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun eğrilik tensörünün*

$$\begin{aligned} R_{kjih} &= \lambda \left[(g_{kh}g_{ji} - g_{jh}g_{ki}) + (\Phi_{kh}\Phi_{ji} - \Phi_{jh}\Phi_{ki}) \right] \\ &\quad + \mu \left[(\Phi_{kh}g_{ji} - \Phi_{jh}g_{ki}) + (g_{kh}\Phi_{ji} - g_{jh}\Phi_{ki}) \right] \end{aligned}$$

formunda olmasıdır. Burada λ ve μ sabitlerdir.

İspat. M_p ve M_q bileşenleri birer sabit kesit eğrilikli manifold olsun. Bu durumda R_{dcba} ve R_{zyxw} eğrilik tensörleri

$$R_{dcba} = c_p \left(g_{da}g_{cb} - g_{ca}g_{db} \right) \tag{4.3.19}$$

ve

$$R_{zyxw} = c_q \left(g_{zw}g_{yx} - g_{yw}g_{zx} \right) \tag{4.3.20}$$

eşitliklerini sağlar. Burada c_p ve c_q, sırasıyla, M_p ve M_q sabit kesit eğrilikli manifoldların kesit eğrilikleridir. (4.3.19) ve (4.3.20) eşitliklerinin her ikisinin birlikte

$$\begin{aligned} R_{kjih} = &\left(-\frac{(1-\phi)\, c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}} \right) \left[(g_{kh}g_{ji} - g_{jh}g_{ki}) + (\Phi_{kh}\Phi_{ji} - \Phi_{jh}\Phi_{ki}) \right] \\ &+ \left(-\frac{(1-\phi)\, c_p + \phi c_q}{4} \right) \left[(\Phi_{kh}g_{ji} - \Phi_{jh}g_{ki}) + (g_{kh}\Phi_{ji} - g_{jh}\Phi_{ki}) \right] \end{aligned}$$

şeklindeki bir ifadeyi sağladığı kolayca gösterilebilir. Böylece,

$$\lambda = -\frac{(1-\phi)\, c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}$$

ve

$$\mu = -\frac{(1-\phi)\, c_p + \phi c_q}{4}$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} R_{kjih} &= \lambda \left[(g_{kh}g_{ji} - g_{jh}g_{ki}) + (\Phi_{kh}\Phi_{ji} - \Phi_{jh}\Phi_{ki}) \right] \\ &\quad + \mu \left[(\Phi_{kh}g_{ji} - \Phi_{jh}g_{ki}) + (g_{kh}\Phi_{ji} - g_{jh}\Phi_{ki}) \right] \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Tersine, $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun eğrilik tensörünün

$$\begin{aligned} R_{kjih} &= \lambda \left[(g_{kh} g_{ji} - g_{jh} g_{ki}) + (\Phi_{kh} \Phi_{ji} - \Phi_{jh} \Phi_{ki}) \right] \\ &\quad + \mu \left[(\Phi_{kh} g_{ji} - \Phi_{jh} g_{ki}) + (g_{kh} \Phi_{ji} - g_{jh} \Phi_{ki}) \right] \end{aligned}$$

olacak şekilde λ ve μ sabitlerinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} R_{dcba} &= \lambda \left[(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) + (\Phi_{da} \Phi_{cb} - \Phi_{ca} \Phi_{db}) \right] \\ &+ \mu \left[(\Phi_{da} g_{cb} - \Phi_{ca} g_{db}) + (g_{da} \Phi_{cb} - g_{ca} \Phi_{db}) \right] \\ &= \lambda \left[(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) + (\phi g_{da} \phi g_{cb} - \phi g_{ca} \phi g_{db}) \right] \\ &+ \mu \left[(\phi g_{da} g_{cb} - \phi g_{ca} g_{db}) + (g_{da} \phi g_{cb} - g_{ca} \phi g_{db}) \right] \\ &= \lambda \left[(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) + \left(\phi^2 g_{da} g_{cb} - \phi^2 g_{ca} g_{db} \right) \right] \\ &+ \mu \left[(\phi g_{da} g_{cb} - \phi g_{ca} g_{db}) + (\phi g_{da} g_{cb} - \phi g_{ca} g_{db}) \right] \\ &= \lambda \left[(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) + \phi^2 (g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) \right] \\ &+ \mu \left[\phi (g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) + \phi (g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) \right] \\ &= (\phi + 2) \lambda \left[(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) \right] + 2\phi\mu \left[(g_{da} g_{cb} - \phi g_{ca} g_{db}) \right] \\ &= \left[(\phi + 2) \lambda + 2\phi\mu \right] (g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db}) \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

ve

$$\begin{aligned} R_{zyxw} &= \lambda \left[(g_{zw} g_{yx} - g_{yw} g_{zx}) + (\Phi_{zw} \Phi_{yx} - \Phi_{yw} \Phi_{zx}) \right] \\ &+ \mu \left[(\Phi_{zw} g_{yx} - \Phi_{yw} g_{zx}) + (g_{zw} \Phi_{yx} - g_{yw} \Phi_{zx}) \right] \\ &= \lambda \left[(g_{zw} g_{yx} - g_{yw} g_{zx}) + ((1 - \phi) g_{zw} (1 - \phi) g_{yx} - (1 - \phi) g_{yw} (1 - \phi) g_{zx}) \right] \\ &+ \mu \left[((1 - \phi) g_{zw} g_{yx} - (1 - \phi) g_{yw} g_{zx}) + (g_{zw} (1 - \phi) g_{yx} - g_{yw} (1 - \phi) g_{zx}) \right] \\ &= \lambda \left[(g_{zw} g_{yx} - g_{yw} g_{zx}) + \left((1 - \phi)^2 g_{zw} g_{yx} - (1 - \phi)^2 g_{yw} g_{zx} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

$$+\mu\left[\left((1-\phi)g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)g_{yw}g_{zx}\right)+\left((1-\phi)g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)g_{yw}g_{zx}\right)\right]$$
$$=\lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+(1-\phi)^2(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right]$$
$$+\mu\left[(1-\phi)(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+(1-\phi)(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right]$$
$$=(3-\phi)\lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right]+2(1-\phi)\mu\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right]$$
$$=\left[(3-\phi)\lambda+2(1-\phi)\mu\right](g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})$$

olur. Böylece, (4.3.21) ve (4.3.22) eşitlikleri, sırasıyla, M_r ve M_s bileşenlerinin birer sabit kesit eğrilikli manifold olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.3.2. *$p, q > 2$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda M_p ve M_q bileşenleri sabit kesit eğrilikli manifoldlar olsun. Bu durumda $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun eğrilik tensörü*

$$\begin{aligned}R_{kjih}=&\left(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}}\right)\left[(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})+(\Phi_{kh}\Phi_{ji}-\Phi_{jh}\Phi_{ki})\right]\\&+\left(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4}\right)\left[(\Phi_{kh}g_{ji}-\Phi_{jh}g_{ki})+(g_{kh}\Phi_{ji}-g_{jh}\Phi_{ki})\right]\end{aligned}$$

ile verilir. Burada c_p ve c_q, sırasıyla, M_p ve M_q sabit kesit eğrilikli manifoldların kesit eğrilikleridir.

İspat. M_p ve M_q bileşenlerinin her ikisi de sabit kesit eğrilikli olduğu için $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}R_{kjih}=&\lambda\left[(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})+(\Phi_{kh}\Phi_{ji}-\Phi_{jh}\Phi_{ki})\right]\\&+\mu\left[(\Phi_{kh}g_{ji}-\Phi_{jh}g_{ki})+(g_{kh}\Phi_{ji}-g_{jh}\Phi_{ki})\right]\end{aligned}$$

formunda olacak şekilde λ ve μ sabitleri mevcuttur. O zaman (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
R_{dcba} &= \lambda\left[(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db})+(\Phi_{da}\Phi_{cb}-\Phi_{ca}\Phi_{db})\right] \\
&+\mu\left[(\Phi_{da}g_{cb}-\Phi_{ca}g_{db})+(g_{da}\Phi_{cb}-g_{ca}\Phi_{db})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db})+(\phi g_{da}\phi g_{cb}-\phi g_{ca}\phi g_{db})\right] \\
&+\mu\left[(\phi g_{da}g_{cb}-\phi g_{ca}g_{db})+(g_{da}\phi g_{cb}-g_{ca}\phi g_{db})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db})+\left(\phi^2 g_{da}g_{cb}-\phi^2 g_{ca}g_{db}\right)\right] \\
&+\mu\left[(\phi g_{da}g_{cb}-\phi g_{ca}g_{db})+(\phi g_{da}g_{cb}-\phi g_{ca}g_{db})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db})+\phi^2\left(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db}\right)\right] \\
&+\mu\left[\phi\left(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db}\right)+\phi\left(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db}\right)\right] \\
&= (\phi+2)\,\lambda\left[(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db})\right]+2\phi\mu\left[(g_{da}g_{cb}-\phi g_{ca}g_{db})\right] \\
&= \left[(\phi+2)\,\lambda+2\phi\mu\right]\left(g_{da}g_{cb}-g_{ca}g_{db}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.23}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_{zyxw} &= \lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+(\Phi_{zw}\Phi_{yx}-\Phi_{yw}\Phi_{zx})\right] \\
&+\mu\left[(\Phi_{zw}g_{yx}-\Phi_{yw}g_{zx})+(g_{zw}\Phi_{yx}-g_{yw}\Phi_{zx})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+((1-\phi)\,g_{zw}\,(1-\phi)\,g_{yx}-(1-\phi)\,g_{yw}\,(1-\phi)\,g_{zx})\right] \\
&+\mu\left[((1-\phi)\,g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)\,g_{yw}g_{zx})+(g_{zw}\,(1-\phi)\,g_{yx}-g_{yw}\,(1-\phi)\,g_{zx})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+\left((1-\phi)^2 g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)^2 g_{yw}g_{zx}\right)\right] \\
&+\mu\left[((1-\phi)\,g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)\,g_{yw}g_{zx})+((1-\phi)\,g_{zw}g_{yx}-(1-\phi)\,g_{yw}g_{zx})\right] \\
&= \lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})+(1-\phi)^2\left(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx}\right)\right] \\
&+\mu\left[(1-\phi)\left(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx}\right)+(1-\phi)\left(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx}\right)\right] \\
&= (3-\phi)\,\lambda\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right]+2\,(1-\phi)\,\mu\left[(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx})\right] \\
&= \left[(3-\phi)\,\lambda+2\,(1-\phi)\,\mu\right]\left(g_{zw}g_{yx}-g_{yw}g_{zx}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.24}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, M_p ve M_q bileşenleri sabit kesit eğrilikli manifoldlar olduğu için

$$R_{dcba} = c_p \left(g_{da} g_{cb} - g_{ca} g_{db} \right) \tag{4.3.25}$$

ve

$$R_{zyxw} = c_q \left(g_{zw} g_{yx} - g_{yw} g_{zx} \right) \tag{4.3.26}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, (4.3.23), (4.3.24), (4.3.25) ve (4.3.26) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde,

$$\begin{gathered} (\phi + 2) \lambda + 2\phi\mu = c_p \\ (3 - \phi) \lambda + 2 (1 - \phi) \mu = c_q \end{gathered}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Basit bir hesaplama ile, bu lineer sisteminin çözümü

$$\lambda = -\frac{(1 - \phi) c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}$$

ve

$$\mu = -\frac{(1 - \phi) c_p + \phi c_q}{4}$$

olur. Dolayısıyla, $M_p \times M_q$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R_{kjih} = & \left(-\frac{(1 - \phi) c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}} \right) \left[\left(g_{kh} g_{ji} - g_{jh} g_{ki} \right) + \left(\Phi_{kh} \Phi_{ji} - \Phi_{jh} \Phi_{ki} \right) \right] \\ & + \left(-\frac{(1 - \phi) c_p + \phi c_q}{4} \right) \left[\left(\Phi_{kh} g_{ji} - \Phi_{jh} g_{ki} \right) + \left(g_{kh} \Phi_{ji} - g_{jh} \Phi_{ki} \right) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. □

Şimdi, herhangi iki Riemann manifoldunun Riemann çarpım manifoldu üzerinde bir altın Riemann yapı tanımlayalım.

Herhangi iki $\left(\overline{M}_1, \overline{g}_1 \right)$ ve $\left(\overline{M}_2, \overline{g}_2 \right)$ Riemann manifoldunun $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ Riemann çarpım manifoldunu düşünelim. $T \left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2 \right)$ tanjant demetinin, sırasıyla, $T\overline{M}_1$

ve $T\overline{M}_2$ tanjant demetleri üzerine projeksiyon operatörlerini $\overline{r}$ ve $\overline{s}$ ile gösterelim. O zaman

$$\overline{r}+\overline{s}=I,\ \overline{r}^2=\overline{r},\ \overline{s}^2=\overline{s},\ \overline{r}\,\overline{s}=\overline{s}\,\overline{r}=0 \tag{4.3.27}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde $\overline{M}_1\times\overline{M}_2$ Riemann çarpım manifoldunun $\overline{g}$ Riemann metriği her $X,Y\in\Gamma\left(T\left(\overline{M}_1\times\overline{M}_2\right)\right)$ için

$$\overline{g}\,(X,Y)=\overline{g}_1\,(\overline{r}X,\overline{r}Y)+\overline{g}_2\,(\overline{s}X,\overline{s}Y)$$

ile verilir. Buna ek olarak, $\overline{g}$ Riemann metriğininin tanımı dikkate alınırsa, (2.14.1) eşitliği ile verilen Koszul formülünden $\overline{M}_1$ ve $\overline{M}_2$ Riemann manifoldlarının $\overline{M}_1\times\overline{M}_2$ Riemann çarpım manifoldunda total geodezik olduğu görülür. Şimdi, $\overline{M}_1\times\overline{M}_2$ Riemann çarpım manifoldu üzerinde

$$\overline{\Phi}=\phi\overline{r}+(1-\phi)\,\overline{s} \tag{4.3.28}$$

eşitliği ile verilen bir $(1,1)$ tipinde tensör alanı tanımlayalım. Burada ϕ ve $1-\phi$ değerleri, $x^2-x-1=0$ cebirsel denkleminin kökleridir. Bu durumda

$$\overline{\Phi}\,\overline{r}=\phi\overline{r}=\overline{r}\,\overline{\Phi}$$

ve

$$\overline{\Phi}\,\overline{s}=(1-\phi)\,\overline{s}=\overline{s}\,\overline{\Phi}$$

eşitliklerinin geçerli olduğu açıktır. Ayrıca, $\overline{r}$ ve $\overline{s}$ projeksiyon operatörleri, sırasıyla,

$$\overline{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)\,I+\overline{\Phi}\right) \tag{4.3.29}$$

ve

$$\overline{s} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi I - \overline{\Phi}\right) \tag{4.3.30}$$

ile verilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^2 &= \phi\overline{r}\,\overline{\Phi} + (1-\phi)\,\overline{s}\,\overline{\Phi} \\
&= \phi^2\overline{r}^2 + (1-\phi)^2\,\overline{s}^2 \\
&= \phi\overline{r} + \overline{r} + (1-\phi)\,\overline{s} + \overline{s} \\
&= \phi\overline{r} + (1-\phi)\,\overline{s} + \overline{r} + \overline{s} \\
&= \phi\overline{r} + (1-\phi)\,\overline{s} + I \\
&= \overline{\Phi} + I
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. Buna ek olarak, her $X, Y \in \Gamma\left(T\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2\right)\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\Phi}X, Y\right) &= \overline{g}_1\left(\overline{r}\,\overline{\Phi}X, \overline{r}Y\right) + \overline{g}_2\left(\overline{s}\,\overline{\Phi}X, \overline{s}Y\right) \\
&= \overline{g}_1\left(\overline{\Phi}\,\overline{r}X, \overline{r}Y\right) + \overline{g}_2\left(\overline{\Phi}\,\overline{s}X, \overline{s}Y\right) \\
&= \overline{g}_1\left(\overline{r}X, \overline{\Phi}\,\overline{r}Y\right) + \overline{g}_2\left(\overline{s}X, \overline{\Phi}\,\overline{s}Y\right) \\
&= \overline{g}_1\left(\overline{r}X, \overline{r}\,\overline{\Phi}Y\right) + \overline{g}_2\left(\overline{s}X, \overline{s}\,\overline{\Phi}Y\right) \\
&= \overline{g}\left(X, \overline{\Phi}Y\right)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O zaman $\left(\overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ bir altın Riemann yapıdır. Dolayısıyla, $\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ bir Riemann çarpım altın Riemann manifold olur.

Teorem 4.3.6. *Herhangi bir* $\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2, \overline{g}, \Phi\right)$ *Riemann çarpım altın Riemann manifoldu bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifolddur.*

İspat. $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ Riemann çarpım altın Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\overline{\nabla}$ ile gösterelim. Her $X, Y \in \Gamma\left(T\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2\right)\right)$ için

$$\overline{\nabla}_Y \overline{r} X = \overline{\nabla}_{(\overline{r}Y + \overline{s}Y)} \overline{r} X = \overline{\nabla}_{\overline{r}Y} \overline{r} X + \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X \tag{4.3.31}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Y X &= \overline{\nabla}_{(\overline{r}Y + \overline{s}Y)} (\overline{r} X + \overline{s} X) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{r}Y} (\overline{r} X + \overline{s} X) + \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} (\overline{r} X + \overline{s} X) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{r}Y} \overline{r} X + \overline{\nabla}_{\overline{r}Y} \overline{s} X + \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X + \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{s} X \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

olur. Diğer taraftan, $\overline{g}$ Riemann metriğinin paralel ve $\overline{M}_2$ Riemann manifoldunun $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ Riemann çarpım altın Riemann manifoldunda total geodezik olması nedeniyle her $Z \in \Gamma\left(T\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2\right)\right)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X, \overline{s} Z\right) &= \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{g}(\overline{r} X, \overline{s} Z) - \overline{g}\left(\overline{r} X, \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{s} Z\right) \\ &= 0 - \overline{g}\left(\overline{r} X, \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{s} Z\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X \in \Gamma\left(T \overline{M}_1\right)$$

olduğunu ifade eder. Yani,

$$\overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X = \overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X$$

ve

$$\overline{s}\,\overline{\nabla}_{\overline{s}Y} \overline{r} X = 0$$

olur. Benzer şekilde,

$$\overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{r}Y} \overline{s} X = 0$$

ve

$$\overline{s}\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{s}X=\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{s}X$$

olduğu gösterilebilir. Bu yüzden, (4.3.32) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\overline{r}\,\overline{\nabla}_Y X &= \overline{r}\,\overline{\nabla}_{(\overline{r}Y+\overline{s}Y)}\left(\overline{r}X+\overline{s}X\right) \\ &= \overline{r}\left(\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X+\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{s}X+\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X+\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{s}X\right) \\ &= \overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X+\overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{s}X+\overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X+\overline{r}\,\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{s}X \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X+0+\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X+0 \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X+\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

olduğu bulunur. Böylece, (4.3.31) ve (4.3.33) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_Y\overline{r}\right)X &= \overline{\nabla}_Y\overline{r}X-\overline{r}\,\overline{\nabla}_Y X \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X+\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X-\overline{\nabla}_{\overline{r}Y}\overline{r}X-\overline{\nabla}_{\overline{s}Y}\overline{r}X \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left(\overline{\nabla}_Y\overline{s}\right)X=0$$

olduğu gösterilebilir. O halde, (4.3.28) eşitliğinden, her $X,Y\in\Gamma\left(T\left(\overline{M}_1\times\overline{M}_2\right)\right)$ için

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{\Phi}\right)Y &= \left(\overline{\nabla}_X\phi\overline{r}+\overline{\nabla}_X\left(1-\phi\right)\overline{s}\right)Y \\ &= \left(\phi\overline{\nabla}_X\overline{r}+\left(1-\phi\right)\overline{\nabla}_X\overline{s}\right)Y \\ &= \phi\left(\overline{\nabla}_X\overline{r}\right)Y+\left(1-\phi\right)\left(\overline{\nabla}_X\overline{s}\right)Y \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Yani, $\overline{\Phi}$ altın yapısı $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir. Dolayısıyla, $\left(\overline{M}_1\times\overline{M}_2,\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ Riemann çarpım altın Riemann manifoldu bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifolddur. □

5. ALTIN MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Altın Riemann manifoldların altmanifoldlarının incelendiği bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldunun tanjant ve normal demetleri üzerinde ambient manifoldun altın yapısının tanımladığı kanonik yapıların bazı özellikleri ortaya koyuldu. İkinci alt bölümde, bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş yapı hakkında bazı hatırlatmalar yapıldı. İndirgenmiş yapının matris elemanının izi ile ilgili sonuçlar elde edildi. Bir altın Riemann manifoldunun izometrik immersed non-invaryant, invaryant ve anti-invaryat altmanifoldları üzerlerinde tanımlı indirgenmiş yapılar yardımıyla irdelendi. İzometrik immersed non-invaryant altmanifoldların total geodezik (ya da minimal) olma koşulları araştırıldı ve bazı önemli sonuçlar elde edildi. Bir izometrik immersed non-invaryant altmanifold üzerindeki indirgenmiş yapıda, tanjant vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu durumda belirli sayıda normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörlerin sıfır olması için iki koşul bulundu. Burada ikinci temel tensörlerin sayısı, indirgenmiş yapıdaki tanjant vektör alanlarının rankı kadardır. Ayrıca, bu ikinci temel tensörlerin her biri için bir sonuç verildi. Üçüncü alt bölümde, bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed invaryant altmanifoldunun bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olduğu ispatlandı. Herhangi bir izometrik immersed altmanifoldun invaryantlığı için bir karakterizasyon bulundu. Herhangi bir izometrik immersed invaryant altmanifoldun total geodezik olması için bazı koşullar belirlendi. Ayrıca, izometrik immersed invaryant altmanifoldlar için bazı önemli sonuçlara ulaşıldı. Dördüncü alt bölümde, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldların bazı özellikleri elde edildi. Herhangi bir izometrik immersed altmanifoldun anti-invaryant olması için iki koşul belirlendi. Ayrıca, bu varsayımlar altında, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun total geodezik olduğu görüldü. Herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun total geodezik olması için bir koşul verildi. Bazı şartlar altında, herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun normal demeti için özel bir yerel ortonormal çatı bulundu. Bunun yanısıra, izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldun tanjant demetinin herhangi bir yerel ortonormal çatısının seçimine göre belirlenen normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörlerin sıfır olduğu ispatlandı. Beşinçi alt bölümde, altın Riemann manifoldların semi-invaryant altmanifoldlarının geometrik özellikleri araştırıldı ve bazı örnekler verildi. Herhangi bir altmanifoldun semi-invaryant olması için iki tane karakterizasyon verildi. Semi-invaryant altmanifoldların distribüsyonlarının karakterizasyonu ile ilgili ifadeler elde edildi. Semi-invaryant altmanifoldların tanjant ve normal demetleri üzerinde tanımlı kanonik yapılarının paralelliği araştırıldı, bazı denk ifadeler ve sonuçlar bulundu. Semi-invaryant altmanifoldların tanımındaki distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği çalışıldı, bazı gerek ve yeter koşullar ve sonuçlar elde edildi. Semi-invaryant altmanifoldların total geodezik, mixed total geodezik ve total umbilik gibi bazı sınıflandırılmalarının yapılması için bazı koşullar ve karakterizasyonlar verildi. Ayrıca, hangi koşullar altında semi-invaryant altmanifoldların bir de Rham kohomoloji grubu tanımladığı gösterildi. Bu kohomoloji grubu yardımıyla semi-invaryant altmanifoldlar incelendi ve önemli sonuçlara ulaşıldı.

5.1 İzometrik İmmersed Altmanifoldlar

Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu M olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasında M altmanifoldunun tanjant uzayını ve normal uzayını, sırasıyla, T_pM ve $T_pM^{\perp}$ ile gösterelim. Bu durumda $\overline{M}$ ambient manifoldunun $T\overline{M}$ tanjant demetinin

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

şeklinde ayrışımı vardır. $i : M \longrightarrow \overline{M}$ immersiyonunun türev dönüşümü i_* ise o zaman M altmanifoldu üzerinde indirgenmiş g Riemann metriği her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\left(X, Y\right) = \overline{g}\left(i_*X, i_*Y\right) \tag{5.1.1}$$

ile verilir [21, 22].

Kolaylık açışından aksi belirtilmedikçe, her $X \in \Gamma(TM)$ için i_*X ile X vektör alanlarını özdeş olarak kabul edelim ve $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerindeki Riemann metriği ile M altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş metriği aynı $\overline{g}$ sembolü ile gösterelim.

M altmanifoldu üzerinde T, N, t ve n dönüşümlerini, sırasıyla, her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$TX = \left(\overline{\Phi}X\right)^{\top}, \tag{5.1.2}$$

$$NX = \left(\overline{\Phi}X\right)^{\perp}, \tag{5.1.3}$$

$$tV = \left(\overline{\Phi}V\right)^{\top} \tag{5.1.4}$$

ve

$$nV = \left(\overline{\Phi}V\right)^{\perp} \tag{5.1.5}$$

ile tanımlayalım. O halde $T : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ ve $n : \Gamma\left(TM^{\perp}\right) \longrightarrow \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ dönüşümlerinin birer endomorfizm, $N : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $t : \Gamma\left(TM^{\perp}\right) \longrightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümlerinin ise birer demet değerli 1-form olduğu açıktır. Bu nedenle, herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ tanjant vektör alanı için $\overline{\Phi}X$ vektör alanı

$$\overline{\Phi}X = TX + NX \tag{5.1.6}$$

olacak şekilde tanjant ve normal bileşenlerine ayrılabilir. Benzer şekilde, herhangi bir normal vektör alanı $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $\overline{\Phi}V$ vektör alanı

$$\overline{\Phi}V = tV + nV \tag{5.1.7}$$

formunda yazılabilir.

Önerme 5.1.1. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. O zaman* $T : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ *endomorfizmi* $\overline{g}$*-simetriktir [64].*

Önerme 5.1.2. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. O zaman* $n : \Gamma\left(TM^{\perp}\right) \longrightarrow \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *endomorfizmi* $\overline{g}$*-simetriktir [64].*

Lemma 5.1.1. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda*

$$T + I = T^2 + tN, \tag{5.1.8}$$

$$N = NT + nN, \tag{5.1.9}$$

$$t = Tt + tn \tag{5.1.10}$$

ve

$$n + I = n^2 + Nt \tag{5.1.11}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (5.1.6) ve (5.1.7) eşitlikleri yardımıyla herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ tanjant vektör alanı için

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^2 X &= \overline{\Phi}\left(\overline{\Phi}X\right) \\
&= \overline{\Phi}\left(TX + NX\right) = \overline{\Phi}TX + \overline{\Phi}NX \\
&= T\left(TX\right) + NTX + tNX + nNX \\
&= T^2X + NTX + tNX + nNX \\
&= T^2X + tNX + NTX + nNX
\end{aligned}$$

ve

$$\left(\overline{\Phi}+I\right)X=\overline{\Phi}X+X=TX+NX+X$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overline{\Phi}^2=\overline{\Phi}+I$ olduğu dikkate alınırsa,

$$T^2X+tNX+NTX+nNX=TX+NX+X$$

olduğu görülür. Buradan ise tanjant ve normal bileşenler eşitlenirse, sırasıyla,

$$TX+X=T^2X+tNX \text{ veya } T+I=T^2+tN$$

ve

$$NX=NTX+nNX \text{ veya } N=NT+nN$$

elde edilir. Bu ise (5.1.8) ve (5.1.9) eşitliklerinin sağlandığını gösterir. Benzer şekilde, (5.1.6) ve (5.1.7) eşitlikleri kullanılarak herhangi bir $V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ normal vektör alanı için

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}^2V&=\overline{\Phi}\left(\overline{\Phi}V\right)\\&=\overline{\Phi}\left(tV+nV\right)=\overline{\Phi}tV+\overline{\Phi}nV\\&=TtV+NtV+tnV+n\left(nV\right)\\&=TtV+NtV+tnV+n^2V\\&=TtV+tnV+NtV+n^2V\end{aligned}$$

ve

$$\left(\overline{\Phi}+I\right)V=\overline{\Phi}V+V=tV+nV+V$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overline{\Phi}^2=\overline{\Phi}+I$ olduğu dikkate alınırsa,

$$TtV+tnV+NtV+n^2V=tV+nV+V$$

olduğu görülür. Buradan ise tanjant ve normal bileşenler eşitlenirse, sırasıyla,

$$tV=TtV+tnV \text{ veya } t=Tt+tn$$

ve

$$nV + V = NtV + n^2V \text{ veya } n + I = Nt + n^2$$

elde edilir. Bu ise (5.1.10) ve (5.1.11) eşitliklerinin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

T, N, t ve n dönüşümlerinin kovaryant türevleri, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X T\right) Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y, \tag{5.1.12}$$

$$\left(\overline{\nabla}_X N\right) Y = \nabla^{\perp}_X NY - N\nabla_X Y, \tag{5.1.13}$$

$$\left(\overline{\nabla}_X t\right) V = \nabla_X tV - t\nabla^{\perp}_X V \tag{5.1.14}$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_X n\right) V = \nabla^{\perp}_X nV - n\nabla^{\perp}_X V \tag{5.1.15}$$

ile tanımlanır. Burada $\nabla^{\perp}$, M altmanifoldu üzerindeki normal konneksiyondur.

Önerme 5.1.3. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $T : TM \longrightarrow TM$ endomorfizminin ve $N : TM \longrightarrow TM^{\perp}$ normal demet değerli 1-formunun kovaryant türevi, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\left(\overline{\nabla}_X T\right) Y = A_{NY}X + th(X, Y) \tag{5.1.16}$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_X N\right) Y = nh(X, Y) - h(X, TY) \tag{5.1.17}$$

ile verilir [64].

Önerme 5.1.4. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$T[X,Y] = \nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X \tag{5.1.18}$$

ve

$$N[X,Y] = h(X,TY) - h(TX,Y) + \nabla_Y^{\perp} NX - \nabla_X^{\perp} NY \tag{5.1.19}$$

eşitlikleri sağlanır [64].

Önerme 5.1.5. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda* $t : TM^{\perp} \longrightarrow TM$ *tanjant demet değerli* 1*-formunun ve* $n : TM^{\perp} \longrightarrow TM^{\perp}$ *endomorfizminin kovaryant türevi, sırasıyla, her* $X \in \Gamma(TM)$ *ve* $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ *için*

$$(\overline{\nabla}_X t) V = A_{nV}X - TA_V X \tag{5.1.20}$$

ve

$$(\overline{\nabla}_X n) V = -h(X, tV) - NA_V X \tag{5.1.21}$$

ile verilir [64].

5.2 İndirgenmiş Yapılar ve Non-İnvaryant Altmanifoldlar

Bir m-boyutlu $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun.

$TM^{\perp}$ normal demetinin bir $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ yerel ortonormal çatısını düşünelim. Her $X \in \Gamma(TM)$ için $\overline{M}$ ambient manifoldu üzerinde $\overline{\Phi}(i_* X)$ ve $\overline{\Phi}(N_\alpha)$ vektör alanları, sırasıyla,

$$\overline{\Phi}(i_* X) = i_*(\Phi(X)) + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(X) N_\alpha \tag{5.2.1}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(N_{\alpha}\right)=\varepsilon i_{*}\left(\xi_{\alpha}\right)+\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}N_{\beta},\varepsilon=\pm 1 \tag{5.2.2}$$

şeklinde M altmanifoldunda tanjant ve normal bileşenlerine ayrılabilir. Burada Φ, M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı; ξ_{α}, M altmanifoldu üzerinde tanjant vektör alanları; u_{α}, M altmanifoldu üzerinde 1-formlar ve $\left(a_{\alpha\beta}\right)_{r\times r}$, M altmanifoldu üzerinde $r\times r$ tipinde reel değerli fonksiyonların bir matrisidir. Böylece, M altmanifoldu üzerinde bir $\left(\Phi,g,u_{\alpha},\varepsilon\xi_{\alpha},\left(a_{\alpha\beta}\right)_{r\times r}\right)$ indirgenmiş yapısı elde edilir [21, 22].

$\overline{M}$ ve M manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonlarını, sırasıyla, $\overline{\nabla}$ ve ∇ ile gösterelim. $\overline{M}$ ambient manifoldunda M altmanifoldunun Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla, her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_{i_{*}X}i_{*}Y=i_{*}\nabla_{X}Y+\sum_{\alpha=1}^{r}h_{\alpha}\left(X,Y\right)N_{\alpha} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\overline{\nabla}_{i_{*}X}N_{\alpha}=-i_{*}A_{\alpha}X+\sum_{\beta=1}^{r}l_{\alpha\beta}\left(X\right)N_{\beta} \tag{5.2.4}$$

ile verilir. Burada h_{α}, $1\leq\alpha\leq r$, N_{α} normal vektör alanlarına karşılık gelen ikinci temel tensörleri; A_{α}, N_{α} normal vektör alanı boyunca şekil operatörünü; $l_{\alpha\beta}$, $1\leq\alpha,\beta\leq r$, M altmanifoldu üzerinde $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyonuna göre 1-formları göstermektedir. Dolayısıyla, her $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $1\leq\alpha,\beta\leq r$ için

$$h_{\alpha}\left(X,Y\right)=h_{\alpha}\left(Y,X\right), \tag{5.2.5}$$

$$h_\alpha (X, Y) = g (A_\alpha X, Y), \tag{5.2.6}$$

$$\nabla^\perp_{i_* X} N_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} l_{\alpha\beta} (X) N_\beta \tag{5.2.7}$$

ve

$$l_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha} \tag{5.2.8}$$

eşitlikleri sağlanır [21].

Teorem 5.2.1. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Bu durumda M altmanifoldu üzerinde $\left(\Phi, g, u_\alpha, \varepsilon\xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_{r\times r}\right)$ indirgenmiş yapısı her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\Phi^2 (X) = \Phi (X) + X - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X) \xi_\alpha, \tag{5.2.9}$$

$$u_\alpha (\Phi (X)) = (1 - a_{\alpha\alpha}) u_\alpha (X), \tag{5.2.10}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \tag{5.2.11}$$

$$u_\beta (\xi_\alpha) = \varepsilon \left(\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma}\right), \tag{5.2.12}$$

$$\Phi (\xi_\alpha) = \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} \xi_\beta, \tag{5.2.13}$$

$$u_\alpha (X) = \varepsilon g (X, \xi_\alpha), \tag{5.2.14}$$

$$g (\Phi (X), Y) = g (X, \Phi (Y)) \tag{5.2.15}$$

ve

$$g (\Phi (X), \Phi (Y)) = g (\Phi (X), Y) + g (X, Y) - \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X) u_\alpha (Y) \tag{5.2.16}$$

eşitliklerini sağlar [21, 22].

$TM^{\perp}$ normal demetinin herhangi iki yerel ortonormal çatısı $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ ve $\{N_1', N_2', \ldots, N_r'\}$ olsun. O zaman her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için N_α' normal vektör alanlarının $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ yerel ortonormal çatısında ayrışımı

$$N_\alpha' = \sum_{\gamma=1}^{r} k_\alpha^\gamma N_\gamma \tag{5.2.17}$$

ile verilir. Burada k_α^γ, $r \times r$ tipinde bir ortogonal matristir.

$$u_\alpha' = \sum_{\gamma=1}^{r} k_\alpha^\gamma u_\gamma, \tag{5.2.18}$$

$$\xi_\alpha' = \sum_{\gamma=1}^{r} k_\alpha^\gamma \xi_\gamma \tag{5.2.19}$$

ve

$$a_{\alpha\beta}' = \sum_{\gamma=1}^{r} k_\alpha^\gamma a_{\gamma\delta} k_\beta^\delta \tag{5.2.20}$$

diyelim. Bu durumda (5.2.17) eşitliği kullanılırsa, (5.2.1) ve (5.2.2) ifadeleri, sırasıyla,

$$\overline{\Phi}\left(i_* X\right) = i_* \Phi\left(X\right) + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha'\left(X\right) N_\alpha' \tag{5.2.21}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(N_\alpha'\right) = \varepsilon i_*\left(\xi_\alpha'\right) + \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}' N_\beta', \varepsilon = \pm 1 \tag{5.2.22}$$

formlarını halir. Ayrıca, (5.2.19) eşitliğinden $\xi_1, \ldots, \xi_r$ tanjant vektör alanları lineer bağımlı (ya da lineer bağımsız) ise aynı zamanda $\xi_1', \ldots, \xi_r'$ tanjant vektör alanları da lineer bağımlıdır (ya da lineer bağımsızdır). Bunun yanısıra, $a_{\alpha\beta}$ matris bileşeni α ve β indislerine göre simetrik olduğu için $a_{\alpha\beta}$ matris bileşeni uygun bir dönüşüm altında $a'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ formuna indirgenebilir. Burada her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için λ_α, $(a_{\alpha\beta})_{r\times r}$ matrisinin öz değerleridir [21, 30].

