

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SABİT EĞRİLİKLİ UZAYLAR ÜZERİNE

Mehmet GÜLBAHAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
2010**

Tezin Başlığı : Sabit Eđriliđli Uzaylar Üzerine

Tezi Hazırlayan : Mehmet GÜLBAHAR

Sınav Tarihi : 16.07.2010

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŐ (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ (İnönü Üniv.)

Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ (İnönü Üniv.)

Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÖNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sabit Eğrilikli Uzaylar Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurla doğrularım.

Mehmet GÜLBAHAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Sabit Eğrilikli Uzaylar Üzerine

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

77+vi sayfa

2010

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, öncelikle temel tanım ve teoremler ifade edilerek diferensiyellenebilir manifoldlar ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, Riemann eğriliği, Kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve Skaler Eğrilik tanımlanarak bu eğriliklerin Sabit eğrilikli uzayla ilişkileri ifade edildi.

Üçüncü bölümde, Sabit eğrilikli uzayların yapıları ve örnekleri incelenerek, Uzay form kavramı tanıtıldı. Ayrıca Sabit eğrilikli uzaylar sınıflandırılarak bu sınıflandırmaya ait örnekler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Diferensiyellenebilir Manifold, Riemann Eğriliği, Kesit Eğriliği, Skaler Eğrilik, Sabit Eğrilik, Uzay form

ABSTRACT

Graduate Thesis

About Space of Constant Curvature

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

77+vi pages

2010

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Müge KARADAĞ

The present thesis consists of three chapters. In the first chapter, basic definitions and theorems were explained then general knowledge about smooth manifolds have been given.

In the second chapter, Riemann curvature, Sectional curvature, Ricci Curvature and Scalar curvature were introduced and then relations of these curvatures between space of constant curvature were explained

In the third chapter, structures and examples in space of constant curvature were investigated and the concept of Space form were explained. Furthermore space of constant curvature were classified and examples of this classification were given

KEYWORDS: Smooth Manifolds, Riemann curvature, Sectional Curvature, Ricci Curvature, Scalar Curvature, Constant curvature, Space form

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek, bilgisi ve görüşleriyle beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Yrd.Doç.Dr.Müge KARADAĞ'a lisansüstü çalışmalarımnda sağladığı imkanlar ve teşviklerinden dolayı matematik bölümü başkanı Sayın Prof.Dr.Sadık KELEŐ'e bilgisinden ve kütüphanesinden yararlandığım Sayın Doç.Dr.H.Bayram KARADAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet GÜLBAHAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
GİRİŞ	v
1 TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	1
1.2 Afin Konneksiyon ve Riemann Konneksiyonu	9
2 EĞRİLİK	20
2.1 Riemann eğriliği	20
2.2 Kesit eğriliği ve Ricci eğriliği	23
2.3 Jakobi Alanı	31
2.4 Simetrik Riemann Manifoldları	36
2.5 Eğrilik Formları ve Yapı Denklemleri	38
2.6 Kovaryant Tensör Alanının Diferensiyeli	43
3 SABİT EĞRİLİKLİ UZAYLAR	47
3.1 Sabit Kesit Eğrilikli Uzaylar	47
3.2 Cartan Teoremi	56
3.3 Uzay Formlar	59
3.4 Uzay Form Örnekleri	65
ÖZGEÇMİŞ	77

GİRİŞ

Riemann, uzayın biçimini çözümlmek için eğrilik kavramını bir düşünce deneyi ile sunmuştur. Örneğin dünyanın yakın çevresindeki uzayın kesitinin biçimini incelemek istediğimizi var sayalım. Eşit aralıklarla dizilmiş çok sayıda roketin var olduğunu kabul edelim. Verilen bir işaretle hepsi aynı anda fırlatılsın. Her roket yerden belli bir uzaklığa erişince parlak bir ışık saçmak üzere programlansın. Yeter sayıda roketimiz varsa sonuç olarak yeryüzünden belli bir uzaklıkta tüm yer küreyi çevreleyen ışıktan dev bir halka olacaktır. Düşünce deneyimizi tamamlamak için, bu dairenin çevresini ölçebildiğimizi varsayalım. Uzay eğer öklid uzayı ise çemberin boyu çapının 2π katı olacaktır. Fakat Riemann'a göre çemberin boyunun değerini önceden bilmemizin yolu yoktur. Çünkü uzayın Öklid uzayı olup olmadığını bilmiyoruz. Ayrıca ışıktan çıkan halkanın boyu çapının 2π katından daha küçükte çıkabilir. Riemann böyle olduğuna bir örnek verdi. Bu örnek bugün 'eliptik' veya 'küresel' uzay olarak adlandırılır.

Böylece yarıçapı r olan dairenin çevresi, sıfır eğrilikli ise $2\pi r$, pozitif eğrilikli ise $2\pi r$ den küçük ve negatif eğrilikli ise $2\pi r$ den büyük değerlere karşılık gelir. Bu ise aslında herhangi bir şeklin ölçümünün Öklidyen modelden ne kadar saptığının algılanmasını sağlar. Bu çalışmaların sonunda sıfır, pozitif ve negatif eğrilikli uzayların kavramını oluşturmuştur.

Bu tez üç bölümden ibarettir. Çalışmanın birinci bölümünde ileride kullanılacak olan diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldları, konneksiyon ve geodezik gibi kavramlar tanıtılmıştır.

Riemann geometride Sabit eğrilikli uzaylar, bir Riemann manifoldunun her kesitinin aynı sabit eğriliğe sahip olmasıdır. O halde Sabit eğrilikli uzaylar denildiğinde sabit kesit eğrilikli uzaylar anlaşılmalıdır. Bu çalışmanın ikinci bölümünde öncelikle Riemann geometride tanımlı olan eğrilikler ifade edilmiştir. Daha sonra Jakobi alanı, Einstein manifoldları, Simetrik Riemann manifoldları ve Paralel kovaryant tensör alanı gibi kavramların sabit kesit eğrilikli uzaylar ile ilişkisi ifade edilmiştir.

Bu çalışmanın son bölümünde sabit kesit eğrilikli uzayların en çok bilinen örnekleri

olan S^n küresi, \mathbb{R}^n Öklid uzayı ve H^n hiperbolik uzayının eğrilikleri hesaplanmış bu uzayların örtülerinin de sabit kesit eğrilikli uzaylar olduğu gösterilmiştir. Bu aşamadan sonra bir manifold üzerinde tanımlı düzgün süreksiz etki eden grup etkilerinin aynı manifold üzerinde bir örtü uzayı olduğu gösterilerek sabit kesit eğrilikli uzaylar bu grup etkileri yardımıyla pozitif, sıfır, negatif eğrilikli olarak sınıflandırılmıştır. Son olarak bu sınıflandırmalara ait örnekler ifade edilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1.1.1. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n -boyutlu topolojik manifold veya topolojik n -manifold denir [1].

M_1). M bir hausdorff uzaydır.

M_2). M nin her bir açık altkütmesi \mathbb{R}^n veya \mathbb{R}^n in bir açık altkütmesine homeomorfdur.

M_3). M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir.

Tanım 1.1.2. M , n -boyutlu bir topolojik manifold olsun. Eğer \mathbb{R}^n nin bir U açık alt kümesi, M nin bir W açık alt kümesine bir x homeomorfizması ile eşlenebiliyorsa, yani

$$x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset M$$

dönüşümü homeomorfizma ise (U, x) ikilisine bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir [1].

M bir n -boyutlu topolojik manifold, A , α indislerinin kümesi ve $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ da M nin bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\forall \alpha \in A$ için V_α ya homeomorf olacak şekilde \mathbb{R}^n de bir U_α açık altkütmesi ve bir

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W_\alpha \subset M$$

homeomorfizması vardır. Bu şekilde ortaya çıkan (U_α, x_α) koordinat komşuluğunun $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ailesine M nin bir *koordinat komşuluğu sistemi* veya M nin bir *atlası* denir [1].

(U_α, x_α) bir lokal koordinat komşuluğu ve $p \in U_\alpha$ olmak üzere

$$x_\alpha(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

noktasının bileşenleri olan $x_i(p)$ reel sayılarına p noktasının *lokal koordinatları*, $x_i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına *lokal koordinat fonksiyonları* ve (x_1, \dots, x_n) e de p noktası civarında bir *lokal koordinat sistemi* denir [1].

Tanım 1.1.3. M n-boyutlu bir topolojik manifold ve M nin bir atlası $S = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W = W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\beta\alpha}$ ve $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^k -sınıfından iseler S ye C^k -sınıfından diferensiyellenebilir denir. S atlası M üzerinde C^k -sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k -sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir [1].

n-boyutlu M topolojik manifoldu üzerinde C^k -sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı varsa M ye C^k -sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir. M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir [1].

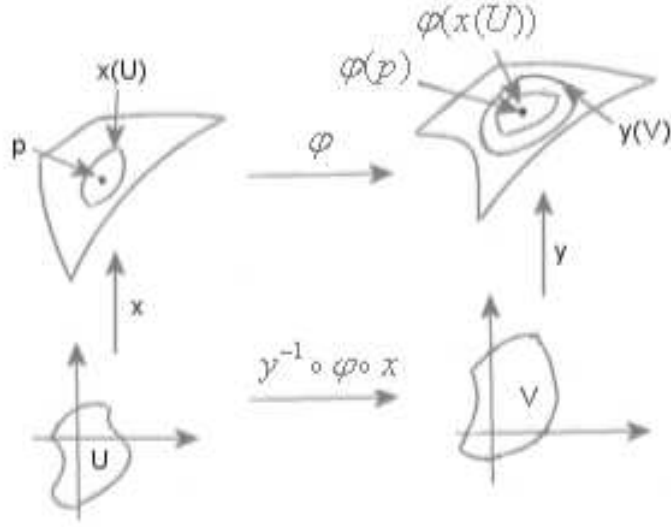


Şekil 1.1.1

Tanım 1.1.4. M_1^n ve M_2^n birer diferensiyellenebilir manifold ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ dönüşümü verilsin. $p \in M_1$ için $\varphi(p)$ de $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ koordinat sistemi tanımlansın. Bu taktirde $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ olacak şekilde p de $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ koordinat sistemi var ve

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dönüşümü $x^{-1}(p)$ de diferensiyellenebilir ise φ dönüşümüne diferensiyellenebilir dönüşüm denir [2].



Şekil 1.1.2

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(0) = p$$

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

için $\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = V \in \mathbb{R}^n$ olsun. Ayrıca f fonksiyonu p noktasında reel değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \frac{dx_i}{dt} \Big|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f$$

ile tanımlıdır [2].

Tanım 1.1.5. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna *diferensiyellenebilir eğri* denir [2].

Tanım 1.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. p noktasının bir U komşuluğunda tanımlanan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini $C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterelim.

$$\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ için

$$v[f] = \left(\frac{df(\alpha(t))}{dt} \right)_t$$

ile tanımlanan v vektörüne $\alpha(t_0) = p$ noktasında bir *tanjant vektörü* denir. Burada $v[f]$, $\alpha(t)$ eğrisi boyunca, f fonksiyonun türevidir.

v vektörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $v : C^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ bir lineer dönüşümdür. (lineerlik)

2) $v[fg] = (v[f])g(p) + f(p)(v[g])$, $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. (leibniz)

$p \in M$ noktasında tanjant vektörlerinin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \oplus & : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M) \\ (v_p, u_p) & \rightarrow v_p \oplus u_p = (v + u)_p \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot & : \mathbb{R} \times T_p(M) \rightarrow T_p(M) \\ (\lambda, v_p) & \rightarrow \lambda \odot v_p = (\lambda v)_p \end{aligned}$$

işlemleri tanımlansın. Bu taktirde $(T_p(M), \oplus, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \odot)$ altılısı n-boyutlu bir vektör uzayıdır. $T_p(M)$ uzayına M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir [1].

Tanım 1.1.7. $\forall p \in M$ noktasına $T_p(M)$ de bir tanjant vektörü karşılık getiren dönüşüme M üzerinde bir *vektör alanı* denir. Yani M üzerinde bir V vektör alanı

$$V : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

şeklinde bir dönüşümdür. M üzerindeki bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir

$$\begin{aligned} \oplus & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (V, U) & \rightarrow V \oplus U = (V + U) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot & : \mathbb{R} \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (\lambda, V) & \rightarrow \lambda \odot v = (\lambda v) \end{aligned}$$

işlemleri tanımlansın. Bu taktirde $(\chi(M), \oplus, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \odot)$ altılısı n-boyutlu bir vektör uzayıdır [1].

Tanım 1.1.8. M , n -boyutlu bir manifold ve p noktasında tanjant uzay $T_p(M)$ olsun.

$$T_p^*(M) = \{f | f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ lineer bir dönüşüm}\}$$

uzayına $T_p(M)$ nin *dual uzayı* veya *kotanjant uzayı* denir [1].

Tanım 1.1.9. M , n -boyutlu bir manifold ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ olsun. M nin bir koordinat komşuluğu U olmak üzere

$$\begin{aligned} w & : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_p^*(M) \\ p & \rightarrow w(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme, M üzerinde *1-form* denir. $w(p) \in T_p^*(M)$ elemanına bir *kovektör* denir [1].

Tanım 1.1.10. $f : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Herbir $p \in M$ için

$$df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$$

ile tanımlı lineer dönüşümüne f fonksiyonunun p noktasındaki *diferensiyeli* veya *türev dönüşümü* denir [2].

Önerme 1.1.1. M_1^n, M_2^n diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M_1$ ve $\forall v \in T_p(M_1)$ için, $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = v$ olacak şekilde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ diferensiyellenebilir eğrisi seçilsin. Ayrıca $\beta = \varphi \circ \alpha$ olsun. Bu takdirde $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ ile verilen $d\varphi_p : T_p(M_1) \rightarrow T_p(M_2)$ dönüşümü α nin seçiminden bağımsız bir lineer dönüşümdür [2].

İspat. $x : U \rightarrow M_1, p \in M_1$ noktasında ve $y : V \rightarrow M_2, \varphi(p) \in M_2$ noktasında birer koordinat sistemi olmak üzere

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x(q) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$q = (x_1, \dots, x_n) \in U, (y_1, \dots, y_m) \in V$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

dır. Böylece

$$y^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t)), \dots, y_m(x_n(t)))$$

elde edilir. Bu nedenle $\beta'(0)$, $T_{\varphi(p)}(M_2)$ nin $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}_o$ bazıyla

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x'_i(0) \right) \quad (1.1.1)$$

olarak yazılır. (1.1.1) eşitliğinden $\beta'(0)$, α nın seçiminden bağımsızdır. Ayrıca (1.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \beta' \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \right) &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\varphi(p)} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_{\varphi(p)} + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_{\varphi(p)} \\ &\vdots \\ \beta' \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) &= \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\varphi(p)} + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_{\varphi(p)} + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_{\varphi(p)} \end{aligned}$$

veya matris gösterimi ile

$$\beta' \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \Big|_p \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Big|_p & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \Big|_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \Big|_p & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \Big|_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\varphi(p)} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_{\varphi(p)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_{\varphi(p)} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki türev dönüşümü $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ $m \times n$ tipinde bir matrise karşılık gelir. Bu nedenle $d\varphi_p$, $T_p(M_1)$ üzerinde tanımlı lineer bir dönüşümdür. Buradaki matrisin transpozu olan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \Big|_p \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \Big|_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \Big|_p & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \Big|_p \end{bmatrix}$$

matrisine φ nin jakobian matrisi denir [2]. □

Tanım 1.1.11. M_1 ve M_2 birer diferensiyellenebilir manifold olsun. $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ dönüşümü diferensiyellenebilir, birebir ve φ^{-1} diferensiyellenebilir ise φ dönüşümüne *diffeomorfizm* denir [2].

$\varphi : U \rightarrow V$ dönüşümü bir difeomorfizma olacak şekilde $p \in M_1$ noktasının bir U komşuluğu ve $\varphi(p) \in M_2$ noktasının V komşuluğu varsa φ dönüşümüne *lokal diffeomorfizm* denir [2].

Teorem 1.1.1. [*Ters fonksiyon teoremi*]

$\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $p \in M_1$ noktasındaki $d\varphi_p$ diferensiyeli lineer bir izomorfizmadır $\Leftrightarrow p$ nin bir V komşuluğu vardırki $\varphi|_V$ dönüşümü V den M_2 de $\varphi(p)$ nin $\varphi(V)$ komşuluğu üzerine bir diffeomorfizmadır [3].

Sonuç 1.1.1. $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M_1$ için

$d\varphi_p : T_p(M_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(M_2)$ bir izomorfizma olsun. Bu takdirde φ dönüşümü p de lokal diffeomorfizmadır [2].

Tanım 1.1.12. M^n , n - boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p(M)\}$ kümesine M manifoldunun *tanjant demeti* denir [2].

Tanım 1.1.13. M manifoldunun herbir p noktasına, $T_p(M)$ uzayı üstünde, g_p iç çarpımı karşılık getiren bir g dönüşümüne, M üstünde bir *metrik tensörü* adı verilir [4]. M manifoldu üstünde bir metrik tensörü varsa bu metrik tensörü ile bu manifoldda bir *Riemann manifoldu* denir [4]

Tanım 1.1.14. M ve N birer Riemann manifoldu ve $f : M \rightarrow N$ birebir bir diffeomorfizm olsun. $\forall p \in M$ ve $u, v \in T_p M$ için

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad (1.1.2)$$

ise f fonksiyonuna *izometri* denir [2].

Tanım 1.1.15. M ve N birer Riemann manifoldu olsun. (1.1.2) şartını sağlayan

$f : U \rightarrow f(U)$ olacak şekilde herhangi bir $p \in M$ noktasının bir U komşuluğu varsa $f : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümüne bir *lokal izometri* denir [2].

Tanım 1.1.16. G , C^∞ bir manifold olsun. $\forall x, y \in G$ için $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ olacak şekilde $G \times G \rightarrow G$ diferensiyellenebilir dönüşümü tanımlı ise G manifolduna *Lie grubu* denir [2]

Tanım 1.1.17. G bir Lie grubu olsun.

$$L_x : G \rightarrow G$$

$$y \rightarrow L_x(y) = xy$$

ile tanımlı dönüşüme *sol öteleme* ve

$$R_x : G \rightarrow G$$

$$R_x(y) = yx$$

ile tanımlı dönüşüme *sağ öteleme* denir [2].

$\forall x, y \in G$ ve $\forall u, v \in T_y(G)$ için

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}$$

ise G deki Riemann metriğine *sol invariant* ve

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(R_x)_y u, d(R_x)_y v \rangle_{R_x(y)}$$

ise G deki Riemann metriğine *sağ invariant* denir [2]. Sol invariant ve sağ invariant olan Riemann metriğine *bi-invariant* denir [2].

G Lie grubu üzerinde X bir vektör alanı olsun. $\forall x \in G$ için $dL_x X = X$ ise X vektör alanına *sol invariant vektör alanı* denir Benzer olarak $\forall x \in G$ için $dR_x X = X$ ise X vektör alanına *sağ invariant vektör alanı* denir. $e \in G$ etkisiz elemanın tanjant uzayı üzerinde sol invariant (veya sağ invariant) vektör alanlarının ifade edilmesini sağlar. Yani herbir $X_e \in T_e(G)$ için $X_e = dL_a X_e$ dır. Burada $T_e(G)$ tanjant uzayına *Lie cebiri* denir [2].

f fonksiyonu G de diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $x \in G$ için $dX(f) = X[f]$ olduğundan

$$dL_x[X, Y]f = [X, Y](f \circ L_x) = X(dL_x Y)f - Y(dL_x X)f = (XY - YX)f = [X, Y]f$$

dır. Bu ise herhangi iki sol invariant vektör alanının Lie parantezinin yine sol invariant bir vektör alanı olduğunu gösterir. $X_e, Y_e \in T_e(G)$ ise $[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$ olarak yazılır.