Önerme 5.2.1. *Bir m-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *tanjant vektör alanları lineer bağımsız ise bu durumda* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *diferansiyel* 1*-formları da lineer bağımsızdır [21].*

Teorem 5.2.2. *Bir m-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Bu durumda* $\left(\Phi, g, u_\alpha, \varepsilon\xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_{r\times r}\right)$ *indirgenmiş yapısı her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$(\nabla_X \Phi) Y = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha (X, Y) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (Y) A_\alpha X, \tag{5.2.23}$$

$$(\nabla_X u_\alpha) Y = -h_\alpha (X, \Phi Y) + \sum_{\beta=1}^{r} u_\beta (Y) l_{\alpha\beta} (X) + \sum_{\beta=1}^{r} h_\beta (X, Y) a_{\beta\alpha}, \tag{5.2.24}$$

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\varepsilon \Phi (A_\alpha X) + \varepsilon \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X + \sum_{\beta=1}^{r} l_{\alpha\beta} (X) \xi_\beta \tag{5.2.25}$$

ve

$$X (a_{\alpha\beta}) = -\varepsilon h_\beta (X, \xi_\alpha) - \varepsilon h_\alpha (X, \xi_\beta) - \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\beta} (X) - \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\beta\gamma} l_{\gamma\alpha} (X) \tag{5.2.26}$$

eşitliklerini sağlar [21].

Teorem 5.2.3. *Bir m-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer* M *altmanifoldu üzerinde her* $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ *için* ξ_α *tanjant vektör alanları lineer bağımsız ve* $\nabla \Phi = 0$ *ise o zaman* M *bir total geodezik altmanifolddur.*

İspat. Hipotezden Φ indirgenmiş yapısının kovaryant türevi sıfır olduğundan (5.2.23) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$0 = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) A_{\alpha} X \tag{5.2.27}$$

olur. (5.2.27) eşitliğinde, (2.15.2) ve (5.2.5) eşitlikleri kullanılırsa, her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(X, Z) = -\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Z) h_{\alpha}(X, Y) \tag{5.2.28}$$

olduğu kolayca görülür. O halde (5.2.5) ve (5.2.28) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(X, Z) &= \sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(Z, X) = -\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(X) h_{\alpha}(Z, Y) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(X) h_{\alpha}(Y, Z) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Z) h_{\alpha}(X, Y) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(X, Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $2 \sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(X, Z) = 0$ yani, $\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha}(Y) h_{\alpha}(X, Z) = 0$ olduğu bulunur. Ayrıca, her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_{α} tanjant vektör alanları lineer bağımsız olduğundan $u_1, u_2, \ldots, u_r$ diferansiyel 1-formları da lineer bağımsızdır. O zaman her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $h_{\alpha}(X, Z) = 0$ olmak zorundadır. Aynı zamanda, her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için $h(X, Z) = \sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}(X, Z) N_{\alpha}$ olduğunu hatırlayalım. Böylece, M altmanifoldunun total geodezik olduğu elde edilir. □

Önerme 5.2.2. *Bir m-boyutlu $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_{α} tanjant vektör alanları lineer bağımsız ise Φ indirgenmiş yapısının izi*

$$tr(\Phi) = \begin{cases} r - tr(a_{\alpha\beta}) + \sum_{A=r+1}^{n} \lambda_A, r < n, \lambda_A \in \{\phi; 1-\phi\} \\ r - tr(a_{\alpha\beta}), r = n \end{cases} \tag{5.2.29}$$

şeklindedir [22].

Lemma 5.2.1. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer her* $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ *için* ξ_α *tanjant vektör alanları lineer bağımsız ve* $\nabla\Phi = 0$ *ise o zaman* $tr\left(a_{\alpha\beta}\right)$ *sabittir.*

İspat. Herhangi bir $p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olsun. Bu durumda M bir Riemann manifold olması nedeniyle, her $X \in \Gamma(TM)$ için $p \in M$ noktasında $\nabla_X E_i = 0$ olacak şekilde TM tanjant demetinin bir $\{E_1, \ldots, E_n\}$ yerel ortonormal çatısı mevcuttur. Burada E_i, $p \in M$ noktasında e_i tanjant vektörlerine karşılık gelen vektör alanlarını göstermektedir. Diğer taraftan, $p \in M$ noktasında Φ indirgenmiş yapısının izi $tr\left(\Phi\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} g\left(\Phi e_i, e_i\right)$ ile verilir. O zaman ∇ bir metrik konneksiyon olduğundan her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\nabla_X tr\left(\Phi\right) &= \nabla_X \sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi e_i, e_i\right) \\
&= \nabla_X \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi E_i, E_i\right)\right\}_p \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} \nabla_X g\left(\Phi E_i, E_i\right)\right\}_p \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X \Phi E_i, E_i\right)\right\}_p + \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi E_i, \nabla_X E_i\right)\right\}_p \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X \Phi E_i, E_i\right)\right\}_p - \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi \nabla_X E_i, E_i\right)\right\}_p \\
&+ \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi \nabla_X E_i, E_i\right)\right\}_p + \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\Phi E_i, \nabla_X E_i\right)\right\}_p \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X \Phi E_i - \Phi \nabla_X E_i, E_i\right)\right\}_p \\
&+ \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X E_i, \Phi E_i\right)\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X E_i, \Phi E_i\right)\right\}_p \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\left(\nabla_X \Phi\right) E_i, E_i\right)\right\}_p + 2\left\{\sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_X E_i, \Phi E_i\right)\right\}_p
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise E_i vektör alanlarının $p \in M$ noktasında ∇ metrik konneksiyonuna göre kovaryant türevi sabit ve hipotezden Φ indirgenmiş yapısının kovaryant türevi sıfır olduğundan $\nabla_X tr\,(\Phi) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise $tr\,(\Phi) = sabit$ olması demektir. Dolayısıyla, (5.2.29) eşitliğinden $tr\,(a_{\alpha\beta}) = sabit$ olduğu görülür. □

Lemma 5.2.2. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanları lineer bağımsız ve $tr\,(\Phi) = sabit$ olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) = 0 \tag{5.2.30}$$

ve

$$\sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha \xi_\alpha = 0 \tag{5.2.31}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (5.2.26) eşitliğinde $\alpha = \beta$ alınırsa, her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) + \varepsilon h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) + \nabla_X a_{\alpha\alpha}\,(X) \\ &\quad + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}\,(X) + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}\,(X) \\ &= 2\varepsilon h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) + \nabla_X a_{\alpha\alpha}\,(X) + 2\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}\,(X) \end{aligned} \tag{5.2.32}$$

olur. O halde (5.2.32) eşitliğinde α indisi üzerinden toplam alınırsa,

$$2\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) + \nabla_X \sum_{\alpha=1}^{r} a_{\alpha\alpha}\,(X) + 2\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}\,(X) = 0 \tag{5.2.33}$$

elde edilir. Buradan ise $a_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\alpha}$ ve $l_{\alpha\gamma} = -l_{\gamma\alpha}$ olduğu dikkate alınırsa, (5.2.33) eşitliği

$$2\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha\,(X, \xi_\alpha) + \nabla_X \sum_{\alpha=1}^{r} a_{\alpha\alpha}\,(X) = 0 \tag{5.2.34}$$

halini alır. Hipotezden $tr(\Phi)$ sabit olması nedeniyle (5.2.29) eşitliğinden $tr\left(a_{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha=1}^{r} a_{\alpha\alpha}$ sabit olur. Bu nedenle, (5.2.34) eşitliği

$$2\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}\left(X,\xi_{\alpha}\right)=0$$

formuna indirgenir. Bu ise

$$\sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}\left(X,\xi_{\alpha}\right)=0$$

olduğunu belirtir. Diğer taraftan, (2.15.2) eşitliği

$$0=\sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}\left(X,\xi_{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{r} g\left(A_{\alpha}X,\xi_{\alpha}\right)$$

olduğunu gösterir. Böylece, şekil operatörünün self-adjoint özelliği kullanılırsa,

$$0=\sum_{\alpha=1}^{r} g\left(A_{\alpha}X,\xi_{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{r} g\left(A_{\alpha}\xi_{\alpha},X\right)=g\left(\sum_{\alpha=1}^{r} A_{\alpha}\xi_{\alpha},X\right)$$

elde edilir. Buradan ise g Riemann metriği non-dejenere olduğundan $\sum_{\alpha=1}^{r} A_{\alpha}\xi_{\alpha}=0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

Teorem 5.2.4. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha\in\{1,\ldots,r\}$ için ξ_{α} tanjant vektör alanları lineer bağımsız, $tr\left(\Phi\right)=$ sabit ve M total umbilik ise M total geodeziktir.*

İspat. M total umbilik altmanifold olması nedeniyle her $\alpha\in\{1,\ldots,r\}$ için

$$h_{\alpha}\left(X,Y\right)=\sigma_{\alpha}g\left(X,Y\right) \tag{5.2.35}$$

olacak şekilde σ_{α} sabitleri vardır. Diğer taraftan, Lemma 5.2.2'nin koşullarının sağlandığı dikkate alınırsa, (5.2.30) eşitliğinin geçerli olduğu görülür. O halde (5.2.30) ve (5.2.35) eşitlikleri yardımıyla her $X\in\Gamma(TM)$ için

$$0=\sum_{\alpha=1}^{r} h_{\alpha}\left(X,\xi_{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{r}\sigma_{\alpha}g\left(X,\xi_{\alpha}\right)=g\left(X,\sum_{\alpha=1}^{r}\sigma_{\alpha}\xi_{\alpha}\right)$$

elde edilir. Buradan ise g Riemann metriği non-dejenere olduğu için

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi_\alpha = 0 \tag{5.2.36}$$

olur. Böylece, her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olması nedeniyle (5.2.36) eşitliği her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $\sigma_\alpha = 0$ olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, (5.2.35) eşitliğinden her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $h_\alpha (X, Y) = 0$ olduğu görülür. Yani, M bir total geodezik altmanifolddur. □

Teorem 5.2.5. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanları lineer bağımsız, $tr(\Phi) =$ sabit ve $\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} \Phi) e_i = 0$ ise M bir minimal altmanifolddur. Burada $\{e_1, \ldots, e_n\}$, herhangi bir $p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır.*

İspat. (5.2.23) eşitliğinde her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $p \in M$ noktasında $X_p = Y_p = e_i$ alınırsa,

$$(\nabla_{e_i} \Phi) e_i = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha (e_i, e_i) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (e_i) A_\alpha e_i$$

olur. Buradan ise i indisi üzerinden toplam alınırsa, $\sum_{i=1}^{n} u_\alpha (e_i) e_i = \varepsilon \xi_\alpha$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} \Phi) e_i \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha (e_i, e_i) \xi_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (e_i) A_\alpha e_i \\ &= \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} h_\alpha (e_i, e_i) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha \sum_{i=1}^{n} u_\alpha (e_i) e_i \\ &= \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} h_\alpha (e_i, e_i) \xi_\alpha + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha \xi_\alpha \\ &= \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} h_\alpha (e_i, e_i) \xi_\alpha + A_\alpha \xi_\alpha \right) \end{aligned} \tag{5.2.37}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, Lemma 5.2.2'nin koşulları sağlandığı için (5.2.31) eşitliği geçerlidir. Böylece, (5.2.31) ve (5.2.37) eşitliklerinden

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{n}h_{\alpha}\left(e_i,e_i\right)\right)\xi_{\alpha}=0$$

elde edilir. Bu ise ξ_α tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olmasından dolayı her $\alpha \in \{1,\ldots,r\}$ için $\sum_{i=1}^{n}h_{\alpha}\left(e_i,e_i\right)=0$ olduğunu gösterir. O halde M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanının tanımı dikkate alınırsa, $H=0$ olur. Yani, M bir minimal altmanifolddur. □

Önerme 5.2.3. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r=\operatorname{codim}M$ *olsun. Eğer her* $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,r\}$ *için* $a_{\alpha\beta}=\lambda_a\delta_{\alpha\beta}$, $\lambda_a\in(1-\phi,\phi)$ *ise bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) *Her* $\alpha\in\{1,\ldots,r\}$ *için* ξ_α *tanjant vektör alanları lineer bağımsızdır,*

(b) *Her* $\alpha\in\{1,\ldots,r\}$ *için* ξ_α *tanjant vektör alanları* Φ *indirgenmiş yapısının* $(1-\lambda_a)$ *öz değerlerine karşılık gelen öz vektörleridir.*

İspat. Her $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,r\}$ için $a_{\alpha\beta}=\lambda_a\delta_{\alpha\beta}$, $\lambda_a\in(1-\phi,\phi)$ olsun. O zaman (5.2.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
u_\beta\left(\xi_\alpha\right)&=\varepsilon\left(\delta_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{r}a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}\right)\\
&=\varepsilon\left(\delta_{\alpha\beta}+\lambda_a\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{r}\lambda_a\delta_{\alpha\gamma}\lambda_\beta\delta_{\gamma\beta}\right)\\
&=\varepsilon\left(\delta_{\alpha\beta}+\lambda_a\delta_{\alpha\beta}-\lambda_a\lambda_\beta\sum_{\gamma=1}^{r}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta}\right)\\
&=\varepsilon\left(\delta_{\alpha\beta}+\lambda_a\delta_{\alpha\beta}-\lambda_a\lambda_\beta\delta_{\alpha\beta}\right)\\
&=\varepsilon\delta_{\alpha\beta}\left(1+\lambda_a-\lambda_a\lambda_\beta\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.2.14) eşitliğinden $g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \varepsilon u_\beta(\xi_\alpha)$ olur. Dolayısıyla,

$$g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \varepsilon^2 \delta_{\alpha\beta}(1 + \lambda_a - \lambda_a \lambda_\beta) = \delta_{\alpha\beta}(1 + \lambda_a - \lambda_a \lambda_\beta) \tag{5.2.38}$$

olduğu bulunur. Aynı zamanda, $\lambda_a, \lambda_\beta \in (1 - \phi, \phi)$ olduğu için

$$1 + \lambda_a - \lambda_a \lambda_\beta > 0 \tag{5.2.39}$$

olduğu açıktır. Böylece, (5.2.38) ve (5.2.39) eşitlikleri dikkate alınırsa, ξ_α tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olduğu görülür. Ayrıca, (5.2.13) eşitliğinden

$$\Phi(\xi_\alpha) = \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}\xi_\beta = \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta}\lambda_a \xi_\beta = \xi_\alpha - \lambda_a \xi_a = (1 - \lambda_a)\xi_\alpha$$

olur. Bu ise her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanlarının Φ indirgenmiş yapısının $1 - \lambda_a$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler olduğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.2.3 dikkate alınırsa, Teorem 5.2.3, Teorem 5.2.4 ve Teorem 5.2.5, sırasıyla, aşağıdaki sonuçların sağlandığını gösterir.

Sonuç 5.2.1. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \lambda_a \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda_a \in (1 - \phi, \phi)$ ve $\nabla\Phi = 0$ ise M total geodezik altmanifolddur.*

Sonuç 5.2.2. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \lambda_a \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda_a \in (1 - \phi, \phi)$, $tr(\Phi) =$ sabit ve M total umbilik ise M total geodeziktir.*

Sonuç 5.2.3. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$*

codim M *olsun. Eğer her* $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ *için* $a_{\alpha\beta} = \lambda_a \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda_a \in (1-\phi, \phi)$ *ve* $tr\,(\Phi) = sabit$ *ve* $\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} \Phi)\, e_i = 0$ *ise* M *bir minimal altmanifolddur. Burada* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, *herhangi bir* $p \in M$ *noktasında* T_pM *tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır.*

Önerme 5.2.4. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r =$ codim M *olsun. Eğer her* $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ *için* $\alpha_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ *ise bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) *Her* $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ *için* ξ_α *tanjant vektör alanları lineer bağımsızdır,*

(b) $tr\,(\Phi)$ *sabittir.*

İspat. Her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ olsun. O zaman (5.2.12) eşitliği yardımıyla

$$u_\beta\,(\xi_\alpha) = \varepsilon \left(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=1}^{r} \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} \right) = \varepsilon\,(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.2.14) eşitliğinden

$$g\,(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \varepsilon u_\beta\,(\xi_\alpha)$$

olur. Böylece,

$$g\,(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \varepsilon^2 \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

olduğu bulunur. Bu ise her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olması demektir. Ayrıca, $tr\,(a_{\alpha\beta}) = tr\,(\delta_{\alpha\beta}) = r$ olduğu dikkate alınırsa, (5.2.29) eşitliğinden $tr\,(\Phi) = sabit$ olduğu görülür. □

Önerme 5.2.5. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r =$ codim M *olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *Her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ eşitliği geçerlidir,*

(b) *Her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ ifadesi sağlanır.*

İspat. Her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ olsun. O zaman (5.2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) = \left(\overline{\Phi} - I\right)(N_\alpha) &= \varepsilon i_*(\xi_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} N_\beta - N_a \\ &= \varepsilon i_*(\xi_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} N_\beta - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta} N_\beta \\ &= \varepsilon i_*(\xi_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta} N_\beta - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta} N_\beta \\ &= \varepsilon i_*(\xi_\alpha)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan ise her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ olduğunu görülür.

Tersine, her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda (5.2.2) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} N_\beta - N_\alpha \\ &= \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} N_\beta - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta} N_\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^{r} (a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) N_\beta\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ kümesi $TM^\perp$ normal demetinin bir yerel ortonormal çatısı olduğundan $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ olduğu görülür. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.2.4 ve Önerme 5.2.5 yardımıyla Teorem 5.2.3, Teorem 5.2.4 ve Teorem 5.2.5'ten, sırasıyla, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.4. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$*

$\operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer her* $\alpha \in \{1,\dots,r\}$ *için* $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ *ve* $\nabla\Phi = 0$ *ise* M *bir total geodezik altmanifolddur.*

Sonuç 5.2.5. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer her* $\alpha \in \{1,\dots,r\}$ *için* $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ *ve* M *total umbilik ise* M *bir total geodezik altmanifolddur.*

Sonuç 5.2.6. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer her* $\alpha \in \{1,\dots,r\}$ *için* $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ *ve* $\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\Phi)\, e_i = 0$ *ise* M *bir minimal altmanifolddur. Burada* $\{e_1,\dots,e_n\}$*, herhangi bir* $p \in M$ *noktasında* T_pM *tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır.*

Şimdi, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ tanjant vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu durumları inceleyelim. (5.2.12) eşitliği dikkate alınırsa,

$$u'_\beta(\xi'_\alpha) = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}(1 + \lambda_\alpha - \lambda_\alpha\lambda_\beta) \tag{5.2.40}$$

olduğu görülür. O zaman $\alpha = \beta$ için

$$u'_\alpha(\xi'_\alpha) = \varepsilon\delta_{\alpha\alpha}\left(1 + \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^2\right) = \varepsilon\left(1 + \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^2\right) \tag{5.2.41}$$

ve $\alpha \neq \beta$ için

$$u'_\beta(\xi'_\alpha) = 0$$

elde edilir. Bunun yanısıra, (5.2.13) eşitliği ξ'_α tanjant vektör alanları açışından düşünüldüğünde

$$\Phi(\xi'_\alpha) = \xi'_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} a'_{\alpha\beta}\xi'_\beta = \xi'_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_a\delta_{\alpha\beta}\xi'_\beta = \xi'_\alpha - \lambda_a\xi'_\alpha = (1 - \lambda_a)\,\xi'_\alpha \tag{5.2.42}$$

olduğu bulunur. Bu ise her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ'_α tanjant vektör alanlarının Φ indirgenmiş yapısının $(1 - \lambda_a)$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler olması demektir.

$\lambda_h^2 = \lambda_h + 1$ olacak şekilde bir $h \in \{1, \ldots, r\}$ için (5.2.41) eşitliğinden

$$g\left(\xi'_h, \xi'_h\right) = \varepsilon u'_h\left(\xi'_h\right) = \varepsilon^2\left(1 + \lambda_h - \lambda_h^2\right) = 0$$

olur. Böylece, g Riemann metriğinin non-dejenere olduğu dikkate alınırsa, $\xi'_h = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan ise (5.2.22) eşitliğinden

$$\overline{\Phi}\left(N'_h\right) = \varepsilon i_*\left(\xi'_h\right) + \sum_{\beta=1}^{r} a'_{h\beta} N'_\beta = 0 + \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_h \delta_{h\beta} N'_\beta = \lambda_h N'_h$$

elde edilir. Yani, N'_h normal vektör alanı $\overline{\Phi}$ altın yapısının λ_h öz değerine karşılık gelen bir öz vektörüdür. Eğer $k = 1, 2, \ldots, s \leq r$ için $\lambda_k^2 \neq \lambda_k + 1$ ise bu durumda (5.2.40) eşitliğinden $\xi'_1, \ldots, \xi'_s$ tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, (5.2.21) ve (5.2.22) ifadeleri, sırasıyla,

$$\overline{\Phi}\left(i_* X\right) = i_*\left(\Phi\left(X\right)\right) + \sum_{k=1}^{s} u'_k\left(X\right) N'_k,\ s \leq \min\left(r, n\right) \tag{5.2.43}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(N'_k\right) = \varepsilon i_*\left(\xi'_k\right) + \lambda_k N'_k,\ k = 1, 2, \ldots, s,\ s < r,\ s \leq n \tag{5.2.44}$$

$$\overline{\Phi}\left(N'_l\right) = \lambda_l N'_l,\ l = s + 1, \ldots, r$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(a_{\alpha\beta})$ matrisinin öz değerleri, $\lambda_k^2 \neq \lambda_k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, s$ ve $\lambda_l^2 = \lambda_l + 1$, $l = s + 1, \ldots, r$ şeklindedir. Özellikle, $s = r$ ise bu durumda (5.2.44) ifadesi

$$\overline{\Phi}\left(N_{\alpha}'\right)=\varepsilon i_{*}\left(\xi_{\alpha}'\right)+\lambda_{\alpha}N_{\alpha}',\ \lambda_{\alpha}^{2}\neq\lambda_{\alpha}+1,\ \alpha=1,2,\ldots,r \tag{5.2.45}$$

ile verilir.

Lemma 5.2.3. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r=\operatorname{codim}M$ olsun. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olması için bir gerek ve yeter koşul M altmanifoldunun normal vektör alanlarının $\overline{\Phi}$ altın yapısının bir öz vektörü olmamasıdır.*

İspat. N, M manifoldunun bir birim normal vektör alanı ve aynı zamanda $\overline{\Phi}$ altın yapısının bir öz değeri olsun. $\overline{\Phi}$ altın yapısının öz değerleri $\lambda^2=\lambda+1$ cebirsel denklemini sağlayan ϕ ve $1-\phi$ sayılarıdır. $N_r'=N$ diyelim. $TM^{\perp}$ normal demetinin bir $\{N_1,N_2,\ldots,N_r\}$ yerel ortonormal çatısı uygun bir dönüşüm altında başka bir $\{N_1',N_2',\ldots,N_r'\}$ yerel ortonormal çatısına dönüşüyorsa (5.2.45) eşitliği yardımıyla

$$\overline{\Phi}\left(N\right)=\varepsilon i_{*}\left(\xi_r'\right)+\lambda N$$

elde edilir. Diğer taraftan, N birim normal vektör alanı $\overline{\Phi}$ altın yapısının bir öz vektörü olduğu için $\overline{\Phi}\left(N\right)=\lambda N$ olur. Böylece, $\xi_r'=0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla, $\xi_1',\ldots,\xi_r'$ tanjant vektör alanları lineer bağımlı olur.

Tersine, $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ tanjant vektör alanları lineer bağımlı olsun. O zaman $TM^{\perp}$ normal demetinin $\{N_1,N_2,\ldots,N_r\}$ yerel ortonormal çatısının uygun bir dönüşümü ile bir ξ_r' tanjant vektör alanının sıfır olduğu elde edilir. (5.2.45) eşitliğinden ξ_r' tanjant vektör alanına karşılık gelen N_r' normal vektör alanı için $\overline{\Phi}\left(N_r'\right)=\lambda N_r'$ olur. Yani, N_r' normal vektör alanı $\overline{\Phi}$ altın yapısının bir öz vektörü olur. Dolayısıyla, olmayana ergi yöntemiyle ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 5.2.3, sırasıyla, Teorem 5.2.3, Teorem 5.2.4 ve Teorem 5.2.5'e uygulanırsa, aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 5.2.6. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *olsun. Eğer* M *altmanifoldunun normal vektör alanları* $\overline{\Phi}$ *altın yapısının bir öz vektörü değil ve* $\nabla\Phi = 0$ *ise o zaman* M *total geodeziktir.*

Teorem 5.2.7. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *olsun. Eğer* M *altmanifoldunun normal vektör alanları* $\overline{\Phi}$ *altın yapısının bir öz vektörü değil,* $tr\left(\Phi\right) =$ *sabit ve* M *total umbilik ise o zaman* M *total geodeziktir.*

Teorem 5.2.8. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *olsun. Eğer* M *altmanifoldunun normal vektör alanları* $\overline{\Phi}$ *altın yapısının bir öz vektörü değil,* $tr\left(\Phi\right) =$ *sabit ve* $\sum_{i=1}^{n} \left(\nabla_{e_i}\Phi\right) e_i = 0$ *ise o zaman* M *bir minimal altmanifolddur. Burada* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, *herhangi bir* $p \in M$ *noktasında* T_pM *tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır.*

Lemma 5.2.4. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun.* $s \leq \min\left(r-1, n\right)$ *için* $\lambda_k^2 \neq \lambda_k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, s$ *ve* $\lambda_A^2 = \lambda_A + 1$, $A = s+1, \ldots, n$ *olduğunu varsayalım. Eğer* $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$ *için* $a_{\alpha\beta} = \lambda_a \delta_{\alpha\beta}$ *ise* M *altmanifoldu üzerindeki* Φ *indirgenmiş yapısının izi*

$$tr(\Phi) = s - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k + \sum_{A=s+1}^{n} \lambda_A, \ \lambda_A \in \{\phi; 1-\phi\} \tag{5.2.46}$$

ile verilir.

İspat. $\overline{U}$ ve L matrislerini, sırasıyla,

$$\overline{U} = \left(\xi_1' \xi_2' \ldots \xi_s' \eta_{s+1}' \ldots \eta_n'\right)$$

ve

$$L=\begin{pmatrix} (1-\lambda_k)\,\delta_{kl} & 0 \\ 0 & \lambda_A\delta_{AB} \end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda (5.2.42) eşitliğinden

$$(\Phi)\,\overline{U}=\overline{U}L$$

olur. Böylece, $\det\left(\overline{U}\right)\neq 0$ olduğu için $(\Phi)=\overline{U}L\overline{U}^{-1}$ elde edilir. Buradan ise

$$tr\,(\Phi)=tr\left(\overline{U}L\overline{U}^{-1}\right)=tr\,(L)=s-\sum_{k=1}^{s}\lambda_k+\sum_{A=s+1}^{n}\lambda_A$$

olduğu görülür. □

Teorem 5.2.9. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r=$ $\operatorname{codim} M$ olsun. $s\leq\min(r-1,n)$ için $\lambda_k^2\neq\lambda_k+1$, $k=1,2,\ldots,s$ ve $\lambda_l^2=\lambda_l+1$, $l=s+1,\ldots,r$ olduğunu varsayalım. Eğer $\alpha,\beta=1,2,\ldots,r$ için $a_{\alpha\beta}=\lambda_a\delta_{\alpha\beta}$ ve $\nabla\Phi=0$ ise o zaman $k=1,2,\ldots,s$ için $h_k(X,Y)=0$ olur.*

İspat. Hipotezden Φ indirgenmiş yapısının kovaryant türevi sıfır olduğu için (5.2.23) eşitliğinden her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$0=\varepsilon\sum_{k=1}^{s}h_k(X,Y)\,\xi_k'+\sum_{k=1}^{s}u_k'(Y)\,A_kX \tag{5.2.47}$$

olur. (5.2.47) ifadesinde (2.15.2) ve (5.2.5) eşitlikleri kullanılırsa, her $Z\in\Gamma(TM)$ için

$$\sum_{k=1}^{s}u_k'(Y)\,h_k(X,Z)=-\sum_{k=1}^{s}u_k'(Z)\,h_k(X,Y) \tag{5.2.48}$$

olduğu kolayca görülür. Bu nedenle, (5.2.5) ve (5.2.48) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s}u_k'(Y)\,h_k(X,Z)&=\sum_{k=1}^{s}u_k'(Y)\,h_k(Z,X)=-\sum_{k=1}^{s}u_k'(X)\,h_k(Z,Y)\\&=-\sum_{k=1}^{s}u_k'(X)\,h_k(Y,Z)=\sum_{k=1}^{s}u_k'(Z)\,h_k(X,Y)\\&=-\sum_{k=1}^{s}u_k'(Y)\,h_k(X,Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\sum_{k=1}^{s} u_k^{'}(Y)\, h_k(X,Z) = 0$$

olduğu gösterir. Diğer taraftan, $k = 1, \ldots, s$ için $\xi_k^{'}$ tanjant vektör alanları lineer bağımsız olması nedeniyle $u_1^{'}, u_2^{'}, \ldots, u_k^{'}$ diferansiyel 1-formları da lineer bağımsızdır. O zaman $k = 1, \ldots, s$ için $h_k(X,Z) = 0$ olmak zorundadır. □

Lemma 5.2.5. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$* codim M *olsun. $s \leq \min(r-1, n)$ için $\lambda_k^2 \neq \lambda_k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, s$ ve $\lambda_l^2 = \lambda_l + 1$, $l = s+1, \ldots, r$ olduğunu varsayalım. Eğer $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$ için $a_{\alpha\beta} = \lambda_a \delta_{\alpha\beta}$ ve $tr(\Phi) = sabit$ ise o zaman her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\sum_{k=1}^{s} h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) = 0 \tag{5.2.49}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \xi_k^{'} = 0 \tag{5.2.50}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (5.2.26) eşitliğinde $\alpha = \beta$ alınırsa, her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) + \varepsilon h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) + \nabla_X \lambda_a \\ &\quad + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}(X) + \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}(X) \\ &= 2\varepsilon h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) + \nabla_X \lambda_a + 2\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}(X) \end{aligned} \tag{5.2.51}$$

olur. O zaman (5.2.51) eşitliğinde α indisi üzerinden toplam alınırsa,

$$2\varepsilon \sum_{k=1}^{s} h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) + \nabla_X \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_a + 2\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\alpha}(X) = 0 \tag{5.2.52}$$

elde edilir. Buradan ise $a_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\alpha}$ ve $l_{\alpha\gamma} = -l_{\gamma\alpha}$ olduğu dikkate alınırsa, (5.2.52) eşitliği

$$2\varepsilon \sum_{k=1}^{s} h_k\left(X, \xi_k^{'}\right) + \nabla_X \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_a = 0 \tag{5.2.53}$$

şeklinde ifade edilir. Hipotezten $tr(\Phi)$ sabit olduğu için (5.2.46) eşitliğinden $\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_a$ sabit olur. Böylece, (5.2.53) eşitliği

$$2\varepsilon\sum_{k=1}^{s}h_k\left(X,\xi_k^{'}\right)=0$$

halini alır. Bu ise

$$\sum_{k=1}^{s}h_k\left(X,\xi_k^{'}\right)=0$$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan, (2.15.2) eşitliğinden dolayı

$$0=\sum_{k=1}^{s}h_k\left(X,\xi_k^{'}\right)=\sum_{k=1}^{s}g\left(A_kX,\xi_k^{'}\right)$$

olur. Böylece, şekil operatörünün self-adjoint özelliği kullanılırsa,

$$0=\sum_{k=1}^{s}g\left(A_kX,\xi_k^{'}\right)=\sum_{k=1}^{s}g\left(A_k\xi_k^{'},X\right)=g\left(\sum_{k=1}^{s}A_k\xi_k^{'},X\right)$$

elde edilir. Bu ise g Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle $\sum_{k=1}^{s}A_k\xi_k^{'}=0$ olduğunu ifade eder. □

Teorem 5.2.10. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r=$ codim M olsun. $s\leq\min(r-1,n)$ için $\lambda_k^2\neq\lambda_k+1$, $k=1,2,\ldots,s$ ve $\lambda_l^2=\lambda_l+1$, $l=s+1,\ldots,r$ olduğunu varsayalım. Eğer $\alpha,\beta=1,2,\ldots,r$ için $a_{\alpha\beta}=\lambda_a\delta_{\alpha\beta}$, $tr(\Phi)=$ sabit ve M total umbilik ise bu durumda $k=1,2,\ldots,s$ için $h_k(X,Y)=0$ olur.*

İspat. M total umbilik altmanifold olduğundan $k=1,\ldots,s$ için

$$h_k=\sigma_kg \tag{5.2.54}$$

olacak şekilde σ_k sabitleri vardır. Diğer taraftan, Lemma 5.2.5'in koşulları sağlandığı için (5.2.49) eşitliği geçerlidir. O halde (5.2.49) ve (5.2.54) eşitlikleri birleştirilirse,

$$0=\sum_{k=1}^{s}h_k\left(X,\xi_k^{'}\right)=\sum_{k=1}^{s}\sigma_kg\left(X,\xi_k^{'}\right)=g\left(X,\sum_{k=1}^{s}\sigma_k\xi_k^{'}\right)$$

elde edilir. Buradan ise g Riemann metriği non-dejenere olduğu için

$$\sum_{k=1}^{s}\sigma_k\xi_k^{'}=0$$

olur. Ayrıca, $k=1,\ldots,s$ için $\xi_k^{'}$ tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olması nedeniyle $\sigma_k=0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, (5.2.54) eşitliğinden $k=1,\ldots,s$ için $h_k(X,Y)=0$ olduğu görülür. □

Teorem 5.2.11. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r=\operatorname{codim} M$ olsun. $s\leq\min(r-1,n)$ için $\lambda_k^2\neq\lambda_k+1$, $k=1,2,\ldots,s$ ve $\lambda_l^2=\lambda_l+1$, $l=s+1,\ldots,r$ olduğunu varsayalım. Eğer her $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,r\}$ için $a_{\alpha\beta}=\lambda_a\delta_{\alpha\beta}$, $tr(\Phi)=$ sabit ve $\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\Phi)e_i=0$ ise o zaman her $k\in\{1,\ldots,s\}$ için $\sum_{i=1}^{n}h_k(e_i,e_i)=0$ eşitliği geçerlidir. Burada $\{e_1,\ldots,e_n\}$, herhangi bir $p\in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır.*

İspat. (5.2.23) eşitliğinde her $i\in\{1,\ldots,n\}$ için $p\in M$ noktasında $X_p=Y_p=e_i$ alınırsa,

$$(\nabla_{e_i}\Phi)e_i=\varepsilon\sum_{k=1}^{s}h_k(e_i,e_i)\xi_k^{'}+\sum_{k=1}^{s}u_k^{'}(e_i)A_ke_i$$

olur. Buradan ise i indisi üzerinden toplam alınırsa, $\sum_{i=1}^{n}u_k^{'}(e_i)e_i=\varepsilon\xi_k^{'}$ eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\Phi)e_i \qquad (5.2.55)\\&=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}h_k(e_i,e_i)\xi_k^{'}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}u_k^{'}(e_i)A_ke_i\\&=\varepsilon\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}h_k(e_i,e_i)\xi_k^{'}+\sum_{k=1}^{s}A_k\sum_{i=1}^{n}u_k^{'}(e_i)e_i\\&=\varepsilon\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}h_k(e_i,e_i)\xi_k^{'}+\varepsilon\sum_{k=1}^{s}A_k\xi_k^{'}\\&=\varepsilon\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}h_k(e_i,e_i)\xi_k^{'}+A_k\xi_k^{'}\right)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, hipotezde Lemma 5.2.5'in koşulları geçerli olduğu için (5.2.50) eşitliği sağlanır. Böylece, (5.2.50) ve (5.2.55) eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} h_k\left(e_i, e_i\right)\right)\xi_k^{'} = 0$$

olduğu görülür. Buradan ise $\xi_k^{'}$ tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız olması sebebiyle her $k \in \{1, \ldots, s\}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} h_k\left(e_i, e_i\right) = 0$$

elde edilir. □

5.3 İnvaryant Altmanifoldlar

Tanım 5.3.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Eğer her $p \in M$ için $\overline{\Phi}\left(T_pM\right) \subseteq T_pM$ ise M altmanifolduna $\overline{M}$ ambient manifoldunun bir invaryant altmanifoldu denir [21].*

Örnek 5.3.1. 4-*boyutlu $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi (x_1, x_2, y_1, y_2) olsun. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) üzerinde $\overline{\Phi}$ dönüşümünü*

$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \phi\frac{\partial}{\partial y_i},\ i = 1, 2$$
$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \phi\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, 2$$

ile tanımlayalım. Burada ϕ, altın oranı göstermektedir. Bu durumda $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayında

$$M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : y_2 = x_1 - x_2 + y_1\}$$

ile verilen bir 3-*boyutlu M altmanifoldunu düşünelim. O zaman TM tanjant demetinin çatısının vektör alanları*

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2},$$

ve

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}$$

olarak alınabilir. Ayrıca, $TM^{\perp}$ *normal demeti*

$$N_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}$$

normal vektör alanı tarafından üretilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}\left(E_1\right) &= \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \phi\frac{\partial}{\partial y_1} \\
&= \phi E_2 + \phi E_3 \in Span\left\{E_2, E_3\right\} \subset \Gamma\left(TM\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}\left(E_2\right) &= \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= -\phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \phi\frac{\partial}{\partial y_2} \\
&= -\phi E_2 \in Span\left\{E_2\right\} \subset \Gamma\left(TM\right),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}\left(E_3\right) &= \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \phi\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= \phi E_1 + \phi E_2 \in Span\left\{E_1, E_2\right\} \subset \Gamma\left(TM\right)
\end{aligned}$$

ifadeleri sağlanır. Böylece, $\overline{\Phi}\left(TM\right) = TM$ *olduğu görülür. Dolayısıyla,* M *bir invaryant altmanifolddur.*

Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\overline{\Phi}\left(T_pM\right) \subseteq T_pM$ ve $\overline{\Phi}\left(T_pM^{\perp}\right) \subseteq$

$T_pM^{\perp}$ olur. O zaman her $\alpha = 1, \ldots, r$ için $\xi_\alpha = 0$ ve $u_\alpha = 0$ olduğu elde edilir. Böylece, (5.2.1) ve (5.2.2) ifadeleri, sırasıyla,

$$\overline{\Phi}\left(i_* X\right) = i_*\left(\Phi\left(X\right)\right) \tag{5.3.1}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(N_\alpha\right) = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} N_\beta, \varepsilon = \pm 1 \tag{5.3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.3.1. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed invaryant altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Bu durumda* M *altmanifoldu üzerinde* $\left(\Phi, g, u_\alpha = 0, \varepsilon\xi_\alpha = 0, \left(a_{\alpha\beta}\right)_{r\times r}\right)$ *indirgenmiş yapısının bileşenleri her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\Phi^2\left(X\right) = \Phi\left(X\right) + X, \tag{5.3.3}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \tag{5.3.4}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}, \tag{5.3.5}$$

$$g\left(\Phi\left(X\right), Y\right) = g\left(X, \Phi\left(Y\right)\right) \tag{5.3.6}$$

ve

$$g\left(\Phi\left(X\right), \Phi\left(Y\right)\right) = g\left(\Phi\left(X\right), Y\right) + g\left(X, Y\right) \tag{5.3.7}$$

eşitliklerini sağlar [21, 22].

Teorem 5.3.2. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Bu durumda* M *altmanifoldunun invaryant olması için bir gerek ve yeter koşul* M *altmanifoldu üzerinde tanımlı* (Φ, g) *indirgenmiş yapısının bir altın Riemann yapı olmasıdır [21, 22].*

Teorem 5.3.3. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed invaryant altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Bu durumda her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$(\nabla_X \Phi) Y = 0, \tag{5.3.8}$$

$$h_\alpha (X, \Phi Y) = \sum_{\beta=1}^{r} h_\beta (X, Y) \, a_{\beta\alpha}, \tag{5.3.9}$$

$$\Phi (A_\alpha X) = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X \tag{5.3.10}$$

ve

$$X (a_{\alpha\beta}) = \sum_{\gamma=1}^{r} l_{\alpha\gamma} (X) \, a_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma=1}^{r} l_{\beta\gamma} (X) \, a_{\alpha\gamma} \tag{5.3.11}$$

eşitlikleri geçerlidir [21].

Teorem 5.3.4. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda* M *altmanifoldu bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifolddur.*

İspat. Teorem 5.3.2 ve (5.3.8) eşitliği göz önünde bulundurulursa, ispat açıktır. □

Teorem 5.3.5. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu* M *olsun.* M *altmanifoldunun invaryant olması için bir gerek ve yeter koşul* $TM^\perp$ *normal demetinin* $\overline{\Phi}$ *altın yapısının öz vektörlerini içeren bir yerel ortonormal çatısının mevcut olmasıdır.*

İspat. Eğer M altmanifoldu invaryant ise bu durumda $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için ξ'_α tanjant vektör alanları sıfır vektör alanlarıdır. Böylece, (5.3.2) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\overline{\Phi} (N'_\alpha) = \lambda_\alpha N'_\alpha$$

elde edilir. Burada $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için λ_a, $(a_{\alpha\beta})$ matrisinin öz değerleridir. Bu ise $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için N'_α normal vektör alanlarının $\overline{\Phi}$ altın yapısının öz vektörleri olduğunu gösterir.

Tersine, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için $\overline{\Phi}\left(N'_\alpha\right) = \lambda_\alpha N'_\alpha$ olsun. O zaman (5.3.2) eşitliğinden $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için $\xi'_\alpha = 0$ olduğu elde edilir. Bu ise M altmanifoldunun invaryant olması demektir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.3.6. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için*

$$\overline{\Phi} i_* X = \phi i_* X \tag{5.3.12}$$

ve

$$\overline{\Phi} N_\alpha = (1 - \phi) N_\alpha \tag{5.3.13}$$

eşitlikleri sağlanırsa M bir total geodezik invaryant altmanifolddur.

İspat. (5.2.1) ve (5.2.2) ifadelerinde, sırasıyla, (5.3.12) ve (5.3.13) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\Phi = \phi I \tag{5.3.14}$$

ve

$$a_{\alpha\beta} = (1 - \phi)\, \delta_{\alpha\beta} \tag{5.3.15}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, (5.3.12) ve (5.3.13) eşitliklerinden M altmanifoldunun invaryant olduğu açıktır. Böylece, (5.3.14) ve (5.3.15) eşitlikleri yardımıyla (5.3.10) ifadesinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 0 = \Phi\left(A_\alpha X\right) - \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X &= \phi A_\alpha X - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta}\,(1 - \phi)\, A_\beta X \\ &= \phi A_\alpha X - (1 - \phi)\, A_\alpha X = (2\phi - 1)\, A_\alpha X \\ &= \sqrt{5} A_\alpha X \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için $A_\alpha X = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, M bir total geodezik invaryant altmanifolddur. $\square$

Teorem 5.3.7. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için*

$$\overline{\Phi} i_* X = (1 - \phi)\, i_* X \tag{5.3.16}$$

ve

$$\overline{\Phi} N_\alpha = \phi N_\alpha \tag{5.3.17}$$

eşitlikleri sağlanırsa M bir total geodezik invaryant altmanifolddur.

İspat. (5.2.1) ve (5.2.2) ifadelerinde, sırasıyla, (5.3.16) ve (5.3.17) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\Phi = (1 - \phi)\, I \tag{5.3.18}$$

ve

$$a_{\alpha\beta} = \phi \delta_{\alpha\beta} \tag{5.3.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.3.16) ve (5.3.17) eşitliklerinden M altmanifoldunun invaryant olduğu açıktır. Böylece, (5.3.18) ve (5.3.19) eşitlikleri kullanılırsa, (5.3.10) ifadesinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(A_\alpha X) - \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X &= (1 - \phi)\, A_\alpha X - \sum_{\beta=1}^{r} \phi \delta_{\alpha\beta} A_\beta X \\ &= (1 - \phi)\, A_\alpha X - \phi A_\alpha X = (1 - 2\phi)\, A_\alpha X \\ &= -\sqrt{5} A_\alpha X \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ için $A_\alpha X = 0$ olduğunu ifade eder. O halde M bir total geodezik invaryant altmanifolddur. $\square$

Teorem 5.3.8. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer her* $X \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\overline{\Phi} i_* X = \phi i_* X, \tag{5.3.20}$$

$$\overline{\Phi} N_\theta = (1-\phi) N_\theta,\ \theta = 1,\ldots,t \tag{5.3.21}$$

ve

$$\overline{\Phi} N_\mu = \phi N_\mu,\ \mu = t+1,\ldots,r \tag{5.3.22}$$

eşitlikleri sağlanırsa $\theta = 1,\ldots,t < r$ *için* $h_\theta(X,Y) = 0$ *olur.*

İspat. (5.3.20), (5.3.21) ve (5.3.22) eşitlikleri dikkate alınırsa, (5.2.1) ve (5.2.2) ifadelerinden

$$\Phi = \phi I, \tag{5.3.23}$$

$$a_{\theta\vartheta} = (1-\phi)\,\delta_{\theta\vartheta},\ \theta,\vartheta = 1,\ldots,t \tag{5.3.24}$$

ve

$$a_{\mu\nu} = \phi\delta_{\mu\nu},\ \mu,\nu = t+1,\ldots,r \tag{5.3.25}$$

olduğu anlaşılır. Diğer taraftan, (5.3.20), (5.3.21) ve (5.3.22) eşitlikleri M altmanifoldunun invaryant olduğunu belirtir. Böylece, (5.3.23), (5.3.24) ve (5.3.25) eşitlikleri kullanılırsa, (5.3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta}\Phi A_\vartheta X + \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu}\Phi A_\nu X - \sum_{\vartheta=1}^{t} a_{\theta\vartheta} A_\vartheta X - \sum_{\nu=t+1}^{r} a_{\mu\nu} A_\nu X \\
&= \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta}\phi A_\vartheta X + \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu}\phi A_\nu X - \sum_{\vartheta=1}^{t} (1-\phi)\,\delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X - \sum_{\nu=t+1}^{r} \phi\delta_{\mu\nu} A_\nu X \\
&= \phi\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X + \phi\sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} A_\nu X - (1-\phi)\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X - \phi\sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} A_\nu X \\
&= \phi\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X - (1-\phi)\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X \\
&= (2\phi-1)\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_\vartheta X = (2\phi-1)\, A_\theta X \\
&= \sqrt{5} A_\theta X
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\theta = 1, \ldots, t < r$ için $A_\theta X = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, (2.15.2) eşitliğinden $\theta = 1, \ldots, t < r$ için

$$h_\theta(X, Y) = 0$$

olur. □

Teorem 5.3.9. *Bir $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\overline{\Phi} i_* X = (1 - \phi) i_* X, \tag{5.3.26}$$

$$\overline{\Phi} N_\theta = \phi N_\theta,\ \theta = 1, \ldots, t \tag{5.3.27}$$

ve

$$\overline{\Phi} N_\mu = (1 - \phi) N_\mu,\ \mu = t + 1, \ldots, r \tag{5.3.28}$$

eşitlikleri sağlanırsa $\theta = 1, \ldots, t < r$ için $h_\theta(X, Y) = 0$ olur.

İspat. (5.3.26), (5.3.27) ve (5.3.28) eşitlikleri yardımıyla (5.2.1) ve (5.2.2) ifadelerinden

$$\Phi = (1 - \phi) I, \tag{5.3.29}$$

$$a_{\theta\vartheta} = \phi\delta_{\theta\vartheta},\ \theta, \vartheta = 1, \ldots, t \tag{5.3.30}$$

ve

$$a_{\mu\nu} = (1 - \phi)\delta_{\mu\nu},\ \mu, \nu = t + 1, \ldots, r \tag{5.3.31}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, (5.3.26), (5.3.27) ve (5.3.28) eşitliklerinden açıkça görüldüğü gibi, M bir invaryant altmanifolddur. O halde (5.3.29), (5.3.30) ve (5.3.31) eşitlikleri kullanılırsa, (5.3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} \Phi A_\vartheta X + \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} \Phi A_\nu X \\ &- \sum_{\vartheta=1}^{t} a_{\theta\vartheta} A_\vartheta X - \sum_{\nu=t+1}^{r} a_{\mu\nu} A_\nu X \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} (1-\phi) A_{\vartheta} X + \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} (1-\phi) A_{\nu} X \\
&- \sum_{\vartheta=1}^{t} \phi \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X - \sum_{\nu=t+1}^{r} (1-\phi) \delta_{\mu\nu} A_{\nu} X \\
&= (1-\phi) \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X + (1-\phi) \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} A_{\nu} X \\
&- \phi \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X - (1-\phi) \sum_{\nu=t+1}^{r} \delta_{\mu\nu} A_{\nu} X \\
&= (1-\phi) \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X - \phi \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X \\
&= (1-2\phi) \sum_{\vartheta=1}^{t} \delta_{\theta\vartheta} A_{\vartheta} X = -(2\phi-1) A_{\theta} X \\
&= -\sqrt{5} A_{\theta} X
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan ise $A_{\theta} X = 0$ olduğu görülür. Böylece, (2.15.2) eşitliğinden $\theta = 1, \ldots, t < r$ için

$$h_{\theta}(X, Y) = 0$$

olur. □

Teorem 5.3.10. *Bir m-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed invaryant total umbilik altmanifoldu M olsun. Eğer*

$$\{tr(\Phi)\}^2 \neq n \{n + tr(\Phi)\}$$

veya denk olarak

$$\{tr(\Phi)\}^2 \neq \lambda^2 n^2$$

ise o zaman M total geodeziktir. Burada λ, $x^2 - x - 1 = 0$ *cebirsel denkleminin bir köküdür.*

İspat. M total umbilik olduğundan $\alpha = 1, \ldots, r$ için $h_{\alpha} = \sigma_{\alpha} g$ olacak şekilde σ_{α}

sabitleri vardır. Bu durumda (5.3.9) eşitliği her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\sigma_\alpha g(X, \Phi Y) = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta g(X, Y) \tag{5.3.32}$$

ile ifade edilir. Özel olarak, (5.3.32) eşitliğinde herhangi bir $p \in M$ noktasında $X_p = Y_p = e_i$ alınırsa,

$$\sigma_\alpha g(e_i, \Phi e_i) = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta g(e_i, e_i) = g(e_i, e_i)\sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta \tag{5.3.33}$$

elde edilir. O halde (5.3.33) eşitliğinde i indisi üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_\alpha g(e_i, \Phi e_i) = \sigma_\alpha\sum_{i=1}^{n} g(e_i, \Phi e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(e_i, e_i)\sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta = n\sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta$$

olduğu bulunur. Bu ise

$$tr(\Phi)\sigma_\alpha = n\sum_{\beta=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\beta \tag{5.3.34}$$

olduğunu gösterir. Öyleyse, (5.3.34) eşitliği önce $a_{\beta\alpha}$ bileşeni ile çarpılır ve daha sonra α indisi üzerinden toplam alınırsa,

$$tr(\Phi)\sum_{\alpha=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\alpha = n\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\beta\alpha}a_{\alpha\gamma}\sigma_\gamma = n\sum_{\gamma=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{r} a_{\beta\alpha}a_{\alpha\gamma}\sigma_\gamma \tag{5.3.35}$$

olur. O zaman (5.3.5) ifadesi dikkate alınırsa, (5.3.35) eşitliği

$$\begin{aligned} tr(\Phi)\sum_{\alpha=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\alpha &= n\sum_{\gamma=1}^{r}(\delta_{\beta\gamma} + a_{\beta\gamma})\sigma_\gamma \\ &= n\sum_{\gamma=1}^{r}\delta_{\beta\gamma}\sigma_\gamma + n\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\beta\gamma}\sigma_\gamma \\ &= n\sigma_\beta + n\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\beta\gamma}\sigma_\gamma \end{aligned}$$

ile verilir. Buradan ise

$$\sigma_\beta = \frac{1}{n}(tr(\Phi) - n)\sum_{\alpha=1}^{r} a_{\beta\alpha}\sigma_\alpha \tag{5.3.36}$$

olduğu görülür. Böylece, (5.3.36) eşitliği (5.3.34) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left(tr(\Phi)(tr(\Phi) - n) - n^2\right)\sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}\sigma_\beta = 0 \tag{5.3.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan, hipotezden $tr(\Phi) \neq \lambda n$ olduğu için

$$\{tr(\Phi)\}^2 \neq n\{n + tr(\Phi)\}$$

ifadesinin sağlandığı kolaylıkla görülür. O halde (5.3.37) eşitliğinden

$$\sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}\sigma_\beta = 0$$

olduğu anlaşılır. Bu nedenle, (5.3.36) eşitliği $\beta = 1, \ldots, r$ için

$$\sigma_\beta = 0$$

olduğunu belirtir. Dolayısıyla, total umbilik altmanifold tanımından M bir total geodezik altmanifolddur. □

Teorem 5.3.11. *Bir $\left(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ Riemann çarpım altın Riemann manifoldunun herhangi bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $M = M_1 \times M_2$ bir yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olacak şekilde $\overline{M}_1$ ve $\overline{M}_2$ ambient manifoldlarının, sırasıyla, M altmanifoldunda M_1 ve M_2 total geodezik altmanifoldları vardır.*

İspat. Her $p \in M$ için

$$T_p^1 = \{X_p \in T_pM : \Phi X_p = \phi X_p\} \tag{5.3.38}$$

ve

$$T_p^2 = \{X_p \in T_pM : \Phi X_p = (1-\phi) X_p\} \tag{5.3.39}$$

diyelim. Burada Φ, M invaryant altmanifoldu üzerindeki altın yapıyı göstermektedir. O zaman (5.3.38) ve (5.3.39) eşitlikleri ile verilen altuzaylar M altmanifoldunda, sırasıyla, T^1 ve T^2 distribüsyonlarını tanımlar. $Y \in \Gamma(T^1)$ olsun. Bu durumda M invaryant altmanifoldu için $\nabla\Phi = 0$ olduğu dikkate alınırsa, her

$X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\Phi\nabla_X Y &= \nabla_X \Phi Y\\ &= \nabla_X \phi Y\\ &= \phi\nabla_X Y\end{aligned}$$

olur. Buradan ise (5.3.38) eşitliği yardımıyla

$$\nabla_X Y \in \Gamma\left(T^1\right) \tag{5.3.40}$$

elde edilir. Bu ise T^1 distribüsyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olduğunu ifade eder. Benzer şekilde, T^2 distribüsyonunun ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olduğunu belirten her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(T^2)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma\left(T^2\right) \tag{5.3.41}$$

ifadesinin sağlandığı gösterilebilir. O zaman (5.3.40) ve (5.3.41) ifadelerinden, sırasıyla, T^1 ve T^2 distribüsyonlarının integral manifoldlarının M altmanifoldunda total geodezik olduğu anlaşılır. T^1 ve T^2 distribüsyonlarının integral manifoldlarına, sırasıyla, M_1 ve M_2 diyelim. Şimdi, M_1 ve M_2 integral manifoldlarının, sırasıyla, $\overline{M}_1$ ve $\overline{M}_2$ manifoldlarının altmanifoldları olduğunu gösterelim. Eğer $X \in \Gamma(T^1)$ ise o zaman (4.3.29) ve (4.3.30) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\overline{r}X &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)I+\overline{\Phi}\right)X = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)X+\overline{\Phi}X\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)X+\Phi X\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi-1)X+\phi X\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\phi-1)X = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}X\\ &= X\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{s}X &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi I - \overline{\Phi}\right)X = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi X - \overline{\Phi}X\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi X - \Phi X\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi X - \phi X\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Bu ise $X \in \Gamma\left(T\overline{M}_1\right)$ olduğunu belirtir. Benzer şekilde $X \in \Gamma\left(T^2\right)$ ise $X \in \Gamma\left(T\overline{M}_2\right)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. $\square$

5.4 Anti-İnvaryant Altmanifoldlar

Tanım 5.4.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Eğer her $p \in M$ için $\overline{\Phi}\left(T_pM\right) \subseteq T_pM^{\perp}$ ise M altmanifolduna $\overline{M}$ ambient manifoldunun bir anti-invaryant altmanifoldu denir [21].*

Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\overline{\Phi}\left(T_pM\right) \subseteq T_pM^{\perp}$ olur. Bu ise $\Phi = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, (5.2.1) ifadesi her $X \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$\overline{\Phi}\left(i_*X\right) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha\left(X\right) N_\alpha \qquad (5.4.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.4.1. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Bu durumda M altmanifoldu üzerinde $\left(\Phi = 0, g, u_\alpha, \varepsilon\xi_\alpha, \left(a_{\alpha\beta}\right)_{r\times r}\right)$ indirgenmiş yapısının bileşenleri her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$X = \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha\left(X\right)\xi_\alpha \ \textit{veya}\ I = \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \otimes \xi_\alpha, \qquad (5.4.2)$$

$$(1 - a_{\alpha\alpha})\, u_\alpha (X) = 0, \tag{5.4.3}$$

$$\sum_{\beta=1}^{r} (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})\, \xi_\beta = 0 \tag{5.4.4}$$

ve

$$g(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X)\, u_\alpha (Y) \tag{5.4.5}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. M bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifold olduğu için $\Phi = 0$ olur. O zaman (5.2.9), (5.2.10), (5.2.13) ve (5.2.16) eşitliklerinden, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$X = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X)\, \xi_\alpha \text{ veya } I = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \otimes \xi_\alpha,$$

$$(1 - a_{\alpha\alpha})\, u_\alpha (X) = 0,$$

$$\sum_{\beta=1}^{r} (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})\, \xi_\beta = 0$$

ve

$$g(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X)\, u_\alpha (Y)$$

elde edilir. □

Teorem 5.4.2. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Bu durumda her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha (X, Y)\, \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (Y)\, A_\alpha X = 0, \tag{5.4.6}$$

$$(\nabla_X u_\alpha)\, Y = \sum_{\beta=1}^{r} u_\beta (Y)\, l_{\alpha\beta} (X) + \sum_{\beta=1}^{r} h_\beta (X, Y)\, a_{\beta\alpha} \tag{5.4.7}$$

ve

$$\nabla_X \xi_\alpha = \varepsilon \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X + \sum_{\beta=1}^{r} l_{\alpha\beta} (X)\, \xi_\beta \tag{5.4.8}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. M altmanifoldu anti-invaryant olduğu için açıkça görüldüğü gibi $\Phi = 0$ olur. O halde (5.2.23), (5.2.24) ve (5.2.25) eşitliklerinden, sırasıyla,

$$\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} h_\alpha (X, Y) \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (Y) A_\alpha X = 0,$$

$$(\nabla_X u_\alpha) Y = \sum_{\beta=1}^{r} u_\beta (Y) l_{\alpha\beta} (X) + \sum_{\beta=1}^{r} h_\beta (X, Y) a_{\beta\alpha}$$

ve

$$\nabla_X \xi_\alpha = \varepsilon \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} A_\beta X + \sum_{\beta=1}^{r} l_{\alpha\beta} (X) \xi_\beta$$

olduğu bulunur. □

Teorem 5.4.3. *Bir $2n$-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$ codim M olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ise o zaman M bir total geodezik anti-invaryant altmanifolddur.*

İspat. Öncelikle, $\dim \overline{M} = 2n$ ve $\dim M = n$ olduğu için $r = n$ olur. Şimdi, her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ olduğunu varsayalım. $U = (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)$ diyelim. Bu durumda U bir $n \times n$ tipinde matristir. (5.2.13) eşitliği yardımıyla $(\Phi) U = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için ξ_α tanjant vektör alanları lineer bağımsız olduğundan U matrisinin tersi vardır. Böylece, $\Phi = 0$ olduğu bulunur. Buradan ise (5.2.1) eşitliğinden her $X \in \Gamma (TM)$ için

$$\overline{\Phi} (i_* X) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha (X) N_\alpha \in \Gamma (TM)^\perp$$

elde edilir. Bu ise M altmanifoldunun anti-invaryant olduğunu ifade eder. Buna ek olarak, Sonuç 5.2.4'ün ifadesindeki koşullar açık bir şekilde sağlandığı için M total geodeziktir. Dolayısıyla, M hem total geodezik hem de anti-invaryant bir altmanifolddur. □

Sonuç 5.4.1. *Bir $2n$-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$*

codim M *olsun. Eğer her* $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ *için* $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ *ise o zaman* M *bir total geodezik anti-invaryant altmanifolddur.*

İspat. Önerme 5.2.5 ve Teorem 5.4.3 birlikte düşünülürse, istenen ispat bulunur. □

$U = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_r)$ diyelim. $\alpha = 1, \dots, r$ için $u_\alpha(X) = 0$ eşitliğinin sıfırdan farklı çözümünün olmaması için bir gerek ve yeter koşul $U = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_r)$ matrisinin rankının n olmasıdır. Bu durumda $r \geq n$ olur.

Teorem 5.4.4. *Bir* $2n$*-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir* n*-boyutlu izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda* M *total geodezik bir altmanifolddur.*

İspat. M bir izometrik immersed anti-invaryant altmanifold olduğu için $\Phi = 0$ olur. Bu durumda doğal olarak $\nabla \Phi = 0$ eşitliği sağlanır. $r = n = \dim M$ olduğu için ξ_α tanjant vektör alanları lineer bağımsızdır. Ayrıca, (5.4.4) eşitliğinden $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ elde edilir. Bir başka deyişle, $(a_{\alpha\beta}) = I$ olur. Böylece, Teorem 5.2.3'ün koşulları sağlanır. O halde M bir total geodezik altmanifolddur. □

Teorem 5.4.5. *Bir* m*-boyutlu* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir* n*-boyutlu izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer* $r > n$ *ise bu durumda*

$$N_i = \overline{\Phi} i_* E_i, \; i = 1, \dots, n$$

ve

$$\overline{\Phi}(N_h) = \lambda_h N_h, \; h = n+1, \dots, r$$

olacak şekilde $TM^\perp$ *normal demetinin bir* $\{N_1, N_2, \dots, N_r\}$ *yerel ortonormal çatısı vardır. Burada* $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$*,* TM *tanjant demetinin bir yerel ortonormal çatısıdır.*

İspat. Eğer $r > n = \dim M$ ise bu durumda $\alpha = 1, \ldots, r$ için ξ_α tanjant vektör alanları lineer bağımlıdır. O zaman (5.4.4) eşitliği ξ'_α, $\alpha = 1, \ldots, r$ tanjant vektör alanları açışından düşünüldüğünde

$$0 = \sum_{\beta=1}^{r} (\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \xi'_\beta = \sum_{\beta=1}^{r} (\delta_{\alpha\beta} - \lambda_a \delta_{\alpha\beta}) \xi'_\beta = \sum_{\beta=1}^{r} (1 - \lambda_a) \delta_{\alpha\beta} \xi'_\beta = (1 - \lambda_a) \xi'_\alpha$$

olduğu bulunur. Burada λ_a, $(a_{\alpha\beta})$ matrisinin öz değerleridir. Dolayısıyla, $i = 1, \ldots, n$ ve $h = n+1, \ldots, r$ için ξ'_i tanjant vektör alanlarının lineer bağımsız, $\xi'_h = 0$, $\lambda_i = 1$ ve $\lambda_h^2 = \lambda_h + 1$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda (5.2.12) eşitliği dikkate alınırsa,

$$u'_j (\xi'_i) = \varepsilon \delta_{ij}, \; i, j = 1, \ldots, n$$

elde edilir. Bu yüzden, $i = 1, \ldots, n$ için ξ'_i birim tanjant vektör alanlarıdır ve ikişer ikişer ortogonaldir. Dolayısıyla, $i = 1, \ldots, n$ için ξ'_i tanjant vektör alanları TM tanjant demetinin bir yerel ortonormal çatısını oluşturur. $i, j = 1, \ldots, n$ için $N_i^\star = \overline{\Phi} i_* \xi'_i$ ve $N_j^\star = \overline{\Phi} i_* \xi'_j$ diyelim. O zaman M altmanifoldunun anti-invaryant olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(N_i^\star, N_j^\star\right) &= \overline{g}\left(\overline{\Phi} i_* \xi'_i, \overline{\Phi} i_* \xi'_j\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi} i_* \xi'_i, i_* \xi'_j\right) + \overline{g}\left(i_* \xi'_i, i_* \xi'_j\right) \\
&= \overline{g}\left(i_* \xi'_i, i_* \xi'_j\right) \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $i = 1, \ldots, n$ için N'_i normal vektör alanları $N'_i = \overline{\Phi} i_* E_i$ olacak şekilde seçilebilir. Aynı zamanda, (5.2.22) eşitliğinden $h = n+1, \ldots, r$ için

$$\overline{\Phi}\left(N'_h\right) = \varepsilon i_* \left(\xi'_h\right) + \sum_{k=n+1}^{r} \lambda_h \delta_{hk} N'_k = \lambda_h N'_h$$

olur. Bu ise $h = n+1, \ldots, r$ için N'_h normal vektör alanlarının $\overline{\Phi}$ altın yapısının λ_h öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler olduğunu gösterir. O halde ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.4.6. *Bir m-boyutlu* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed anti-invaryant altmanifoldu* M *ve* $r = \operatorname{codim} M$ *olsun. Eğer* $r > n$ *ise bu durumda* $i = 1, \ldots, n$ *için* $h_i = 0$ *olacak şekilde* $TM^{\perp}$ *normal demetinin* N_i, $i = 1, \ldots, n$ *birim ve ikişer ikişer ortogonal normal vektör alanları vardır.*

İspat. M altmanifoldunun anti-invaryant olması nedeniyle (5.4.6) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$0 = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} h_i\left(X, Y\right) \xi_i^{'} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) A_i X \tag{5.4.9}$$

olur. (5.4.9) ifadesinde (2.15.2) ve (5.2.5) eşitlikleri kullanılırsa, her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(X, Z\right) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Z\right) h_i\left(X, Y\right) \tag{5.4.10}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece, (5.2.5) ve (5.4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(X, Z\right) &= \sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(Z, X\right) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(X\right) h_i\left(Z, Y\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(X\right) h_i\left(Y, Z\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Z\right) h_i\left(X, Y\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(X, Z\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $2\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(X, Z\right) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}\left(Y\right) h_i\left(X, Z\right) = 0 \tag{5.4.11}$$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan, eğer $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, TM tanjant demetinin bir ortonormal çatısı ise Teorem 5.4.5 sayesinde $N_1, N_2, \ldots, N_n$ normal vektör alanları $i = 1, \ldots, n$ için $N_i = \overline{\Phi} i_* E_i$ şeklinde seçilebilir. Bu nedenle, (5.4.1) eşitliğinden

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} N_j = N_i = \overline{\Phi}\left(i_* E_i\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j^{'}\left(E_i\right) N_j$$

elde edilir. Bu ise $\delta_{ij} = u_j^{'}(E_i)$ olması demektir. Böylece, (5.4.11) eşitliğinde $Y = E_j$ alınırsa, $i = 1, \ldots, n$ için

$$h_i(X, Z) = 0$$

olduğu bulunur. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

5.5 Semi-İnvaryant Altmanifoldlar

5.5.1 Semi-İnvaryant Altmanifoldların Karakterizasyonları

Tanım 5.5.1. *Bir $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Eğer her $p \in M$ için*

$$\overline{\Phi}(D_p) = D_p \tag{5.5.1}$$

ve

$$\overline{\Phi}\left(D_p^{\perp}\right) \subseteq T_pM^{\perp} \tag{5.5.2}$$

koşullarını sağlayan $T_pM = D_p \oplus D_p^{\perp}$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları mevcut ise M altmanifolduna $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ altın Riemann manifoldunun bir semi-invaryant altmanifoldu denir. Burada D ve $D^{\perp}$, sırasıyla, invaryant distribüsyon ve anti-invaryant distribüsyon olarak adlandırılır [65].

Şimdi, bazı semi-invaryant altmanifold örnekleri verelim.

Örnek 5.5.1. *4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi (x_1, x_2, y_1, y_2) olsun. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) üzerinde $\overline{\Phi}$ dönüşümünü*

$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial y_i},\ i = 1, 2$$
$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, 2$$

kuralı ile tanımlayalım. Burada λ, $x^2 = x + 1$ cebirsel denkleminin bir köküdür. Bu durumda $\overline{\Phi}$ dönüşümü bir altın yapıdır. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayında

$$M = \{(x_1, x_2, 0, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

ile verilen 2-boyutlu bir M altmanifoldunu düşünelim. O zaman TM tanjant demetinin bir çatısı

$$\left\{E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right\}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\left\{N_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, N_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2}\right\}$$

kümesinin $TM^{\perp}$ normal demetinin bir çatısı olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi, $D = Span\{E_2\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_1\}$ diyelim. Bu durumda açık bir şekilde TM tanjant demeti

$$TM = D \oplus D^{\perp}$$

ayrışımına sahiptir. Diğer taraftan,

$$\overline{\Phi}(E_1) = \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial y_1} \in Span\{N_1\} \subset \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(E_2) &= \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y_2} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \in Span\{E_2\} \subset \Gamma(TM) \end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir. Buradan ise D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının, sırasıyla, invaryant ve anti-invaryant olduğu görülür. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur. Ayrıca, $D = Span\{E_2\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_1\}$ distribüsyonları integrallenebilirdir.

Örnek 5.5.2. *4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi (x_1, x_2, y_1, y_2) olsun. $\mathbb{R}^4$ üzerinde*

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \phi\frac{\partial}{\partial y_i},\ i = 1,2 \\ \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) &= \phi\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,2 \end{aligned}$$

ile verilen $\overline{\Phi}$ dönüşümünü ele alalım. Burada ϕ değeri, altın orandır. Bu durumda $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayında 2-boyutlu bir M altmanifoldunu

$$M = \{(x_1, x_2, x_1, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlayalım. O zaman TM tanjant demetinin bir çatısı

$$\left\{E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1},\ E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$$

ile verilir. Ayrıca, $TM^\perp$ normal demetinin

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

ve

$$N_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_1}$$

vektör alanları tarafından üretildiği kolayca gösterilebilir. Bir başka deyişle,

$$TM^\perp = Span\left\{N_1 = \frac{\partial}{\partial y_2},\ N_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_1}\right\}$$

olur. $D = Span\{E_1\}$ ve $D^\perp = Span\{E_2\}$ olarak alınırsa, $TM = D \oplus D^\perp$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(E_1) = \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= \phi\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial}{\partial y_1} \\ &= \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \in Span\{E_1\} \subset \Gamma(TM) \end{aligned}$$

ve

$$\overline{\Phi}(E_2) = \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \phi\frac{\partial}{\partial y_2} \in Span\{N_1\} \subset \Gamma\left(TM^\perp\right)$$

ifadeleri sağlanır. Böylece, D ve $D^{\perp}$, sırasıyla, invaryant ve anti-invaryant distribüsyonlardır. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur. Ayrıca, $D = Span\{E_1\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_2\}$ distribüsyonları integrallenebilirdir.