Tanım 1.1.18. G bir Lie grubu olsun. $\forall X_e, Y_e \in T_e(G)$ için

$$\begin{aligned} ad_X &: T_e(G) \rightarrow T_e(G) \\ Y_e &\rightarrow ad_X(Y_e) = [X, Y]_e \end{aligned}$$

ile tanımlı lineer dönüşüme *adjoint etkisi* veya *adjoint endomorfizması* denir [5].

Tanım 1.1.19. G_1 ve G_2 Lie grupları ve $f : G_1 \rightarrow G_2$ grup homomorfizması olsun. f diferensiyellenebilir ise f ye *Lie grubu homomorfizması* denir [5].

Örneğin $n \times n$ tipindeki regüler matrislerin kümesi olan $GL(n, \mathbb{R})$ kümesi çarpma işlemine göre bir Lie grubudur ve $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(1, \mathbb{R})$, $f(A) = \det A$ ile tanımlı f fonksiyonu Lie grup homomorfizmasıdır.

Tanım 1.1.20. G bir Lie grubu,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow G \\ t &\rightarrow g(t) \end{aligned}$$

ile tanımlı $g(t)$ grup homomorfizmasına G nin *1-parametrelili alt grubu* denir [5]. Burada $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için g bir homomorfizma olduğundan

$$g(t+s) = g(t)g(s)$$

sağlanır. Ayrıca $g(0) = e$ ve $g(t^{-1}) = g(-t)$ olarak tanımlıdır.

1.2 Afın Konneksiyon ve Riemann Konneksiyonu

$\chi(M)$, M üzerindeki C^∞ sınıftan vektör alanlarının cümlesi ve $D(M)$, M üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonların halkası olsun.

Tanım 1.2.1. [*Afın Konneksiyon*] Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} \nabla &: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

ile tanımlı $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için

$$i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$$

$$ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne *afin konneksiyon* denir [2].

Önerme 1.2.1. M, ∇ *afin konneksiyonu ile verilen bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir eğrisi üzerinde V bir vektör alanı olmak üzere bir tek $\frac{DV}{dt}$ vardır. $\frac{DV}{dt}$, V nin α boyunca kovaryant türevi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şartları sağlar [2].*

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

b) W, α boyunca bir vektör alanı ve f, I da diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\frac{dfV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ dir.

c) $Y \in \chi(M)$ için $V(t) = Y(\alpha(t))$ olacak şekilde V bir vektör alanı olsun. Bu takdirde $\frac{DV}{dt} = \nabla_{d\alpha/dt}Y$ dir

İspatı vermeden önce aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 1.2.1. Önerme 1.2.1 in (c) şikkı, p de bir (x_1, \dots, x_n) koordinat sistemi seçilerek ve $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ alınarak

$$X = \sum_i x_i X_i, Y = \sum_j y_j X_j$$

yazılırsa

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} (\sum_j y_j X_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i (y_j) X_j$$

elde edilir. $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ olmak üzere $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ yazılırsa

$$\nabla_X Y = \sum_k (\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)) X_k \quad (1.2.1)$$

dır [2]. Şimdi önermenin ispatını yapalım.

İspat. Öncelikle $\frac{DV}{dt}$ nin (a), (b), (c) şartlarını sağladığını gösterelim. $V, W \in \chi(M)$ için $V = \sum_i v^i X_i$ ve $W = \sum_i w^i X_i$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\frac{D(V+W)}{dt} &= \sum \frac{d(v^i+w^i)}{dt} X_i + \sum_i (v^i+w^i) \frac{DX_i}{dt} \\ &= \sum_i \frac{dv^i}{dt} X_i + \sum_i v^i \frac{DX_i}{dt} + \sum_i \frac{dw^i}{dt} X_i + \sum_i w^i \frac{DX_i}{dt} \\ &= \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}\end{aligned}$$

olup (a) şartı sağlanır.

$$\begin{aligned}\frac{D(fV)}{dt} &= \sum_i \frac{d(fv^i)}{dt} X_i + \sum_i f v^i \frac{DX_i}{dt} \\ &= \sum_i \frac{df}{dt} v^i X_i + \sum_i f \frac{d(v^i)}{dt} X_i + f \sum_i v^i \frac{DX_i}{dt} \\ &= \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}\end{aligned}$$

olup (b) şartı sağlanır.

$Y(\alpha(t)) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $\alpha(0) = p$ için $\frac{d\alpha}{dt}(0) = T$ olsun. Bu takdirde

$$\nabla_T Y = \sum_j \frac{dy_1}{d\alpha_j} \Big|_p \frac{d\alpha_j}{dt}(0), \dots, \sum_j \frac{dy_n}{d\alpha_j} \Big|_p \frac{d\alpha_j}{dt}(0)$$

dır. Bu ise $\frac{DV}{dt} = \nabla_{d\alpha/dt} Y$ olduğunu gösterirki (c) şartı sağlanır.

Şimdi $\frac{DV}{dt}$ nin tek olduğunu gösterelim. $t \in I$ için $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $\alpha(I) \cap x(U)$ ile bir koordinat sistemi $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ verilsin ve $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. Bu takdirde $j = (1, \dots, n)$ için $v^j = v^j(t)$ ve $X_j = X_j(\alpha(t))$ olduğunda V vektör alanı $V = \sum_j v^j X_j$ ile ifade edilebilir.

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}$$

olduğundan (c) ve Tanım 1.2.1 in (i) şartıyla

$$\begin{aligned}\frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{d\alpha/dt} X_j = \nabla_{(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j \quad (1.2.2)$$

dir. Böylece Önerme 1.2.1 in şartlarını sağlayan (1.2.2) eşitliği $\frac{DV}{dt}$ nin tek olduğunu gösterir.

Varlığı gösterebilmek için $x(U)$ da (1.2.2) eşitliğindeki $\frac{DV}{dt}$ tanımlansın. $y(W)$, $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ olacak şekilde $x(U)$ dan farklı bir koordinat komşuluğu olsun. $x(U)$ da $\frac{DV}{dt}$ nin tekliğinden (1.2.2) eşitliği $y(W) \cap x(U)$ da sağlanır. Bu ise $\frac{DV}{dt}$ nin $y(W)$ da tanımlı olduğunu gösterir. Böylece koordinat komşuluğu tüm M üzerine genişletilebilir ve ispat tamamlanır [2]. \square

Tanım 1.2.2. M, ∇ konneksiyonu ile verilen bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi boyunca bir V vektör alanı her bir $t \in I$ için $\frac{DV}{dt} = 0$ ise V vektör alanına *paralel vektör alanı* denir [2].

Tanım 1.2.3. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi üstünde, $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t_1)$ noktaları verildiğinde, $\alpha(t_0)$ noktasındaki V vektörünün belirlediği $\alpha(t_1)$ noktasındaki değerine V vektörünün $\alpha(t_1)$ noktasına ötelenmiş denir [4].

$a = \alpha(t_0)$ ve $b = \alpha(t_1)$ diyelim. Yukarıdaki tanıma göre $T_{\alpha(t_0)}(M)$ uzayından $T_{\alpha(t_1)}(M)$ uzayına bir P_a^b fonksiyonu tanımlanmış olur. Bu fonksiyona $\alpha(t_0)$ noktasından $\alpha(t_1)$ noktasına, α eğrisi üzerinde *paralel kayma fonksiyonu* denir. $P_a^b(V)$ vektörüne V vektörünün $\alpha(t_1)$ noktasında *paralel transportu* denir [4].

$$P_a^b : T_{\alpha(t_0)}(M) \rightarrow T_{\alpha(t_1)}(M)$$

dönüşümü lineerdir ve iç çarpımı korur.

Tanım 1.2.4. M, ∇ konneksiyonu ile bir diferensiyellenebilir manifold ve \langle, \rangle de bir Riemann metriği olsun. Her bir α diferensiyellenebilir eğrisi boyunca V ve W paralel vektör alan çiftleri için $\langle V, W \rangle = \text{sbt}$ olduğunda, bu konneksiyona *metrik ile uyumludur* denir [2].

Önerme 1.2.2. M , bir Riemann manifoldu olsun. M de ∇ konneksiyonu metrik ile uyumludur $\Leftrightarrow \alpha: I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir eğrisi boyunca her bir V ve W paralel vektör alanları için

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \quad (1.2.3)$$

dır [2].

İspat. (1.2.3) eşitliği sağlandığında V ve W vektör alanları paralel olduğundan $\frac{DV}{dt} = 0$ ve $\frac{DW}{dt} = 0$ olup $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = 0$ dır. Bu ise ∇ nın \langle, \rangle ile uyumlu olduğunu gösterir. Şimdi tersini ispatlayalım. $t_0 \in I$ için $T_{\alpha(t_0)}(M)$ nin, bir $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ paralel ortonormal bazını seçelim.

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \dots, n$$

olsun. Burada v^i ve w^i , I da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i$$

böylece

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 1.2.2. Bir M Riemann manifoldu üzerinde ∇ konneksiyonu metrik ile uyumludur $\Leftrightarrow X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

dir [2].

Tanım 1.2.5. M , ∇ konneksiyonu ile verilen bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (\text{Torsiyonsuz})$$

ise ∇ ya *simetrikdir* denir [2].

Sonuç 1.2.3. (U, x) koordinat sisteminde ∇ nın simetrik oluşu her bir $i, j = 1, \dots, n$ için

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

eşitliğini sağlar [2]. (Bu eşitlik $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ gerçeğine denktir.)

Teorem 1.2.1. [Levi-Civita.] M bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ konneksiyonu vardır [2].

i) ∇ simetriktir.

ii) ∇ Riemann metriği ile uyumludur.

İspat. Öncelikle ∇ konneksiyonun var olduğunu kabul edip tekliğini gösterelim. $X, Y, Z \in \chi(M)$ için ∇ konneksiyonu metrikle uyumlu olduğundan

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (1.2.4)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (1.2.5)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (1.2.6)$$

dır. (1.2.4) ile (1.2.5) toplanır ve (1.2.6) çıkarılır ve ∇ nın simetrikliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_X Y \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_X Y \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ - \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

dır. (1.2.7) ifadesi ∇ nın tek olduğunu gösterir.

(1.2.7) ifadesi tanımlanarak ∇ nın iyi tanımlı olduğu ve Tanım 1.2.1 in (i),(ii) ve (iii) şartlarını sağladığı açıktır. Bu ise varlığının ispatıdır. \square

Tanım 1.2.6. Yukardaki teoremden verilen konneksiyona M de *Levi-Civita konneksiyonu* veya *Riemann konneksiyonu* denir [2].

U üzerinde ∇ konneksiyonunun bileşenleri tarafından $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ olarak tanımlanan Γ_{ij}^k fonksiyonlarına *Cristoffel sembolleri* adı verilir [2].

(1.2.7) dan devam edilecek olursa $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ olmak üzere

$$\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell j} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

dır. g^{km} matrisi g_{km} matrisinin ters matrisi olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (1.2.8)$$

elde edilir [2].

Tanım 1.2.7. $\gamma: I \rightarrow M$ parametrelendirilmiş bir eğri olsun. $t_0 \in I$ noktasında $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ ise γ ya t_0 noktasında bir *geodezik eğri* denir. $\forall t \in I$ için γ , t de bir geodezik ise bu eğriye *geodezik eğri* denir. Başka bir deyişle eğrinin teğet vektör alanı paralel ise eğriye geodeziktir denir. Eğer $[a, b] \subset I$ ve $\gamma: I \rightarrow M$ bir geodezik ise γ nın $[a, b]$ ye kısıtlanmasına $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye bir *geodezik parçası* denir [2].

$\gamma: I \rightarrow M$ bir geodezik ise

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle &= 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

dır. Bu ise $\frac{d\gamma}{dt}$ tanjant vektörünün yay uzunluğunun sabit olduğunu gösterir.

Kabul edelimki $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$ olsun. γ nın ℓ yay uzunluğu

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0)$$

ile ifade edilir. $c = 1$ ise γ geodeziğine *normalleştirilmiş geodezik* denir [2].

Şimdi bir (U, x) koordinat komşuluğu sisteminde bir γ geodeziği tarafından sağlanan lokal eşitlikleri ifade edelim.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre U da bir γ eğrisi

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

bir geodeziktir \Leftrightarrow

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

veya

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.2.9)$$

dır [2].

Teorem 1.2.2. [Geodeziklerin Varlık ve Teklik Teoremi]

M , üzerinde bir konneksiyon tanımlı olan bir manifold olsun. $\forall p \in M, \forall v \in T_p(M)$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ için $I \subset \mathbb{R}$ t_0 noktasını içeren bir açık aralık olsun. Bu takdirde $\gamma(t_0) = p$ ve $\gamma'(0) = v$ şartlarını sağlayan bir tek $\gamma: I \rightarrow M$ geodeziği vardır [2].

İspat. p nin U komşuluğunda bir (x_i) koordinat sistemi seçilsin. (1.2.9) eşitliğinden $\gamma: I \rightarrow U$ eğrisi bir geodeziktir \Leftrightarrow

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

dır. Bu $x_i(t)$ fonksiyonları için ikinci dereceden bir diferensiyel denklemdir.

Adi diferensiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden t noktasını içeren I açık aralığı üzerinde tanımlı bir tek $\gamma: I \rightarrow M$ maksimal geodeziği vardır ve γ tektir. \square

Örnek 1.2.1. $M = \mathbb{R}^n$ olsun. \mathbb{R}^n nin geodezikleri doğrulardır. $M = S^n \subset \mathbb{R}^n$, n -boyutlu birim küre olsun. S^n nin geodezikleri başlangıç noktası ve hızı belli olan çember yaylarıdır [2].

Tanım 1.2.8. Bir geodeziğin tanım kümesi genişletilemiyorsa bu geodeziğe *maksimal geodezik* denir [2].

Tanım 1.2.9. M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin bir geodeziği \mathbb{R} nin tümünde tanımlı ise bu manifolda *tam Riemann manifoldu* adı verilir. Bu durumda geodezik maksimaldir [2].

Tanım 1.2.10. $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ bir eğri ve $[a, b]$ nin $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ parçalanışı verilsin. $i = 0, \dots, k - 1$ için $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ kısıtlanmış dönüşümü diferensiyellenebilir ise α eğrisine *parçalı diferensiyellenebilir eğri* denir [2].

Burada $\alpha(t_i)$ noktaların herbirine α eğrisinin *köşeleri* ve $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t)$ ile şekillenen açığa $\alpha(t_i)$ noktasındaki *köşe açısı* denir [2].

Tanım 1.2.11. A, \mathbb{R}^2 de bağlantılı bir küme, U açık olmak üzere $U \subset A \subset \bar{U}$ olsun. Ayrıca A nın ∂A sınırı, köşe açıları π den farklı olan parçalı diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümüne *parametrelendirilmiş yüzey* denir [2]. Burada A nın ∂A sınırının köşe açılarının π den farklı olmasının nedeni f nin verilen bir genişlemeye bağlı olmaksızın, diferensiyellenebilir olmasını sağlar.

$(u, v), \mathbb{R}^2$ nin kartezyen koordinatları olsun. v_0 sabit seçilirse $u \rightarrow f(u, v_0)$ dönüşümü M de bir eğri ve $\frac{\partial f}{\partial u}$ ise bu eğri üzerinde bir vektör alanıdır. Benzer şekilde u_0 sabit seçilirse $v \rightarrow f(u_0, v)$ dönüşümü M de bir eğri ve $\frac{\partial f}{\partial v}$ ise bu eğri üzerinde bir vektör alanıdır. Böylece $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \forall (u, v) \in A$ için tanımlı ve f üzerinde birer vektör alanlarıdır.

$V, f : A \rightarrow M$ parametrelendirilmiş yüzeyinde bir vektör alanı ise v_0 sabit olmak üzere $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0), u \rightarrow f(u, v_0)$ eğrisi boyunca V vektör alanının kovaryant türevidir. Benzer şekilde u_0 sabit olmak üzere $\frac{DV}{\partial v}(u_0, v), u \rightarrow f(u_0, v)$ eğrisi boyunca V vektör alanının kovaryant türevidir. Böylece $\forall (u, v) \in A$ için $\frac{DV}{\partial u}$ ve $\frac{DV}{\partial v}$ tanımlıdır.

Lemma 1.2.1. M diferensiyellenebilir bir manifold ve $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ parametrelendirilmiş yüzey olsun. Bu takdirde

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$$

dır [2].

İspat. $x : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ $f(A)$ da bir koordinat sistemi olsun. $\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{D}{\partial v} \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial u} \nabla_{\Sigma_j(\frac{\partial x^i}{\partial v})} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

dır. Konneksiyonun simetrikliğinden $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ dır. Benzer şekilde $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$ hesap edilecek olursa üstteki ile aynı ifade elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır. \square

Tanım 1.2.12. [*Üstel dönüşüm*]

$v \in T_p(M)$, $v \neq 0$ için $\gamma(|v|, \frac{v}{|v|}) = \gamma(1, v)$ olsun.

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{ve} \quad \exp_p(0) = p$$

ile tanımlı dönüşüme *exponential dönüşüm* denir [2].

Önerme 1.2.3. $q \in M$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q(M) \rightarrow M$$

dönüşümü lokal diffeomorfizmadır [2].

İspat. $o = (0, \dots, 0)$ noktasında $d(\exp_q)_o$ hesaplanacak olursa

$$d(\exp_q)_o = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))|_{t=0} = v$$

dır. Böylece $d(\exp_q)_o, T_q(M)$ üzerinde tanımlı olup ters fonksiyon teoreminden \exp_q, o nun komşuluğunda bir lokal diffeomorfizmadır. \square

Lemma 1.2.2. [*Gauss Lemma.*]

$p \in M$ ve $0 \neq x \in T_p(M)$ için $\exp_p(x)$ tanımlı ve $v_x, w_x \in T_x(T_p(M)) \approx T_p(M)$ olsun. Bu takdirde

$$\langle (d \exp_p)(v_x), d(\exp_p)(w_x) \rangle = \langle v_x, w_x \rangle \quad (1.2.10)$$

dır [3].

İspat. $\tilde{f}(t, s) = t(v + sw)$ olacak şekilde $T_p(M)$ iki parametrelili \tilde{f} dönüşümü tanımlansın ve bu dönüşümün M deki exponential görüntüsü $f(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$ olsun. Bu takdirde $\tilde{f}_t(1, 0) = v_x$ ve $\tilde{f}_s(0, 1) = w_x$ dir. Böylece

$$f_t(1, 0) = d\exp_p(v_x), \quad f_s(1, 0) = d\exp_p(w_x)$$

dir. Burada $\langle f_t(1, 0), f_s(1, 0) \rangle = \langle v, w \rangle$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$t \rightarrow f(t, s)$ meridyen eğrisi hız vektörü $v + sw$ olan bir geodezik olduğundan $f_{tt} = 0$ ve $\langle f_t, f_t \rangle = \langle v + sw, v + sw \rangle$ dir. Lemma 1.2.1 den $f_{st} = f_{ts}$ dir. Bu nedenle

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f_t, f_s \rangle = \langle f_t, f_{st} \rangle = \langle f_t, f_{ts} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle f_t, f_t \rangle$$

dir. Yukarıda elde edilen eşitlik $\forall t$ için

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle f_t, f_s \rangle \right) (t, 0) = \langle v, w \rangle$$

olduğunu gösterir. $\forall s$ için $f(0, s) = \exp_p(0) = p$ olduğundan $\langle f_t, f_s \rangle(0, 0) = 0$ dir. Böylece $\langle f_t, f_s \rangle(t, 0) = t \langle v, w \rangle$ dir. Burada $t = 1$ yazılarak ispat tamamlanır. \square

Tanım 1.2.13. Eğer \exp_p dönüşümü $T_p(M)$ de orijinin bir V komşuluğunda bir diffeomorfizm ise $\exp_p V = U$ kümesine p nin *normal komşuluğu* denir [2]. $\overline{B_\epsilon}(0) \subset V$ olmak üzere $\exp_p B_\epsilon(0) = B_\epsilon(p)$ yuvarına p merkezli ϵ yarıçaplı *normal yuvar* veya *geodezik yuvar* denir [2].

2. EĞRİLİK

2.1 Riemann eğriliği

Tanım 2.1.1. M bir Riemann manifoldu olsun. ∇ , M nin Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M)$$

olacak şekilde tanımlanan $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M Riemann manifoldunun *Riemann eğrilik operatörü* denir [2].

Burada $p \in M$ noktasında bir $\{x_i\}$ koordinat sistemi için $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ olduğundan

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

olarak ifade edilir.

Önerme 2.1.1. *Bir Riemann manifoldunun R eğriliği aşağıdaki şartlara sahiptir.*

(i) $R, \chi(M) \times \chi(M)$ de bilineerdir.

Yani $f, g \in D(M)$ ve $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

dir.

(ii) Herbir $X, Y \in \chi(M)$ için, $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ eğrilik operatörü lineerdir öyleki

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z, \quad f \in D(M), \quad Z, W \in \chi(M)$$

dir [2].

Önerme 2.1.2. [1. Bianchi Özdeşliği]

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

dir [2].

İspat. Riemann konneksiyonunun simetrik oluşundan

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
&+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_Y [X,Z] + \nabla_Z [Y,X] + \nabla_X [Z,Y] - \nabla_{[X,Z]} Y - \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X \\
&= [Y, [X,Z]] + [Z, [Y,X]] + [X, [Z,Y]] = 0
\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlik vektör alanları için jakobi özdeşliğini gösterir. \square

Buradan sonraki kısımlarda $\langle R(X,Y)Z, T \rangle = (X,Y,Z,T)$ olarak gösterilecektir.

Önerme 2.1.3. M bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

- a) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$
- b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$
- c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$
- d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$

dir [2].

İspat. (a) 1. Bianchi özdeşliğinden açıktır.

(b) Tanım 2.1.1 den açıktır.

(c)

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,Z) &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z \rangle \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle \\
&= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,Z) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= -\frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle = 0,
\end{aligned}$$

dır. Bu ise (c) nin ispatını gösterir.

(d) 1.Bianchi özdeşliğinden

$$(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0,$$

$$(Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) = 0,$$

$$(Z, T, X, Y) + (T, X, Z, Y) + (X, Z, T, Y) = 0,$$

$$(T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) = 0,$$

dır. Yukarıdaki eşitliklerden

$$2(Z, X, Y, T) + 2(T, Y, Z, X) = 0$$

ve

$$(Z, X, Y, T) = (Y, T, Z, X)$$

elde edilir. ispat tamamlanır. □

Eğer

$$X = \sum_i u^i X_i, \quad Y = \sum_j v^j X_j, \quad Z = \sum_k w^k X_k,$$

ise R nin lineerliğinden

$$R(X, Y)Z = \sum_{ijkl} R_{ijk}^\ell u^i v^j w^k X_\ell \quad (2.1.1)$$

dir.

Burada standart $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ bazı alınırsa

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_\ell R_{ijk}^\ell X_\ell.$$

yazılır. Burada (U, x) de R_{ijk}^ℓ , R eğriliğinin bileşenleridir.

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left(\sum_\ell \Gamma_{ik}^\ell X_\ell \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_\ell \Gamma_{jk}^\ell X_\ell \right) \end{aligned}$$

yazılırki bu direk bir hesaplamayla

$$R_{ijk}^s = \sum_{\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{j\ell}^s - \sum_{\ell} \Gamma_{jk}^{\ell} \Gamma_{i\ell}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \quad (2.1.2)$$

olarak elde edilir.

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_{\ell} R_{ijk}^{\ell} g_{\ell s} = R_{ijks}$$

yazılarak Önerme 2.1.3 deki eşitlikler

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jkis}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}$$

tekrar elde edilir.

2.2 Kesit eğriliği ve Ricci eğriliği

Tanım 2.2.1. M bir Riemann manifoldu olmak üzere lineer bağımsız X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem π olsun.

$$K(\pi) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = -\frac{(X, Y, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

eşitliğindeki $K(\pi)$ sayısına π kesitinin *kesit eğriliği* denir [6].

Lokal koordinatlarda $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$ ve $X = \sum_i u^i e_i$, $Y = \sum_j v^j e_j$ yazılırsa

$$K(\pi) = -\frac{\sum R_{ijkl} u^i v^j u^k v^{\ell}}{\sum (g_{ik} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk}) u^i v^j u^k v^{\ell}}$$

dır.

Ayrıca X ve Y vektörleri ortonormal ise π kesitinin kesit eğriliği

$$K(\pi) = -\langle R(X, Y)X, Y \rangle = -(X, Y, X, Y)$$

dır.

Teorem 2.2.1. *M bir Riemann manifoldu olmak üzere lineer bağımsız X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem π olsun. Bu takdirde*

- i) $K(X, Y) = K(Y, X)$
- ii) $K(X, Y) = K(rX, sY)$, $r \neq 0, s \neq 0, r, s \in \mathbb{R}$
- iii) $K(X, Y) = K(X + tY, Y)$
- iv) $K(X, Y) = K(aX + bY, cX + dY)$, $ad - bc \neq 0$

dır [1].

İspat. i) Önerme 2.1.3 ün (b) ve (c) şikkından

$$\begin{aligned}
 K(X, Y) &= -\frac{(X, Y, X, Y)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2} \\
 &= \frac{(Y, X, X, Y)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2} \\
 &= -\frac{(Y, X, Y, X)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2} \\
 &= K(Y, X)
 \end{aligned}$$

dır.

ii)

$$\begin{aligned}
 K(rX, sY) &= -\frac{(rX, sY, rX, sY)}{\langle rX, rX \rangle \langle sY, sY \rangle - \langle rX, sY \rangle^2} \\
 &= -\frac{r \langle X, R(sY, rX,)sY \rangle}{r^2 s^2 \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
 &= -\frac{r \langle X, \nabla_{rX} \nabla_{sY} sY - \nabla_{sY} \nabla_{rX} sY - \nabla_{[rX, sY]} sY \rangle}{r^2 s^2 \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
 \nabla_{rX} \nabla_{sY} sY &= \nabla_{rX} s \nabla_Y sY \\
 &= \nabla_{rX} s^2 \nabla_Y Y \\
 &= rs^2 \nabla_X \nabla_Y Y
 \end{aligned}$$

olduğundan $K(rX, sY) = K(X, Y)$ dır.

(iii) ve (iv) şıklarının ispatı da benzer şekilde yapılabilir. Yalnız (iv) şıkında $ad - bc \neq 0$ alınmasının gereğini ifade edelim.

$$X' = aX + bY$$

$$Y' = cX + dY$$

dönüşümü ile π nin $\{X, Y\}$ bazından $\{X', Y'\}$ bazına geçebilmek için $ad - bc \neq 0$ alınmalıdır. Aksi halde $\{X', Y'\}$ baz olamaz. \square

Sonuç 2.2.1. $X, Y \in T_p(M)$ ve $\{X, Y\}$ lineer bağımsız olsun. $\{X, Y\}$ nin gerdiği düzlem π olsun. Teorem 2.2.1 in (iv) şıkkı gereğince $K(\pi)$ kesit eğriliği X ve Y vektörlerinin seçiminden bağımsızdır. Daha açıkça; π düzlemini geren herhangi lineer bağımsız Z ve W vektörleri için

$$K(X, Y) = K(W, Z)$$

dır [7].

Şimdi kesit eğriliğinin Gauss eğriliği ilişkisini ifade edelim.

Teorem 2.2.2. M manifoldu \mathbb{R}^3 de bir yüzey olsun. $p \in M$ için $T_p(M)$ nin bir bazı $\{X_p, Y_p\}$ ve M nin p noktasındaki Gauss eğriliği $\bar{K}(p)$ ise

$$K(X, Y)|_p = \bar{K}(p)$$

dir [1].

İspat. $\{X, Y\}$ sistemine Gram-Schmidt metodu uygulanarak $\{W, Z\}$ ortonormal sistemi elde edelim. O zaman

$$W = \frac{1}{|X|}X$$

$$Z = \frac{Y - \langle Y, W \rangle W}{|Y - \langle Y, W \rangle W|}$$

dır. Teorem 2.2.1 ın (i) ve(iv) şıkları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
K(W,Z) &= K\left(\frac{1}{|X|}X, \frac{Y - \langle Y,W \rangle W}{|Y - \langle Y,W \rangle W|}\right) \\
&= K(X, Y - \langle Y,W \rangle W) \\
&= K\left(Y - \frac{\langle Y,X \rangle}{\langle X,X \rangle}X, X\right) \\
&= K(Y,X) \\
&= K(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bilindiği gibi $\{W,Z\}$ ortonormal olduğundan M yüzeyinin $\bar{K}(p)$ Gauss eğriliği

$$\bar{K}(p) = \langle R(W,Z)Z,W \rangle|_p$$

dir. Buna göre

$$K(W,Z)|_p = \frac{\bar{K}(p)}{\langle W,W \rangle \langle Z,Z \rangle - \langle W,Z \rangle^2}$$

olur. Bu ise

$$K(W,Z)|_p = \bar{K}(p)$$

demektir. □

Diğer taraftan önemli bir nokta da $K(X,Y)$ nin paydasındaki ifade olan

$$\langle X,X \rangle \langle Y,Y \rangle - \langle X,Y \rangle^2$$

nin geometrik anlamıdır. M bir Riemann manifoldu ise bu ifadenin değeri X ve Y vektörleri üzerinde kurulan paralelkenarın alanının karesine karşılık gelmektedir.

Teorem 2.2.3. *Eğer $\text{boy}M \geq 3$ ve $T_p(M)$ nin tüm kesitlerinde kesit eğriliği tanımlı ise bu durumda Riemann eğrilik tensörü p noktasında tek türlü tanımlıdır [6].*

İspat. R ve \tilde{R} , Önerme 2.1.3 ü sağlayan iki eğrilik tensör alanı ve $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için $(X,Y,Z,W) - (X,Y,Z,W)' = A(X,Y,Z,W)$ olsun. A tensörü simetri özelliğini sağlayacağından $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $(X,Y,X,Y) = (X,Y,X,Y)'$ veya $A(X,Y,X,Y) = 0$ dir. Burada X yerine $X+Y$ yazılırsa

$$0 = A(X+Y,Z,X+Y,Z) = A(X,Z,Y,Z) + A(Y,Z,X,Z)$$

dır. Önerme 2.1.3 in (d) şikkından $A(X, Z, Y, Z) = A(Y, Z, X, Z)$ olup $A(X, Z, Y, Z) = 0$ dır. Z yerine $Z + W$ yazılırsa

$$0 = A(X, Z + W, Y, Z + W) = A(X, Z, Y, W) + A(X, W, Y, Z)$$

olup sırasıyla Önerme 2.1.3 ün (d) ve (b) şikkı kullanılarak

$$0 = A(Y, W, X, Z) + A(X, W, Y, Z) = A(Y, W, X, Z) - A(W, X, Y, Z)$$

dır. Sırasıyla Y, W, X, Z vektörleri yerine X, Y, Z, W yazılırsa

$$A(X, Y, Z, W) = A(Y, Z, X, W)$$

elde edilir. Bu ise X, Y, Z nin dairesel permutasyonunun A nın değerini değiştirmeyeceğini gösterir. Önerme 2.1.3 ün (a) şikkından $3A(X, Y, Z, W) = 0$ olup $A(X, Y, Z, W) = 0$ dır. Böylece $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için $A = 0$ dır. \square

Teorem 2.2.4. M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $\forall X, Y, Z, W \in T_p(M)$ için

$$\langle R'(X, Y)W, Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

ile $R' : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ 3-lineer dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde M , K_0 sabit kesit eğrilikliğine sahiptir. $\Leftrightarrow M$ nin eğrilik tensör alanı R olmak üzere $R = K_0 R'$ dir [2].

İspat. $:\Rightarrow \forall \sigma \subset T_p(M)$ için $K(p, \sigma) = K_0$ ve $\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, Y, W, Z \rangle'$ olduğunu kabul edelim. R' Önerme 2.1.3 deki (a),(b), (c),(d) şartlarını sağlar. Kabulümüzden

$$\langle X, Y, X, Y \rangle' = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$$

olup $\forall X, Y \in T_p(M)$ vektör çifti için

$$\langle X, Y, X, Y \rangle = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 \langle X, Y, X, Y \rangle'$$

elde edilir. Bu ise $\forall X, Y, W, Z \in T_p(M)$ için

$$\langle X, Y, W, Z \rangle = K_0 \langle X, Y, W, Z \rangle'$$

olur. Böylece $R = K_0 R'$ dır.

$:\Leftarrow$ ispatı Tanım 2.2.1 den açıktır. \square

Sonuç 2.2.2. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu $p \in M$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p(M)$ nin ortonormal bazı olsun. $i, j, k, \ell = (1, \dots, n)$ için $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_\ell \rangle$ ile tanımlansın. Bu takdirde $\forall \sigma \subset T_p(M)$ için $K(p, \sigma) = K_0 \Leftrightarrow R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk})$ dır. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j, \\ 0 & , \quad i \neq j, \end{cases}$$

dır. [2].

Tanım 2.2.2. M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M , bir $p \in M$ noktasının her kesitinde aynı K_p sabit eğriliğine sahipse M manifolduna p noktasında *izotropiktir* denir. Eğer M , $\forall p \in M$ noktasında izotropik ise M manifolduna *izotropik Riemann manifoldu* denir [6].

Tanım 2.2.3. M izotropik Riemann manifoldunun $\forall p \in M$ noktasında K_p kesit eğriliği aynı ise bu manifolda *sabit eğrilikli manifold* denir [6].

Tanım 2.2.4. [Ricci eğriliği] M bir Riemann manifoldu $p \in M$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, p noktasının bir ortonormal bazı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n (e_i, X, Y, e_i) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

ile tanımlı 2 indisli S tensör alanına M Riemann manifoldunun *Ricci eğrilik tensör alanı* ve $S(X, Y)$ ye ise M manifoldunun *Ricci eğriliği* denir [6]. Burada $S(X, Y)$ Ricci eğriliği $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

M bir Riemann manifoldu $p \in M$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, p noktasının bir ortonormal bazı olsun. Herhangi bir $v \in T_p(M)$ için $v = e_1$ olsun. Bu takdirde Ricci eğriliği

$$S(v, v) = \sum_{i=1}^n (e_i, e_1, e_1, e_i)$$

dır. Bu ise herhangi birim vektör $v \in T_p(M)$ olmak üzere $S(v, v)$ Ricci eğriliğinin, v ye ortonormal bazın diğer elemanları tarafından gerilmiş düzlemlerin kesit eğriliklerinin toplamı olduğunu gösterir [7].

Tanım 2.2.5. M üzerinde Γ fonksiyonu

$$\Gamma(p) = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{j=1}^n S(e_j, e_j)$$

ye M nin skaler eğriliği denir [6]. Ayrıca skaler eğrilik, Ricci eğrilik tensörünün izi olarak da tanımlanabilir.

M bir Riemann manifoldu $p \in M$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, p noktasının bir ortonormal bazı olsun. e_i ve e_j tarafından gerilmiş düzlemin kesit eğriliği $K(e_i, e_j)$ olmak üzere

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n S(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j, e_j, e_i) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j)$$

dır. Bu ise skaler eğriliğin, ortonormal baz çiftleri tarafından gerilen tüm düzlemlerin kesit eğriliklerinin toplamı olduğunu gösterir [7].

Tanım 2.2.6. Eğer $S(X, Y) = c\langle X, Y \rangle$ olacak şekilde sabit bir $c \in R$ varsa M manifolduna *Einstein Manifoldu* denir [6].

Einstein manifoldları sabit Ricci eğrilikli manifoldlardır. Sabit kesit eğrilikli manifoldlar Einstein manifoldları için örnektir. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Bi-invariant metriği ile kompakt G Lie grubu kümesi bir Einstein manifoldudur ama sabit kesit eğrilikli bir manifold değildir. Bu örneği ifade edebilmek için öncelikle bu küme üzerinde konneksiyon ve eğriliğin nasıl tanımlı olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.5. X ve Y , bi-invariant metriği ile G Lie grubu üzerinde sol invariant vektör alanları ve ∇ , G de afin konneksiyon olsun. Bu takdirde

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

dır.

İspat. Z , G de sol invaryant vektör alanı olsun. $g(t)$, $g(0) = e$ ve $\dot{g}(0) = Z_e$ olacak şekilde G de bir parametrelili grup ise $\forall Y$ vektör alanı için $\nabla_{Z_e} Y = \left(\frac{DY_{g(t)}}{dt} \right) |_{t_0}$ dır. Ayrıca $Z_{g(t)} = \frac{dg}{dt}$ ve Bi-invariant metriği ile G grupları kümesi tam olduğundan $g(t)$ bir geodeziktir. Bu

nedenle $\frac{DZ_{g(t)}}{dt} = \frac{D}{dt}(\frac{dg}{dt}) = 0$ ve $\nabla_{Z_e}Z = 0$ dir. Z sol invariant vektör alanı olduğundan $\nabla_ZZ = 0$ dir. Bu nedenle $\nabla_{X+Y}(X+Y) = 0$ olup

$$\nabla_XY + \nabla_YX = 0 \quad (2.2.1)$$

dir. Ayrıca

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y] \quad (2.2.2)$$

olduğundan (2.2.1) ve (2.2.2) beraber düşünülürse iddia ispatlanır. \square

Teorem 2.2.6. G , Bi-invariant metriği ile kompakt Lie grubu olsun. π , G nin bir kesiti ve $X, Y \in G$ de sol invariant vektörler olmak üzere

$$K(\pi) = -(X, Y, X, Y) = +\frac{1}{4} [[X, Y], [X, Y]]$$

dir. $X, Y, Z \in G$ de sol invariant vektör alanları olmak üzere eğrilik tensör alanı

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4} [[X, Y], Z]$$

dir [6].

İspat. Bi-invariant metriği ile G de konneksiyon $\nabla_XY = \frac{1}{2}[X, Y]$ dir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) &= \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]] \\ &= -\frac{1}{4}[X, [Y, Z]] \end{aligned}$$

dir. $\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle$ olduğundan

$$K(\pi) = -(X, Y, X, Y) = \frac{1}{4} \langle [[X, Y], X] Y \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle$$

dir. \square

Sonuç 2.2.3. G , bi-invaryant metriği ile kompakt Lie grubu ve X, Y, Z vektör alanları G de sol invaryant olsun. Bu takdirde $S(X, Y)$ Ricci tensör alanı

$$S(X, Y) = -\frac{1}{4}tr(adX)(adY)Z$$

ile tanımlıdır [6].

İspat. Teorem 2.2.6 kullanılarak G de

$$R(Z, Y)X = -\frac{1}{4}tr(adX)(adY)Z$$

dir. $\{E_1, \dots, E_n\}$ G de ortonormal baz olmak üzere

$$\langle adX.E_i, E_j \rangle = \langle [X, E_i], E_j \rangle = -\langle E_j, [X, E_i] \rangle = -\langle E_j, adX.E_i \rangle$$

olur. (a_{ij}) , adX in matrisi olarak alınırsa bu matris ters simetrik olduğundan

$$tr adX adX = -\sum_{i,j} a_{ij}^2$$

dir. Bu nedenle $4S(X, Y) = -tr adX adX = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ elde edilir. Bu ise Ricci eğriliğinin sabit olduğunu gösterir. Böylece bi-invaryant metriği ile kompakt Lie grubu kümesi bir Einstein manifoldudur. Sabit eğrilikli uzayların her kesitinin eğriliği aynı olan sabit bir değer olması gerektiğinden bu küme sabit eğrilikli değildir. \square

2.3 Jakobi Alanı

Lemma 2.3.1. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ parametrelendirilmiş bir yüzey, (s, t) , \mathbb{R}^2 nin alışılmış koordinatları olsun. $V = V(s, t)$, f boyunca vektör alanı olsun. $\forall (s, t)$ için $R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})V$ tanımlı olup

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})V$$

dir [2].