Örnek 5.5.3. *4-boyutlu $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi (x_1, x_2, y_1, y_2) olsun. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) üzerinde $\overline{\Phi}$ dönüşümünü*

$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (1-\phi)\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,2$$
$$\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \phi\frac{\partial}{\partial y_i},\ i = 1,2$$

kuralı ile tanımlayalım. Bu durumda $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. Burada ϕ ve $1-\phi$ değerleri, $x^2 = x + 1$ cebirsel denkleminin kökleridir. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) Öklid uzayında

$$M = \left\{(\phi t \cos u, \phi t \sin u, t\cos v, t \sin v) : t > 0, u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ile verilen 3-boyutlu bir M altmanifoldunu ele alalım. O zaman TM tanjant demetinin çatısının vektör alanları

$$E_1 = \phi\cos u\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi\sin u\frac{\partial}{\partial x_2} + \cos v\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin v\frac{\partial}{\partial y_2},$$
$$E_2 = -\phi t\sin u\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi t\cos u\frac{\partial}{\partial x_2},$$

ve

$$E_3 = -t\sin v\frac{\partial}{\partial y_1} + t\cos v\frac{\partial}{\partial y_2}$$

olarak seçilebilir. Ayrıca,

$$N_1 = \cos u\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin u\frac{\partial}{\partial x_2} - \phi\cos v\frac{\partial}{\partial y_1} - \phi\sin v\frac{\partial}{\partial y_2}$$

M altmanifoldu üzerinde bir normal vektör alanıdır. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları $D = Span\{E_2, E_3\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_1\}$ olacak şekilde seçilirse, bu durumda TM tanjant demeti

$$TM = D \oplus D^{\perp}$$

ile ifade edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(E_1) &= \overline{\Phi}\left(\phi\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+\cos v\frac{\partial}{\partial y_1}+\sin v\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\ &= -\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}-\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+\phi\cos v\frac{\partial}{\partial y_1}+\phi\sin v\frac{\partial}{\partial y_2}\\ &= -N_1 \in Span\{N_1\}\subset\Gamma\left(TM^{\perp}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(E_2) &= \overline{\Phi}\left(-\phi t\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi t\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\ &= t\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}-t\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}=-\frac{1}{\phi}E_2\in Span\{E_2\}\subset\Gamma(TM)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(E_3) &= \overline{\Phi}\left(t\sin v\frac{\partial}{\partial y_1}+t\cos v\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\ &= -t\sin v\frac{\partial}{\partial y_1}+t\cos v\frac{\partial}{\partial y_2}=E_3\in Span\{E_3\}\subset\Gamma(TM)\end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir. Böylece, D distribüsyonu invaryant, $D^{\perp}$ distribüsyonu ise anti-invaryant olur. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur.

Örnek 5.5.4. 4-*boyutlu $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi (x_1,x_2,y_1,y_2) olsun. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$) üzerinde $\overline{\Phi}$ dönüşümünü*

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \phi\frac{\partial}{\partial x_i},\ i=1,2\\ \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) &= (1-\phi)\frac{\partial}{\partial y_i},\ i=1,2\end{aligned}$$

kuralı ile verelim. Bu durumda $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. Burada ϕ ve $1-\phi$ değerleri, $x^2=x+1$ cebirsel denkleminin kökleridir. $\mathbb{R}^4$ (ya da $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$) Öklid uzayında 2-*boyutlu bir M altmanifoldunu*

$$M=\left\{(u,v,\phi\cos v,\phi\sin v):u,v\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$\left\{E_1=\frac{\partial}{\partial x_1},E_2=\frac{\partial}{\partial x_2}-\phi\sin v\frac{\partial}{\partial y_1}+\phi\cos v\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}$$

kümesi TM tanjant demeti için bir çatı olarak seçilebilir. Ayrıca, $N_1 = \phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin v\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos v\frac{\partial}{\partial y_2}$ ve $N_2 = -\cos v\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin v\frac{\partial}{\partial y_2}$ ise M altmanifoldu üzerinde normal vektör alanlarıdır ve $TM^{\perp}$ normal demetini üretir. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları $D = Span\{E_1\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_2\}$ olacak şekilde seçilirse, $TM = D \oplus D^{\perp}$ olur. Diğer taraftan,

$$\overline{\Phi}(E_1) = \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \phi E_1 \in Span\{E_1\} \subset \Gamma(TM)$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(E_2) &= \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \phi\sin v\frac{\partial}{\partial y_1} + \phi\cos v\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\ &= \phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin v\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos v\frac{\partial}{\partial y_2}\\ &= N_1 \subset \Gamma\left(TM^{\perp}\right)\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, D distribüsyonunun invaryant, $D^{\perp}$ distribüsyonunun ise anti-invaryant olduğu elde edilir. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur.

Örnek 5.5.5. *5-boyutlu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ (ya da $\mathbb{R}^5$) Öklid uzayının bir yerel koordinat sistemi $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$ olsun. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ (ya da $\mathbb{R}^5$) üzerinde $\overline{\Phi}$ dönüşümünü*

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \phi\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,2\\ \overline{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) &= (1-\phi)\frac{\partial}{\partial y_i},\ i = 1,2,3\end{aligned}$$

kuralı ile tanımlayalım. Bu durumda $\overline{\Phi}$ bir altın yapıdır. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ (ya da $\mathbb{R}^5$) Öklid uzayında

$$M = \left\{(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 : \phi x_1 + y_2 = 0,\ \phi x_2 + y_1 = 0\right\}$$

ile verilen 3-boyutlu bir M altmanifoldunu düşünelim. O zaman

$$\{E_1 = (1,0,0,-\phi,0),\ E_2 = (0,1,-\phi,0,0),\ E_3 = (0,0,0,0,1)\}$$

kümesi TM tanjant demeti için çatıdır. Ayrıca,

$$\{N_1 = (\phi,0,0,1,0),\ N_2 = (0,\phi,1,0,0)\}$$

kümesi $TM^{\perp}$ normal demetinin bir çatısı olur. Şimdi, $D = Span\{E_3\}$ ve $D^{\perp} = Span\{E_1, E_2\}$ diyelim. Bu durumda TM tanjant demeti

$$TM = D \oplus D^{\perp}$$

direkt toplamı ile ifade edilir. Diğer taraftan,

$$\overline{\Phi}(E_1) = \overline{\Phi}(1,0,0,-\phi,0) = (\phi,0,0,-(1-\phi)\phi,0) = (\phi,0,0,1,0) = N_1 \subset \Gamma\left(TM^{\perp}\right),$$

$$\overline{\Phi}(E_2) = \overline{\Phi}(0,1,-\phi,0,0) = (0,\phi,-(1-\phi)\phi,0,0) = (0,\phi,1,0,0) = N_2 \subset \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(E_3) &= \overline{\Phi}(0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,1-\phi)\\ &= (1-\phi)(0,0,0,0,1) \in Span\{E_3\} \subset \Gamma(TM)\end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir. Böylece, D distribüsyonu invaryant, $D^{\perp}$ distribüsyonu ise anti-invaryant olur. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur.

Önerme 5.5.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$TD^{\perp} = \{0\}, \tag{5.5.3}$$

$$ND^{\perp} = \overline{\Phi}D^{\perp}, \tag{5.5.4}$$

$$ND = \{0\} \tag{5.5.5}$$

ve

$$TD = D \tag{5.5.6}$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. $D^{\perp}$ distribüsyonu $\overline{\Phi}$-anti-invaryant olduğu için $\overline{\Phi}\left(D^{\perp}\right) \subseteq TM^{\perp}$ olur. Buradan ise (5.1.6) ayrışımı yardımıyla (5.5.3) eşitliğinin sağlandığı açıkça görülür. Bununla birlikte, (5.5.3) ifadesi (5.5.4) eşitliğinin geçerli olduğunu belirtir. D distribüsyonu $\overline{\Phi}$-invaryant olduğundan $\overline{\Phi}(D) = D \subseteq TM$ olur. Bu yüzden, (5.1.6) ayrışımı kullanılırsa, (5.5.5) eşitliği elde edilir. T endomorfizminin $\overline{g}$-simetrik olduğu dikkate alınırsa, (5.1.6) ayrışımından her $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}(TX, Y) = \overline{g}(X, TY) = \overline{g}\left(X, \overline{\Phi}Y\right)$$

olduğu bulunur. Böylece, $D^{\perp}$ distribüsyonunun $\overline{\Phi}$-anti-invaryant olması nedeniyle

$$\overline{g}(TX, Y) = 0$$

olur. Bu ise $TD \perp D^{\perp}$ olduğu ifade eder. Aynı zamanda, $TD \subseteq TM$ olduğu için

$$T(D) \subseteq D \tag{5.5.7}$$

ifadesine ulaşılır. Diğer taraftan, (5.1.8) eşitliğinden her $X \in \Gamma(D)$ vektör alanı

$$X = T^2X - TX + tNX$$

formunda verilebilir. Buradan ise (5.5.5) ve (5.5.7) ifadeleri kullanılırsa,

$$D \subseteq T(D) \tag{5.5.8}$$

olduğu görülür. O halde (5.5.7) ve (5.5.8) ifadelerinden (5.5.6) eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldunun $\overline{M}$ altın Riemann manifoldunun bir semi-invaryant altmanifoldu olması için bir gerek ve yeter koşul $NT = 0$ olmasıdır.*

İspat. M bir semi-invaryant altmanifold olsun. Bu durumda her $p \in M$ için $\overline{\Phi}(D_p) = D_p$ ve $\overline{\Phi}\left(D_p^{\perp}\right) \subseteq T_pM$ koşullarını sağlayan $T_pM = D_p \oplus D_p^{\perp}$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları vardır. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. O zaman

$$r + s = I,\ r^2 = r,\ s^2 = s \text{ ve } rs = sr = 0$$

bağıntıları sağlanır. O halde herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ tanjant vektör alanı $X = rX + sX$ şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden, (5.1.6), (5.5.3) ve (5.5.5) eşitlikleri dikkate alınırsa, $\overline{\Phi}X$ vektör alanı

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}X &= \overline{\Phi}(rX + sX) = \overline{\Phi}rX + \Phi sX \\ &= TrX + NrX + TsX + NsX \\ &= TrX + 0 + 0 + NsX \\ &= TrX + NsX \end{aligned}$$

ile verilebilir. Aynı zamanda, $\overline{\Phi}X$ vektör alanının (5.1.6) eşitliğinde verilen ayrışımı kullanırsa,

$$TX + NX = TrX + NsX$$

olur. Buradan ise tanjant ve normal bileşenler eşitlenirse, sırasıyla,

$$TX = TrX \text{ ve } NX = NsX$$

olduğu bulunur. Böylece, (5.1.9) ve (5.5.5) eşitlikleri yardımıyla

$$NT = NTr = Nr - nNr = 0 - 0 = 0$$

elde edilir.

Tersine, $NT = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (5.1.8) eşitliğinin her iki tarafına sağdan T endomorfizmi uygulanırsa,

$$T^3 = T^2 + T \tag{5.5.9}$$

elde edilir. Şimdi,

$$r = T^2 - T \tag{5.5.10}$$

ve

$$s = -T^2 + T + I \tag{5.5.11}$$

diyelim. O zaman (5.5.9) eşitliği kullanılırsa,

$$r + s = T^2 - T - T^2 + T + I = I,$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= \left(T^2 - T\right)^2 = \left(T^2 - T\right)\left(T^2 - T\right) \\
&= \left(T^2 - T\right)T^2 - \left(T^2 - T\right)T = T^4 - T^3 - T^3 + T^2 \\
&= T^4 - 2T^3 + T^2 = T^3T - 2T^3 + T^2 \\
&= \left(T^2 + T\right)T - 2\left(T^2 + T\right) + T^2 = T^3 + T^2 - 2T^2 - 2T + T^2 \\
&= T^2 + T - 2T = T^2 - T \\
&= r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 &= \left(-T^2 + T + I\right)^2 = \left(-T^2 + T + I\right)\left(-T^2 + T + I\right) \\
&= \left(-T^2 + T + I\right)\left(-T^2\right) + \left(-T^2 + T + I\right)T + \left(-T^2 + T + I\right)I \\
&= T^4 - T^3 - T^2 - T^3 + T^2 + T - T^2 + T + I = T^3T - 2T^3 + 2T - T^2 + I \\
&= \left(T^2 + T\right)T - 2\left(T^2 + T\right) + 2T - T^2 + I \\
&= T^3 + T^2 - 2T^2 - 2T + 2T - T^2 + I \\
&= T^2 + T - 2T^2 + I = -T^2 + T + I \\
&= s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
rs &= \left(T^2 - T\right)\left(-T^2 + T + I\right) = T^2\left(-T^2 + T + I\right) - T\left(-T^2 + T + I\right) \\
&= -T^4 + T^3 + T^2 + T^3 - T^2 - T = -T^3T + 2T^3 - T \\
&= -\left(T^2 + T\right)T + 2T^3 - T = -T^3 - T^2 + 2T^3 - T \\
&= T^3 - T^2 - T = T^2 + T - T^2 - T \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
sr &= \left(-T^2 + T + I\right)\left(T^2 - T\right) = \left(-T^2 + T + I\right)T^2 - \left(-T^2 + T + I\right)T \\
&= -T^4 + T^3 + T^2 - T^3 - T^2 - T = -T^3T - T = -\left(T^2 + T\right)T - T \\
&= -T^3 - T^2 - T = T^2 + T - T^2 - T \\
&= 0
\end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Yani, r ve s tümleyen projeksiyon operatörlerdir. Bu nedenle, r ve s projeksiyon operatörleri, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ tamamlayıcı distribüsyonlarını tanımlar. Diğer taraftan, $NT = 0$ varsayımı altında, (5.5.9), (5.5.10) ve (5.5.11) eşitlikleri yardımıyla

$$Tr = T\left(T^2 - T\right) = T^3 - T^2 = T^2 + T - T^2 = T, \tag{5.5.12}$$

$$Ts = T\left(-T^2 + T + I\right) = -T^3 + T^2 + T = -T^2 - T + T^2 + T = 0, \tag{5.5.13}$$

$$sTr = sT = \left(-T^2 + T + I\right)T = -T^3 + T^2 + T = -T^2 - T + T^2 + T = 0 \tag{5.5.14}$$

ve

$$Nr = N\left(T^2 - T\right) = NT^2 - NT = (NT)\,T - NT = 0 - 0 = 0 \tag{5.5.15}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece, (5.5.12), (5.5.13), (5.5.14) ve (5.5.15) bağıntıları D distibüsyonunun invaryant, $D^{\perp}$ distibüsyonunun ise anti-invaryant olduğunu gösterir. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur. □

Önerme 5.5.2. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right) = KertN \tag{5.5.16}$$

ve

$$KerT = Ker\left(T^2 - T\right) = Ker\,(tN - I) \tag{5.5.17}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $X \in \Gamma\,(KerN)$ olsun. Bu durumda $NX = 0$ olur. Buradan ise (5.1.8) eşitliği yardımıyla $(T^2 - T - I)\,X = 0$ elde edilir. Bu ise

$$X \in \Gamma\left(Ker\left(T^2 - T - I\right)\right)$$

olduğunu gösterir. Tersine, $X \in Ker\,(T^2 - T - I)$ olsun. Bu durumda (5.1.8) eşitliğinden $tNX = 0$ olur. Böylece, $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu kullanılırsa, (5.1.7) ayrışımından

$$\|NX\|^2 = \overline{g}(NX, NX) = \overline{g}\left(\overline{\Phi}X, NX\right) = \overline{g}\left(X, \overline{\Phi}NX\right) = \overline{g}(X, tNX) = 0$$

elde edilir. Buradan ise $\overline{g}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğu için $NX = 0$ olur. Bu ise

$$X \in \Gamma(KerN)$$

olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, $KerN = Ker(T^2 - T - I)$ eşitliğine ulaşılır. Buna ek olarak, (5.1.8) eşitliğinden

$$KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right) = Ker(tN)$$

olduğu bulunur. Yani, (5.5.16) eşitliği elde edilir. $X \in \Gamma(KerT)$ olsun. O zaman $TX = 0$ olur. Buradan ise açık bir şekilde $X \in \Gamma(Ker(T^2 - T))$ olduğu görülür. Tersine, $X \in \Gamma(Ker(T^2 - T))$ olsun. Bu nedenle, $T^2X = TX$ olur. Aynı zamanda, (5.1.8) eşitliğinden $tNX = X$ olduğu görülür. Böylece, T endomorfizminin $\overline{g}$-simetrik ve $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|TX\|^2 &= \overline{g}(TX, TX) = \overline{g}\left(T^2X, X\right) \\
&= \overline{g}(TX, tNX) = \overline{g}\left(TX, \overline{\Phi}NX\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}TX, NX\right) \\
&= \overline{g}(NTX, NX)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, M bir semi-invaryant altmanifold olması nedeniyle Teorem 5.5.1'den $NT = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece, $TX = 0$ olur. Bu ise $X \in \Gamma(KerT)$ olduğunu gösterir. O halde $KerT = Ker(T^2 - T)$ eşitliğine ulaşılır. Üstelik, (5.1.8) eşitliğinden

$$KerT = Ker\left(T^2 - T\right) = Ker(tN - I)$$

olduğu görülür. Diğer bir deyişle, (5.5.17) eşitliği bulunur. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.5.3. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda*

$$D = KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right) = Ker\left(tN\right) \tag{5.5.18}$$

ve

$$D^{\perp} = KerT = Ker\left(T^2 - T\right) = Ker\left(tN - I\right) \tag{5.5.19}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. $X \in \Gamma\left(KerN\right)$ olsun. Bu durumda $NX = 0$ olur. Bu nedenle, (5.1.6) ayrışımı $\overline{\Phi}X = TX$ halini alır. Buradan ise (5.5.3) ve (5.5.6) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\overline{\Phi}X = TX = TrX + TsX = TrX \in \Gamma\left(D\right) \tag{5.5.20}$$

olduğu görülür. O zaman (5.5.20) ifadesinden $X \in \Gamma\left(D\right)$ olduğu anlaşılır. Böylece, $KerN \subseteq D$ olur. Tersine, $X \in \Gamma\left(D\right)$ olsun. Bu durumda (5.5.5) eşitliğinden $X \in \Gamma\left(KerN\right)$ olduğu bulunur. O halde $D \subseteq KerN$ olur. Dolayısıyla, $D = KerN$ elde edilir. Ayrıca, Önerme 5.5.2 yardımıyla (5.5.18) eşitliğinine ulaşılır. $X \in \Gamma\left(KerT\right)$ olsun. Bu durumda $TX = 0$ olur. Bu yüzden, (5.1.6) ayrışımı $\overline{\Phi}X = NX$ ile verilir. Buradan ise (5.5.4) ve (5.5.5) eşitliklerinden

$$\overline{\Phi}X = NX = NrX + NsX = NsX \in ND^{\perp} = \overline{\Phi}D^{\perp} \tag{5.5.21}$$

olduğu görülür. Böylece, (5.5.21) ifadesi $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğunu belirtir. Tersine, $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olsun. O zaman (5.5.3) eşitliği $X \in \Gamma\left(KerT\right)$ olduğunu gösterir. Böylece, $D^{\perp} = KerT$ olduğu bulunur. Üstelik, Önerme 5.5.2 dikkate alınırsa, (5.5.19) eşitliğinin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldunun normal demette nasıl karakterize edilebileceğini gösterelim ve bu karakterizasyon ile ilgili bazı gerçekleri verelim.

Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer

$$\mathfrak{D}^{\perp} = \overline{\Phi} D^{\perp} \subseteq TM^{\perp}$$

ise o zaman $\mathfrak{D}^{\perp}$ bir altdemettir. $\mathfrak{D}^{\perp}$ altdemetinin $TM^{\perp}$ normal demetteki ortogonal tümleyenini $\mathfrak{D}$ ile gösterelim. Bu yüzden, $TM^{\perp}$ normal demeti

$$TM^{\perp} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$$

ayrışımına sahiptir. $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ ambient manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde bir $\overline{\Psi}$ tensör alanını

$$\overline{\Psi} = I - \overline{\Phi}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $\overline{\Psi}$ bir altın yapıdır. Ayrıca, $\overline{g}$ Riemann metriği $\overline{\Psi}$-uyumludur. Herhangi bir tanjant vektör alanı $X \in \Gamma(TM)$ için $\overline{\Psi}X$ vektör alanı

$$\overline{\Psi}X = (I - T)X - NX \tag{5.5.22}$$

olacak şekilde tanjant ve normal bileşenlerine ayrılabilir. Benzer şekilde, herhangi bir normal vektör alanı $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $\overline{\Psi}V$ vektör alanı

$$\overline{\Psi}V = -tV + (I - n)V \tag{5.5.23}$$

formunda yazılabilir.

Önerme 5.5.4. *Bir* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ *altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) $\mathfrak{D}$ *bir* $\overline{\Psi}$*-invaryant distribüsyondur,*

(b) $\mathfrak{D}^{\perp}$ *bir* $\overline{\Psi}$*-anti-invaryant distribüsyondur.*

İspat. $X \in \Gamma(\mathfrak{D})$ olsun. Öncelikle $\overline{\Psi}X \in \Gamma(TM^{\perp})$ olduğunu gösterelim. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Psi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.5.22) ayrışımı yardımıyla her $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\Psi}X, Y) &= \overline{g}(X, \overline{\Psi}Y) \\
&= \overline{g}(X, (I - T)Y - NY) \\
&= \overline{g}(X, (I - T)Y) - \overline{g}(X, NY) \\
&= -\overline{g}(X, NY) \\
&= -\overline{g}(X, NrY + NsY) \\
&= -\overline{g}(X, NrY) - \overline{g}(X, NsY)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada r ve s, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörlerdir. O halde (5.5.4) ve (5.5.5) eşitlikleri dikkate alınırsa, $\overline{g}(\overline{\Psi}X, Y) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise her $X \in \Gamma(\mathfrak{D})$ için

$$\overline{\Psi}X \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{5.5.24}$$

olması demektir. Şimdi, $\mathfrak{D}$ distribüsyonunun invaryant olduğunu gösterelim. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Psi}$-uyumlu olması nedeniyle her $Z \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$ için

$$\overline{g}(\overline{\Psi}X, Z) = \overline{g}(X, \overline{\Psi}Z)$$

olur. Diğer taraftan, $Z \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$ olduğu için $Z = \overline{\Phi}W$ olacak şekilde bir $W \in \Gamma(D^{\perp})$ vektör alanı mevcuttur. Bu nedenle,

$$\overline{g}(\overline{\Psi}X, Z) = \overline{g}(X, \overline{\Psi}\,\overline{\Phi}W) = -\overline{g}(X, W) = 0$$

elde edilir. Buradan ise her $X \in \Gamma(\mathfrak{D})$ için $\overline{\Psi}X \in \Gamma(\mathfrak{D})$ olduğu görülür. O halde, $\mathfrak{D}$ bir invaryant distribüsyondur. Yani, (a) ifadesi geçerlidir. $X \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ olsun. Bu durumda $X = \overline{\Phi}Y$ olacak şekilde bir $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanı vardır. Bu yüzden, $\overline{\Phi}$ altın yapısının tanımından

$$\overline{\Psi}X = \overline{\Psi}\,\overline{\Phi}Y = -Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right) \subseteq \Gamma(TM)$$

olduğu görülür. O zaman $\mathfrak{D}^{\perp}$ bir anti-invaryant distribüsyondur. Diğer bir deyişle, (b) ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Önerme 5.5.5. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$t\mathfrak{D} = \{0\}, \tag{5.5.25}$$

$$(I-n)\,\mathfrak{D}^{\perp} = \{0\}, \tag{5.5.26}$$

$$n\mathfrak{D} = (I-n)\,\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \;\; veya \;\; \overline{\Phi}\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \tag{5.5.27}$$

ve

$$t\mathfrak{D}^{\perp} = D^{\perp} \;\; veya \;\; \overline{\Psi}\mathfrak{D}^{\perp} = t\mathfrak{D}^{\perp} = D^{\perp} \tag{5.5.28}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $\mathfrak{D}$ distribüsyonu $\overline{\Psi}$-invaryant olduğu için $\overline{\Psi}\mathfrak{D} \subseteq TM^{\perp}$ olur. Buradan ise (5.5.23) ayrışımı kullanılırsa, (5.5.25) eşitliği bulunur. $\mathfrak{D}^{\perp}$ distribüsyonunun $\overline{\Psi}$-anti-invaryant olması nedeniyle $\overline{\Psi}\mathfrak{D}^{\perp} \subseteq TM$ olur. Bu nedenle, (5.5.23) ayrışımı yardımıyla (5.5.26) eşitliğinin geçerli olduğu açıktır. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Psi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.5.23) ayrışımından her $U \in \Gamma(\mathfrak{D})$ ve $V \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ için

$$-\overline{g}(nU, V) = \overline{g}((I-n)\,U, V) = \overline{g}\left(\overline{\Psi}U, V\right) = \overline{g}\left(U, \overline{\Psi}V\right)$$

elde edilir. O zaman $\mathfrak{D}^{\perp}$ distribüsyonu $\overline{\Psi}$-anti-invaryant olduğu için $\overline{g}(nU, V) = 0$ olur. Bu ise $n\mathfrak{D} \perp \mathfrak{D}^{\perp}$ olduğunu belirtir. Ayrıca, $n\mathfrak{D} \subseteq TM^{\perp}$ olması nedeniyle

$$n\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D} \tag{5.5.29}$$

olduğu anlaşılır. Diğer taraftan, (5.1.11) eşitliğinden her $U \in \Gamma(\mathfrak{D})$ vektör alanı

$$U = n^2U - nU + NtU$$

ile ifade edilebilir. Buradan ise (5.5.25) ve (5.5.29) ifadeleri kullanılırsa,

$$\mathfrak{D} \subseteq n\mathfrak{D} \tag{5.5.30}$$

olduğu görülür. O halde (5.5.29) ve (5.5.30) ifadelerinden $n\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ eşitliği bulunur. Benzer şekilde, $(I - n)\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece, (5.5.27) eşitliği elde edilir. (5.5.26) ifadesi dikkate alınırsa, (5.5.23) ayrışımı yardımıyla $\overline{\Psi}\mathfrak{D}^{\perp} = t\mathfrak{D}^{\perp}$ olduğu görülür. Bununla birlikte, $\mathfrak{D}^{\perp} = \overline{\Phi}D^{\perp}$ olması nedeniyle $\overline{\Psi}\mathfrak{D}^{\perp} = D^{\perp}$ olur. O zaman (5.5.28) eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5.2. *Bir $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi})$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldunun bir semi-invaryant altmanifold olması için bir gerek ve yeter koşul $TM^{\perp}$ normal demetinin $TM^{\perp} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$ olacak şekilde bir ayrışımının olmasıdır. Burada her $p \in M$ için $\mathfrak{D}_p^{\perp}$ maksimal $\overline{\Psi}$-anti-invaryant altuzay, $\mathfrak{D}_p$ ise $T_pM^{\perp}$ normal uzayında $\mathfrak{D}_p^{\perp}$ altuzayının ortogonal tümleyenidir.*

İspat. M bir semi-invaryant altmanifold olsun. Bu durumda TM tanjant uzayının $TM = D \oplus D^{\perp}$ olacak şekilde bir ayrışımı vardır. Burada D ve $D^{\perp}$, sırasıyla, invaryant ve anti-invaryant distribüsyonlardır. $\mathfrak{D}^{\perp} = \overline{\Phi}D^{\perp} \subseteq TM^{\perp}$ diyelim. O zaman Önerme 5.5.4'ten $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}^{\perp}$, sırasıyla, $TM^{\perp}$ normal demetinin birer $\overline{\Psi}$-invaryant ve $\overline{\Psi}$-anti-invaryant distribüsyonlarıdır.

Tersine, $TM^{\perp} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$ olacak şekilde her $p \in M$ için $T_pM^{\perp}$ normal uzayının $\overline{\Psi}$-maksimal anti-invaryant altuzayı $\mathfrak{D}_p^{\perp}$ ve $\mathfrak{D}_p^{\perp}$ altuzayının ortogonal tümleyeni $\mathfrak{D}_p$ altuzayı mevcut olsun. $D^{\perp} = \overline{\Psi}\mathfrak{D}^{\perp}$ diyelim. $D^{\perp}$ altdemetininin ortogonal tümleyenini D ile gösterelim. $X \in \Gamma(D^{\perp})$ olsun. Bu durumda $X = \overline{\Psi}Y$ olacak şekilde bir $Y \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ vektör alanı vardır. Bu yüzden,

$$\overline{\Phi}X = \overline{\Phi}\,\overline{\Psi}Y = -Y \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right) \subseteq \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$$

olur. O zaman $D^{\perp}$, TM tanjant demetinin bir anti-invaryant distribüsyonudur. $X \in \Gamma(D)$ olsun. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.1.7) ayrışımı yardımıyla her $Y \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\Phi}X, Y\right) &= \overline{g}\left(X, \overline{\Phi}Y\right) \\
&= \overline{g}\left(X, tY + nY\right) \\
&= \overline{g}\left(X, tY\right) \\
&= \overline{g}\left(X, t\mathfrak{r}Y + t\mathfrak{s}Y\right) \\
&= \overline{g}\left(X, t\mathfrak{r}Y\right) + \overline{g}\left(X, t\mathfrak{s}Y\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathfrak{r}$ ve $\mathfrak{s}$, sırasıyla, $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörlerdir. Böylece, (5.5.25) ve (5.5.28) eşitliklerinden $\overline{g}\left(\overline{\Phi}X, Y\right) = 0$ olduğu görülür. Buradan ise her $X \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{\Phi}X \in \Gamma(TM) \tag{5.5.31}$$

olduğu anlaşılır. Diğer taraftan, $D^{\perp}$ distribüsyonunun anti-invaryant olduğu dikkate alınırsa, her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(\overline{\Phi}X, Z\right) = \overline{g}\left(X, \overline{\Phi}Z\right) = 0$$

olur. Bu ise $\overline{\Phi}X \in \Gamma(D)$ olduğunu ifade eder. Böylece, D altdemeti TM tanjant demetinin bir invaryant distribüsyonudur. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur. □

Teorem 5.5.3. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldunun $\overline{M}$ altın Riemann manifoldunun bir semi-invaryant altmanifold olması için bir gerek ve yeter koşul $t(I - n) = 0$ olmasıdır.*

İspat. M bir semi-invaryant altmanifold olsun. Bu durumda Teorem 5.5.2'den her $p \in M$ için $\overline{\Psi}(\mathfrak{D}_p) = \mathfrak{D}_p$ ve $\overline{\Psi}\left(\mathfrak{D}_p^{\perp}\right) \subseteq T_pM$ koşullarını sağlayan $T_pM^{\perp} = \mathfrak{D}_p \oplus \mathfrak{D}_p^{\perp}$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ invaryant ve $\mathfrak{D}^{\perp}$ anti-invaryat distribüsyonları vardır. $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, $\mathfrak{r}$ ve $\mathfrak{s}$ ile gösterelim. O zaman

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{s} = I,\ \mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r},\ \mathfrak{s}^2 = \mathfrak{s} \text{ ve } \mathfrak{r}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\mathfrak{r} = 0$$

bağıntıları sağlanır. O halde herhangi bir $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ normal vektör alanı $V = \mathfrak{r}V + \mathfrak{s}V$ şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden, (5.5.23), (5.5.25) ve (5.5.26) eşitlikleri dikkate alınırsa, $\overline{\Psi}V$ vektör alanı

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}V &= \overline{\Psi}(\mathfrak{r}V + \mathfrak{s}V)\\ &= -t\mathfrak{r}V + (I-n)\,\mathfrak{r}V - t\mathfrak{s}V + (I-n)\,\mathfrak{s}V\\ &= (I-n)\,\mathfrak{r}V - t\mathfrak{s}V\end{aligned}$$

ile ifade edilebilir. Aynı zamanda, $\overline{\Psi}V$ vektör alanının (5.5.23) eşitliğinde verilen ayrışımı kullanırsa,

$$-tV + (I-n)\,V = -t\mathfrak{s}V + (I-n)\,\mathfrak{r}V$$

olur. Buradan ise tanjant ve normal bileşenler eşitlenirse, sırasıyla,

$$tV = t\mathfrak{s}V \text{ ve } (I-n)\,V = (I-n)\,\mathfrak{r}V$$

olduğu bulunur. Böylece, (5.1.10) ve (5.5.25) eşitlikleri yardımıyla

$$t\,(I-n) = t\,(I-n)\,\mathfrak{r} = Tt\mathfrak{r} = 0$$

elde edilir.

Tersine, $t\,(I-n) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (5.1.11) eşitliğinin her iki tarafına $I-n$ endomorfizmi uygulanırsa,

$$n^3 = 2n^2 - I \tag{5.5.32}$$

olur. Şimdi,

$$\mathfrak{r} = n^2 - n \tag{5.5.33}$$

ve

$$\mathfrak{s} = -n^2 + n + I \tag{5.5.34}$$

diyelim. O zaman (5.5.32) eşitliği yardımıyla

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{s} = n^2 - n - n^2 + n + I = I,$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}^2 &= \left(n^2 - n\right)^2 = \left(n^2 - n\right)\left(n^2 - n\right) \\
&= \left(n^2 - n\right) n^2 - \left(n^2 - n\right) = n^4 - n^3 - n^3 + n^2 \\
&= n^4 - 2n^3 + n^2 = n^3 n - 2n^3 + n^2 \\
&= \left(2n^2 - I\right) n - 2n^3 + n^2 = 2n^3 - n - 2n^3 + n^2 \\
&= -n + n^2 = n^2 - n \\
&= \mathfrak{r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}^2 &= \left(-n^2 + n + I\right)^2 = \left(-n^2 + n + I\right)\left(-n^2 + n + I\right) \\
&= -\left(-n^2 + n + I\right) n^2 + \left(-n^2 + n + I\right) n - n^2 + n + I \\
&= n^4 - n^3 - n^2 - n^3 + n^2 + n - n^2 + n + I \\
&= n^3 n - 2n^3 - n^2 + 2n + I = \left(2n^2 - I\right) n - 2n^3 - n^2 + 2n + I \\
&= 2n^3 - n - 2n^3 - n^2 + 2n + I = -n^2 + n + I \\
&= \mathfrak{s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}\mathfrak{s} &= \left(n^2 - n\right)\left(-n^2 + n + I\right) \\
&= n^2\left(-n^2 + n + I\right) - n\left(-n^2 + n + I\right) \\
&= -n^4 + n^3 + n^2 + n^3 - n^2 - n = -n^3 n + 2n^3 - n \\
&= -\left(2n^2 - I\right) n + 2n^3 - n = -2n^3 + n + 2n^3 - n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}\mathfrak{r} &= \left(-n^2+n+I\right)\left(n^2-n\right) \\
&= -n^2\left(n^2-n\right)+n\left(n^2-n\right)+\left(n^2-n\right) \\
&= -n^4+n^3+n^3-n^2+n^2-n = -n^3n+2n^3-n \\
&= -\left(2n^2-I\right)n+2n^3-n = -2n^3+n+2n^3-n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bağıntıları elde edilir. Yani, $\mathfrak{r}$ ve $\mathfrak{s}$ tümleyen projeksiyon operatörlerdir. Bu yüzden, $\mathfrak{r}$ ve $\mathfrak{s}$ projeksiyon operatörleri, sırasıyla, $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}^{\perp}$ tamamlayıcı distribüsyonları tanımlar. Diğer taraftan, $t\,(I-n)=0$ varsayımı altında, (5.5.32), (5.5.33) ve (5.5.34) eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(I-n)\,\mathfrak{r} &= (I-n)\left(n^2-n\right) \\
&= \left(n^2-n\right)-n\left(n^2-n\right) = n^2-n-n^3+n^2 \\
&= -n^3+2n^2-n = -2n^2+I+2n^2-I \\
&= I-n,
\end{aligned} \tag{5.5.35}
$$

$$
\begin{aligned}
(I-n)\,\mathfrak{s} &= (I-n)\left(-n^2+n+I\right) \\
&= \left(-n^2+n+I\right)-n\left(-n^2+n+I\right) \\
&= -n^2+n+I+n^3-n^2-n \\
&= -2n^2+I+n^3 = -2n^2+I+2n^2-I \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.5.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}\,(I-n)\,\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\,(I-n) &= \left(-n^2+n+I\right)(I-n) \\
&= -n^2\,(I-n)+n\,(I-n)+(I-n) \\
&= -n^2+n^3+n-n^2+I-n \\
&= -2n^2+I+n^3 = -2n^2+I+2n^2-I \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.5.37}
$$

ve

$$t\mathfrak{r} = t\left(n^2 - n\right) = t\left(n - I\right)n = 0 \tag{5.5.38}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece, (5.5.35), (5.5.36), (5.5.37) ve (5.5.38) bağıntıları $\mathfrak{D}$ distibüsyonunun invaryant, $\mathfrak{D}^{\perp}$ distibüsyonunun ise anti-invaryant olduğunu gösterir. Dolayısıyla, M bir semi-invaryant altmanifolddur. □

Önerme 5.5.6. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$Kert = Ker\left(n^2 - n - I\right) = Ker\left(Nt\right) \tag{5.5.39}$$

ve

$$Ker\left(I - n\right) = Ker\left(n - n^2\right) = Ker\left(Nt - I\right) \tag{5.5.40}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $X \in \Gamma\left(Kert\right)$ olsun. Bu durumda $tX = 0$ olur. Buradan ise (5.1.11) eşitliği kullanılırsa, $\left(n^2 - n - I\right)X = 0$ elde edilir. Bu ise $X \in \Gamma\left(Ker\left(n^2 - n - I\right)\right)$ olduğunu belirtir. Tersine, $X \in \Gamma\left(Ker\left(n^2 - n - I\right)\right)$ olsun. O zaman (5.1.11) eşitliğinden $NtX = 0$ olduğu görülür. Böylece, $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.1.6) ve (5.1.7) eşitliklerinde verilen ayrışımlar yardımıyla

$$\begin{aligned}\left\|tX\right\|^2 &= \overline{g}\left(tX, tX\right) = \overline{g}\left(tX, \overline{\Phi}X\right)\\ &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}tX, X\right) = \overline{g}\left(NtX, X\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\overline{g}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğu için $tX = 0$ olur. Bu ise $X \in \Gamma\left(Kert\right)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $Kert = Ker\left(n^2 - n - I\right)$ eşitliğine ulaşılır. Buna ek olarak, (5.1.11) eşitliğinden

$$Kert = Ker\left(n^2 - n - I\right) = Ker\left(Nt\right)$$

olduğu görülür. Yani, (5.5.39) eşitliği elde edilir. $X \in \Gamma(Ker(I-n))$ olsun. Bu durumda $(I-n)X = 0$ olur. Buradan ise $X \in \Gamma(Ker(n-n^2))$ olduğu açıktır. Tersine, $X \in \Gamma(Ker(n-n^2))$ olsun. O zaman (5.1.11) eşitliğinden $NtX = X$ olur. Bu yüzden, n endomorfizmi $\overline{g}$-simetrik ve $\overline{g}$ Riemann metriği $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu için

$$\begin{aligned}
\|(I-n)X\|^2 &= \overline{g}((I-n)X,(I-n)X) \\
&= \overline{g}((I-n)X,X) - \overline{g}((I-n)X,nX) \\
&= \overline{g}((I-n)X,X) - \overline{g}(n(I-n)X,X) \\
&= \overline{g}((I-n)X,X) - \overline{g}\left(\left(n-n^2\right)X,X\right) \\
&= \overline{g}((I-n)X,X) \\
&= \overline{g}((I-n)X,NtX) \\
&= \overline{g}\left((I-n)X,\overline{\Phi}tX\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}(I-n)X,tX\right) \\
&= \overline{g}(t(I-n)X,tX)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, M bir semi-invaryant altmanifold olması nedeniyle Teorem 5.5.3'ten $t(n-I) = 0$ eşitliği geçerlidir. Böylece, $(I-n)X = 0$ olur. Bu ise $X \in \Gamma(Ker(I-n))$ olduğunu ifade eder. O halde $Ker(I-n) = Ker(n-n^2)$ olur. Ayrıca, (5.1.11) eşitliğinden

$$Ker(I-n) = Ker\left(n-n^2\right) = Ker(Nt-I)$$

olduğu görülür. Diğer bir deyişle, (5.5.40) eşitliği bulunur. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

Önerme 5.5.7. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$\mathfrak{D} = Kert = Ker\left(n^2-n-I\right) = Ker(Nt) \tag{5.5.41}$$

ve

$$\mathfrak{D}^{\perp} = Ker\,(I - n) = Ker\left(n - n^2\right) = Ker\,(Nt - I) \tag{5.5.42}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (5.5.4) eşitliğinden $\mathfrak{D}^{\perp} = \overline{\Phi}\mathfrak{D}^{\perp} = ND^{\perp}$ olması nedeniyle herhangi bir $V \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ normal vektör alanı için $V = \overline{\Phi}W$ olacak şekilde bir $W \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanı vardır. Şimdi, $U \in \Gamma\,(Kert)$ olsun. Bu durumda $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.5.23) ayrışımı yardımıyla

$$\begin{aligned}\overline{g}\,(U, V) &= \overline{g}\left(U, \overline{\Phi}W\right)\\ &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}U, W\right)\\ &= \overline{g}\,(tU + nU, W)\\ &= \overline{g}\,(nU, W)\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise $Kert \perp \mathfrak{D}^{\perp}$ olduğunu ifade eder. Aynı zamanda, $Kert \subseteq TM^{\perp}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$Kert \subseteq \mathfrak{D} \tag{5.5.43}$$

olduğu görülür. Tersine, $U \in \Gamma\,(\mathfrak{D})$ olsun. O zaman (5.1.11) ve (5.5.25) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\left(n^2 - n - I\right)U = -NtU = 0$$

elde edilir. Bu ise $U \in Ker\,(n^2 - n - I)$ olduğunu gösterir. Aynı zamanda, (5.5.39) eşitliğinden $Kert = Ker\,(n^2 - n - I)$ olduğu için $U \in \Gamma\,(Kert)$ olur. Bu nedenle,

$$\mathfrak{D} \subseteq Kert \tag{5.5.44}$$

olduğu bulunur. Böylece, (5.5.43) ve (5.5.44) ifadeleri $\mathfrak{D} = Kert$ olduğunu belirtir. Ayrıca, Önerme 5.5.6 sayesinde (5.5.41) olduğu görülür. $U \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ olsun. Bu yüzden, (5.5.4) eşitliğinden $\mathfrak{D}^{\perp} = \overline{\Phi}\mathfrak{D}^{\perp} = ND^{\perp}$ olması nedeniyle $U = NV$ olacak şekilde bir $V \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanı mevcuttur. O zaman $D^{\perp} = KerT$ olduğu dikkate alınırsa, (5.1.9) eşitliğinden

$$(I-n)\,U = (I-n)\,NV = NTV = 0$$

elde edilir. Bu ise $U \in \Gamma\left(Ker\,(I-n)\right)$ olduğunu ifade eder. O halde

$$\mathfrak{D}^{\perp} \subseteq Ker\,(I-n) \tag{5.5.45}$$

olur. Tersine, $U \in \Gamma\left(Ker\,(I-n)\right)$ olsun. Bu durumda (5.1.10) eşitliği kullanılırsa, $TtU = 0$ olduğu bulunur. Bu ise

$$tU \in \Gamma\left(D^{\perp}\right) \tag{5.5.46}$$

olduğunu belirtir. Ayrıca, (5.1.11) eşitliği yardımıyla $U = NtU$ olduğu görülür. Buradan ise (5.5.46) ifadesinden $U \in \Gamma\left(ND^{\perp}\right) = \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ olur. Bu ise $U \in \Gamma\left(\mathfrak{D}^{\perp}\right)$ olduğunu gösterir. O zaman

$$Ker\,(I-n) \subseteq \mathfrak{D}^{\perp} \tag{5.5.47}$$

olur. Böylece, (5.5.45) ve (5.5.47) ifadelerinden $\mathfrak{D}^{\perp} = Ker\,(I-n)$ olduğu anlaşılır. Bunun yanısıra, Önerme 5.5.6 dikkate alınırsa (5.5.42) eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. $\square$

5.5.2 D İnvaryant Distribüsyonunun İntegrallenebilirliği

Teorem 5.5.4. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir,*

(b) *h ikinci temel formu her $X, Y \in \Gamma(D)$ için*

$$h\left(X, \overline{\Phi}Y\right) = h\left(\overline{\Phi}X, Y\right) \tag{5.5.48}$$

eşitliğini sağlar,

(c) *Her* $X, Y \in \Gamma(D)$ *ve* $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *için* $\overline{g}\left(A_V\overline{\Phi}X, Y\right) = \overline{g}\left(A_V X, \overline{\Phi}Y\right)$ *eşitliği geçerlidir,*

(d) *Her* $X \in \Gamma(D)$ *ve* $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *için* $\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X - A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *ifadesi doğrudur,*

(e) *h ikinci temel formu her* $X, Y \in \Gamma(D)$ *ve* $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *için*

$$\overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), \overline{\Phi}Z\right) = \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \tag{5.5.49}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. D invaryant distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ifadesi geçerlidir. O zaman (5.5.5) eşitliğinden $N[X, Y] = 0$ olur. Böylece, (5.1.6) ayrışımı dikkate alınırsa, (5.1.19) ve (5.5.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 0 &= N[X, Y] \\ &= h(X, TY) - h(TX, Y) + \nabla^{\perp}_{Y} NX - \nabla^{\perp}_{X} NY \\ &= h(X, TY) - h(Y, TX) \\ &= h\left(X, \overline{\Phi}Y\right) - h\left(Y, \overline{\Phi}X\right) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise (a)⇒(b) önermesinin doğruluğunu gösterir. Her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $h\left(X, \overline{\Phi}Y\right) = h\left(\overline{\Phi}X, Y\right)$ olduğunu varsayalım. O zaman her $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), V\right) &= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), V\right) \\ \overline{g}\left(A_V\overline{\Phi}X, Y\right) &= \overline{g}\left(A_V X, \overline{\Phi}Y\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise (2.15.2) eşitliği yardımıyla

$$\overline{g}\left(A_V\overline{\Phi}X, Y\right) = \overline{g}\left(A_V X, \overline{\Phi}Y\right)$$

elde edilir. Bu nedenle, (b)⇒(c) ifadesi geçerli bir önermedir. Her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $\overline{g}\left(A_V\overline{\Phi}X, Y\right) = \overline{g}\left(A_V X, \overline{\Phi}Y\right)$ olsun. Her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$V=\overline{\Phi}Z$ diyelim. Bu durumda $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olması nedeniyle

$$\overline{g}\left(\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X,Y\right)=\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}X,\overline{\Phi}Y\right)=\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X,Y\right)$$

olur. Buradan ise $\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X-A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğu görülür. Yani, (c)⇒(d) ifadesi elde edilir. Her $X\in\Gamma(D)$ ve $Z\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X-A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu kullanırsa, her $Y\in\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
0&=\overline{g}\left(\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X-A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X,Y\right)\\
&=\overline{g}\left(\overline{\Phi}A_{\overline{\Phi}Z}X,Y\right)-\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X,Y\right)\\
&=\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}X,\overline{\Phi}Y\right)-\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}\overline{\Phi}X,Y\right)\\
&=\overline{g}\left(h\left(X,\overline{\Phi}Y\right),\overline{\Phi}Z\right)-\overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X,Y\right),\overline{\Phi}Z\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\overline{g}\left(h\left(X,\overline{\Phi}Y\right),\overline{\Phi}Z\right)=\overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X,Y\right),\overline{\Phi}Z\right)$ olduğunu belirtir. Bir başka deyişle, (d)⇒(e) ifadesi geçerlidir. Her $X,Y\in\Gamma(D)$ ve $Z\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $\overline{g}\left(h\left(X,\overline{\Phi}Y\right),\overline{\Phi}Z\right)=\overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X,Y\right),\overline{\Phi}Z\right)$ olsun. Bu durumda $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun torsiyonsuz, $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu ve $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralel olma özellikleri göz önünde bulundurulursa, Gauss formulü yardımıyla

$$\begin{aligned}
\overline{g}([X,Y],Z)&=\overline{g}(\nabla_XY-\nabla_YX,Z)\\
&=\overline{g}\left(\overline{\nabla}_XY-\overline{\nabla}_YX,Z\right)\\
&=\overline{g}\left(\overline{\nabla}_XY,Z\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_YX,Z\right)\\
&=\overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_XY,\overline{\Phi}Z\right)-\overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_XY,Z\right)\\
&-\overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_YX,\overline{\Phi}Z\right)+\overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_YX,Z\right)\\
&=\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X\overline{\Phi}Y,\overline{\Phi}Z\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_XY,\overline{\Phi}Z\right)\\
&-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_Y\overline{\Phi}X,\overline{\Phi}Z\right)+\overline{g}\left(\overline{\nabla}_YX,\overline{\Phi}Z\right)\\
&=\overline{g}\left(h\left(X,\overline{\Phi}Y\right),\overline{\Phi}Z\right)-\overline{g}\left(h(X,Y),\overline{\Phi}Z\right)\\
&-\overline{g}\left(h\left(Y,\overline{\Phi}X\right),\overline{\Phi}Z\right)+\overline{g}\left(h(Y,X),\overline{\Phi}Z\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), \overline{\Phi}Z\right) - \overline{g}\left(h\left(X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \\
&- \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) + \overline{g}\left(h\left(X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), \overline{\Phi}Z\right) - \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right) - h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ olduğunu ifade eder. Yani, D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir. O halde (e)⇒(a) önermesi bir totolojidir. Dolayısıyla, teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

Sonuç 5.5.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda D invaryant distribüsyonunun herhangi bir maksimal integral manifoldu M^D için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) *M^D maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun bir invaryant altmanifoldudur,*

(b) *M^D maksimal integral manifoldu üzerinde tanımlı Φ^D indirgenmiş yapısı bir altın yapıdır,*

(c) *$\left(\overline{g}, \Phi^D\right)$ bir altın Riemann yapıdır,*

(d) *$\left(M^D, \overline{g}, \Phi^D\right)$ bir altın Riemann manifoldudur,*

(e) *M^D maksimal integral manifoldu üzerinde tanımlı Φ^D indirgenmiş yapısı integrallenebilirdir.*

İspat. [21] numaralı yayındaki temel sonuçlardan ispat açıktır. □

Tanım 5.5.2. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $h(X, Y) = 0$ ise M bir D-geodezik semi-invaryant altmanifold olarak adlandırılır.*

Teorem 5.5.5. *Bir $(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi})$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir D-geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D distribüsyonu integrallenebilirdir.*

İspat. M semi-invaryant altmanifoldu D-geodezik ise bu durumda her $X,Y\in\Gamma(D)$ için $h(X,Y)=0$ eşitliği geçerlidir. Böylece, (5.5.5) ve (5.5.6) ifadeleri dikkate alınırsa, (5.1.19) eşitliği yardımıyla her $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$N[X,Y]=h(X,TY)-h(TX,Y)+\nabla^{\perp}_{Y}NX-\nabla^{\perp}_{X}NY=0$$

elde edilir. Bu ise $[X,Y]\in\Gamma(KerN)=\Gamma(D)$ olduğunu gösterir. Bir başka deyişle, D distribüsyonu integrallenebilirdir. □

Teorem 5.5.6. *Bir $(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi})$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir,*

(b) *h ikinci temel formu her $X,Y\in\Gamma(D)$ ve $Z\in\Gamma(D^{\perp})$ için $\overline{g}(h(X,Y),\overline{\Phi}Z)=0$ eşitliğini sağlar.*

İspat. M altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş konneksiyonu ∇ ile gösterelim. D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir ve her bir maksimal integral manifoldunun M altmanifoldunda total geodezik olduğunu varsayalım. D invaryant distribüsyonunun herhangi bir M^D maksimal integral manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇' olsun. Bu durumda M^D maksimal integral manifoldunun M altmanifoldundaki Gauss formulü her $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y=\nabla'_X Y+h'(X,Y) \qquad (5.5.50)$$

ile verilir. Burada $h^{'}$, M^D maksimal integral manifoldunun M altmanifoldundaki ikinci temel formudur. Hipotezden M^D maksimal integral manifoldunun total geodezik olması nedeniyle (5.5.50) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D) \tag{5.5.51}$$

olduğu görülür. Ayrıca, D distribüsyonu invaryant olduğu için (5.5.51) ifadesinden $\nabla_X \overline{\Phi} Y \in \Gamma(D)$ elde edilir. Böylece, $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu ve $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralel olduğu göz önünde bulundurulursa, Gauss formulü yardımıyla her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(h(X,Y), \overline{\Phi}Z\right) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi}Z\right) = \overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_X Y, Z\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \overline{\Phi} Y, Z\right) = \overline{g}\left(\nabla_X \overline{\Phi} Y, Z\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Yani, (a)⇒(b) ifadesi elde edilir. Eğer her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $\overline{g}\left(h(X,Y), \overline{\Phi}Z\right) = 0$ ise D distribüsyonunun invaryant olduğu dikkate alınırsa,

$$\overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), \overline{\Phi}Z\right) = \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi}X, Y\right), \overline{\Phi}Z\right) = 0$$

olduğu açıktır. Bu nedenle, (5.5.49) eşitliğinden doğal olarak D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu görülür. Ayrıca, $\overline{\Phi}$ altın yapısının tanımı ve $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olduğu kullanılırsa, Gauss formulünden her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\nabla_X Y, Z) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = \overline{g}\left(\overline{\Phi}^{-1}\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi}Z\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \overline{\Phi} Y, \overline{\Phi}Z\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi}Y\right), \overline{\Phi}Z\right) - \overline{g}\left(h(X,Y), \overline{\Phi}Z\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ olduğunu ifade eder. Böylece, (5.5.50) eşitliği yardımıyla $h^{'}(X, Y) = 0$ olduğu görülür. Bir başka deyişle, M^D maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir. O zaman (b)⇒(a) önermesi doğrudur. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

Teorem 5.5.7. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ ambient manifoldunda total geodeziktir,*

(b) *M semi-invaryant altmanifoldu D-geodeziktir.*

İspat. D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ve her bir maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ altın Riemann manifoldunda total geodezik olsun. D invaryant distribüsyonunun herhangi bir maksimal integral manifoldunu M^D ile gösterelim. M^D maksimal integral manifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldunda ve M altmanifoldunda Gauss formülleri, sırasıyla, her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla^D_X Y + h^D(X, Y) \tag{5.5.52}$$

ve

$$\nabla_X Y = \nabla^{'}_X Y + h^{'}(X, Y) \tag{5.5.53}$$

ile verilir. Ayrıca, M altmanifoldun $\overline{M}$ ambient manifoldunda Gauss formulü dikkate alınırsa,

$$h^D(X, Y) = h^{'}(X, Y) + h(X, Y) \tag{5.5.54}$$

olduğu görülür. O zaman M^D maksimal integral manifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldunda total geodezik olması nedeniyle (5.5.52) eşitliği ile verilen Gauss formülü kullanılırsa, her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$$

olduğu görülür. Buradan ise M altmanifoldunun $\overline{M}$ ambient manifoldundaki Gauss formülü dikkate alınırsa, her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $h(X,Y) = 0$ olur. Yani, M altmanifoldu D-geodeziktir. O halde (a)⇒(b) ifadesi geçerlidir. Şimdi, M altmanifoldunun D-geodezik olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle, her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$h(X,Y) = 0 \tag{5.5.55}$$

olsun. Bu durumda doğal olarak, her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(h(X,Y), \overline{\Phi}Z\right) = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu yüzden, Teorem 5.5.6 yardımıyla, D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$h^{'}(X,Y) = 0 \tag{5.5.56}$$

olur. Böylece, (5.5.54), (5.5.55) ve (5.5.56) eşitlikleri birleştirilirse, her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$h^{D}(X,Y) = 0$$

elde edilir. Yani, M^{D} maksimal integral manifoldu $\overline{M}$ ambient altmanifoldunda total geodeziktir. O zaman (b)⇒(a) önermesi doğrudur. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

5.5.3 D$^{\perp}$ Anti-İnvaryant Distribüsyonunun İntegrallenebilirliği

Lemma 5.5.1. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda A şekil operatörü her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için*

$$A_{\overline{\Phi}X}Y = -A_{\overline{\Phi}Y}X \tag{5.5.57}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $\overline{\nabla}\,\overline{\Phi} = 0$ olduğu dikkate alınırsa, Gauss ve Weingarten formüllerinden her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_Z \overline{\Phi}\right) X, Y\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_Z \overline{\Phi} X - \overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_Z X, Y\right) \\
&= \overline{g}\left(-A_{\overline{\Phi} X} Z + \nabla^{\perp}_Z \overline{\Phi} X - \overline{\Phi} \nabla_Z X - \overline{\Phi} h(Z, X), Y\right) \\
&= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Z, Y\right) - \overline{g}\left(\overline{\Phi} \nabla_Z X, Y\right) - \overline{g}\left(\overline{\Phi} h(Z, X), Y\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu ve $D^{\perp}$ distribüsyonunun anti-invaryant olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Z, Y\right) - \overline{g}\left(\nabla_Z X, \overline{\Phi} Y\right) - \overline{g}\left(h(Z, X), \overline{\Phi} Y\right) \\
&= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Z, Y\right) - \overline{g}\left(h(Z, X), \overline{\Phi} Y\right) \\
&= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Z, Y\right) - \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} Y} Z, X\right)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Ayrıca, şekil operatörünün (2.15.1) eşitliği ile verilen self adjoint olma özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
0 &= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Z, Y\right) - \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} Y} Z, X\right) \\
&= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Y, Z\right) - \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} Y} X, Z\right) \\
&= -\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi} X} Y + A_{\overline{\Phi} Y} X, Z\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olmasından dolayı

$$A_{\overline{\Phi} X} Y = -A_{\overline{\Phi} Y} X$$

olduğunu gösterir. □

Teorem 5.5.8. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *$D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir,*

(b) *Her* $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *için* $A_{\overline{\Phi}X} Y = 0$ *eşitliği sağlanır,*

(c) *Her* $W \in \Gamma(TM)$ *ve* $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *için* $h(W, Y) \in \Gamma(\mathfrak{D})$ *ifadesi sağlanır,*

(d) *Her* $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ *ve* $Z \in \Gamma(D)$ *için* $A_{\overline{\Phi}X} Z \in \Gamma(D)$ *ifadesi geçerlidir.*

İspat. (5.1.18) eşitliği her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$T[X, Y] = -A_{\overline{\Phi}Y} X + A_{\overline{\Phi}X} Y$$

formuna indirgenir. Bu nedenle, (5.5.57) eşitliğinden

$$T[X, Y] = 2A_{\overline{\Phi}X} Y \tag{5.5.58}$$

elde edilir. Eğer $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $[X, Y] \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olur. Böylece, (5.5.3) ifadesi dikkate alınırsa, (5.5.58) eşitliğinden $A_{\overline{\Phi}X} Y = 0$ elde edilir. O zaman (a)⇒(b) önermesi bir totolojidir. Şekil operatörünün self-adjoint olma özelliğinden her $W \in \Gamma(TM)$ ve $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(h(W, Y), \overline{\Phi}X\right) = \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}X} W, Y\right) = \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}X} Y, W\right)$$

olur. Buradan ise $A_{\overline{\Phi}D^{\perp}} D^{\perp} = \{0\}$ varsayımı altında,

$$\overline{g}\left(h(W, Y), \overline{\Phi}Z\right) = 0$$

olduğu görülür. Bu ise $h(W, Y) \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ olması nedeniyle $h(W, Y) \in \Gamma(\mathfrak{D})$ olduğunu gösterir. Yani, (b)⇒(c) ifadesi elde edilir. Eğer her $W \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $h(W, Y) \in \Gamma(\mathfrak{D})$ ise bu durumda her $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $Z \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}X} Z, Y\right) = \overline{g}\left(h(Z, Y), \overline{\Phi}X\right) = 0$$

olur. Bu ise $A_{\overline{\Phi}X} Z \in \Gamma(TM)$ olduğu dikkate alınırsa, $A_{\overline{\Phi}X} Z \in \Gamma(D)$ olduğunu gösterir. Bu nedenle, (c)⇒(d) önermesi doğrudur. Şimdi, her $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve

$Z \in \Gamma(D)$ için $A_{\overline{\Phi}X} Z \in \Gamma(D)$ olduğunu varsayalım. O zaman (2.15.1) ve (5.5.58) eşitlikleri yardımıyla her $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$0 = \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}X} Z, Y\right) = \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}X} Y, Z\right) = \frac{1}{2}\overline{g}\left(T\left[X, Y\right], Z\right)$$

olduğu bulunur. Buradan ise T endomorfizminin $\overline{g}$-simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\overline{g}\left(\left[X, Y\right], TZ\right) = 0$$

elde edilir. Böylece, (5.5.6) eşitliği dikkate alınırsa, $[X, Y] \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğu görülür. Bu ise $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması demektir. Yani, (d)⇒(a) ifadesi geçerlidir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 5.5.2. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\Phi}D^{\perp} = TM^{\perp}$ ise bu durumda $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul M altmanifoldunun mixed total geodezik olmasıdır.*

İspat. $\overline{\Phi}D^{\perp} = TM^{\perp}$ olduğu dikkate alınırsa, Teorem 5.5.8'in (d) ifadesinin bir uygulaması olarak ispat açıktır. □

Teorem 5.5.9. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir.*

İspat. $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda Teorem 5.5.8'in (b) ifadesinden her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $A_{\overline{\Phi}Y} X = 0$ eşitliği geçerlidir. Diğer taraftan, D distribüsyonunun invaryant olması nedeniyle herhangi bir $Z \in \Gamma(D)$ vektör alanı için $Z = \overline{\Phi}Z'$ olacak şekilde bir $Z' \in \Gamma(D)$ vektör alanı mevcuttur. Böylece, $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu ve $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralel olması dikkate alınırsa, Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\nabla_X Y, Z\right) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\Phi} Z^{'}\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_X Y, Z^{'}\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \overline{\Phi} Y, Z^{'}\right) \\
&= \overline{g}\left(-A_{\overline{\Phi} Y} X + \nabla^{\perp}_X \overline{\Phi} Y, Z^{'}\right) \\
&= \overline{g}\left(-A_{\overline{\Phi} Y} X, Z^{'}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\nabla_X Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right) \tag{5.5.59}$$

olduğu görülür. $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun herhangi bir maksimal integral manifoldu $M^{D^{\perp}}$ olsun. $M^{D^{\perp}}$ maksimal integral manifoldu üzerindeki konneksiyonu $\nabla^{''}$ ve $M^{D^{\perp}}$ maksimal integral manifoldunun M altmanifoldundaki ikinci temel formunu $h^{''}$ ile gösterelim. Bu durumda $M^{D^{\perp}}$ maksimal integral manifoldunun M altmanifoldundaki Gauss formulü her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\nabla_X Y = \nabla^{''}_X Y + h^{''}\left(X, Y\right) \tag{5.5.60}$$

ile verilir. Burada ∇, M altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş konneksiyondur. Böylece, (5.5.59) ifadesi yardımıyla (5.5.60) eşitliğinden $h^{''}\left(X, Y\right) = 0$ olduğu görülür. Yani, $M^{D^{\perp}}$ maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir. □

5.5.4 Mixed Total Geodezik Semi-İnvaryant Altmanifoldlar

Teorem 5.5.10. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler* *birbirine denktir:*

(a) *M bir $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik semi-invaryant altmanifolddur,*

(b) *Her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $A_V X \in \Gamma(D)$ ifadesi sağlanır,*

(c) *Her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $A_V Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ifadesi geçerlidir.*

İspat. M altmanifoldunun $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik olduğunu varsayalım. O zaman (2.15.2) eşitliği kullanılırsa, her $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(A_V X, Y\right) = \overline{g}\left(h\left(X, Y\right), V\right) = 0$$

elde edilir. Buradan ise $A_V X \in \Gamma(D)$ olduğu görülür. Yani, (a)⇒(b) önermesi doğrudur. Her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $A_V X \in \Gamma(D)$ olsun. Bu yüzden, şekil operatörünün (2.15.1) eşitliği ile verilen self-adjoint olma özelliği yardımıyla, her $X \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(A_V Z, X\right) = \overline{g}\left(Z, A_V X\right) = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $A_V Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ olduğunu gösterir. Böylece, (b)⇒(c) ifadesi elde edilir. Her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $A_V Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ifadesinin geçerli olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.15.2) eşitliğinden her $Y \in \Gamma(D)$ için

$$0 = \overline{g}\left(A_V Z, Y\right) = g\left(h\left(Z, Y\right), V\right)$$

olur. Buradan ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle her $Z \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $h\left(Z, Y\right) = 0$ olduğu görülür. Yani, M altmanifoldu $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodeziktir. O zaman (c)⇒(a) önermesi bir totolojidir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5.11. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun.*

Eğer D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\overline{\Phi} A_V X = A_V \overline{\Phi} X$$

eşitliği sağlanır.

İspat. D invaryant distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda Teorem 5.5.4'ün (b) ifadesinden her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$h\left(X, \overline{\Phi} Y\right) = h\left(\overline{\Phi} X, Y\right)$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle, (2.15.2) ve (3.2.1) eşitlikleri yardımıyla her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\Phi} A_V X, Y\right) &= \overline{g}\left(A_V X, \overline{\Phi} Y\right) \\
&= \overline{g}\left(h\left(X, \overline{\Phi} Y\right), V\right) \\
&= \overline{g}\left(h\left(\overline{\Phi} X, Y\right), V\right) \\
&= \overline{g}\left(A_V \overline{\Phi} X, Y\right)
\end{aligned}$$

veya bir başka deyişle,

$$\overline{g}\left(\overline{\Phi} A_V X - A_V \overline{\Phi} X, Y\right) = 0 \tag{5.5.61}$$

olur. Diğer taraftan, hipotezden M altmanifoldu $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik olduğu için Teorem 5.5.10 yardımıyla $A_V X \in \Gamma(D)$ ifadesi sağlanır. Ayrıca, D distribüsyonu invaryant olduğundan $\overline{\Phi} A_V X \in \Gamma(D)$ ve $A_V \overline{\Phi} X \in \Gamma(D)$ ifadeleri geçerlidir. O zaman

$$\overline{\Phi} A_V X - A_V \overline{\Phi} X \in \Gamma(D)$$

olduğu görülür. Böylece, (5.5.61) eşitliğinde $Y = \overline{\Phi} A_V X - A_V \overline{\Phi} X \in \Gamma(D)$ alınırsa, $\overline{g}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğu için

$$\overline{\Phi} A_V X = A_V \overline{\Phi} X$$

elde edilir. □

Teorem 5.5.12. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer her $X\in\Gamma(D)$ ve $V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için*

$$\overline{\Phi}A_VX=A_V\overline{\Phi}X \tag{5.5.62}$$

ise bu durumda M bir $\left(D,D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik semi-invaryant altmanifolddur.

İspat. D distribüsyonu invaryant olması nedeniyle her $X\in\Gamma(D)$ için $X=\overline{\Phi}X'$olacak şekilde bir $X'\in\Gamma(D)$ vektör alanı vardır. O zaman $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu dikkate alınırsa, (5.5.62) eşitliği ile verilen koşul yardımıyla, her $V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $Y\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(A_VX,Y\right)=\overline{g}\left(A_V\overline{\Phi}X',Y\right)=\overline{g}\left(\overline{\Phi}A_VX',Y\right)=\overline{g}\left(A_VX',\overline{\Phi}Y\right)$$

elde edilir. Bu ise $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun tanımından $\overline{g}\left(A_VX,Y\right)=0$ olduğunu ifade eder. Böylece, $A_VX\in\Gamma(D)$ olur. Yani, Teorem 5.5.10'un (b) ifadesi sağlanır. Bu nedenle, M semi-invaryant altmanifoldu $\left(D,D^{\perp}\right)$-mixed total geodeziktir. □

Teorem 5.5.13. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir $\left(D,D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $X\in\Gamma(D)$ ve $V\in\Gamma(\mathfrak{D})$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) $A_{\overline{\Phi}V}X=\overline{\Phi}A_VX$,

(b) $n\nabla^{\perp}_XV=\nabla^{\perp}_XnV$,

(c) $\nabla^{\perp}_XV\in\Gamma(\mathfrak{D})$,

(d) $\overline{\Phi}\nabla^{\perp}_XV=\nabla^{\perp}_X\overline{\Phi}V$.

İspat. $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralel olması nedeniyle (3.2.2) eşitliği ile verilen kovaryant türevinin tanımından her $X\in\Gamma(D)$ ve $V\in\Gamma(\mathfrak{D})$ için

$$\overline{\nabla}_X\overline{\Phi}V=\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_XV$$

olur. Buradan ise Weingarten formülü kullanılırsa, (5.1.7) ve (5.5.25) eşitliklerinden her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(\mathfrak{D})$ için

$$
\begin{aligned}
-A_{\overline{\Phi}V}X + \nabla^{\perp}_{X}\overline{\Phi}V &= -\overline{\Phi}A_{V}X + \overline{\Phi}\nabla^{\perp}_{X}V \\
-A_{\overline{\Phi}V}X + \nabla^{\perp}_{X}tV + \nabla^{\perp}_{X}nV &= -\overline{\Phi}A_{V}X + t\nabla^{\perp}_{X}V + n\nabla^{\perp}_{X}V \\
-A_{\overline{\Phi}V}X + \nabla^{\perp}_{X}nV &= -\overline{\Phi}A_{V}X + t\nabla^{\perp}_{X}V + n\nabla^{\perp}_{X}V
\end{aligned}
\tag{5.5.63}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, M bir $(D, D^{\perp})$-mixed total geodezik altmanifold olması nedeniyle Teorem 5.5.10'dan her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(\mathfrak{D})$ için $A_V X \in \Gamma(D)$ ifadesi sağlanır. Bu nedenle, D ve $\mathfrak{D}$ distribüsyonlarının invaryant olduğu kullanılırsa,

$$A_{\overline{\Phi}V}X \in \Gamma(D) \tag{5.5.64}$$

ve

$$\overline{\Phi}A_V X \in \Gamma(D) \tag{5.5.65}$$

ifadeleri bulunur. Böylece, (5.5.25), (5.5.28), (5.5.64) ve (5.5.65) ifadeleri yardımıyla, (5.5.63) eşitliğinde D, $D^{\perp}$ distribüsyonlarının ve $TM^{\perp}$ normal demetinin bileşenleri özdeşleştirilirse, sırasıyla,

$$A_{\overline{\Phi}V}X = \overline{\Phi}A_V X, \tag{5.5.66}$$

$$t\nabla^{\perp}_{X}V = 0 \tag{5.5.67}$$

ve

$$n\nabla^{\perp}_{X}V = \nabla^{\perp}_{X}nV \tag{5.5.68}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.5.67) eşitliği (5.5.41) ifadesinden

$$\nabla^{\perp}_{X}V \in \Gamma(\mathfrak{D})$$

olduğunu belirtir. Bu yüzden, (5.5.25) ifadesi dikkate alınırsa, (5.5.68) eşitliğinden

$$\overline{\Phi}\nabla^{\perp}_{X}V = \nabla^{\perp}_{X}\overline{\Phi}V$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, ispat tamamlanır. □

5.5.5 T Endomorfizminin Paralelliği

Teorem 5.5.14. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* T *endomorfizminin kovaryant türevinin sıfır olması için bir gerek ve yeter koşul her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$A_{NY}X = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $\overline{\nabla}T = 0$ olsun. Bu durumda (5.1.16) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$A_{NY}X = -th(X, Y) \tag{5.5.69}$$

olur. Buradan ise şekil operatörünün self adjoint ve $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu kullanılırsa, (5.1.6) ve (5.1.7) eşitlikleri ile verilen ayrışımlardan her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(A_{NY}X, Z) &= \overline{g}(A_{NY}Z, X) \\
&= -\overline{g}(th(Z, Y), X) \\
&= -\overline{g}\left(\overline{\Phi}h(Z, Y), X\right) \\
&= -\overline{g}\left(h(Z, Y), \overline{\Phi}X\right) \\
&= -\overline{g}(h(Z, Y), NX) \\
&= -\overline{g}(A_{NX}Z, Y) \\
&= -\overline{g}(A_{NX}Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle

$$A_{NY}X = -A_{NX}Y \tag{5.5.70}$$

olduğunu belirtir. Diğer taraftan, h ikinci temel formu bir simetrik tensör alanı olduğundan (5.5.69) eşitliğinden

$$A_{NY}X = A_{NX}Y \tag{5.5.71}$$

olduğu bulunur. Böylece, (5.5.70) ve (5.5.71) eşitliklerinden $A_{NX}Y = 0$ olur.