İspat. $p \in M$ noktasında (U, x) koordinat sistemini seçelim. $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $v^i = v^i(s, t)$ olmak üzere $V = \sum_i v^i X_i$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{D}{ds} V = \frac{D}{ds} \left(\sum_i v^i X_i \right) = \sum_i v^i \frac{D}{ds} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} X_i,$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{ds} V \right) &= \sum_i v^i \frac{D}{\partial t} \frac{D}{ds} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{D}{ds} X_i \\ &+ \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} X_i \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle yukarıdaki ifadede s ve t nin rolleri değiştirilirse

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = \sum_i v^i \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i \right)$$

elde edilir. Şimdi $\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i$ ifadesini hesaplayalım.

$$f(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_n(s, t))$$

alınırsa $\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j$ ve $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t} X_k$ dir.

$$\frac{D}{\partial s} X_i = \nabla_{\sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial s} \right) X_j} (X_i) = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i &= \frac{D}{\partial t} \left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) X_k} (\nabla_{X_j} X_i) \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_{j,k} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i, \end{aligned}$$

veya

$$\left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \right) X_i = \sum_{j,k} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} (\nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_i)$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \right) V &= \sum_{ijk} v^i \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} R(X_j, X_k) X_i \\ &= R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Şimdi Jakobi eşitliğini ifade edelim. M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. \exp_p dönüşümü $v \in T_p(M)$ de tanımlı ve $w \in T_v(T_p(M))$ ise Gauss Lemmasının ispatından

$$d(\exp_p)_v w = \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0)$$

dır. Burada f fonksiyonu

$$f(t, s) = \exp_p t v(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir parametrik yüzey ve $v(s)$, $v(0) = v$, $v'(0) = w$ olacak şekilde $T_p(M)$ de bir eğridir.

γ bir geodezik olduğundan her bir (t, s) için $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ dir. Bu nedenle lemma 2.3.1 den

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

dir. $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J(t)$ yazılarak

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \quad (2.3.1)$$

elde edilir. Bu eşitliğe *Jakobi eşitliği* denir [2].

Tanım 2.3.1. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$, M üzerinde bir geodezik olsun. γ boyunca bir J vektör alanı $\forall t \in [0, a]$ için (2.3.1) ile verilen jakobi eşitliğini sağlıyorsa *Jakobi alanı* olarak isimlendirilir [2].

Bir jakobi alanı $J(0) = 0$, $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ başlangıç şartlarını sağlar. $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ γ üzerinde bir ortonormal vektör alanı olmak üzere

$$J(t) = \sum_i f_i(t) e_i(t), \quad a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t) \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t) e_i(t)$$

ve

$$\begin{aligned} R(\gamma', J)\gamma' &= \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{ij} f_i \langle R(\gamma', e_i), e_j \rangle e_j = \sum_{ij} f_i a_{ij} e_j. \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle (2.3.1) eşitliği

$$f_j'' + \sum_i a_{ij}(t) f_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

ikinci dereceden diferensiyel denklem sistemine denktir. Burada $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$ başlangıç şartları ile verilen $[0, a]$ da tanımlı ikinci dereceden diferensiyel denklem sisteminin bir C^∞ çözümü vardır.

Örnek 2.3.1. [*Sabit eğrilikli manifoldlar üzerinde Jakobi alanları*]

M sabit K kesit eğrilikli bir Riemann manifoldu ve $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$ e normalleştirilmiş geodezik olsun. J , γ üzerinde bir Jakobi alanı olsun. $|\gamma'| = 1$ olduğundan ve Teorem 2.2.4 kullanılarak

$$R(\gamma', J)\gamma' = KJ$$

elde edilir. Gerçektende γ boyunca tüm T vektör alanları için

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle &= K \{ \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle \} \\ &= K \langle J, T \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Jakobi eşitliği (2.3.1) eşitliğinde yazılırsa

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0 \tag{2.3.2}$$

dır.

Şimdi $w(t)$, γ boyunca $|w(t)| = 1$ ve $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$ ile verilen bir paralel vektör alanı olsun.

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & K > 0 \text{ ise} \\ tw(t), & K = 0 \text{ ise} \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & K < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$J(0) = 0$, $J'(0) = w$ başlangıç şartları ile verilir ve (2.3.2) eşitliğinin çözümüdür [2].

Öncede ifade edildiği gibi $p \in M$, $v \in T_p(M)$ ve $w \in T_v(T_p(M))$ için $\gamma(t) = \exp_p tv$ ile verilen $\gamma: I \rightarrow M$ geodeziği üzerinde bir jakobi alanı kurgulanabilir. Bunun için $v(s)$, $v(0) = v$ ve $v'(0) = w$ olacak şekilde $T_p(M)$ de bir eğri, f fonksiyonu $f(t, s) = \exp_p tv(s)$ ile tanımlı bir parametrelendirilmiş yüzey ve $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ alınsın. Burada dikkat edilecek olursa $J(0) = 0$ dır. Şimdi $\gamma(t)$ üzerinde jakobi alanının tekliği aşağıdaki önerme ile ifade edilir.

Önerme 2.3.1. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ bir geodezik ve J , $J(0) = 0$ ile γ üzerinde bir jakobi alanı olsun. $w \in T_{\gamma(0)}(M)$ için $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ ve $\gamma'(0) = v$ yazılsın ve $v(s)$, $v(0) = av$, $v'(0) = w$ ile $T_{\gamma(0)}(M)$ üzerinde bir eğri olsun. Üstelik $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{a}v(s))$, $p = v(0)$ yazılsın ve $\tilde{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ ile bir \tilde{J} jakobi alanı tanımlansın. Bu takdirde $[0, a]$ da $\tilde{J} = J$ dır [2].

İspat. $s = 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{dt} ((d\exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{dt} (t(d\exp_p)_{tv}(w)) \\ &= (d\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{dt} ((d\exp_p)_{tv}(w)) \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle $t = 0$ için

$$\frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = (d\exp_p)_o(w) = w$$

dır. $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ ve $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = w$ olduğundan ve geodeziklerin varlık ve teklik teoreminden $J = \tilde{J}$ dır. \square

Sonuç 2.3.1. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ M de bir geodezik olsun. Bu takdirde $J(0) = 0$ ile γ üzerinde bir jakobi alanı

$$J(t) = (d\exp_p)_{r\gamma'(0)}(tJ'(0)) \quad , t \in [0, a]$$

dır. [2].

2.4 Simetrik Riemann Manifolları

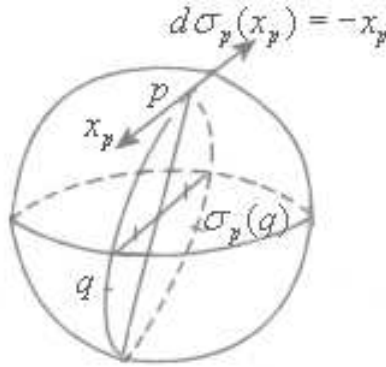
Tanım 2.4.1. M bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için

i) σ_p^2 birim dönüşüm (Bu özelliğe involutive özellik denir.)

ii) σ_p izole edilmiş sabit bir p noktasına sahiptir. Yani, p nin bir U komşuluğu vardır ki p , sadece σ_p nin sabit noktasıdır.

şartlarını sağlayan $\sigma_p : M \rightarrow M$ izometrisi varsa M manifolduna *Simetrik Riemann Manifoldu* denir [6]. Ayrıca p noktasına *izole edilmiş sabit nokta* denir [6].

Örnek 2.4.1. Yansıma dönüşümüyle Öklidyen uzay ve R^{n+1} üzerinde indirgenmiş metriği ile S^n küresi simetrik Riemann manifoldlarının örnekleri olarak gösterilebilir. Burada küre için σ_p , antipodal dönüşümüdür. Yani her bir $q \in S^n$ için p noktası boyunca bir geodezik (büyük çemberler) üzerinden q noktasına eşit uzaklıkta olan $q' \in S^n$ olmak üzere $\sigma_p(q) = q'$ ile tanımlıdır.



Şekil 2.4.1

Burada $\sigma_p(p) = p$ ve $\sigma_p(p^*) = p^*$ olup p^* , p nin antipodal noktasıdır. Bu nedenle σ_p , p den farklı bir noktada da sabit olabilir [6]

Sonuç 2.4.1. E^n Öklidyen uzayı örneği kompakt olmayan ve S^n küresi örneği kompakt olan birer simetrik Riemann manifoldları örnekleridir. Yani M simetrik bir Riemann manifoldu ise kompakt olması gerekli değildir [6].

Lemma 2.4.1. M bir Riemann manifoldu, σ_p , izole edilmiş bir sabit p noktasına sahip bir involutive izometri olsun. Bu takdirde $\forall x_p \in T_p(M)$ için $d\sigma_p(x_p) = -x_p$ ve $\sigma_p(\exp x_p) = \exp(-x_p)$ dir [6].

Teorem 2.4.1. Herbir kompakt, bağlantılı G Lie grubu bi-invaryant metriği ile bir simetrik uzaydır [6].

İspat. $\varphi : G \rightarrow G$ dönüşümü $\varphi(x) = x^{-1}$ olacak şekilde G nin her elemanını tersine dönüştüren bir diffeomorfizma olsun. Bu dönüşüm açıkça involutive özelliğini sağlar. Bu dönüşümün G de bir izole edilmiş sabit noktaya sahip izometri olduğu şöyle gösterilir. $g \in G$ olmak üzere $\dot{g}(0) = x_e$ olacak şekilde bir parametrelili $t \rightarrow g(t)$ alt grubuna tekabül eden $\forall X_e \in T_e(G)$ için $\varphi(g(t)) = g(-t)$ olduğundan zincir kuralıyla

$$d\varphi(x_e) = d\varphi(\dot{g}(0)) = \left(\frac{d}{dt} \varphi(g(t)) \right)_{t=0} = -\dot{g}(0) = -x_e$$

dir. Böylece $d\varphi_e = -I$, $T_e(G)$ üzerinde iç çarpımın (veya izometrinin) bir ortogonal lineer dönüşümüdür. $a \in G$ sabit ve $g \in G$ için L_a ve R_a sırasıyla sol öteleme ve sağ öteleme olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x) = x^{-1} = (a^{-1}x)^{-1}a^{-1} = R_{a^{-1}} \circ \varphi \circ L_{a^{-1}}(x)$$

yazılabilir. Böylece $d\varphi_a = (dR_{a^{-1}})_e \circ d\varphi_e \circ (dL_{a^{-1}})_a$ bi-invaryant metriği ile indirgenen iç çarpım izometrisinin üç lineer dönüşümü olan $d\varphi_a : T_a(G) \rightarrow T_{a^{-1}}(G)$ dönüşümü tanımlanabilir. Bu ise $\varphi : G \rightarrow G$ dönüşümünün bir izometri olduğunu gösterir. \square

Şimdi simetrik bir Riemann manifoldu üzerinde paralel ötelemeyi ifade edelim. M simetrik bir Riemann manifoldu ve $\gamma(t)$, $(-\infty < t < \infty)$ M de bir geodezik olsun. $\sigma_{\gamma(t)}$ izometrisi, γ geodeziğinin her bir noktasını yine bu geodeziğin bir noktasına dönüştürsün. p sabit bir sayı olmak üzere τ_p , $\tau_p = \sigma_{\gamma(p)} \circ \sigma_{\gamma(p/2)}$ olacak şekilde herhangi iki $\sigma_{\gamma(p)}$ ve $\sigma_{\gamma(p/2)}$ izometrilere bileşkesi olarak yazılabilir. τ_p , γ geodeziğinin herhangi bir noktasını yine aynı geodeziğin bir noktasına taşıdığından ve böylece geodeziği koruduğundan $\tau_p(\gamma(t)) = \gamma(t+p)$ olarak yazılabilir. Gerçektende $\tau_p(\gamma(0)) = \sigma_{\gamma(p)} \circ \sigma_{\gamma(p/2)}(\gamma(0)) = \sigma_{\gamma(p)}(\gamma(p)) = \gamma(p)$ olduğundan $\tau_p(\gamma(t)) = \gamma(t+p)$ dir.

Teorem 2.4.2. $\gamma(t)$, $(-\infty < t < \infty)$ M simetrik Riemann manifoldunu üzerinde bir geodezik ve σ_p , herbir p reel sayısı için σ_p , izole edilmiş bir sabit p noktasına sahip bir involutive izometri olsun. Bu takdirde $\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(t + p)$ dir. $X_{\gamma(0)}$, $T_{\gamma(0)}(M)$ nin bir elemanı ise $X_{\gamma(t)} = d\sigma_t X_{\gamma(0)}$, $\gamma(t)$ eğrisi üzerinde paralel vektör alanıdır. Yani $d\sigma_t : T_{\gamma(0)}(M) \rightarrow T_{\gamma(t)}(M)$ paralel ötelemedir [6].

2.5 Eğrilik Formları ve Yapı Denklemleri

M , n -boyutlu bir manifold ve ∇ , M üzerinde bir konneksiyon olsun. M de bir koordinat komşuluğu (U, φ) ve U üzerinde C^∞ vektör alanlarının bir bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. U üzerinde $\{e_1, \dots, e_n\}$ bazının duali olan $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ e 1-form denir [1]. Açıkça $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ bazı C^∞ sınıfındadır.

U üzerinde

$$\theta_j^i : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_U^*(p)$$

$$X \rightarrow \theta_j^i(X) = \theta_j^i(X) = \theta(\nabla_X e_j) = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^k \theta^k$$

şeklinde tanımlanan θ_j^i fonksiyonuna n^2 1-form veya konneksiyon formu denir [1].

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bazı ile verilen torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü

$$Tor(X, Y) = \sum_{i=1}^n T_i(X, Y) e_i, T(e_i, e_j) = T_{ij}^k e_k$$

$$R(X, Y) e_j = \sum_{i=1}^n R_{ij}(X, Y) e_i, R(e_i, e_j) e_\ell = R_{ij}^k e_k$$

olarak ifade edilebilir. Şimdi torsiyon tensörü ve eğrilik tensörünü kullanarak $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 1- formlar cinsinden I.Cartan yapı denklemleri ve II.Cartan yapı denklemleri olarak

isimlendirilen eşitlikleri ifade edeceğiz.

$$\begin{aligned}
T_i(X, Y) &= \langle T(X, Y), e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], e_i \rangle \\
&= \nabla_X \left(\sum_{j=1}^n \theta^j(Y) e_j \right) - \nabla_Y \left(\sum_{j=1}^n \theta^j(X) e_j \right) - \sum_{j=1}^n \theta^j([X, Y]) e_j, e_i \rangle \\
&= \langle \{X[\theta^j(Y)] - Y[\theta^j(X)] - \theta^j([X, Y])\} e_j, e_i \rangle \\
&\quad + \langle \sum_{j=1}^n \{\theta^j(Y) \nabla_X e_j - \theta_j(X) \nabla_Y e_j\}, e_i \rangle \\
&= X[\theta^i(Y)] - Y[\theta^i(X)] - \theta^i([X, Y]) \\
&\quad + \langle \sum_{j=1}^n \{\theta^j(Y) \sum_{k=1}^n \theta_k^j(X) e_k - \theta^k(X) \sum_{k=1}^n \theta_k^j(Y) e_k\}, e_i \rangle \\
&= X[\theta^i(Y)] - Y[\theta^i(X)] - \theta^i[X, Y] \\
&\quad + \langle \sum_{k,j=1}^n \{\theta^j(Y) \theta_k^j(X) - \theta^j(X) \theta_k^j(Y)\} e_k, e_i \rangle \\
&= X[\theta^i(Y)] - Y[\theta^i(X)] - \theta^i([X, Y]) + \sum_{j=1}^n \{\theta^j(Y) \theta_i^j(X) - \theta^j(X) \theta_i^j(Y)\}
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$T_i(X, Y) - \sum_{j=1}^n (\theta_i^j \wedge \theta^j)(X, Y) = X[\theta^i(Y)] - Y[\theta^i(X)] - \theta^i[X, Y] = dw_i(X, Y)$$

yazılabilir. Buradan da

$$d\theta^i = - \sum_{j=1}^n \theta_i^j \wedge \theta^j + T_i \quad (2.5.1)$$

elde edilirki bu denkleme *1. Cartan yapı denklemi* denir [1].

Eğer ∇ konneksiyonu bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı ise bu konneksiyonun torsiyon tensör alanı sıfır olduğundan $T_i = 0$ olup 1. Cartan yapı denklemi

$$d\theta^i = - \sum_{j=1}^n \theta_i^j \wedge \theta^j \quad (2.5.2)$$

olarak ifade edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
R_{ij}(X, Y) &= \langle R(X, Y)e_j, e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_j - \nabla_Y \nabla_X e_j - \nabla_{[X, Y]} e_j, e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_X (\sum_{k=1}^n \theta_k^j(Y) e_k) \\
&\quad - \nabla_Y (\sum_{k=1}^n \theta_k^j(X) e_k) - \sum_{k=1}^n \theta_k^j([X, Y]) e_k, e_i \rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^n \{X[\theta_k^j(Y)] - Y[\theta_k^j(X)] - \theta_k^j[X, Y] e_k, e_i\} \\
&\quad + \langle \sum_{k=1}^n \{\theta_k^j(Y) \nabla_X e_k - \theta_k^j(X) \nabla(Y) e_k, e_i\} \\
&= X[\theta_i^j(Y)] - Y[\theta_i^j(X)] - \theta_i^j[X, Y] \\
&\quad + \langle \sum_{k=1}^n \{\theta_k^j(Y) \sum_{s=1}^n \theta_s^k(X) e_s - \theta_k^j(X) \sum_{s=1}^n \theta_s^k(Y) e_s\}, e_i \rangle \\
&= X[\theta_i^j(Y)] - Y[\theta_i^j(X)] - \theta_i^j[X, Y] \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \{\theta_k^j \theta_i^k(X) - \theta_k^j(X) \theta_i^k(Y)\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $d\theta_i^j(X, Y) = X[\theta_i^j(Y)] - Y[\theta_i^j(X)] - \theta_i^j[X, Y]$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\sum_k \{\theta_i^j \wedge \theta_k^j\}(X, Y) = \sum_k \{\theta_k^j \theta_i^k(X) - \theta_k^j(X) \theta_i^k(Y)\}$ olduğundan

$$d\theta_i^j = - \sum_{k=1}^n \theta_i^j \wedge \theta_k^j + R_{ij} \quad (2.5.3)$$

elde edilirki bu denkleme *II. Cartan yapı denklemi* denir [1].

Teorem 2.5.1. *M bir Riemann manifoldu ve U, M nin bir komşuluğu olsun. U komşuluğu üzerinde $\{e_1, \dots, e_n\}$ bir çatı alanı ve bu çatı alanın C^∞ dual çatısı ise $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ olsun.*

$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ olmak üzere

$$i) d\theta^i = \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$ii) dg_{ij} = \sum_k (\theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki})$$

$$iii) \nabla_X E_j = \sum_j \theta_j^k(X) E_k$$

$$iv) \nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad f \in C^\infty(M)$$

şartlarını sağlayan bir tek θ_i^j 1-formu vardır [6].

$\theta_{ij} = \sum_k \theta_i^k g_{kj}$ olarak tanımlanırsa (ii) şartı $dg_{ij} = \theta_{ij} + \theta_{ji}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal ise $g_{ij} = \delta_{ij}$ olup sırasıyla θ^i , θ_{ij} yerine w^i , w_i^j yazılarak $1 \leq i, j \leq n$ için $w_i^j + w_j^i = 0$ elde edilir.

Bu teoreme dayanarak eğrilik formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Verilen çatıya göre R_{ikl}^j eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R(e_k, e_i)e_j = \sum_j R_{ikl}^j$$

olmak üzere Ω_i^j , n^2 2-formu şöyle tanımlanabilir.

$$\Omega_i^j = \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^\ell$$

$$\Omega_i^j(e_k, e_\ell)e_j = \sum_{j=1}^n R_{ikl}^j e_j = R(e_k, e_\ell)e_i$$

ve

$$R(X, Y)e_i = \sum_j \Omega_i^j(X, Y)e_j$$

dir. Burada $\Omega_i^j(X, Y)$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ bazına göre eğrilik operatörünün matrisidir.

$p \in M$ noktasında $X, Y \in \chi(M)$ için açıkça

$$\Omega_i^j(X, Y) = -\Omega_i^j(Y, X)$$

dir. U üzerinde tanımlanan Ω_i^j formuna eğrilik formu denir [6]. Bu eğrilik formları Riemann metriği ve U üzerinde seçilen çatı alanlarına bağlıdır.

Teorem 2.5.2. M Riemann manifoldunun bir U komşuluğu üzerinde $\{e_1, \dots, e_n\}$ çatı alanının C^∞ dual çatısı $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ olsun. Bu takdirde Ω_i^j formu

$$\Omega_i^j = \theta_i^j - \sum_{k=1}^n \theta_i^k \wedge \theta_k^j, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.5.4)$$

dir [6].

İspat. U üzerinde X ve Y herhangi iki vektör alanı olmak üzere $i = \{1, \dots, n\}$ için $R(X, Y)e_i = \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} R(X, Y)e_i &= \nabla_X \left(\sum_j \theta_i^j(Y) e_j \right) - \theta_i^j \left(\sum_j \theta_i^j(X) e_j \right) - \sum_j \theta_i^j([X, Y]) e_j \\ &= \sum_j (X(\theta_i^j(Y)) - Y(\theta_i^j(X)) - \theta_i^j([X, Y])) e_j \\ &\quad + \sum_{j, k} \theta_i^k(Y) \theta_j^k(X) e_k - \sum_{j, k} \theta_i^k(X) \theta_j^k(Y) e_k \end{aligned}$$

dır. □

$w \in \wedge^1(M)$ ters simetrik kovaryant tensör alanı ve $X, Y \in \chi(M)$ ise

$$dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y])$$

olduğundan

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= \sum_j \{d\theta_i^j(X, Y) - \sum_k [\theta_i^k(X) \theta_k^j(Y) - \theta_i^k(Y) \theta_k^j(X)]\} e_j \\ &= \sum_j (d\theta_i^j - \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j)(X, Y) e_j \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.5.1. $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı alanının dual formu $\{w^1, \dots, w^n\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartları sağlayan w_i^j 1-formu vardır.

- i) $dw^i = \sum_k w^k \wedge w_k^j$
- ii) $w_i^j + w_j^i = 0$
- iii) $dw_i^j - \sum_k w_i^k \wedge w_k^j = \sum_{k < \ell} R_{ik\ell}^j w^k \wedge w^\ell = \Omega_i^j = \Omega_{ij}$

Bu çatılara göre eğrilik tensör alanı $R(X, Y)$ nin veya $\Omega_{ij}(X, Y)$ nin matrisi anti-simetriktir [6].

Sonuç 2.5.2. M nin çatı alanı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve bunun duali $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 1-formu olsun. Γ_{ij}^k Cristoffel sembollerinin bileşenleri ve $\theta_j^k = \sum_i \Gamma_{\ell i}^k \theta^\ell$ olsun. Bu durumda

$$R_{ik\ell}^j = \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^\ell} - \sum_h (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{h\ell}^j - \Gamma_{i\ell}^h \Gamma_{hk}^j)$$

dır [6].

boyM=2 ve $\{e_1, e_2\}$ M üzerinde ortonormal çatı olmak üzere aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

Sonuç 2.5.3. Eğer boyM=2 ise $dw_1^2 = \Omega_1^2 = -Kw^1 \wedge w^2$ dır. Burada K , M nin Gauss eğriliğidir [6].

İspat. $\{e_1, e_2\}$ ortonormal ise

$$K = -R(e_1, e_2, e_1, e_2) = -g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = -R_{1212}$$

dır. Diğer taraftan $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ olup

$$\Omega_1^2 = \Omega_{12} = R_{1212}w^1 \wedge w^2$$

dır. $w_i^j + w_j^i = 0$ olduğundan $w_1^1 = w_2^2 = 0$ dır. Böylece

$$\sum_{k=1}^2 w_1^k \wedge w_k^2 = 0 \Rightarrow dw_1^2 = \Omega_1^2$$

olup ispat tamamlanır. □

2.6 Kovaryant Tensör Alanının Diferensiyeli

M Riemann manifoldu üzerinde $\Phi \in \wedge^r(M)$ r indisli kovaryant tensör alanı ve $a < t < b$ için $\alpha(t)$ eğrisi en azından C^1 sınıftan diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\Phi_{\alpha(t)}$, $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde bir tensör alanı ve

$$\tau_t : T_{\alpha(t_0)}(M) \rightarrow T_{\alpha(t)}(M)$$

ile tanımlı $\alpha(t_0)$ sabit noktasında $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde tanımlı paralel öteleme olsun. Φ tensör alanın $\alpha(t_0)$ noktasındaki türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.6.1. Φ tensör alanının $\alpha(t_0)$ noktasındaki türevi

$$\left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\tau_t^* \Phi_{\alpha(t)} - \Phi_{\alpha(t_0)})$$

ile tanımlıdır. $\{X_t^1, \dots, X_t^r\} \in T_{\alpha(t)}(M)$ için

$$\left(\frac{D\Phi}{dt}\right)(X_t^1, \dots, X_t^r) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\tau_t^* \Phi_{\alpha(t)}(X_t^1, \dots, X_t^r) - \Phi_{\alpha(t_0)}(X_t^1, \dots, X_t^r))$$

dır [6].

Lemma 2.6.1. Φ r -indisli kovaryant tensör alanı ve $a < t < b$ için $\alpha(t)$ ($k \geq 1$)

C^k sınıftan bir eğri olsun. $\{X_t^1, \dots, X_t^r\} \in T_{\alpha(t)}(M)$, $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde C^k sınıftan vektör alanları ise $t_0 \in (a, b)$ için

$$\left(\frac{D\Phi}{dt}\right)(X_t^1, \dots, X_t^r) = \left(\frac{d}{dt}[\Phi_{\alpha(t)}(X_t^1, \dots, X_t^r)]\right)_{t=t_0} - \sum_{i=1}^r \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, \left(\frac{DX^i}{dt}\right)_{t_0}, \dots, X_{t_0}^r)$$

dır [6].

İspat. Tanım 2.6.1 den

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\tau_t^* \Phi_{\alpha(t)}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r) - \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r)) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (\Phi_{\alpha(t)}(\tau_t(X_{t_0}^1), \dots, \tau_t(X_{t_0}^r)) - \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r)) \end{aligned}$$

dır. Φ tensör alanı $\alpha(t)$ de sürekli ve lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0} &= \sum_{i=1}^r \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\tau_t(X_{t_0}^i) - X_{t_0}^i), \tau_t(X_{t_0}^{i+1}), \dots, \tau_t(X_{t_0}^r)) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\Phi_{\alpha(t)}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r) - \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r)) \end{aligned}$$

dır.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t(X_{t_0}^i) - X_{t_0}^i}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \tau_t \left(\frac{\tau_{-t}(X_t) - X_{t_0}}{t - t_0} \right) = -\tau_0 \left(\frac{DX_t}{dt} \right)_{t_0} = \left(\frac{DX_t}{dt} \right)_{t_0}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r) &= \left(\frac{d}{dt}[\Phi_{\alpha(t)}(X_t^1, \dots, X_t^r)]\right)_{t=t_0} \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \Phi_{\alpha(t_0)}(X_{t_0}^1, \dots, \left(\frac{DX^i}{dt}\right)_{t_0}, \dots, X_{t_0}^r) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 2.6.2. Bir $\alpha(t)$ eğrisi boyunca $\frac{D\Phi}{dt} = 0$ ise $\Phi \in \mathfrak{S}^r(M)$ tensör alanına paraleldir denir. Eğer M üzerinde her bir α eğrisi boyunca $\frac{D\Phi}{dt} = 0$ ise Φ tensör alanına *paralel tensör alanı* denir [6].

$a < t < b$ için $\alpha(t)$, C^1 sınıftan bir eğri olsun. Φ , $\alpha(t)$ eğrisi boyunca paraleldir gerek ve yeter şart $\{X_t^1, \dots, X_t^r\}$ $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde paralel vektör alanları olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(\Phi(X_t^1, \dots, X_t^r)) = 0$$

dır [6].

Sonuç 2.6.1. $\{X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r\} \in T_{\alpha(t_0)}(M)$ $a < t < b$ için $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde paralel vektör alanları olsun. Bu takdirde

$$\left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_{\alpha(t)}(X_t^1, \dots, X_t^r)\right)$$

dır [6].

İspat. $\{X_t^1, \dots, X_t^r\}$ paralel vektör alanı ise $i = 1, \dots, r$ için $\frac{DX_t^i}{dt} = 0$ olduğundan

$$\left(\frac{D\Phi}{dt}\right)_{t_0}(X_{t_0}^1, \dots, X_{t_0}^r) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_{\alpha(t)}(X_t^1, \dots, X_t^r)\right)$$

dır. □

Örnek 2.6.1. M sabit kesit eğriliği K olan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X_p, Y_p$ vektör çifti için $R(X_p, Y_p, X_p, Y_p) = -K$ dır. Dolayısıyla eğrilik tensör alanı paraleldir [6].

O halde sabit eğrilikli bir Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı paraleldir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani eğrilik tensör alanı paralel olan bir Riemann manifoldunun sabit eğrilikli olması gerekli değildir. Örneğin Sonuç 2.2.4 deki bi-invariant metriği ile kompakt Lie grubunun eğrilik tensör alanı paralel iken her π_e kesitinde eğriliği farklı olduğundan izotropik değildir.

Teorem 2.6.1. M simetrik bir Riemann manifoldu ise eğrilik tensör alanı paraleldir [6].

İspat. Bir Riemann manifoldunun her izometrisi paralel vektör alanlarını, bir eğri boyunca paralel vektör alanlarına, kesitleride bir eğri boyunca kesitlere taşıdığından

parelelizmi korur. Üstelik İzometrilere

$$R_p(X_p, Y_p, Z_p, W_p) = R_{F(p)}(X_{F(p)}, Y_{F(p)}, Z_{F(p)}, W_{F(p)})$$

olup eğriliği de korur.

Sonuç olarak izometrilere geodezikleri geodeziklere taşır. Bunun nedeni ise paralelizm, eğrilik ve geodezik kavramlarının herbirinin Riemann metriğinin terimleri ile tanımlı olmasıdır. Eğrilik tensör alanının paralel olduğunu gösterebilmek için eğrilik tensör alanının geodezikler boyunca paralel vektör alanları üzerinde sabit olduğunu göstermek yeterlidir. $\gamma(t)$ bir geodezik ise $X_\gamma, Y_{\alpha(t)}, Z_{\gamma(t)}, W_{\gamma(t)}$ paralel vektör alanları, Teorem 2.4.2'deki M 'nin τ_c izometrisi ile verilen $X_{\gamma(0)}, Y_{\gamma(0)}, Z_{\gamma(0)}, W_{\gamma(0)}$ ile belirlenir. Bu nedenle eğrilik, $\gamma(t)$ geodeziği boyunca paralel vektör alanları üzerinde sabittir. Bu ise ispatı tamamlar. \square

3. SABİT EĞRİLİKLİ UZAYLAR

3.1 Sabit Kesit Eğrilikli Uzaylar

Tanım 3.1.1. M , $n \geq 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin her 2-boyutlu σ kesiti için $K(\sigma) = k \in \mathbb{R}$, $k = \text{sbt}$ ise M Riemann manifolduna *sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldu* denir [2].

Önerme 3.1.1. M sabit kesit eğrilikli bir uzaydır $\Leftrightarrow \forall p \in M$ için $X, Y, W \in T_p(M)$

$$R(X, Y)W = K\{\langle X, W \rangle Y - \langle W, Y \rangle X\}$$

dır. Burada K kesit eğriliğidir [8].

İspat. $\forall Z \in T_p(M)$ için

$$\langle K\{\langle X, W \rangle Y - \langle W, Y \rangle X\}, Z \rangle = K\{\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle W, Y \rangle \langle X, Z \rangle\}$$

olur. Teorem 2.2.4 den $\forall Z \in T_p(M)$ için M manifoldu K sabit eğrilikli ise

$$\langle R(X, Y)W, Z \rangle = K\{\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle\}$$

dır. Buradan K sabit kesit eğriliğine sahip M manifoldu için

$$R(X, Y)W = K\{\langle X, W \rangle Y - \langle W, Y \rangle X\}$$

olduğunu gösterir. □

Şimdi $0, +1$ ve -1 sabit kesit eğrilikli uzaylara ait şu temel örnekleri ifade edelim:

Örnek 3.1.1. \mathbb{R}^n de $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ile tanımlı $\frac{\partial}{\partial x_i}$ koordinat sistemi verilsin. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ metriğiyle tanımlanan \mathbb{R}^n uzayına *Öklid uzayı* denir [2]. \mathbb{R}^n Öklid uzayı sıfır sabit eğrilikli bir Riemann manifoldudur.

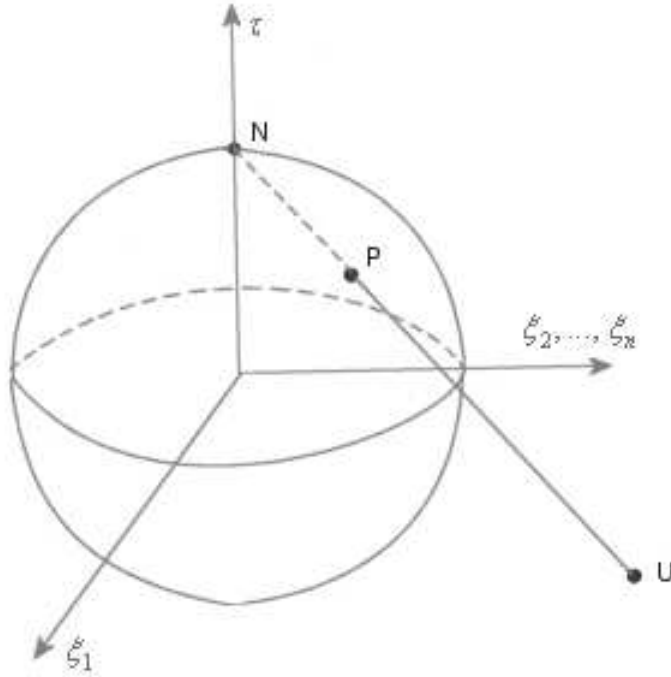
$Z = (z_1, \dots, z_n)$, \mathbb{R}^n nin standart koordinatlarıyla verilen vektör alanı olmak üzere $\nabla_X Z = (X[z_1], \dots, X[z_n])$ dir. Buradan $\nabla_Y \nabla_X Z = (YX[z_1], \dots, YX[z_n])$ olup böylece $R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$ dir. Bu ise $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $R(X, Y, Z) = 0$ olduğunu gösterir.

Şimdi pozitif sabit eğrilikli Riemann manifoldu olan S^n küresel uzayı ve negatif sabit eğrilikli Riemann manifoldu olan H^n hiperbolik uzayının eğriliklerini hesaplayalım. Bu eğrilikleri hesaplamadan önce bu uzayların metriklerinin ifade edilmesi için gerekli olan konformallığın tanımını ve daha sonra bu metriklerin stereografik izdüşüm fonksiyonu yardımıyla nasıl elde edildiğini gösterelim.

Tanım 3.1.2. Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde herhangi iki metrik g_1 ve g_2 olsun. $g_2 = fg_1$ olacak şekilde $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu tanımlı ise g_1 ve g_2 metriklerine *konformaldır* denir [7].

(M, g) ve (\tilde{M}, \tilde{g}) birer Riemann manifoldu olmak üzere $d\phi\tilde{g}, g$ metriğine konformal ise bu Riemann manifoldlarına *konformal olarak denktir* denir [7].

Şimdi küresel uzayın \mathbb{R}^n Öklid uzayına konformal olarak denk olduğunu gösterelim.



Şekil 3.1.1

Örnek 3.1.2. r yarıçaplı S_r^n küresi Öklidyen uzaya lokal konformal olarak denktir. Bu konformal denklik stereografik izdüşüm fonksiyonu ile sağlanır. Bu dönüşüm

$\sigma : S_r^n - \{N\} \rightarrow IR^n$ ile tanımlı olup $P = \{\xi^1, \dots, \xi^n, \tau\} \in S_r^n - \{N\}$ noktasını N ve P noktalarından geçen doğrunun IR^{n+1} de $\{\tau = 0\}$ hiperyüzeyindeki bir noktası olan $U = \{u^1, \dots, u^n, 0\}$ noktasına taşır. Burada N kürenin kuzey kutbudur. σ dönüşümüne *küresel stereografik izdüşüm* denir [7].

$\lambda \neq 0$ skaler olmak üzere $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$ dır. $N = (0, r)$, $P = (\xi, \tau) \in IR^{n+1} = IR^n \times IR$ yazılarak

$$u^i = \lambda \xi^i, \quad (3.1.1)$$

$$-r = \lambda(\tau - r) \quad (3.1.2)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.1.2) eşitliğindeki λ skaleri (3.1.1) eşitliğinde yazılırsa

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{r\xi}{r - \tau} \quad (3.1.3)$$

stereografik izdüşüm fonksiyonu elde edilir. Açıkça σ dönüşümünün tanım kümesi $S_r^n - \{N\}$ dır. Bu dönüşümün diffeomorfizma olduğunu göstermenin en kolay yolu tersini hesaplamaktır. τ ve ξ^i için (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri çözülecek olursa

$$\xi^i = \frac{u^i}{\lambda}, \quad \tau = r \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. $P = \sigma^{-1}(u)$ küre üzerinde bir nokta olduğundan $|\xi|^2 + |\tau|^2 = r^2$ dır. (3.1.1) eşitliğinden

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + r^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = r^2$$

dır. Buradan

$$\lambda = \frac{|u|^2 + r^2}{2r^2} \quad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.5) eşitliği (3.1.4) eşitliğinde yazılacak olursa

$$\sigma^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2r^2 u}{|u|^2 + r^2}, r \frac{|u|^2 - r^2}{|u|^2 + r^2} \right) \quad (3.1.6)$$

olur. Bu ise σ dönüşümünün bir diffeomorfizma olduğunu gösterir.

(3.1.6) eşitliğinde türev alınırsa

$$d\xi = 2r^2 \frac{\{r^2 + |u|^2\} du - 2u(udu)}{\{r^2 + |u|^2\}^2}, \quad d\tau = 4r^3 \frac{udu}{\{r^2 + |u|^2\}^2}$$

olur. Böylece

$$|d\xi|^2 = 4r^4 \frac{\{r^2 + |u|^2\}^2 |du|^2 - 4r^2 (udu)^2}{\{r^2 + |u|^2\}^4}, \quad (d\tau)^2 = 16r^6 \frac{(udu)^2}{\{r^2 + |u|^2\}^4}$$

dır. Böylece

$$g_{jk} = \frac{4\delta_{jk}}{\{1 + \frac{|u|^2}{r^2}\}^2}$$

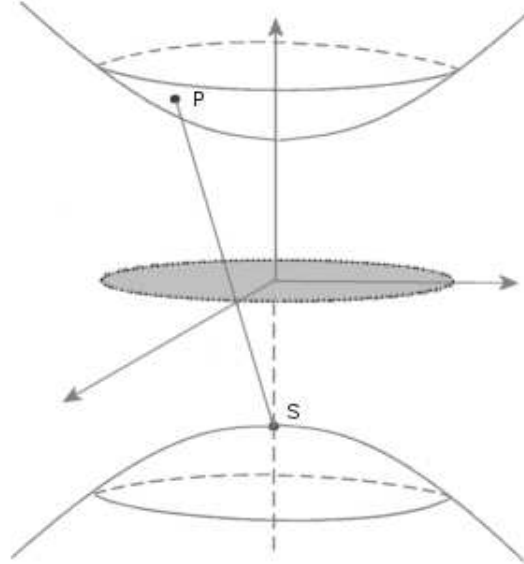
dır. Buradan

$$ds^2 = |d\xi|^2 + (d\tau)^2 = 4r^4 \frac{|du|^2}{\{r^2 + |u|^2\}^2}$$

olur. Bu ise $S^n - \{N\}$ ve \mathbb{R}^n steografik izdüşüm fonksiyonu ile lokal konformal olarak denk olduğunu gösterir. Cristoffel sembollerinin bileşenleri

$$\Gamma_{jk}^\ell = -\frac{2}{r^2 + |u|^2} \{\delta_{\ell k} u^j + \delta_{j\ell} u^k - \delta_{jk} u^\ell\}$$

dır. $n \geq 2$ için $S^n(r)$ nin kesit eğriliği $\frac{1}{r^2}$ olduğu sonucuna varılır [8].



Şekil 3.1.2

Örnek 3.1.3. $r > 0$ için H_r^n hiperbolü ve \mathbb{R}^n öklid uzayı lokal konformal olarak denktir. Bu lokal konformal denklik Örnek 3.1.2 e benzer olarak Stereografik izdüşüm fonksiyonu ile sağlanır. Bu dönüşüm $\pi : H_r^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile tanımlı olup $P = \{\xi^1, \dots, \xi^n, \tau\} \in H_r^n - \{S\}$ noktasını S ve P noktalarından geçen doğrunun \mathbb{R}^{n+1} de $\{\tau = 0\}$ hiperyüzeyindeki bir noktası olan $U = \{u^1, \dots, u^n, 0\}$ noktasına taşır. Burada S kürenin kuzey kutbudur. π dönüşümüne *hiperbolik streografik izdüşüm* denir[7]

$\lambda \neq 0$ skaler olmak üzere $\overrightarrow{SU} = \lambda \overrightarrow{SP}$ dır. $S = (0, -r)$, $P = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ yazılarak

$$u^i = \lambda \xi^i, \quad (3.1.7)$$

$$r = \lambda(\tau + r) \quad (3.1.8)$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu eşitlik küresel durumdaki gibi çözülecek olursa

$$\pi(\xi, \tau) = u = r \frac{r\xi}{r + \tau}$$

ve π nin tersi

$$\pi^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2r^2 u}{r^2 - |u|^2}, r \frac{|u|^2 + r^2}{r^2 - |u|^2} \right)$$

dır. Bu ise π dönüşümünün bir diffeomorfizma olduğunu gösterir.

Türev alınarak

$$d\xi = 2r^2 \frac{\{r^2 - |u|^2\} du + 2u(udu)}{\{r^2 - |u|^2\}^2}, \quad d\tau = 4r^3 \frac{udu}{\{r^2 - |u|^2\}^2}$$

$$|d\xi|^2 = 4r^4 \frac{\{r^2 - |u|^2\}^2 |du|^2 + 4r^2 (udu)^2}{\{r^2 - |u|^2\}^4}, \quad (d\tau)^2 = 16r^6 \frac{(udu)^2}{\{r^2 - |u|^2\}^4}$$

elde edilir. Böylece

$$ds^2 = |d\xi|^2 - (d\tau)^2 = 4r^4 \frac{|du|^2}{\{r^2 - |u|^2\}^2}$$

olur. Bu ise $H_r^n - \{S\}$ ve \mathbb{R}^n streografik izdüşüm fonksiyonu ile lokal konformal olarak denk olduğunu gösterir [7].

Tanım 3.1.3. \mathbb{R}^n de

$$ds^2 = 4r^4 \frac{|du|^2}{\{r^2 - |u|^2\}^2}$$

metriği ile verilen r yarıçaplı B_r^n yuvarına *Poincaré yuvar modeli* denir [7].

Tanım 3.1.4. $x_n > 0$ için (x^1, \dots, x^n) koordinatları ile

$$g_{ij} = r^2 \frac{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}{x_n^2}$$

metriği ile tanımlı r yarıçaplı H_r^n üst yarı uzayına *Poincaré yarı uzayı modeli* denir [7].

Şimdi 1 yarıçaplı Poincaré yarı uzayı modelinin sabit (-1) kesit eğrilikli bir uzay olduğunu gösterelim.

R^n nin

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

ile tanımlanan yarı uzayı ve H^n de indirgenmiş metrik

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2} \quad (3.1.9)$$

ile verilsin.

F, H^n üzerinde pozitif diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere H^n nin

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$$

metriği R^n nin alışılmış metriğine konformaldir.

g_{ij} nin tersi g^{ij} ve $\log F = f$ olmak üzere $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$ dir. $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$ yazılırsa

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik} \frac{2}{F^3} F_j = -2 \frac{\delta_{ik}}{F^2} f_j$$

olur. Böylece Cristoffel sembolleri

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} F^2 \\ &= -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ij} f_k \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer üç indisin hepsi birbirinden farklı ise $\Gamma_{ij}^k = 0$ ve eğer iki indis eşit ise

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j, \Gamma_{ii}^j = f_j, \Gamma_{ij}^j = -f_i, \Gamma_{ii}^i = -f_i$$

sonucuna varılır. Riemann eğriliğın katsayıları hesap edilecek olursa

$$\begin{aligned} R_{ijj} &= \sum_{\ell} R_{iji}^{\ell} g_{\ell j} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F^2} \\ &= \sum_{\ell} \Gamma_{ii}^{\ell} \Gamma_{j\ell}^j - \sum_{\ell} \Gamma_{ji}^{\ell} \Gamma_{i\ell}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j \end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j = f_{ii}$ olduğundan $\ell \neq i$ ve $\ell \neq j$ için

$$\begin{aligned} F^2 R_{ijj} &= - \sum_{\ell} f_{\ell} f_{\ell} + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\ &= - \sum_{\ell} f_{\ell}^2 + f_{ii} + f_{jj} \end{aligned}$$

dır. Eğer dört indis birbirinden farklı ise $R_{ijkl} = 0$ ve herhangi üç indis birbirinden farklı ise

$$R_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj}, R_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki}, R_{ijk}^k = 0 \quad (3.1.10)$$

dır. Sonuç olarak $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$ kesitinin kesit eğriliği

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{g_{ii} g_{jj}} = R_{ijij} F^4 \\ &= \left(- \sum_{\ell} f_{\ell}^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) F^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi $f = \log x_n$ için $F^2 = x_n^2$ özel durumuna bakalım. Bu durumda $i \neq n$ ve $j \neq n$ ise

$$K_{ij} = \left(- \frac{1}{x_n^2} \right) x_n^2 = -1$$

dır. $i = n$ ve $j \neq n$ ise

$$K_{nj} = \left(-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn} \right) F^2 = - \frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1$$

dir. $i \neq j, j = n$ için tekrar $K_{in} = -1$ dir. Sonuç 2.2.2 ve (3.1.10) eşitliğinden H^n nin kesit eğriliği -1 dir.

Sonuç 3.1.1. $x_n = 0$ hiperdüzlemine dik olan doğrular ile H^n nin çemberleri $x_n = 0$ hiperdüzlemine dik olan düzlemlerdir ve bunların merkezleri bu hiperdüzlemde olup H^n nin geodezikleridir [2].

Sonuç 3.1.2. Standart iç çarpım ile donatılmış R^n öklid uzayı tüm kesitlerinde kesit eğriliği 0 olan sabit kesit eğrilikli uzaydır. $r > 0$ yarıçaplı S_r^n küresel uzayı tüm kesitlerinde kesit eğriliği $\frac{1}{r^2} > 0$ olan pozitif sabit kesit eğrilikli bir uzaydır. H_r^n hiperbolik uzayı tüm kesitlerinde kesit eğriliği -1 olan sabit kesit eğrilikli bir uzaydır [8].

Teorem 3.1.1. [Schur] M bağlantılı, izotropik Riemann manifoldu ve $\text{boy}M \geq 3$ ise M sabit eğrilikli manifolddur [9].

İspat. M izotropik manifold olduğundan her bir p noktasında bütün kesit eğrilikleri eşittir. p noktasındaki kesit eğrilikleri K_p olsun. K, M den R ye, her bir p noktasını K_p sayısına dönüştüren fonksiyondur. K fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğunu gösterilecektir. Bunun için $dK = 0$ olduğu göstermek yeterlidir.

(U, φ) , p noktası için koordinat çatı alanı ortonormal olacak biçimde bir koordinat komşuluğu olsun. Bu koordinat komşuluğundan elde edilen dual 1-formları $\theta^1, \dots, \theta^n$ ile gösterilsin.

Sonuç 2.2.2 den dolayı

$$R_{ijkl} = -K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

olur. $R_{ij} = \sum_{k<\ell} R_{ik\ell}^j \theta^k \wedge \theta^\ell$, $R_{ijkl} = \sum_h R_{ik}^h g_{hj}$ ve $g_{nj} = \delta_{nj}$ olduğundan $R_{ijkl} = R_{ik\ell}^j$ dir. Dolayısı ile

$$R_{ij} = \sum_{k<\ell} R_{ijkl} \theta^k \wedge \theta^\ell$$

olur. $R_{ijkl} = -K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sum_{k<\ell} -K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \theta^k \wedge \theta^\ell \\ &= -K \sum_{k<\ell} \delta_{ik}\delta_{jl} \theta^k \wedge \theta^\ell + K \sum_{k<\ell} \delta_{il}\delta_{jk} \theta^k \wedge \theta^\ell \end{aligned}$$

bulunur.

$i < j$ ise $R_{ij} = -K\theta^i \wedge \theta^j$ olur.

$i = j$ ise $R_{ij} = 0$ dır.

$i > j$ ise $R_{ij} = K\theta^j \wedge \theta^i = -K\theta^i \wedge \theta^j$ olur. Sonuç olarak

$$R_{ij} = -K\theta^j \wedge \theta^i = -K\theta^i \wedge \theta^j$$

dır.

$$d\theta_i^j = R_{ij} + \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j$$

eşitliğinden

$$d\theta_i^j = -K\theta^i \wedge \theta^j + \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j$$

elde edilir. $d\theta_i^j = 0$ olduğundan

$$0 = -dK \wedge \theta^i \wedge \theta^j - Kd\theta^i \wedge \theta^j + K\theta^i \wedge d\theta^j + \sum_k (d\theta_i^k \wedge \theta_k^j - \theta_i^k \wedge d\theta_k^j)$$

olur.

$d\theta^i = \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i$, $d\theta_i^j = \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j + R_{ij}$, $\theta_j^k = \sum_t \Gamma_{tj}^k \theta^t$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= -dK \wedge \theta^i \wedge \theta^j - K \left(\sum_k \theta^k \wedge \theta_k^i \right) \wedge \theta^j + K\theta^i \wedge \left(\sum_k \theta^k \wedge \theta_k^j \right) \\ &\quad + \sum_k \left(\sum_h \theta_i^h \wedge \theta_h^k + R_{ik} \right) \wedge \theta_k^j - \sum_k \theta_i^k \wedge \left(\sum_h \theta_h^k \wedge \theta_h^j + R_{kj} \right) \\ &= -dK \wedge \theta^i \wedge \theta^j - K \sum_k \theta^k \wedge \theta_k^i \wedge \theta^j + K \sum_k \theta^i \wedge \theta^k \wedge \theta_k^j + \sum_{k,h} \theta_i^h \wedge \theta_h^k \wedge \theta_k^j \\ &\quad + \sum_k R_{ik} \wedge \theta_k^j - \sum_{h,k} \theta_i^k \wedge \theta_h^k \wedge \theta_h^j + \sum_k \theta_i^k \wedge R_{kj} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} &\sum_k \theta^k \wedge \left(\sum_t \Gamma_{tk}^i \theta^t \right) \wedge \theta^j = \sum_{k,t} \Gamma_{tk}^i \theta^k \wedge \theta^t \wedge \theta^j \\ &= \left(\sum_{k,t} \Gamma_{tk}^i \theta^k \wedge \theta^t + \sum_{k>t} \Gamma_{tk}^i \theta^k \wedge \theta^t \right) \wedge \theta^j \\ &= \left[\sum_{k,t} (\Gamma_{t,k}^i - \Gamma_{kt}^i) \theta^k \wedge \theta^t \right] \wedge \theta^j = 0 \end{aligned}$$

dır. Benzer biçimde $\theta^i \wedge (\sum_k \theta^k \wedge \theta_k^j) = 0$ olur.

$$\sum_{k,h} \theta_i^h \wedge \theta_h^k \wedge \theta_k^j = \sum_{k,h} \theta_i^k \wedge \theta_k^h \wedge \theta_h^j$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \sum_k R_{ik} \wedge \theta_k^j &= \sum_k R_{ik} (\sum_t \Gamma_{tk}^j \theta^t) = \sum_{k,t} R_{ik} \wedge \Gamma_{tk}^j \wedge \theta^t \\ \sum_k \theta_i^k \wedge R_{kj} &= \sum_k (\sum_t \Gamma_{ti}^k \theta^t) \wedge R_{kj} = \sum_{k,t} R_{kj} \wedge \Gamma_{ti}^k \wedge \theta^t \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} \sum_{k,t} R_{ik} \wedge \Gamma_{tk}^j \wedge \theta^t &= \sum_{k,t} \Gamma_{tk}^j (-K\theta^i \wedge \theta^k) \wedge \theta^t \\ &= -K \sum_{k,t} \Gamma_{tk}^j \theta^i \wedge \theta^k \wedge \theta^t = -K\theta^i \wedge (\sum_{k,t} \Gamma_{tk}^j \theta^k \wedge \theta^t) = 0 \end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\sum_{k,t} R_{kj} \wedge \Gamma_{ti}^k \wedge \theta^t = 0$$

bulunur. Böylece $dK \wedge \theta^i \wedge \theta^j = 0$ elde edilir. Burada

$$dK = K_1\theta^1 + K_2\theta^2 + \dots + K_n\theta^n$$

biçimindedir. Ayrıca ℓ, i, j indisleri farklı olduğunda $\theta^\ell \wedge \theta^i \wedge \theta^j \neq 0$ olduğundan ve $dK \wedge \theta^i \wedge \theta^j = 0$ eşitliğinden $dK = 0$ dır. \square

Sonuç 3.1.3. M, K sabit eğrilikli bir uzay olsun. Bu takdirde

$$\Omega_i^j = d\theta_i^j - \sum_k \theta_i^k \wedge \theta^j \text{ eğrilik formu } \Omega_i^j = -K\theta^i \wedge \theta^j \text{ ile tanımlıdır.}$$

Tersine M nin herbir noktasının bir U komşuluğunda bu denklemi sağlayan θ^i, θ_i^j formlarını bir tek şekilde belirleyen bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı varsa M , sabit K eğriliklidir [6].

3.2 Cartan Teoremi

M ve \tilde{M} , n -boyutlu Riemann manifoldları $p \in M$ ve $\tilde{p} \in \tilde{M}$ olsun. $i: T_p(M) \rightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ bir lineer izometri olsun. $V \subset M$, $p \in M$ noktasının bir normal komşuluğu olmak üzere

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q)$$

olacak şekilde $f : V \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü tanımlansın. $\forall q \in V$ için $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$ olacak şekilde bir tek $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ normalleştirilmiş geodeziği vardır. p_t , γ geodeziği üzerinde paralel öteleme ve \tilde{p}_t , $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ ve $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ ile verilen $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$ normalleştirilmiş geodeziği üzerinde bir paralel öteleme olsun. Bu takdirde

$$\phi_t : T_q(M) \rightarrow T_{f(q)}(\tilde{M})$$

$$\phi_t(v) = \tilde{p}_t \circ i \circ p_t^{-1}(v)$$

dönüşümü tanımlanabilir. M ve \tilde{M} manifoldlarının Riemann eğrilik tensör alanları sırası ile R ve \tilde{R} olsun [2].

Teorem 3.2.1. [Cartan] Üstteki notasyonlar ile $\forall q \in V$ ve $\forall x, y, u, v \in T_q(M)$ için

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle$$

ise $f : V \rightarrow f(V) \subset \tilde{M}$ bir lokal izometridir ve $df_p = i$ dir [2].

İspat. $q \in V$ ve $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$ olacak şekilde $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ bir normalleştirilmiş geodezik olsun. $v \in T_q(M)$ ve J , γ eğrisi boyunca $J(0) = p$ ve $J(\ell) = v$ olan bir Jakobi alanı olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_p(M)$ nin ortonormal bazları ve $i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $e_i(t)$, γ geodeziği üzerinde paralel öteleme olsun.

$$j(t) = \sum_i y_i(t) e_i(t)$$

yazılır ve jakobi eşitliği kullanılırsa $j = \{1, \dots, n\}$ için

$$y_j'' + \sum_i \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle y_i = 0,$$

dır. Şimdi $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ ile verilen $\tilde{\gamma} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$ bir geodezik olsun. $\tilde{J}(t)$, $t \in [0, \ell]$ için

$$\tilde{j}(t) = \phi_t(J(t))$$

ile verilen $\tilde{\gamma}$ boyunca bir Jakobi alanı olsun.

$\tilde{e}_j(t) = \phi_t(e_j(t))$ diyelim. Bu takdirde ϕ_t nin lineerliğinden

$$\tilde{j}(t) = \sum_i y_i(t) \tilde{e}_i(t)$$

elde edilir.

Hipotezden dolayı

$$\langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle = \langle \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j \rangle$$

olduğundan $j = \{1, \dots, n\}$ için

$$y_j'' + \sum_i \langle \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan \tilde{j} , $\tilde{j}(0) = 0$ ile $\tilde{\gamma}$ boyunca bir Jakobi alanıdır. Paralel öteleme bir izometri olduğundan $|\tilde{j}(\ell)| = |j(\ell)|$ dir. Eğer

$$j(\ell) = df_q(v) = df_q(j(\ell))$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$\tilde{j}(\ell) = \phi_t(j(t))$ olduğundan $\tilde{j}'(0) = i(j'(0))$ dir. Ayrıca $J(t)$ ve $\tilde{J}(t)$, $t = 0$ noktasında sıfır olan jakobi alanları olduğundan Sonuç 2.3.1 den

$$j(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tj'(0))$$

$$\tilde{j}(t) = (dexp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\tilde{j}'(0))$$

dır. Bu nedenle

$$\tilde{j}(\ell) = (dexp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}li(j'(0))$$

$$\tilde{j}(\ell) = (dexp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)} \circ i \circ ((dexp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)})^{-1}(j(\ell)) = df_q(j(\ell))$$

elde edilir. Bu ise iddianın ispatıdır. □

Teorem 3.2.1 şartları altında \exp_p ve $\exp_{\tilde{p}}$ dönüşümleri birer diffeomorfizma ise bu takdirde bu ispat f dönüşümünün M nin tamamı üzerinde tanımlı olduğunu ve bir izometri olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.1. M ve \tilde{M} aynı sabit eğriliğe sahip n -boyutlu birer Riemann manifoldu olsunlar. $p \in M$ ve $\tilde{p} \in \tilde{M}$ olsun. $j = \{1, \dots, n\}$ için $\{e_j\} \in T_p(M)$ ve $\{\tilde{e}_j\} \in T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ keyfi ortonormal bazları seçilsin. Bu takdirde p nin bir $V \subset M$ ve \tilde{p} nin bir $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ komşulukları vardır ve $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$ olacak şekilde $f : V \rightarrow \tilde{V}$ dönüşümü bir izometridir [2].

Sonuç 3.2.2. M sabit eğrilikli bir uzay, p ve q noktaları M nin herhangi iki noktası olsun. $\{e_j\}$ ve $\{f_j\}$ sırasıyla $T_p(M)$ ve $T_q(M)$ nin keyfi seçilmiş ortonormal bazları olsun. Bu takdirde p nin bir U komşuluğu ve q nun bir V komşuluğu vardır ki $dg_p(e_j) = f_j$ olacak şekilde $g : U \rightarrow V$ dönüşümü bir izometridir [2].

3.3 Uzay Formlar

Tanım 3.3.1. Sabit kesit eğrilikli tam Riemann manifoldlarına *uzay form* denir [2].

Tanım 3.3.2. M ve \tilde{M} aynı boyutlu iki C^∞ manifold, $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm, \tilde{M} bağlantılı ve $U, p \in M$ noktasının bir bağlantılı komşuluğu olmak üzere

$$i) \pi \text{ sürekli ve } \pi(\tilde{M}) = M$$

$$ii) V_\alpha, \tilde{M} \text{ nin ikişer ayrık açık kümeleri olmak üzere } \pi^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$$

şartlarını sağlıyorsa π dönüşümüne *örtü dönüşümü* ve \tilde{M} manifolduna, M manifoldunun *örtü manifoldu* denir [6].

Teorem 3.3.1. [Hadamart] M , herbir $p \in M$ ve herbir $\sigma \in T_p M$ için $K(p, \sigma) \leq 0$ kesit eğrilikli ile basit bağlantılı tam bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde $\dim M = n$ ise M, \mathbb{R}^n e diffeomorfiktir. Ayrıca $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ bir diffeomorfizmadır [2].

Teorem 3.3.2. M sabit K kesit eğrilikli bir tam Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde M nin \tilde{M} örtüsü

$$a) \text{ Eğer } K=-1 \text{ ise } H^n$$

$$b) \text{ Eğer } K=0 \text{ ise } \mathbb{R}^n$$

$$c) \text{ Eğer } K=1 \text{ ise } S^n$$

'e izometriktir [2].

İspatı yapabilmek için önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.3.1. $f_i : M \rightarrow N, i = \{1, 2\}$ için M bağlantılı Riemann manifoldundan N Riemann manifolduna iki lokal izometri olsun. $f_1(p) = f_2(p)$ ve $(df_1)_p = (df_2)_p$ olacak şekilde bir $p \in M$ noktası varsa $f_1 = f_2$ dir [2].

İspat. V, p nin bir komşuluğu $f_1|_V$ ve $f_2|_V$ birer diffeomorfizm olmak üzere $\varphi = f_1^{-1} \circ f_2 : V \rightarrow V$ olsun. Bu takdirde $\varphi(p) = p$ ve $d\varphi_p$ tanımlıdır. $q \in V$ ise $\exp_p(v) = q$ ile bir tek $v \in T_p(M)$ vardır. Bu nedenle $\varphi(q) = q$ olup V de $f_1 = f_2$ dir. M bağlantılı olduğundan $r \in M$ için, $\alpha(0) = p, \alpha(1) = r$ olacak şekilde bir tek $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ yayı vardır.

$$A = \{t \in [0, 1] : f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t)) \text{ ve } (df_1)_{\alpha(t)} = (df_2)_{\alpha(t)}\}$$

olsun. $\text{Sup}A$ pozitiftir. Eğer $\text{sup}A = t_0 \neq 1$ ise $\alpha(t_0)$ noktası için üstteki işlem devam ettirildiğinde bir çelişki elde edilir. Bu yüzden $\text{sup}A = 1$ dir ve her bir $r \in M$ için $f_1(r) = f_2(r)$ dir. \square

Şimdi teoremin ispatını yapalım.

İspat. \tilde{M}, K sabit kesit eğrilikli basit bağlantılı tam bir Riemann manifoldu olsun. İlk önce (a) ve (b) şıkları için ispatı yapalım. Δ, H^n veya R^n uzaylarından biri olsun. $p \in \Delta, \tilde{p} \in \tilde{M}$ sabit noktalar ve $i : T_p(\Delta) \rightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ bir lineer izometri olsun. Bu takdirde

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : \Delta \rightarrow \tilde{M}$$

fonksiyonu vardır. Δ ve \tilde{M} pozitif olmayan kesit eğrilikli tam manifold olduklarından f iyi tanımlıdır. Cartan teoreminden f bir lokal izometridir. Hadamart teoreminden f bir diffeomorfizmadır. Böylece (a) ve (b) şıkları için ispat tamamlanır.

(c) şıkkı için sabit bir $p \in S^n, \tilde{p} \in \tilde{M}$ ve $i : T_p(S^n) \rightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ bir lineer izometri olsun. $q \in S^n, p$ nin bir antipodal noktası ve

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : S^n - \{q\} \rightarrow \tilde{M}$$

tanımlansın. Cartan teoreminden f bir lokal izometridir. Şimdi $p' \neq p, p' \neq q$ olacak şekilde bir $p' \in S^n$ noktası seçilsin. $\tilde{p}' = f(p'), i' = df_{p'}$ olmak üzere q', p' nün antipodal noktası ise

$$f' = \exp_{\tilde{p}} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1} : S^n - \{q'\} \rightarrow \tilde{M}$$

tanımlansın. Dikkat edilecek olursa $S^n - (\{q\} \cup \{q'\}) = W$ bağlantılı, $p' \in W$ ve

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p'), df_{p'} = i' = df'_{p'}$$

dir. Lemma (3.3.1) den devam edilirse W da $f = f'$ olur. Sonuç olarak

$$g(r) = \begin{cases} f(r) & , \quad r \in S^n - \{q\} \\ f'(r) & , \quad r \in S^n - \{q'\} \end{cases}$$

olacak şekilde bir $g : S^n \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü tanımlanabilir. g bir lokal izometridir. S^n nin kompaktlığından g bir örtü dönüşümü ve \tilde{M} basit bağlantılı olduğundan g bir diffeomorfizmdir. Böylece g bir izometridir ve ispat tamamlanır. \square

Son teorem uzay form kavramını grup teorisinin aşağıdaki sonuçlarına indirger.

Eğer M üzerinde

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, x) \rightarrow gx$$

ile tanımlı G grubuna M manifoldunun *grup etkisi* denir [2].

e , G nin birim elemanı, $x \in M$ ve $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere

$$ex = x, (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

dır.

Eğer $gx = x$ için $g = e$ ise G ye M üzerine *serbest etki* denir [2].

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

kümesine bir $x \in M$ noktasının *yörüngesi* denir [2].

$Gx = M$ ise G etkisine *geçişlidir* denir [2]. Tüm yörüngelerin cümlesi M/G olarak ifade edilir ve $\pi(x) = Gx$ ile bir $\pi : M \rightarrow M/G$ doğal projeksiyonu vardır. M bir topolojik uzay olsun. $\forall g \in G, g \neq e$ için $g(U) \cap U \neq \emptyset$ olacak şekilde her bir $x \in M$ bir U komşuluğuna sahipse G grubuna *total süreksiz yapı içinde etki eder* veya *düzgün süreksiz yapı içinde etki eder* denir [2].

Tanım 3.3.3. Eğer bir $\varphi : G \times M \rightarrow M$ dönüşümü

i) Herbir $g \in G$, ve $p \in M$ için $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$ ile verilen $\varphi_g : M \rightarrow M$ dönüşümü ile bir diffeomorfizmadır ve φ_e birim elemandır.

ii) $g_1, g_2 \in G$ ise $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ dir.

şartlarını sağlıyorsa G grubuna M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine *etki eder* denir [2]. Genellikle bu etki $\varphi(g, q) = gp$ ile tanımlanır.

G, M üzerinde etki ettiğinde M de bir \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır gerek ve yeter koşul $g \in G$ için $p_2 = gp_1$ olmasıdır. M/G denklik sınıfına M nin *bölüm uzayı* denir ve $\pi : M \rightarrow M/G$ dönüşümüne bir *projeksiyon* denir [2].

Önerme 3.3.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve G, M de bir düzgün süreksiz etki olsun. Bu takdirde $\pi : M \rightarrow M/G$ dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşümdür [2].

İspat. Herbir $p \in M$ için, $g \neq e$, $U \cap g(U) \neq \emptyset$ olacak şekilde p de bir $x : V \rightarrow M$ koordinat fonksiyonu seçelim. Açıkça $\pi|_U$ birebirdir. Böylece

$y = \pi \circ x : V \rightarrow M/G$ birebirdir. Ayrıca $\{(v, y)\}$ sınıfı M/G yi örter. Böyle bir ailenin diferensiyellenebilir bir yapı olması için $y_1(V_1) \cap y_2(V_2) \neq \emptyset$ ile $y_1 = \pi \circ x_1 : V_1 \rightarrow M/G$ ve $y_2 = \pi \circ x_2 : V_2 \rightarrow M/G$ dönüşümlerinin diferensiyellenebilir oluşunu göstermek gerekir.

Bunun için $\pi_i, \pi_i(V_i)$ de π nin kısıtlaması $q \in y_1(V_1) \cap y_2(V_2)$, $\tau = x_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q)$ ve $W \subset V_2$, $(\pi_2 \circ x_2)(W) \subset y_1(V_1) \cap y_2(V_2)$ olacak şekilde τ nun bir komşuluğu olsun. Bu takdirde

$$y_1^{-1} \circ y_2|_W = x_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ x_2$$

ile verilir. Bu nedenle $\pi_1^{-1} \circ \pi_2, p_2 = \pi_2^{-1}(q)$ da diferensiyellenebilirdir.

$p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$ olsun. Bu takdirde $gp_2 = p_1$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. O halde $\pi_1^{-1} \circ \pi_2|_{x_2(W)}, \varphi_g|_{x_2(W)}$ diffeomorfizmi ile çakışırki bu ise $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ nin p_2 de diferensiyellenebilir olduğunu gösterir. \square

Tanım 3.3.4. $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ örtü dönüşümü olsun. $p \in M$ için $\pi^{-1}(p)$ üzerinde G grubu geçişli etki ediyorsa π dönüşümüne *regüler örtü dönüşümü* denir [10].

Önerme 3.3.2. M bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir topolojik uzay ve G , M nin düzgün süreksiz etkisi olsun. $\pi : M \rightarrow M/G$ dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $\pi : M \rightarrow M/G$ dönüşümü regüler bir örtü dönüşümüdür. G örtü dönüşümünün grubudur [10].

İspat. $x \in M/G$ olsun. x noktasının Tanım 3.3.2 un (ii) şartını sağlayan bir komşuluğa sahip olduğunu göstermek gerekir. $\pi(p) = x$ olacak şekilde $p \in M$ seçilsin. Hipotezden p nin bir N komşuluğu vardır ki $g \in G$ için $g(N)$ Tanım 3.3.2 un (ii) şartını sağlayan bir komşuluğudur. Çünkü M lokal yol bağlantılı olduğundan $V \subset N$ olacak şekilde p nin bir V yol bağlantılı açık komşuluğu vardır. π açık bir dönüşüm (açık bir kümeyi açık bir kümeye dönüştüren dönüşüm) olduğundan x noktasının bir yol bağlantılı, açık U komşuluğu vardır. Ayrıca π dönüşümü V kümesini U üzerine birebir dönüştürür ve U üzerinde V nin bir homeomorfizmasıdır. Eğer W kümesi V den farklı olan $\pi^{-1}(U)$ kümelerinin bileşkesi ise $g(V) = W$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. g , V den W üzerine bir homeomorfizma olduğundan U kümesi x noktasının Tanım 3.3.2 un (i) şartını sağlayan bir komşuluğudur. Bu ise G etkisinin geçişli olduğunu gösterir. Ohalde π nin M/G kümesi üzerinde bir regüler örtü dönüşümü olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Kabul edelimki M bir Riemann manifoldu ve Γ , M de total süreksiz etki eden grup izomorfizmalarının bir altgrubu olsun. $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ bir lokal izometri olduğunda yani herbir $u, v \in T_p(M/\Gamma)$ için

$$\langle u, v \rangle = \langle d\pi^{-1}(u), d\pi^{-1}(v) \rangle$$

olduğunda M/Γ kümesi üzerinde bir Riemann metriği tanımlanabilir. Bu durumda M/Γ bir Riemann manifoldudur [2].

Şimdi M/Γ tamdır $\Leftrightarrow M$ tamdır ve M/Γ sabit eğriliklidir $\Leftrightarrow M$ sabit eğriliklidir. $M = S^n$ veya R^n veya H^n ise M/Γ tam manifoldunu sırasıyla 1 eğrilikli, 0 eğrilikli, -1 eğrilikli sabit eğrilikli bir manifold olur. Şimdi bu aşağıdaki önermede gösterilecektir.

Önerme 3.3.3. M sabit kesit eğriliği $K = 1$, $K = 0$ veya $K = -1$ olan bir tam Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde $M, \tilde{M}/\Gamma$ ya izometriktir. Öyleki $K = 1$ ise $\tilde{M} = S^n$, $K = 0$ ise

$\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ ve $K = -1$ ise $\tilde{M} = H^n$ dir. Burada \tilde{M} nun grup izomorfizmalarının bir alt grubu Γ , \tilde{M} üzerinde total süreksiz bir etkidir ve $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ bir örtü dönüşümüdür [2].

İspat. $p : \tilde{M} \rightarrow M$ bir örtü dönüşümü Γ , \tilde{M} grup izomorfizmasının bir alt grubu ve \tilde{M} da total süreksiz etki olsun. Bu takdirde $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ tanımlanabilir. p ve π birer örtü dönüşümü olduğundan $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ için $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ ve $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$ ise $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) \Leftrightarrow \Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$ dir. Bu nedenle \tilde{M} de π ve p ile verilen denklik sınıfları aynıdır ve $\pi = \xi \circ p$ olacak şekilde bir $\xi : M \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ birebir dönüşümü vardır. π ve p lokal izometri olduklarından ξ bir lokal izometri ve birebir olup \tilde{M}/Γ dan M ye bir izometridir. \square

Sonuç 3.3.1. [W.Killing, H.hopf.] $n \geq 2$ olmak üzere M n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $K \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde M sabit K kesit eğrilikli, bağlantılı, tam bir Riemann manifoldudur $\Leftrightarrow M$ manifoldu

- a) Eğer $K > 0$ ise S^n/Γ ,
- b) Eğer $K = 0$ ise \mathbb{R}^n/Γ ,
- c) Eğer $K < 0$ ise H^n/Γ ,

e izometriktir. Burada Γ , M üzerine serbest ve düzgün süreksiz etki eder [11].

Tanım 3.3.5. Basit bağlantılı tam sabit eğrilikli Riemann manifolduna $K > 0$ ise *Küresel uzay form*, $K = 0$ ise *Öklidyen uzay form* veya *Eliptik uzay form* ve $K < 0$ ise *hiperbolik uzay form* denir [11].

Sabit eğrilikli uzaylar non- Öklid geometriyle bağlantılı olarak Riemann geometrinin tarihsel gelişiminde önemli bir rol oynamıştır. Bir non- Öklid geometri, bir geçişli G grup izomorfizmasıyla birlikte bir tam Riemann manifoldudur. Bu nedenle non-Öklid geometri uzay formları içerir. Küresel, Öklidyen ve Hiperbolik geometri olarak isimlendirilen S^n , \mathbb{R}^n ve H^n uzayları uzay formların sınıflandırılmasını sağlar. Clifford-Klein uzay form problemleri olarak bilinen bu sınıflandırılma bu uzaylara etki eden grup izomorfizmalarının yapısını inceler.

Şimdi burada kurgulanan topolojik yapıları daha anlamlı hale getirebilmek için Küresel, Öklidyen ve Eliptik uzay formlarıyla ilgili tanımlı bazı yapı ve örnekleri ifade edelim.

3.4 Uzay Form Örnekleri

Öncelikle küresel uzay formları ile ilgili yapılardan ve örneklerden bahsedelim.

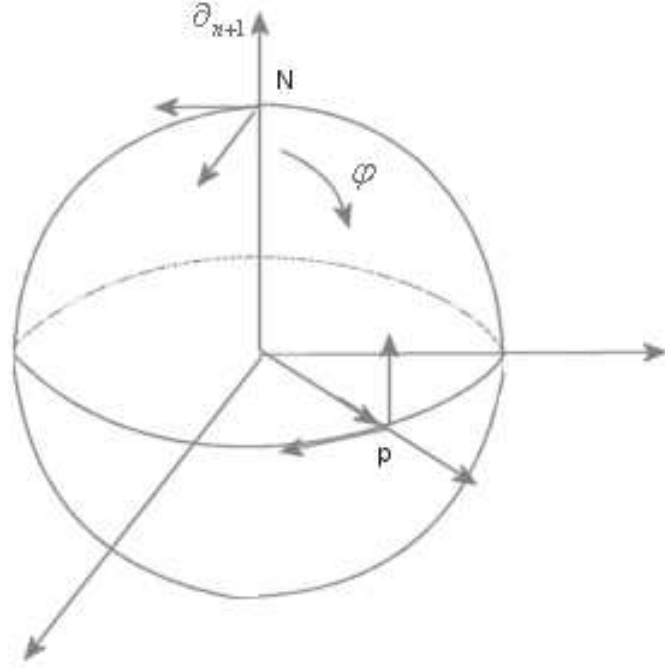
Tanım 3.4.1. [*Ortogonal Grup*]

$$O(n+1) = \left\{ A \mid A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ Öklidyen iç çarpımı korur.} \right\}$$

grubuna *ortogonal grup* denir [12]. Burada A lineer bir dönüşümdür. $A \in O(n+1) \Leftrightarrow A^t = A^{-1}$ dir.

Şimdi $O(n+1)$ in S_r^n üzerine etki eden grup izometrisi olduğunu gösterelim.

Teorem 3.4.1. $O(n+1)$, S_r^n nin ortonormal bazları üzerinde geçişli etki eder. Daha açık olarak p, \tilde{p}, S_r^n nin herhangi iki noktası olmak üzere $T_p(S_r^n)$ ve $T_{\tilde{p}}(S_r^n)$ in sırasıyla ortonormal bazları e_i ve \tilde{e}_i olsun. Bu takdirde $\phi(p) = \tilde{p}$ ve $d\phi(e_i) = \tilde{e}_i$ olacak şekilde $\phi \in O(n+1)$ vardır [7].



Şekil 3.4.1

İspat. $p \in S_r^n$ ve $e_i, T_p(S_r^n)$ de ortonormal baz olmak üzere S_r^n de $N = (0, \dots, 0, r)$ kuzey kutbunu p noktasına ve $T_N(S_r^n)$ nin $\{\partial_i\}$ bazını $\{e_i\}$ bazına dönüştüren bir ortonormal dönüşümün var olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu gösterebilmek için p noktasını \mathbb{R}^{n+1} de uzunluğu r olan vektör olarak düşünelim. $\tilde{p} = p/r$ birim vektör alınsın. e_i ortonormal bazları küreye teğet olduğundan bu vektörler \tilde{p} vektörüne ortogondur. Böylece $\{e_1, \dots, e_n, \tilde{p}\}$ \mathbb{R}^{n+1} de ortonormal bazdır. ϕ sutunu bu vektörler olan bir matris olsun. Bu takdirde $\phi \in O(n+1)$ ve $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ bazını $\{e_1, \dots, e_n, \tilde{p}\}$ bazına dönüştürür. Bu ise ϕ nin S_r^n de geçişli etki ettiğini gösterir. Özellikle $\phi(0, \dots, 0, r) = p$ dır. Üstelik ϕ, \mathbb{R}^{n+1} e geçişli etki ettiğinden $d\phi(\partial_i) = e_i$ ve ϕ bir ortogonal dönüşümdür. \square

$K = +1$ pozitif sabit eğrilikli Riemann manifoldlarını ifade edebilmek için S^n üzerine düzgün ve süreksiz etki eden S^n in grup izometrilere Γ altgruplarını ifade

etmek gerekir. S^n üzerine etki eden grup izomorfizması Teorem 3.4.1 gereğince $O(n+1)$ olduğundan $\Gamma \subset O(n+1)$ dir. Burada Γ sonlu indisli olmalıdır. Çünkü Γ sonlu indisli değilse $x \in S^n$ için $\Gamma x = \{Ax : A \in \Gamma\}$ bir limit noktasına sahiptir. Bu ise Γ nın düzgün süreksiz etki olmasıyla çelişir. Bu nedenle $O(n+1)$ in sonlu altgruplarının ifade edilmesi gerekir. Pozitif sabit eğrilikli uzayların en basit örnekleri $\Gamma = \{\mp I\} \in O(n+1)$ alınarak aşağıdaki gibi şöyle ifade edilir [6].

Örnek 3.4.1. n çift bir tamsayı ise sadece S^n birim küresi ile $P^n(R)$ n -boyutlu projektif uzayı $K = +1$ olan sabit eğrilikli tam manifoldlardır. [6].

Gerçekten de $\Gamma \in O(n+1)$ ve $\forall A \in \Gamma, (n+1) \times (n+1)$ tipinde bir ortogonal matris olsun. Bir ortogonal matrisin karakteristik değeri $|1|$ olduğunda A matrisinin karakteristik değeri ∓ 1 dir. Bu durumda $A^2 = I$ dir. Böylece $A = I$ ise A nın karakteristik değeri $+1$ ve $A = -I$ ise A nın karakteristik değeri -1 dir. $\Gamma = \{\mp I\}$ alındığında $S^n \setminus \Gamma$ yörünge uzayı S^n üzerindeki tüm antipodal noktaların koleksiyonu ve $P^n(R)$ dir.

Sonuç 3.4.1. Sadece S^1 çemberi ve $\sigma(x,y,z) = (-x, -y, -z)$ antipodal dönüşümü ile üretilen S^2 nin bölüm uzayı olan $P^2(R)$ projektif uzayı $K = 1$ kesit eğrilikli iki boyutlu tam Riemann manifoldlarıdır [12].

Örnek 3.4.2. n tek olması durumunda uzay kuaternionların kümesi \mathbb{R}^3 e izomorf düşünülerek bir sabit eğrilikli manifold örneği olarak ele alınabilir. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$ olmak üzere

$$q = a + bi + cj + dk$$

ve q nin eşleneği

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

olsun. K da alışılmış norm $\|q\| = \langle q, \bar{q} \rangle^{\frac{1}{2}}$ dir. Burada $K_1 = \{q : \|q\| = 1\}$ birim kuaternionların kümesi olup $S^3 \subset R^4$ şeklinde ifade edilebilir. Burada önemli olan şey $q_1, q_2 \in K_1$ için $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ olduğundan K_1 kuaternion çarpımı işlemiyle bir grup olmasıdır. Bu nedenle $q \in K_1$ için K dan K üzerine r -lineer dönüşüm olan $L_q(x) = qx$ ile tanımlı

$L_q : K \rightarrow K$ sol öteleme vardır. L_q bir ortogonal dönüşümdür. Böylece $S^3 = K_1$ bir grup uzayıdır ve sol öteleme alışılmış Riemann yapısına sahip S^3 ün bir izometrisidir.

$\pi : K_1 \rightarrow SO(3)$ dönüşümü tanımlansın. $\mathbb{R}^3, x = 0$ reel kısmına sahip $q = yi + zj + wk$ şeklindeki K nın bir alt uzayı olsun. Bu takdirde $\forall q' \in K_1$ için $q \rightarrow q'q(q')^{-1}$ ile verilen \mathbb{R}^3 ün $\pi(q')$ dönmesi mevcuttur. $\Gamma_1 \subset SO(3)$ ün bir alt grubu ise $\Gamma = \pi^{-1}(\Gamma_1)$ K_1 in sonlu bir alt grubudur. Böylece $SO(3)$ ün sonlu alt grupları tespit edilerek üç boyutlu, tam sabit eğrilikli uzayların örnekleri verilebilir. Yani $\Gamma \in SO(3)$ olmak üzere S^3/Γ bölüm uzayı üç boyutlu küresel uzay form örnekleri olarak gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki örnekte $SO(3)$ ün sonlu bir alt grubu olan z_p devirli grubu alınarak küresel uzay form örneği olan lens uzayı ifade edilmiştir.

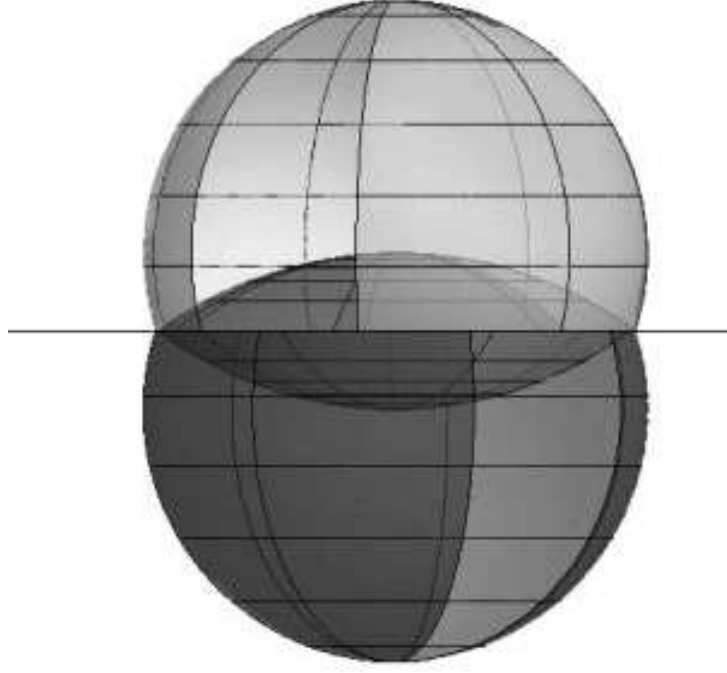
Örnek 3.4.3. $S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$, C^2 nin birim küresi z_p devirli grubu olmak üzere S^3/z_p bölüm uzayına *lens uzayı* denir. Burada $(z_1, z_2) \in C^2$ için p ve q sabit sayılar olmak üzere

$$S^3/z_p = (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2) = L(p, q)$$

olarak tanımlıdır. Bu uzay küresel bir uzay formudur. Bu durumun bir özel örneği 1919 da J.W. Alexander tarafından gösterilen $L(5, 2)$ uzayı olarak şöyle ifade edilir.

$$L(5, 2) = (e^{2\pi i/5} z_1, e^{4\pi i/5} z_2)$$

dır. Bu uzayın şekli aşağıdaki gibidir [13].



Şekil 3.4.2

$L(p, q)$ lens uzayı 3-boyutlu iki torun sınırlarının birbirine yapıştırılmasıyla elde edilmiştir öyleki birinci torun meridyen eğrileri, ikinci tordaki paralelleri p defa ve meridyenleri q defa kesen eğriden geçer.

Şimdide Öklidyen uzay formlarla ilgili yapılardan ve örneklerden bahsedelim.

$K = 0$ sabit eğrilikli tam Riemann manifoldları olan Öklidyen uzay formlarda, \mathbb{R}^n öklidyen uzayı ve \mathbb{R}^n ile aynı boyutlu Riemannian örtü uzayları göz önüne alınacaktır. Bu nedenle $K = 0$ sabit eğrilikli tam Riemann manifoldları Γ , \mathbb{R}^n in grub izomorfizmalarının bir alt grubu olmak üzere \mathbb{R}^n/Γ yörünge uzayında şekillenir. \mathbb{R}^n de herbir izometri $A \in \Gamma \subset O(n+1)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ için $x \rightarrow Ax + b$ öteleme dönüşümü ile ifade edilir. Sıfır sabit eğrilikli uzaylarda Γ grup izometrisine *katı hareket* denir [6].

Tarihsel olarak bu uzayların çalışılması, \mathbb{R}^3 Öklidyen uzayın örttüğü düzgün prizmalar ve \mathbb{R}^2 yüzeyinin örttüğü düzgün çokgenlere kongruent olan kristal yapıların çalışımıyla doğrudan ilişkilidir. $K = 0$ kesit eğrilikli uzaylarda düzgün süreksiz etki

eden katı hareketler grubu bu uzaylardaki şekilleri yine bu uzaylar üzerindeki şekillere taşıdığından böyle kristal yapılar simetriktir. Ayrıca bu grupların elemanları sabit noktaları içerebilir. Yani \mathbb{R}^3 öklidyen uzayı ve \mathbb{R}^2 yüzeyindeki kristal yapılar katı hareketle sabit kalabilir. Şimdi bu uzayların 2 boyutlu örnekleri ifade edebilmek için döneel yüzeyin tanımını ifade edelim.

Tanım 3.4.2. Uzayda bir eğrinin bir doğru çevresinde döndürülmesi ile elde edilen yüzeye *döneel yüzey* denir [4]. $r(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları I açık aralığından \mathbb{R} ye fonksiyonlar olmak üzere y_1Oy_3 düzleminde

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t))$$

verilsin. M yüzeyinde herhangi bir p noktası

$$p = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$$

olarak yazılabilir. Buna göre

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \varphi) \rightarrow f(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$$

alınırsa $f(I \times \mathbb{R}) = M$ olur. $I \times \mathbb{R} = U \subset \mathbb{R}^2$ diyelim. Ayrıca düzlemdeki dik koordinat sistemi (x_1, x_2) olsun. $q = (t, \varphi)$ olmak üzere

$$x_1(q) = t, \quad x_2(q) = \varphi$$

olduğundan $\forall q \in U$ için

$$f(q) = (r(t)x_1(q) \cos(x_2(q)), r(t)x_1(q) \sin(x_2(q)), h(x_1(q)))$$

dır. $\forall q \in U$ için bu eşitlik sağlandığından

$$f(q) = ((r \circ x_1) \cos x_2, (r \circ x_1) \sin x_2, h \circ x_1)$$

olur. Şimdi döneel yüzeyin bir $f(t_0, \varphi_0)$ noktasını alalım.

$$\alpha(t) = f(t_0 + t, \varphi_0)$$

eşitliği ile tanımlı α eğrisi, $f(t_0, \varphi_0)$ noktasından geçen x_1 parametre eğrisidir.

$$\beta(\varphi) = f(t_0, \varphi_0 + \varphi)$$

eşitliği ile belirli β eğrisi, $f(t_0, \varphi_0)$ noktasından geçen x_2 parametre eğrisidir.

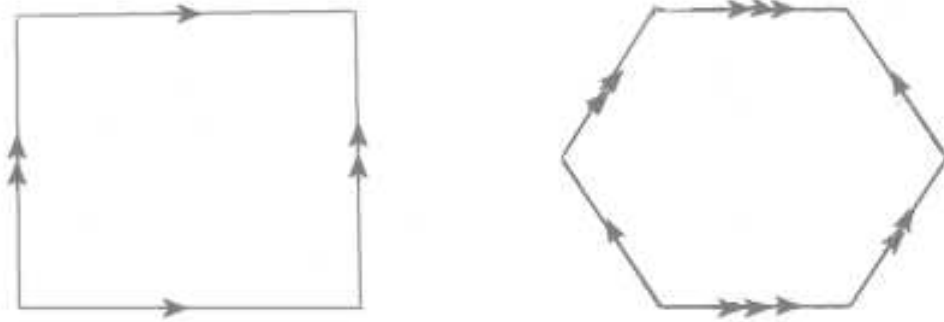
x_1 parametre eğrilerine dönel yüzeyin *meridyenleri*, x_2 parametre eğrilerine dönel yüzeyin *paralelleri* denir [4].

Örnek 3.4.4. \mathbb{R}^2 , silindir, mobius şeridi ve flat tor $K = 0$ sabit eğrilikli iki boyutlu tam Riemann manifoldlarıdır. Gerçektende

1) $\Gamma_1 = I$ ise $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2/I = \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{R}^2/\Gamma_1 = \mathbb{R}^2$ olup \mathbb{R}^2 sıfır sabit eğrilikli bir uzay formudur.

2) $\Gamma_2, t(x, y) = (x - 1, y)$ öteleme dönüşümü ile üretilsin. Bu takdirde $\mathbb{R}^2/\Gamma_2 = ((x - 1) \cos \varphi, (x - 1) \sin \varphi, z)$ bir silindir olup silindir sıfır sabit eğrilikli bir uzay formudur.

3) $\Gamma_3, \alpha^2 = t$ olacak şekilde yansıma dönüşümü ve $\alpha = (x + \frac{1}{2}, -y)$ alınsın. Bu takdirde $\mathbb{R}^2/\Gamma_3 = (\cos \varphi + (x - \frac{1}{2}) \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi, \sin \varphi + (x - \frac{1}{2}) \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi, (x - \frac{1}{2}) \sin \frac{\varphi}{2})$ bir mobius şeridi olup mobius şeridi sıfır sabit eğrilikli bir uzay formudur.



Şekil 3.4.3

Flat tor (Kare ve altıgen)

4) Γ_4 , $t_1(x,y) = (x+1,y)$ ve $t_2(x,y) = (x+a,y+b)$ $b \neq 0$ öteleme dönüşümleri ile üretilsin. Bu takdirde \mathbb{R}^2/Γ_4 bölüm uzayı bir flat tordur. Burada özel olarak $(a,b) = (0,1)$ alınırsa bölüm uzayı kare tor ve $(a,b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ alınırsa bölüm uzayı altıgen tordur.

$$5)\Gamma_5, \alpha^2 = t_1,$$

$$t_1(x,y) = (x+1, -y),$$

$$t_2(x,y) = (x,y+1), \quad \alpha(x,y) = (x + \frac{1}{2}, -y)$$

olacak şekilde t_1, t_2, α ile üretilsin. Bu takdirde \mathbb{R}^2/Γ_5 bölüm uzayı bir flat klein şişesidir.

Flat Klein şişesi $a=0, b=1$ için flat torun veya Mobius Şeridinin bölüm uzayı olarak görülebilir [12].

Son olarak hiperbolik uzay formlar ile ilgili yapılardan ve örneklerden bahsedelim.

Tanım 3.4.3. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

dönüşümüne *lineer fraktal dönüşüm* denir [14]. Üst kompleks yarı yüzeyinin lineer fraktal dönüşümlerin grubu olan Γ grubuna *modüler grup* denir [14]

$K = -1$ negatif sabit eğrilikli Riemann manifoldlarında H^n de etki eden grup izometrilere ifade edilmesi gerekir. $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ için $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $z \rightarrow (az+b)/(cz+d)$ lineer fraktal dönüşümü H^n in izometrisidir.

$n = 2$ için H^2 , $(x,y) \leftrightarrow z = x + iy$ olacak şekilde \mathbb{C} kompleks sayıların üst yarı yüzeyi olarak tanımlanabilir. Bu takdirde H^2 , $imz > 0$ olacak şekilde tüm z kompleks sayılarını içeren \mathbb{C} nin bir açık alt uzayıdır. \mathbb{C} nin üst yarı yüzeyinde tanımlı H^2 nin grup etkileri aşağıdaki örnekle ifade edilir.

Örnek 3.4.5. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ \mathbb{C} nin üst yarı yüzeyi olsun. M de $Sl(2, \mathbb{R})$ nin etkisi şöyle ifade edilir. \mathbb{R}^2 , \mathbb{C} kompleks sayıları olarak alınsın. $z = x + iy$, $w = u + iv$, $i = \sqrt{-1}$ olsun. $g \in Sl(2, \mathbb{R})$ için $ad - bc = \mp 1$ olmak üzere

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ve $w = \theta(g, z) = (az + b)/(cz + d)$ olarak tanımlansın. $y = \text{Im}z > 0$ ise $\text{Im}w > 0$ dır ve $\forall g_1, g_2 \in Sl(2, R)$ için $\theta(g_1, \theta(g_2, z)) = \theta(g_1 g_2, z)$ dir. Ayrıca (x, y) veya $z = x + iy$ için lokal koordinatlarda Riemann metriği

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$Sl(2, R)$ etkisi altında invaryantdır. Bu nedenle bu grup bu metriğin bir grup izometrisi olarak etki eder.

i noktasından $z_0 = u + iv$ noktasına alınan $g \in Sl(2, R)$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v}} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \sqrt{v} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $\theta(g, z) = \frac{\sqrt{v}z + (u/\sqrt{v})}{0 \cdot z + 1/\sqrt{v}} = u + vz$ dir. Burada $z = i$ alınırsa $\theta(g, i) = u + iv$ dir. Bu ise θ grup etkisinin geçişli olduğunu gösterir.

Ayrıca $i = \frac{ai+b}{ci+d}$ alınırsa $ai + b = -c + di$ olduğundan $a = d$ ve $b = -c$ olup $ad - bc = 1$ olduğundan $a^2 + b^2 = 1$ dir. O halde

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

H^2 nin bir grup izometrisidir [6].

Sonuç 3.4.2. C nin üst yarı yüzeyinde tanımlı H^2 nin grup izometrisi, $a, b, c, d \in R$ için $ad - bc = 1$ olmak üzere lineer fraktal dönüşümlerin bir G grubudur.

$z \rightarrow w = (az + b)/(cz + d)$ lineer fraktal dönüşümüne tekabül eden

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi ile tanımlı $F : Sl(2, R) \rightarrow G$ dönüşümü $\ker F = \mp I$ olan G nin bir homeomorfizmidir [6].

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihođlu H.H., "*Diferensiyel Geometri*", Ankara Ünv. Fen Fakültesi, (2003).
- [2] Manfredo Perdigó do Carmo "*Riemann Geometry*", Birkhuser Boston.(1992).
- [3] O'neill B. "*Semi-Riemann Geometry with aplications of relativity*" Academic Press, Inc (1983)
- [4] Sabuncuođlu A. "*Diferensiyel Geometri*", Nobel Yayın Dağıtım 2.Baskı (2004)
- [5] Onishchik A.L. "*Lie Groups and Lie Algebras I*" Springer-Verlag (1991)
- [6] Bootby W. M. "*An İntroduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*", Academic Press, Inc (1986)
- [7] Lee John M. "*Riemann Manifolds (An İntroduction to Curvature)*" Springer, (1997)
- [8] Chavel İsaach "*Riemann Geometry A Modern İntroduction*" Second Edition, Cambridge University Press. (2006)
- [9] Sabuncuođlu A. "*Diferensiyel Manifoldlara Giriş Ders Notları*"
- [10] Massey W.S "*Algebraic Topology (An İntroduction)*" Springer-Verlag (1984)
- [11] Wolf Joseph A. "*Space Of Constant Curvature*" McGRAW-HİLL Book Campany (1967)
- [12] Kühnel W. "*Differential Geometry (Curves-Surfaces-Manifolds)*", Second Edition, American Mathematical Society. (2005)

[13] [<http://lukyanenko.net/math/heisenberg09/lens.html>]

[14] [<http://en.wikipedia.org/wiki/Modulargroup.html>]

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılı Diyarbakır doğumludur. İlk öğrenimini ve ortaöğrenimini Adıyamanda tamamladı. 2003 yılında Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü programını kazandı. 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. 2007-2008 Eğitim Öğretim yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.