Tersine, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $A_{NX}Y = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (5.1.6) ve (5.1.7) ayrışımları yardımıyla (5.1.16) eşitliğinden her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_X T\right) Y, Z\right) &= \overline{g}\left(A_{NY}X + th\left(X,Y\right), Z\right) \\
&= \overline{g}\left(A_{NY}X, Z\right) + \overline{g}\left(th\left(X,Y\right), Z\right) \\
&= \overline{g}\left(A_{NY}X, Z\right) + \overline{g}\left(\overline{\Phi}h\left(X,Y\right), Z\right) \\
&= \overline{g}\left(A_{NY}X, Z\right) + \overline{g}\left(h\left(X,Y\right), \overline{\Phi}Z\right) \\
&= \overline{g}\left(A_{NY}X, Z\right) + \overline{g}\left(h\left(X,Y\right), NZ\right) \\
&= \overline{g}\left(A_{NY}X, Z\right) + \overline{g}\left(A_{NZ}X, Y\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğu için $\overline{\nabla}T = 0$ olduğunu ifade eder. □

Şimdi, semi-invaryant altmanifoldlar için $\overline{\nabla}T = 0$ durumunu araştıralım.

Teorem 5.5.15. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *TM tanjant demetinin T endomorfizminin kovaryant türevi sıfırdır. Yani, $\overline{\nabla}T = 0$ eşitliği sağlanır,*

(b) $A_{\overline{\Phi}D^{\perp}}D = \{0\}$,

(c) $\overline{g}\left(h\left(TM, D\right), \overline{\Phi}D^{\perp}\right) = \{0\}$,

(d) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral* *manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir,*

(e) *D invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir.*

İspat. A şekil operatörünün self adjoint olduğu dikkate alınırsa, (2.15.2), (3.2.1) ve (5.1.7) eşitliklerinden her $U \in \Gamma(TM)$, $X \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}X, U\right) &= \overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}U, X\right) \\ &= \overline{g}\left(h(U, X), \overline{\Phi}Z\right) \\ &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}h(U, X), Z\right) \\ &= \overline{g}\left(th(U, X), Z\right)\end{aligned} \tag{5.5.72}$$

elde edilir. Eğer $\overline{\nabla}T = 0$ ise bu durumda (5.1.16) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$A_{NY}X = -th(X, Y) \tag{5.5.73}$$

olur. Böylece, (5.5.18) eşitliğinden $D = KerN$ olduğu dikkate alınırsa, (5.5.72) ve (5.5.73) eşitlikleri yardımıyla

$$\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}Z}X, U\right) = \overline{g}\left(th(U, X), Z\right) = -\overline{g}\left(A_{NX}U, Z\right) = 0$$

olduğu görülür. Buradan ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle her $X \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $A_{\overline{\Phi}Z}X = 0$ olduğu bulunur. Bir başka deyişle, (a)⇒(b) önermesi doğrudur. $A_{\overline{\Phi}D^{\perp}}D = \{0\}$ varsayımı altında, (2.15.2) eşitliği yardımıyla $\overline{g}\left(h(TM, D), \overline{\Phi}D^{\perp}\right) = \{0\}$ olduğu açıktır. Yani, (b)⇒(c) önermesi elde edilir. $\overline{g}\left(h(TM, D), \overline{\Phi}D^{\perp}\right) = \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 5.5.6'dan D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir. Aynı zamanda, Teorem 5.5.8 ve Teorem 5.5.9 yardımıyla $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir. O halde (c)⇒(d) önermesi bir totolojidir. D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlarının integrallenebilir ve her bir maksimal integral manifoldunun M altmanifoldunda total geodezik olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 2.16.3 dikkate alınırsa, hem D invaryant distribüsyonu hem de $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir. Bu yüzden, (d)⇒(e) önermesi doğrudur. Eğer D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paralel ise o zaman her $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ve $U \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_U X \in \Gamma(D) \tag{5.5.74}$$

ve

$$\nabla_U Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right) \tag{5.5.75}$$

ifadeleri geçerlidir. Diğer taraftan, $\overline{\nabla}\,\overline{\Phi} = 0$ olduğu dikkate alınırsa, Gauss formülü yardımıyla (5.5.74) ifadesinden

$$\overline{\nabla}_U \overline{\Phi} X = \overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_U X$$
$$\nabla_U \overline{\Phi} X + h\left(U, \overline{\Phi} X\right) = \overline{\Phi} \nabla_U X + \overline{\Phi} h(U, X)$$

elde edilir. Buradan ise

$$\nabla_U \overline{\Phi} X = \overline{\Phi} \nabla_U X \tag{5.5.76}$$

ve

$$h\left(U, \overline{\Phi} X\right) = \overline{\Phi} h(U, X)$$

olduğu görülür. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. (5.5.74) ve (5.5.75) ifadeleri dikkate alınırsa, (5.5.3) ve (5.5.76) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_U T\right) W &= \left(\overline{\nabla}_U T\right) rW + \left(\overline{\nabla}_U T\right) sW \\ &= \nabla_U TrW - T\nabla_U rW + \nabla_U TsW - T\nabla_U sW \\ &= \nabla_U \overline{\Phi} rW - \overline{\Phi}\nabla_U rW + 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise (e)⇒(a) önermesinin doğruluğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

5.5.6 N Normal Demet Değerli 1-Formunun Paralelliği

Teorem 5.5.16. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\overline{\nabla} N = 0$ olması için bir gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için*

$$A_{nV}X = TA_V X$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. n ve T endomorfizmlerinin $\overline{g}$-simetrik olduğu dikkate alınırsa, (2.15.2) ve (5.1.17) eşitlikleri yardımıyla her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(A_{nV}X - TA_V X, Y\right) &= \overline{g}\left(A_{nV}X, Y\right) - \overline{g}\left(TA_V X, Y\right) \\ &= \overline{g}\left(h(X,Y), nV\right) - \overline{g}\left(A_V X, TY\right) \\ &= \overline{g}\left(nh(X,Y), V\right) - \overline{g}\left(h(X,TY), V\right) \\ &= \overline{g}\left(nh(X,Y) - h(X,TY), V\right) \\ &= \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right) Y, V\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle $\overline{\nabla} N = 0$ olması için bir gerek ve yeter koşulun $A_{nV}X = TA_V X$ olduğunu ifade eder. □

Teorem 5.5.17. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\overline{\nabla} N = 0$ olması için bir gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için*

$$A_{nV}X = A_V TX$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (2.15.2) ve (5.1.17) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa, h ikinci temel formunun simetrik ve n endomorfizminin $\overline{g}$-simetrik olduğu kullanılırsa, her $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(A_{nV}X - A_V TX, Y\right) &= \overline{g}\left(A_{nV}X, Y\right) - \overline{g}\left(A_V TX, Y\right) \\ &= \overline{g}\left(h\left(X, Y\right), nV\right) - \overline{g}\left(h\left(TX, Y\right), V\right) \\ &= \overline{g}\left(nh\left(Y, X\right), V\right) - \overline{g}\left(h\left(Y, TX\right), V\right) \\ &= \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_Y N\right) X, V\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise N normal demet değerli 1-formunun kovaryant türevinin sıfır olmasının $A_{nV}X = A_V TX$ eşitliğine denk olduğu görülür. □

Sonuç 5.5.3. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla} N = 0$ ise o zaman her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için*

$$TA_V X = A_{nV}X = A_V TX$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 5.5.16 ve Teorem 5.5.17 birlikte düşünülürse, ispat kolayca görülür. □

Şimdi, semi-invaryant altmanifoldlar için $\overline{\nabla} N = 0$ durumunu araştıralım.

Lemma 5.5.2. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Eğer her* $X \in \Gamma(D)$ *ve* $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ *için*

$$TA_V X = A_V TX$$

eşitliği sağlanırsa bu durumda M *bir* $\left(D, D^{\perp}\right)$*-mixed total geodezik semi-invaryant altmanifolddur.*

İspat. Her $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$TA_V X = A_V TX$$

olsun. (5.5.18) ifadesinden $D = KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right)$ olduğu dikkate alınırsa, semi-invaryant altmanifoldlar için bir karakterizasyon koşulu $NT = 0$ eşitliği yardımıyla her $X \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} NA_V X &= N\left(A_V T^2 X - A_V TX\right) \\ &= NTA_V TX - NTA_V X \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya başka bir yöntemle her $X \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} \left(T^2 - T - I\right) A_V X &= T^2 A_V X - TA_V X - A_V X \\ &= TA_V TX - A_V TX - A_V X \\ &= A_V T^2 X - A_V TX - A_V X \\ &= A_V\left(T^2 X - TX - X\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $A_V X \in \Gamma(D)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 5.5.10'dan M bir $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik altmanifold olur. □

Teorem 5.5.18. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Eğer* $\overline{\nabla} N = 0$ *ise* M *bir* $\left(D, D^{\perp}\right)$*-mixed total geodezik altmanifolddur.*

İspat. (5.1.17) ifadesi dikkate alınırsa, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X N\right) Y = nh(X, Y) - h(X, TY) \tag{5.5.77}$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_Y N\right) X = nh(Y, X) - h(Y, TX) \tag{5.5.78}$$

eşitlikleri geçerlidir. $\overline{\nabla} N = 0$ olsun. Bu durumda h ikinci temel formu simetrik olduğu için (5.5.77) ve (5.5.78) eşitliklerinden

$$h(X, TY) = h(Y, TX) \tag{5.5.79}$$

elde edilir. O halde T endomorfizminin TM tanjant demeti üzerinde $\overline{g}$-simetrik olduğu kullanılırsa, (2.15.2) ve (5.5.79) eşitlikleri yardımıyla her $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}\overline{g}(TA_V X, Y) &= \overline{g}(A_V X, TY) = \overline{g}(h(X, TY), V) \\ &= \overline{g}(h(TX, Y), V) = \overline{g}(A_V TX, Y)\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle

$$TA_V X = A_V TX$$

olduğu gösterir. Bu yüzden, Lemma 5.5.2'den M altmanifoldu $\left(D, D^{\perp}\right)$-mixed total geodeziktir. $\square$

Teorem 5.5.19. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla} N = 0$ ise her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $h(X, Y) \in \Gamma(\mathfrak{D})$ olur. Ayrıca, her $X \in \Gamma(D)$ için ya $h(X, X) = 0$ ya da $h(X, X)$ normal vektör alanı $n^2 - n$ endomorfizminin 1 öz değerine karşılık gelen bir öz vektörüdür.*

İspat. Eğer $\overline{\nabla} N = 0$ ise o zaman (5.1.17) ifadesinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$nh(X, Y) = h(X, TY)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda (5.5.18) eşitliğinden $D = KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right)$ olması nedeniyle her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}\left(n^2 - n - I\right) h(X,Y) &= n^2 h(X,Y) - nh(X,Y) - h(X,Y) \\ &= h\left(X, T^2 Y\right) - h(X,TY) - h(X,Y) \\ &= h\left(X, T^2 Y - TY - Y\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.5.80}$$

elde edilir. Bu ise (5.5.41) eşitliğinden $\mathfrak{D} = Ker\left(n^2 - n - I\right) = Kert$ olduğu için $h(X,Y) \in \Gamma(\mathfrak{D})$ olduğu gösterir. Şimdi, her $X \in \Gamma(D)$ için $h(X,X) \neq 0$ olsun. O halde (5.5.80) eşitliğinden $h(X,X)$ vektör alanının, $n^2 - n$ endomorfizminin 1 öz değerine karşılık gelen bir öz vektör olduğu açıktır. □

Lemma 5.5.3. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla} N = 0$ ise bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) $A_{\overline{\Phi} D^{\perp}} D = \{0\}$,

(b) $A_{\mathfrak{D}} D^{\perp} = \{0\}$.

İspat. $\overline{\nabla} N = 0$ ise bu durumda (5.1.17) ifadesinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$nh(X,Y) = h(X,TY)$$

eşitliği sağlanır. (5.5.18) eşitliğinden $D = KerN = Ker\left(T^2 - T - I\right)$ olması nedeniyle her $Y \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}h(X,Y) = h(X, T(T-I)Y) &= nh(X,(T-I)Y) \\ &= nh(X,TY) - nh(X,Y) \\ &= nh(X,TY) - h(X,TY) \\ &= (n-I)\, h(X,TY)\end{aligned}$$

olur. Bu ise (5.5.26) ve (5.5.27) eşitliklerinden her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için

$$h(X,Y) \in \Gamma(\mathfrak{D}) \text{ veya } h(TM,D) \subseteq \mathfrak{D} \tag{5.5.81}$$

olduğu gösterir. Böylece, (2.15.2) eşitliği dikkate alınırsa, (5.5.81) ifadesinden

$$\overline{g}\left(A_{\overline{\Phi}D^{\perp}}D, TM\right) = \overline{g}\left(h(TM,D), \overline{\Phi}D^{\perp}\right) = \{0\}$$

elde edilir. Bu ise (a) ifadesinin sağlandığını belirtir. (5.5.19) eşitliğinden $D^{\perp} = Ker\left(T^2 - T\right)$ olduğu dikkate alınırsa, her $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left(n^2 - n\right) h(X,Y) &= n^2 h(X,Y) - nh(X,Y) \\
&= h\left(X, T^2 Y\right) - h(X,TY) \\
&= h\left(X, T^2 Y - TY\right) \\
&= h\left(X, \left(T^2 - T\right) Y\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ise her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$h(X,Y) \in Ker\left(n^2 - n\right) = \mathfrak{D}^{\perp} \text{ veya } h\left(TM, D^{\perp}\right) \subseteq \mathfrak{D}^{\perp} \tag{5.5.82}$$

olduğunu gösterir. O zaman (2.15.2) eşitliği göz önünde bulundurulursa, (5.5.82) ifadesi yardımıyla

$$\overline{g}\left(A_{\mathfrak{D}}D^{\perp}, TM\right) = \overline{g}\left(h\left(TM, D^{\perp}\right), \mathfrak{D}\right) = \{0\}$$

olduğu bulunur. Bir başka deyişle, (b) ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5.20. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla}N = 0$ ise $\overline{\nabla}T = 0$ olur.*

İspat. Eğer $\overline{\nabla}N = 0$ ise bu durumda Lemma 5.5.3'ün (a) ifadesi sağlanır. Bu ise, Teorem 5.5.15'ten $\overline{\nabla}T = 0$ eşitliğine denktir. Böylece, istenen ispat elde edilir. □

Sonuç 5.5.4. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Eğer* $\overline{\nabla} N = 0$ *ise bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) $A_{\overline{\Phi} D^{\perp}} D = \{0\}$,

(b) $\overline{g}\left(h\left(TM, D\right), \overline{\Phi} D^{\perp}\right) = \{0\}$,

(c) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir,*

(d) *D invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir.*

Ayrıca, bu ifadeler birbirine denktir.

İspat. Teorem 5.5.15 ve Teorem 5.5.20 birleştirilirse, ispat elde edilir. □

5.5.7 t Tanjant Demet Değerli 1-Formunun Paralelliği

Teorem 5.5.21. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu* M *olsun.* $\overline{\nabla} t = 0$ *olması için bir gerek ve yeter koşul* $\overline{\nabla} N = 0$ *olmasıdır.*

İspat. T ve n dönüşümlerinin $\overline{g}$-simetrik olduğu kullanılırsa, (5.1.17) ve (5.1.20) eşitliklerinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_X t\right) V, Y\right) &= \overline{g}\left(A_{nV} X - T A_V X, Y\right) \\ &= \overline{g}\left(A_{nV} X, Y\right) - \overline{g}\left(T A_V X, Y\right) \\ &= \overline{g}\left(h\left(X, Y\right), nV\right) - \overline{g}\left(A_V X, TY\right) \end{aligned}$$

$$= \overline{g}\left(nh\left(X,Y\right),V\right) - \overline{g}\left(h\left(X,TY\right),V\right)$$
$$= \overline{g}\left(nh\left(X,Y\right) - h\left(X,TY\right),V\right)$$
$$= \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right)Y,V\right)$$

elde edilir. Bu ise $\overline{g}$ Riemann metriğinin non-dejenere olması nedeniyle, $\overline{\nabla}t = 0$ olması için bir gerek ve yeter koşulun $\overline{\nabla}N = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, semi-invaryant altmanifoldlar için $\overline{\nabla}t = 0$ durumunu araştıralım.

Teorem 5.5.22. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla}t = 0$ ise her $X,Y \in \Gamma\left(D\right)$ için $h\left(X,Y\right) \in \Gamma\left(\mathfrak{D}\right)$ olur. Ayrıca, her $X \in \Gamma\left(D\right)$ için ya $h\left(X,X\right) = 0$ ya da $h\left(X,X\right)$ normal vektör alanı $n^2 - n$ endomorfizminin 1 öz değerine karşılık gelen bir öz vektörüdür.*

İspat. Teorem 5.5.19 ve Teorem 5.5.21 göz önünde bulundurulursa, ispat açıktır. □

Teorem 5.5.23. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla}t = 0$ ise bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) *M bir $\left(D,D^{\perp}\right)$-mixed total geodezik altmanifolddur,*

(b) $A_{\mathfrak{D}}D^{\perp} = \{0\}$.

İspat. Teorem 5.5.18, Lemma 5.5.3 ve Teorem 5.5.21 birlikte düşünülürse, ispat kolayca görülür. □

Teorem 5.5.24. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\overline{\nabla}t = 0$ ise bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) $\overline{\nabla} T = 0,$

(b) $A_{\overline{\Phi} D^{\perp}} D = \{0\},$

(c) $\overline{g}\left(h\left(TM, D\right), \overline{\Phi} D^{\perp}\right) = \{0\},$

(d) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir,*

(e) *D invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir.*

Ayrıca, bu ifadeler birbirine denktir.

İspat. Teorem 5.5.20, Sonuç 5.5.4 ve Teorem 5.5.21 birleştirilirse, istenen ispat elde edilir. □

5.5.8 Total Umbilik Semi-İnvaryant Altmanifoldlar

Önerme 5.5.8. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olsun. Bu durumda her $X, Y, Z, W \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için*

$$\overline{R}\left(X, Y\right) \overline{\Phi} Z = \overline{\Phi}\, \overline{R}\left(X, Y\right) Z, \tag{5.5.83}$$

$$\overline{R}\left(\overline{\Phi} X, Y\right) Z = \overline{R}\left(X, \overline{\Phi} Y\right) Z, \tag{5.5.84}$$

$$\overline{K}\left(\overline{\Phi} X, Y, Z, W\right) = \overline{K}\left(X, \overline{\Phi} Y, Z, W\right) \tag{5.5.85}$$

ve

$$\overline{K}\left(X, Y, \overline{\Phi} Z, W\right) = \overline{K}\left(X, Y, Z, \overline{\Phi} W\right) \tag{5.5.86}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $\overline{R}$ ve $\overline{K}$, sırasıyla, $\overline{M}$ manifoldunun eğrilik tensörünü ve Riemann Christoffel eğrilik tensörünü göstermektedir.

İspat. Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold ise bu durumda $\overline{\Phi}$ altın yapısı paralleldir. Bu yüzden, her $X,Y,Z\in\Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\,\overline{\Phi}Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{\Phi}Z-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{\Phi}Z-\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\Phi}Z\\
&= \overline{\nabla}_X\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_YZ-\overline{\nabla}_Y\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_XZ-\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&= \overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ-\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ-\overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&= \overline{\Phi}\left(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ-\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\right)\\
&= \overline{\Phi}\,\overline{R}(X,Y)\,Z
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, (5.5.83) eşitliği gösterilmiş olur. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olduğu ve Riemann Christoffel eğrilik tensörünün bazı özellikleri dikkate alınırsa, (5.5.83) eşitliği yardımıyla her $X,Y,Z,W\in\Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}\left(\overline{\Phi}X,Y,Z,W\right) &= \overline{K}\left(Z,W,\overline{\Phi}X,Y\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{R}(Z,W)\,\overline{\Phi}X,Y\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{R}(Z,W)\,X,Y\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{R}(Z,W)\,X,\overline{\Phi}Y\right)\\
&= \overline{K}\left(Z,W,X,\overline{\Phi}Y\right)\\
&= \overline{K}\left(X,\overline{\Phi}Y,Z,W\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{K}\left(X,Y,\overline{\Phi}Z,W\right) &= \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)\,\overline{\Phi}Z,W\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}\,\overline{R}(X,Y)\,Z,W\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)\,Z,\overline{\Phi}W\right)\\
&= \overline{K}\left(X,Y,Z,\overline{\Phi}W\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (5.5.85) ve (5.5.86) eşitlikleri gösterilmiş olur. Ayrıca, Riemann Christoffel eğrilik tensörünün tanımı göz önünde bulundurulursa, (5.5.85) eşitliğinden (5.5.84) ifadesi elde edilir Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.5.9. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D invaryant distribüsyonu daima integrallenebilirdir [66].*

İspat. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu olması göz önünde bulundurulursa, (2.15.4) eşitliğinden her $X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} h\left(X,\overline{\Phi}Y\right) &= \overline{g}\left(X,\overline{\Phi}Y\right)H \\ &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}X,Y\right)H \\ &= h\left(\overline{\Phi}X,Y\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 5.5.4'ün (b) ifadesinden D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu gösterir. □

Önerme 5.5.10. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu daima integrallenebilirdir [66].*

İspat. (2.15.4) eşitliği kullanılırsa, her $X\in\Gamma(D)$ ve $Y,Z\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(h(X,Y),\overline{\Phi}Z\right)=\overline{g}(X,Y)\,\overline{g}\left(H,\overline{\Phi}Z\right)=0 \qquad (5.5.87)$$

olduğu açıktır. Buradan ise (2.15.2) eşitliği kullanılırsa, her $X\in\Gamma(D)$ ve $Z\in\Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için $A_{\overline{\Phi}Z}X\in\Gamma(D)$ olur. Bu ise Teorem 5.5.8'in (d) ifadesi yardımıyla $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu belirtir. □

Tanım 5.5.3. *Bir $\overline{M}$ Riemann manifoldunun herhangi bir altmanifoldu total umbilik ve normal konneksiyona göre paralel sıfırdan farklı ortalama eğrilik vektör alanına sahipse bir extrinsic küre olarak adlandırılır [67].*

Teorem 5.5.25. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlardan en az biri geçerlidir:*

(a) $H = 0$,

(b) $H \perp \Gamma\left(\overline{\Phi} D^{\perp}\right)$,

(c) $\dim D^{\perp} = 0$.

İspat. M semi-invaryant altmanifoldu total umbilik olduğu için $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu daima integrallenebilirdir. O zaman Teorem 5.5.8'in (b) ifadesi dikkate alınırsa, her $X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\overline{g}\left(H, \overline{\Phi} X\right) Y = A_{\overline{\Phi} X} Y = 0 \tag{5.5.88}$$

elde edilir. Böylece, (5.5.88) eşitliği

$$\overline{g}\left(H, \overline{\Phi} X\right) = 0 \tag{5.5.89}$$

olduğu ifade eder. Görüldüğü gibi (5.5.89) eşitliğinin $H = 0$ veya $\dim D^{\perp} = 0$ ise geçerli olduğu açıktır. Bu yüzden, $H \neq 0$ ve $\dim D^{\perp} \neq 0$ ise

$$H \perp \overline{\Phi} X$$

ifadesi geçerlidir. Bir başka deyişle, $H \perp \Gamma\left(\overline{\Phi} D^{\perp}\right)$ olduğu bulunur. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 5.5.5. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlardan en az biri geçerlidir:*

(a) *M total geodeziktir,*

(b) $H \in \Gamma(\mathfrak{D})$,

(c) *M invaryant altmanifolddur.*

İspat. Teorem 5.5.25'in bir sonucu olarak ispat açıktır. □

Teorem 5.5.26. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda* T *endomorfizminin kovaryant türevi sıfırdır.*

İspat. M altmanifoldunun total umbilik olduğu göz önünde bulundurulursa, (2.15.3) ve (2.15.4) eşitlikleri yardımıyla Önerme 5.1.3'te verilen T endomorfizminin kovaryant türevi her $X,Y\in\Gamma\left(TM\right)$ için

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_XT\right)Y&=A_{NY}X+th\left(X,Y\right)\\&=\overline{g}\left(H,NY\right)X+\overline{g}\left(X,Y\right)tH\end{aligned}\tag{5.5.90}$$

halini alır. Eğer $H=0$ veya $\dim D^{\perp}=0$ ise ispat açıktır. Şimdi, $H\neq0$ ve $\dim D^{\perp}\neq0$ olduğunu kabul edelim. D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri, sırasıyla, r ve s ile gösterelim. Bu durumda (5.5.90) eşitliği

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_XT\right)Y&=\overline{g}\left(H,NY\right)X+\overline{g}\left(X,Y\right)tH\\&=\overline{g}\left(H,NrY\right)X+\overline{g}\left(H,NsY\right)X+\overline{g}\left(X,Y\right)tH\end{aligned}\tag{5.5.91}$$

ile verilir. Diğer taraftan, Teorem 5.5.25'ten

$$H\in\Gamma\left(\mathfrak{D}\right)$$

ifadesi geçerlidir. Böylece, (5.5.4), (5.5.5) ve (5.5.41) ifadelerinden, sırasıyla, $\mathfrak{D}^{\perp}=ND^{\perp}$, $ND=\{0\}$ ve $\mathfrak{D}=\ker t$ olduğu dikkate alınırsa, (5.5.91) eşitliğinden $\overline{\nabla}T=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, ispat biter. □

Sonuç 5.5.6. *Bir* $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu* M *olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) $A_{\overline{\Phi}D^{\perp}}D=\{0\}$,

(b) $\overline{g}\left(h\left(TM,D\right),\overline{\Phi}D^{\perp}\right)=\{0\}$,

(c) *D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda total geodeziktir,*

(d) *D invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir, $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir.*

Ayrıca, bu ifadeler birbirine denktir.

İspat. Teorem 5.5.15 ve Teorem 5.5.26 birleştirilirse, istenen ispat elde edilir. □

Teorem 5.5.27. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer* $\dim\overline{M}=\dim M+\dim D^{\perp}$ *ise o zaman M total geodezik altmanifolddur.*

İspat. Eğer $\dim D^{\perp}=0$ ise ispat açıktır. Şimdi, $\dim D^{\perp}\neq 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.5.25,

$$H\in\Gamma\left(\mathfrak{D}\right)\tag{5.5.92}$$

olduğunu ifade eder. Diğer taraftan, hipotezden $\dim\overline{M}=\dim M+\dim D^{\perp}$ olduğu için

$$\begin{aligned}\dim D^{\perp}&=\dim\overline{M}-\dim M\\&=\dim T\overline{M}-\dim TM\\&=\dim TM^{\perp}\end{aligned}\tag{5.5.93}$$

olur. Bu ise $\overline{\Phi}$ altın yapısının birebir olması nedeniyle

$$\overline{\Phi}D^{\perp}=TM^{\perp}\tag{5.5.94}$$

oldugunu gösterir. O halde $\mathfrak{D} \subseteq TM^{\perp}$ olduğu dikkate alınırsa, (5.5.94) eşitliğinden $\mathfrak{D} = \{0\}$ olmak zorundadır. Böylece, (5.5.92) ifadesinden $H = 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, M bir total geodezik altmanifolddur. $\square$

Teorem 5.5.28. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer* $\dim D \geq 2$ *ise bu durumda M bir extrinsic küredir.*

İspat. Hipotezden, $\dim D \geq 2$ olduğu için

$$\overline{g}\left(X, Y\right) = 0 \tag{5.5.95}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $X, Y \in \Gamma\left(D\right)$ vektör alanları mevcuttur. O zaman (5.5.83) eşitliğinde $Z = TY$ olarak alınırsa, $X, Y \in \Gamma\left(D\right)$ vektör alanları için

$$\overline{R}\left(X, Y\right)\overline{\Phi}TY = \overline{\Phi}\,\overline{R}\left(X, Y\right)TY$$

elde edilir. Buradan ise (5.1.6) ayrışımı dikkate alınırsa, semi-invaryant altmanifoldlar için bir karakterizasyon koşulu olan $NT = 0$ eşitliği yardımıyla

$$\overline{R}\left(X, Y\right)T^2Y = \overline{\Phi}\,\overline{R}\left(X, Y\right)TY$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, Teorem 5.5.26'dan $\overline{\nabla}T = 0$ olması nedeniyle her $X, Y, Z \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$\overline{R}\left(X, Y\right)TZ = T\overline{R}\left(X, Y\right)Z \tag{5.5.96}$$

olduğu açıktır. Böylece, (5.5.5) ve (5.5.6) ifadeleri dikkate alınırsa, (5.1.8) eşitliğinden her $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}\left(\overline{R}\left(X,Y\right)T^2Y - \overline{\Phi}\,\overline{R}\left(X,Y\right)TY, V\right) \qquad (5.5.97)\\ &= \overline{g}\left(\overline{R}\left(X,Y\right)TY + \overline{R}\left(X,Y\right)Y - \overline{R}\left(X,Y\right)tNY - \overline{\Phi}\,\overline{R}\left(X,Y\right)TY, V\right)\\ &= \overline{g}\left(T\overline{R}\left(X,Y\right)Y + \overline{R}\left(X,Y\right)Y - \overline{R}\left(X,Y\right)tNY - \overline{\Phi}T\overline{R}\left(X,Y\right)Y, V\right)\\ &= \overline{g}\left(\overline{R}\left(X,Y\right)Y, V\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle, (2.15.6) ve (5.5.95) eşitlikleri yardımıyla her $V \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için (5.5.97) eşitliği

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}\left(\overline{R}\left(X,Y\right)Y,V\right) \\ &= \overline{g}\left(Y,Y\right)\overline{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}H,V\right) - \overline{g}\left(X,Y\right)\overline{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}H,V\right) \\ &= \overline{g}\left(Y,Y\right)\overline{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}H,V\right) \end{aligned}$$

halini alır. Buradan ise her $X \in \Gamma\left(D\right)$ için $\nabla^{\perp}_{X}H = 0$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ ise $\nabla^{\perp}_{X}H = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, her $X \in \Gamma\left(TM\right)$ için $\nabla^{\perp}_{X}H = 0$ olur. Yani, M bir extrinsic küredir. □

Teorem 5.5.29. *Pozitif veya negatif eğrilikli bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun proper total umbilik semi-invaryant altmanifoldları yoktur.*

İspat. Kabul edelim ki pozitif veya negatif eğrilikli bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir total umbilik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $H = 0$ ise ispat açıktır. $0 \neq H \in \Gamma\left(\mathfrak{D}\right)$ olduğunu varsayalım. X ve V vektör alanlarını $X \in \Gamma\left(D\right)$ ve $V \in \Gamma\left(\overline{\Phi}D^{\perp}\right)$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$\overline{g}\left(V,H\right) = 0 \tag{5.5.98}$$

olur. O zaman (5.5.98) eşitliğinin $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyona göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\overline{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}V,H\right) = -\overline{g}\left(V,\nabla^{\perp}_{X}H\right) \tag{5.5.99}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, $\overline{\Phi}$ altın yapısı paralel olduğu için $\overline{\Psi} = I - \overline{\Phi}$ eşitliği ile endomorfizminin de $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olduğu açıktır. Bu nedenle, $X \in \Gamma\left(D\right)$ ve $V \in \Gamma\left(\overline{\Phi}D^{\perp}\right)$ vektör alanları için

$$\overline{\nabla}_{X}\overline{\Psi}V = \overline{\Psi}\,\overline{\nabla}_{X}V$$

eşitliği geçerlidir. Buradan ise M altmanifoldunun total umbilik olduğu dikkate alınırsa, (2.15.3) ve (2.15.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\nabla_X \overline{\Psi} V + h\left(X, \overline{\Psi} V\right) = -\overline{\Psi} A_V X + \overline{\Psi} \nabla_X^{\perp} V$$

$$\nabla_X \overline{\Psi} V + \overline{g}\left(X, \overline{\Psi} V\right) H = -\overline{g}\left(V, H\right) \overline{\Psi} X + \overline{\Psi} \nabla_X^{\perp} V$$

$$\nabla_X \overline{\Psi} V = \overline{\Psi} \nabla_X^{\perp} V$$

elde edilir. Bu ise Teorem 5.5.26'dan

$$\nabla_X^{\perp} V = -\overline{\Phi} \nabla_X \overline{\Psi} V = -N \nabla_X \overline{\Psi} V \in \Gamma\left(N D^{\perp}\right) = \Gamma\left(\overline{\Phi} D^{\perp}\right)$$

olduğu ifade eder. Böylece, (5.5.99) eşitliğinden

$$\nabla_X^{\perp} H \in \Gamma\left(\mathfrak{D}\right) \tag{5.5.100}$$

olur. Ayrıca, $V \in \Gamma\left(\overline{\Phi} D^{\perp}\right)$ olduğu için

$$V = \overline{\Phi} Y \tag{5.5.101}$$

olacak şekilde bir $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanı vardır. Öte yandan, (5.5.86) eşitliğinden $X \in \Gamma\left(D\right)$ ve $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanları için

$$\overline{K}\left(X, Y, X, Y\right) = -\overline{K}\left(X, Y, \overline{\Psi} X, \overline{\Phi} Y\right) \tag{5.5.102}$$

olduğu açıktır. O halde (5.5.102) eşitliği dikkate alınırsa, (2.15.6), (5.5.100) ve (5.5.101) ifadeleri yardımıyla $\overline{M}$ ambient manifoldunun kesit eğriliği $X \in \Gamma\left(D\right)$ ve $Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}\overline{K}\left(X \wedge Y\right) &= \overline{K}\left(X, Y, X, Y\right) \\ &= -\overline{K}\left(X, Y, \overline{\Psi} X, \overline{\Phi} Y\right) \\ &= -\overline{g}\left(Y, \overline{\Psi} X\right) \overline{g}\left(\nabla_X^{\perp} H, \overline{\Phi} Y\right) + \overline{g}\left(X, \overline{\Psi} X\right) \overline{g}\left(\nabla_X^{\perp} H, \overline{\Phi} Y\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ile verilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla, pozitif veya negatif eğrilikli bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir proper total umbilik semi-invaryant altmanifoldu yoktur. □

Sonuç 5.5.7. *Pozitif veya negatif eğrilikli bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun proper total geodezik semi-invaryant altmanifoldları yoktur.*

İspat. Herhangi bir total geodezik altmanifold aynı zamanda total umbilik olduğu için Teorem 5.5.29 yardımıyla istenen ispat elde edilir. □

5.5.9 Semi İnvaryant Altmanifoldların Kohomolojisi

Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir M semi-invaryant altmanifoldu, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ ile gösterilen invaryant ve anti-invaryant distribüsyonları ile belirlidir. $\dim D = p$ ve $\dim D^{\perp} = q$ diyelim. D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlarının birer yerel ortonormal çatısı, sırasıyla,

$$\mathfrak{B}_D = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$$

ve

$$\mathfrak{B}_{D^{\perp}} = \{E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\}$$

olsun. M semi-invaryant altmanifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile gösterelim.

Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X Y$ vektör alanının D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlarındaki bileşenlerini, sırasıyla, $(\nabla_X Y)^{\top}$ ve $(\nabla_X Y)^{\perp}$ ile ifade edelim. Her $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$h_D(X, Y) = (\nabla_X Y)^{\perp}$$

diyelim. O zaman D invaryant distribüsyonunun ortalama eğrilik vektörü

$$H_D = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} h_D\left(E_i, E_i\right) \tag{5.5.103}$$

ile tanımlanır. Üstelik, H_D ortalama eğrilik vektörü M altmanifoldu üzerinde iyi tanımlıdır ve $D^{\perp}$-değerli bir vektör alanıdır. Eğer $H_D = 0$ ise D invaryant distribüsyonu minimaldir. Şimdi, her X,$Y \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$h_{D^{\perp}}\left(X, Y\right) = \left(\nabla_X Y\right)^{\top}$$

olsun. Bu durumda $H_{D^{\perp}}$ vektör alanı

$$H_{D^{\perp}} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} h_{D^{\perp}}\left(E_{p+i}, E_{p+i}\right) \tag{5.5.104}$$

ile verilir. Ayrıca, $H_{D^{\perp}}$ ortalama eğrilik vektörü M altmanifoldu üzerinde iyi tanımlıdır ve D-değerli bir vektör alanıdır. Eğer $H_{D^{\perp}} = 0$ ise $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu minimaldir.

Önerme 5.5.11. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda minimaldır.*

İspat. $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumlu ve $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralel olduğu dikkate alınırsa, Gauss formülü yardımıyla her $X \in \mathfrak{B}_{D^{\perp}}$ ve $Y \in \Gamma\left(D\right)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \nabla_X X\right) &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \overline{\nabla}_X X\right) \\ &= \overline{g}\left(Y, \overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_X X\right) \\ &= \overline{g}\left(Y, \overline{\nabla}_X \overline{\Phi} X\right) \end{aligned} \tag{5.5.105}$$

elde edilir. Buradan ise Weingarten formülü kullanılırsa, (5.5.105) eşitliği her $X \in \mathfrak{B}_{D^\perp}$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \nabla_X X\right) &= \overline{g}\left(Y, -A_{\overline{\Phi}X}X + \nabla_X^\perp \overline{\Phi}X\right)\\ &= -\overline{g}\left(Y, A_{\overline{\Phi}X}X\right)\\ &= -\overline{g}\left(h(X,Y), \overline{\Phi}X\right)\end{aligned}$$

ile verilir. O halde $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması nedeniyle Teorem 5.5.8'in (d) ifadesinden her $X \in \mathfrak{B}_{D^\perp}$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \nabla_X X\right) = 0 \tag{5.5.106}$$

olduğu görülür. Bu yüzden, D distribüsyonunun $\overline{\Phi}$-invaryant olduğu dikkate alınırsa, (5.5.106) eşitliği her $X \in \mathfrak{B}_{D^\perp}$ için $\nabla_X X \in \Gamma\left(D^\perp\right)$ olduğunu ifade eder. Böylece, $(\nabla_X X)^\top = 0$ olur. O zaman (5.5.104) eşitliğinden $H_{D^\perp} = 0$ olduğu elde edilir. Yani, $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu minimaldir. Ayrıca, hipotezden $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir olduğu için $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda minimaldir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 5.5.8. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir mixed $\left(D, D^\perp\right)$-geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun her bir maksimal integral manifoldu M altmanifoldunda minimaldır.*

İspat. Eğer M semi-invaryant altmanifoldu mixed $\left(D, D^\perp\right)$-geodezik ise $h\left(D, D^\perp\right) = \{0\}$ eşitliği sağlanır. Bu durumda

$$\overline{g}\left(h\left(D, D^\perp\right), \overline{\Phi}D^\perp\right) = \{0\}$$

olduğu açıktır. Bu ise Teorem 5.5.8'in (d) ifadesine denktir. Bir başka deyişle, $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir. Böylece, Önerme 5.5.11 göz önünde bulundurulursa, $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun her bir maksimal integral manifoldunun M altmanifoldunda minimal olduğu elde edilir. $\square$

Önerme 5.5.12. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir D-geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D invaryant distribüsyonu M altmanifoldunda minimaldır.*

İspat. D invaryant distribüsyonunun tanımından $\overline{\Phi}D = D$ olması nedeniyle her $X \in \Gamma(D)$ için $X = \overline{\Phi}X'$ olacak şekilde bir $X' \in \Gamma(D)$ vektör alanı mevcuttur. O zaman Gauss formülü, $\overline{\Phi}$ altın yapısının paralelliği ve $\overline{g}$ Riemann metriğinin $\overline{\Phi}$-uyumluluğu kullanılırsa, her $Y \in \Gamma\left(D^\perp\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(Y, \nabla_X X) &= \overline{g}\left(Y, \overline{\nabla}_X X\right) \\
&= \overline{g}\left(Y, \overline{\nabla}_{\overline{\Phi}X'} \overline{\Phi}X'\right) \\
&= \overline{g}\left(Y, \overline{\Phi}\,\overline{\nabla}_{\overline{\Phi}X'} X'\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \overline{\nabla}_{\overline{\Phi}X'} X'\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $D^\perp$ distribüsyonunun anti-invaryant olduğu dikkate alınırsa, Gauss formülü yardımıyla her $Y \in \Gamma\left(D^\perp\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(Y, \nabla_X X) &= \overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, \nabla_{\overline{\Phi}X'} X' + h\left(\overline{\Phi}X', X'\right)\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\Phi}Y, h\left(\overline{\Phi}X', X'\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Hipotezden M semi-invaryant altmanifoldu D-geodezik olması sebebiyle her $Y \in \Gamma\left(D^\perp\right)$ için

$$\overline{g}(Y, \nabla_X X) = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise her $X \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X X \in \Gamma(D)$ olduğunu ifade eder. Bu yüzden, $(\nabla_X X)^\perp = 0$ olur. Böylece, (5.5.103) eşitliğinden $H_D = 0$ olduğu görülür. Başka bir deyişle, D invaryant distribüsyonu minimaldir. $\square$

Şimdi, M semi-invaryant altmanifoldu üzerinde $\omega^{p+1}, \omega^{p+2}, \ldots, \omega^{p+q}$ diferansiyel 1-formlarını her $Z \in \Gamma(D)$ için

$$\omega^{p+i}(Z) = 0,\ \omega^{p+i}(E_{p+j}) = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq q \tag{5.5.107}$$

olacak şekilde tanımlayalım. O zaman

$$\omega = \omega^{p+1} \Lambda \omega^{p+2} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q} \tag{5.5.108}$$

dış çarpımı M semi-invaryant altmanifoldu üzerinde bir q-form tanımlar. Eğer $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun başka bir yerel ortonormal çatısı $\mathfrak{B}'_{D^{\perp}} = \left\{E'_{p+1}, E'_{p+2}, \ldots, E'_{p+q}\right\}$ ise o zaman (2.2.1) eşitliği dikkate alınırsa, (5.5.107) ifadesinde verilen 1-formların tanımından

$$\begin{aligned} \omega\left(E_{p+1}, \ldots, E_{p+q}\right) &= \left(\omega^{p+1} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q}\right)\left(E_{p+1}, \ldots, E_{p+q}\right) \\ &= \det\left[\omega^{p+i}\left(E_{p+j}\right)\right],\ 1 \leq i, j \leq q \\ &= 1 \\ &= \det\left[\omega^{p+i}\left(E'_{p+j}\right)\right],\ 1 \leq i, j \leq q \\ &= \left(\omega^{p+1} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q}\right)\left(E'_{p+1}, \ldots, E'_{p+q}\right) \\ &= \omega\left(E'_{p+1}, \ldots, E'_{p+q}\right) \end{aligned} \tag{5.5.109}$$

elde edilir. Bu ise ω formunun iyi tanımlı olması demektir. Ayrıca, (5.5.109) eşitliğinde görüldüğü gibi $\omega\left(E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\right) = 1 > 0$ olduğu için Tanım 2.13.2, aynı zamanda bir diferansiyellenebilir manifold olan $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun $\mathfrak{B}_{D^{\perp}}$ sıralı yerel ortonormal çatısına göre yönlendirilebilir olduğunu gösterir. Bu yüzden, ω formu globaldir.

Önerme 5.5.13. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu minimal ise*

$$\omega = \omega^{p+1} \Lambda \omega^{p+2} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q}$$

diferansiyel q-formu kapalıdır.

İspat. (5.5.108) eşitliğinden ω diferansiyel q-formunun dış türevi

$$d\omega = \sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i} \omega^{p+1} \Lambda \cdots \Lambda d\omega^{p+i} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q}$$

ile verilir. Buradan ise (5.5.107) ifadesindeki $\omega^{p+1}, \omega^{p+2}, \ldots, \omega^{p+q}$ diferansiyel 1-formların tanımından $d\omega = 0$ olması için bir gerek ve yeter koşulun her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$d\omega \left(X, Y, E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q-1}\right) = 0 \tag{5.5.110}$$

ve

$$d\omega \left(X, E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\right) = 0 \tag{5.5.111}$$

eşitliklerinin sağlanması olduğu görülür. $A = d\omega \left(X, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q}\right)$ ve $B = d\omega \left(X, Y, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1}\right)$ diyelim. İlk olarak, $A = 0$ olduğunu gösterelim. (2.2.1) eşitliği ve (5.5.107) ifadesindeki $\omega^{p+1}, \omega^{p+2}, \ldots, \omega^{p+q}$ diferansiyel 1-formların tanımı birleştirilirse,

$$\omega \left(E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\right) = \delta_{ij}$$

ve

$$\omega \left(X, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots E_{p+q}\right) = 0$$

olur. Yani, $\omega \left(E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\right)$ ve $\omega \left(X, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, E_{p+q}\right)$ eşitlikleri sabittir. Bu yüzden,

$$X\omega \left(E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q}\right) = E_{p+i}\omega \left(X, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, E_{p+q}\right) = 0$$

eşitliği geçerlidir. Benzer bir düşünceyle,

$$\omega\left(\left[E_{p+i},E_{p+j}\right],X,E_{p+1},\ldots,\widehat{E_{p+i}},\ldots,\widehat{E_{p+j}},\ldots,E_{p+q}\right)=0$$

olduğu gösterilebilir. O zaman basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{q+1}\left\{\sum_{1\leq j\leq q}(-1)^j\,\omega\left(\left[X,E_{p+j}\right],E_{p+1},\ldots,\widehat{E_{p+j}},\ldots,E_{p+q}\right)\right\} \qquad (5.5.112)\\ &= -\frac{1}{q+1}\left\{\sum_{1\leq j\leq q}\omega^j\left(\left[X,E_{p+j}\right]\right)\right\}\\ &= -\frac{1}{q+1}\left\{\sum_{1\leq j\leq q}\overline{g}\left(\left[X,E_{p+j}\right],E_{p+j}\right)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overline{\nabla}$ bir Levi-Civita konneksiyon olduğu için Leibniz kuralından

$$\begin{aligned} 0 &= X\overline{g}\left(E_{p+i},E_{p+i}\right)\\ &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X E_{p+i},E_{p+i}\right)+\overline{g}\left(E_{p+i},\overline{\nabla}_X E_{p+i}\right)\\ &= 2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X E_{p+i},E_{p+i}\right)\end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X E_{p+i},E_{p+i}\right)=0 \qquad (5.5.113)$$

olduğunu ifade eder. Buradan ise $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun simetrikliği ve Gauss formülü göz önünde bulundurulursa, (5.5.113) eşitliği yardımıyla her $X\in\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\left[X,E_{p+j}\right],E_{p+j}\right) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X E_{p+j}-\overline{\nabla}_{E_{p+j}}X,E_{p+j}\right)\\ &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X E_{p+j},E_{p+j}\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{E_{p+j}}X,E_{p+j}\right)\\ &= \overline{g}\left(\nabla_X E_{p+j},E_{p+j}\right)-\overline{g}\left(\nabla_{E_{p+j}}X,E_{p+j}\right)\\ &= 0-\overline{g}\left(\nabla_{E_{p+j}}X,E_{p+j}\right)\\ &= -\overline{g}\left(\nabla_{E_{p+j}}X,E_{p+j}\right)\\ &= \overline{g}\left(\nabla_{E_{p+j}}E_{p+j},X\right)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Ayrıca, hipotezden $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu minimal olduğu için

$$\nabla_{E_{p+j}} E_{p+j} \in \Gamma\left(D^{\perp}\right) \tag{5.5.114}$$

ifadesi geçerlidir. Bu nedenle, (5.5.114) eşitliğinden

$$\overline{g}\left(\left[X, E_{p+j}\right], E_{p+j}\right) = 0$$

olur. Dolayısıyla, (5.5.112) eşitliği yardımıyla

$$A = 0$$

olduğu görülür. Şimdi, $B = 0$ olduğunu gösterelim. (5.5.107) ifadesinden $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\omega^{p+i}(X) = 0$ ve $\omega^{p+i}(Y) = 0$ olması nedeniyle

$$X\omega\left(Y, E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q-1}\right) = 0, \tag{5.5.115}$$

$$Y\omega\left(X, E_{p+1}, E_{p+2}, \ldots, E_{p+q-1}\right) = 0, \tag{5.5.116}$$

$$E_{p+i}\omega\left(X, Y, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, E_{p+q-1}\right) = 0 \tag{5.5.117}$$

ve $1 \leq i < j \leq q-1$ için

$$\omega\left(\left[E_{p+i}, E_{p+j}\right], X, Y, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, \widehat{E_{p+j}}, \ldots, E_{p+q-1}\right) = 0 \tag{5.5.118}$$

olur. O halde her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1} \in \mathfrak{B}_{D^{\perp}}$ için B ifadesi

$$\begin{aligned}
B = & \frac{1}{q+1}\left\{X\omega\left(Y, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1}\right) - Y\omega\left(X, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1}\right)\right\} \\
& - \frac{1}{q+1}\left\{\omega\left(\left[X, Y\right], E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{q+1}\left\{\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i}\, \widehat{E_{p+i}}\left(\omega\left(X, Y, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, E_{p+q-1}\right)\right)\right\} \\
& + \frac{1}{q+1}\left\{\sum_{1 \leq i < j \leq q}(-1)^{i+j}\, \omega\left(\left[E_{p+i}, E_{p+j}\right], X, Y, E_{p+1}, \ldots, \widehat{E_{p+i}}, \ldots, \widehat{E_{p+j}}, \ldots, E_{p+q-1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

halini alır. Buradan ise (5.5.115), (5.5.116), (5.5.117) ve (5.5.118) eşitlikleri yardımıyla B ifadesi her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1} \in \mathfrak{B}_{D^{\perp}}$ için

$$B = -\frac{1}{q+1}\left\{\omega\left(\left[X, Y\right], E_{p+1}, \ldots, E_{p+q-1}\right)\right\}$$

ile verilir. Hipotezden D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması nedeniyle her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ifadesi sağlanır. Bu yüzden, her $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ için

$$\omega^{p+i}([X, Y]) = 0 \tag{5.5.119}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (5.5.119) eşitliğinden

$$B = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, (5.5.110) ve (5.5.111) eşitlikleri geçerlidir. O zaman $d\omega = 0$ olur. Bu ise ω diferansiyel q-formunun kapalı olduğunu ifade eder. $\square$

Benzer bir düşünceyle M semi-invaryant altmanifoldu üzerinde $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^p$ diferansiyel 1-formlarını her $Z \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\theta^i(Z) = 0,\ \theta^i(E_j) = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq p \tag{5.5.120}$$

olacak biçimde tanımlayalım. O zaman

$$\theta = \theta^1 \Lambda \theta^2 \Lambda \cdots \Lambda \theta^p \tag{5.5.121}$$

dış çarpımı M semi-invaryant altmanifoldu üzerinde bir p-form tanımlar. D invaryant distribüsyonunun başka bir yerel ortonormal çatısı $\mathfrak{B}'_D = \left\{E'_1, E'_2, \ldots, E'_p\right\}$ olsun. Bu durumda (2.2.1) eşitliği ve (5.5.120) ifadesindeki 1-formların tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\omega(E_1, E_2, \ldots, E_p) &= \left(\theta^1 \Lambda \theta^2 \Lambda \cdots \Lambda \theta^p\right)(E_1, E_2, \ldots, E_p) \\ &= \det\left[\theta^i(E_j)\right],\ 1 \leq i, j \leq p \\ &= 1\end{aligned} \tag{5.5.122}$$

$$= \det\left[\theta^i\left(E_j^{'}\right)\right],\ 1 \leq i, j \leq p$$

$$= \left(\theta^1 \Lambda \theta^2 \Lambda \cdots \Lambda \theta^p\right)\left(E_1^{'}, E_2^{'}, \ldots, E_p^{'}\right)$$

$$= \omega\left(E_1^{'}, E_2^{'}, \ldots, E_p^{'}\right)$$

olur. Yani, θ formu iyi tanımlıdır. Ayrıca, Tanım 2.13.2 dikkate alınırsa, (5.5.122) eşitliğinde görüldüğü gibi $\omega(E_1, E_2, \ldots, E_p) = 1 > 0$ olması nedeniyle D invaryant distribüsyonunun $\mathfrak{B}_D$ sıralı yerel ortonormal çatısına göre yönlendirilebilir olduğu elde edilir. Bu ise θ formunun global olduğu belirtir.

Önerme 5.5.14. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \Phi\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. D invaryant distribüsyonu minimal ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise*

$$\theta = \theta^1 \Lambda \theta^2 \Lambda \cdots \Lambda \theta^p$$

diferansiyel p-formu kapalıdır.

İspat. İspat Önerme 5.5.13'ünkine benzer bir şekilde yapılabilir. □

$\mathfrak{B}_D \cup \mathfrak{B}_{D^{\perp}}$ kümesi M semi-invaryant altmanifoldu için bir yerel ortonormal çatıdır. Ayrıca, $\theta \Lambda \omega$ dış çarpımı M altmanifoldu üzerinde bir n-formdur. Şimdi, $C = (\theta \Lambda \omega)(E_1, E_2, \ldots, E_p, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q})$ diyelim. Böylece, (2.2.1) eşitliği göz önünde bulundurulursa, (5.5.108) ve (5.5.121) ifadelerindeki formların tanımından

$$C = (\theta \Lambda \omega)(E_1, E_2, \ldots, E_p, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q})$$

$$= \left(\theta^1 \Lambda \theta^2 \Lambda \cdots \Lambda \theta^p \Lambda \omega^{p+1} \Lambda \cdots \Lambda \omega^{p+q}\right)(E_1, E_2, \ldots, E_p, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q})$$

$$= \det\left[\omega^i(E_j)\right] = 1 > 0,\ 1 \leq i, j \leq n$$

elde edilir. Bu ise Tanım 2.13.2'den $\mathfrak{B}_D \cup \mathfrak{B}_{D^\perp}$ sıralı yerel ortonormal çatısına göre M altmanifoldunun yönlendirilebilir olduğunu ifade eder.

Teorem 5.5.30. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ve $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu minimal ise bu durumda M semi-invaryant altmanifoldu için bir*

$$[\omega] \in H^q_{dR}(M)$$

de Rham kohomoloji sınıfı tanımlıdır. Eğer buna ek olarak, D invaryant distribüsyonu minimal ve $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise $[\omega] \in H^q_{dR}(M)$ de Rham kohomoloji sınıfı sıfırdan farklıdır.

İspat. D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir ve $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun minimal olduğunu varsayalım. Bu durumda Önerme 5.5.13'ten $d\omega = 0$ olur. Yani, ω formu kapalıdır. Bu ise ω formunun $[\omega] \in H^q_{dR}(M)$ ile gösterilen bir de Rham kohomoloji sınıfı tanımladığını belirtir. Diğer taraftan, hiç bir koşul olmaksızın ω ve θ formlarının tanımından $\theta = \star\omega$ olduğu açıktır. Burada $\star$, Hodge yıldız operatörünü göstermektedir. Böylece, eğer varsayımımıza ek olarak, D invaryant distribüsyonu minimal ve $D^\perp$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise o zaman Önerme 5.5.13 ve Önerme 5.5.14 yardımıyla, δ ko-diferansiyel operatörünün (2.14.2) eşitliğinde verilen tanımından

$$\begin{aligned}\delta\omega &= (-1)^{nk+n+1} \star d \star \omega \\ &= (-1)^{nk+n+1} \star d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bir başka deyişle, ω formu ko-kapalıdır. O halde ω formu hem kapalı hem de ko-kapalıdır. Bu ise M manifoldunun kompakt ve kenarsız olduğu göz önünde bulundurulursa, ω formunun harmonik olduğunu ifade eder. Aynı zamanda, $D^{\perp} \neq 0$ olması ω formunun sıfırdan farklı olduğunu garanti eder. Bu nedenle, M altmanifoldunun yönlendirilebilir olduğu dikkate alınırsa, Hodge Teoreminden sıfırdan farklı ω diferansiyel q-formunun $H_{dR}^{q}(M)$ de Rham kohomolojisinde temsil ettiği $[\omega]$ kohomoloji sınıfının sıfırdan farklı olduğu görülür. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5.31. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer D invaryant distribüsyonu ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ve D invaryant distribüsyonu minimal ise*

$$H_{dR}^{q}(M) \neq 0$$

olur. Yani, de Rham kohomoloji sınıfı sıfırdan farklıdır.

İspat. Önerme 5.5.11 ve Teorem 5.5.30 birleştirilirse, ispat elde edilir. □

Teorem 5.5.32. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız D-geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise $H_{dR}^{q}(M)$ de Rham kohomolojisinde $[\omega]$ sınıfı non-trivialdir.*

İspat. M altmanifodu D-geodezik olduğu için Önerme 5.5.12, D invaryant distribüsyonunun minimal olduğunu belirtir. Buna ek olarak, Teorem 5.5.4'ün (b) ifadesinden doğal olarak D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir. Diğer taraftan, hipotezden $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir olduğu için Teorem 5.5.31'in tüm koşulları sağlanmış olur. Dolayısıyla, $H_{dR}^{q}(M)$ de Rham kohomolojisinde $[\omega]$ sınıfının trivial olmadığı elde edilir. Yani, $[\omega]$ sınıfı non-trivialdir. □

Teorem 5.5.33. *Bir $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız total geodezik semi-invaryant altmanifoldu M*

olsun. Bu durumda M semi-invaryant altmanifoldu için q-yuncu Betti sayısı $b_q =$ $\dim H^q_{dR}(M)$ *sıfırdan farklıdır.*

İspat. M semi-invaryant altmanifoldu total geodezik ise aynı zamanda D-geodeziktir. O zaman Önerme 5.5.12'den D invaryant distribüsyonu minimaldir. Ayrıca, M altmanifoldunun total geodezik olması varsayımı altında, Teorem 5.5.4 ve Teorem 5.5.8 dikkate alınırsa, doğal olarak D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlarının integrallenebilir olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 5.5.31 yardımıyla $H^q_{dR}(M) \neq 0$ olur. Buradan ise $b_q = \dim H^q_{dR}(M) \neq 0$ olduğu elde edilir. □

Teorem 5.5.34. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt, bağlantılı ve kenarsız semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$H^p_{dR}(M) \cong H^q_{dR}(M)^*$$

olur. Özellikle, $b_p = b_q$ *ise izomorfiklik doğal olarak vardır.*

İspat. M semi-invaryant altmanifoldunun yönlendirilebilir olduğu göz önünde bulundurulursa, Poincaré Duality Teoreminin bir uygulaması olarak ispat açıktır. □

Teorem 5.5.35. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer D invaryant distribüsyonu minimal ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise bu durumda M semi-invaryant altmanifoldu için bir* $[\theta] \in H^p_{dR}(M)$ *de Rham kohomoloji sınıfı tanımlıdır. Eğer buna ek olarak, D invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise* $[\theta] \in H^p_{dR}(M)$ *de Rham kohomoloji sınıfı sıfırdan farklıdır.*

İspat. İspat, Teorem 5.5.30'unkine benzer bir yöntem ile Önerme 5.5.13, Önerme 5.5.14 ve Hodge Teoremi yardımıyla yapılabilir. □

Teorem 5.5.36. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız D-geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu integrallenebilir ise*

$$H_{dR}^{p}(M) \neq 0$$

olur. Yani, de Rham kohomoloji sınıfı sıfırdan farklıdır.

İspat. M semi-invaryant altmanifoldu D-geodezik olması nedeniyle Teorem 5.5.4'ten doğal olarak D invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olduğu görülür. Böylece, Önerme 5.5.12 ve Teorem 5.5.36 birleştirilirse, ispat elde edilir. □

Teorem 5.5.37. *Bir* $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ *yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir kompakt ve kenarsız total geodezik semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M semi-invaryant altmanifoldu için p-yinci Betti sayısı* $b_p = \dim H_{dR}^{p}(M)$ *sıfırdan farklıdır.*

İspat. İspat, Teorem 5.5.33'ünkine benzer bir şekilde gösterilebilir. □

6. PARA $f\,(3,2,1)$-YAPILAR

Bu bölümde, diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde bir para $f\,(3,2,1)$-yapı kavramının tanımı yapıldı. Para $f\,(3,2,1)$-yapıların altın yapılar ile ilişkisini ortaya koyan örnekler verildi. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik immersed altmanifoldu üzerindeki indirgenmiş yapının bir para $f\,(3,2,1)$-yapı olması için iki koşul bulundu. Bir altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldunun, sırasıyla, tanjant ve normal demetleri üzerinde ambient manifoldun altın yapısının ve tersinin tanımladığı endomorfizmlerin birer para $f\,(3,2,1)$-yapı olduğu kanıtlandı. Para $f\,(3,2,1)$-yapıların bazı temel özellikleri belirlendi. Para $f\,(3,2,1)$-yapıların doğal olarak tanımladığı distribüsyonların hangi formlarda olduğu saptandı ve integrallenebilirliği için bazı karakterizasyonlar verildi. Para $f\,(3,2,1)$-yapıların kısmi integrallenebilirlik ve integrallenebilirlik kavramları tanımlandı ve bu kavramlar için gerek ve yeter koşullar elde edildi.

Tanım 6.0.1. *Bir m-boyutlu diferansiyellenebilir manifold M olsun. Eğer M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde sıfırdan farklı bir f tensör alanı*

$$f^3 - f^2 - f = 0 \tag{6.0.1}$$

denklemini sağlıyorsa f tensör alanına bir $f\,(3,-2,-1)$-yapı veya bir para $f\,(3,2,1)$-yapı denir. Ayrıca, (M,f) çifti ise bir $f\,(3,-2,-1)$-yapı manifold veya bir para $f\,(3,2,1)$-yapı manifold olarak adlandırılır.

Önerme 6.0.1. *Bir m-boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldu üzerinde herhangi bir altın yapı Φ olsun. Bu durumda Φ altın yapısı bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. (3.1.1) eşitliğinden Φ altın yapısının

$$\Phi^3 - \Phi^2 - \Phi = 0$$

denklemini sağladığı açıktır. Yani, Φ altın yapısı bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır. $\square$

Örnek 6.0.1. *Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir φ dönüşümünü*

$$\varphi = \lambda I,\ \lambda \in \{\phi, 1-\phi\}$$

kuralı ile tanımlayalım. Burada I, $(1,1)$ tipinde birim dönüşüm ve ϕ ve $1-\phi$ değerleri $x^2 - x - 1 = 0$ cebirsel denkleminin kökleridir. O zaman φ dönüşümü

$$\varphi^3 - \varphi^2 - \varphi = 0$$

denklemini sağlar. Yani, φ dönüşümü bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır.

Teorem 6.0.1. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r = \operatorname{codim} M$ olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ için $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ise Φ indirgenmiş yapısı bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. (5.2.13) eşitliğinden her $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$ için

$$\Phi\left(\xi_\alpha\right) = \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}\xi_\beta = \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\alpha\beta}\xi_\beta = \xi_\alpha - \xi_a = 0$$

olur. Böylece, (5.2.9) eşitliğine Φ indirgenmiş yapısı sağdan uygulanırsa, her $X \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$\begin{aligned}\Phi^3\left(X\right) &= \Phi^2\left(X\right) + \Phi\left(X\right) - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha\left(X\right)\Phi\left(\xi_\alpha\right) \\ &= \Phi^2\left(X\right) + \Phi\left(X\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Φ indirgenmiş yapısı bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır. Şimdi, ispatı başka bir yöntemle yapalım. (5.2.9) eşitliğinde X yerine ΦX alınırsa,

$$\Phi^3\left(X\right) = \Phi^2\left(X\right) + \Phi\left(X\right) - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha\left(\Phi X\right)\xi_\alpha$$

olur. Buradan ise (5.2.10) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\Phi^3(X) &= \Phi^2(X) + \Phi(X) - \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{r}(1-a_{aa})\,u_\alpha(X)\,\xi_\alpha \\ &= \Phi^2(X) + \Phi(X) - \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{r}(1-1)\,u_\alpha(X)\,\xi_\alpha \\ &= \Phi^2(X) + \Phi(X)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Φ indirgenmiş yapısının bir para $f(3,2,1)$-yapı olduğunu gösterir. □

Sonuç 6.0.1. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu izometrik immersed altmanifoldu M ve $r =$ codim M olsun. Eğer her $\alpha \in \{1,\ldots,r\}$ için $\overline{\Phi}^{-1}(N_\alpha) \in \Gamma(TM)$ ise Φ indirgenmiş yapısı bir para $f(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. Önerme 5.2.5 ve Teorem 6.0.1 birleştirilirse, istenen ispat elde edilir. □

Önerme 6.0.2. *Bir m-boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ yerel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunun herhangi bir n-boyutlu M izometrik immersed invaryant altmanifoldu üzerinde indirgenmiş yapı $\left(\Phi, g, u_\alpha = 0, \varepsilon\xi_\alpha = 0, (a_{\alpha\beta})_{r\times r}\right)$ olsun. Bu durumda Φ indirgenmiş yapısı bir para $f(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. Φ tensör alanı (5.3.3) eşitliğine uygulanırsa, $\Phi^3 = \Phi + I$ elde edilir. Bu ise Φ indirgenmiş yapısının bir para $f(3,2,1)$-yapı olduğunu gösterir. □

Önerme 6.0.3. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda TM tanjant demetinin T endomorfizmi bir para $f(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. M bir semi-invaryant altmanifold olduğu için Teorem 5.5.1'den $NT = 0$ olur. Bu durumda (5.1.8) eşitliğinin her iki tarafına sağdan T endomorfizmi uygulanırsa,

$$T^3 - T^2 - T = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, T endomorfizmi TM tanjant demeti üzerinde bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır. $\square$

Önerme 6.0.4. *Bir $\left(\overline{M},\overline{g},\overline{\Phi}\right)$ altın Riemann manifoldunun herhangi bir semi-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $TM^{\perp}$ normal demetinin $I-n$ endomorfizmi bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır.*

İspat. M bir semi-invaryant altmanifold oldugu için Teorem 5.5.3'ten $t\,(n-I)=0$ olur. Bu durumda (5.1.11) eşitliğinin her iki tarafına $I-n$ endomorfizmi uygulanırsa,

$$n^3 = 2n^2 - I$$

olduğu görülür. Buradan ise

$$\begin{aligned}(I-n)^3 &= I - 3n + 3n^2 - n^3\\ &= I - 3n + 3n^2 - 2n^2 + I\\ &= I - 2n + n^2 + I - n\\ &= (I-n)^2 + (I-n)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $I-n$ endomorfizmi $TM^{\perp}$ normal demetinde bir para $f\,(3,2,1)$-yapıdır. $\square$

Bir f para $f\,(3,2,1)$-yapısının çekirdeği ve görüntüsü, sırasıyla,

$$\ker f = \bigcup_{p\in M} (\ker f)_p$$

ve

$$\operatorname{Im} f = \bigcup_{p\in M} (\operatorname{Im} f)_p$$

ile verilir. Burada

$$(\ker f)_p = \{X_p \in T_pM : f_p\,(X_p) = 0\}$$

ve

$$(\operatorname{Im} f)_p = \{Y_p \in T_pM : Y = f_p(X_p), X_p \in T_pM\},$$

sırasıyla, herhangi bir $p \in M$ noktasındaki para $f(3,2,1)$-yapısının çekirdeği ve görüntüsüdür.

Önerme 6.0.5. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Eğer her $p \in M$ için $(\operatorname{Im} f)_p = \{0\}$ ise o zaman f para $f(3,2,1)$-yapısı sıfırdır.*

İspat. İspat açıktır. □

Önerme 6.0.6. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman*

$$\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$

olur.

İspat. $X \in \Gamma(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$ olsun. Bu durumda $fX = 0$ olur. Ayrıca, $X = fY$ olacak şekilde bir $Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır. Buradan ise

$$f^3(Y) = f^2(Y) = 0$$

olduğu görülür. Böylece, (6.0.1) denkleminden

$$X = f(Y) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ olduğunu gösterir. □

Teorem 6.0.2. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Eğer*

(a) *Her $p \in M$ için $(\ker f)_p = \{0\}$,*

(b) $rank f = m$,

(c) f *birebir*

koşullarından herhangi biri sağlanıyor ise f bir altın yapıdır.

İspat. Eğer her $p \in M$ için $(\ker f)_p = \{0\}$ veya $rank f = m$ ise f birebirdir. Bu durumda f para $f(3,2,1)$-yapısının f^{-1} ters görüntüsü vardır. O zaman f^{-1} ters görüntüsü (6.0.1) denklemine soldan uygulanırsa,

$$f^2 - f - I = 0$$

elde edilir. Yani, f bir altın yapıdır. $\square$

Örnek 6.0.2. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. $\Phi = f_{|\mathrm{Im}\, f}$ diyelim. Eğer $X \in \Gamma(\ker \Phi)$ ise bu durumda $X \in \Gamma(\ker f \cap \mathrm{Im}\, f)$ olur. Buradan ise Önerme 6.0.6 dikkate alınırsa, $X = 0$ olduğu görülür. Böylece, Teorem 6.0.2'den Φ bir altın yapıdır.*

Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. M manifoldu üzerinde r ve s dönüşümlerini, sırasıyla,

$$r = f^2 - f \tag{6.0.2}$$

ve

$$s = -f^2 + f + I \tag{6.0.3}$$

kuralları ile tanımlayalım. Burada I, $(1,1)$ tipinde birim dönüşümü göstermektedir.

Teorem 6.0.3. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman*

$$r + s = I, \tag{6.0.4}$$

$$r^2 = r, \tag{6.0.5}$$

$$s^2 = s \tag{6.0.6}$$

ve

$$rs = sr = 0 \tag{6.0.7}$$

bağıntıları geçerlidir. Yani, r ve s dönüşümleri projeksiyon operatörlerdir.

İspat. (6.0.1), (6.0.2) ve (6.0.3) eşitlikleri yardımıyla

$$r + s = f^2 - f - f^2 + f + I = I,$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= \left(f^2 - f\right)^2 = \left(f^2 - f\right)\left(f^2 - f\right) \\
&= \left(f^2 - f\right) f^2 - \left(f^2 - f\right) f = f^4 - f^3 - f^3 + f^2 \\
&= f^4 - 2f^3 + f^2 = f^3 f - 2f^3 + f^2 \\
&= \left(f^2 + f\right) f - 2\left(f^2 + f\right) + f^2 = f^3 + f^2 - 2f^2 - 2f + f^2 \\
&= f^2 + f - 2f \\
&= f^2 - f \\
&= r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 &= \left(-f^2 + f + I\right)^2 = \left(-f^2 + f + I\right)\left(-f^2 + f + I\right) \\
&= \left(-f^2 + f + I\right)\left(-f^2\right) + \left(-f^2 + f + I\right) f + \left(-f^2 + f + I\right) I \\
&= f^4 - f^3 - f^2 - f^3 + f^2 + f - f^2 + f + I \\
&= f^4 - 2f^3 - f^2 + 2f + I = f^3 f - 2f^3 - f^2 + 2f + I \\
&= \left(f^2 + f\right) f - 2\left(f^2 + f\right) + 2f - f^2 + 2f + I \\
&= f^3 + f^2 - 2f^2 - 2f + 2f - f^2 + 2f + I \\
&= f^3 - 2f^2 + I = f^2 + f - 2f^2 + I \\
&= -f^2 + f + I \\
&= s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
rs &= \left(f^2 - f\right)\left(-f^2 + f + I\right) = f^2\left(-f^2 + f + I\right) - f\left(-f^2 + f + I\right) \\
&= -f^4 + f^3 + f^2 + f^3 - f^2 - f = -f^4 + 2f^3 - f \\
&= -f^3 f + 2f^3 - f = -\left(f^2 + f\right) f + 2f^3 - f \\
&= -f^3 - f^2 + 2f^3 - f = f^3 - f^2 - f \\
&= f^2 + f - f^2 - f \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
sr &= \left(-f^2 + f + I\right)\left(f^2 - f\right) = \left(-f^2 + f + I\right) f^2 - \left(-f^2 + f + I\right) f \\
&= -f^4 + f^3 + f^2 + f^3 - f^2 - f = -f^4 + 2f^3 - f \\
&= -f^3 f + 2f^3 - f = -\left(f^2 + f\right) f + 2\left(f^2 + f\right) - f \\
&= -f^3 - f^2 + 2f^2 + 2f - f = -f^3 + f^2 + f \\
&= -f^2 - f + f^2 + f \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise r ve s dönüşümlerinin projeksiyon operatörler olduğunu gösterir.

□

r ve s projeksiyon operatörlerine karşılık gelen distribüsyonları, sırasıyla, R ve S ile gösterelim. O zaman TM tanjant demetinin

$$TM = R \oplus S$$

ayrışımı vardır.

Önerme 6.0.7. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman*

$$\ker f = \ker\left(f^2 - f\right) \tag{6.0.8}$$

ve

$$\operatorname{Im} f = \ker\left(f^2 - f - I\right) \tag{6.0.9}$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. $X \in \Gamma(\ker f)$ olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(\ker(f^2 - f))$ olduğu açıktır. Tersine, $X \in \Gamma(\ker(f^2 - f))$ olsun. Bu durumda

$$\left(f^2 - f\right) X = 0 \tag{6.0.10}$$

olur. O halde (6.0.10) eşitliğinin her iki tarafına f uygulanırsa, $f^3X = f^2X$ olur. Buradan ise (6.0.1) eşitliği yardımıyla

$$fX = f^3X - f^2X = 0$$

elde edilir. Bu ise $X \in \Gamma(\ker f)$ olduğunu ifade eder. Böylece, $\ker f = \ker(f^2 - f)$ olduğu görülür. Yani, (6.0.8) eşitliğinin geçerli olduğu gösterilmiş olur. $X \in \Gamma(\operatorname{Im} f)$ olsun. Bu durumda $X = fY$ olacak şekilde bir $Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır. Buradan ise (6.0.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= fY - X \\ &= f^3Y - f^2Y - X \\ &= f^2X - fX - X \\ &= \left(f^2 - f - I\right) X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $X \in \Gamma(\ker(f^2 - f - I))$ olduğunu gösterir. Tersine, $X \in \Gamma(\ker(f^2 - f - I))$ olsun. Bu durumda

$$X = f^2X - fX = f(fX - X)$$

eşitliği geçerlidir. Bu ise $X \in \Gamma(\operatorname{Im} f)$ olması demektir. Böylece, $\operatorname{Im} f = \ker(f^2 - f - I)$ elde edilir. Yani, (6.0.9) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 6.0.8. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman*

$$fr = rf = f, \tag{6.0.11}$$

$$\left(f^2 - f\right) r = r, \tag{6.0.12}$$

$$sf = fs = 0, \tag{6.0.13}$$

ve

$$\left(-f^2 + f + I\right) s = s \tag{6.0.14}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat. (6.0.1), (6.0.2), (6.0.3), (6.0.5) ve (6.0.6) eşitlikleri kullanılırsa,

$$fr = f\left(f^2 - f\right) = f^3 - f^2 = f^2 + f - f^2 = f,$$

$$rf = \left(f^2 - f\right) f = f^3 - f^2 = f^2 + f - f^2 = f,$$

$$\left(f^2 - f\right) r = r^2 = r,$$

$$fs = f\left(-f^2 + f + I\right) = -f^3 + f^2 + f = -f^2 - f + f^2 + f = 0,$$

$$sf = \left(-f^2 + f + I\right) f = -f^3 + f^2 + f = -f^2 - f + f^2 + f = 0,$$

ve

$$\left(-f^2 + f + I\right) s = s^2 = s$$

elde edilir. Dolayısıyla, önerme ispatlanmış olur. □

Önerme 6.0.9. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman*

$$R = \operatorname{Im} f = \ker\left(f^2 - f - I\right) \tag{6.0.15}$$

ve

$$S = \ker f = \ker\left(f^2 - f\right) \tag{6.0.16}$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. $X \in \Gamma(R)$ olsun. Bu durumda $rX = X$ olur. (6.0.12) eşitliğinden

$$X = rX = \left(f^2 - f\right) rX = \left(f^2 - f\right) X = f\left(fX - X\right)$$

elde edilir. Bu ise $X \in \Gamma(\operatorname{Im} f)$ olduğunu gösterir. Tersine, $X \in \Gamma(\operatorname{Im} f)$ olsun. O zaman $X = fY$ olacak şekilde bir $Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır. Bu nedenle, (6.0.13) eşitliği yardımıyla

$$sX = sfY = 0$$

olur. Bu ise $X \in \Gamma(R)$ olduğunu ifade eder. Böylece, $R = \operatorname{Im} f$ olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca, (6.0.9) eşitliği dikkate alınırsa, $R = \operatorname{Im} f = \ker\left(f^2 - f - I\right)$ elde edilir. Yani, (6.0.15) eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. $X \in \Gamma(S)$ olsun. O zaman $rX = 0$ olur. (6.0.11) eşitliğinden

$$fX = frX = 0$$

olur. Bu ise $X \in \Gamma(\ker f)$ olduğunu belirtir. Tersine, $X \in \Gamma(\ker f)$ olsun. Bu durumda $fX = 0$ olur. Buradan ise (6.0.11) ve (6.0.12) eşitlikleri yardımıyla

$$rX = \left(f^2 - f\right) rX = r\left(f^2 - f\right) X = 0$$

olur. Bu ise $X \in \Gamma(S)$ olduğunu gösterir. Böylece, $S = \ker f$ olduğu elde edilir. Bunun yanısıra, (6.0.8) eşitliğinden

$$S = \ker f = \ker\left(f^2 - f\right)$$

olduğu görülür. Bu ise (6.0.16) eşitliğinin ispatıdır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 6.0.10. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(a) *f para $f(3,2,1)$-yapısı R distribüsyonu üzerinde bir altın yapı gibi etki eder,*

(b) *f para $f(3,2,1)$-yapısı S distribüsyonu üzerinde bir sıfır dönüşüm gibi etki eder.*

İspat. (6.0.12) ve (6.0.13) eşitlikleri, sırasıyla, (a) ve (b) ifadelerini ispatlar. □

Bir f para $f(3,2,1)$-yapısının Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_f(X,Y) = [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY] + f^2[X,Y] \tag{6.0.17}$$

ile verilir. (6.0.12) ifadesi kullanılırsa, (6.0.17) eşitliği

$$N_f(X,Y) = [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY] + f[X,Y] + r[X,Y] \tag{6.0.18}$$

halini alır.

Önerme 6.0.11. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$sN_f(X,Y) = sN_f(rX, rY) = s[fX, fY] \tag{6.0.19}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (6.0.7), (6.0.13) ve (6.0.18) eşitlikleri yardımıyla her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} sN_f(X,Y) &= s[fX, fY] - sf[fX, Y] - sf[X, fY] \\ &+ sf[X,Y] + sr[X,Y] \\ &= s[fX, fY] \end{aligned} \tag{6.0.20}$$

olur. Buradan ise X ve Y vektör alanları yerine, sırasıyla, rX ve rY yazılırsa, (6.0.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} sN_f(rX, rY) &= s[frX, frY] \\ &= s[fX, fY] \end{aligned} \tag{6.0.21}$$

olduğu görülür. Böylece, (6.0.20) ve (6.0.21) eşitlikleri birleştirilirse,

$$sN_f(X,Y) = sN_f(rX,rY) = s[fX,fY]$$

elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 6.0.4. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda R distribüsyonunun integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$sN_f(rX,rY) = 0$$

olmasıdır.

İspat. R distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$s[rX,rY] = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan ise (6.0.11) eşitliği yardımıyla

$$0 = s[rX,rY] = s[rfX,rfY] = s[fX,fY]$$

elde edilir. Böylece, (6.0.19) eşitliğinden

$$sN_f(X,Y) = sN_f(rX,rY) = 0$$

olur. Tersine,

$$sN_f(X,Y) = sN_f(rX,rY) = 0$$

olsun. Bu durumda (6.0.19) eşitliği kullanılırsa,

$$s[fX,fY] = 0$$

olduğu görülür. Buradan ise X ve Y vektör alanları yerine, sırasıyla, $(f-I)X$ ve $(f-I)Y$ yazılırsa, (6.0.11) ve (6.0.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 0 &= s\left[fX, fY\right] = s\left[frX, frY\right] \\ &= s\left[rfX, rfY\right] \\ &= s\left[rf\left(f-I\right)X, rf\left(f-I\right)Y\right] \\ &= s\left[rX, rY\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise R distribüsyonunun integrallenebilir olduğu gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 6.0.12. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_f\left(sX, sY\right) = rN_f\left(sX, sY\right) = f\left[sX, sY\right] + r\left[sX, sY\right] \tag{6.0.22}$$

ve

$$\left(2I - f\right)N_f\left(sX, sY\right) = r\left[sX, sY\right] \tag{6.0.23}$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (6.0.5), (6.0.11), (6.0.13) ve (6.0.18) eşitliklerinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} N_f\left(sX, sY\right) &= \left[fsX, fsY\right] - f\left[fsX, sY\right] - f\left[sX, fsY\right] \\ &\quad + f\left[sX, sY\right] + r\left[sX, sY\right] \\ &= f\left[sX, sY\right] + r\left[sX, sY\right] \end{aligned} \tag{6.0.24}$$

ve

$$\begin{aligned} rN_f\left(sX, sY\right) &= r\left[fsX, fsY\right] - rf\left[fsX, sY\right] - rf\left[sX, fsY\right] \\ &\quad + rf\left[sX, sY\right] + r^2\left[sX, sY\right] \\ &= rf\left[sX, sY\right] + r\left[sX, sY\right] \\ &= f\left[sX, sY\right] + r\left[sX, sY\right] \end{aligned} \tag{6.0.25}$$

elde edilir. Böylece, (6.0.24) ve (6.0.25) eşitliklerinden

$$N_f(sX, sY) = rN_f(sX, sY) = f[sX, sY] + r[sX, sY]$$

olur. Buradan ise (6.0.11) ve (6.0.12) eşitlikleri dikkate alınırsa, kolayca

$$(2I - f) N_f(sX, sY) = r[sX, sY]$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, ispat gösterilmiş olur. □

Teorem 6.0.5. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda S distribüsyonunun integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_f(sX, sY) = 0 \text{ veya } rN_f(sX, sY) = 0$$

olmasıdır.

İspat. S distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r[sX, sY] = 0$$

eşitliği geçerlidir. Buradan ise (6.0.11) ifadesi dikkate alınırsa, (6.0.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_f(sX, sY) = rN_f(sX, sY) &= f[sX, sY] + r[sX, sY] \\ &= fr[sX, sY] + r[sX, sY] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Tersine, $N_f(sX, sY) = 0$ veya $rN_f(sX, sY) = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (6.0.23) eşitliği yardımıyla

$$r[sX, sY] = (2I - f) N_f(sX, sY) = 0$$

olur. Bu ise S distribüsyonunun integrallenebilir olması demektir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 6.0.6. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. R ve S distribüsyonlarının her ikisinin integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul f para $f(3,2,1)$-yapısının Nijenhuis tensörünün her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_f(X,Y) = rN_f(rX,rY) + N_f(rX,sY) + N_f(sX,rY) \tag{6.0.26}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat. $r+s=I$ olması nedeniyle f para $f(3,2,1)$-yapısının Nijenhuis tensörü her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} N_f(X,Y) &= N_f(rX,rY) + N_f(rX,sY) + N_f(sX,rY) + N_f(sX,sY) \qquad (6.0.27) \\ &= rN_f(rX,rY) + sN_f(rX,rY) + N_f(rX,sY) \\ &+ N_f(sX,rY) + N_f(sX,sY) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. R ve S distribüsyonları integrallenebilir olsun. Bu durumda (6.0.27) eşitliğine Teorem 6.0.4 ve Teorem 6.0.5 uygulanırsa,

$$N_f(X,Y) = rN_f(rX,rY) + N_f(rX,sY) + N_f(sX,rY)$$

olur. Tersine, her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_f(X,Y) = rN_f(rX,rY) + N_f(rX,sY) + N_f(sX,rY)$$

ise benzer şekilde, Teorem 6.0.4 ve Teorem 6.0.5 yardımıyla (6.0.27) eşitliğinden R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olduğu kolayca gösterilebilir. □

R distribüsyonunun integrallenebilir olduğu varsayalım. R distribüsyonunun herhangi bir integral manifoldu M^R olsun. M^R integral manifoldu üzerinde bir f^R operatörünü her $X^R \in \Gamma\left(TM^R\right)$ için

$$f^R X^R = f X^R$$

kuralı ile tanımlayalım. O zaman f^R, M^R integral manifoldunun tanjant demetinde bir invaryant operatör gibi etki eder. Ayrıca, f^R operatörü M^R integral manifoldu üzerinde bir altın yapıdır. M^R integral manifoldu üzerinde f para $f\,(3,2,1)$-yapısından indirgenmiş f^R altın yapısının Nijenhuis tensörünü N^R ile gösterelim. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için

$$N_f\,(rX, rY) = N^R\,(rX, rY) \tag{6.0.28}$$

olur.

Şimdi, bir f para $f\,(3,2,1)$-yapısının kısmi integrallenebilirliğini tanımlayalım.

Tanım 6.0.2. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. Eğer R distribüsyonu ve M^R integral manifoldu üzerinde f para $f\,(3,2,1)$-yapısından indirgenmiş f^r altın yapısı integrallenebilir ise o zaman f para $f\,(3,2,1)$-yapısına kısmi integrallenebilir denir.*

Önerme 6.0.13. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için*

$$N_f\,(rX, rY) = 0$$

ve

$$N_f\,(fX, fY) = 0$$

eşitlikleri birbirine denktir.

İspat. (6.0.11) ve (6.0.12) eşitliklerinden ispat açıktır. □

Teorem 6.0.7. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. f para $f\,(3,2,1)$-yapısının kısmi integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için*

$$N_f\,(rX, rY) = 0 \ \textit{veya}\ N_f\,(fX, fY) = 0$$

eşitliklerinden herhangi birinin sağlanmasıdır.

İspat. M^R integral manifoldu üzerinde f para $f\,(3,2,1)$-yapısından indirgenmiş f^R altın yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için

$$N^R\,(rX, rY) = 0$$

olmasıdır. Böylece, Teorem 6.0.4 ve Önerme 6.0.13 göz önünde bulundurulursa, (6.0.28) eşitliğinden ispat yapılmış olur. □

Önerme 6.0.14. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. S distribüsyonunun integrallenebilir ve f para $f\,(3,2,1)$-yapısının kısmı integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul f para $f\,(3,2,1)$-yapısının Nijenhuis tensörünün her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için*

$$N_f\,(X, Y) = N_f\,(rX, sY) + N_f\,(sX, rY)$$

eşitliğinin sağlamasıdır.

İspat. Teorem 6.0.5, Önerme 6.0.13 ve Teorem 6.0.7 birleştirilirse, istenen ispat elde edilir. □

Bir f para $f\,(3,2,1)$-yapısının herhangi bir $Y \in \Gamma\,(TM)$ vektör alanına göre Lie türevi her $X \in \Gamma\,(TM)$ için

$$(L_Y f)\,(X) = f\,[X, Y] - [fX, Y] \tag{6.0.29}$$

ile verilir.

Önerme 6.0.15. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma\,(TM)$ için*

$$N_f\,(rX, sY) = f\,(L_{sY} f)\,(rX) \tag{6.0.30}$$

ve

$$(f-I)\,N_f\,(rX,sY)=r\,(L_{sY}f)\,(rX) \tag{6.0.31}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (6.0.29) eşitliğinin her iki tarafına f para $f\,(3,2,1)$-yapısı uygulanırsa, her $X,Y\in\Gamma\,(TM)$ için

$$f\,(L_{sY}f)\,(rX)=f^2\,[rX,sY]-f\,[fX,sY] \tag{6.0.32}$$

olur. Aynı zamanda, (6.0.17) ifadesinde X ve Y vektör alanları yerine, sırasıyla, rX ve sY yazılılırsa, (6.0.11) ve (6.0.13) eşitlikleri yardımıyla her $X,Y\in\Gamma\,(TM)$ için

$$\begin{aligned} N_f\,(rX,sY) &= [frX,fsY]-f\,[frX,sY]-f\,[rX,fsY]+f^2\,[rX,sY] \\ &= -f\,[fX,sY]+f^2\,[rX,sY] \\ &= f^2\,[rX,sY]-f\,[fX,sY] \end{aligned} \tag{6.0.33}$$

elde edilir. O zaman (6.0.32) ve (6.0.33) eşitliklerinden

$$N_f\,(rX,sY)=f\,(L_{sY}f)\,(rX) \tag{6.0.34}$$

olduğu görülür. Böylece, (6.0.34) eşitliğinin her iki tarafına $f-I$ dönüşümü uygulanırsa, (6.0.11) ve (6.0.12) eşitliklerinden

$$(f-I)\,N_f\,(rX,sY)=r\,(L_{sY}f)\,(rX)$$

elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

R ve S distribüsyonlarının her ikisinin de integrallenebilir olduğunu varsayalım. O zaman M manifoldunda aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{(U,\varphi):(x^i,y^\alpha)\}$ yerel koordinat sistemi vardır:

(a) R distribüsyonunun integral manifoldları

$$y^1 = \text{sabit},\ \ldots,\ y^s = \text{sabit}$$

olacak şekilde s tane yerel koordinat ile temsil edilir,

(b) S distribüsyonunun integral manifoldları

$$x^1 = \text{sabit},\ \ldots,\ x^r = \text{sabit}$$

olacak şekilde r tane yerel koordinat ile temsil edilir.

Bu koordinat sistemine bir uyarlanmış koordinat sistemi denir.

Önerme 6.0.16. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. R ve S distribüsyonların her ikisinin de integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bir uyarlanmış koordinat sisteminde f para $f\,(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olması için bir gerek ve yeter koşul her $Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$r\,(L_{sY}f)\,r = 0 \text{ veya } L_{sY}f = 0$$

eşitliklerinden herhangi birinin sağlanmasıdır.

İspat. Bir uyarlanmış koordinat sisteminde,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(R) \text{ ve } \frac{\partial}{\partial y^a} \in \Gamma(S)$$

olduğu için f para $f\,(3,2,1)$-yapısı

$$f = \begin{pmatrix} f_i^j & 0 \\ 0 & f_b^a \end{pmatrix}$$

matris formuna sahiptir. Yani, f para $f(3,2,1)$-yapısı

$$f = f_i^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + f_b^a \frac{\partial}{\partial y^a} \otimes dy^b$$

ile verilir. Üstelik, r ve s projeksiyon operatörleri, sırasıyla,

$$r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ veya } r = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^i$$

ve

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \text{ veya } s = \frac{\partial}{\partial y^a} \otimes dy^a$$

bileşenlerine sahiptir. O zaman f para $f(3,2,1)$-yapısının $\frac{\partial}{\partial y^a}$ vektör alanına göre Lie türevi

$$L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f = \frac{\partial f_i^j}{\partial y^c} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + \frac{f_b^a}{\partial y^c} \frac{\partial}{\partial y^a} \otimes dy^b \tag{6.0.35}$$

olarak hesaplanır. Bu yüzden,

$$r\left(L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f\right) r = \frac{\partial f_i^j}{\partial y^c} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \tag{6.0.36}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, (6.0.11) ve (6.0.13) eşitlikleri dikkate alınırsa, $f_b^a = 0$ olur. Böylece, f para $f(3,2,1)$-yapısı

$$f = \begin{pmatrix} f_i^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ veya } f = f_i^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

halini alır. Üstelik, (6.0.35) eşitliği

$$L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f = \frac{\partial f_i^j}{\partial y^c} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j = r\left(L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f\right) r \tag{6.0.37}$$

ile ifade edilir. Böylece, $r\left(L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f\right) r = 0$ veya $L_{\frac{\partial}{\partial y^a}} f = 0$ ise $\frac{\partial f_i^j}{\partial y^c} = 0$ olduğunu ifade eder. Bu ise f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olduğunu gösterir. Tersine, f para $f(3,2,1)$-yapısının bileşenleri bu koordinatlardan bağımsız ise (6.0.37) eşitliğinden her $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r(L_{sY} f) r = L_{sY} f = 0$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 6.0.17. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. R ve S distribüsyonların her ikisinin de integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bir uyarlanmış koordinat sisteminde f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olması için bir gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_f(rX, sY) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (6.0.30) ve (6.0.31) eşitliklerinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$r(L_{sY}f)r = 0$$

ve

$$N_f(rX, sY) = 0$$

ifadelerinin birbirine denk olduğu açıktır. Böylece, Önerme 6.0.16 yardımıyla ispat gösterilmiş olur. □

Önerme 6.0.18. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. R ve S distribüsyonların her ikisinin de integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bir uyarlanmış koordinat sisteminde f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olması için bir gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$N_f(X, Y) = rN_f(rX, rY)$$

olmasıdır.

İspat. R ve S distribüsyonların her ikisinin de integrallenebilir olması nedeniyle f para $f(3,2,1)$-yapısının Nijenhuis tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_f(X, Y) = rN_f(rX, rY) + N_f(rX, sY) + N_f(sX, rY)$$

ile verilir. Diğer taraftan, f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olması nedeniyle Önerme 6.0.17 yardımıyla her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_f(rX,sY)=0 \text{ ve } N_f(sX,rY)=-N_f(rY,sX)=0$$

olur. Böylece,

$$N_f(X,Y)=rN_f(rX,rY)$$

olduğu görülür. Tersine, her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$N_f(X,Y)=rN_f(rX,rY)$$

olsun. Bu durumda X ve Y vektör alanları yerine rX ve rY yazılırsa,

$$N_f(rX,sY)=rN_f\left(r^2X,rsY\right)=0$$

elde edilir. Bu ise Önerme 6.0.17'den f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenlerinin R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsız olması demektir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 6.0.3. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f(3,2,1)$-yapı f olsun. Eğer*

(a) *f para $f(3,2,1)$-yapısı kısmi integrallenebilirdir,*

(b) *S distribüsyonu integrallenebilirdir,*

(c) *Bir uyarlanmış koordinat sisteminde f para $f(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenleri R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsızdır*

koşulları sağlanıyorsa bu durumda f para $f(3,2,1)$-yapısına integrallenebilir denir.

Teorem 6.0.8. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. f para $f\,(3,2,1)$-yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul her $X,Y \in \Gamma\,(TM)$ için*

$$N_f\,(X,Y) = 0$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 6.0.5, Teorem 6.0.7 ve Önerme 6.0.18 birleştirilirse, ispat gösterilmiş olur. □

Teorem 6.0.9. *Bir m-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde herhangi bir para $f\,(3,2,1)$-yapı f olsun. f para $f\,(3,2,1)$-yapısının integrallenebilir olması için bir gerek ve yeter koşul f para $f\,(3,2,1)$-yapısının*

$$f = \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde sabit bileşenlere sahip olduğu bir koordinat sisteminin mevcut olmasıdır. Burada ϕ ve $1-\phi$ değerleri, $x^2-x-1=0$ cebirsel denkleminin kökleridir. Ayrıca, I_p ve I_q, sırasıyla, $p\times p$ ve $q\times q$ tipinde birim matrislerdir.

İspat. Eğer f para $f\,(3,2,1)$-yapısı integrallenebilir ise bir uyarlanmış koordinat sisteminde f para $f\,(3,2,1)$-yapısı

$$f = \begin{pmatrix} f_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenleri ile verilir. Burada f_r, $r\times r$ tipinde bir matristir, $r = p+q$ sayısı ise f para $f\,(3,2,1)$-yapısının rankıdır. Ayrıca, f para $f\,(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenleri R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsızdır. R distribüsyonunun herhangi bir M^R integral manifoldu üzerinde f para $f\,(3,2,1)$-yapısından indirgenmiş f^R operatörüne karşılık gelen f_r matrisi bir altın yapı tanımladığı için uyarlanmış koordinat sisteminin

$$f_r = \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 \\ 0 & (1-\phi)\,I_q \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir değişimini yapabiliriz. Böylece,

$$f=\begin{pmatrix} f_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Tersine, f para $f\,(3,2,1)$-yapısının

$$f=\begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde sabit bileşenlere sahip olduğu bir koordinat sistemi mevcut olsun. (6.0.2) ve (6.0.3) eşitliklerinden r ve s projeksiyon operatörlerinin, sırasıyla,

$$\begin{aligned} r &= f^2 - f \\ &= \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s &= -f^2 + f + I \\ &= -\begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-p-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-p-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde olduğu bulunur. Bu ise r ve s projeksiyon operatörlerine, sırasıyla, karşılık gelen R ve S distribüsyonlarının integrallenebilir olduğu ifade eder. Diğer taraftan, açıkça görüldüğü gibi f para $f\,(3,2,1)$-yapısının yerel bileşenleri R distribüsyonunun integral manifoldları boyunca sabit olan koordinatlarından bağımsızdır. Aynı zamanda, f para $f\,(3,2,1)$-yapısından indirgenmiş f^R altın yapısına karşılık gelen f_r matrisi

$$f_r = \begin{pmatrix} \phi I_p & 0 \\ 0 & (1-\phi)\, I_q \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Yani, f^R altın yapısı sabit katsayılı $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ tensör çarpımlarının bir lineer kombinasyonudur. O zaman $N^{^R} = 0$ olduğu açıktır. Bu ise f^R altın yapısının integrallenebilir olması demektir. Bunun yanısıra, R distribüsyonu integrallenebilir olduğu için f para $f\,(3,2,1)$-yapısı kısmi integrallenebilirdir. Böylece, $f\,(3,2,1)$-yapısının integrallenebilir olması için gerekli tüm koşullar sağlanmıştır. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. □

KAYNAKLAR

[1] M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, New York, 1977, 174p.

[2] R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore, 1997, 162p.

[3] R. H. Fischler, *The Shape of the Great Pyramid*, Wilfrid Laurier University Press, Ontario, 2000, 293p.

[4] M. Livio, *The Golden Ratio*, Broadway Books, New York, 2003, 294p.

[5] M. S. El Nashie, *Quantum Mechanics and the Possibility of a Cantorian Spacetime*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 1:5 (1992) 485-487.

[6] M. S. El Naschie, *Kleinian Groups in* $E^{(\infty)}$ *and Their Connection to Particle Physics and Cosmology*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 16:4 (2003) 637-649.

[7] M. S. El Naschie, *The VAK of Vacuum Fluctuation, Spontaneous Self-organization and Complexity Theory Interpretation of High Energy Particle Physics and the Mass Spectrum*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 18:2 (2003) 401-420.

[8] M. S. El Naschie, *The Concepts of E Infinity: An Elementary Introduction to the Cantorian-fractal Theory of Quantum Physics*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 22:2 (2004) 495-511.

[9] A. P. Stakhov, *The Golden Section in the Measurement Theory*, **Computers Math. Applic.**, 17:46 (1989) 613-638.

[10] R. Heyrovska, *The Golden Ratio Ionic and Atomic Radii and Bond Lengths*, **Molecular Physics**, 103:6-8 (2005) 877-882.

[11] L. D. G. Sigalotti and A. Mejias, *The Golden Ratio in Special Relativity*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 30:3 (2006) 521-524.

[12] L. M. Crnjac, *On the Mass Spectrum of the Elementary Particles of the Standard Model Using El Naschie's Golden Field Theory*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 15:4 (2003) 611-618.

[13] L. M. Crnjac, *Periodic Continued Fraction Representations of Different Quarks Mass Ratios*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 25:4 (2005) 807-814.

[14] L. M. Crnjac, *The Golden Mean in the Topology of Four-manifolds in Conformal Field Theory in the Mathematical Probability Theory and in Cantorian Spacetime*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 28:5 (2006) 1113-1118.

[15] K. Yano, *On a Structure Defined by a Tensor Field f of Type $(1,1)$ Satisfying* $f^3 + f = 0$, **Tensor N. S.**, 14:1 (1963) 99-109.

[16] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984, 508p.

[17] S. I. Goldberg and K. Yano, *Polinomial Structures on Manifolds*, **Kodai Math. Sem. Rep.**, 22:2 (1970) 199-218.

[18] A. Bucki, *Para-ϕ-structures with Parallelizable Kernel on Manifolds*, **Tensor, N.S.**, 48:1 (1989) 36-45.

[19] C. E. Hreţcanu, *Submanifolds in Riemannian Manifolds with Golden Structure*, **Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)** 24:1 (2008) 3-4.

[20] M. C. Crâşmăreanu and C. E. Hreţcanu, *Golden Differential Geometry*, **Chaos, Solitons & Fractals**, 38:5 (2008) 1229-1238.

[21] C. E. Hreţcanu and M. C. Crâşmăreanu, *On Some Invariant Submanifolds in a Riemannian Manifold with Golden Structure*, **An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)** 53:suppl. 1 (2007) 199-211.

[22] C. E. Hreţcanu and M. C. Crâşmăreanu, *Applications of the Golden Ratio on Riemannian Manifolds*, **Turk J. Math.**, 33:2 (2009) 179-191.

[23] S. I. Goldberg and N. C. Petridis, *Differentiable Solutions of Algebraic Equations on Manifolds*, **Kodai Math. Sem. Rep.**, 25:1 (1973) 111-128.

[24] M. Anastasiei, *Some Riemannian Almost Product Structures on Tangent Manifold*, **Algebras Groups Geom.**, 17:3 (2000) 253-262.

[25] S. Ianuş, *Some Almost Product Structures on Manifolds with Linear Connection*, **Kodai Math. Sem. Rep.**, 23:3 (1971) 305-310.

[26] G. Pitiş, *On Some Submanifolds of a Locally Product Manifold*, **Kodai Math. J.**, 9:3 (1986) 327-333.

[27] S. I. Vacaru and N. A. Vicol, *Nonlinear Connections and Clifford Structures*, arXiv:math/0205190.

[28] L. S. Das, J. Nikić and R. Nivas, *Parallelism of Distributions and Geodesics on* $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*-structure Lagrangian Manifolds*, **Differ. Geom. Dyn. Syst.**, 8:1 (2006) 82-89.

[29] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Space*, Pergamon Press, New York, 1965, 326p.

[30] T. Adati, *Submanifolds of an Almost Product Riemannian Manifold*, **Kodai Math. J.**, 4:2 (1981) 327-343.

[31] A. Bejancu, *CR Submanifolds of a Kaehler Manifold I*, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 69:1 (1978) 135-142.

[32] A. Bejancu, *CR Submanifolds of a Kaehler Manifold II*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 250:1 (1979) 333-345.

[33] D. E. Blair and B. Y.Chen, *On CR Submanifolds of Hermitian Manifolds*, **Israel J. Math.**, 34:4 (1979) 353-363.

[34] B. Y. Chen, *CR Submanifolds of a Kaehler Manifold I*, **J. Differential Geom.** 16:2 (1981) 305-322.

[35] B. Y. Chen, *CR Submanifolds of a Kaehler Manifold II*, **J. Differential Geom.** 16:3 (1981) 493-509.

[36] B.Y. Chen, *Cohomology of CR Submanifolds*, **Ann. Fac. Sc. Toulouse Math. Ser. 5**, 3:2 (1981) 167-172.

[37] A. Bejancu, M. Kon and K. Yano, *CR Submanifolds of a Complex Space Form*, **J. Differential Geom.**,16:1 (1981) 137-145.

[38] A. Bejancu, *Geometry of CR Submanifolds*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986, 169p.

[39] S. Deshmukh and S. I. Husain, *Totally Umbilical CR Submanifolds of a Kaehler Manifold*, **Kodai Math. J.**, 9:3 (1986) 425-429.

[40] P. Alegre, *Semi-Invariant Submanifolds of Lorentzian Sasakian Manifolds*, **Demonstratio Math**. 44:2 (2011) 391-406.

[41] M. Ali. Khan, F. R. Al-Solamy and A. A. Ishan, *Totally Umbilical Pseudo-Slant Submanifolds of Riemannian Product Manifolds*, **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 41:1 (2015) 79-87.

[42] P. Szekeres, *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry*, Cambridge University Press, New York, 2004, 600p.

[43] D. Martin, *Manifold Theory*, Horwood Publishing, Chichester, 2002, 423p.

[44] B. Şahin, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel, Ankara, 2012, 294p.

[45] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997, 224p.

[46] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Washington, 2002, 628p.

[47] J. E. Marsden, T. Ratiu and R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag, New York, 2001, 555p.

[48] H. H. Hacısalihoğlu, *Yüksel Diferansiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ, 1980, 439p.

[49] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, London, 1986, 430p.

[50] R. H. Wasserman, *Tensors and Manifolds*, Oxford University Press, New York, 1992, 391p.

[51] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2005, 336p.

[52] O. Mucuk, *Topoloji ve Kategori*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010, 462p.

[53] Ş. Yüksel, *Genel Topoloji*, Eğitim Kitabevi, Konya, 2006, 487p.

[54] P. Renteln, *Manifolds, Tensors, and Forms*, Cambridge University Press, New York, 2014, 329p.

[55] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 2009, 671p.

[56] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973, 298p.

[57] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, London, 1983, 468p.

[58] K. Nomizo and S. Kobayashi, *Foundations of Differantial Geometry,* Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1963, 329p.

[59] P. Michor, I. Kolář, J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993, 435p.

[60] K. Yano and M. Kon, *CR Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1983, 208p.

[61] R. Miron and M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, 285p.

[62] A. Bejancu and H. D. Farran, *Foliations and Geometric Structures*, Springer, Amsterdam, 2006.

[63] S. Ianuş, *Sur les Structures Presque Produit des Varietes a Connection Linéairei*, **C. R. Acad. Sci.**, 272:11 (1971) 734-735.

[64] C. E. Hreţcanu and A. M. Blaga, *Slant and Semi-Slant Submanifolds in Metallic Riemannian Manifolds*, **J. Funct. Spaces**, 2018:Article ID 2864263 (2018) 13 pages.

[65] A. Bejancu, *Semi-Invariant Submanifolds of Locally Riemannian Product Manifolds*, **Ann. Univ. Timisoara S. Math.** 22:1 (1984) 3-11.

[66] F. E. Erdoğan and C. Yıldırım, *On a Study of the Totally Umbilical Semi-Invariant Submanifolds of Golden Riemannian Manifolds*, **J. Polytechnic**, 21:4 (2018) 967-970.

[67] K. Nomizu and K. Yano, *On Circles and Spheres in Riemannian Geometry*, **Math. Ann.**, 210:1 (1974) 163-170.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	:	Mustafa GÖK
Doğum Yeri ve Tarihi	:	İslahiye / 01.01.1989
Adres	:	İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
E-Posta	:	mustafa.gok@email.com
Lisans	:	Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	:	Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı