

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KOMPLEKS DERECELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ VE
KONTROL İŞLEMLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Gülten ÇETİNTAŞ

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI

MART 2023

**T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KOMPLEKS DERECELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ VE
KONTROL İŞLEMLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

**Gülten ÇETİNTAŞ
(23616150004)**

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI

MART 2023

Bu tez çalışmasını, rahmetli kardeşim Mesut ÇETİNTAŞ'a
ithaf ediyorum...

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, tavsiye ve desteğini esirgmeden beni yönlendiren; bilgi birikimi ve tecrübelerinden yararlandığım, bu zorlu süreçte beni her daim motive edip destekleyen ve değerli zamanını ayıran danışman hocam Sayın Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI'ya,

Beni değerli bilgileriyle yönlendiren tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Nusret TAN ve Doç. Dr. Ömerül Faruk ÖZGÜVEN'e,

Doktora eğitimim boyunca gösterdikleri sıcak ilgi ve dostça yaklaşımlarından dolayı bana yabancılık çektirmeyen İnönü Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümü öğretim üyeleri ve elemanlarına,

Yaşadığım her türlü sorun karşısında yardımını esirgemeyen, ihtiyaç duyduğum zamanlarda motive eden ve cesaretlendiren fakülte sekreterimiz Abdülmelik SÖYLEMEZ'e, tez yazım aşamasında her zaman destek olan ve tecrübelerinden faydalandığım arkadaşım Dr. Hatice ERDEM'e, bu süreçte yanımda olan ve bu teze anlam katan ama burada adını anmakla bitiremeyeceğim tüm sevdiklerime,

Bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan, bu zorlu süreçte beni sabırla destekleyen ve her konuda benden maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme,

Bütün bu saydıklarımın üzerinde olarak, doktora süreci boyunca ihmal ettiğim ancak anlayışımı benden eksik etmeyen değerli kardeşim Mustafa ÇETİNTAŞ'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu çalışmayı FDK-2021-2370 nolu doktora projesi kapsamında maddi olarak destekleyen İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Gülten ÇETİNTAŞ

ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum “Kompleks Dereceli Sistemlerin Kararlılık Analizi ve Kontrol İşlemlerinin Gerçekleştirilmesi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gülten ÇETİNTAŞ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR	xi
ÖZET	xiii
ABSTRACT	xiv
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Konu ile İlgili Genel Bir Bakış.....	1
1.1.1 Kompleks dereceli analizin tarihsel gelişimi ve literatür özeti.....	4
1.1.2 Kontrol mühendisliği alanında kesir dereceli ve kompleks dereceli analiz	9
1.2 Motivasyon ve Problem Sunumu	14
1.3 Bilimsel Katkı.....	16
1.4 Tezin Organizasyonu	19
2. KESİR VE KOMPLEKS DERECELİ MATEMATİK	22
2.1 Kesir ve Kompleks Dereceli Matematik için Özel Fonksiyonlar	22
2.1.1 Gamma fonksiyonu	22
2.1.2 Mittag-Leffler fonksiyonu	23
2.1.3 Miller-Ross fonksiyonu	24
2.2 Kesir Dereceli İntegro-Türev Kavramı.....	25
2.3 Kesir Dereceli Türev-İntegral Tanımları ve Laplace Dönüşümleri.....	26
2.3.1 Riemann-Liouville tanımı	28
2.3.2 Caputo tanımı	28
2.3.3 Grünwald-Letnikov tanımı	29
2.3.4 Kesir dereceli integro-türevin temel özellikleri.....	30
2.4 Kompleks Dereceli İntegro-Türev Kavramı.....	31
2.5 Kompleks Dereceli Türev-İntegral Tanımları ve Laplace Dönüşümleri.....	32
2.5.1 Riemann-Liouville tanımı	32
2.5.2 Caputo tanımı	33
2.5.3 Grünwald-Letnikov tanımı	34
2.5.4 Kompleks dereceli integro-türev ve kompleks değer kavramı	34
2.6 Kompleks Eşlenik Dereceli İntegro-Türev Kavramı.....	35
3. KOMPLEKS DERECELİ VE KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLER.....	37
3.1 Kompleks Dereceli Sistemler	38
3.2 Kompleks Dereceli Sistemlerin Zaman Bölgesi Analizi.....	39
3.2.1 Birim darbe cevabı.....	40
3.2.2 Birim basamak cevabı	42
3.3 Kompleks Dereceli Sistemlerin Frekans Bölgesi Analizi	44
3.4 Kompleks Dereceli Transfer Fonksiyonların Tam Sayı Dereceli Yaklaşım Modellerinin Elde Edilmesi.....	45
3.5 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler	48
3.6 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Zaman Bölgesi Analizi.....	49
3.6.1 Birim darbe cevabı.....	50
3.6.2 Birim basamak cevabı	51
3.7 Tam Sayı ve Kesir Dereceli PID Kontrolör.....	52

4. KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ	55
4.1 Kutup-Konum Analizi ile Kararlılık Analizinin Gerçekleştirilmesi	58
4.1.1 Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunan kutupların konumuna göre kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi	59
4.1.2 Kompleks düzlemde oluşturulan çemberler aracılığıyla kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi.....	62
4.2 Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Kararlılık Analizinin Gerçekleştirilmesi.....	64
4.2.1 Mikhailov eğrisi ve özellikleri.....	64
4.2.2 Mikhailov'un kararlılık kriterleri.....	67
4.2.2.1 Mikhailov'un birinci kararlılık kriteri	67
4.2.2.2 Mikhailov'un ikinci kararlılık kriteri.....	68
4.2.3 Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri	69
4.2.4 Kompleks eşlenik dereceli sistemler için genelleştirilen Mikhailov kararlılık kriterinin uyarlanması.....	71
4.3 Uygulama Örnekleri	73
5. KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN PI, PID VE KESİR DERECELİ PI (PI^{λ}) KONTROLÖR İLE KARARLILAŞTIRILMASI	84
5.1 Giriş	84
5.1.1 D-ayırıştırma yöntemi.....	86
5.1.2 Parametre uzayında kararlılık sınırları	87
5.1.2.1 Gerçek kök sınırı (GKS - Real Root Boundary).....	88
5.1.2.2 Sonsuz kök sınırı (SKS – Infinite Root Boundary)	89
5.1.2.3 Kompleks kök sınırı (KKS – Complex Root Boundary).....	89
5.2 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin PI Kontrolör ile Kararlılaştırılması.....	92
5.3 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin PID Kontrolör ile Kararlılaştırılması.....	99
5.4 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler için Frekans Özelliklerine Göre Kesir Dereceli PI (PI^{λ}) Kontrolör Tasarımı	111
6. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİNE SAHİP KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ.....	126
6.1 Giriş	126
6.2 Polinom Ailelerinin Belirsizlik Yapıları.....	128
6.3 Değer Kümesi Kavramı	130
6.4 Sıfırın Dışlanma Prensibi.....	130
6.5 Kharitonov Teoremi	131
6.5.1 Kharitonov teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli polinom ailesine uygulanabilir mi?	136
6.6 Kenar Teoremi	137
6.6.1 Kenar teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli polinom ailesine uygulanabilir mi?.....	140
6.6.2 Kenar teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için uygulanabilir mi?	142
6.7 Parametre Belirsizliğine Sahip Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Dayanıklı Kararlılık Analizi Uygulamaları	146
6.7.1 Değer kümesinden sıfırın dışlanma prensibine dayalı dayanıklı kararlılık analizi	147
6.7.2 Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı dayanıklı kararlılık analizi.....	149
6.8 Uygulama Örnekleri	151

7. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİNE SAHİP KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI KONTROLÖR TASARIMI.....	161
7.1 Giriş	161
7.2 Belirsiz Parametre Uzayında Dayanıklı Kontrolör Testi ve Tasarımı.....	162
7.3 Değer Kümesinden Sıfırın Dışlanma Prensibine Dayalı PI ve PID Kontrol Sistemi için Dayanıklı Kararlılık Analizi	164
7.4 Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile PI ve PID Kontrol Sistemi için Dayanıklı Kararlılık Analizi	165
7.5 Uygulama Örnekleri	166
7.5.1 PI kontrolör için dayanıklı kararlılık analizi uygulamaları	166
7.5.2 PID kontrolör için dayanıklı kararlılık analizi uygulamaları.....	170
7.5.3 Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı PI kontrolör tasarımı	172
7.5.4 Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı PID kontrolör tasarımı	176
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	181
8.1 Bu Tez Kapsamında Elde Edilen Sonuçlar.....	181
8.2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar için Öneriler	185
KAYNAKLAR.....	188
ÖZGEÇMİŞ	204

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1: Şekil 5.3'teki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_j\}$ değerleri.....	97
Çizelge 5.2: Şekil 5.6'daki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_j\}$ değerleri.....	104
Çizelge 5.3: Şekil 5.10'daki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_j\}$ değerleri.....	107
Çizelge 5.4: Şekil 5.13'teki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_j\}$ değerleri.....	109
Çizelge 5.5: Şekil 5.17'deki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_j\}$ değerleri.....	117



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 : Matematikte kullanılan genel sayı kümeleri şeması.....	5
Şekil 2.1 : x - y düzleminde integralin gösterimi	27
Şekil 3.1 : Kompleks dereceli bir sistem ve zaman cevabı.....	39
Şekil 3.2 : Transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{1}{s^{0.6+j0.62}+0.6-j0.9}$ şeklinde olan kompleks dereceli bir sistem için zaman bölgesi analizi: a) Birim darbe cevabı, b) Birim basamak cevabı.....	43
Şekil 3.3 : $G(s)=s^q=s^{u+jv}$ ($v \neq 0$) için Bode diyagramları	45
Şekil 3.4 : $s^{0.5+j0.5}$ 'in $N=5$, $\omega_l=10^{-2}$ rad/sn ve $\omega_h=10^2$ rad/sn için Crone/Oustaloup yaklaşımının Bode diyagramı.....	48
Şekil 3.5 : Kompleks eşlenik dereceli bir sistem ve zaman cevabı.....	49
Şekil 3.6 : Transfer fonksiyonu $G(s)=\frac{1}{s^{0.6+j0.62}+0.6-j0.9} + \frac{1}{(s^{0.6-j0.62}+0.6+j0.9)}$ şeklinde olan kompleks eşlenik dereceli bir sistem için zaman bölgesi analizi: a) Birim darbe cevabı, b) Birim basamak cevabı.....	52
Şekil 3.7 : Klasik PID ile kesir dereceli PID kontrolörün λ ve μ değerlerine göre karşılaştırılması: (a) tam sayı dereceli (noktasal), (b) kesir dereceli (düzlemsel)	54
Şekil 4.1 : Tek boyutlu bir eksen üzerinde kararlılık şartı için tam sayı n değerinin konumu.....	62
Şekil 4.2 : Mikhailov eğrisi.....	65
Şekil 4.3 : Mikhailov eğrisinin; a) sıfır kök durumu ve b) saf imajiner kök durumu	66
Şekil 4.4 : Mikhailov eğrisinin özellikleri.....	67
Şekil 4.5 : n . dereceden bir sistemin kararlı Mikhailov eğrileri.....	68
Şekil 4.6 : Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre; a) $n = 4$ için kararlı bir sistem, b) $n = 4$ için kararsız bir sistem ve c) $n = 5$ için kararsız bir sistem.....	68
Şekil 4.7 : Örnek 4.1'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizilen GD Mikhailov eğrisi.....	74
Şekil 4.8 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.....	75
Şekil 4.9 : Örnek 4.1'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.....	76
Şekil 4.10 : Örnek 4.1'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.....	76
Şekil 4.11 : Örnek 4.2'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.....	77
Şekil 4.12 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.....	78
Şekil 4.13 : Örnek 4.2'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.....	79
Şekil 4.14 : Örnek 4.2'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.....	79
Şekil 4.15 : Örnek 4.3'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.....	80
Şekil 4.16 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.....	81
Şekil 4.17 : Örnek 4.3'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.....	81
Şekil 4.18 : Örnek 4.3'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.....	81

Şekil 4.19 : Örnek 4.4'te verilen kaskat kompleks eşlenik dereceli sistem için –∞ < ω < ∞ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.....	82
Şekil 4.20 : Örnek 4.4'te verilen kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemin birim basamak cevabı.....	83
Şekil 5.1 : Geri beslemeli genel bir kontrol sistem yapısı.....	87
Şekil 5.2 : Sistemin kökleri ve kararlılık sınırları arasındaki ilişki.....	92
Şekil 5.3 : : (k _p , k _i)-düzleminde kararlılık sınırları.....	97
Şekil 5.4 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için.....	98
Şekil 5.5 : Kapalı döngü birim basamak zaman cevapları (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için.....	98
Şekil 5.6 : k _d =0 için (k _p , k _i)-düzleminde kararlılık sınırları.....	103
Şekil 5.7 : GD Mikhailov eğrileri: (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için.....	104
Şekil 5.8 : Kapalı döngü birim basamak fonksiyonu cevapları (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için.....	105
Şekil 5.9 : Örnek 5.2 için kararlılık bölgesi.....	106
Şekil 5.10 : k _d =-0.5 için (k _p , k _i)-düzleminde kararlılık sınırları.....	107
Şekil 5.11 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için.....	108
Şekil 5.12 : Örnek 5.3 için kararlılık bölgesi.....	108
Şekil 5.13 : k _d =-0.01 için (k _p , k _i)-düzleminde kararlılık sınırları.....	109
Şekil 5.14 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için.....	110
Şekil 5.15 : Örnek 5.4 için kararlılık bölgesi.....	110
Şekil 5.16 : Kompleks eşlenik dereceli sistemler için P ^I kontrolör tasarımı.....	111
Şekil 5.17 : λ=0.9 için (k _p , k _i)-düzleminde kararlılık bölgeleri.....	118
Şekil 5.18 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için (f) R ₆ bölgesi için.....	118
Şekil 5.19 : Kapalı döngü zaman cevapları (a) R ₁ bölgesi için (b) R ₂ bölgesi için (c) R ₃ bölgesi için (d) R ₄ bölgesi için (e) R ₅ bölgesi için (f) R ₆ bölgesi için.....	119
Şekil 5.20 : 0.1 ≤ λ ≤ 1 aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.....	121
Şekil 5.21 : 1 ≤ λ ≤ 1.7 aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.....	121
Şekil 5.22 : 1.7 ≤ λ ≤ 1.9 aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.....	122
Şekil 5.23 : 0.4 ≤ A ≤ 2 aralığında kazanç payı değişimin kararlılık bölgelerine etkisi.....	122
Şekil 5.24 : 0° ≤ φ ≤ 90° aralığında faz payı değişimin kararlılık bölgelerine etkisi.....	122
Şekil 5.25 : Kapalı döngü zaman cevapları (a) Farklı kesirli integral derecesi (λ) değerleri için (b) Farklı kazanç payı (A) değerleri için (c) Farklı faz payı (φ) değerleri için.....	123
Şekil 5.26 : A = 2 kazanç payı ve φ = 45° faz payına sahip olan PI kontrolör parametrelerinin elde edilmesi.....	124
Şekil 5.27 : Çeşitli λ değerleri için, A = 2 kazanç payı ve φ = 45° faz payına sahip olan P ^I kontrolör parametrelerinin elde edilmesi.....	125

Şekil 6.1 : Kharitonov dikdörtgeni ve $K^1(s)$ 'in Mikhailov eğrisi.	134
Şekil 6.2 : Denklem 6.20'deki aralık polinomun $\omega \in [0,3]$ rad/sn aralığında değer kümelerinin oluşturduğu Kharitonov dikdörtgenleri.	135
Şekil 6.3 : $\omega = 2 rad/sn$ için Denklem 6.20'deki aralık polinomun değer kümesi.	136
Şekil 6.4 : Denklem 6.22'deki kompleks dereceli belirsiz polinom ailesinin $\omega = 2 rad/sn$ için dört Kharitonov polinomunun görüntüleri.	137
Şekil 6.5 : 3 tane parametre belirsizliğine sahip bir polinomun; (a) parametre uzayındaki belirsizlik kutusu (b) köşe polinomları ile etkin kenarlar arasındaki ilişki.	139
Şekil 6.6 : Denklem 6.29'un $\omega = 3 rad/sn$ 'deki değer kümeleri ve etkin kenarların görüntüsü.	141
Şekil 6.7 : Denklem 6.32'de verilen polinomun $0 \leq \omega < \infty$ frekans aralığında GD Mikhailov eğrisi.	142
Şekil 6.8 : Denklem 6.29'daki polinom ailesinin $\omega \in [0,5]$ rad/sn için değer kümelerini içine alan kenarlar kümesinin görüntüleri.	142
Şekil 6.9 : Denklem 6.35'te verilen polinom ailesinin $\omega = 1 rad/sn$ ve $\omega = 2 rad/sn$ için değer kümesi ve etkin kenarlar kümesinin görüntüsü.	145
Şekil 6.10 : Denklem 6.38'in değer kümesi ve etkin kenarlar kümesinin görüntüsü (a) $\omega=[0:0.2:1]$ rad/sn (b) $\omega=1 rad/sn$	145
Şekil 6.11 : Denklem 6.51'de verilen polinomu ailesinin $\omega \in [0,22]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	152
Şekil 6.12 : Denklem 6.51'in $p = [5.8, 6.6]$ aralığında 0.01 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	152
Şekil 6.13 : Denklem 6.53'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	153
Şekil 6.14 : Denklem 6.53'ün $c \in [4, 6]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	154
Şekil 6.15 : Denklem 6.55'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.	155
Şekil 6.16 : Denklem 6.55'in $c \in [-1, -0.7]$ ve $d \in [0.2, 0.5]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	155
Şekil 6.17 : Denklem 6.57'de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	156
Şekil 6.18 : Denklem 6.57'nin $c \in [7, 9]$ ve $d \in [1, 1.5]$ aralığında 0.2 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	157
Şekil 6.19: Denklem 6.59'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,1]$ rad/sn aralığında 0.05 adım aralıklı değer kümeleri.	158
Şekil 6.20 : Denklem 6.59'un $u \in [0.9, 1.2]$ ve $v \in [0.2, 0.4]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	158
Şekil 6.21 : Denklem 6.62'de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,6]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.	159
Şekil 6.22: Denklem 6.62'nin $u \in [1.1, 1.3]$, $v \in [0.3, 0.5]$, $c \in [-2.2, -2.1]$ ve $d \in [0.3, 0.4]$ belirsiz parametre aralığında 0.1 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	160
Şekil 7.1 : Belirsiz parametre uzayında dayanıklı kontrolör testi ve tasarımı aşamaları : (a) Bir sistemin seçilmesi (b) Sentez aşaması (c) Analiz aşaması.	162
Şekil 7.2 : Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli bir kontrol sistemi.	162
Şekil 7.3 : Denklem 7.6'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,90]$ rad/sn aralığında 1 adım aralıklı değer kümeleri.	167

Şekil 7.4 : Denklem 7.6'nın $p \in [-2.1, -1.4]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	168
Şekil 7.5 : Denklem 7.9'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,8]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	169
Şekil 7.6 : Denklem 7.9'un $c \in [-3.2, -2.7]$ ve $d \in [-4.1, -3.6]$ aralığında 0.1 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	170
Şekil 7.7 : Denklem 7.12'de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,1.5]$ rad/sn aralığında 0.1 adım aralıklı değer kümeleri.	171
Şekil 7.8 : Denklem 7.12'nin $c \in [-1.2, -0.8]$ ve $d \in [-0.3, -0.1]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.	172
Şekil 7.9 : Denklem 7.14'te verilen sistem ailesinde belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen kararlılık bölgeleri.	174
Şekil 7.10 : $k_p=1$ ve $k_i=10$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	174
Şekil 7.11 : $k_p=8$ ve $k_i=50$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	175
Şekil 7.12 : $k_p=8$ ve $k_i=170$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.	175
Şekil 7.13 : Denklem 7.15'ün u, v, c ve d belirsiz parametrelerinin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri: (a) $k_p=1$ ve $k_i=10$ için (b) $k_p=8$ ve $k_i=50$ için (c) $k_p=8$ ve $k_i=170$ için.....	176
Şekil 7.14 : Denklem 7.17'de verilen sistem ailesinde belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen kararlılık bölgeleri ($k_d=0.1$)...	178
Şekil 7.15 : $k_p=0.5, k_i=1.2$ ve $k_d=0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,2]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.	178
Şekil 7.16 : $k_p=8, k_i=2$ ve $k_d=0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,7.5]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı değer kümeleri.	179
Şekil 7.17 : $k_p=5, k_i=25$ ve $k_d=0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,6]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı değer kümeleri.	179
Şekil 7.18 : Denklem 7.18'in u, v, c ve d belirsiz parametrelerinin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri : (a) $k_p=0.5, k_i=1.2$ ve $k_d=0.1$ için (b) $k_p=8, k_i=2$ ve $k_d=0.1$ için (c) $k_p=5, k_i=25$ ve $k_d=0.1$ için..	180

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

\mathbb{C}	: Kompleks sayılar alanı
\mathbb{R}	: Reel sayılar alanı
\mathbb{R}^-	: Negatif reel sayılar
\mathbb{R}^+	: Pozitif reel sayılar
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
$j: = \sqrt{-1}$: Sanal sayılar
$\Re\{z\}$: $z \in \mathbb{C}$ 'nin reel kısmı
$\Im\{z\}$: $z \in \mathbb{C}$ 'nin sanal kısmı
\mathcal{L}	: Laplace dönüşümü
\mathcal{L}^{-1}	: Ters Laplace dönüşümü
$\Gamma(x)$: Gamma fonksiyonu
ω	: Açısal frekans (rad/s)
$\lfloor x \rfloor$: $x \in \mathbb{R}$ 'in alt tam sayıya yuvarlama işlemi, yani, $\max \{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}$
$\lceil x \rceil$: $x \in \mathbb{R}$ 'in üst tam sayıya yuvarlama işlemi, yani $\min \{n \in \mathbb{Z}: n \geq x\}$
\bar{z}	: $z \in \mathbb{C}$ 'nin kompleks eşleniği
${}_c D_t^\alpha$: c ve t limitleri ile α kesir dereceli integro-türev operatörü
${}_c D_t^q$: c ve t limitleri ile q kompleks dereceli integro-türev operatörü
$\Gamma(z)$: Gamma fonksiyonu
$E_a(z)$: Tek parametrelili Mittag–Leffler fonksiyonu
$E_{a,\beta}(z)$: İki parametrelili Mittag–Leffler fonksiyonu
$\mathcal{E}_z(v,a)$: Miller–Ross fonksiyonu
$H(t)$: Basamak (Heaviside) fonksiyonu, $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t > 0 \\ 0, & \text{eğer } t \leq 0 \end{cases}$
$G(s)$: Laplace tanım bölgesi sistem transfer fonksiyonu
$C(s)$: Kontrolörün Laplace tanım bölgesi gösterimi
$P(s)$: Karakteristik denklem
$C_t(s)$: Kazanç-Faz payı test edicisi transfer fonksiyonu
PI	: Oransal İntegral (Proportional-Integral) kontrolör
PID	: Oransal İntegral Türevsel (Proportional-Integral-Derivative) kontrolör
PI^λ	: Kesir dereceli PI kontrolör
λ	: İntegral teriminin kesir derecesi
μ	: Türev teriminin kesir derecesi
k_p	: Oransal kazanç sabiti
k_i	: İntegral kazanç sabiti
k_d	: Türevsel kazanç sabiti
r	: Referans giriş sinyali
y	: Çıkış sinyali
w_r	: Referans polinom
$\psi(s)$: Rasyonel fonksiyon
GD	: Genelleştirilen Değiştirilmiş
GKS	: Gerçek Kök Sınırı
KKS	: Kompleks Kök Sınırı
SKS	: Sonsuz Kök Sınırı
ORA	: Oustaloup yaklaşıklık metodu
KFPT	: Kazanç-Faz payı test edicisi

BIBO : Sınırlı Giriş Sınırlı Çıkış (Bounded Input Bounded Output)
LTI : Lineer Zamanla Değişmeyen (Linear Time Invariant)
CFI : Sürekli Kesir Açılımı (Continued Fraction Expansion)



ÖZET

Doktora Tezi

KOMPLEKS DERECELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ VE KONTROL İŞLEMLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

GÜLTEN ÇETİNTAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

204+xiv

2023

Danışman: Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI

Klasik türev ve integralleri kompleks sayı derecelerine genelleştiren kompleks dereceli matematik, kesirli analizin bir genellemesi olarak ele alınabilir. Kompleks dereceli sistemler üzerine yapılan çalışmalar oldukça sınırlıdır ve beraberinde birçok açık problem içermektedir. Çünkü bu sistemlerin fiziksel anlamı, zaman cevaplarında karşılaşılan sanal bileşen ve bu bileşenin ölçülememesi nedeniyle tam olarak anlaşılammaktadır. Bu sorunun üstesinden gelmek için eşlenik dereceli türev ve integral operatörleri kullanılmaktadır. Kompleks dereceli operatörler ancak eşlenik dereceli operatörüyle eşleştirildiğinde, reel değerli yanıtların ortaya çıktığı görülmüştür. Bu tez kapsamında, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizleri ve kontrol işlemlerinin gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir. Kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin birim darbe ve birim basamak cevapları elde edilmiş ve karakteristik özellikleri incelenmiştir. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizleri için grafiksel bir yöntem olan genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov (GD Mikhailov) kararlılık metodu bu sistemlere uyarlanmıştır. GD Mikhailov kararlılık metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar, kutup analizi tabanlı farklı yöntemler ile kıyaslanarak doğrulanmıştır. D-ayırıştırma yöntemi ile kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PI, PID ve kesir dereceli PI kontrolör ile kararlılaştırılması gerçekleştirilmiştir. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılığı incelenmiştir ve bu tür sistemler için Kharitonov teoreminin ve kenar teoreminin kullanılamayacağı gösterilmiştir. Kompleks eşlenik dereceli sistem ailesinin dayanıklı kararlılık analizi değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi kullanılarak ve ayrıca GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı bir yöntem kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Son olarak, parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için dayanıklı kontrolör tasarımı yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kompleks dereceli sistemler, kompleks eşlenik dereceli sistemler, kesir dereceli sistemler, Mikhailov kararlılık kriteri, kararlılaştırma, parametre belirsizliği, değer kümesi, sıfırın dışlanma prensibi, dayanıklı kontrol.

ABSTRACT

Phd. Thesis

PERFORMING OF STABILITY ANALYSIS AND CONTROL PROCESSES OF COMPLEX ORDER SYSTEMS

Gülten ÇETİNTAŞ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

204+xiv sayfa

2023

Supervisor: Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI

Complex order mathematics, which generalizes the classical derivatives and integrals to degrees of complex numbers, can be considered as a generalization of fractional calculus. Studies on complex order systems are very limited and include many open problems. Because the physical meaning of these systems cannot be fully understood due to the imaginary part encountered in time responses and the inability to measure this part. To overcome this problem, the conjugate order derivative and integral operators are used. It has been observed that the real valued responses occur only when the complex order operators are paired with their conjugated orders. In this thesis, it is aimed to perform the stability analyzes and control processes of the complex conjugate order systems. The unit impulse and unit step responses of the complex order and the complex conjugate order systems are obtained and their characteristic features are investigated. The generalized modified Mikhailov (GD Mikhailov) stability method, which is a graphical method for the stability analysis of complex conjugate order systems, is adapted to these systems. The results obtained using the GD Mikhailov stability method are verified by comparing with different pole analysis based methods. The stabilization of complex conjugate order systems with PI, PID and fractional order PI controller has been performed with D-decomposition method. The robust stability of complex conjugate order systems with parameter uncertainty is investigated and it is shown that the Kharitonov theorem and the edge theorem cannot be used for such systems. The robust stability analysis of the family of complex conjugate order systems is performed using the zero exclusion principle supported by the visualization of the value sets, and also a method based on the GD Mikhailov stability criterion. Finally, the robust controller design is made for the complex conjugate order systems with parameter uncertainty.

Keywords: Complex order systems, complex conjugate order systems, fractional order systems, Mikhailov stability criterion, stabilization, parameter uncertainty, value set, zero exclusion principle, robust control.

1. GİRİŞ

1.1 Konu ile İlgili Genel Bir Bakış

Tam sayı dereceli matematik (integer-order calculus), göz önüne alınan türev, integral ve bunlardan oluşan diferansiyel denklemlerin derecesinin tam sayı olduğu klasik matematiğin bir alt türünü ifade eder. Matematiğin erken dönemlerinde İngiliz bilim adamı Isaac Newton bir $f(x)$ fonksiyonunun farklı tam sayı dereceli türevlerini ifade etmek için $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ şeklinde bir gösterim kullanırken (n pozitif bir tam sayı), Alman matematikçi Gottfried Wilhelm Leibniz ise daha genel olarak $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ sembolünü göz önüne almıştır (Xue, 2017). Bu genel tanımlamalarla birlikte, türev derecesinin tam sayı olmadığı durumlar hakkındaki sorgulamalar da matematik dünyasında sürekli olarak gündeme gelmiştir. 1695 yılında Fransız matematikçi Guillaume François Antoine L'Hôpital'ın, Leibniz'e gönderdiği bir mektupta yukarıda verilen gösterim için sorduğu “*Derece 1/2 olsa ne olurdu?*” sorusuna Leibniz'in yanıtı “*Bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bir paradoksa yol açacak.*” şeklinde olmuştur (Leibniz, 1695a). Benzer bir yazışmanın yine Leibniz ile İsviçreli matematikçi Johann Bernoulli arasında gerçekleştiği bilinmektedir (Leibniz, 1695b). Yine Leibniz, İngiliz matematikçi John Wallis ile $\pi/2$ için sonsuz çarpım üzerine olan yazışmasında, $(1/2)$. dereceden türevi ifade etmek için $d^{1/2}y$ gösterimini kullanmıştır (Leibniz, 1697; Ross, 1977). Bu tartışmalar sonucunda bir fonksiyonunun türevine ait tam sayı olmayan farklı dereceleri belirtmek için Newton'un kullandığı gösterim yerine Leibniz'in gösteriminin kullanılması daha çok kabul görmüştür. L'Hôpital ve Leibniz tarafından tam sayılı olmayan türev için yapılan yukarıdaki yazışma üç asırdan fazla bir süredir tartışılan bir matematiksel konudur ve literatürde *kesir dereceli matematik (fractional calculus)* olarak bilinmektedir (Xue, 2017). İlerleyen zamanlarda bu yazışma matematik dünyasında hem türev hem de integralin derecesi için “*n derecesi kesirli, irrasyonel veya kompleks gibi herhangi bir sayı olabilir mi?*” şeklinde daha genel bir hale dönüşmüştür. Bu sorunun cevabı olumlu olarak karşılık bulmuş ve bu şekildeki daha genel türev ve integral için *kesir dereceli türev ve integral* yerine *keyfi dereceli*

(*arbitrary order*) türev ve integral tabirlerinin kullanılmasının daha doğru olabileceği belirtilmiştir (Das, 2011).

Kesir dereceli matematik alanındaki ilk sistematik çalışmalar 18. yüzyılın ortalarından başlayarak 19. yüzyıl boyunca devam etmiştir. İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (Euler, 1738), İtalyan matematikçi ve astronom Joseph-Louis Lagrange (Lagrange, 1849) ve Fransız araştırmacı Pierre-Simon Laplace (Laplace, 1820) kesir dereceli türev mantığının felsefesini ortaya koymuşlardır. 1819'da Fransız matematikçi Sylvestre François Lacroix, x 'in $(1/2)$. türevinin $2\sqrt{x/\pi}$ olduğunu göstermiştir (Lacroix, 1819). Buraya kadar yapılan çalışmalarda kesir dereceli türeve ait bir uygulama örneğine rastlanılmamaktadır. Bu kapsamda yapılan ilk çalışma, 1823 yılında Norveçli bir matematikçi olan Niels Henrik Abel tarafından eş zamanlı eğri (tautochrone veya izochrone) probleminde karşılaştığı bir integral denkleminin çözümünde kullandığı kesirli hesap uygulamasıdır (Ross, 1975). Abel'in bu çalışması Fransız matematikçi ve mühendis Joseph Liouville, Alman matematikçi Bernhard Riemann, İsveçli matematikçi Hjalmar Holmgren, Alman matematikçi Anton Grünwald, Rus matematikçi Aleksey Vasil'evich Letnikov, İsveçli matematikçi Magnus Gustaf Mittag-Leffler gibi çok sayıda matematikçiye ışık tutmuş, kesir dereceli türev ve integral için kendi tanımlarını literatüre katmalarını sağlamıştır (Ross,1977; Hilfer, 2000). Kesir dereceli matematiğin tarihsel gelişimi üzerine daha detaylı bilgi için Oldham ve Spanier (1974) ve Miller ve Ross (1993) incelenebilir. Oldham ve Spanier (1974) yaptıkları çalışmada 1695'ten günümüze rapor edilen gelişmelerin yıldan yıla tarihsel gelişimini kronolojik olarak ele alırken; Miller ve Ross (1993), Euler'den günümüze kadar olan tarihsel gelişimi ve matematiksel teoriyi ayrıntılı bir şekilde sunmuştur.

Literatürde kesir dereceli matematiğin temelleri ve teorisine odaklanan çok sayıda temel kitap bulunmaktadır. Bunlardan bazıları yıl sırasına göre Caputo (1969), Oldham ve Spanier (1974), Samko ve diğ. (1993), Kiryakova (1993), Miller ve Ross (1993), Rubin (1996), Podlubny (1999), Hilfer (2000), Diethelm ve Ford (2002), Sabatier ve diğ. (2007), Baleanu ve diğ. (2012) ve Zhou (2014) olarak sayılabilir. Yukarıda bahsedilen tarihsel süreç içinde kesir dereceli matematik ve uygulamaları üzerine çok sayıda konferans düzenlenmiş, konu üzerine yeni gelişmeler ve çalışmalar bilim dünyasına sunulmuştur. Bu alanda ilk uluslararası konferans Ross tarafından 1974 yılında New Haven Üniversitesinde 94 matematikçinin katılımı ve 26 makalenin incelenmesi ile gerçekleştirilmiştir (Hilfer, 2000). 1975'ten günümüze kadar olan dönemde kesir dereceli matematik ile ilgili olarak

değişik alanlarda birçok konferans düzenlenmiş olup, bunlardan en dikkat çekenini bir çalıştay olarak başlayıp ilerleyen süreçte katılımın artması nedeniyle düzenli bir konferans haline dönüşen *Fractional Differentiation and its Applications (FDA)* serisidir. Kesir dereceli matematik üzerine oluşturulan kitap, konferans, dergi, paket program ve patent listesi için Machado ve diğ. (2011) referansı incelenebilir.

Türev ve integral operatörleri göz önüne alındığında, kesir dereceli analizin tam sayı dereceli analiz kadar yaygın olarak kabul edilen fiziksel veya geometrik tam bir açıklaması neredeyse yoktur. Bu nedenle, kesir dereceli bir operatörün tam sayı dereceli operatöre göre tanımlarını ve analizlerini yapmak kolay değildir. Bu zorluktan dolayı uzun yıllar boyunca yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu, tam sayı dereceli türevlerin kullanıldığı diferansiyel denklemlerle modellenen klasik tam sayı dereceli sistemlere odaklanmıştır. Zamanla hesaplama tekniklerinin ve uygulamalı matematiğin gelişmesiyle birlikte, bazı fiziksel sistemlerin kesir dereceli diferansiyel denklemlerle gerçeğe daha uygun bir şekilde tanımlandığı keşfedilmiştir (Matignon, 1996; Monje ve diğ., 2010). Böylece kesir dereceli bu diferansiyel denklemler ile modellenebilen dinamik sistemler, kesir dereceli sistemler olarak adlandırılmıştır. Bunun sonucu olarak, kesir dereceli sistemler klasik tam sayı dereceli sistemleri içine alan daha geniş bir sistem kümesi olarak ortaya çıkmıştır (Naifar ve Makhlof, 2022).

Bilimin gelişmesi ile birlikte özellikle son otuz yılda kesir dereceli matematik çalışmaları değişik mühendislik alanlarında, özellikle de bu tez çalışmasının içinde bulunduğu kontrol mühendisliği alanında kendisini göstermeye başlamıştır. Japon bilim adamı Shunji Manabe'nin tam sayı dereceli olmayan sistem analizini gerçekleştirmesi (Manabe, 1960), Fransız bilim adamı Denis Matignon'un kesirli dereceli sistemler için kararlılık analiz yöntemi geliştirmesi (Matignon, 1996), yine Fransız bilim adamı Alain Oustaloup'un kesirli dereceli sistemler için matematiksel yaklaşıklık metodlarını önererek kontrol sistem tasarımı yapması (Oustaloup, 1991) kesirli matematiğin gerçek dünyadaki kontrol uygulamalarında bir kilometre taşı olarak kabul edilir. Sistemlerin modellenmesi, filtreleme, kararlılık analizi, zaman ve frekans analizleri, kontrol sistem tasarımı, belirsiz yapı sistemler üzerine kesir dereceli diferansiyel denklemlerin kullanımı büyük ilgi görmüş, konu üzerine çok sayıda temel kaynak yazılmıştır. Bunlardan öne çıkanlar arasında Sabatier ve diğ. (2007), Das (2008), Lakshmikantham ve diğ. (2009), Monje ve diğ. (2010), Caponetto ve diğ. (2010), Baleanu ve diğ. (2011), Petráš (2011a), Jiao ve diğ.

(2012), Valério ve Costa (2013), Padula ve Visioli (2015) vb. kaynaklar sayılabilir. 2015 yılından sonra konu üzerine basılan kitap ve yayın sayısı ise çok fazladır.

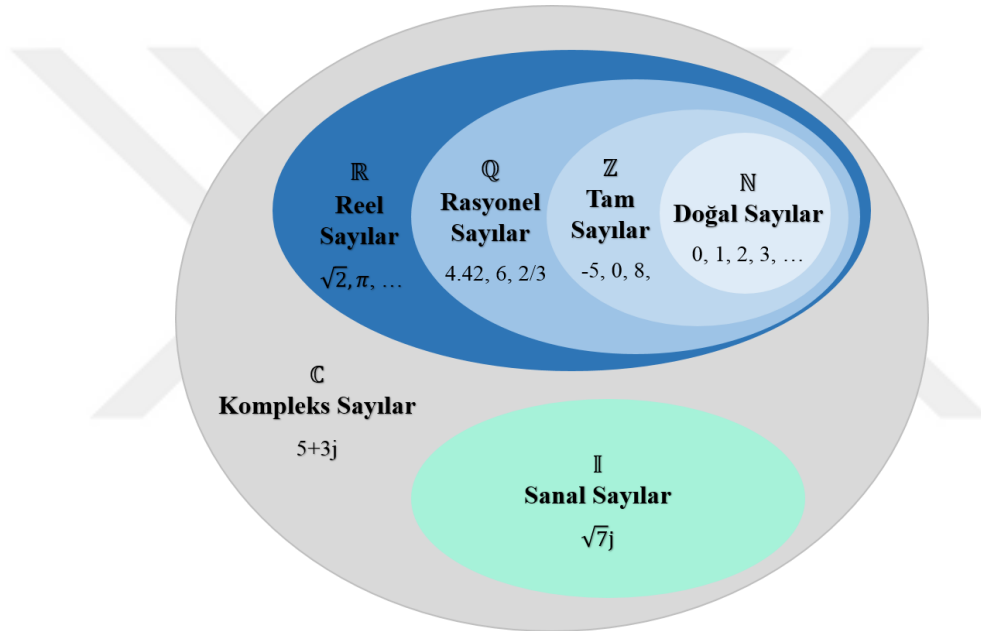
Kesir dereceli operatörlerin sistem modelleme ve kontrol alanında kullanımını kolaylaştırmak için çok sayıda yazılım paketi geliştirilmiştir. MATLAB/Simulink platformu optimizasyon, modelleme, kontrol sistem analizi ve tasarımı ile ilgili çok çeşitli araca sahip olduğundan kesir dereceli sistemlerin analizi için en çok tercih edilen çalışma ortamlarından birisi olmuştur (Matusu, 2011). Bu platform üzerinde oluşturulan araç kutuları içinde en yaygın olarak kullanılanları: Oustaloup ve ekibi tarafından geliştirilen CRONE (Oustaloup ve diğ, 2000a), Valério tarafından oluşturulan Ninteger (Valério ve Costa, 2004; Valério, 2005a), Xue ve arkadaşlarının tasarladığı FOTF (Chen ve diğ, 2009; Xue ve Chen, 2015) ve Tepljakov'un geliştirdiği FOMCON (Tepljakov ve diğ, 2011; Tepljakov, 2017a; Tepljakov ve diğ, 2020) şeklinde sıralanabilir.

1.1.1 Kompleks dereceli analizin tarihsel gelişimi ve literatür özeti

Genel anlamda tanımlamak gerekirse, kesir dereceli matematik (veya kısaca kesirli analiz) türev ya da integral operatörlerine ait üslerin keyfi dereceden seçildiği bir matematiksel alandır. Burada keyfi dereceden kasıt türev veya integral operatörünün derecesinin sadece tam sayı olmayıp, reel sayılardan kompleks sayılara kadar tüm sayı türlerini kapsamasıdır. Yani keyfi derece ile operatörün Şekil 1.1'de görülen sayılar kümesindeki bütün sayı türlerini derece olarak alabileceği anlaşılmalıdır. Fakat literatürdeki kavram karmaşıklığından dolayı çoğu kaynakta kesir dereceli analiz kavramı sadece reel dereceli durumlar için kullanılmıştır. Klasik türevlerin ve integrallerin derecelerini kompleks sayılara kadar genelleştiren “*kompleks dereceli analiz*”, kesirli analizin doğal bir genellemesi olarak ele alınabilir. Bu açıdan bakıldığında, kompleks dereceli analiz kavramının en geniş tanım olduğu açıktır. Bu tez çalışmasında türev ve integral elemanlarına ait operatörlerin üslerinin kompleks olduğu durumlar “*kompleks dereceli analiz*”, reel olduğu durumlar ise “*kesir dereceli analiz*” adı altında ele alınıp incelenmiştir.

Literatürde bulunan çalışmalar göz önüne alındığında, tam sayı dereceli olmayan analiz üzerine şimdiye kadar yapılan çalışmaların çoğu reel dereceli kesirli analizin kullanımına yönelik olup, kompleks dereceli analiz üzerine yapılan çalışmalar ise oldukça sınırlı kalmıştır ve beraberinde birçok açık problem içermektedir (Miller ve Ross, 1993; Samko ve diğ, 1993; Valerio ve Costa, 2013; Sabatier ve diğ, 2015). Bunun en önemli nedeni kompleks sayıları ifade eden j 'nin türev ve integral derecesinde kullanımının fiziksel

olarak anlaşılmasındaki güçlüktür. Kompleks bir sayı sanal bileşene sahip olduğundan kompleks dereceli operatörlerle uğraşmak reel ve tam sayı dereceli operatörlerle uğraşmaya göre daha zordur, ayrıca analitik olarak çok daha fazla parametre ile uğraşmak zorunda kalınmaktadır (Abdulwahhab, 2020). Ayrıca kompleks dereceli bir sistemin zaman cevabı kompleks değerlidir, yani hem reel hem de sanal bileşenleri bulunmaktadır. Dolayısıyla, sanal bileşene ait zaman cevabının anlamı da henüz tam olarak izah edilememektedir (Hartley ve diğ, 2005; Tare ve diğ, 2018; Ortigueira, 2022). Bunun yanı sıra, kompleks dereceli analizde çalışma alanı Riemann yüzeyi ile sınırlıdır (Adams ve diğ, 2010a; Ortigueira ve diğ, 2011). Bu zorluklardan ötürü kompleks dereceli analiz üzerine yapılan çalışmalar uzun yıllar boyunca oldukça sınırlı kalmıştır.



Şekil 1.1 : Matematikte kullanılan genel sayı kümeleri şeması.

Geleneksel tam sayı dereceli diferansiyel denklemler kullanılarak yapılan modellemenin yetersiz kaldığı durumlarda, kesir ve kompleks dereceli diferansiyel denklemleri kullanarak dinamik sistemleri modelleme işlemi daha gerçekçi ve doğru bir modelleme imkanı sağlamaktadır. Bu durum, kompleks dereceli sistem modellerinin kontrol problemlerinde kullanılmasının önünü açmaktadır (Tare ve diğ, 2018). Bununla birlikte, kompleks dereceli analizin matematiği uzun zaman önce keşfedilmiş ve geliştirilmiş olmasına rağmen, kompleks dereceli sistem modellemesinde kullanımı tam sayı ve reel dereceli fonksiyonlar kadar kolay değildir. Makris ve Constantinou'nun bu konuda yapmış olduğu “Herhangi bir fonksiyonun kompleks dereceli türevi, harmonik fonksiyonlarının kompleks türevlerinin toplamı olarak yorumlanabilir. Buna göre, kompleks dereceli

türevler zamana bağlı bir fonksiyonun harmonik bileşenlerinin fazını ve genliğini kesir dereceli türevlerden daha karmaşık bir şekilde modüle eder. Reel değerli ve kompleks değerli zaman türevleri arasındaki en önemli fark, ikinci durumda faz modülasyonunun frekansa bağlı olmasına karşın birinci durumda olmamasıdır.” şeklindeki açıklaması bu durumu en iyi açıklayan izah olarak kabul edilir (Makris ve Constantinou, 1993). Kompleks dereceli türevler hem faz hem de genlik açısından frekansa bağlı fonksiyonlar üretebildiğinden, bu özellik kompleks dereceli modellerin geliştirilmesinde kilit bir rol oynamaktadır (Hollkamp ve diğ, 2018).

Kompleks dereceli türeve ait ilk tanımlar henüz erken dönemlerde 1930 yılında Post tarafından verilmiştir (Post, 1930). Kompleks dereceli türev operatörü ilk kez Ross ve Northover tarafından Euler tipi bir denklemi çözmek için kullanılmıştır (Ross ve Northover, 1978). Saf yani tamamen sanal dereceli integrallere ait tanımlara Kober'in (1941) çalışmasında, sanal dereceli türevlere ise Love'in (1971) çalışmasında rastlanılmaktadır. Kompleks dereceli türev ve integrallere ait genel tanım, incelemeler ve Laplace dönüşümleri için Samko ve diğ. (1993), Kilbas ve diğ. (2006) ve Valério ve Costa (2011) araştırmaları incelenebilir. İlk kompleks dereceli türev uygulamasının 1991'de Makris tarafından yapıldığı rapor edilmektedir (Makris, 1991). Makris ve Constantinou çalışmalarında kompleks dereceli analizi başarılı bir şekilde viskoelastisiteye uygulayarak, lineer viskoelastik modellerde zaman türevinin derecesinin ve katsayılarının kompleks sayılara genelleştirilebileceğini göstermiştir (Makris ve Constantinou, 1993). Bu yaklaşımda, depolama ve kayıp modülleri iki bağımsız reel fonksiyon olarak değil, kompleks bir fonksiyonun reel ve sanal bileşenleri olarak kabul edilmiştir. Bu durumda basit viskoelastik modellerin daha güçlü hale geldiği gözlemlenmiştir. Modeldeki değişken katsayılarının kompleks yapılmasının modelde daha yüksek dereceli zaman türevlerinin eklenmesine eşdeğer olduğu, üslerinin kompleks hale dönüştürülmesinin ise zamana bağlı fonksiyonun harmonik bileşenlerinin fazının frekansa bağlı modülasyon ürettiği şeklinde bir sonuca neden olduğu bulunmuştur. Reel katsayı ve reel dereceli türevler ile bu durumun gerçekleştirilemeyeceği fark edilmiştir. Ayrıca Makris bir başka tamamlayıcı makalesinde, elastik temellerin tepkisinin modellenmesinde Kelvin tipi kompleks dereceli türev içeren bir model önermiştir (Makris, 1994). Bu makalede kompleks dereceden diferansiyel denklemleri çözmek için frekans ve zaman alanı algoritmaları geliştirilmiştir. Makris, kompleks parametrelili modelleri yapısal modellemede bu kadar çekici kılan şeyin sonuçların mükemmel uyumu ve parametre sayısındaki ekonomi olduğunu vurgulamıştır.

Bundan başka, Atanacković ve diğ. (2018), kompleks dereceli Caputo türevlerini içeren doğrusal olmayan sınır değer problemlerini çalışmıştır.

Kompleks dereceli integralin geometrik ve fiziksel anlamı üzerine çalışmalar Nigmatullin ve Mehaute (2005) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada, kesirli integralin sanal kısmının ayırık ölçekli değişmezlik olgusuyla ilişkili olduğu ve yalnızca gerçek düzenli (ayırık) fraktallar için gözlemlendiği sonucuna varılmıştır. Açıkça ifade edilen ayırık yapıya sahip fraktallar için var olan ölçek değişmezliği özelliğine dayanarak, kompleks dereceli türev ve integrallerin geometrik ve fiziksel anlamını anlamının mümkün hale geldiği vurgulanmıştır. Silva ve diğ. (2006) tarafından yapılan çalışmada altı bacaklı robotlar için ayak-zemin etkileşiminin kompleks dereceli dinamikleri incelenmiştir. Kompleks dereceli dinamiklerin anlamının ve sistem parametrelerine etkisinin çalışmaya açık problemler içerdiği rapor edilmiştir.

Reel kesir dereceli elektriksel elemanların kompleks dereceli karşılığına genelleştirilmesi konusu Machado (2013) ve Si ve diğ. (2017) tarafından çalışılmıştır. Özellikle Si ve diğ. (2017) tarafından yapılan çalışmada sinüzoidal voltaj sinyali tarafından uyarıldığında bir kompleks dereceli kondansatörün akım yanıtına ait faz ve genliğin kondansatör empedansının kompleks derecesinin reel ve sanal kısımlarından etkilendiği gösterilmiştir. Derecenin reel kısmının çıkış sinyalinin fazını etkilediği ve sanal kısmının ise hem kompleks dereceli kondansatör hem de kompleks dereceli memristör için genliği etkilediğine dair bazı ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Hollkamp ve diğ. (2018) tarafından yapılan çalışmada homojen olmayan ayırık sistemlerin dinamik tepkisinin benzetimini yapmak ve yüksek doğruluk ile model derecesini indirmek için kompleks dereceli diferansiyel modellerin kullanımı araştırılmıştır. Kompleks dereceli diferansiyel denklemlerin kullanımının geleneksel tam sayı dereceli modellere göre uygulanabilir ve güçlü bir alternatif sağladığı gösterilmiştir.

Kompleks dereceli sistemler, kompleks dereceli türevlerle karakterize edilen bir diferansiyel denklem tarafından oluşturulan sistemlerdir. 2001 yılında Cois ve arkadaşları tarafından kompleks dereceli durum-uzay gösterimine sahip sistemleri incelemek için yeni bir modelleme aracı önerilmiş ve bu sistemler için kararlılık koşulları oluşturulmuştur (Cois ve diğ, 2001). Bununla birlikte, yukarıda bahsedildiği gibi kompleks dereceli türevler tek başına kullanıldığı zaman kompleks değerli zaman cevabı sonuçları verir ve bu nedenle sınırlı ilgi alanına sahiptir. Ayrıca Ortigueira (2022) kompleks dereceli türevlerin tek başına hermityan olmadığını, dolayısıyla gerçek hayattaki olayları modellemek için her

zaman uygun olmadığını göstermiştir. Bu sınırlılığın üstesinden gelmek için, modellemede eşlenik dereceli türevlerin yani dereceleri kompleks eşlenik olan türev çiftlerinin beraber kullanılması önerilmiştir. İlk defa Hartley ve diğ. (2005), reel değerli bir giriş işareti için yine reel değerli bir çıkış işareti veren kompleks eşlenik dereceli integro-türev kavramını tanıtmışlardır. Bir kompleks eşlenikli türev operatör çifti, dereceleri itibarı ile görünüşte kompleks dereceli olup ancak birbirinin eşleniği olduğu için sonuçta reel kesir dereceli türeve karşılık gelen operatörlerdir. Hartley ve arkadaşları, bu çalışmada reel değerli zaman cevabı elde etmek için kompleks dereceli türevleri eşleniği ile birleştirilerek kompleks eşlenik dereceli türevler oluşturmuşlar ve bu türevlerin frekans tepkilerini elde etmişlerdir. Bu sonuçlar, kompleks eşlenik dereceli türevlerin aynı zamanda kontrol sistem tasarımında faydalı olabileceğini göstermiştir. Devam eden çalışmalarda, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizleri gerçekleştirilmiş, zaman ve frekans bölgesindeki davranışları araştırılmıştır (Adams ve diğ, 2007; Adams ve diğ, 2010a; Adams ve diğ, 2010b). Bu çalışmaların sonucunda kompleks eşlenik dereceli bir sistemde kompleks derecenin ($q = u + jv$) hangi değer aralığında kararlı ve nedensel olduğu belirlenmiştir. Tüm kararlı ve nedensel kompleks eşlenik dereceli sistemlerin derecelerinin, ± 1 merkezli veya (u, v) -derece düzleminde bulunan birim yarıçaplı çemberler içinde yer aldığı görülmüştür. Adams ve diğ. (2012) çalışmalarında kompleks eşlenik dereceli sistemlerin hem zaman hem de frekans alanlarında bir ölçek değişmezliği özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca temel bir kompleks eşlenik dereceli sistemin frekans alanı özellikleri için tasarım ilkeleri geliştirilmiştir.

Kompleks eşlenik dereceli türev operatörleri kullanılarak Pinto ve Machado (2011a) kompleks dereceli Van der Pol osilatörü, Pinto ve Machado (2011b) zorlanmış bir Van der Pol osilatörü ve Pinto ve Machado (2011c) iki ayaklılarda hareket için yeni bir kompleks dereceli merkezi model üretici modelini ele almışlardır. Pinto ve Machado (2011c), bipedlerde bacak ritimleri ile tanımlanan periyodik çözümlerin meydana geldiği parametre bölgelerini analiz etmiştir. Ayrıca bu çalışmada kompleks eşlenik dereceli türev ile periyodik çözümlerin genliğinin ve periyodunun değişimi de gözlemlenmiştir. Atanacković ve diğ. (2015), kompleks eşlenik dereceli Kelvin-Voigt modeli ile tanımlanan viskoelastik temel üzerine yerleştirilmiş elastik bir çubuğun yanal titreşimlerinin kararlılık problemini analiz etmiştir. Ayrıca Atanacković ve diğ. (2016) Kelvin-Voigt tipi viskoelastik cisim, Atanacković ve diğ. (2017) genelleştirilmiş Zener tipi viskoelastik cisim ve Atanacković ve Pilipovic (2017) ise ısının iletimi için kompleks eşlenik dereceli türevleri içeren

denklem tanımlarını önermişlerdir. Pinto ve Carvalho (2015a) ve (2015b), çalışmalarında HIV enfeksiyonunda ilaç direnci için lineer olmayan kompleks eşlenik dereceli bir model önermiştir. Bu modelde kompleks derecenin sanal kısmı sabit tutularak reel kısmının değişen değerleri için benzetim çalışmaları yapılmış ve sonuçların tam sayı dereceli zaman gecikmeli eşdeğerine benzer olduğu gösterilmiştir.

1.1.2 Kontrol mühendisliği alanında kesir dereceli ve kompleks dereceli analiz

20. yüzyılın ortalarından itibaren, kontrol mühendisliği alanına kesir dereceli analizin uygulanmasına yönelik ilk çalışmalar ortaya çıkmaya başlamıştır. 1945'te Bode'nin geri beslemeli yükselteç üzerine yaptığı ve ideal kesim frekansına dayalı tasarım, kesir dereceli kontrol üzerine rapor edilen ilk çalışmadır (Bode, 1940, 1945). Bode'nin tanımlamış olduğu açık çevrim ideal transfer fonksiyonu, ilerleyen zamanlarda kesir dereceli kontrol sistem tasarımında temel kilometre taşlarından biri olmuştur (Bandyopadhyay ve Kamal, 2015). 1958 yılında Tustin kesir dereceli kontrol mantığı ile ağır nesnelere konum kontrolü için bir tasarım önermiştir (Tustin ve diğ., 1958). 1960 yılında Manabe, kesir dereceli integratörün frekans cevabı ve geçici zaman cevabını derecenin kesirli değişimine göre ayrıntılı olarak incelemiş, elde edilen sonuçları kontrol sistem tasarımına uygulamıştır (Manabe, 1960). Oustaloup liderliğindeki Fransız araştırma grubu CRONE (Oustaloup, 1991; Oustaloup ve diğ., 1999), kesirli dinamik sistemlerin tanımlanması ve kontrolü için bir dizi araç geliştirmiştir (Tepljakov, 2017b). Oustaloup (1991), dinamik sistemlerin kontrolü için kesir dereceli algoritmaları incelemiş ve CRONE adı verilen kontrolörün klasik PID kontrolöre göre daha üstün bir performans sergilediğini göstermiştir. Zaman içinde CRONE kontrolör üç farklı nesil şeklinde türetilmiş olup, bu kontrolörlerin birinci ve ikinci nesilleri reel kesir dereceli integro-türev konseptine dayanmaktadır (Oustaloup ve diğ., 1999).

1994 yılında Lurie tarafından önerilen TID (Tilted Integral Derivative) kontrolörü, klasik PID kontrolörün kesir dereceli alandaki ilk örneği olarak karşımıza çıkmaktadır (Lurie, 1994). PID kontrolörden en önemli farkı, TID kontrolörün ayrı bir oransal parametre içermeksizin tam sayı dereceli integratörün yanına ilave olarak T ile adlandırılan ve $s^{-1/n}$ ile ifade edilen kesir dereceli bir integratör içermesidir. Bununla birlikte, TID kontrolör zaman içinde beklenen ilgiyi görmemiş ve üzerinde fazla çalışma rapor edilmemiştir. Kesir dereceli kontrol için buraya kadar bahsedilen ilk çalışmalara ait daha ayrıntılı bilgi için Manabe (2003), Chen ve diğ. (2009) ve Shah ve Agashe (2016) referansları incelenebilir.

Podlubny (1999b), geleneksel PID kontrolörüne bir genelleme olarak türev ve integral derecelerini reel kesirli sayıları içerecek şekilde genişletmeyi önermiş ve genelleştirilmiş bu kontrolörü *kesirli dereceli PID* veya kısaca $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör olarak adlandırmıştır. Bu kontrolör yapısı, kontrolörün kazançları (k_p, k_i, k_d) ve integral ile türevin dereceleri (λ, μ) olmak üzere ayarlanması gereken beş parametreye sahiptir. Bu özellik tasarımcının tasarım gereksinimlerini karşılayabilmesi için daha fazla esneklik sağlamaktadır. Podlubny ayrıca tam sayılı ve kesir dereceli kontrol sistemlerini karşılaştırarak geleneksel PID kontrolörüne kıyasla kesir dereceli PID kontrolörünün üstünlüğünü göstermiştir. Podlubny'nin kesir dereceli PID kontrolörleri literatüre kazandırmasıyla, kesir dereceli kontrol alanı kontrol mühendisliğinin son zamanlarda en çok ilgi gören alanlarından birisi haline gelmiştir (Shah ve Agashe, 2016). Kesir dereceli bir PID kontrolörün avantajları şu şekilde özetlenebilir:

- ✓ Beş farklı parametreye sahip olduğundan, klasik PID kontrolörde mümkün olmayan beş farklı spesifikasyon aynı anda başarılabilir.
- ✓ Daha yüksek dereceli sistemler için klasik PID kontrolörün performansı düşerken, kesirli PID kontrolör daha iyi sonuçlar verir (Das ve diğ, 2011a; Shah ve Agashe, 2013).
- ✓ Uzun zaman gecikmeli bir sistem için, kesir dereceli bir PID kontrolör, klasik PID kontrolörden daha iyi sonuçlar sağlar (Cheng ve Hwang, 2006; Feliu-Batlle ve diğ, 2009; Pan ve diğ, 2011; Muresan ve diğ, 2015)
- ✓ Klasik PID kontrolöre göre kesirli PID kontrolör daha dayanıklı ve kararlıdır (Monje ve diğ, 2008; Petráš, 2008; Tavazoei ve Haeri, 2009).
- ✓ Klasik PID kontrolör kullanarak doğrusal olmayan sistemleri kontrol etmek zordur, halbuki kesir dereceli PID kontrolör daha iyi performans gösterebilir (Barbosa ve diğ, 2007; Das ve diğ, 2011b).

Kesir dereceli PID kontrolörler; doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) sistemler (Kesarkar ve Selvagesan, 2015; Zhong ve Li, 2015), doğrusal olmayan sistemler (Barbosa ve diğ, 2007; Ijaz ve diğ, 2015; Junyi ve Chen, 2015), çok girişli çok çıkışlı sistemler (Sharma ve diğ, 2015), zaman gecikmeli sistemler (Hamamci, 2007; Bettayeb ve diğ, 2017) vb. gibi farklı özelliklerdeki sistemler için başarı ile kullanılmıştır. Görüldüğü üzere, yapısındaki kesir dereceli özellik nedeniyle kesir dereceli PID kontrolörün literatürde önemli bir araştırma alanı haline geldiği açıktır.

Kesir dereceli matematik, PID kontrol stratejilerinden farklı olarak diğer kontrol yöntemlerinde de kendisini göstermektedir. Örneğin, H_2 ve H_∞ kontrolörleri için Malti ve

diğ. (2003) çalışmasında kesir dereceli bir SISO sisteminin H_2 normunun hesaplanması gösterilmekte, Petráš ve Hypiúsova'nın (2002) çalışmasında ise H_∞ denetleyicilerinin sayısal minimizasyon yoluyla tasarımı verilmektedir. Ayrıca adaptif kayan kipli kontrol, model referans adaptif kontrol, yüksek kazançlı adaptif kontrol, ileri-geri fazlı kontrol sistemleri gibi değişik alanlarda kesir dereceli matematiğin farklı uygulamaları rapor edilmiştir (Hamamci ve diğ, 2008; Ladaci ve Charef, 2011; Shah ve Agashe, 2016).

Kontrol alanında kompleks dereceli türev operatörlerinin kullanımı, üçüncü nesil CRONE kontrolörün tanıtılmasıyla beraber kullanılmaya başlandı (Lanusse ve diğ, 1993). Üçüncü nesil CRONE kontrolü, birinci ve ikinci nesil CRONE kontrol tekniklerinin geliştirilmesini temsil eder. Bu yeni yapıda, kontrol sistemlerinin dayanıklı tasarımını sağlamak ve daha fazla belirsizliğin üstesinden gelmek için açık çevrim transfer fonksiyonunda kompleks dereceli bir integratör kullanılmıştır. Böyle bir kontrolör kullanmanın avantajı, reel kesir dereceli muadilinden daha fazla esneklik sağlamasıdır. İntegratörün reel ve sanal kısımlarının, kazanç ve faz yanıtlarının bağımsız bir şekilde tasarımına yol açtığı ve dolayısıyla kontrol sistemlerinin dayanıklı tasarımı için uygun olduğu görülmüştür (Jacob ve diğ, 2016). Böylelikle kompleks dereceli operatörlerin kontrol sistemlerinde kullanımı artan bir ilgi görmeye başlamıştır. Tam sayı ve kesir dereceli kontrolörün bir uzantısı olarak, kompleks dereceli kontrolör daha fazla sayıda ayarlanabilir parametreye sahiptir, bu da kontrolör tasarımını daha esnek hale getirmekte, daha fazla gereksinimi karşılayabilmekte ve sistem için daha iyi dinamik ve kararlı durum performansı elde edilmesini sağlamaktadır (Guefrachi ve diğ, 2017a; Zheng ve diğ, 2021). CRONE ekibinin araştırmaları bu bağlamda en gelişmiş çalışmalardan biri olmuştur (Lanusse ve diğ, 1993; Sabatier ve diğ, 2015). CRONE kontrolünden esinlenerek Khandani ve diğ. (2012), DC motorun hızını kontrol etmek için kompleks dereceli integral kullanılarak frekans bölgesi analizine dayalı kompleks dereceli kontrolör tasarlamıştır. Kontrolörün parametreleri, istenen geçiş frekansı, kazanç ve faz marjı ile ayarlanmıştır. Shahiri ve diğ. (2015) tarafından doğrusal olmayan ve zamanla değişen bir proton değişim membranlı yakıt pili sisteminde oksijen fazlalığı oranını düzenlemek için bir kompleks dereceli kontrolör geliştirilmiştir. Bu kontrolör, model belirsizliğine karşı yakıt pili için dayanıklı performans ile birlikte iyileştirilmiş zaman alanı indeksleri sağlayan üçüncü nesil CRONE kontrolör kavramına dayanmaktadır. Ayrıca proton değişim membranlı yakıt pili için standartlaştırılmış K-şeması (K-chart) kullanılarak kompleks dereceli kontrolör tasarımı Shahiri ve diğ. (2016a)'da ve geleneksel MIGO (M-kısıtlı integral kazanç

optimizasyonu) algoritmasının genişletilmiş şekli olan kompleks dereceli-MIGO algoritması kullanılarak bir kompleks dereceli PI kontrolör tasarımı ise Shahiri ve diğ. (2016b)'de yapılmıştır.

Kompleks dereceli PID kontrolör için değişik öneriler literatüre girmeye başlamıştır. İkinci dereceden zaman gecikmeli rezonans sistemlerini kontrol etmek için kompleks dereceli PID^{x+iy} kontrolör yapısı Guefrachi ve diğ. (2017a) ve kompleks dereceli $PI^{x+iy}D$ kontrolör yapısı ise Guefrachi ve diğ. (2017b) tarafından yapılan çalışmalarda önerilmiştir. Her iki kontrolör yapısında da optimize edilmesi gereken beş parametre (x, y, k_p, k_i, k_d) bulunmaktadır. Kontrolörün beş parametresi ile beş tasarım gereksinimi karşılanmaktadır. Kompleks dereceli kontrollü sistemin parametrik belirsizliklere, yüksek frekanslı gürültüye ve çıkış bozukluklarına karşı dayanıklılığa sahip olduğu gösterilmiştir. Hanif ve diğ. (2018) tarafından yapılan çalışmada Genetik Algoritma ayarlama yöntemi kullanılarak kompleks dereceli PID ($PI^{x+iy}D$) kontrolör tasarımı yapılmıştır. Moghadam ve diğ. (2018) tarafından yapılan çalışmada kesir ve kompleks dereceli PI kontrolör için bir ayarlama yöntemi sunulmuştur. Önerilen yaklaşım, İntegral Mutlak Hata (IAE: Integral Absolute Error) duyarlılığının değiştirilmiş bir versiyonuna dayanmaktadır. Tare ve diğ. (2018) tarafından yapılan çalışmada kesir dereceli sistemleri kontrol etmek için iki farklı tipte kompleks dereceli PID kontrolör önerilmiştir. Kontrolörler genetik algoritma tekniği kullanılarak tasarlanmıştır. Önerilen kontrolörlerin etkinliği, optimum şekilde tasarlanmış tam sayı dereceli ve kesir dereceli PID kontrolörler ile karşılaştırılmıştır. Önerilen kompleks dereceli PID kontrolörünün daha iyi performans gösterdiği ve iyileştirilmiş zaman alanı yanıtlarıyla sonuçlandığı simülasyonlar aracılığıyla kanıtlanmıştır. Zheng ve diğ. (2019) tarafından yapılan çalışmada D-ayırıştırma yöntemi kullanılarak zaman gecikmeli sistemler için kompleks dereceli PI ($PI^{\lambda+\mu i}$) kontrolör tasarımı yapılmıştır. Abdulwahhab (2020) tarafından yapılan çalışmada birinci dereceden zaman gecikmeli bir düşük basınçlı akan su devresi için hem kompleks dereceli PID kontrolör hem de reel dereceli bir PID kontrolör tasarımı sunulmuştur. Kompleks dereceli PID kontrolörünün tasarımı, reel dereceli PID kontrolöründen daha karmaşık olmasına rağmen, kompleks dereceli PID kontrolör ile gerekli tasarım spesifikasyonunun daha doğru bir şekilde elde edildiği görülmüştür.

Son zamanlarda, daha karmaşık yapıda ve daha çok kontrolör parametresine sahip kompleks dereceli PID kontrolör tasarımları önerilmiştir. Sekhar ve diğ. (2020) tarafından yapılan çalışmada CNT Al-Mg hibritlerinin kompozit işlenmesi sırasında yüzey

pürüzlülüğü oluşumunu etkili bir şekilde kontrol etmek için kompleks dereceli bir PID ($PI^{\alpha+j\beta}D^{\gamma+j\theta}$) kontrolörü tasarlanmıştır. Tasarlanan kompleks dereceli kontrolörün performansı, işlenmiş yüzey pürüzlülük sistemi için geleneksel PID ve kesirli dereceli PID kontrolörlerle karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, kompleks dereceli PID kontrolörün kontrol sinyali (besleme hızı) ve çıkış sinyali (yüzey pürüzlülüğü) yanıtlarındaki tepe aşma yüzdelerini en aza indirme ve ortadan kaldırma yeteneğini kesin olarak ortaya koymuştur. Shah ve diğ. (2021) tarafından yapılan çalışmada doğru akım (DC) motor sisteminin kesir dereceli modeli için kompleks dereceli bir $PI^{\alpha+j\beta}D^{c+jd}$ kontrolör yapısı tasarlanmıştır. Karşılaştırmalar için, DC motor sistem modeli ayrıca geleneksel PI, PID, orantısız-rezonans (PR) ve kesir dereceli PID kontrolör kullanılarak kontrol edilmiştir. Kontrol ve çıkış sinyallerinde tepe aşımalarını başarıyla en aza indiren kontrolörün yalnızca kompleks dereceli PID kontrolör olduğu görülmüştür. Ayrıca kompleks dereceli PID kontrolörün yükselme, tepe ve yerleşme sürelerini sınırlamada da başarılı olduğu anlaşılmıştır. Önerilen kompleks dereceli PID kontrolörünün dayanıklılığını doğrulamak için Bode diyagramı ile kök yer eğrisi elde edilerek sistem kazanç parametreleri değiştirilmiştir. Böylece kompleks dereceli PID kontrolörün, modern imalatta doğru ve sağlam aktüatör kontrolüne yönelik etkili bir çözüm olmayı vaat ettiği kanaatine varılmış, akıllı aktüatörler ve işbirlikçi robotlar gibi gelişmiş endüstriyel kontrol sistemlerinin endüstri 4.0 odaklı uygulanmasına yönelik olarak kapsamlı ve güvenli bir şekilde uygulanabileceği vurgulanmıştır.

Zheng ve diğ. (2021) tarafından doğru akım motorunun hız kontrolü için kompleks dereceli kontrolör önerilmiştir. Önerilen kontrolörün parametreleri frekans alanı analizine dayalı olarak kazanç geçiş frekansı, kesme frekansı, faz marjı ve genlik marjı entegre edilerek ayarlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, kesir dereceli kontrolör ve tam sayı dereceli kontrolör ile karşılaştırılmış ve kompleks dereceli kontrolün daha iyi dinamik performansa ve dayanıklılığa sahip olduğu görülmüştür. Sathishkumar ve Selvagesan (2021) tarafından evrensel yapılar için kompleks katsayılı PI/PD/PID kontrolör ayarlaması ele alınmıştır.

Sonuç olarak, son zamanlarda yapılan çalışmalar kompleks dereceli kontrolörlerin özellikle de PID kontrolörlerin daha çok parametre içermeleri sebebiyle daha iyi kontrol performansı sağladıklarını göstermektedir. Bununla birlikte kompleks dereceli kontrol sistemlerinin kendine özgü bazı sınırlılıkları bulunmakta ve halen bunların fiziksel anlamlandırmasında açık problemler bulunmaktadır. Bir sonraki bölümde bu problemler

anlatılarak kompleks eşlenik dereceli sistem gösterimini kullanmanın daha uygun olacağına değinilecektir.

1.2 Motivasyon ve Problem Sunumu

Yıllar boyunca tam sayı dereceli sistem gösterimi hem sistem modellemesinde hem de kontrol sistem tasarımında kullanılan ana araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Son otuz yılda, kesir dereceli sistem gösterimi bazı fiziksel olayları tanımlamak ve onları kontrol etmek için tam sayı dereceli sistemlere göre daha iyi sonuçlar alınabileceğini ortaya koymuştur. Son zamanlarda ise dinamikleri zor ve karmaşık olan bazı sistemlerin modellenmesinde kompleks dereceli sistem modeli kullanımının daha uygun sonuçlar verebileceği üzerine çalışmalar ve tartışmalar yapılmaktadır. Elde edilen sonuçlar, endüstriyel sistemlerin modellenmesi ve kontrolünde kompleks dereceli diferansiyel denklem kullanımının daha iyi performans ve verimlilik ile daha az maliyet açısından olumlu etkiler sağladığını göstermektedir.

Kompleks dereceli sistem gösteriminin en önemli sınırlılığı, kompleks dereceli bir türev ya da integral için anlamı şu anda tam olarak anlaşılamayan kompleks değerli bir zaman yanıtı üretmesidir. Bu sorunun üstesinden gelmek için kompleks eşlenik dereceli türev ve integral operatörleri kullanılmıştır. Kompleks dereceli operatörler ancak eşlenik dereceli operatörüyle eşleştirildiğinde reel değerli zaman yanıtlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Dolayısıyla sistem modellemesinde de kompleks dereceli transfer fonksiyonuna veya durum uzay gösterimine sahip bir sisteme reel değerli bir giriş işareti uygulandığında sistemin çıkışında kompleks değerli bir zaman yanıtı elde edilmektedir. Zaman yanıtı hem reel hem de sanal olmak üzere iki bileşene sahip olduğundan ve sanal zaman yanıtının nasıl yorumlanacağı henüz tam bilinemediğinden, Adams (2009) zaman yanıtı tamamen reel değerli olan kompleks eşlenik dereceli sistem gösterimini önermiştir. Yapılan literatür çalışmasında bu sistemlerin zaman ve frekans bölgesinde analizlerinin gerçekleştirilmesi üzerine çok kısıtlı çalışmaların mevcut olduğu ve ayrıca bu sistem yapısının kontrol alanında fazlaca kullanılmadığı görülmüştür. Bu problem ve açık noktalardan yola çıkılarak bu tez çalışmasının en önemli motivasyon kaynağı, Adams (2009) tarafından literatüre ilk kez tanıtılan ve kompleks eşlenik dereceli operatörler kullanılarak oluşturulan kompleks eşlenik dereceli sistem yapılarını analiz etmek, kararlılaştırma ve kontrol işlemleri üzerinde durmaktır.

Kontrol sistem tasarımı ve analizinde kararlılık problemi göz önüne alınması gereken en önemli konulardan birisidir. Klasik kararlılık incelemelerinde, doğrusal zamanla değişmeyen tam sayı dereceli sistemlerde karakteristik denklemin kökleri kompleks sol yarı s-düzleminde (LHP) ise sistemin asimptotik kararlı olduğu bilinmektedir. Tam sayı dereceli sistemlerin kararlılığını analiz etmek için kullanılan analiz metodlarının çoğu kesir dereceli sistemler için doğrudan kullanılamamaktır. Kesir dereceli sistemlerin kararlılığı için ya en genel kararlılık tanımı olan sınırlı-giriş sınırlı-çıkış (BIBO) kararlılığı kullanılır veya Matignon (1996) tarafından önerilen kompleks türevin derecesi sonucu belirlenen bir açı ile düzlem üzerinde sınırlı bir alan göz önüne alınarak ve yalnızca birinci Riemann tabakasında kalan kökler incelenir. Matignon tarafından önerilen ve çoğunlukla kabul gören bu kararlılık analiz yönteminin yanı sıra çok sayıda nümerik analiz ve frekans bölgesi kararlılık test metodları önerilmiştir (Hwang ve diğ, 2002; Casagrande ve diğ, 2020; Zhang ve diğ, 2020). Bununla birlikte, tam sayı dereceli sistemlerdeki Routh-Hurwitz kriterine benzer şekilde, kesir dereceli sistemler için oldukça basit bir kararlılık kriteri oluşturma sorunu hala çözülmemiş bir problemdir (Lozynskyy ve diğ, 2020). Bu yüzden bu sistemlerin kararlılık analizlerinde çoğunlukla argüman prensibine dayanan frekans tabanlı yöntemler tercih edilmektedir (Petráš ve Dorcák, 1999; Petráš, 2011b; De ve Sen, 2011). Bu yöntemler genellikle Nyquist, Mikhailov ve kök-yer kararlılık kriteri tabanlı olarak karşımıza çıkmaktadır. Bununla birlikte, kompleks ve dolayısıyla kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi üzerine yapılan çalışmalar çok azdır (Cois ve diğ, 2001; Adams ve diğ, 2010a; Adams ve diğ, 2010b). Bu nedenle, kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizinde kullanılacak etkin yöntemlerin geliştirilmesi problemi bu tez çalışmasının diğer bir motivasyon kaynağını oluşturmaktadır.

Oransal-Integral-Türev (PID) kontrolörler, endüstride son elli yıldır kontrol uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır (Åström ve Hägglund, 1995). Bunun en önemli sebebi yapısının basitliği ile nispeten dayanıklı ve iyi performans sağlamalarıdır. Bununla birlikte kararlı, kararsız, integratörlü, minimum olmayan fazlı ve zaman gecikmeli gibi geniş yelpazedeki sistem türleri için kabul gören bir parametre belirleme yöntemi mevcut değildir. Bu önemli sorun nedeniyle önerilen PID kararlılaştırma tekniği, tasarımcıya mutlak manada kontrol sistem kararlılığı sağlayan tüm PID kontrolör setini veren önemli bir kontrol tasarım stratejisidir. Bu sayede tasarımcı, istenilen kriterlere uygun kontrolörü elde etme konusunda geniş bir özgürlüğe sahip olmaktadır. Bu süreç özellikle tasarımın başında tasarım kriterlerini net bir şekilde tanımlamanın veya tasarım kriterleri arasında

dengeli bir karar vermenin zor olduğu durumlarda avantajlıdır. Ele alınan bir sistemi kararlı yapan tüm kontrolör parametre setlerini bulmak için literatürde birçok alternatif yöntemler mevcuttur. Örneğin, Hermite-Biehler teoremi (Bhattacharyya ve diğ, 1995), kararlılık sınır eğrisi yöntemi (Tan ve diğ, 2003; Tan ve Atherton, 2006; Deniz ve diğ, 2015), Nyquist grafiğine dayalı hızlı yaklaşım (Söylemez ve diğ, 2003), parametre uzayı yöntemi (Ackermann ve Kaesbauer, 2001; Bajcinca, 2004), Kronecker toplama yöntemi (Zheng ve Ren, 2009), D-Ayrıştırma yöntemi (Cheng ve Hwang, 2006; Hamamci, 2007, 2012). Yapılan literatür çalışmasında kompleks dereceli sistemlerin PID benzeri kontrolörler ile tasarımı üzerine bir önceki bölümde anlatılan bazı çalışmalar bulunsa bile kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılaştırılması üzerine herhangi bir çalışmaya rastlanılmamaktadır. Dolayısıyla yapısal olarak zor bir dinamiğe sahip olan kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PI, PID ve kesir dereceli PI kontrolörler ile kararlılaştırılması problemine çözüm getirmek ve dolayısıyla kontrolör tasarımı yapmak bir diğler motivasyon kaynağı olarak sayılabilir.

Kontrol sistem tasarımında kontrolör, nominal sistem modeline göre tasarlanır ve sistem parametrelerindeki değişikliğe karşı dayanıklı bir performans sergilemesi beklenir. Parametre belirsizliği, sistem transfer fonksiyonunun katsayıları veya derecelerinin belirli bir aralıkta değişmesi durumunda oluşabilecek belirsizlik olarak tanımlanabilir. Bu nedenle, sistemlerin kararlılık analizlerinin ve kontrol işlemlerinin gerçekleştirilmesinde bu belirsizlikleri hesaba katmak gerekmektedir. Konu ile ilgili yapılan literatür çalışmasında kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin parametre belirsizliği ve derece belirsizliği içermesi durumunda bu sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi ve kontrol işlemlerinin gerçekleştirilmesine dair herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu sebepten dolayı parametre belirsizliği içeren kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kontrol sistemlerine uyarlanması ve bu sistemlerin dayanıklı kararlılık ve dayanıklı kontrol analizlerinin gerçekleştirilmesi problemi bu tez çalışmasının diğler bir motivasyon kaynağını teşkil etmektedir.

1.3 Bilimsel Katkı

Kompleks dereceli türev ve integralin analitik olarak analizlerinin zor olması ve fiziksel anlamlarının hala bir tartışma konusu olmasından dolayı, literatürde bu alanda yeterli sayıda çalışmanın olmadığı görülmektedir. Bu tez kapsamında, Adams (2009) tarafından literatüre yakın zamanda tanıtılan kompleks eşlenik dereceli sistemlerin temel özellikleri,

frekans analizi, kararlılığı ve bu sistemlerin kontrol işlemleri gerçekleştirilerek, PID tabanlı kontrolörler ile kararlılaştırılması amaçlanmaktadır. Bunun yanı sıra bu sistemlerin belirsiz parametre durumunda tüm sistem ailesi için dayanıklı kararlılık analizlerinin ve dayanıklı kontrolör tasarımlarının gerçekleştirilmesi hedeflenmektedir.

Bu tez kapsamında aşağıdaki açık problemlere bilimsel çözümler getirilmesi amaçlanmıştır:

1. Kompleks eşlenik dereceli sistemler için kararlılık analizinin frekans tabanlı grafiksel bir yöntem olan genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov (GD Mikhailov) kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilmesi:

✚ Literatüre katkı: Kompleks eşlenik dereceli sistem gösterimini literatüre kazandıran Adams (2009), karmaşık matematiksel hesaplamalar kullanan bir kararlılık analiz yöntemi önermiştir. Bu çalışmada ise matematiksel hesapları minimuma indirmek ve daha basit grafiksel bir yöntem sunmak amacıyla bir frekans bölgesi kararlılık analiz yöntemi olan GD Mikhailov kararlılık kriteri (Busłowicz, 2008a, 2008b) kullanılarak kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir. Sunulan yöntemin avantajı basitliğinin yanı sıra Adams tarafından önerilen yöntemden farklı olarak kaskat yapılı kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için de kullanılmasının kolay ve pratik olmasıdır. Ayrıca önerilen grafiksel yönteme ait sonuçlar, Adams (2009) ve Cois ve diğ. (2001) tarafından kararlılık analizi için sunulan kutup-konum analizi tabanlı cebirsel yöntemler kullanılarak doğrulanmıştır.

2. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PID tabanlı kontrolörler kullanılarak kararlılaştırılması:

Kontrol sistem tasarımı için en temel gereksinim, kapalı döngü sisteminin mutlak kararlılığıdır. Bir kontrolör kullanılarak bir sistemi kararlılaştırma tekniğinin temel amacı, sistemin mutlak kararlılığını sağlayan tüm kontrolör setini belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda kompleks eşlenik dereceli sistemler için ilk defa D-ayırıştırma yöntemi kullanılarak PI ve PID kontrolörler ile kararlılaştırılması işlemi gerçekleştirilmiştir. D-ayırıştırma yöntemi ile kararlılık sınırları elde edilerek kontrolöre ait parametreler analitik olarak formülize edilmiştir. Bu sınırlar kullanılarak kararlı kontrolör setini veren kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. Bu bölgelerin kararlılığını test etmek için bir önceki maddede bahsedilen GD Mikhailov kararlılık kriteri D-ayırıştırma yöntemine dahil edilmiştir. Simülasyon sonuçları, sunulan PID tabanlı kararlılaştırma yönteminin kompleks eşlenik

dereceli sistemlerin analizi ve kontrolünde etkili ve pratik olarak faydalı olduğunu göstermiştir.

✚ Literatüre katkı: Literatürde kompleks eşlenik dereceli sistemler ve kontrolü ile ilgili çalışmalar yok denecek kadar az olduğundan, bu sistemlerin PI ve PID kontrolörler ile birlikte kullanıldığı bir yöntem ilk kez bu tez kapsamında kararlaştırma tekniği perspektifinden sunulmuştur. Bu yöntemle elde edilen kararlılık bölgesi grafiksel bir gösterime sahip olup kontrol sistemine ait çok sayıda bilgiyi içermektedir.

3. Kompleks eşlenik dereceli sistemler için kazanç payı ve faz payı gibi frekans bölgesi özelliklerine göre kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolör tasarımı:

✚ Literatüre katkı: Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kesir dereceli kontrolörler ile kontrolüne ait herhangi bir sonuca rastlanmamaktadır. Bu çalışmada, kazanç-faz payı test edicisi (Chang ve Han, 1989) kullanılarak kompleks eşlenik dereceli sistemler için istenilen kazanç ve faz payına sahip PI^λ kontrol sistemlerinin tasarımı gerçekleştirilmiştir. Önerilen metodun avantajı belirli kazanç ve faz payları için sistem parametrelere bağlı olarak yine grafiksel yolla tasarım yapmanın daha sade ve kolay olmasıdır. Bu yöntemle parametrelerdeki değişimin kazanç ve faz payları üzerindeki etkisi daha kolay bir şekilde belirlenebilmektedir. Kullanılan yöntem kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kesir dereceli PI kontrolör ile tasarımı için bir ilktir.

4. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi:

✚ Literatüre katkı: Karmaşık dinamik sistem yapısına ilave olarak parametre belirsizliğine sahip olan kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi tam sayı dereceli sistemlere göre daha zordur. Bu çalışmada, parametre belirsizliği içeren sürekli zamanlı kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için frekans bölgesi analizlerine dayalı iki farklı yaklaşım sunulmuştur. Bunlardan birincisi, değer kümesi kavramı ve sıfırın dışlanma koşulunun kombinasyonuna dayanmaktadır. İkincisi ise GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlıdır. Şu ana kadar bu konuda literatürde yapılmış herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

5. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımının yapılması:

- ✚ Literatüre katkı: Değer kümesinden sıfırın dışlanma prensibi, D-ayırıştırma metodu ve GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımı literatürde ilk kez bu tez çalışmasında gerçekleştirilmiştir. Önerilen metot kullanılarak farklı kontrolör yapıları için de tasarım yapmak mümkündür.

1.4 Tezin Organizasyonu

Bu tez çalışması 8 kısımdan oluşmaktadır.

Bölüm 1: Giriş

Giriş kısmında konu ile ilgili tarihsel süreç ve literatür özeti verilerek daha önce yapılmış olan akademik çalışmalar ile bu çalışmalarda konunun ele alınış biçimleri incelenmiştir. Tez konusunun seçilmesine sebep olan açık problemler ve motivasyon kaynakları ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca bu tez çalışması sonucunda tezin literatüre yapacağı bilimsel katkının ne olduğu maddeler halinde verilerek, yapılan çalışmanın özgün ve yeni olduğu düşünülen taraflarına değinilmiştir. Tezin organizasyonu bölümler bazında ele alınmıştır.

Bölüm 2: Kesir ve Kompleks Dereceli Matematik

Bu bölümde kesir dereceli ve kompleks dereceli analizin temel kavramları tanıtılmaktadır. Önce kesir dereceli integro-türev kavramı tanıtılmıştır. Kesirli dereceli matematiğin analiz işlemlerinde kullanılmak üzere gamma fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Miller-Ross fonksiyonu gibi bazı yardımcı fonksiyonlardan bahsedilmiştir. Literatürde kesir dereceli türev ve integral tanımlarından en çok ilgi gören Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları ve bu tanımların Laplace dönüşümleri verilmiştir. Daha sonra kompleks dereceli integro-türev kavramı tanıtılmıştır. Türev ve integral operatörünün üssünün kompleks olması durumu için Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları tanıtılmış ve bunların Laplace dönüşümleri verilmiştir. Ayrıca kompleks eşlenik dereceli integro-türev kavramından bahsedilmiştir.

Bölüm 3: Kompleks Dereceli ve Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler

Bu bölüm, dinamik sistemlerin kompleks dereceli ve kompleks eşlenik dereceli modellerle tanımlanmasına ayrılmıştır. Kompleks dereceli ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin tanıtımı yapılmış ve bu sistemlerin zaman/frekans bölgesi analizleri gerçekleştirilmiştir.

Kompleks dereceli transfer fonksiyonların tam sayı dereceli yaklaşım modellerine değinilmiş ve Oustaloup yaklaşıklık metodu detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca kompleks ve kompleks eşlenik dereceli PI ve PID kontrolör yapıları tanımlanmıştır.

Bölüm 4: Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Kararlılık Analizlerinin Gerçekleştirilmesi

Bu bölümde öncelikle Mikhailov eğrisinin özellikleri ve Mikhailov'un kararlılık kriterlerine değinilmiştir. Kesir dereceli sistemler için önerilen GD Mikhailov kararlılık kriteri kompleks eşlenik dereceli sistemler için uyarlanmıştır. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca literatürde var olan kutup-konum analizinden yola çıkarak Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunan kutupların konumu metodu ve koordinat düzleminde elde edilen çember metoduna ait sonuçlar kullanılarak GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı kararlılık analizinin sonuçları doğrulanmıştır. Kararlılık kriterlerinin uygulanmasına yönelik örnekler verilmiştir.

Bölüm 5: Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin PI, PID ve Kesir Dereceli PI (PI^{λ}) Kontrolör ile Kararlılaştırılması

Bu bölümde D-ayırıştırma yöntemi tanıtılarak kompleks eşlenik dereceli sistemleri kararlı yapan tüm PI ve PID kontrolör setinin hesabı yapılmıştır. Bunun için, kararlılık sınırları elde edilerek bir kompleks dereceli sistem için parametre uzayında kararlılık bölgesini veren kontrolör parametrelerine ait formülasyonlar elde edilmiştir. Kararlılık sınırları tüm parametre uzayını çok sayıda kararlı ve kararsız bölgelere ayırdığından, bu bölgelerin kararlılığı test etmek için GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılmıştır. Sonuç olarak ele alınan herhangi bir kompleks eşlenik dereceli sistemi kararlı ve kararsız yapan tüm kontrolörler belirlenmiştir. Ayrıca kesir dereceli PI kontrolör kullanılarak kompleks eşlenik dereceli sistemler için kazanç payı ve faz payı gibi temel frekans bölgesi özelliklerine göre kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Benzetim uygulamaları yapılarak elde edilen sonuçların MATLAB ortamında zaman cevapları verilmiştir.

Bölüm 6: Parametre Belirsizliğine Sahip Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Dayanıklı Kararlılık Analizi

Bu bölümde, parametre belirsizliğine sahip sistemlerden bahsedilip sistemlerdeki belirsizlik türüne değinilmiştir. Parametre belirsizliği durumunda dayanıklı kararlılık analizinde kullanılan yöntemlerden değer kümesi kavramı, sıfırın dışlanma prensibi, Kharitonov teoremi ve kenar teoremi ele alınmıştır. Kharitonov teoreminin aralık

belirsizlik yapısına sahip kompleks dereceli polinom ailelerine uygulanamayacağı gösterilmiştir. Kenar teoreminin aralık ve afin doğrusal belirsizlik polinom yapısına sahip kompleks dereceli polinom aileleri için kullanılabilirliği vurgulanmıştır. Fakat, çoklu doğrusal ve polinom belirsizliğine sahip kompleks dereceli polinom aileleri için kenar teoreminin kesin bir sonuç vermediği belirtilmiştir. Parametre belirsizliğine sahip sürekli zamanlı kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için frekans bölgesi analizlerine dayalı iki ayrı yöntem sunulmuştur. Bu yöntemlerin birincisinde bu sistem ailesinin dayanıklı kararlılık analizi değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi kullanılarak araştırılmıştır. İkincisinde ise dayanıklı kararlılık analizi GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı bir yöntem kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Önerilen yöntemlerin uygulanmasına yönelik örnekler verilmiştir.

Bölüm 7: Parametre Belirsizliğine Sahip Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler için Dayanıklı Kontrolör Tasarımı

Bu başlık altında parametre belirsizliğine sahip bir kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımı sunulmuştur. Bunun için frekans bölgesi analizlerine dayalı iki farklı yöntem verilmiştir. Tasarlanan kontrolörlerin dayanıklı kararlılık testi değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi ve GD Mihailov kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Önerilen yöntemlerin uygulanmasına yönelik örnekler verilmiştir.

Bölüm 8: Sonuçlar ve Öneriler

Bu bölümde ise genel bir değerlendirme yapılarak tezde elde edilen sonuçlar sunulmuş ve yorumlanmıştır. Ayrıca gelecekte yapılabilecek çalışmalar için çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

2. KESİR VE KOMPLEKS DERECELİ MATEMATİK

Bölüm 1’de bahsedildiği gibi tam sayı olmayan veya başka bir deyişle keyfi dereceden türev ve integral işlemleri literatürde “*kesirli analiz/matematik*” kavramı adı altında birleştirilmiştir. Fakat literatürdeki kavram karmaşıklığından dolayı kesirli analiz kavramı çoğunlukla sadece reel dereceli durumlar için kullanılmıştır. Klasik türevlerin ve integrallerin derecelerini kompleks sayılara kadar genelleştiren “*kompleks dereceli analiz (kompleks analiz, kompleks dereceli matematik)*”, kesirli analizin doğal bir genellemesi olarak ele alınabilir. Bu açıdan bakıldığında, kompleks dereceli analiz kavramının en geniş tanım olduğu açıktır. Bu tez çalışmasında derecesi reel sayı olan türev ve integral operatörleri kesir dereceli operatör, derecesi kompleks sayı olan türev ve integral operatörleri ise kompleks dereceli operatör olarak ele alınmıştır.

Bu bölümde kesir ve kompleks dereceli matematikte kullanılan bazı özel fonksiyonlar verildikten sonra kesir, kompleks ve kompleks eşlenik dereceli integro-türev kavramları tanıtılmıştır. Kesir ve kompleks dereceli türev ve integral tanımları ile bu tanımların Laplace dönüşümleri ayrı ayrı incelenmiştir.

2.1 Kesir ve Kompleks Dereceli Matematik için Özel Fonksiyonlar

Keyfi dereceli matematiğin teorisini ve kullanımını anlamak için bazı önemli matematiksel tanımları iyi bilmek gerekir. Bu başlık altında, kesir ve kompleks dereceli matematik teorisinde sıklıkla kullanılan Gamma fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Miller-Ross fonksiyonu olmak üzere üç temel fonksiyon verilmektedir. Bu fonksiyonlar kesir, kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin zaman cevaplarını elde etmek için sıklıkla kullanılmaktadır.

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Tanım 2.1: Gamma fonksiyonu matematikte faktöriyel işleminin tam sayı olmayan reel sayılar ve kompleks sayılara genellenmesi için kullanılan bir fonksiyondur. “ Γ ” simgesiyle gösterilir. $n \in \mathbb{N}$ için tam sayı değerlerinin gamma fonksiyonu;

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada analitik devamlılık için n pozitif tam sayı olmalıdır. Gamma fonksiyonunun kompleks sayıları da içine alan genelleştirilmiş tanımı,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

şeklinde verilir. Burada $z \in \mathbb{C}$ ve $Re(z) > 0$ 'dir. Bu fonksiyon özellikle karmaşık belirli integrallerin çözümünde kolaylık sağladığından kesir ve kompleks dereceli hesaplamalarda sıkça kullanılmaktadır (Samko ve diğ, 1993; Valério ve Costa, 2013).

2.1.2 Mittag-Leffler fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonları fizik, matematik ve mühendislik gibi birçok bilim alanında problemlerin tanımlanması ve çözümünde anahtar rol oynayan bir fonksiyon kümesidir. Fen ve mühendislik bilimlerinde fiziksel süreçleri temsil eden diferansiyel denklemlerin çözümünde çoğunlukla üstel fonksiyonlar karşımıza çıkmaktadır. Kesir dereceli analizde üstel fonksiyonların yerini Mittag-Leffler fonksiyonları almaktadır. Başka bir deyişle Mittag-Leffler fonksiyonu kesir dereceli diferansiyel denklemler veya integral denklemlerinin ifade edilmesinde ve çözümlerinin elde edilmesinde kullanılmaktadır (Shukla ve Prajapati, 2007). Özellikle Mittag-Leffler fonksiyonları, üstel fonksiyon ve ardılları gibi klasik fonksiyonlar tarafından temsil edilemeyecek kadar yavaş ilerleyen veya bozulan süreçlerdeki olguları tanımlamamıza izin verir. Bu durum Mittag-Leffler fonksiyonunun birçok çeşidi olmasından kaynaklanmaktadır. Bu kısımda iki çeşit Mittag-Leffler fonksiyonu göz önüne alınacaktır (Gorenflo ve diğ, 2014; Samko ve diğ, 1993; Valério ve Costa, 2013).

Tanım 2.2: $E_{\alpha}(z)$ şeklinde gösterilen 1-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu İsveçli matematikçi Gustaf Magnus Mittag-Leffler (1903) tarafından tanıtılmış olup aşağıdaki gibi bir kuvvet serisi gösterimi ile tanımlanır:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.3)$$

Burada $\alpha, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re(\alpha) > 0$ 'dir. $\alpha = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z \quad (2.4)$$

şeklinde temel üstel fonksiyona indirgenir. $z = -at^\alpha$ için Denklem 2.3'teki 1-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü şu şekilde bulunur:

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a} \quad (2.5)$$

Burada $Re\{s\} > |a|^{1/\alpha}$ 'dir.

Tanım 2.3: 1-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun genelleştirmesi olarak bilinen ve Wiman (1905) tarafından tanıtılan 2-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, kuvvet serisinin gamma fonksiyonunda ikinci bir parametre olan β elemanını içerir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.6)$$

Burada $E_{\alpha,\beta}(z)$, 2-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur ve $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ 'dır. Görüldüğü üzere; $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$ 'dir. Özel olarak zaman ağırlıklı Mittag-Leffler fonksiyonunun (time-weighted Mittag-Leffler function) Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm az^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a} = \frac{1}{s^\beta(1 \mp as^{-\alpha})} \quad (2.7)$$

şeklinde verilir ($Re\{s\} > |a|^{1/\alpha}$). Denklem 2.5 ve 2.7, bu türden reel veya kompleks dereceli transfer fonksiyonlarının ters Laplace işlemi sonucunda zaman bölgesinde mutlaka Mittag-Leffler fonksiyonunun ortaya çıkacağını göstermektedir.

2.1.3 Miller-Ross fonksiyonu

Tanım 2.4: Üstel fonksiyonun v dereceden integrali olarak bilinen ve Mittag-Leffler fonksiyonunun bir genellemesi olan Miller-Ross fonksiyonu (\mathcal{E}_z), Kenneth S. Miller ve Bertram Ross (1993) tarafından tanıtılmıştır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{E}_z(v, a) = \frac{d^{-v}}{dt^{-v}} e^{az} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k z^{k+v}}{\Gamma(v+k+1)} = z^v E_{1,v+1}(az) \quad (2.8)$$

Burada v ve a , reel sayı olmak üzere $v > 0$ 'dır. Bu fonksiyonun bazı özellikleri şu şekilde verilir (Das, 2011; Gorenflo ve diğ., 2014; Valério ve Costa, 2013):

$$\varepsilon_z(0,1) = E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_z(0,a) = E_1(az) = E_{1,1}(az) = e^{az} \quad (2.10)$$

2.2 Kesir Dereceli İntegro-Türev Kavramı

Tanım 2.5: Matematiksel analizin bir dalı olan keyfi dereceli analizde, tam sayı olmayan türev ve integral işlemleri *integro-türev (differintegral)* kavramı altında birleştirilir (Podlubny, 1999a). Yani integro-türev terimi, birleşik bir türev ve integral operatörüdür. Sürekli zamanlı kesir dereceli integro-türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Chen ve diğ, 2009; Petráš, 2011a; Tepljakov, 2017b).

$${}_c D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Burada α türev ve integral operatörünün keyfi derecesini ifade ederken, c ve t ise türev ve integral operatörünün limitlerini ifade etmektedir. Dolayısıyla, ${}_c D_t^\alpha$ operatörü α değerine bağlı olarak kesir dereceli türev veya integral operatörü olarak değişmektedir. $\alpha \in \mathbb{R}$ için, ${}_c D_t^\alpha$ ifadesi $\alpha > 0$ değerlerinde reel dereceli kesirli türev olarak davranırken; $\alpha < 0$ durumunda reel dereceli kesirli integral olarak davranır. $\alpha = 0$ durumu sıfıncı dereceden türev veya integrali, yani fonksiyonun kendisini ifade eder. İntegro-türev operatörünün derecesi olan α 'nın bir tam sayı olması durumunda ise klasik tam sayı dereceli türev ve integral işlemleri elde edilir. Dolayısıyla bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli dereceden integro-türevi

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t), & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \int_c^t f(\tau)(d\tau)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde bir gösterim ile ifade edilir.

2.3 Kesir Dereceli Türev-İntegral Tanımları ve Laplace Dönüşümleri

Kesir dereceli türev ve integral için literatürde çok sayıda tanım (Akdemir ve diğ., 2020; Petráš, 2011a; Valério ve Costa, 2013) bulunmakta olup bu başlık altında en sık kullanılan Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları ile bunların Laplace dönüşümleri verilecektir. Bu tanımlar verilmeden önce, tam sayı dereceli çok katlı integral ve türevlerin tek katlı integral ve türev tanımlarının nasıl elde edildiğinin anlaşılması gerekir. Elde edilecek formülasyonlar kesir dereceli türev ve integral tanımlarının temelini oluşturmaktadır (Monje ve diğ., 2010).

Bir $f(t)$ fonksiyonunun integrali $D^{-1}f(t)$ basitçe

$$D^{-1}f(t) = \int_0^t f(x)dx \quad (2.13)$$

şeklinde verilir. Fonksiyonun çift katlı integrali ise

$$D^{-2}f(t) = \int_0^t \int_0^x f(y)dydx \quad (2.14)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 2.14'te verilen çift katlı integralin ifade ettiği bölge Şekil 2.1'de (x, y) düzleminde gösterilmiştir. İntegral limitlerinde uygun değişiklikler yapılarak integrallerin sırası değiştirilebilir:

$$D^{-2}f(t) = \int_0^t \int_y^t f(y)dx dy \quad (2.15)$$

$f(y)$, x değişkenine göre sabit olduğundan iki katlı integral ifadesi

$$D^{-2}f(t) = \int_0^t (t-y)f(y)dy \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde 3-katlı integral,

$$D^{-3}f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-y)^2 f(y)dy \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler n katlı integral için genelleştirilirse

$$D^{-n}f(t) = \int_0^t \dots \int_0^t f(y) \underbrace{dy \dots dy}_n = \int_0^t \frac{f(y)(t-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \quad (2.18)$$

bulunur. Bu denklemde, çok katlı bir integralin basit bir ağırlıklandırma işleviyle tek katlı bir integral olarak ifade edilebildiği görülmektedir.

Benzer şekilde, bir $f(t)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevi $D^1 f(t)$

$$D^1 f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.19)$$

şeklinde elde edilir. İkinci ve üçüncü dereceden türevler

$$D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)] \quad (2.20)$$

$$D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)] \quad (2.21)$$

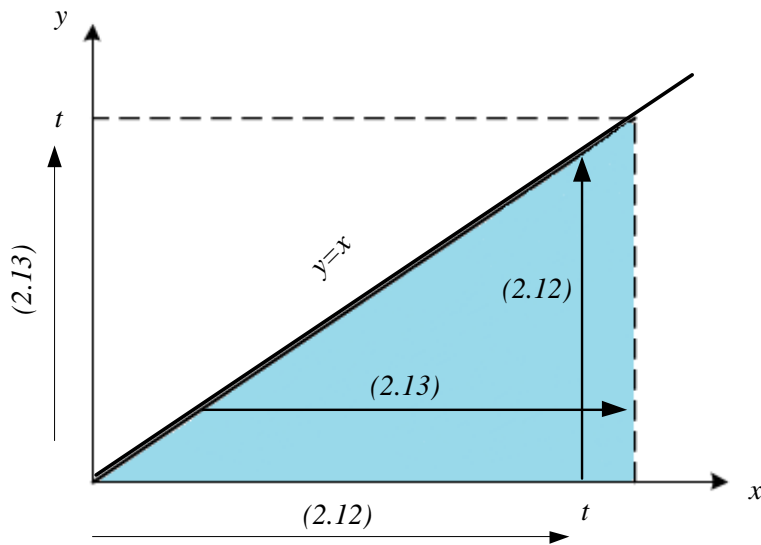
olarak bulunur. Bu ifadeler n . dereceden türev için genelleştirilirse

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \quad (2.22)$$

elde edilir. Burada

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (2.23)$$

şeklindedir. Denklem 2.18 ve 2.22, $n \in \mathbb{R}$ için Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli türev ve kesirli integral tanımlarının temelinin oluşturmaktadır.



Şekil 2.1 : x - y düzleminde integralin gösterimi (Monje ve diğ, 2010).

2.3.1 Riemann-Liouville tanımı

Liouville tarafından 1832’de ve Riemann tarafından 1876’da bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha \in \mathbb{R}$ dereceli integrali için ayrı ayrı formüller türetilmiştir. Denklemlerin ilginç tarafı tek bir denklemde birleştirilebilecek kadar benzer olmasıydı (Liouville, 1832; Riemann, 1876). Dolayısıyla türev ifadesi de eklenmiş Riemann Liouville integro-türev formülü şu şekilde verilir (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_c^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(\tau) d\tau, & \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} {}_c D_t^{\alpha-[\alpha]} f(t), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.24)$$

Burada, $[\cdot]$ operatörü bir üst tam sayıya yuvarlama (ceiling) işlemini ifade eder. Denklemde ilk satırındaki integral formülünde $c = 0$ durumu Riemann’ın formülünü, $c = \infty$ durumu ise Liouville’nin formülünü vermektedir. Denklem 2.24’te verilen integro-türev ifadesinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = \begin{cases} s^\alpha F(s), & \alpha \in \mathbb{R}^- \\ F(s), & \alpha = 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(0), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde verilir.

2.3.2 Caputo tanımı

Caputo (1967), Riemann-Liouville tarafından verilen formülasyonu geliştirerek bir $f(t)$ fonksiyonunun α dereceli türevini yeniden tanımlamıştır. Buna göre bir fonksiyonun kesir dereceli integro-türevi aşağıdaki gibi tanımlanır (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_c^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(\tau) d\tau, & \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ {}_c D_t^{\alpha-[\alpha]} \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} f(t), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.26)$$

Denkleme dikkat edilirse, kesir dereceli integral formülü Riemann-Liouville’nin formülü ile aynıdır. Bunun sebebi Caputo’nun kesir dereceli integral için ayrı bir formül türetmemesidir. Denklem 2.26 kullanılarak, Riemann-Liouville türevi ile Caputo türevinin

aynı homojen başlangıç koşulları kümesi altında eşdeğer olduğu gösterilebilir. Pek çok mühendislik uygulamasında Caputo türevi, matematikçiler arasında yaygın olarak kullanılan Riemann-Liouville türevine tercih edilir. Çünkü Riemann-Liouville türevinde, $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevlerinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Gerçek bir fiziksel uygulama düşünüldüğünde, bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevlerin fiziksel anlamı bilinmeyebilir ve dolayısıyla $t = 0$ anındaki değerleri ölçülemez. Buna karşın, Caputo türevi dikkate alındığında $f(t)$ fonksiyonunun tam sayı türevlerinin $t = 0$ başlangıç anındaki değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu ise iyi anlaşılmiş bir fiziksel anlama sahiptir ve ölçülebilir (Gorenflo ve Mainardi, 1997; Cafagna, 2007). Riemann-Liouville kesirli türevi ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ ile Caputo türev tanımı ise ${}_cD_t^\alpha f(t)$ ile gösterilirse, aralarındaki ilişki (Petráš, 2011a);

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}_cD_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-c)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(c) \quad (2.27)$$

ile ifade edilebilir. Burada $f^{(k)}(c) = 0$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$) olduğundan iki türev tanımı birbirine eşit olur.

Caputo integro-türev tanımının Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = \begin{cases} s^\alpha F(s), & \alpha \in \mathbb{R}^- \\ F(s), & \alpha = 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^{\alpha-k-1} D^k f(0), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.28)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 2.25 ile 2.28 karşılaştırıldığında bir kesir dereceli türevin Laplace dönüşümü için Riemann-Liouville denklemine kesir dereceli türeve ait başlangıç şartlarını kullanmak gerekirken, Caputo denklemine ise tam sayı dereceli türevler için başlangıç şartlarını bilmek yeterlidir. Yukarıda izah edildiği gibi mühendislik uygulamalarında kesir dereceli türev için Caputo denklemine kullanmak Riemann-Liouville türev denklemine kullanmaya göre her konuda daha avantajlıdır.

2.3.3 Grünwald-Letnikov tanımı

1867'de Anton Karl Grünwald, sonlu fark bölüntülerinin genelleştirmesine dayalı olarak bir kesir dereceli türev tanımı geliştirmiştir (Grünwald, 1867). Bir yıl sonra Alexey Vasil'evich Letnikov (1868), Grünwald'ın formülasyonunu geliştirerek şu anki Grünwald-Letnikov tanımını ortaya koymuştur. Bu metot geriye dönük sonlu fark terimleri

içerdiğinden bir fonksiyonun kesirli türev veya integralinin nümerik çözümü için yaygın olarak kullanılmaktadır (Das ve Pan, 2011; Tepljakov, 2017b). Grünwald-Letnikov yöntemiyle, bir $f(t)$ fonksiyonunun α dereceli integro-türevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-c}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} f(t - kh), & \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-c}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} f(t - kh), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.29)$$

Burada h adım boyutunu ve $\lfloor \cdot \rfloor$ operatörü bir aşağı tam sayıya yuvarlama (floor) işlemini ifade etmektedir.

Riemann-Liouville tanımı ile Grünwald-Letnikov tanımı birbirine eşdeğerdir, ancak kullanım alanlarına göre kolaylık/zorluk durumları mevcuttur. Kesir dereceli integral ve türev için Riemann-Liouville tanımı, tanımı nedeniyle nispeten basit fonksiyonların ($x^\alpha, e^x, \sin x$, vb.) analitik çözümünü bulmak için uygun iken nümerik hesaplamalar için Grünwald-Letnikov tanımı başarıyla kullanılmaktadır (Cafagna, 2007).

Grünwald-Letnikov kesirli integro-türev tanımının Laplace dönüşümü için belirli şartlar altında Denklem 2.25'te Riemann-Liouville dönüşümünde verilen ifade aynen kullanılabilir (Valério ve Costa, 2013).

2.3.4 Kesir dereceli integro-türevin temel özellikleri

Kesir dereceli integral ve türevin temel özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir (Miller ve Ross, 1993; Cafagna, 2007; Chen ve diğ, 2009; Petráš, 2011a):

1. Bir $f(t)$ fonksiyonu t 'nin analitik bir fonksiyonu ise onun kesir dereceli türevi olan ${}_0 D_t^\alpha f(t)$, t ve α 'nın analitik bir fonksiyonudur.
2. n tam sayı olmak üzere $\alpha = n$ için ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ operatörü klasik tam sayı derece n ile elde edilen sonucu verir.
3. $\alpha = 0$ için ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ operatörü fonksiyona özdeş operatördür, yani:

$${}_0 D_t^0 f(t) = f(t) \quad (2.30)$$

4. Kesir dereceli türev ve integral doğrusal işlemlerdir:

$${}_0D_t^\alpha (af(t) + bg(t)) = a {}_0D_t^\alpha f(t) + b {}_0D_t^\alpha g(t) \quad (2.31)$$

5. $f(t)$ fonksiyonunun bazı kısıtlamalar altında üs indekslerinin toplamı (yarı grup özelliği) mümkündür:

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.32)$$

6. $t = a$ olduğu durumda ($f^k(a) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) kesir dereceli türev ve tam sayı dereceli türev arasındaki değişme özelliği şu şekilde ifade edilir.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^\alpha f(t) \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{\alpha+n} f(t) \quad (2.33)$$

7. Kesir dereceli türev operatörü yerel (local) değildir. Bu özellik $D_{t_0}^\alpha f(t)$ değerinin $[t_0, t]$ aralığındaki tüm f değerlerine yani f fonksiyonunun tüm geçmiş değerlerine bağlı olduğu anlamına gelir. Tam sayı dereceli türev operatörlerinin ise her zaman yerel olduğu iyi bilinen bir konudur.

Kesir dereceli türev ve integralin geometrik ve fiziksel yorumu Podlubny (2001) tarafından yapılan çalışmada detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Kesirli türev ve integrallerin diğer bazı önemli özellikleri örneğin öteleme, zincir kuralı, davranış ve limite bağımlılık vb. özellikler Miller ve Ross (1993), Oldham ve Spanier (1974) ve Podlubny (1999a) referanslarında detaylı bir şekilde bulunabilir. Diğer bazı tanımlar ise De Oliveira ve Machado (2014) ve Ortigueira ve Machado (2015) referanslarında incelenmiştir.

2.4 Kompleks Dereceli İntegro-Türev Kavramı

Tanım 2.6: Derecesi kompleks bir sayı olan birleştirilmiş türev ve integral operatörüne *kompleks dereceli integro-türev* denilmektedir. Sürekli zamanlı bir kompleks dereceli birleşik türev ve integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Tepljakov, 2017b; Valério ve Costa, 2013):

$${}_cD_t^q f(t) = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} f(t), & \Re\{q\} > 0, \\ f(t), & q = 0, \\ \int_c^t f(\tau) (d\tau)^q, & \Re\{q\} < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Burada $q \in \mathbb{C}$ türev ve integral operatörünün kompleks değerli derecesini, c ve t ise integral operatörünün limitlerini ifade etmektedir. Kompleks derece, $q = u + iv$ şeklinde tanımlanır. q 'nın reel ve sanal kısımları sırasıyla $\Re\{q\} = u$ ve $\Im\{q\} = v$ 'dir. Dolayısıyla, ${}_c D_t^q$ operatörü q değerine bağlı olarak kompleks dereceli türev veya integral operatörü olarak değişmektedir. ${}_c D_t^q$ ifadesi $\Re\{q\} > 0$ değerlerinde kompleks dereceli türev olarak davranırken, $\Re\{q\} < 0$ durumunda kompleks dereceli integral olarak davranır. $q = 0$ durumu sıfırcı dereceden türev veya integrali, yani fonksiyonun kendisini ifade eder. İntegro-türev operatörünün derecesi olan q 'nın reel kısmının sıfır olması durumunda operatör saf kompleks dereceli integro-türev operatörüne dönüşürken, q 'nın sanal kısmının sıfır olması durumunda ise kesir dereceli integro-türeve dönüşür. Bu noktadan bakıldığında, kompleks dereceli integro-türev reel ve tam sayı dereceli tüm integro-türevleri içine alan en genel tanım olarak düşünülebilir.

Son zamanlarda gerçek sistemlerin modellenmesinde ve analizlerinde reel dereceli integro-türevlerin kullanılmasının da kısıtlı kaldığı ve kompleks dereceli integro-türevlerin kullanılmaya başlandığı görülmektedir (Hartley ve diğ, 2005). Literatüre bakıldığı zaman, reel dereceli integro-türevler üzerine çok fazla çalışmalar mevcut iken kompleks dereceli integro-türevler üzerine yapılan çalışmaların sınırlı olduğu görülür. Kompleks dereceli integro-türevler, reel fonksiyonlara uygulandığında genel olarak kompleks değerli fonksiyonlara dönüştüğünden dolayı çok sayıda açık probleme sahiptirler.

2.5 Kompleks Dereceli Türev-İntegral Tanımları ve Laplace Dönüşümleri

Kompleks dereceli analizde yani $q \in \mathbb{C}$ için analitik işlemler yapılırken genellikle Riemann-Liouville ve Caputo tanımları tercih edilmektedir. Bununla birlikte, kesir dereceli analizde olduğu gibi nümerik uygulamalarda yine Grünwald-Letnikov teoreminin kullanılması önerilmektedir.

2.5.1 Riemann-Liouville tanımı

Riemann-Liouville formülü ile $f(t)$ fonksiyonunun $q = u + jv$ dereceden türev ve integrali aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^q f(t) = \begin{cases} \int_c^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau, & u \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & q = 0 \\ \frac{d}{dt} {}_c D_t^{q-1} f(t), & u = 0 \wedge v \neq 0 \\ \frac{d^{[u]}}{dt^{[u]}} {}_c D_t^{q-[u]} f(t), & u \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.35)$$

Kompleks Riemann-Liouville tanımı kullanıldığında Denklem 2.35'te verilen integrotürevin Laplace dönüşümü şu şekilde verilir:

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^q f(t) \} = \begin{cases} s^q F(s), & u \in \mathbb{R}^- \\ F(s), & q = 0 \\ s^q F(s) - {}_0 D_t^{q-1} f(0), & u = 0 \wedge v \neq 0 \\ s^q F(s) - \sum_{k=0}^{[u]-1} s^k {}_0 D_t^{q-k-1} f(0), & u \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.36)$$

2.5.2 Caputo tanımı

Bir $f(t)$ fonksiyonunun $q = u + jv$ dereceden türev ve integrali Caputo tanımı ile aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^q f(t) = \begin{cases} \int_c^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau, & u \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & q = 0 \\ {}_c D_t^{q-1} \frac{d}{dt} f(t), & u = 0 \wedge v \neq 0 \\ {}_c D_t^{q-[u]} \frac{d^{[u]}}{dt^{[u]}} f(t), & u \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.37)$$

Denklem 2.37'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^q f(t) \} = \begin{cases} s^q F(s), & u \in \mathbb{R}^- \\ F(s), & q = 0 \\ s^q F(s) - s^{q-1} f(0), & u = 0 \wedge v \neq 0 \\ s^q F(s) - \sum_{k=0}^{[u]-1} s^{q-k-1} D^k f(0), & u \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.38)$$

şeklinde verilir.

2.5.3 Grünwald-Letnikov tanımı

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Grünwald-Letnikov formülü ile $q = u + jv$ dereceden türev ve integrali, Denklem 2.29'daki kesir dereceli tanımda α yerine q konularak kolayca elde edilebilir (Valério ve Costa, 2013):

$${}_c D_t^q f(t) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} h^q \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-c}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(q)} f(t-kh), & u \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & q = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-c}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(q-k+1)} f(t-kh), & u \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.39)$$

Grünwald-Letnikov kesirli integro-türev tanımının Laplace dönüşümü için belirli şartlar altında Denklem 2.36'da Riemann-Liouville dönüşümünde verilen ifade aynen kullanılabilir.

2.5.4 Kompleks dereceli integro-türev ve kompleks değer kavramı

Bir $f(t)$ fonksiyonunun kompleks dereceli türev ve integrali kompleks değerli fonksiyonlar üretmektedir. $q = u + jv$ için bir $f(t)$ fonksiyonuna etki eden kompleks dereceli integro-türev aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_t^{-q} f(t) = D_t^{-(u+jv)} f(t), \quad (2.40)$$

Denklem 2.40'ta tanımlanan kompleks dereceli integro-türev operatörünün Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{D_t^{-q} f(t)\} = s^{-(u+jv)} F(s) = s^{-u} s^{-jv} F(s) = s^{-u} e^{-jv \ln(s)} F(s), \quad (2.41)$$

formunda elde edilir. Bu operatörün birim darbe cevabını elde etmek için ters Laplace dönüşümüne ihtiyaç vardır. $q = u + jv$ olmak üzere s^{-q} 'nin ters Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-q}\} = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 2.42'deki dönüşüm kullanılarak, operatörün birim darbe cevabı,

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-q}\} = \mathcal{L}^{-1}\{s^{-(u+jv)}\} = \frac{t^{u+jv-1}}{\Gamma(u+jv)} = \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u+jv)} t^{jv} = \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u+jv)} e^{jv \ln(t)} \quad (2.43)$$

biçiminde elde edilir. $e^{jv\ln(t)}$ için Euler formülü (Stegun ve Abramowitz, 1964) Denklem 2.43'te yerine yazılırsa birim darbe cevabı,

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-q}\} = \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u+jv)} (\cos(v\ln(t)) + jsin(v\ln(t))) \quad (2.44)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü üzere $v \neq 0$ için birim darbe cevabı kompleks değerlidir, yani hem reel hem de sanal bileşenlerine sahiptir. Sanal bileşenin fiziksel anlamının yorumlanmasındaki güçlük nedeniyle kompleks dereceli integro-türev operatörünün sistem ve kontrol mühendisliğinde kullanımını sınırlıdır. Bu sebepten dolayı, Hartley ve diğ. (2005) kompleks eşlenik dereceli integro-türev kavramını önermişlerdir. Bu yeni kavram bir $f(t)$ fonksiyonunun kompleks dereceli integro-türevinde sanal bileşeni ortadan kaldıracağından kontrol sistem uygulamalarında daha uygulanabilir sonuçlar vermektedir.

2.6 Kompleks Eşlenik Dereceli İntegro-Türev Kavramı

Tanım 2.7: Derecesi kompleks bir sayı olan birleştirilmiş türev ve integral operatörüne kompleks eşleniğinin ilave edilmesiyle elde edilen kompleks dereceli operatöre *kompleks eşlenik dereceli integro-türev* denilmektedir. Sürekli zamanlı bir kompleks eşlenik dereceli integro-türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Hartley ve diğ, 2005; Adams ve diğ, 2007):

$$D_t^{-u,v} f(t) = D_t^{-u+jv} f(t) + D_t^{-u-jv} f(t) \quad (2.45)$$

Bu durumda kompleks eşlenik dereceli integro-türev operatörünün Laplace gösterimi

$$\mathcal{L}\{D_t^{-u,v} f(t)\} = (s^{-u+jv} + s^{-u-jv})F(s) = s^{-u}(s^{jv} + s^{-jv})F(s), \quad (2.46)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemde Euler'in açılımı (Stegun ve Abramowitz, 1964) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_t^{-u,v} f(t)\} &= s^{-u}(e^{jv\ln(s)} + e^{-jv\ln(s)})F(s) \\ &= s^{-u} \left[(\cos(v\ln(s)) + jsin(v\ln(s))) + (\cos(v\ln(s)) - jsin(v\ln(s))) \right] F(s) \\ &= 2s^{-u} \cos(v\ln(s))F(s) \end{aligned} \quad (2.47)$$

bulunur. Denklem 2.47'den açıkça görüldüğü üzere bir fonksiyonun kompleks eşlenikli integro-türevinde sanal kısım ortadan kalkmaktadır. Dolayısıyla kompleks eşlenik dereceli integro-türev operatörünün birim darbe cevabı da tamamen reel değerli bir fonksiyondur

(Hartley ve diğ, 2005; Adams ve diğ, 2007). Bu nedenle, kompleks dereceli bir operatör, eşlenik dereceli operatörü ile birleştirildiğinde gerçek değerli bir birim darbe cevabı oluşturulur. Bu durum, tam sayı dereceli bir sistemin kompleks kutup tanımına benzemektedir. Transfer fonksiyonu tek bir kompleks kutba sahip olan bir sistem, kompleks değerli bir birim darbe cevabına sahiptir, ancak transfer fonksiyonu bir kompleks eşlenik kutup çifti olan bir sistem reel değerli bir birim darbe cevabına sahiptir. Bu nedenle kontrol sistem tasarımı uygulamalarında kompleks dereceli integro-türev operatörü yerine kompleks eşlenik dereceli integro-türevin kullanılması daha uygundur. Bu tez çalışmasında, bundan sonra yapılan işlemlerin tümünde kompleks eşlenik dereceli tanımlar kullanılacaktır.



3. KOMPLEKS DERECELİ VE KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLER

Kompleks dereceli sistemler, kompleks dereceli integro-türevlerle karakterize edilen bir diferansiyel denklem tarafından ifade edilen sistemlerdir (Adams ve diğ, 2010a; Cois ve diğ, 2001). Son zamanlarda kompleks dereceli integro-türevlerin, reel dereceli integro-türevlerle iyi açıklanamayan modelleme problemlerinde öne çıktığı görülmektedir (Monje ve diğ, 2010; Matignon, 1996). Geleneksel tam sayı ve reel dereceli diferansiyel denklemler kullanılarak modellemenin gerçekleştirilemediği veya yetersiz kaldığı durumlarda kompleks dereceli diferansiyel denklemler kullanılarak çeşitli dinamik sistemleri modellemenin yararı daha gerçekçi ve doğru bir modelleme imkanı sağlamasıdır (Tare ve diğ, 2018). Yapılan modellemelerde kompleks katsayıların eklenmesinin yüksek dereceli zaman türevlerine eşdeğer olduğu ve kompleks dereceli türevlerin ise hem genliği hem de fazı frekansa bağlı fonksiyonlar ürettiği bulunmuştur. Bu nitelikler kompleks dereceli modellerin geliştirilmesinde kilit bir rol oynamaktadır (Makris ve Constantinou, 1993; Ortigueira, 2022). Böylece kompleks dereceli sistemlerin teorisi, analizi ve uygulamaları son yıllarda sıcak bir konu haline gelmiştir.

Yapılan literatür çalışmasında keyfi dereceli analiz üzerine şimdiye kadar yapılan çalışmaların çoğu reel dereceli kesirli analizin kullanımına yönelik olup, kompleks dereceli analiz üzerine yapılan çalışmaların ise oldukça sınırlı olduğu görülmüştür ve beraberinde bir çok açık problemi barındırmaktadır (Oldham ve Spanier, 1974; Miller ve Ross, 1993; Samko ve diğ, 1993). Bunun nedeni şu şekilde sıralanabilir:

1. Fiziksel olarak açıklanması zor olan sanal sayının (j) yorumlanmasında açık problemler bulunmaktadır.
2. Kompleks dereceli operatörlerle uğraşmak kesirli ve tam sayı dereceli operatörlerle uğraşmaktan çok daha zordur. Çünkü analitik olarak çok fazla parametre ile uğraşmak zorunda kalınmaktadır (Abdulwahhab, 2020).
3. Kompleks dereceli bir sistemin zaman yanıtı, kompleks değerli olup hem reel hem de sanal kısımdan oluşmaktadır. Kompleks zaman yanıtının fiziksel anlamı şu anda tam olarak anlaşılammamaktadır (Hartley ve diğ, 2005; Tare ve diğ, 2018; Ortigueira, 2022).
4. Kompleks dereceli analizde çalışma alanı Riemann yüzeyi ile sınırlıdır (Adams ve diğ, 2010a; Ortigueira ve diğ, 2011).

Bu bölümde, kompleks dereceli sistemlerin, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin ve kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemlerin tanımı verildikten sonra bu sistemlerin zaman ve frekans bölgesi analizleri gerçekleştirilmiştir. Ayrıca kompleks dereceli transfer fonksiyonlarının tam sayı dereceli yaklaşım modellerinin elde edilmesine değinilmiştir. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlaştırılmasında kullanılacak olan tam sayı ve kesir dereceli PI ve PID kontrolör yapıları tanıtılmıştır.

3.1 Kompleks Dereceli Sistemler

Tanım 3.1: *Kompleks dereceli sistemler*, en az bir elemanın derecesi kompleks sayı olan diferansiyel denklemler tarafından temsil edilen dinamik sistemler olarak tanımlanır. Tek-girişli tek-çıkışlı ve sürekli zamanlı kompleks dereceli bir kontrol sisteminin en genel gösterimi aşağıda verilen kompleks dereceli diferansiyel denklem ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} a_n D^{q_n} y(t) + a_{n-1} D^{q_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{q_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $D^\gamma = {}_0D_t^\gamma$, Riemann-Liouville veya Caputo kompleks dereceli türevlerini göstermektedir. $u(t)$ sistemin girişi, $y(t)$ ise sistemin çıkışıdır.

Kontrol sistem teorisinde, bir sistemin dinamik davranışlarının analizi genellikle Denklem 3.1'deki diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü sonucu elde edilen transfer fonksiyonlarından yararlanılarak yapılır. Buna göre, kompleks dereceli bir sistem için transfer fonksiyonunun alabileceği en genel biçim

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{q_n} + a_{n-1} s^{q_{n-1}} + \dots + a_0 s^{q_0}} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999a; Monje ve diğ, 2010; Caponetto ve diğ, 2010). Burada, $N(s)$ transfer fonksiyonun payını ve $D(s)$ ise paydasını temsil eder:

$$N(s) := \sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}, \quad (3.3)$$

$$D(s) := \sum_{k=0}^n a_k s^{q_k}, \quad (3.4)$$

Burada, $q_n, \Re\{q_n\} \geq 0$ olmak üzere paydanın derecesini ve $\beta_m, \Re\{\beta_m\} \geq 0$ olmak üzere payın derecesini ifade eder. $N(s)$ ve $D(s)$ 'e dikkat edilirse, klasik polinom yapısından farklı olarak polinomsu (pseudo polinom) yapısında oldukları görülür. Denklem 3.2'de

tanımlanan kompleks dereceli bir sistemde q_k ve β_k derecelerinden en az birinin kompleks sayı olması zorunludur. Pay ve payda polinomsularının a_k ve b_k katsayıları reel veya kompleks değerlerden oluşmaktadır.

Tanım 3.2: Kompleks dereceli bir transfer fonksiyonunda q_k ve β_k dereceleri bir ortak bölen olarak q kompleks sayısının katları olduğunda (yani $q_k = \beta_k = kq$), bu sisteme *orantılı (commensurate) kompleks dereceli sistem* adı verilir. Bu durumda sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki formda ifade edilir:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{kq}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{kq}} \quad (3.5)$$

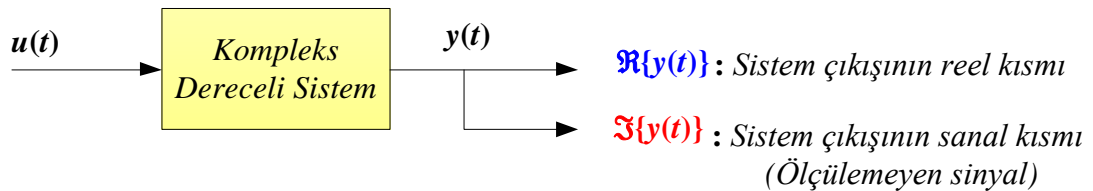
Kompleks dereceli sistemlerin en temel ve basit türü

$$G(s) = \frac{r}{s^q - p} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \in \mathbb{C}$ olmak üzere $q = u + jv$ ve $r, p \in \mathbb{C}$ (veya \mathbb{R}) olarak verilir (Podlubny, 1999a; Monje ve diğ, 2010; Cois ve diğ, 2001).

3.2 Kompleks Dereceli Sistemlerin Zaman Bölgesi Analizi

Şekil 3.1’de verilen kompleks dereceli bir sistemi göz önüne alalım. Şekilde $u(t)$, sisteme uygulanan giriş işaretini ve $y(t)$ ise çıkış işaretini ifade etmektedir. Bu sisteme uygulanan reel değerli bir giriş işareti için sistemin çıkışı şekilden de görüleceği gibi kompleks değerli bir zaman cevabına sahip olmaktadır. Yani $y(t)$ ’nin hem reel bileşeni hem de sanal bileşeni vardır. Sistem çıkışının reel kısmı klasik tam sayı dereceli sistemlerin fiziksel anlamı olan ve ölçülebilen çıkış işaretine karşılık gelirken, sanal kısmı ise fiziksel olarak kullanışlı olmadığı düşünülen ve ölçülemeyen bir işaret olarak karşımıza çıkmaktadır (Cois ve diğ, 2001).



Şekil 3.1 : Kompleks dereceli bir sistem ve zaman cevabı.

Kesir ve kompleks dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı analizlerinde genellikle tam sayı dereceli ve nümerik yaklaşım yöntemleri kullanılmaktadır (Chen ve diğ, 2009;

Krishna, 2011). Bu kısımda Mittag-Leffler fonksiyonu, Gamma fonksiyonu ve bazı özel Laplace dönüşümleri aracılığıyla Denklem 3.6'da en basit formu ile tanımlanan kompleks dereceli bir sistemin birim darbe ve birim basamak cevapları verilecektir. Kompleks dereceli bir sistemin birim darbe ve birim basamak cevaplarını elde ederken kullanılacak olan bazı formüller aşağıdaki gibidir (Monje ve diğ., 2010; Petráš, 2011a):

1. Denklem 2.6'da verilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunda $\alpha = \beta = q$ olduğu durumda $E_{q,q}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$E_{q,q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(qk + q)} \quad (3.7)$$

2. Denklem 2.7'de verilen zaman ağırlıklı Mittag-Leffler fonksiyonunda $\alpha = \beta = q$ olduğu durumda Denklem 3.6'da en basit formu ile tanımlanan kompleks dereceli bir sistemin ters Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r}{s^q - p} \right\} = r t^{q-1} E_{q,q}(p t^q) \quad (3.8)$$

3. Basamak (Heaviside) fonksiyonu $H(t)$ ve 1 parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_q(t) = E_{q,1}(t)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^q - p)} \right\} = -\frac{1}{p} [H(t) - E_q(p t^q)] \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.1 Birim darbe cevabı

Teorem 3.1: Denklem 3.2 ile verilen kompleks dereceli sistemlerin birim darbe cevabı kompleks değerlidir.

İspat 3.1: Teoremin ispatı için Denklem 3.2'de verilen kompleks dereceli sistem ailesinin en basit üyesi olan Denklem 3.6'daki sistemin birim darbe cevabının kompleks değerli olduğunu ispat etmek yeterlidir. Denklem 3.6'daki sistemin girişine birim darbe fonksiyonu $u(t) = \delta(t)$ (yani $U(s) = 1$) uygulandığında sistemin birim darbe fonksiyonu cevabı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$Y(s) = G(s).U(s) = G(s) \quad (3.10)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r}{(s^q - p)}\right\} \quad (3.11)$$

Denklem 3.8 kullanılarak;

$$y(t) = rt^{q-1}E_{q,q}(pt^q) \quad (3.12)$$

elde edilir. Denklem 3.7'den faydalanarak $E_{q,q}(pt^q)$ için elde edilen 2 parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu Denklem 3.12'de yerine konulursa;

$$y(t) = rt^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pt^q)^k}{\Gamma(q(k+1))} \quad (3.13)$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$y(t) = r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^{(k+1)q-1}}{\Gamma(q(k+1))} \quad (3.14)$$

bulunur. $q = u + jv$ yerine konulursa,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r \frac{p^k}{\Gamma(q(k+1))} t^{(k+1)(u+jv)-1} \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradan,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} \left(\frac{rp^k t^{j(k+1)v}}{\Gamma(q(k+1))} \right) \quad (3.16)$$

için Denklem 3.16 düzenlenirse,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} (\Phi_k t^{j(k+1)v}) \quad (3.17)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$\Phi_k = \frac{rp^k}{\Gamma(q(k+1))} \quad (3.18)$$

şeklindedir. Bu noktada matematikte iyi bilinen

$$t^{j(k+1)v} = \cos((k+1)v \ln(t)) + j \sin((k+1)v \ln(t)) \quad (3.19)$$

açılımı Denklem 3.17'de yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} \Phi_k (\cos((k+1)v \ln(t)) + j \sin((k+1)v \ln(t))) \quad (3.20)$$

olarak sistemin birim darbe cevabı elde edilir. Denklem 3.20'den görüldüğü üzere, Denklem 3.6'da verilen kompleks dereceli basit sistemin birim darbe cevabı kompleks değerli bir seridir. Buradan yola çıkılarak, Denklem 3.2'de verilen lineer kompleks dereceli sistem ailesinin birim darbe cevabının da kompleks değerli olduğu söylenebilir (Jacob ve diğ., 2016). Şekil 3.2 (a)'da kompleks dereceli örnek bir sistemin birim darbe cevabı verilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere kompleks değerli bir sistemin birim darbe cevabı, reel (mavi çizgi) ve sanal (kırmızı çizgi) kısımdan oluşan kompleks değerli bir çıkış sinyalidir.

3.2.2 Birim basamak cevabı

Teorem 3.2: Transfer fonksiyonu Denklem 3.2'de verilen lineer kompleks dereceli sistemler kompleks değerli bir birim basamak cevabına sahiptir.

İspat 3.2: Teoremin ispatı için yine kompleks dereceli sistem ailesinin en basit üyesi olan Denklem 3.6'daki sistemin birim basamak cevabının kompleks değerli olduğunu ispat etmek yeterlidir. Sistemin girişine $t > 0$ için birim basamak fonksiyonu $u(t) = 1$ (yani $U(s) = 1/s$) uygulandığında sistemin birim basamak fonksiyonu cevabı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{r}{s^q - p} \right) \frac{1}{s} \quad (3.21)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{r}{s(s^q - p)} \right\} \quad (3.22)$$

Denklem 3.22'ye, Denklem 3.9'da verilen tanım uygulanırsa;

$$y(t) = -\frac{r}{p} [H(t) - E_q(pt^q)] \quad (3.23)$$

$$y(t) = H(t) \left[\frac{-r}{p} \right] + \frac{r}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^{(u+jv)k}}{\Gamma(qk+1)} \quad (3.24)$$

$$y(t) = H(t) \left[\frac{-r}{p} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \frac{rp^{k-1}}{\Gamma(qk+1)} t^{jvk} \quad (3.25)$$

$$y(t) = H(t) \left[\frac{-r}{p} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \varphi_k t^{jvk} \quad (3.26)$$

olacak şekilde birim basamak cevabı elde edilir. Burada,

$$\varphi_k = \frac{rp^{k-1}}{\Gamma(qk + 1)} \quad (3.27)$$

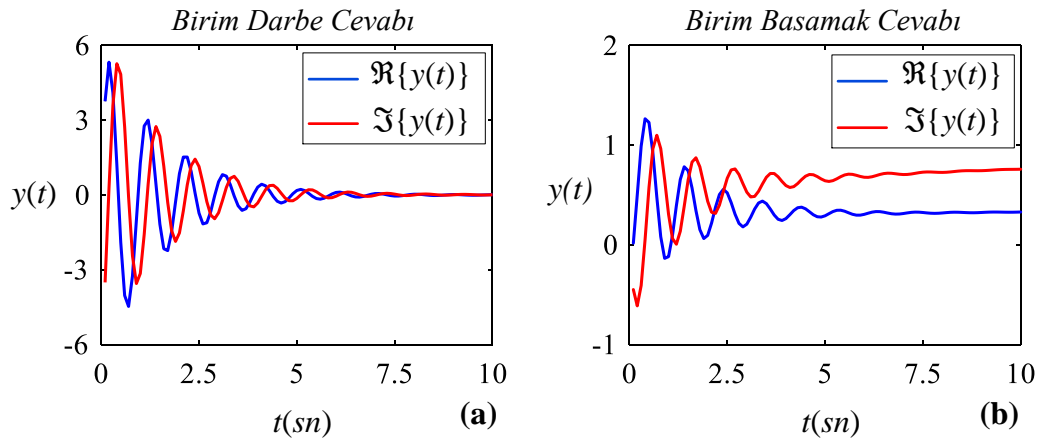
şeklindedir. Aşağıdaki açılım kullanılarak,

$$t^{jvk} = \cos(kv \ln(t)) + j \sin(kv \ln(t)) \quad (3.28)$$

Denklem 3.26 yeniden yazılırsa,

$$y(t) = \left[\frac{-r}{p} \right] H(t) + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \varphi_k [\cos(kv \ln(t)) + j \sin(kv \ln(t))] \quad (3.29)$$

elde edilir. Denklem 3.29'dan görüldüğü üzere, Denklem 3.6'da verilen kompleks dereceli basit sistemin birim basamak fonksiyonu cevabı kompleks değerli bir seridir. Buradan yola çıkılarak, Denklem 3.2'de verilen lineer kompleks dereceli sistem ailesinin birim basamak cevabının da kompleks değerli olduğu söylenebilir (Jacob ve diğ, 2016). Şekil 3.2 (b)'de kompleks dereceli örnek bir sistemin birim basamak cevabı verilmektedir. Şekilde kompleks dereceli sistemin birim basamak cevabı, reel (mavi çizgi) ve sanal (kırmızı çizgi) kısımdan oluşan kompleks değerli bir çıkış sinyalidir.



Şekil 3.2 : Transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{1}{s^{0.6+j0.62}+0.6-j0.9}$ şeklinde olan kompleks dereceli bir sistem için zaman bölgesi analizi: a) Birim darbe cevabı, b) Birim basamak cevabı (mavi çizgi: çıkış sinyalinin reel kısmı; kırmızı çizgi: çıkış sinyalinin sanal kısmı).

Sonuç olarak, kompleks değerli birim darbe cevabı ve birim basamak cevabı şu anda anlaşılamadığından reel değerli bir zaman cevabı elde etmek için kompleks dereceli sistem kompleks eşleniği ile birleştirilmelidir (Adams, 2009; Adams ve diğ., 2010a).

3.3 Kompleks Dereceli Sistemlerin Frekans Bölgesi Analizi

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında sistemlerin frekans tabanlı davranışlarını değerlendirmek büyük avantajlar sağlamaktadır. Bunlar arasında Bode, Nyquist, Nichols gibi grafiksel yöntemler bulunmaktadır. Kompleks dereceli bir kontrol sisteminde frekans cevabı transfer fonksiyonunda s yerine $j\omega$ dönüşümü yapılarak elde edilir. Bu analitik çözüm özelliği, tam sayı dereceli kontrol sistemleri için frekans bölgesinde geliştirilen tüm analiz metodlarının kompleks dereceli kontrol sistemleri için de kullanılması konusunda büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Bu kısımda, örnek olarak $q = u + jv$ için $G(s) = s^q$ 'nin frekans cevabını inceleyeceğiz. $s = j\omega$ için sistemin frekans cevabı

$$G(j\omega) = (j\omega)^q = (j\omega)^{u+jv} = j^u \omega^u j^{jv} \omega^{jv} \quad (3.30)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$j^u = e^{j\frac{u\pi}{2}} = \left(\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{u\pi}{2}\right) \right) \quad (3.31)$$

$$j^{jv} = e^{-\frac{v\pi}{2}} = \cos(v\log(j)) + j\sin(v\log(j)) = \cos\left(j\frac{v\pi}{2}\right) + j\sin\left(j\frac{v\pi}{2}\right) \quad (3.32)$$

$$\omega^{jv} = e^{jv\log\omega} = \cos(v\log(\omega)) + j\sin(v\log(\omega)) \quad (3.33)$$

olarak matematiksel açılımlar tanımlanır. Buna göre $G(j\omega)$ fonksiyonu

$$G(j\omega) = \omega^u \left[\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{u\pi}{2}\right) \right] \left[\cos\left(j\frac{v\pi}{2}\right) + j\sin\left(j\frac{v\pi}{2}\right) \right] \left[\cos(v\log(\omega)) + j\sin(v\log(\omega)) \right] \quad (3.34)$$

şekline dönüşür. $G(s)$ fonksiyonunun genliği (veya kazancı)

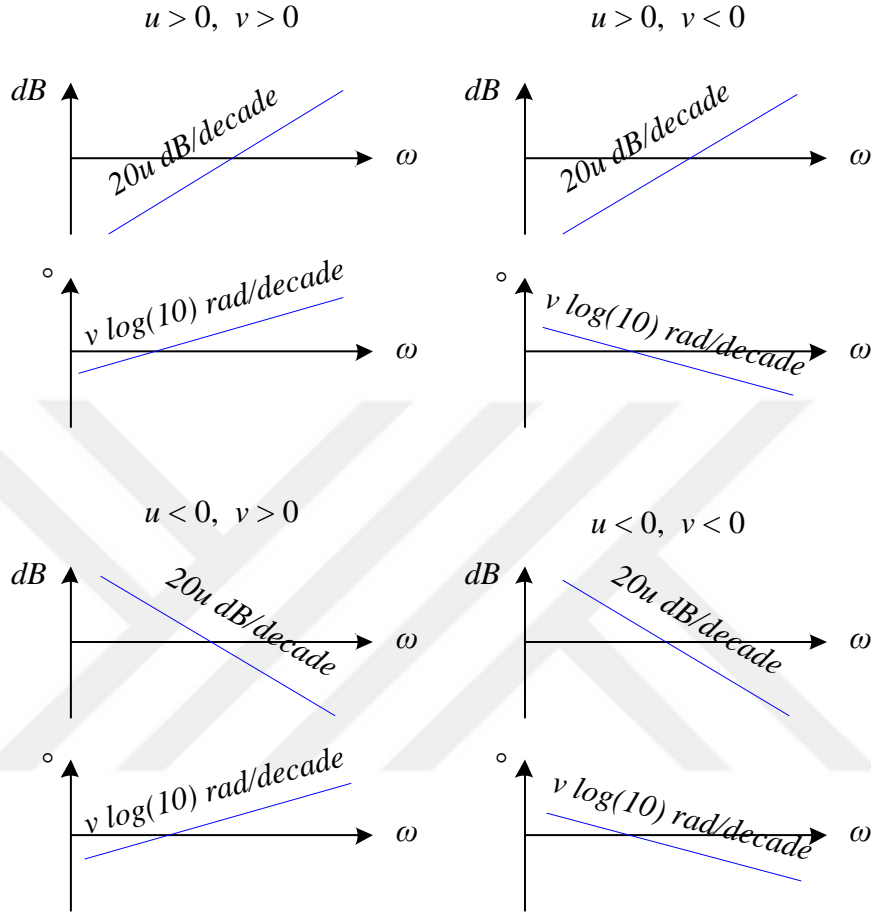
$$20 \log_{10}|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\omega^u e^{-\frac{v\pi}{2}} \right) = 20u \log_{10} \omega + 20 \log_{10} e^{-\frac{v\pi}{2}} \quad (3.35)$$

ve fazı

$$\angle G(j\omega) = \frac{u\pi}{2} + v\log(10) \log_{10} \omega \quad (3.36)$$

biçiminde hesaplanır (Valério ve Costa, 2013). Şekil 3.3'te $G(s) = s^q$ 'nin Bode diyagramları şematik olarak verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi hem kazanç hem de

faz diyagramları $\log_{10} \omega$ ile doğrusaldır. Burada, kompleks derecenin reel kısmının ($\Re\{q\} = u$) işareti kazanç eğiminin işaretini ve kompleks derecenin sanal kısmının ($\Im\{q\} = v$) işareti ise faz eğiminin işaretini belirler.



Şekil 3.3 : $G(s) = s^q = s^{u+jv}$ ($v \neq 0$) için Bode diyagramları (Valério ve Costa, 2013).

3.4 Kompleks Dereceli Transfer Fonksiyonların Tam Sayı Dereceli Yaklaşım Modellerinin Elde Edilmesi

Kesir dereceli sistemler sonsuz boyutlu sistemler olduklarından dolayı zaman bölgesinde gerçekleştirme işlemleri oldukça zordur. Bu sebepten ötürü bu sistemlerin frekans çalışma bölgesinde analizlerinin gerçekleştirilmesi büyük bir avantaj sağlamaktadır. Altmışlı yıllardan beri bazı araştırmacılar, kesir dereceli sistemlerin sonlu boyutlu modellerini yani yaklaşık tam sayı dereceli modellerini elde etmek için çalışmışlardır (Vinagre ve diğ., 2000). Bunun en önemli sebebi kesir dereceli diferansiyel denklemlerin çözümünün tam sayılı diferansiyel denklemlere göre daha zor olması ve donanım uygulamaları için var olan elektronik elemanların tam sayı transfer fonksiyonlarına daha kolay

uygulanabilmesidir (Valério, 2005b; Valério ve Costa, 2013). Bu yüzden kontrol sistem tasarımında kullanılması amaçlanan kesir veya kompleks dereceli türev ve integral operatörlerinin uygulanabilir olması için tam sayı dereceli yaklaşım modellerinin elde edilmesi gerekmektedir. Tam sayı dereceli yaklaşım yöntemleri; frekans bölgesinde sürekli zamanlı yaklaşım yöntemleri ve zaman bölgesinde ayrık zamanlı yaklaşım yöntemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılmaktadır. Sürekli zamanlı yaklaşım yöntemlerinden Matsuda ve Carlson metotları sürekli kesir açılımlarını (CFE: Continued Fraction Expansion) kullanan yöntemler olmakla beraber, Oustaloup ve Chareff metotları ise eğri uydurma veya tanılama tekniklerini kullanan yaklaşımlardır (Vinagre ve diğ., 2000). Sürekli kesir açılımları, genellikle kuvvet serisi açılımlarına (PSE: Power Series Expansion) göre çok daha hızlı yakınsayan fonksiyonların değerlendirilmesi için kullanılabilen bir yöntem olduğu iyi bilinmektedir ve kompleks düzlemde çok daha büyük bir alanda yakınsamaktadır (Press ve diğ., 2007; Vinagre ve diğ., 2000). Carlson ve Halijak (1964) tarafından önerilen Carlson yöntemi, Newton'un düzenli bir iteratif metoduna dayanmaktadır. Matsuda ve Fujii (1993) tarafından önerilen Matsuda yöntemi, CFE ile elde edilen ve orjinal fonksiyonu logaritmik olarak aralıklı bir dizi noktaya sığdıran irrasyonel bir fonksiyonun rasyonel bir fonksiyonla yaklaşımına dayanmaktadır. Oustaloup ve diğ. (2000b) ise sınırlı bir frekans aralığında kutupların ve sıfırların özyinelemeli dağılımına dayanan bir yaklaşım metodu sunmuştur. Chareff ve diğ. (1992) tarafından önerilen Chareff yöntemi ise Oustaloup yöntemine çok yakın bir yöntemdir. Kesir dereceli sistemlerin frekans bölgesinde tam sayı dereceli yaklaşım modellerinin elde edilmesi için ayrıntılı bilgi için Li ve Zhao (2011), Meng ve Xue (2012), Wei ve diğ. (2014) referansları incelenebilir. Ayrık zamanlı yaklaşım yöntemleri ise kendi aralarında kuvvet serileri açılımını kullananlar ve sürekli kesir açılımını kullananlar şeklinde iki alt kola ayrılmaktadır (Vinagre ve diğ., 2000). Bahsedilen tüm bu yaklaşımlar için hangisinin en iyi yöntem olduğunu söylemek mümkün değildir. Çünkü her bir yaklaşım integro-türevin derecesine ve elde edilecek olan tam sayı dereceli transfer fonksiyonunun derecesine vb. gibi çok sayıda faktöre olarak farklı sonuçlar verebilmektedir (Valério, 2005b).

Kesir dereceli sistemlerde olduğu gibi kompleks dereceli bir transfer fonksiyonunun dinamik davranışına uygun tam sayı dereceli yaklaşık bir transfer fonksiyonu elde etmek mümkündür. Derecesi reel bir sayı olan kesir dereceli sistemler için kullanılan ve yukarıda anlatılan yaklaşım metotlarının çoğu, kompleks dereceli sistemler için geçersiz kalmaktadır. Var olan yaklaşıklık yöntemlerinden CRONE üçüncü nesil yaklaşıklık

metodu başka bir adıyla Oustaloup yaklaşıklık metodu (ORA=Oustaloup Recursive Approximations), kompleks dereceli transfer fonksiyonları için şu an için en iyi performans gösteren metot olarak kabul görmektedir (Valério ve Costa, 2013). Bu tez çalışmasında da, $q \in \mathbb{C}$ olmak üzere s^q 'nin tam sayı dereceli yaklaşımı için Oustaloup yaklaşıklık metodu (Oustaloup ve diğ, 2000b) kullanılmıştır.

Oustaloup yaklaşıklık metodunda, $G(s) = s^q$ ($q \in \mathbb{C}$) şeklinde kompleks dereceli bir türev operatörü için $[\omega_l, \omega_h]$ alt ve üst frekans aralığında N tane sıfır ve N tane kutup değerine sahip olan tam sayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu

$$s^q = G_f(s) \approx C_0 \prod_{m=1}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (3.37)$$

şeklinde bir Oustaloup filtresinin standart formu ile elde edilir (Monje ve diğ, 2010; Valério ve Costa, 2013; Xue, 2017). Denklemden bulunan C_0 , ω'_k ve ω_k değerleri şu şekilde hesaplanır:

$$\omega'_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2k-1-q}{2N}} \quad (3.38)$$

$$\omega_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2k-1+q}{2N}} \quad (3.39)$$

$$C_0 = \omega_h^q \quad (3.40)$$

Denklemler 3.38 ve 3.39'un ortak bir özelliği olarak,

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{1/N} \quad (3.41)$$

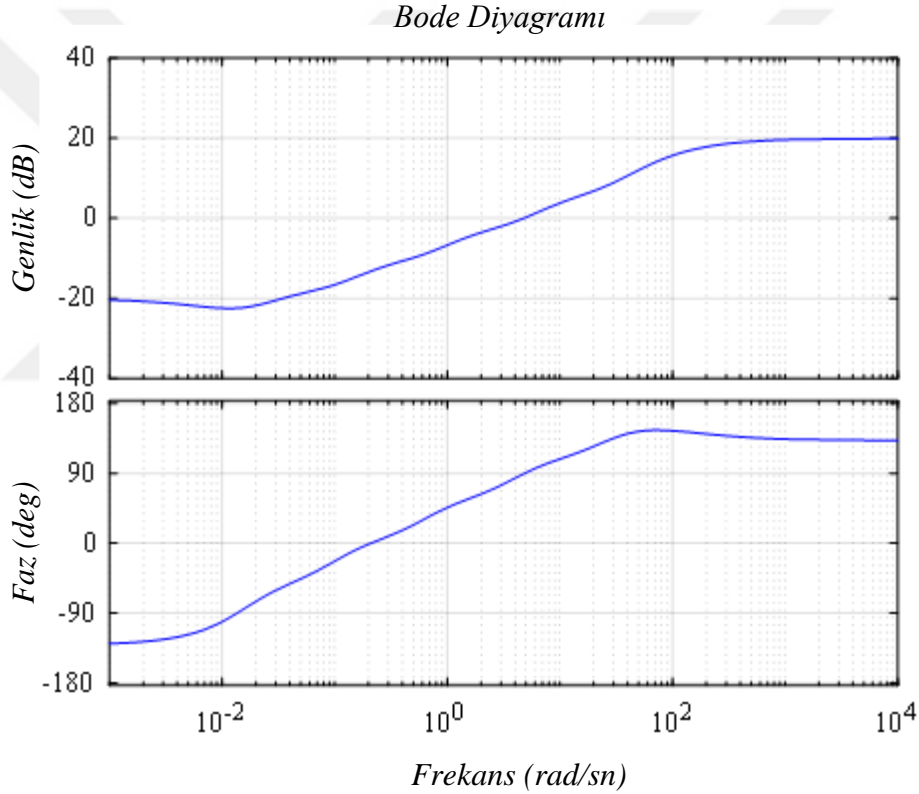
elde edilir. Bu, q 'nin değeri ne olursa olsun kutup ve sıfırların negatif reel yarı ekseninde değişeceğini gösterir. Bu sabit oran, logaritmik bir frekans ölçeğinde hem kutupların hem de sıfırların eşit uzaklıkta olduğunu ima eder. Her kutup fazı 90 derece düşürken ve her sıfır 90 derece yükseltir. Dolayısıyla, q 'nin 90 derece civarında salınan bir faz ile sonuçlanan bu etkilerin toplamı olarak ortaya çıkar. Benzer şekilde, her kutup kazancı 20 dB/decade aşağı bükür ve her sıfır 20 dB/decade yukarı bükür. Dolayısıyla, q 20 dB/decade eğimli bir kazançla sonuçlanan bu etkilerin üst üste binmesi şeklinde yorumlanabilir (Valério ve Costa, 2013).

Örnek 3.1 : $G(s) = s^{0.5+j0.5}$ 'in tam sayı dereceli yaklaşıklığını elde edelim.

$N = 5$, $\omega_l = 10^{-2}$ rad/sn ve $\omega_h = 10^2$ rad/sn seçildiğinde Denklem 3.37-3.40 kullanılarak Crone yaklaşımı ile tam sayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu

$$s^{0.5+j0.5} \approx \frac{(-6.682 + j7.44)s^5 - (79.98 - j287.6)s^4 + (229.1 + j1196)s^3 + (465 + j611.9)s^2 + (67.16 + j33.32)s + (1 - j2.776e^{-16})}{s^5 + (67.16 + j33.32)s^4 + (465 + j611.9)s^3 + (229.1 + j1196)s^2 - (79.98 - j287.6)s - (6682 - j7.44)} \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. Yaklaşık denkleme dikkat edilirse üsler tam sayı ancak katsayılar kompleks sayı biçimindedir. Bu tür sistem gösterimine *kompleks katsayılı sistem* adı verilir. $s^{0.5+j0.5}$ 'in Bode diyagramı Şekil 3.4'te görülmektedir.

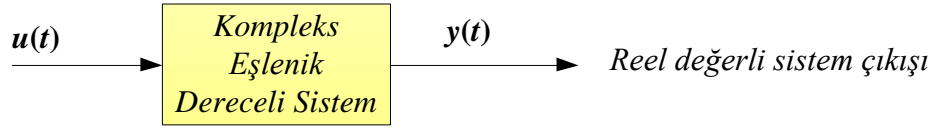


Şekil 3.4 : $s^{0.5+j0.5}$ 'in $N = 5$, $\omega_l = 10^{-2}$ rad/sn ve $\omega_h = 10^2$ rad/sn için Crone/Oustaloup yaklaşımının Bode diyagramı.

3.5 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler

Kompleks eşlenik dereceli sistemler, Hartley ve diğ. (2005) tarafından önerilen kompleks eşlenik dereceli türev tanımından yola çıkılarak ilk kez Adams (2009) tarafından literatüre tanıtılan sistemlerdir. Şekil 3.1'de verilen kompleks değerli zaman yanıtlarının anlamı tam olarak anlaşılmadığından, kompleks dereceli bir sistemi eşleniği ile birleştirerek elde

edilen ve zaman yanıtı Şekil 3.5'te görüldüğü gibi tamamen reel değerli olan kompleks eşlenik dereceli sistemler kontrol mühendisliğinin yeni çalışma konularından birisi olarak karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 3.5 : Kompleks eşlenik dereceli bir sistem ve zaman cevabı.

Tanım 3.3 : Kompleks eşlenik dereceli diferansiyel denklemler ile ifade edilen sistemlere *kompleks eşlenik dereceli sistemler* denir. Bir kompleks eşlenik dereceli sistemin en temel gösterimi

$$G(s) = \frac{r}{s^q - p} + \frac{\bar{r}}{s^{\bar{q}} - \bar{p}} \quad (3.43)$$

şeklinde olup, burada $q = u + jv \in \mathbb{C}$ ve $r, p \in \mathbb{C}$ (veya \mathbb{R})'dir. \bar{q}, \bar{p} ve \bar{r} , sırasıyla q, p ve r 'nin eşleniğidir.

Tanım 3.4: Bir kaskat kompleks eşlenik dereceli sistem, Denklem 3.43'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistemlerin genelleştirilmiş hali olup şu şekilde ifade edilir:

$$G(s) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{r_k}{s^{q_k} - p_k} + \frac{\bar{r}_k}{s^{\bar{q}_k} - \bar{p}_k} \right) \quad (3.44)$$

Burada $q_k = u_k + jv_k \in \mathbb{C}$; $r_k, p_k \in \mathbb{R}$ (veya \mathbb{C}) ve $(k = 1 \sim n) \in \mathbb{N}$ 'dir. \bar{q}_k, \bar{r}_k ve \bar{p}_k , sırasıyla q_k, r_k ve p_k 'nin eşleniğidir.

3.6 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Zaman Bölgesi Analizi

Şekil 3.5'te verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım. Bu sisteme uygulanan reel değerli bir giriş işareti için sistemin çıkışı şekilden de görüleceği gibi kompleks dereceli sistemlerin aksine yalnızca reel değerli bir zaman cevabına sahip olmaktadır. Yani $y(t)$ 'nin, fiziksel anlamı anlaşılamayan ve ölçülemeyen sanal bileşeni bulunmamaktadır. Dolayısıyla, klasik tam sayı dereceli veya kesir dereceli sistemlerin zaman cevabı gibi kullanışlı bir araç elde edilmiş olmaktadır. Bu kısımda, Denklem 3.43'te en basit formu ile tanımlanan kompleks eşlenik dereceli bir sistemin birim darbe ve

birim basamak cevapları elde edilerek, sistemin yalnızca reel zaman cevabına sahip olduğu ispat edilecektir.

3.6.1 Birim darbe cevabı

Teorem 3.3: Denklem 3.43 ve 3.44 ile verilen kompleks eşlenik dereceli sistemlerin birim darbe cevabı reel değerlidir.

İspat 3.3: Denklem 3.43'teki sistemin girişine birim darbe fonksiyonu $u(t) = \delta(t)$ (yani $U(s) = 1$) uygulandığında sistemin birim darbe fonksiyonu cevabı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$Y(s) = G(s).U(s) = G(s) \quad (3.45)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r}{(s^q - p)} + \frac{\bar{r}}{(s^{\bar{q}} - \bar{p})}\right\} \quad (3.46)$$

Denklem 3.8'de verilen tanım kullanılarak;

$$y(t) = rt^{q-1}E_{q,q}(pt^q) + \bar{r}t^{\bar{q}-1}E_{\bar{q},\bar{q}}(\bar{p}t^{\bar{q}}) \quad (3.47)$$

elde edilir. Burada $E_{\bar{q},\bar{q}}$, Denklem 3.7'de q yerine \bar{q} konularak elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki denklem

$$y(t) = rt^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pt^q)^k}{\Gamma(q(k+1))} + \bar{r}t^{\bar{q}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{p}t^{\bar{q}})^k}{\Gamma(\bar{q}(k+1))} \quad (3.48)$$

şekline dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{rp^k t^{(k+1)q-1}}{\Gamma(q(k+1))} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{r}\bar{p}^k t^{(k+1)\bar{q}-1}}{\Gamma(\bar{q}(k+1))} \quad (3.49)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[r \frac{p^k}{\Gamma(q(k+1))} t^{(k+1)(u+jv)-1} + \bar{r} \frac{\bar{p}^k}{\Gamma(\bar{q}(k+1))} t^{(k+1)(u-jv)-1} \right] \quad (3.50)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} \left[\frac{rp^k t^{j(k+1)v}}{\Gamma(q(k+1))} + \frac{\bar{r}\bar{p}^k t^{-j(k+1)v}}{\Gamma(\bar{q}(k+1))} \right] \quad (3.51)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} [\Phi_k t^{j(k+1)v} + \bar{\Phi}_k t^{-j(k+1)v}] \quad (3.52)$$

elde edilir. Burada Φ_k , Denklem 3.18’de tanımlanmıştır ve $\bar{\phi}_k$, ϕ_k ’nin eşleneğidir. Denklem 3.19 kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa kompleks eşlenik dereceli bir sistemin birim darbe cevabı,

$$y(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} t^{(k+1)u-1} [\Re\{\Phi_k\} \cos((k+1)v \ln(t)) - \Im\{\Phi_k\} \sin((k+1)v \ln(t))] \quad (3.53)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 3.53’ten de görüldüğü üzere, kompleks dereceli bir sistem eşleniği ile birleştirildiği zaman, birim darbe fonksiyonu cevabı reel değerli olmaktadır (Adams ve diğ., 2010a; Jacob ve diğ., 2016). Şekil 3.6 (a)’da kompleks eşlenik dereceli örnek bir sistemin birim darbe cevabı verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi çıkış sinyalinin sanal bileşeni (kırmızı çizgi) sıfırdır. Yani kompleks eşlenik dereceli bir sistemin birim darbe cevabı sadece reel değerli bir çıkış sinyali (mavi çizgi) olarak elde edilir.

3.6.2 Birim basamak cevabı

Teorem 3.4: Transfer fonksiyonu Denklem 3.43 ve 3.44’te verilen kompleks eşlenik dereceli sistemler reel değerli birim basamak fonksiyonu cevabına sahiptir.

İspat 3.4: Denklem 3.43’teki sistemin girişine $t > 0$ için birim basamak fonksiyonu $u(t) = 1$ (yani $U(s) = 1/s$) uygulandığında sistemin birim basamak fonksiyonu cevabı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r}{s(s^q - p)} + \frac{\bar{r}}{s(s^{\bar{q}} - \bar{p})}\right\} \quad (3.54)$$

elde edilir. Denklem 3.54’e Denklem 3.9’da verilen tanım uygulanırsa ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$y(t) = -\frac{r}{p} [H(t) - E_q(pt^q)] - \frac{\bar{r}}{\bar{p}} [H(t) - E_{\bar{q}}(\bar{p}t^{\bar{q}})] \quad (3.55)$$

$$y(t) = -H(t) \left[\frac{r}{p} + \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \right] + \frac{r}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^{(u+jv)k}}{\Gamma(qk+1)} + \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{p}^k t^{(u-jv)k}}{\Gamma(\bar{q}k+1)} \quad (3.56)$$

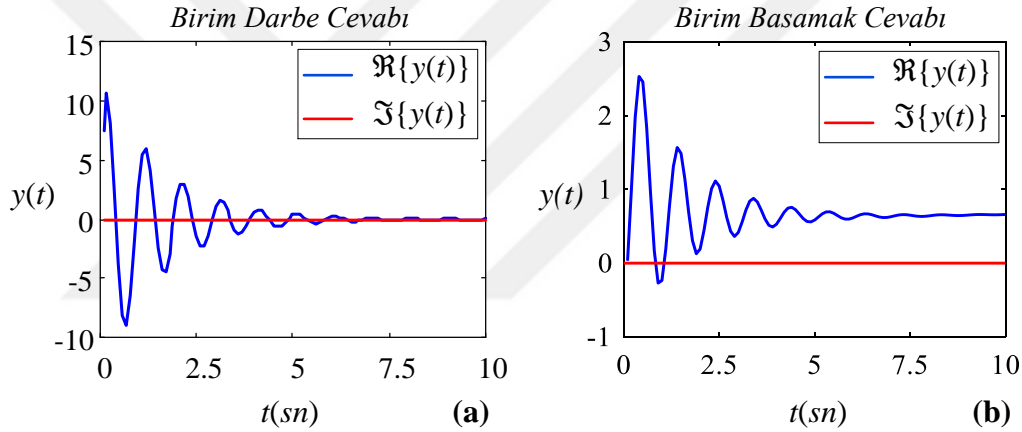
$$y(t) = -H(t) \left[\frac{r}{p} + \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \frac{rp^{k-1}}{\Gamma(qk+1)} t^{jvk} + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \frac{\bar{r}\bar{p}^{k-1}}{\Gamma(\bar{q}k+1)} t^{-jvk} \quad (3.57)$$

$$y(t) = -H(t) \left[\frac{r}{p} + \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \varphi_k t^{jvk} + \sum_{k=0}^{\infty} t^{uk} \bar{\varphi}_k t^{-jvk} \quad (3.58)$$

elde edilir. Burada φ_k , Denklem 3.27’de tanımlanmıştır ve $\bar{\varphi}_k$, φ_k ’nın eşleneğidir. Denklem 3.28 kullanılarak kompleks eşlenik dereceli bir sistemin birim basamak cevabı,

$$y(t) = -\frac{2}{|p|^2} [\Re\{r\}\Re\{p\} + \Im\{r\}\Im\{p\}]H(t) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} t^{ku} [\Re\{\varphi_k\} \cos(kv \ln(t)) - \Im\{\varphi_k\} \sin(kv \ln(t))] \quad (3.59)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 3.59’dan, kompleks dereceli bir sistem kendi eşleniği olan sistemle birleştirildiğinde, birim basamak cevabının gerçek zamanlı bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Şekil 3.6 (b)’de kompleks eşlenik dereceli örnek bir sistemin birim basamak cevabı verilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere çıkış sinyalinin sanal (kırmızı çizgi) kısmı sıfırdır. Yani kompleks eşlenik dereceli bir sistemin birim basamak cevabı sadece reel (mavi çizgi) değerli bir çıkış sinyali olarak elde edilir.



Şekil 3.6 : Transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{1}{s^{0.6+j0.62+0.6-j0.9}} + \frac{1}{s^{0.6-j0.62+0.6+j0.9}}$ şeklinde olan kompleks eşlenik dereceli bir sistem için zaman bölgesi analizi: a) Birim darbe cevabı, b) Birim basamak cevabı (mavi çizgi: çıkış sinyalinin reel kısmı; kırmızı çizgi: çıkış sinyalinin sanal kısmı).

3.7 Tam Sayı ve Kesir Dereceli PID Kontrolör

Klasik PID Kontrolör

Tanım 3.5 (Damarla ve Kundu, 2018; Valério ve Costa, 2013): Bir PID (Oransal–İntegral–Türev) kontrolör, aşağıdaki denklem ile tanımlanan ve girişindeki hata işaretini kullanarak uygun bir $u(t)$ kontrol işareti üreten üç parametrelili bir kontrolör olarak tanımlanır:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i {}_0D_t^{-1} e(t) + k_d {}_0D_t^1 e(t) \quad (3.60)$$

Burada $e(t)$ hata işareti olup, ayarlanabilir kontrolör parametreleri olan k_p, k_i ve k_d sırasıyla oransal, integral ve türev kazançlarıdır. Denklem 3.60, kontrol işaretinin sırasıyla hatayla orantılı, hatanın integraliyle orantılı ve hatanın türeviyle orantılı olarak üretilen üç durumun toplamı olduğunu ifade eder (Damarla ve Kundu, 2018). PID kontrolörünün transfer fonksiyonu.

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3.61)$$

şeklinde verilir. Burada $k_d = 0$ için PI kontrolör, $k_i = 0$ için PD kontrolör ve $k_i = k_d = 0$ için basit P kontrolör çeşitleri elde edilebilir. Endüstride kullanılan kontrolör türlerinin halen büyük çoğunluğu PID kontrolör ve onun bu şekilde daha basit çeşitlerinden oluşmaktadır (Åström ve Hagglund, 1995)

Klasik PID kontrolörün oransal, integral ve türev eylemleri kontrollü sistem davranışı üzerinde olumlu ve olumsuz etkilere sahiptir. Oransal eylem, yanıtın hızını artırır, kalıcı durum hatası ve bağıl kararlılığı azaltır. İntegral eylemi, kalıcı durum hatasını ortadan kaldırır ancak bağıl kararlılığı azaltır. Türev eylemi, bağıl kararlılığı artırır, ancak kontrollü sistemi yüksek frekanslı gürültülü sinyallere duyarlı hale getirir. Klasik PID kontrolör yapısının basitliği avantajı ile birlikte sadece üç performans özelliğini karşılayabilme şeklinde önemli bir dezavantaja sahiptir (Åström ve Hagglund, 1995; Ogata, 1997).

Kesir Dereceli PID Kontrol

Geleneksel/klasik PID kontrolörüne bir genelleme olarak, türev ve integral derecelerini reel kesirli sayıları içerecek şekilde kesir dereceli PID kontrolör kavramı Podlubny (1999) tarafından tanıtılmıştır. Bu genelleştirilmiş kontrolör aynı zamanda $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör olarak da adlandırılır ve λ derecesinde bir integratöre ve μ derecesinde bir türev alıcıya sahiptir. Böylelikle, kontrolörün kazançları (k_p, k_i, k_d) ile integral ve türevin derecesi olan (λ, μ) parametreleri olmak üzere beş farklı parametre ortaya çıkmaktadır. Podlubny, kesirli dereceli bir sistemin kontrol döngüsünde kesir dereceli kontrolör kullanıldığında tam sayılı bir kontrole kıyasla üstün performans sunduğunu göstermiştir.

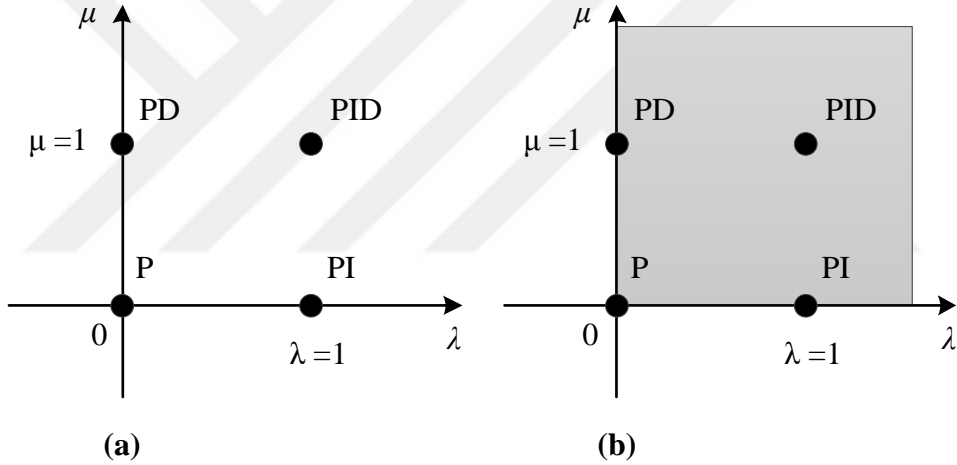
Tanım 3.6: $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü olarak da bilinen bir kesir dereceli PID kontrolörü, aşağıda verilen kesir dereceli integro-türev denklemi ile tanımlanır:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i {}_0D_t^{-\lambda} e(t) + k_d {}_0D_t^\mu e(t) \quad (3.62)$$

Kesir dereceli *PID* kontrolörünün transfer fonksiyonu

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (3.63)$$

olarak verilir. Bu kontrolör $(k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu)$ olmak üzere beş parametreye sahiptir. $\lambda = 0$ ve $\mu = 0$ olursa kesir dereceli *PID* kontrolör klasik *PID* kontrolöre, $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ olursa klasik *PI* kontrolöre, $\lambda = 0$ ve $\mu = 1$ olursa klasik *PD* kontrolöre, $k_d = 0$ olursa kesir dereceli *PI* kontrolöre, $k_i = 0$ olursa kesir dereceli *PD* kontrolöre dönüşür. Şekil 3.7'de klasik P, PI, PD, PID ve kesir dereceli PID kontrolörünün özel durumları görülmektedir. Şekil 3.7 (a)'da görüldüğü üzere PID kontrolör ile mümkün olan sadece dört kontrol konfigürasyonu mevcut iken değişik λ ve μ değerleri seçilerek kesir dereceli PID kontrolör yapısından çok sayıda kontrolör çeşidi elde edilebilir. Bu durum Şekil 3.7 (b)'de gösterilmektedir (Damarla ve Kundu, 2018; Petráš, 2011).



Şekil 3.7 : Klasik PID ile kesir dereceli PID kontrolörün λ ve μ değerlerine göre karşılaştırılması: (a) tam sayı dereceli (noktasal), (b) kesir dereceli (düzlemsel) (Monje ve diğ., 2010).

4. KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Mutlak kararlılık problemi, kontrol sistemlerinin tasarımında ve incelenmesinde karşılaşılan en temel sorunlardan birisidir. Kararsız bir sistem genel olarak kullanılamaz kabul edilir ve bir kontrolör yardımı ile kararlı hale getirilmeye çalışılır. Lineer, lineer olmayan, zamanla değişen, zamanla değişmeyen, tam sayı dereceli ve keyfi dereceli tüm sistemler göz önünde bulundurulduğunda kararlılık analizi farklı şekillerde verilir. Lineer ve zamanla değişmeyen (Linear Time Invariant-LTI) sistemlerde kararlılık analizi karakteristik polinom yardımıyla basitçe yapılmaktadır. Buna göre, tam sayı dereceli bir LTI sistemin karakteristik denkleminin kökleri negatif reel veya negatif reel kısma sahip bir kompleks eşlenik çift şeklinde ise bu durumda sisteme ait kutuplar kompleks s -düzleminin sol yarısında bulunur ve sistem asimptotik manada mutlak karardır denir (Chen ve diğ., 2009) Kesir dereceli sistemlerde kararlılık analizi w -düzleminde biraz daha farklı bir mantıkla gerçekleştirilir, çünkü kararlı bir kesir dereceli sistem kompleks düzleminin hem sağ hem de sol yarı düzleminde köklere sahip olabilmektedir. Bu konuda literatürde en çok kabul gören analiz metodu Matignon'un kararlılık teoremidir (Matignon, 1996). Matignon'un kararlılık teoreminde kesir derecesinin oluşturduğu açığı göre oluşan bölge ve birinci Riemann tabakasına dayalı bir yöntem sunulmaktadır. Kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemler yeni bir konu olup, yapılan literatür taramasında bu sistemlerin kararlılık analizi üzerine çok fazla çalışma bulunmadığı görülmektedir. Kompleks dereceli sistemler için kararlılık analizi yine Riemann yüzeyi kullanılarak gerçekleştirilir. Bu sistemlerin kararlı olabilmesi için sistemin kutuplarının, Riemann yüzeyinin birinci tabakasının sol yarı düzleminde olması gerekmektedir. Denklem 3.6'da transfer fonksiyonu tanımlanan kompleks dereceli bir sistem için kararlılık analizi Cois ve diğ. (2001) tarafından ele alınmıştır. Kompleks dereceli sistemin kutup-konum analizinden elde edilen denklem takımı tek bir koordinat eksenini üzerinden yorumlanarak kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir. Adams (2009), Denklem 3.43 ile tanımlanan kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kutup-konum analizinden elde edilen denklem takımını kompleks düzlemde oluşturulan çemberler üzerinden yorumlayarak kararlılık analizini gerçekleştirmiştir. Bununla birlikte, her iki yöntemin çok fazla matematiksel analiz

gerektirdiği görülmektedir. Bu bölümde, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi tam sayı dereceli sistemlerin kararlılık teorisinden bilinen Mikhailov kararlılık kriterine dayanan genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov (GD Mikhailov) kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilecektir. Bu yöntemin güvenilirliği ve basitliğini ortaya koymak için elde edilen sonuçlar, Adams'ın (2009) kompleks eşlenik dereceli sistemler ve Cois ve diğ. (2001) kompleks dereceli sistemler için önerdiği kararlılık analiz yöntemlerinin sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Bunun için Cois ve diğ. (2001) yöntemi kompleks eşlenik dereceli sistemler için genişletilecektir. Ayrıca önerilen GD Mikhailov tabanlı yöntem kaskat yapıları kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için de uyarlanacaktır. Önerilen yöntem grafiksel bir yöntem olup karmaşık matematiksel hesaplamaları ortadan kaldırmaktadır.

Kararlılık koşullarının frekansa dayalı grafiksel bir şekilde incelenmesi uzun bir geçmişe dayanmaktadır. En genel biçimiyle, 1829 yılında Cauchy'nin argüman ilkesi tarafından konuya ait ilk koşullar rapor edilmiştir. Argüman ilkesinin grafiksel kullanımı mühendislik camiasına Nyquist (1932) tarafından tanıtılmıştır. Mikhailov (1938)—polinomların kararlılığını analiz etmek için basit grafiksel koşullar önermiştir. Ayrıca 1944 ve 1947'de sırasıyla Leonhard (1944) ve Cremer (1947), birbirlerinden ve Mikhailov'dan habersiz benzer koşullar öne sürmüştür. Bu yüzden Alman literatüründe bu kriter *Cremer-Leonhard kriteri* olarak bilinirken; Fransız literatüründe ise *Leonhard kriteri* olarak bilinmektedir. Rus teknik literatüründe ise bu kriter *Mikhailov kriteri* olarak adlandırılırken; Nyquist kararlılık kriteri de genellikle *Mikhailov-Nyquist kriteri* olarak adlandırılmaktadır (MacFarlane, 1979).

Tüm frekans değerleri için bir polinomun değerini hesaplamak ve bunu kompleks düzlemde çizmek, o polinoma ait frekans grafiğini oluşturmaktadır. Bir polinomun frekans grafiğine *Mikhailov eğrisi* denir (Mikhailov, 1938). Bu eğrinin incelenmesi, polinomun kararlılığı hakkında bilgi verir. Mikhailov'un grafiksel prosedürleri, göreceli kararlılık problemi için Nyquist'e benzer bir yaklaşımı kullanır (Stojic ve Siljak, 1965). Nyquist yaklaşımı kompleks düzlemde $(-1, 0)$ noktasını temel alırken, Mikhailov yaklaşımı merkezi yani $(0, 0)$ noktasını temel almaktadır. Mikhailov kararlılık kriteri, sürekli zamanlı tam sayı dereceli sistemler için klasik frekans bölgesi kararlılık testlerinden biridir (Popov, 1962). Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için Mikhailov tarafından önerilen kararlılık kriterinin zaman içinde farklı türdeki sistemler için yetersiz kaldığı görülmüştür. Örneğin Kashiwagi (1965), Mikhailov kararlılık kriterinin tam sayı dereceli zaman

gecikmeli sistemler için sınırlı bir başarı ile kullanılabileceğini belirtmiş, Barker (1979) ise Mikhailov kriterinin zaman gecikmeli lineer, zamanla değişmeyen sistemler için geçerli ve geçersiz uygulamalarını incelemiştir. Bu probleme çözüm bulmak amacıyla farklı sistem türleri için Mikhailov kararlılık kriterinin değiştirilmiş şekilleri önerilmiştir. Büyük dereceli sistemlerin Mikhailov kararlılık kriteri ile incelenmesinde ortaya çıkan problemlere bir çözüm sunmak amacıyla Wright ve Kerlin (1968, 1969) Mikhailov kararlılık kriterinin değiştirilmiş bir şeklini önermiş ve tam sayı dereceli zaman gecikmeli sistemlere uygulamıştır. Daha sonra bu kriterin değiştirilmiş bir başka şekli Tsytkin ve Polyak (1991, 1992) tarafından dayanıklı kararlılık için önerilmiştir. Kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizi için Mikhailov kararlılık kriterinin uygulanmasına ilişkin ilk sonuçlar Busłowicz (2008a, 2008b) tarafından verilmiştir. Bu kriterin değiştirilmiş başka versiyonları, orantılı (commensurate)-orantısız (incommensurate) kesir dereceli sistemlerin (Mendiola-Fuentes ve Melchor-Aguilar, 2018; Stanisławski, 2022) ve zaman gecikmeli kesir dereceli sistemlerin (Melchor-Aguilar ve Mendiola-Fuentes, 2022) analizi için önerilmiştir.

Frekans bölgesine dayalı grafiksel yöntemlerin kullanılması kesir dereceli sistemlerinin kararlılık analizini basitleştirmektedir. Tam sayı dereceli sistemler için klasik kararlılık testlerinin doğrudan kesirli dereceli sistemlere uygulanamayacağı iyi bilinmektedir. Bu yüzden klasik Mikhailov kararlılık kriteri de doğrudan bu sistemlere uygulanamamaktadır. Kesir dereceli sistemleri analiz etmek için Busłowicz tarafından *genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov (GD Mikhailov) kararlılık kriteri* önerilmiştir. GD Mikhailov kararlılık kriterinde kompleks düzlemde kapalı eğriler elde edildiğinden, kesir dereceli sistemin kararlılık analizi oldukça basitleşmektedir. GD Mikhailov kriteri ayrıca yakın zamanda gecikmeli sistemlerin farklı uygulamalarında kararlılık analizi için kullanılmıştır (Çelik, 2015; Çetintas ve Çelik, 2015; Çelik ve diğ., 2019).

Bu bölümde, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizlerini gerçekleştirmek amacıyla Busłowicz (2008a, 2008b) tarafından önerilen GD Mikhailov kararlılık kriterinin yeniden ele alınarak gerekli uyarlamaların yapılması ve elde edilen sonuçların Cois ve diğ. (2001) ve Adams (2009) tarafından önerilen kutup-konum analizleri ile karşılaştırılarak güvenilirliğinin ve basitliğinin ortaya konulması hedeflenmektedir. Çünkü yukarıda bahsedildiği gibi sistemin dinamiği zorlaştıkça Mikhailov kriterinin her seferinde yeniden uyarlanması gerektiğinden ve kompleks eşlenik dereceli sistemler reel değerli sistem ailesi içinde en karmaşık dinamiğe sahip sistemler olduğundan, Busłowicz tarafından önerilen

değiştirilmiş versiyonun da yeniden gözden geçirilmesi zorunludur. Uyarlanmış versiyon, kompleks eşlenik dereceli sistemler ve kaskat yapıdaki kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için uygulanabilir hale gelmesi için gerekli düzenlemeleri içerecektir.

4.1 Kutup-Konum Analizi ile Kararlılık Analizinin Gerçekleştirilmesi

Çok değerli fonksiyon kavramı ileri matematiksel analiz konularından biri olup, bu fonksiyonların incelenmesinde Riemann yüzeyleri sıkça kullanılmaktadır. Riemann yüzeyi kavramı ilk olarak 1851 yılında Georg Friedrich Bernhard Riemann tarafından incelenmiş ve isimlendirilmiştir. Riemann yüzeyleri manifold şeklinde bir topolojik yapıya sahip olup, çok sayıda tabakadan oluşmaktadır (Petráš, 2011a). Çok değerli fonksiyonların kararlılık analizi için yalnızca Riemann yüzeyinin birinci tabakasının fiziksel bir önemi vardır (Gross ve Braga, 1961; Monje ve diğ., 2010). Kompleks dereceli türev olan s^q ($q \in \mathbb{C}$), kompleks düzlemde çok değerli bir fonksiyon olup, dolayısıyla kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin karakteristik denklemi sonsuz sayıda köke sahip olup, aralarında sadece sınırlı sayıda kök Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunmaktadır. Bu yüzden kompleks dereceli bir karakteristik denklemin kararlılık analizinde sadece Riemann yüzeyinin birinci tabakasındaki kökleri incelemek yeterli olacaktır.

Tanım 4.1: Riemann yüzeyinin tabakaları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Monje ve diğ., 2010):

$$s = |s|e^{j\phi}, \quad (2k + 1)\pi < \phi < (2k + 3)\pi, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$k = -1$ ' e karşılık gelen tabaka, Riemann yüzeyinin birinci/ana tabakası olup, genel adlandırma

$$k = \begin{cases} -1, & -\pi < \arg(s) < \pi, & (\text{Riemann yüzeyinin birinci tabakası}) \\ 0, & \pi < \arg(s) < 3\pi, & (\text{Riemann yüzeyinin ikinci tabakası}) \\ 1, & 3\pi < \arg(s) < 5\pi, & (\text{Riemann yüzeyinin üçüncü tabakası}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde yapılmaktadır. Riemann yüzeyine ait verilen bu bilgiler kullanılarak Cois ve diğ. (2001) ile Adams'ın (2009) kutup konum analizi aşağıda kısaca tanıtılacaktır.

4.1.1 Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunan kutupların konumuna göre kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi

Bu kısımda, Cois ve diğ. (2001) tarafından kompleks dereceli sistemler için geliştirilen kararlılık analiz metodu, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için uyarlanarak açıklanacaktır. Denklem 3.43'te verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistem sonsuz sayıda kompleks eşlenik kutuplara sahiptir. Bu kutuplar

$$(s^q - p) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = p^{1/q} = p^{\frac{1}{u+jv}} = p^{x-jy} \quad (4.3)$$

ve

$$(s^{\bar{q}} - \bar{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_2 = \bar{p}^{1/\bar{q}} = (\bar{p})^{\frac{1}{u-jv}} = (\bar{p})^{x+jy} \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada, x ve y

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad (4.5)$$

$$y = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad (4.6)$$

olarak verilir. p ve \bar{p} kompleks sayıları için genlik ve faz bilgilerini içeren $p = |p|e^{j(Arg(p)+2\pi n)}$ ve $\bar{p} = |p|e^{-j(Arg(p)+2\pi n)}$ gösterimleri Denklem 4.3 ve 4.4'te yerine yazılırsa, bu durumda sistemin kutupları,

$$\begin{aligned} s_n &= (|p|e^{j(arg(p)+2\pi n)})^{x-jy} = |p|^{x-jy} e^{j(Arg(p)x-jArg(p)y+2\pi nx-j2\pi ny)} \\ &= |p|^x e^{-jy \ln |p|} e^{jArg(p)x+Arg(p)y+j2\pi nx+2\pi ny} \\ &= e^{x \ln |p|+Arg(p)y+2\pi ny} e^{j(Arg(p)x-y \ln |p|+2\pi nx)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{aligned} s_n &= (|p|e^{-j(Arg(p)+2\pi n)})^{x+jy} = |p|^{x+jy} e^{-j(Arg(p)x+jArg(p)y+2\pi nx+j2\pi ny)} \\ &= |p|^x e^{jy \ln |p|} e^{-jArg(p)x+Arg(p)y-j2\pi nx+2\pi ny} \\ &= e^{x \ln |p|+Arg(p)y+2\pi ny} e^{-j(Arg(p)x-y \ln |p|+2\pi nx)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü üzere her iki durum için kutuplar birbirinin kompleks eşleniğidir ve kutup analizleri aynı sonucu vermektedir. Bu yüzden sadece birinin kutup analizini gerçekleştirmek yeterli olacaktır. Denklem 4.7 ve 4.8'den sistemin sonsuz sayıda kutba sahip olduğu görülmektedir. Fakat bunlardan sadece sınırlı sayıda kutup Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunmaktadır. Kompleks eşlenik dereceli sistemin kararlı

olabilmesi için kompleks düzlemde Riemann yüzeyinin kapalı sağ yarısında kutba sahip olmaması gerekir. Denklem 4.7, $s_n = \rho_n e^{j\theta_n}$ formuna benzetilirse;

$$\rho_n = e^{x \ln|p| + \text{Arg}(p)y + 2\pi n y} \quad (4.9)$$

$$\theta_n = \text{Arg}(p)x - y \ln|p| + 2\pi n x \quad (4.10)$$

olup, x ve y değerleri θ_n 'de yerine yazılırsa,

$$\theta_n = \frac{u}{u^2 + v^2} \text{Arg}(p) - \frac{v}{u^2 + v^2} \ln|p| + \frac{u}{u^2 + v^2} 2\pi n \quad (4.11)$$

elde edilir. Denklem 4.11'de kutupların açısını veren ifade, Denklem 4.12'deki gibi daha sade bir şekilde ifade edilebilir:

$$\theta_n = \frac{\pi}{L} (K + n) \quad (4.12)$$

Burada,

$$K = \frac{(u \text{Arg}(p) - v \ln|p|)}{2u\pi} \quad (4.13)$$

$$L = \frac{u^2 + v^2}{2u} \quad (4.14)$$

şeklinde formüle edilir.

Kararlılık Şartı 1: Bir kompleks eşlenik dereceli sistemin Denklem 4.7 ve 4.8'de verilen kutuplarının Ω ile tanımlanan Riemann yüzeyinin birinci tabakasında olabilmesi için Denklem 4.10'da verilen kutup açılarının aşağıdaki şartı sağlaması gerekir (Matignon, 1996; 1998; Cois, 1998).

$$\Omega := \{\rho_n e^{j\theta_n} | \rho_n > 0, \quad -\pi < \theta_n < \pi\} \quad (4.15)$$

Bu durumda θ_n açısının

$$-\pi < \text{Arg}(p)x - y \ln|p| + 2\pi n x < \pi \quad (4.16)$$

aralığında olması gerekir. Buradan tam sayı olan n değeri çekilirse,

$$\frac{-\pi - \text{Arg}(p)x + y \ln|p|}{2\pi x} < n < \frac{\pi - \text{Arg}(p)x + y \ln|p|}{2\pi x} \quad (4.17)$$

aralığında bulunmalıdır. Denklem 4.17'de x ve y değerleri yerine yazılırsa;

$$\frac{-(u^2 + v^2)\pi}{2u\pi} - \frac{(u\text{Arg}(p) - v\ln|p|)}{2u\pi} < n < \frac{(u^2 + v^2)\pi}{2u\pi} - \frac{(u\text{Arg}(p) - v\ln|p|)}{2u\pi} \quad (4.18)$$

elde edilir. Denklem 4.13 ve 4.14 kullanılarak, yukarıdaki denklem

$$-L - K < n < L - K \quad (4.19)$$

şeklinde daha basit bir şekilde ifade edilebilir. Denklemden anlaşılacağı üzere $Q_l = [-L - K, L - K]$ aralığında sonlu sayıda n değerleri bulunmaktadır. Yani, Riemann yüzeyinin birinci tabakasında sonlu sayıda kutup bulunmaktadır. Kararlılık şartının sağlanabilmesi için $n \in (\mathbb{Z} \cap Q_l)$ olmalıdır (Cois ve diğ, 2001).

Kararlılık Şartı 2: Kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kararlı olabilmesi için Riemann yüzeyinin birinci tabakasında elde edilen sonlu sayıdaki kutbun tabakanın sol yarı düzleminde olması gerekir. Yani, Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunan her bir kutbun açısı $(-\pi/2)$ 'den küçük ve $(\pi/2)$ 'den büyük olmalıdır. Başka bir deyişle, herhangi bir kutbun açısı $-\frac{\pi}{2} < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ aralığında ise sistem kararsızdır denir. Bu durumda kararsız bir kompleks eşlenik dereceli bir sistemde θ_n ;

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(p)x - y\ln|p| + 2\pi nx < \frac{\pi}{2} \quad (4.20)$$

aralığında bulunur. Yukarıdaki denklemde x ve y değerleri yerine yazılırsa bu durumda tam sayı n değerinin bulunmaması gereken aralık aşağıdaki gibi belirlenir.

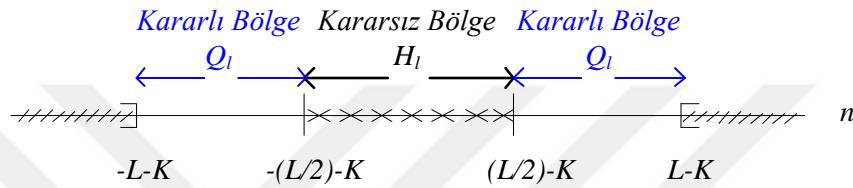
$$\frac{-(u^2 + v^2)\pi}{4u\pi} - \frac{(u\text{Arg}(p) - v\ln|p|)}{2u\pi} < n < \frac{(u^2 + v^2)\pi}{4u\pi} - \frac{(u\text{Arg}(p) - v\ln|p|)}{2u\pi} \quad (4.21)$$

Denklem 4.13 ve 4.14 kullanılarak yukarıdaki denklem basit formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-L/2 - K < n < L/2 - K \quad (4.22)$$

Yukarıdaki denklemde de anlaşılacağı üzere, eğer herhangi bir tam sayı n değeri $H_l = [-L/2 - K, L/2 - K]$ aralığında ise, bir kararsız kutup mevcut demektir. Bu durumda kompleks eşlenik dereceli sistem kararsızdır denir. BIBO kararlılık için $\mathbb{Z} \cap H_l = \emptyset$ olması gerekmektedir. Tam sayı n değeri üzerinden kararlılık şartı, tek boyutlu bir eksen üzerinden Şekil 4.1 ve Denklem 4.23'teki gibi kısaca özetlenebilir (Cois ve diğ, 2001).

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_n = \frac{\pi}{L}(K+n) \\ K = \frac{(u \operatorname{Arg}(p) - v \ln|p|)}{2u\pi} \\ L = \frac{u^2 + v^2}{2u} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Kararlılık Şartı 1} \\ -L - K < n < L - K \\ Q_l = [-L - K, L - K] \\ n \in (\mathbb{Z} \cap Q_l) \\ \dots \\ \text{Kararlılık Şartı 2} \\ -\frac{L}{2} - K < n < \frac{L}{2} - K \\ H_l = \left[-\frac{L}{2} - K, \frac{L}{2} - K\right] \\ \mathbb{Z} \cap H_l = \emptyset \end{array} \right. \quad (4.23)$$



Şekil 4.1 : Tek boyutlu bir eksen üzerinde kararlılık şartı için tam sayı n değerinin konumu.

4.1.2 Kompleks düzlemde oluşturulan çemberler aracılığıyla kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi

Kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kararlı olabilmesi için yukarıda 2. kararlılık şartında belirtildiği gibi her bir kutbun açısı $(-\pi/2)$ 'den küçük ve $(\pi/2)$ 'den büyük olmalıdır. Adams (2009) ile Adams ve diğ. (2010a) bu şartı baz alarak matematiksel hesaplamalar sonucunda kompleks düzlemde bir çember oluşturarak kararlılık analizini daha görsel bir biçimde vermeyi önermişlerdir. Kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kompleks eşlenik derecesinin bu çemberin içinde yer alıp almaması durumuna göre kararlılık analizi gerçekleştirilir. İkinci kararlılık şartını göz önüne alarak $\theta_n > \frac{\pi}{2}$ durumunu ele alalım:

$$\theta_n = \operatorname{Arg}(p)x - y \ln|p| + 2\pi nx > \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

x ve y değerleri yukarıda yerine yazılırsa;

$$\frac{u}{u^2 + v^2} \operatorname{Arg}(p) - \frac{v}{u^2 + v^2} \ln|p| + \frac{u}{u^2 + v^2} 2\pi n > \frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

elde edilir. Denklem 4.25'te her iki taraf $\frac{2}{\pi}(u^2 + v^2)$ ile çarpılırsa;

$$\frac{2u \operatorname{Arg}(p)}{\pi} - \frac{2v \ln|p|}{\pi} + \frac{2u2\pi n}{\pi} > u^2 + v^2 \quad (4.26)$$

bulunur. Eşitsizlikteki tüm ifadeler sağ tarafa alınır

$$0 > u^2 - 2u \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right) + v^2 + 2v \frac{\ln|p|}{\pi} \quad (4.27)$$

elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibi bir quadratik forma dönüştürülebilir:

$$\left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{\ln|p|}{\pi} \right)^2 > \left(u - \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right) \right)^2 + \left(v + \frac{\ln|p|}{\pi} \right)^2 \quad (4.28)$$

Denklem 4.28'deki ifade, merkezi Denklem 4.29'da ve yarıçapı Denklem 4.30'da verilen bir çemberin denkleminde benzerdir.

$$\text{Çemberin Merkezi} \rightarrow M \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi}, \frac{-\ln|p|}{\pi} \right) \quad (4.29)$$

$$\text{Çemberin Yarıçapı} \rightarrow r \left(\frac{\sqrt{(\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n)^2 + (\ln|p|)^2}}{\pi} \right) \quad (4.30)$$

Benzer şekilde, $\theta_n < -\frac{\pi}{2}$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda;

$$\theta_n = \operatorname{Arg}(p)x - y \ln|p| + 2\pi nx < -\frac{\pi}{2} \quad (4.31)$$

x ve y değerleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{u}{u^2 + v^2} \operatorname{Arg}(p) - \frac{v}{u^2 + v^2} \ln|p| + \frac{u}{u^2 + v^2} 2\pi n < -\frac{\pi}{2} \quad (4.32)$$

olur. Denklem 4.32'de her iki taraf $\frac{2}{\pi}(u^2 + v^2)$ ile çarpılırsa;

$$u^2 + 2u \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right) + v^2 - 2v \frac{\ln|p|}{\pi} < 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. Denklem 4.33 quadratik forma dönüştürülürse

$$\left(u + \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right) \right)^2 + \left(v - \frac{\ln|p|}{\pi} \right)^2 < \left(\frac{\operatorname{Arg}(p) + 2\pi n}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{\ln|p|}{\pi} \right)^2 \quad (4.34)$$

bulunur. Eşitsizlikten de görüldüğü üzere Denklem 4.34, merkezi Denklem 4.35'te ve yarıçapı Denklem 4.30'da verilen bir çemberin denkleminde benzerdir.

$$\text{Çemberin Merkezi} \rightarrow M \left(\frac{-\operatorname{Arg}(p) - 2\pi n}{\pi}, \frac{\ln|p|}{\pi} \right) \quad (4.35)$$

Dikkat edilirse yarıçaplar aynı olup, Denklem 4.29 ve 4.35'te verilen çemberlerin merkezleri birbirinin simetrisi şeklindedir.

Kararlılık Şartı: Denklem 3.43 ile tanımlanan kompleks eşlenik dereceli bir sistemin $q = u + iv$ ve $\bar{q} = u - iv$ dereceleri, (u, v) -düzleminde merkezleri Denklem 4.29 ile 4.35 ve yarıçapı Denklem 4.30 ile belirtilen çemberlerin içinde yer alıyorsa bu sistem kararlıdır denir (Adams, 2009; Adams ve diğ., 2010a).

4.2 Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Kararlılık Analizinin Gerçekleştirilmesi

Bu kısımda, Popov (1962) tarafından ayrıntısı verilen Mikhailov eğrisinin özellikleri ve Mikhailov kararlılık kriterlerine kısaca değinilerek, kesir dereceli sistemler için önerilen GD Mikhailov kararlılık kriteri tanıtılmaktadır. Daha sonra GD Mikhailov kararlılık kriteri kompleks eşlenik dereceli sistemler ve kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemler için uyarlanarak, kullanımı kolay ve grafiksel bir yöntem ortaya konulacaktır.

4.2.1 Mikhailov eğrisi ve özellikleri

1938'de Mikhailov, n . dereceden sabit katsayılı doğrusal sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli şartı sağlayacak bir frekans cevap kriteri tanıtmıştır. Sistemlerin kararlılığı, Mikhailov hodograf olarak adlandırılan eğrinin şekline bağlı olarak ifade edilmektedir (Mikhailov, 1938; Popov, 1962; Çetintaş, 2016).

Doğrusal tam sayı dereceli bir sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi olsun.

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.36)$$

Burada $n \in \mathbb{N}$ sistemin derecesini ve a_i ($i = 0 \sim n$) ise denklemin katsayılarını temsil eder. s yerine $j\omega$ yazılırsa,

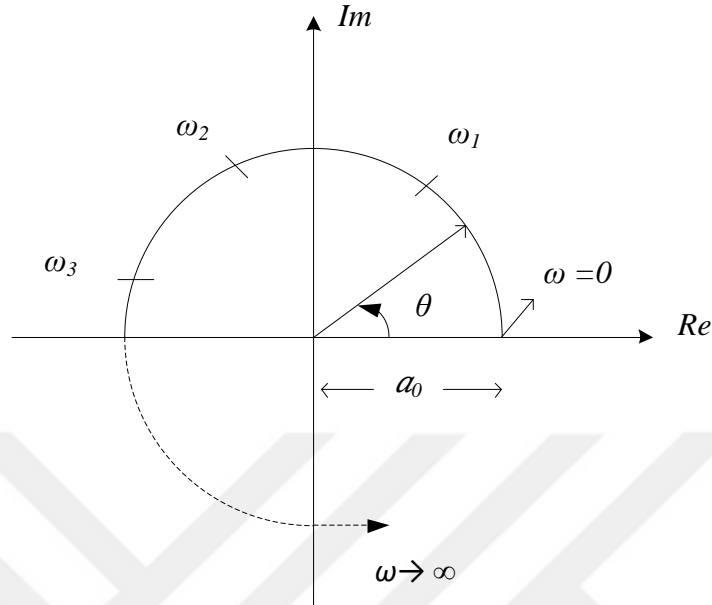
$$P(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (4.37)$$

$P(j\omega)$ 'nin reel ve sanal kısımları

$$X(\omega) = \Re\{P(j\omega)\} = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \quad (4.38)$$

$$Y(\omega) = \Im\{P(j\omega)\} = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \quad (4.39)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Denklem 4.38 ve 4.39 kullanılarak ve ω frekans değeri $0 \leq \omega < \infty$ aralığında değiştirilerek, $P(s)$ polinomu için Mikhailov eğrisi Şekil 4.2’de görüldüğü gibi kompleks düzlem üzerinde elde edilir.



Şekil 4.2 : Mikhailov eğrisi.

Denklem 4.36’deki karakteristik denklemin kökleri s_1, s_2, \dots, s_n olmak üzere, $P(s)$ polinomu aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$P(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (4.40)$$

Yukarıdaki denklemde s yerine $j\omega$ yazılırsa bu durumda Mikhailov eğrisinin ifadesi

$$P(j\omega) = a_n(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) \quad (4.41)$$

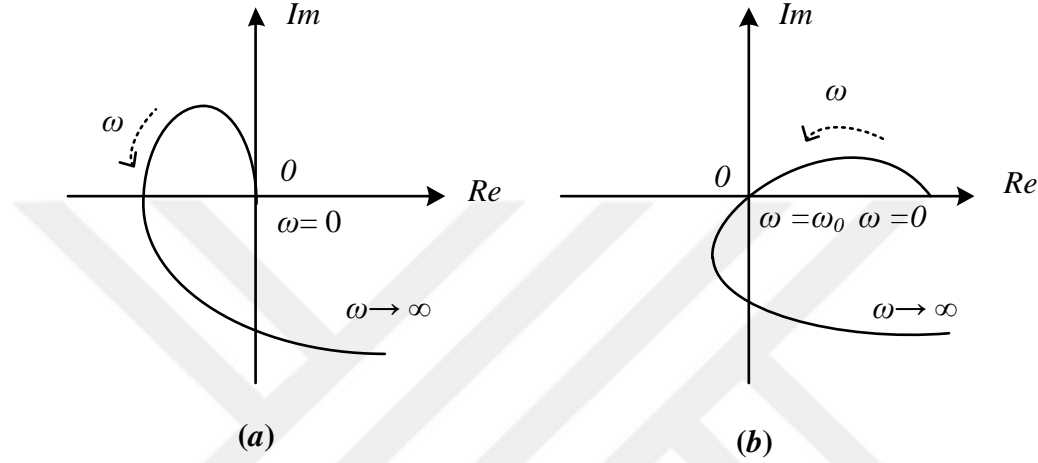
bulunur. $0 \leq \omega < \infty$ aralığında $P(j\omega)$ eğrisinin dönme açısı yukarıdaki denklemde verilen $(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n)$ çarpanlarının açılarının toplamına eşittir. Yani toplam açı

$$\theta = \arg P(j\omega) = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \sum_{i=1}^n \arg (j\omega - s_i) \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu toplamda reel köklerin her birine bir $-(\pi/2)$ veya $+(\pi/2)$ bileşeni karşılık gelmekte, buna karşın her karmaşık kök çifti ise $-(2\pi/2)$ veya $+(2\pi/2)$ bileşenine karşılık gelmektedir. n . dereceden bir $P(s)$ polinomu m tane pozitif reel kısmılı köke ve dolayısıyla $(n - m)$ tane de negatif reel köke sahip ise $0 \leq \omega < \infty$ aralığı için $P(j\omega)$ Mikhailov eğrisinin açısı

$$\theta = (n - m) \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \frac{\pi}{2} \quad (4.43)$$

olarak belirlenir. Eğer karakteristik denklem $s = 0$ 'da bir köke sahipse, Denklem 4.36'da verilen polinomun sabit terimi olan a_0 yok olur ve böylece Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin merkezinden başlar. Bundan başka, saf imajiner kök çifti ($s = \pm j\omega_0$) durumunda ise Mikhailov eğrisi $\omega = \omega_0$ 'a denk gelen frekans değerinde kompleks düzlemin merkezinden geçer. Bu iki durum Şekil 4.3'te görülmektedir.



Şekil 4.3 : Mikhailov eğrisinin; a) sıfır kök durumu ve b) saf imajiner kök durumu.

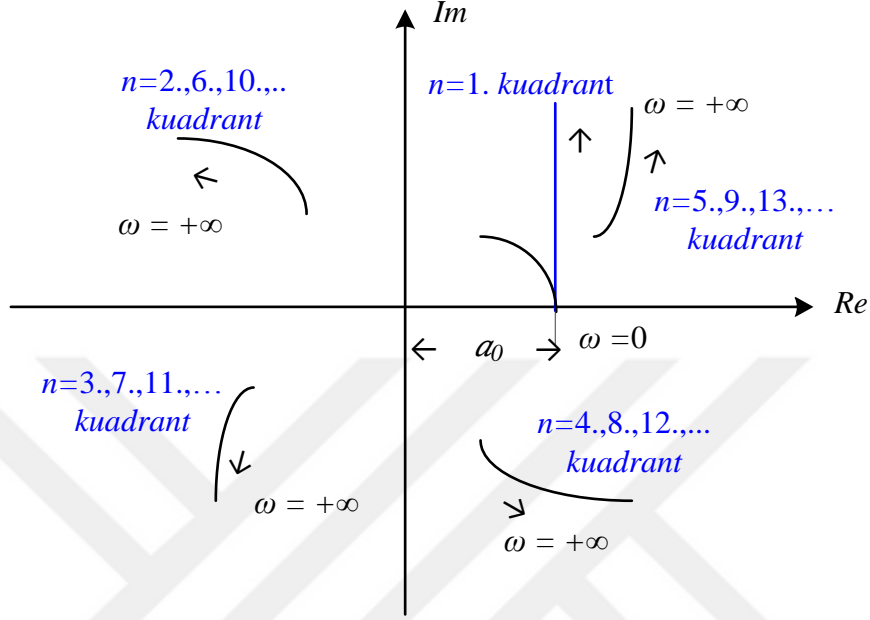
Denklem 4.38 ve 4.39'un ω 'ye göre türevleri alınırsa,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\omega} &= -2a_2\omega + 4a_4\omega^3 - \dots \\ \frac{dY}{d\omega} &= a_1 - 3a_3\omega^2 + 5a_5\omega^4 - \dots \end{aligned} \right\} \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{d\omega}}{\frac{dX}{d\omega}} \quad (4.44)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler göz önüne alındığında pozitif katsayılı polinomlar için çizdirilen bir Mikhailov eğrisinin genel özellikleri şu şekilde sıralanabilir (Şekil 4.4):

1. $\omega = 0$ 'da eğrinin başlangıcı daima reel x eksenini üzerinde kompleks düzlemin merkezinden a_0 kadar uzaklığa yerleştirilir ve bu eğri sola doğru iç bükeydir.
2. $\omega = +\infty$ 'da eğrinin sonu daima sonsuza gider.
3. $Re\{P(j\omega)\} = 0$ ve $Im\{P(j\omega)\} = 0$ noktaları yani koordinat eksenleri ile kesişen noktaların sayısı polinomun derecesi n 'i geçemez.
4. $dX/d\omega = 0$ ve $dY/d\omega = 0$ noktaları yani yatay ve dikey teğetli noktaların toplam sayısı n 'i geçemez.

5. Özellik 3 ve 4'ten de görüldüğü gibi $0 \leq \omega < \infty$ aralığında Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezi etrafında kuadranları (kompleks düzlemin çeyreklerini) geçme sayısı n 'i geçemez.
6. Eğer eğri n kuadrant boyunca birbirini takip ederse monoton bir spiral şekil oluşur.



Şekil 4.4 : Mikhailov eğrisinin özellikleri.

4.2.2 Mikhailov'un kararlılık kriterleri

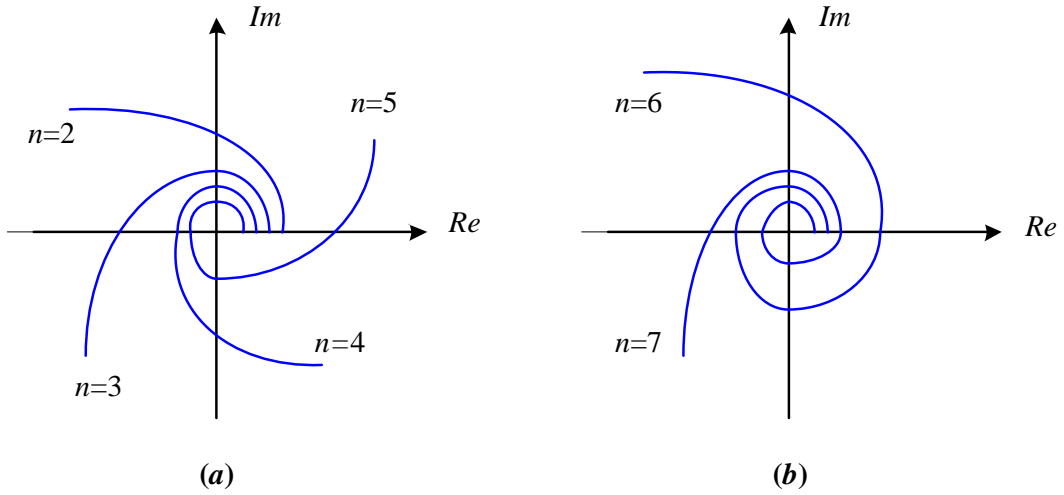
Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için Mikhailov'un iki tane kararlılık kriteri vardır (Popov, 1962).

4.2.2.1 Mikhailov'un birinci kararlılık kriteri

Bir sistemin kararlı olabilmesi için yeterli ve gerekli şart karakteristik denklemin tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olmasıdır. Yani, Denklem 4.43'te $m=0$ olmalı ve dolayısıyla $P(j\omega)$ ifadesinin açısı,

$$\theta = n \frac{\pi}{2} \quad (4.45)$$

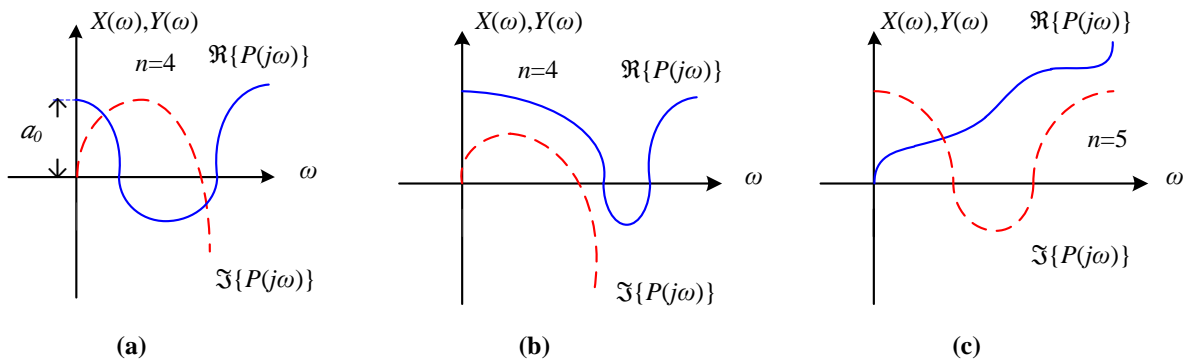
şekline dönüşmelidir. Eğer $\theta = n\pi/2$ ise sistem kararlıdır, $\theta < n\pi/2$ ise sistem kararsızdır. Bu şart, sistemin karakteristik denkleminin için çizilen Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevreleyerek saat yönünün tersinde n tane kuadrant boyunca art arda geçmesidir. Şekil 4.5'te n . dereceden bir sistemin kararlı olduğu Mikhailov eğrileri verilmiştir.



Şekil 4.5 : n . dereceden bir sistemin kararlı Mikhailov eğrileri.

4.2.2.2 Mikhailov'un ikinci kararlılık kriteri

Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterinde, göz önüne alınan bir sistem için kompleks düzlemde çizdirilen tek bir $P(j\omega)$ eğrisi yerine Denklem 4.38 ve 4.39'da verilen $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ ifadeleri ω eksenine göre iki ayrı eğri olarak çizdirilir. Derecesi n olan bir sistem için kararlılık şartı, $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ eğrilerinin $0 \leq \omega < \infty$ için ω eksenini sıra ile dönüşümlü olarak n defa kesmesidir. Şekil 4.6'da üç farklı sistemin $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ eğrileri görülmektedir. Şekil 4.6 (a)'da Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre dördüncü dereceden bir sistemin kararlı olduğu örneği gösterilirken Şekil 4.6 (b) ve (c)'de ise sırasıyla dördüncü ve beşinci dereceden iki ayrı sistemin kararsız olduğu örneğe ait eğriler gösterilmiştir.



Şekil 4.6 : Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre; a) $n = 4$ için kararlı bir sistem, b) $n = 4$ için kararsız bir sistem ve c) $n = 5$ için kararsız bir sistem.

Mikhailov'un her iki kararlılık kriteri lineer zamanla değişmeyen sistemler için eşdeğer olup, birbirini tamamlayıcı olarak düşünülebilir. Bu konu hakkında ayrıntılı bilgi için okuyuculara (Popov, 1962) referansının incelenmesi tavsiye edilir. Bununla birlikte farklı türdeki sistemler için bu kriterler yeterli olmayıp, genelleştirilmiş ve değiştirilmiş şekillerinin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur (Stojic ve Siljak, 1965; Saleh ve diğ., 2010; Vyhlidal ve Zitek, 2009). Bundan sonraki iki kısımda kesir dereceli sistemler için önerilen GD Mikhailov kararlılık kriterinin kompleks eşlenik dereceli sistemler için uyarlanmış şekli verilecektir.

4.2.3 Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri

Kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizi için Mikhailov kararlılık kriterinin uygulanmasına ilişkin ilk sonuçlar Busłowicz (2008a, 2008b) tarafından verilmiştir. Busłowicz'in (2008a) çalışmasında genelleştirilen Mikhailov eğrisinin doğrusal zamanla değişmeyen sürekli zamanlı kesir dereceli sistemler için de çizdirilebileceği ve bu eğrinin özelliğinden faydalanılarak sistemlerin kararlılık analizinin gerçekleştirilebileceğine vurgu yapılmış ancak sistem derecesinin çok büyük olduğu durumlarda Mikhailov eğrisinin analizinin zorlaşacağından bir rasyonel fonksiyon tanımlanarak Mikhailov'un kararlılık kriterine ve değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine dayalı bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov (GD Mikhailov) kararlılık kriteri olarak adlandırılmıştır. Daha sonra Busłowicz, GD Mikhailov kararlılık kriterini kullanarak durum gecikmeli kesir dereceli sistemlerin kararlılığını incelemiştir (Busłowicz, 2008b). Bu başlık altında, Busłowicz tarafından kesir dereceli sistemler için önerilen GD Mikhailov kararlılık kriterine değinilmektedir.

Doğrusal kesir dereceli bir sistemin karakteristik denklemi

$$P(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0} \quad (4.46)$$

biçiminde olsun. Burada sistemin derecesi $\alpha_n \in \mathbb{R}$ için $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$ olup, a_k ($k = 0 \sim n$) ise reel katsayılarıdır. Denklemden kesir dereceli sistemlerin karakteristik denkleminin kesir dereceli bir polinom şeklinde olduğu görülmektedir. Eğer $\alpha_k = k\alpha$ ise Denklem 4.46'da verilen kesir dereceli sistem orantılı dereceli (commensurate order) olur. Bu durumda orantılı kesir dereceli sistemin karakteristik denklemi

$$P(s) = a_n (s^\alpha)^n + a_{n-1} (s^\alpha)^{(n-1)} + \dots + a_1 (s^\alpha) + a_0 \quad (4.47)$$

şeklinde ifade edilir. Orantılı kesir dereceli karakteristik denklem için Mikhailov teoreminin geliştirilmesiyle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1 : Denklem 4.47 ile tanımlanan bir orantılı kesir dereceli sistemin karakteristik denklemi

$$\Delta \arg P((j\omega)^\alpha) = n\pi/2 \quad (4.48)$$

$0 \leq \omega < \infty$

olması durumunda kararlıdır. Burada n sol yarı s -düzleminde yer alan sistemin kutuplarının sayısını ifade ederken, $\pi/2$ ise kompleks düzlemin bir çeyreğini temsil eder. Yani, kompleks düzlemde ω , 0'dan ∞ 'a arttırıldığı zaman $P((j\omega)^\alpha)$ 'nın çizimi geliştirilen Mikhailov eğrisi olarak adlandırılır. Genelleştirilen Mikhailov eğrisi $\omega = 0$ için reel eksen üzerinde $P(0)$ noktasında başlar ve ω , 0'dan ∞ 'a arttırıldığı zaman saat yönünün tersinde düzlemde n kuadrant kadar döner. Ancak,

- ω sonsuza gittiği zaman $P(j\omega)$ 'nin sonsuza doğru değişiminin hızlı bir şekilde olması,
- Büyük n değerlerinde Teorem 4.1'in uygulanmasının zorlaşması,
- Bu teoremin sadece orantılı kesir dereceli sistemler için uygulanabilir olması,
- $P(j\omega)$ 'nin zaman gecikmesi içermesi durumunda $\omega \in [0, \infty)$ için Mikhailov eğrisinin sonsuz sayıda spiral şeklinde bir eğriye sebep olması,
- Bazı kararlı kesir dereceli polinomlar için Mikhailov eğrisinin saat yönünün tersinde dönmediği ve eğrinin yönünü değiştiren salınımların varlığı

gibi durumlardan dolayı Teorem 4.1'in uygulanmasının zor olduğu ve güvenilir olmadığı görülmüştür. Bu yüzden Busłowicz, doğrusal zamanla değişmeyen kesir dereceli sistemler için Mikhailov kararlılık kriteri ve değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine dayalı daha farklı bir yöntem önermiştir. Önerilen yöntem şu şekildedir.

Yukarıda bahsedilen zorlukları gidermek için karakteristik denklem kesir dereceli bir polinoma bölünerek

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_r(s)} \quad (4.49)$$

şeklinde bir $\psi(s)$ rasyonel fonksiyon tanımlanır. Burada $w_r(s)$, Denklem 4.46 ile ifade edilen karakteristik denklem ile aynı dereceye sahip kesir dereceli bir referans polinom olarak seçilir. Bu polinom, $\Re\{s\} \geq 0$ için kararlı olması gerektiğinden

$$w_r(s) = a_n(s + \varepsilon)^{\alpha_n} \quad \varepsilon > 0 \quad (4.50)$$

biçiminde seçilir. Burada a_n , $P(s)$ polinomundaki en yüksek dereceli terimin yani s^{α_n} 'nin katsayısıdır. Denklem 4.50'deki ε 'un değeri, $w_r(s)$ 'in kararlı olması için $\varepsilon > 0$ olacak şekilde keyfi olarak seçilir. Çizdirilen $\psi(s)$ 'in daha düzgün bir formda belirgin bir şekil oluşturması için ε 'nin büyüklüğü veya küçüklüğü ayarlanabilir. Bu durumda, Teorem 4.1'deki kararlılık kriteri şu şekle dönüşür:

Teorem 4.2: Denklem 4.46 ile ifade edilen kesir dereceli bir karakteristik polinom ancak ve ancak,

$$\Delta \arg \psi(j\omega) = 0 \quad \omega \in (-\infty, \infty) \quad (4.51)$$

olması durumunda kararlıdır. $-\infty < \omega < \infty$ aralığında Denklem 4.49'da verilen $\psi(j\omega)$ rasyonel fonksiyonunun çizimi sonucu elde edilen eğri *GD Mikhailov eğrisi* olarak adlandırılır. Bu durumda kesir dereceli bir sistem, ancak ve ancak $-\infty < \omega < \infty$ aralığında GD Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevrelememesi durumunda kararlıdır. Kararlılık şartının sağlanması için Denklem 4.49'da verilen rasyonel fonksiyonun aşağıda verilen şu şartları sağlaması gerekir:

$$1. \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \psi(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{P(j\omega)}{w_r(j\omega)} = 1 \quad (4.52)$$

$$2. \psi(j0) = \frac{P(j0)}{w_r(j0)} = \frac{a_0}{a_n \varepsilon^{\alpha_n}} \quad (4.53)$$

$a_0/a_n \leq 0$ olduğu durumda $\psi(j0) \leq 0$ olduğu için sistem kararsız olacaktır. Teorem 4.2, öncekinin aksine sistemin orantılı veya orantısız olmasından bağımsız tüm kesir dereceli sistemlere uygulanabilmektedir. Her iki teoreme ait ayrıntılı bilgi ve teoremlerin ispatı için Busłowicz (2008a, 2008b) referansları incelenebilir.

4.2.4 Kompleks eşlenik dereceli sistemler için genelleştirilen Mikhailov kararlılık kriterinin uyarlanması

Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için Teorem 4.2'de verilen GD Mikhailov kararlılık kriterinin yeniden ele alınması gerekmektedir. Bunun için, Denklem 3.43'te transfer fonksiyonu verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım:

$$G(s) = \frac{r}{s^q - p} + \frac{\bar{r}}{s^{\bar{q}} - \bar{p}} = \frac{rs^{\bar{q}} + \bar{r}s^q - (\bar{r}p + r\bar{p})}{(s^q - p)(s^{\bar{q}} - \bar{p})} \quad (4.54)$$

Bu denklemin paydası olan karakteristik denklem

$$P(s) = (s^q - p)(s^{\bar{q}} - \bar{p}) = s^{2u} - \bar{p}s^{u+jv} - ps^{u-jv} + p\bar{p} \quad (4.55)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 4.55'teki gibi kompleks dereceli bir karakteristik denklemde en büyük dereceli terimin hangisi olduğunu tespit etmek reel dereceli denklemlerdeki gibi basit değildir. Çünkü kompleks sayılarda büyüklük/küçüklük sıralaması yapmak için genel bir kural bulunmamaktadır. Bu yüzden sıralama ve karşılaştırma işlemlerinin kompleks sayılar kümesinde tek bir karşılığı yoktur. Bower (2008), kompleks sayıların sıralamasının reel kısımlarına göre yapılmasını önermektedir. Dolayısıyla Denklem 4.55'te sadece reel kısımlar dikkate alındığında;

$$2u > u \pm jv \quad (4.56)$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda referans polinom $w_r(s)$,

$$w_r(s) = a_n(s + \varepsilon)^{2u} \quad \varepsilon > 0 \quad (4.57)$$

şeklinde belirlenir. a_n , Denklem 4.55'te verilen kompleks dereceli karakteristik denklemde en büyük dereceli terimin katsayısıdır. Bu durumda Denklem 4.49'da belirtilen rasyonel fonksiyon;

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_r(s)} = \frac{s^{2u} - \bar{p}s^{u+jv} - ps^{u-jv} + p\bar{p}}{a_n(s + \varepsilon)^{2u}} \quad (4.58)$$

biçiminde olur. Rasyonel fonksiyonun Denklem 4.52 ve 4.53'te verilen şartları sağlaması gerektiği unutulmamalıdır. Denklem 4.58'de verilen rasyonel fonksiyonun $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov kararlılık eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevreleme ve çevrelememe durumuna göre sistemin kararlı olup olmadığına karar verilir. Eğer GD Mikhailov eğrisi merkezi çevrelemiyorsa kararlı, aksi takdirde kararsız bir sistemdir denir. Bu yöntem ile elde edilen eğri daha düzgün ve kapalı bir formda şekil elde etmemizi sağlar. Dikkat edilirse Mikhailov'un birinci kararlılık kriterinde eğrinin koordinatların orjinini saat yönünün tersinde çevrelemesi gerekiyordu ancak GD Mikhailov eğrisinde artık bu durum ortadan kalkmaktadır (Cetintas ve Hamamci, 2021).

Bu kısımda kompleks eşlenik dereceli sistemler için yukarıda verilen kararlılık analiz yöntemi Denklem 3.44'te tanımlanan ve daha karmaşık yapıdaki kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizlerinin gerçekleştirilmesi için genelleştirilebilir. Buna

göre Denklem 3.44'teki gibi bir kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemin karakteristik denklemi,

$$P(s) = (s^{q_1} - p_1)(s^{\bar{q}_1} - \bar{p}_1)(s^{q_2} - p_2)(s^{\bar{q}_2} - \bar{p}_2) \dots (s^{q_n} - p_n)(s^{\bar{q}_n} - \bar{p}_n) \quad (4.59)$$

$$P(s) = (s^{2u_1} - \bar{p}_1 s^{q_1} - p_1 s^{\bar{q}_1} + p_1 \bar{p}_1)(s^{2u_2} - \bar{p}_2 s^{q_2} - p_2 s^{\bar{q}_2} + p_2 \bar{p}_2) \dots (s^{2u_n} - \bar{p}_n s^{q_n} - p_n s^{\bar{q}_n} + p_n \bar{p}_n) \quad (4.60)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemde verilen karakteristik denklemin en büyük derecesi $2u_1 + 2u_2 + \dots + 2u_n$ 'dir. Bu durumda, Denklem 4.59 için gerekli olan referans polinom

$$w_r(s) = (s + \varepsilon)^{2u_1 + 2u_2 + \dots + 2u_n}, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.61)$$

şeklinde seçilir. Bu durumda rasyonel fonksiyon

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_r(s)} = \frac{P(s)}{(s + \varepsilon)^{2u_1 + 2u_2 + \dots + 2u_n}} \quad (4.62)$$

biçiminde olur. $-\infty < \omega < \infty$ aralığında rasyonel fonksiyon $\psi(j\omega)$ 'nın çizdirilmesi ile elde edilen GM Mikhailov kararlılık eğrisinin orjini çevreleyip çevrelememe durumuna göre kaskat kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kararlılık analizi hakkında yorum yapılmaktadır. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin ve kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizleri için önerdiğimiz bu yöntem grafiksel bir yöntem olup literatürde mevcut kararlılık yöntemleri ile kıyaslandığı zaman ağır matematiksel hesaplamalara ihtiyaç duyulmadan basit, doğru ve güvenilir bir şekilde kararlılık analizlerini gerçekleştirdiği görülmektedir. Sonraki bölümde benzetim örnekleri verilerek, önerilen yönteme ait sonuçların kutup-konum analizi sonuçları ile doğrulaması yapılacaktır.

4.3 Uygulama Örnekleri

Bu bölümde kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için değişik özelliklerdeki dört farklı sistem göz önüne alınacaktır.

Örnek 4.1 (Adams ve diğ., 2010a): Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kompleks eşlenik dereceli sistemi göz önüne alalım:

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.5+j0.5} + 0.5 - j0.75} + \frac{1}{s^{0.5-j0.5} + 0.5 + j0.75} \quad (4.63)$$

- ❖ GD Mikhailov kararlılık kriteri ile kararlılık analizi: Denklem 4.63'teki sistemin kompleks dereceli karakteristik denklemi,

$$P(s) = s - (-0.5 - j0.75)s^{0.5+j0.5} - (-0.5 + j0.75)s^{0.5-j0.5} + 0.8125 \quad (4.64)$$

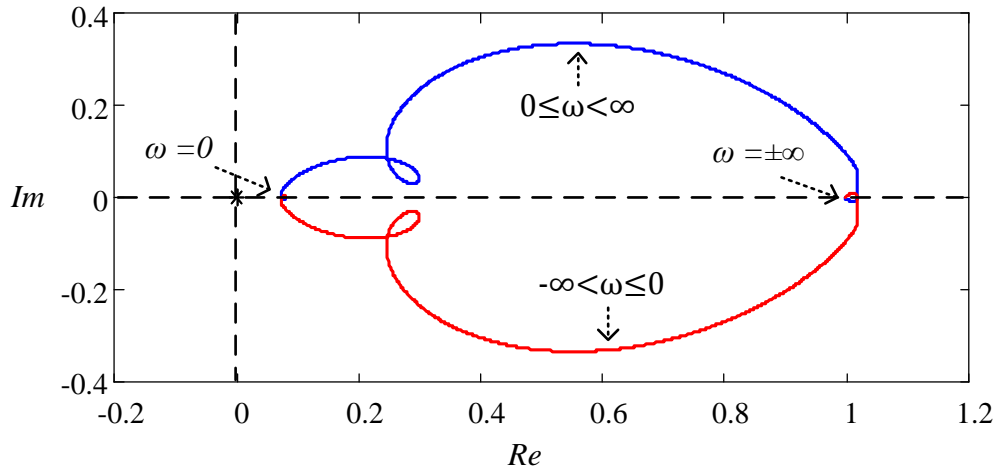
şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemle aynı dereceye sahip ve Denklem 4.57 formunda bir referans polinom $\varepsilon = 10$ keyfi değeri seçilerek

$$w_r(s) = (s + 10) \quad (4.65)$$

belirlenir. Karakteristik denklemin derecesi 1 olduğundan, referans polinom da birinci dereceden bir polinom olarak tanımlanmaktadır. Buna göre, Denklem 4.58'deki $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonu

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_r(s)} = \frac{s - (-0.5 - j0.75)s^{0.5+j0.5} - (-0.5 + j0.75)s^{0.5-j0.5} + 0.8125}{(s + 10)} \quad (4.66)$$

olarak bulunur. MATLAB ortamında $-\infty < \omega < \infty$ aralığında rasyonel fonksiyonun çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi Şekil 4.7'de görülmektedir. Şekilden, ω 'nin hem negatif değerleri hem de pozitif değerleri için çizdirilen eğri parçalarının birbirine simetrik olarak toplamda kapalı bir eğri oluşturduğu görülmektedir. Elde edilen GD Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin merkezini çevrelemediğinden dolayı sistem kararlıdır denir.



Şekil 4.7 : Örnek 4.1'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizilen GD Mikhailov eğrisi.

- ❖ Riemann yüzeyi kullanarak kutup-konum kararlılık analizi: Denklem 4.19 ve 4.22'de verilen kararlılık şartlarının incelenebilmesi için önce K ve L değerlerinin hesaplanması gerekir. $u = v = 0.5$, $\ln|p| = -0.1038$ ve $Arg(p) = 2.1588$ değerleri

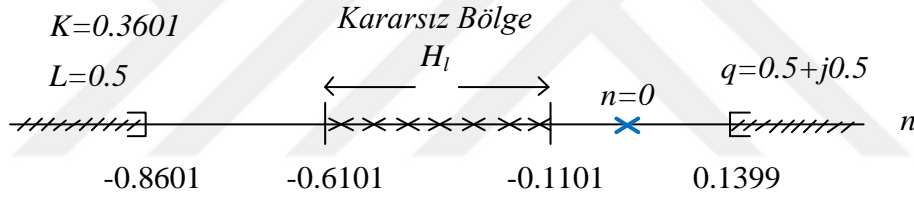
Denklem 4.13 ve 4.14'te yerine konulursa $K = 0.3601$ ve $L = 0.5$ olarak bulunur. Denklem 4.19 kullanılarak hangi n değerlerinde karakteristik denklem köklerinin Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunduğu aşağıdaki gibi tespit edilir:

$$-0.8601 < n < 0.1399 \quad (4.67)$$

Görüldüğü üzere bu aralıkta $n = 0$ değeri mevcuttur. Sadece $n = 0$ 'da kökler Riemann yüzeyinin birinci tabakası üzerindedir. Denklem 4.7 ve 4.8 kullanılarak sistemin kökleri $s = -4.9802 \pm j6.0118$ olarak bulunur. Kararlılık şartının sağlanması için, Denklem 4.22'den de görüldüğü üzere, köklerin Riemann yüzeyinin birinci katmanının sol yarı düzleminde olması, yani $n = 0$ değerinin aşağıda belirtilen aralıkta bulunmaması gerekir:

$$-0.6101 < n < -0.1101 \quad (4.68)$$

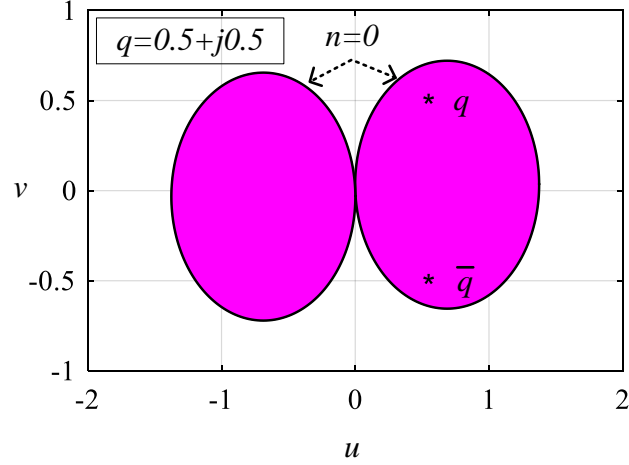
Dolayısıyla, Denklem 4.63'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem kararlıdır. Tam sayı n için kararlılık aralığı Şekil 4.8'de gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere n değeri kararsız bölge (H_I) içinde bulunmadığından sistem kararlıdır denir.



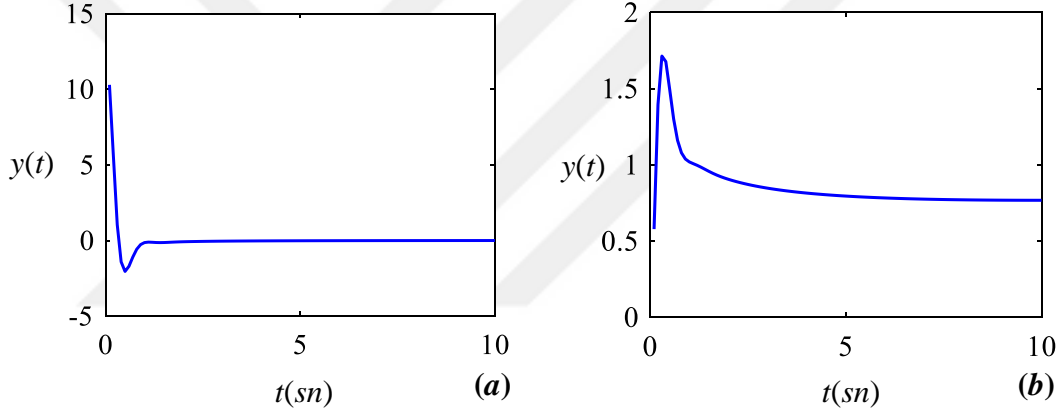
Şekil 4.8 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.

- ❖ Çember oluşturularak kutup-konum kararlılık analizi: Bu yöntemde kararlılık analizi için çemberlerin (u, v) parametre düzlemindeki konumlarının belirlenmesi gerekir. Buna göre, Denklem 4.29 ve 4.35'ten çemberlerin merkezi $M(0.6872, 0.0330)$ ve $M(-0.6872, -0.0330)$, Denklem 4.30'dan çemberlerin yarıçapı $r = 0.6880$ olarak bulunur. Matlab ortamında çizdirilen çemberler Şekil 4.9'da görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere sistemin $q = 0.5 + j0.5$ ve $\bar{q} = 0.5 - j0.5$ dereceleri çemberin içinde kalmaktadır. Bu durumda sistem kararlıdır denir.

Sonuç olarak, GD Mikhailov kararlılık kriteri ile elde edilen kararlılık sonucu diğer iki kutup-konum analizinin sonuçları ile doğrulanmıştır. Sonuçları doğrulamanın bir başka yolu da sistemin birim darbe ve birim basamak cevaplarını incelemektir. Şekil 4.10'da verilen birim darbe ve birim basamak cevaplarından sistemin kararlı olduğu görülmektedir.



Şekil 4.9 : Örnek 4.1’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.



Şekil 4.10 : Örnek 4.1’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.

Örnek 4.2 (Jacob ve diğ, 2016): Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin kararlılığını analiz edelim.

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.9+j0.893} + 1 - j0.3} + \frac{1}{s^{0.9-j0.893} + 1 + j0.3} \quad (4.69)$$

❖ GD Mikhailov kararlılık kriteri ile kararlılık analizi: Denklem 4.69’daki sistemin kompleks dereceli karakteristik denklemi,

$$P(s) = s^{1.8} - (-1 - j0.3)s^{0.9+j0.893} - (-1 + j0.3)s^{0.9-j0.893} + 1.09 \quad (4.70)$$

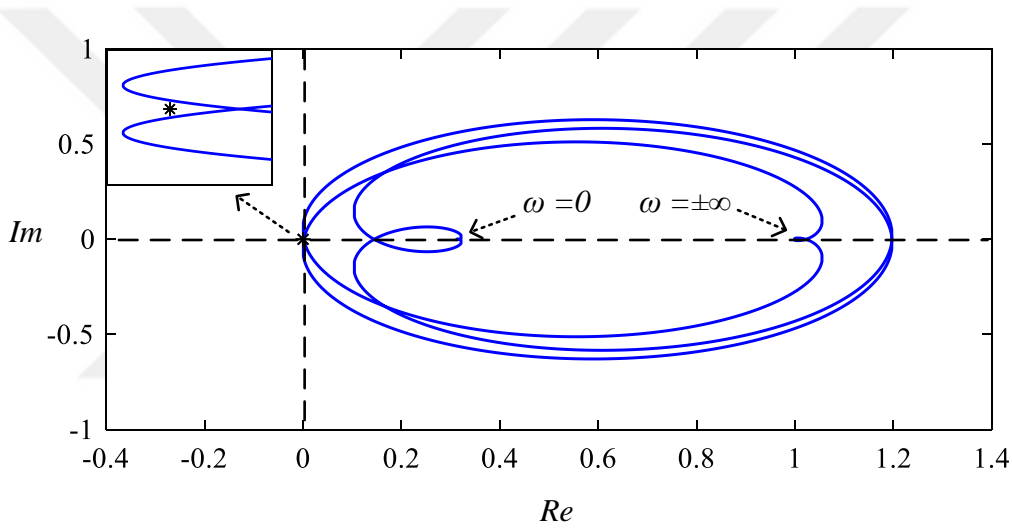
şeklinde elde edilir. $w_r(s)$ referans polinomu için $\varepsilon = 10$ olarak seçilirse

$$w_r(s) = (s + 10)^{1.8} \quad (4.71)$$

biçiminde belirlenir. Karakteristik denklemin derecesi 1.8 olduğundan, referans polinom kesir dereceli bir yapıda ve 1.8 dereceli olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonu

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_r(s)} = \frac{s^{1.8} - (-1 - j0.3)s^{0.9+j0.893} - (-1 + j0.3)s^{0.9-j0.893} + 1.09}{(s + 10)^{1.8}} \quad (4.72)$$

şeklinde elde edilir. Matlab ortamında $-\infty < \omega < \infty$ aralığında $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonun çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi Şekil 4.11’de görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere eğri kompleks düzlemin merkezini çevrelemediğinden dolayı sistem kararlıdır denir. Bununla birlikte eğrinin merkezden çok yakın bir şekilde geçmesi sistemin nisbi olarak az kararlı olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.11 : Örnek 4.2’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.

- ❖ Riemann yüzeyi kullanarak kutup-konum kararlılık analizi: Şimdi sistemin kutupları aracılığıyla kompleks eşlenik dereceli sistemin kararlılığını test edelim. Denklem 4.13 ve 4.14’te verilen K ve L değerlerini hesaplamak için $u = 0.9$, $v = 0.893$, $\ln|p| = 0.0431$ ve $Arg(p) = 2.8501$ değerleri yerine konulursa, $K = 0.4468$ ve $L = 0.8930$ olarak bulunur. Denklem 4.19 kullanılarak aşağıdaki denklemde hangi n değerlerinde köklerin Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunduğu tespit edilir.

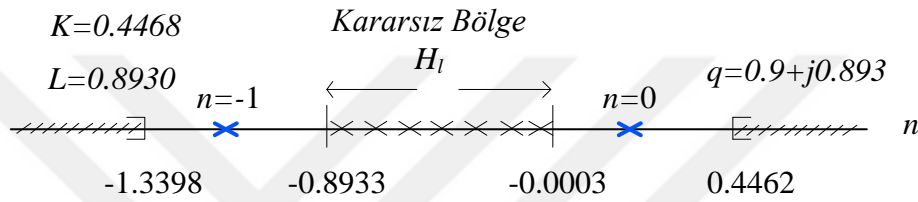
$$-1.3398 < n < 0.4462 \quad (4.73)$$

Görüldüğü üzere bu aralıkta $n = 0$ ve $n = -1$ tam sayı değerleri mevcuttur ve bu tam sayı değerlerinde kökler Riemann yüzeyinin birinci katmanı üzerindedir. Denklem 4.7 ve 4.8

kullanılarak sistemin $n = 0$ 'da $s = -0.0052 \pm j4.9902$ ve $n = -1$ 'de ise $s = -0.0558 \pm j0.1415$ kökleri bulunur. Kararlılık şartının sağlanması için $n = 0$ ve $n = -1$ tam sayı değerlerinin aşağıdaki denklemde belirtilen aralıkta bulunmaması gerekir.

$$-0.8933 < n < -0.0003 \quad (4.74)$$

Görüldüğü üzere $n = 0$ ve $n = -1$ tam sayı değerleri bu aralığın içinde bulunmamaktadır. Yani Denklem 4.69'da verilen kompleks eşlenik dereceli sistem kararlıdır. Elde edilen n değerleri için kararlılık aralığı Şekil 4.12'de gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere $n = 0$ ve $n = -1$ değerleri kararsız bölge (H_I) içinde bulunmadığından sistem kararlıdır denir.

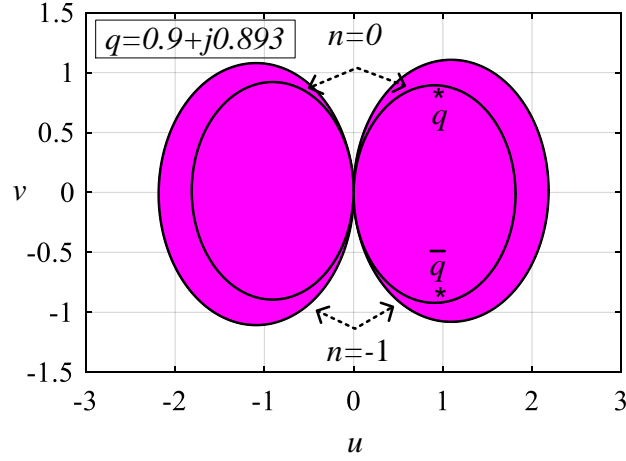


Şekil 4.12 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.

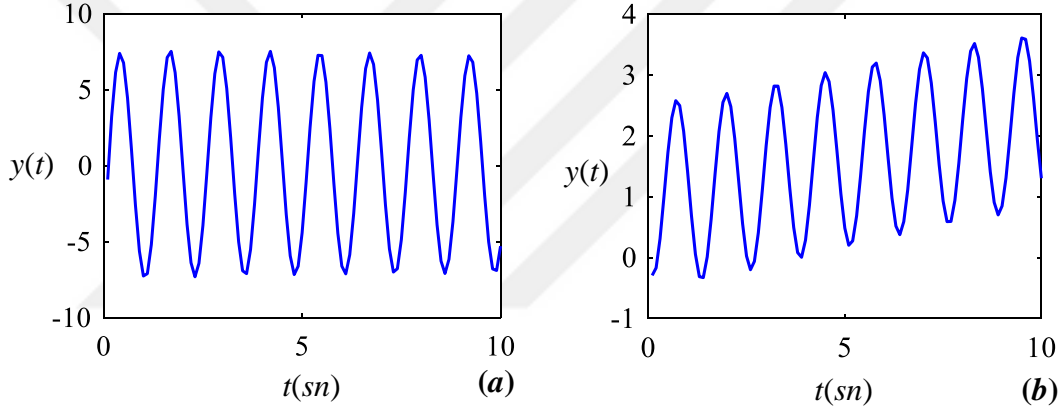
- ❖ Çember oluşturularak kutup-konum kararlılık analizi: Denklem 4.29, 4.30 ve 4.35 kullanılarak çemberlerin merkezleri $n = 0$ için $M(0.9072, -0.0137)$ ve $M(-0.9072, 0.0137)$ ve çemberlerin yarıçapı $r = 0.9073$; $n = -1$ için çemberlerin merkezleri $M(-1.0928, -0.0137)$ ve $M(1.0928, 0.0137)$ ve çemberlerin yarıçapı $r = 1.0929$ olarak hesaplanır. Matlab ortamında $n = 0$ ve $n = -1$ için çizdirilen çemberler Şekil 4.13'te görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere sistemin kompleks derecesi $q = 0.9 + j0.893$ ve $\bar{q} = 0.9 - j0.893$ noktaları çemberlerin içinde kalmaktadır. Bu durumda sistem kararlıdır denir. Şekil 4.14(a)'da bu sistemin birim darbe cevabı ve Şekil 4.14(b)'de ise birim basamak cevabı verilmiştir.

Örnek 4.3: Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin kararlılığını analiz edelim.

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.8+j0.4} - (2+j)} + \frac{1}{s^{0.8-j0.4} - (2-j)} \quad (4.75)$$



Şekil 4.13 : Örnek 4.2’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.



Şekil 4.14 : Örnek 4.2’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.

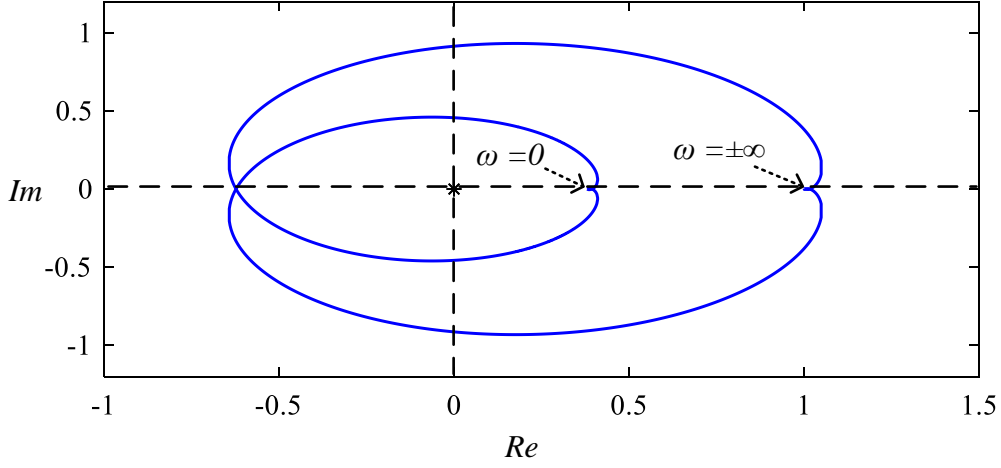
- ❖ GD Mikhailov kararlılık kriteri ile kararlılık analizi: Sistemin kompleks dereceli karakteristik denklemi,

$$P(s) = s^{1.6} - (2 - j)s^{0.8+j0.4} - (2 + j)s^{0.8-j0.4} + 5 \quad (4.76)$$

şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemin derecesi 1.6 olduğundan, $w_r(s)$ referans polinomu da aşağıdaki gibi kesir dereceli bir yapıda tanımlanır:

$$w_r(s) = (s + 5)^{1.6} \quad (4.77)$$

Referans polinoma dikkat edilirse, ε 'un değeri bu sefer keyfi olarak $\varepsilon = 5$ şeklinde seçilmiştir. Bu durumda $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonu,



Şekil 4.15 : Örnek 4.3'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.

$$\psi(s) = \frac{P_2(s)}{w_r(s)} = \frac{s^{1.6} - (2-j)s^{0.8+j0.4} - (2+j)s^{0.8-j0.4} + 5}{(s+5)^{1.6}} \quad (4.78)$$

şeklinde bulunur. Matlab ortamında $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi Şekil 4.15'te görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere eğri kompleks düzlemin merkezini çevrelediğinden dolayı sistem kararsızdır denir.

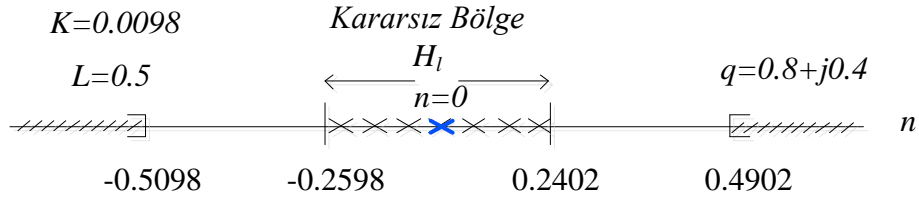
- ❖ Riemann yüzeyi kullanarak kutup-konum kararlılık analizi: $u = 0.8$, $v = 0.4$, $\ln|p| = 0.8047$ ve $Arg(p) = 0.4636$ değerleri için, Denklem 4.13 ve 4.14 kullanılarak $K = 0.0098$ ve $L = 0.5$ olarak bulunur. Hangi n tam sayı değerlerinde köklerin Riemann yüzeyinin birinci tabakasında bulunduğu aşağıdaki denklem ile tespit edilir.

$$-0.5098 < n < 0.4902 \quad (4.79)$$

Görüldüğü üzere bu aralıkta yalnızca $n = 0$ değeri mevcuttur ve bu n değerinde kökler Riemann yüzeyinin birinci tabakası üzerindedir. $n = 0$ için Denklem 4.7 ve 4.8 kullanılarak, sistemin Riemann yüzeyi birinci tabakasındaki kökü $s = -0.0052 \pm j4.9902$ olarak bulunur. Kararlılık şartının sağlanması için $n = 0$ tam sayı değerinin Denklem 4.22 ile belirlenen aşağıdaki aralıkta bulunmaması gerekir:

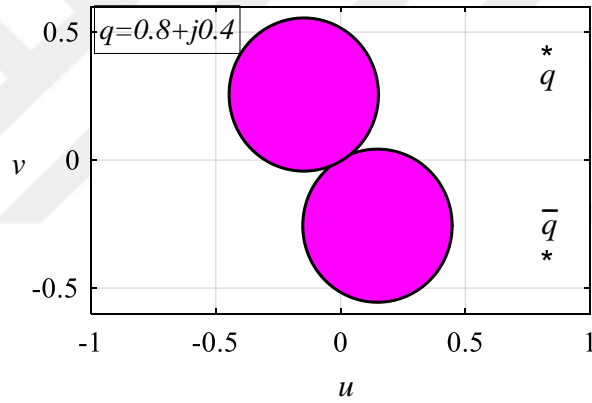
$$-0.2598 < n < 0.2402 \quad (4.80)$$

Görüldüğü üzere $n = 0$ değeri bu aralığın içinde bulunmaktadır. Yani Denklem 4.75'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem kararsızdır. Tam sayı n için kararlılık aralığı Şekil 4.16'da gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere $n = 0$ değeri kararsız bölgede (H_I) bulunduğundan sistem kararsızdır denir.

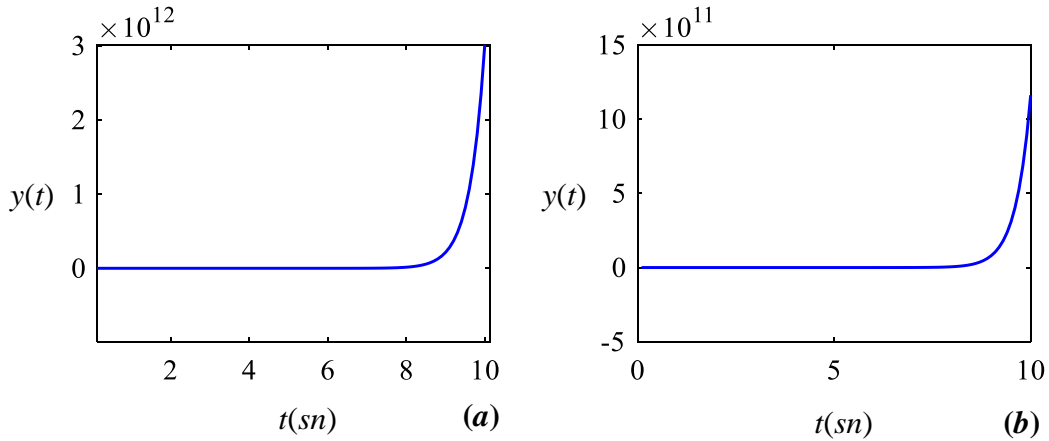


Şekil 4.16 : Tam sayı n için kararlılık aralığı.

- ❖ Çember oluşturularak kutup-konum kararlılık analizi: Denklem 4.29, 4.30 ve 4.35 kullanılarak çemberlerin merkezleri $n = 0$ için $M(0.1476, -0.2561)$ ve $M(-0.1476, 0.2561)$ ve yarıçapı $r = 0.2956$ olarak hesaplanır. Matlab ortamında $n = 0$ için çizdirilen çemberler Şekil 4.17’de görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere sistemin derecesi $q = 0.8 + j0.4$ ve $\bar{q} = 0.8 - j0.4$ noktaları çemberin dışında kalmaktadır. Bu durumda sistem kararsızdır denir. Şekil 4.18’de verilen sistemin birim darbe ve birim basamak cevaplarından sistemin kararsızlığı açıkça görülmektedir.



Şekil 4.17 : Örnek 4.3’te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem için çember oluşturma yöntemi ile kararlılık analizi.



Şekil 4.18 : Örnek 4.3’te verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin: (a) Birim darbe cevabı, (b) Birim basamak cevabı.

Örnek 4.4: Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \left(\frac{6 + j2}{s^{0.6+j0.6} - (-j2)} + \frac{6 - j2}{s^{0.6-j0.6} - (j2)} \right) x \left(\frac{1 + j0.1}{s^{0.55+j0.44} - (5 - j)} + \frac{1 - j0.1}{s^{0.55-j0.44} - (5 + j)} \right) x \left(\frac{5 + j2}{s^{0.89+j0.32} - (0.4 - j4)} + \frac{5 - j2}{s^{0.89-j0.32} - (0.4 + j4)} \right) \quad (4.81)$$

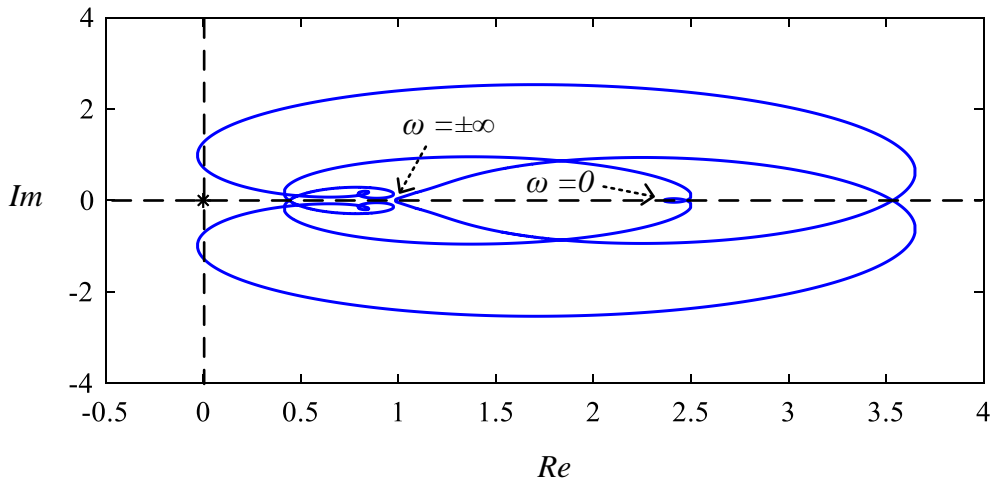
şeklinde verilen kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemin kararlılığı GD Mikhailov kararlılık kriteri ile incelenecektir. Sistemin kompleks dereceli karakteristik denklemi,

$$P(s) = (s^{0.6-j0.6} - (-j2))(s^{0.6-j0.6} - (j2))(s^{0.55+j0.44} - (5 - j))(s^{0.55-j0.44} - (5 + j))(s^{0.89+j0.32} - (0.4 - j4))(s^{0.89-j0.32} - (0.4 + j4)) \quad (4.82)$$

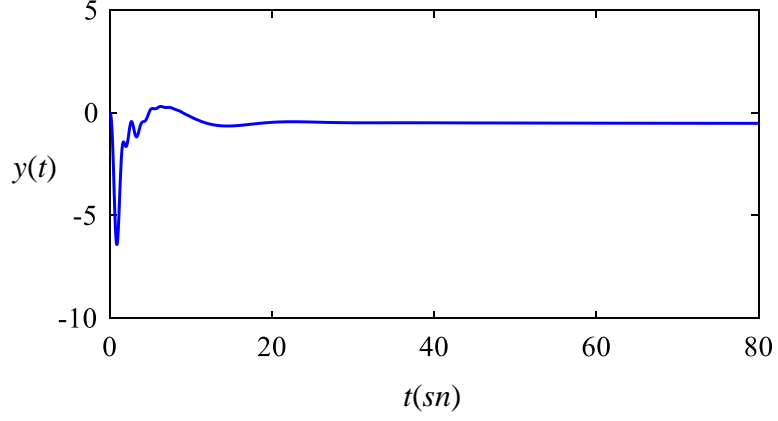
şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemin derecesi Denklem 4.60'dan $2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 4.08$ olarak belirlenir. Bu durumda, Denklem 4.61 ile tanımlanan $w_r(s)$ referans polinomu kesir dereceli yapıda belirlenir ve $\varepsilon = 5$ alınarak,

$$w_r(s) = (s + 5)^{4.08} \quad (4.83)$$

biçiminde seçilebilir. Bu durumda Denklem 4.62'de tanımlanan $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonun çizilmesi ile elde edilen GD Mikhailov kararlılık eğrisi Şekil 4.19'da gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin merkezini çevrelemediğinden dolayı sistem kararludur denir. Şekil 4.20'de sisteme ait birim basamak cevabı görülmektedir.



Şekil 4.19 : Örnek 4.4'te verilen kaskat kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen GD Mikhailov eğrisi.



Şekil 4.20 : Örnek 4.4’te verilen kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemin birim basamak cevabı.

Görüldüğü üzere bu yöntem ile kompleks matematiksel işlemlere gerek duyulmadan kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi pratik bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Aksi durumda ayrı ayrı her bir kompleks eşlenik dereceli sistemin kutup analizi gerçekleştirilerek veya çemberleri oluşturularak kararlılık analizinin uzun bir işlem sonucunda gerçekleştirilmesi gerekmektedir.

5. KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN PI, PID VE KESİR DERECELİ PI (PI^λ) KONTROLÖR İLE KARARLILAŞTIRILMASI

5.1 Giriş

Bu bölümde, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PID tabanlı kontrolörler ile kararlılaştırılması üzerinde durulacaktır. Kararlılaştırma işlemi, seçilen bir kontrolör için kontrolör parametre uzayında kararlılık sınırlarının elde edilmesi ve bu sınırlar yardımıyla sistemi kararlı yapan tüm kontrolör setini veren kararlılık bölgelerinin elde edilmesi şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla kararlılaştırma yönteminin temel basamakları kontrolör tipinin belirlenmesi, kararlılaştırma yönteminin seçilmesi ve parametre uzayında kararlılık bölgesinin elde edilmesi şeklinde özetlenebilir.

Endüstride kullanılan kontrolörler içinde PID kontrolörler basitlikleri, dayanıklı olmaları ve başarılı pratik uygulamaları nedeniyle halen yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Åström ve Hägglund, 1995; Åström ve diğ., 2006). PID kontrolörde P, I ve D olarak adlandırılan parametreler, İngilizce karşılıkları olan (P)roportional-oransal, (I)ntegral-integral ve (D)erivative-türev kelimelerinin baş harflerinden oluşmaktadır. PID kontrolörler hata değerini azaltmak için üç ayrı değişken parametreyi kontrol etmektedir. Bazı uygulamalarda, sistemin kontrolü için sadece bir veya iki parametrenin kullanılması yeterli olmaktadır. Bu durumda P, PI veya PD gibi kontrolör yapıları türetilmektedir. Ölçüm gürültüsünden dolayı türevsel eylem genellikle kullanılmamaktadır. Dolayısıyla P ve daha çok PI kontrolörler endüstriyel kontrol sistemlerinde yaygın bir şekilde tercih edilen kontrolör yapıları olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir kontrolör tasarımında en önemli işlem kontrolör parametrelerinin uygun bir şekilde seçilmesidir. Uygun seçilmeyen parametreler sistemi arzu edilmeyen bir kontrol performansına ve hatta kararsız bir sonuca götürebilmektedir. Aşım yüzdesi, yerleşme süresi, kalıcı hal hatası, parametre değişimleri ve bozucu işarete karşı dayanıklılık gibi arzu edilen kontrol hedeflerine dayalı olarak daha iyi ve daha kabul edilebilir kontrol sistemi yanıtı elde etmek amacıyla PID kontrolörler için 1942'den bugüne kadar birçok farklı parametre belirleme yöntemi önerilmiştir. Bu yöntemlerinden bir kısmı, ayarlama (tuning) algoritmaları için bu hedeflerden yalnızca birini bir kriter olarak kabul ederken, bir kısmı

ise bahsedilen kriterlerden birden fazlasını dikkate almaktadır. Bununla birlikte, değişik yelpazedeki sistem türleri için PID parametrelerinin belirlenmesinde kullanılan genel bir yöntem bulunmamaktadır. Ziegler-Nichols (Ziegler ve Nichols, 1942), Cohen-Coon (Cohen ve Coon, 1953), Åström-Hägglund (Åström ve Hägglund, 1995), Chien-Hrones-Reswick (Chien ve diğ, 1952), Tyreus-Luyben (Luyben ve Luyben, 1997), dahili model kontrol (IMC-Internal Model Control) (Morari ve Zafiriou, 1989; Rivera ve diğ, 1986), kazanç-faz payı (Åström ve Hägglund, 1984; Ho ve diğ, 1995; Wang ve diğ, 1999) gibi metotlar şu an en yaygın olarak kullanılan yöntemler olarak karşımıza çıkmakta olup, her metod belli tür sistemlerin kontrolünde başarılı performans göstermektedir. Shahrokhi ve Zomorodi (2013) tarafından yapılan çalışmada, tek girişli tek çıkışlı sistemler için bu ayarlama yöntemlerinin bilgisayar simülasyonu kullanılarak karşılaştırılması verilmektedir. PID kontrolör parametrelerinin elde edilmesi problemine karşı literatürde önerilen kararlılaştırma teknikleri PID kontrolör tasarımı için tasarımcıya sunulan alternatif bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kontrolör tasarımı için temel gereksinim, kapalı döngü sisteminin asimptotik kararlılığıdır. Bir kontrolör kullanarak ele alınan bir sistemi kararlılaştırmanın temel amacı, sistemin kararlılığını sağlayan tüm kontrolör setini belirlemektir. Kararlı kontrolör parametrelerinin tamamı, kontrolör parametre uzayında kararlılık bölgesi olarak adlandırılan bir bölgeye karşılık gelir. Son zamanlarda, bazı araştırmacılar doğrudan tek bir optimal bir kontrolör bulmak yerine sistemi kararlı yapan tüm kontrolör setini içeren kararlılık bölgesini bulmaya odaklanmıştır (Bajcinca, 2004; Hohenbichler ve Abel, 2008; Silva ve diğ, 2005; Söylemez ve diğ, 2003). Kararlılık bölgesi elde edildikten sonra tasarımcının istediği performansı veren kontrolörü seçmesi daha kolay olmaktadır. Literatürde, kontrolör parametre uzayında kararlı tüm kontrolör setini veren kararlılık bölgesini bulmayı amaçlayan çok sayıda yöntem önerilmiştir. Hermite-Biehler Teoremi (Bhattacharyya ve diğ, 1995), parametre uzay yöntemi (Ackermann ve Kaesbauer, 2001; Bajcinca, 2004), kararlılık sınır eğrisi yöntemi (Tan ve diğ, 2003; Tan ve Atherton, 2006), Nyquist eğrisi tabanlı hızlı yaklaşım yöntemi (Söylemez ve diğ, 2003), kronecker toplama yöntemi (Zheng ve Ren, 2009) ve D-ayırıştırma yöntemi (Cheng ve Hwang, 2006; Hamamci, 2007, 2012) temel kararlılaştırma yöntemleri olarak sayılabilir.

Bu bölümde, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PI ve PID kontrolörler ile kararlılaştırılması için D-ayırıştırma yöntemi kullanılmakta, elde edilen kararlılık bölgelerinin kararlılığını test etmek için de bir önceki bölümde verilen GD Mikhailov

kararlılık kriteri D-ayırıştırma metoduna dahil edilmektedir. Kararlılık bölgesi içinde arzu edilen performansta kontrolör seçiminin nasıl yapılacağını göstermek için örnek bir uygulama olarak, kazanç-faz payı test edicisi yardımıyla kesir dereceli bir PI kontrolörün parametrelerinin belirlenmesi süreci bölümün sonunda verilmektedir.

5.1.1 D-ayırıştırma yöntemi

Bir düzlemde kararlılık bölgelerinin grafiksel olarak elde edilmesi fikri, üçüncü dereceden bir karakteristik denklemin iki orta katsayısının etkisini analiz eden Vishnegradsky'ya (1876) kadar uzanmaktadır. Değişken katsayılar düzleminde bir diyagram çizilmiş ve kararlılık alanının yapısı belirlenmiştir. Neimark (1948, 1949), Vishnegradsky'nin çalışmasını doğrusal olarak iki parametreye bağlı olan daha yüksek dereceli polinomlar için genişletmiştir ve parametre düzlemi sabit sayıda kararlı köke sahip bölgelere ayrıştırıldığı için buna *D-ayırıştırma (D-decomposition/D-partition) yöntemi* adını vermiştir. Batı literatüründe Mitrović (1959) ve Šiljak (1964, 1966, 1969) benzer şekilde kompleks sol yarı düzlemden parametre uzayına haritalama yaparak kararlılık bölgelerini belirlemiş ve yaklaşımı parametre düzlemi yöntemi (parameter plane method) olarak adlandırmıştır. Bununla birlikte araştırmacılar, parametre uzayında sistemin kararlılığını sağlayan tüm kontrolör parametre setini bir grafik üzerinde görselleştirmeye dayalı çalışmalar yapmaya devam etmişlerdir. Çünkü bir grafik, sistem hakkında "optimal" bir noktadan daha fazla bilgi vermektedir (Schrödel, 2016).

Karakteristik denklemi $P(s, k)$ olan lineer bir sistemi ele alalım. Kararlılık bölgesinin sınırı k uzayında aşağıdaki denklem tarafından ifade edilir:

$$P(j\omega, k) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (5.1)$$

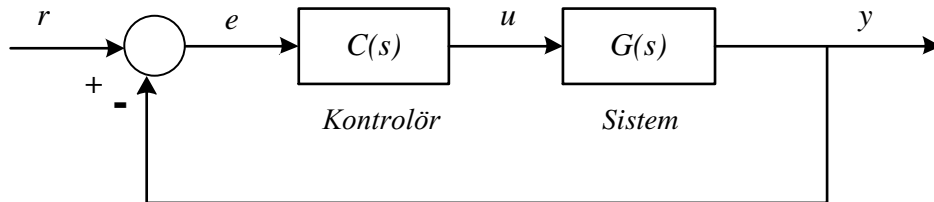
Denklem 5.1 ile kompleks düzlemde kararsızlığın sınırı olan sanal eksen haritalama (mapping) işlemi ile parametre uzayına eşlenir. Eğer $k \in \mathbb{R}^2$ (veya $k \in \mathbb{C}$) ise, Denklem 5.1'in reel ve sanal kısımlarından iki değişkenli iki denklem elde edilir ve genel olarak kararlılık alanının sınırını tanımlayan parametrik bir eğri $-\infty < \omega < \infty$ için elde edilir. Bu eğri, düzlemi kök değişmez (root invariant) bölgelere yani sabit sayıda kararlı ve kararsız kök içeren bölgelere ayırır. D-ayırıştırma yönteminin temeli bu fikre dayanmaktadır (Gryazina ve Polyak, 2006). D-ayırıştırma yöntemi, kontrol sistemlerinin kararlılık analizi ve tasarımı için güçlü bir grafiksel tekniktir.

5.1.2 Parametre uzayında kararlılık sınırları

Kararlılık sınırı, bir karakteristik denklemin kökleri göz önüne alındığında kararlı kökler ile kararsız kökleri birbirinden ayıran sınır olarak tanımlanır. En temel manada, kararlılık sınırı karakteristik denklem köklerinin şematize edildiği kompleks düzlemde sanal eksen olarak bilinmektedir. Kararlılık sınırı kavramı sadece kompleks düzlem gösterimi ile sınırlı olmayıp haritalama (mapping) tekniği ile farklı düzlemlerde de tanımlanabilir. Örneğin kontrolör parametrelerinin oluşturduğu parametre uzayında kararlılık ve kararsızlık bölgelerini birbirinden ayıran doğru ve eğriler yine kararlılık sınırları olarak adlandırılır. (Ackermann ve Kaesbauer, 2001). Kararlılık sınırları parametre düzlemini/uzayını çok sayıda bölgeye ayırır. Bu bölgelerin temel özelliği, bir bölgeden seçilen kontrolör parametreleri ile oluşturulan karakteristik denklemlerin tümünün hep aynı sayıda kararlı ve kararsız köklere sahip olmasıdır. Değişmez kök prensibi (Cheng ve Hwang, 2006) olarak tanımlanan bu özelliğe göre, eğer bir bölgedeki tüm karakteristik denklemlerin kökü sol yarı düzlemde ise bu bölge *kararlılık bölgesi* olarak adlandırılır.

Kararlılık sınırı kavramının diğer bir manası, ele alınan bir kontrolör parametresi için parametrenin değeri değiştirildiğinde kök-yer eğrisi metodunda olduğu gibi kompleks düzlem üzerinde köklerin kararlı/kararsız bir bölgeden diğerine yer değiştirdiği noktalarının oluşturduğu sınırlar olarak anlaşılmalıdır. Bu noktadan bakıldığında bir kökün üç farklı şekilde kararlılık sınırı üzerinden geçme ihtimali bulunduğundan, üç farklı kararlılık sınırı tanımının yapılması gerekir. Aşağıda parametre düzleminde/uzayında meydana gelen kararlılık sınırlarının çeşitleri tanıtılarak, fiziksel anlamları verilecektir.

Şekil 5.1’de verilen genel bir kontrol sistem yapısını göz önüne alalım. Burada $G(s)$ kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonunu ve $C(s)$ ise kontrolör transfer fonksiyonunu ifade eder. r, e, u ve y ise sırasıyla referans giriş, hata, kontrol ve çıkış işaretlerine karşılık



Şekil 5.1 : Geri beslemeli genel bir kontrol sistem yapısı.

gelir. Bu kısımda PID tabanlı kontrolörler kullanılarak kararlılaştırma işlemi yapılacağından kontrolör olarak en genel haliyle PID kontrolör göz önüne alınacaktır. Sistem ve kontrolöre ait transfer fonksiyonları sırasıyla

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (5.2)$$

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} = \frac{K(s, k)}{s} \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem 5.2’de m , pay polinomunun ve n ise payda polinomun derecesi olup, uygunluk (properness) özelliği açısından $m \leq n$ olmalıdır. Transfer fonksiyonunda görülen $a_i (i = 0 \sim m)$ ve $b_i (i = 0 \sim n)$ değerleri, pay ve payda polinomlarının katsayılarıdır. Denklem 5.3’te k_p , k_i ve k_d ise PID kontrolörün parametreleri olup, $K(s, k)$ kontrolörün pay polinomunu ifade eder. Burada kontrolör parametre vektörü $k = [k_p, k_i, k_d] \in \mathcal{K}$ olup, bilinmeyen ve hesaplanması gereken parametreleri içermektedir.

Denklem 5.2’deki PID kontrolör kullanılarak, Şekil 5.1’deki geri beslemeli kontrol sisteminin karakteristik denklemi

$$P(s, k) = 1 + G(s)C(s) = N(s)K(s, k) + sD(s) \quad (5.4)$$

şeklinde verilir. Burada genelliği bozmamak için $\hat{D}(s) = sD(s)$ alınarak Denklem 5.3

$$P(s, k) = N(s)K(s, k) + \hat{D}(s) \quad (5.5)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Bu durumda $\hat{D}(s)$ polinomunun derecesi $(n + 1)$ olur.

Kararlılaştırma işleminde amaç, kontrol sistemini kararlı yapan tüm $k \in \mathcal{K}$ kontrolör vektör setini elde etmektir. Bunun için Denklem 5.1’de verilen eşitlik, Denklem 5.5 için göz önüne alınıp çözümlenerek kararlılık sınırlarının elde edilmesi gerekmektedir. Bundan sonraki alt kısımlarda D-ayırıştırma yöntemi ile kararlılaştırma tekniği için gerekli olan kararlılık sınırlarının türleri ve tanımları verilecektir.

5.1.2.1 Gerçek kök sınırı (GKS - Real Root Boundary)

Bu kararlılık sınırı reel eksen üzerinde bulunan bir kök ile alakalıdır. Buna göre, bir parametre değişimi ile kompleks düzlemin bir yarı bölgesinden diğerine düzlemin merkezi üzerinden meydana gelen bir kök geçişi kararlılık değişikliğine neden olur. Bu durum, kontrolör parametre uzayında Gerçek Kök Sınırı (GKS) olarak adlandırılan bir sınırı ifade

eder ve karakteristik denklemde s yerine 0 konularak elde edilir. Yani kararlılık durumu, $P(s, k)|_{s=0} = 0$ 'da değişir. Denklem 5.5 için bu sınır

$$P(0) = a_0 k_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \quad (5.6)$$

şeklinde elde edilir.

5.1.2.2 Sonsuz kök sınırı (SKS – Infinite Root Boundary)

Bu kararlılık sınırı da reel eksen üzerinde bulunan bir kök ile alakalıdır. Buna göre, bir parametre değişimi ile kompleks düzlemin bir yarı bölgesinden diğerine düzlemin sonsuz uçları üzerinden meydana gelen bir kök geçişi kararlılık değişikliğine neden olur. Bu durum, kontrolör parametre uzayında Sonsuz Kök Sınırı (SKS) olarak adlandırılan bir sınırı ifade eder ve karakteristik denklemde en büyük dereceli terimin katsayısı sıfıra eşitlenerek elde edilir. Yani kararlılık durumu $P(s, k)|_{|s|=\infty} = 0$ 'da değişir. Denklem 5.5 için en büyük dereceli terimin katsayısı

$$\begin{cases} a_m k_d & n < m + 1 \\ a_m k_d + b_n & n = m + 1 \\ b_n & n > m + 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

şeklinde üç farklı durumda olabilir. Bu durumda SKS

$$k_d = \begin{cases} 0 & n < m + 1 \\ -b_n/a_m & n = m + 1 \\ yok & n > m + 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir.

5.1.2.3 Kompleks kök sınırı (KKS – Complex Root Boundary)

Bu kararlılık sınırı bir kompleks eşlenik kök çifti ile alakalıdır. Buna göre, bir parametre değişimi ile kompleks düzlemin bir yarı bölgesinden diğerine sanal eksen üzerinden meydana gelen bir kök çifti geçişi kararlılık değişikliğine neden olur. Bu durum, kontrolör parametre uzayında Kompleks Kök Sınırı (KKS) olarak adlandırılan bir sınırı ifade eder ve karakteristik denklemde s yerine $j\omega$ konularak elde edilir. Yani kararlılık durumu, $P(s, k)|_{s=j\omega} = 0$ 'da değişir. O halde Denklem 5.5'te s yerine $j\omega$ yazılarak, reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$P(j\omega, k) = R_P + jI_P = (R_N + jI_N)(R_K + jI_K) + (R_D + jI_D) \quad (5.9)$$

elde edilir. Burada, $R_P = \Re\{P(j\omega, k)\}$, $I_P = \Im\{P(j\omega, k)\}$, $R_N = \Re\{N(j\omega)\}$, $I_N = \Im\{N(j\omega)\}$, $R_K = \Re\{K(j\omega)\}$, $I_K = \Im\{K(j\omega)\}$, $R_{\hat{D}} = \Re\{\hat{D}(j\omega)\}$, $I_{\hat{D}} = \Im\{\hat{D}(j\omega)\}$ şeklinde tanımlanır. Bu ifadenin sıfıra eşitlenmesi reel ve sanal kısımlarının sıfıra eşitlenmesi anlamına gelir:

$$\begin{bmatrix} R_P \\ I_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_N R_K - I_N I_K + R_{\hat{D}} \\ R_N I_K + I_N R_K + I_{\hat{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Burada

$$R_K = -k_d \omega^2 + k_i \quad (5.11)$$

$$I_K = k_p \omega \quad (5.12)$$

olarak, Denklem 5.10'da yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -\omega I_N & R_N & -\omega^2 R_N \\ \omega R_N & I_N & -\omega^2 I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{\hat{D}} \\ -I_{\hat{D}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

şeklinde üç bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu tür denklem takımlarının çözümü için bilinmeyen üç parametreden biri biliniyor kabul edilerek denklem sistemi iki bilinmeyenli iki denklem haline getirilerek çözüm yapılır. Örneğin k_d sabit bir değer olarak kabul edilirse, Denklem 5.13

$$\begin{bmatrix} -\omega I_N & R_N \\ \omega R_N & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 R_N k_d - R_{\hat{D}} \\ \omega^2 I_N k_d - I_{\hat{D}} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

haline dönüşür. Bu durumda matris denklemini çözümlerse,

$$k_p = \frac{R_{\hat{D}} I_N - R_N I_{\hat{D}}}{\omega(R_N^2 + I_N^2)} \quad (5.15)$$

$$k_i = \omega^2 k_d + \frac{I_N I_{\hat{D}} - R_N R_{\hat{D}}}{R_N^2 + I_N^2} \quad (5.16)$$

şeklinde k_p ve k_i parametreleri ω ve k_d 'ye bağlı olarak elde edilir. Denklem 5.15 ve 5.16, k_d 'nin sabit bir değeri için ve ω sıfırdan sonsuza doğru değiştirilerek (k_p, k_i) -düzleminde bir eğri oluşturur. Kompleks düzlemde kararlılık sınırı olan sanal eksene karşılık gelen bu eğri tüm düzlemi kararlı ve kararsız bölgelere ayırır. k_d 'nin değişik değerleri için yeni eğriler elde edilerek (k_p, k_i, k_d) -uzayında üç boyutlu kararlılık ve kararsızlık bölgeleri elde edilir.

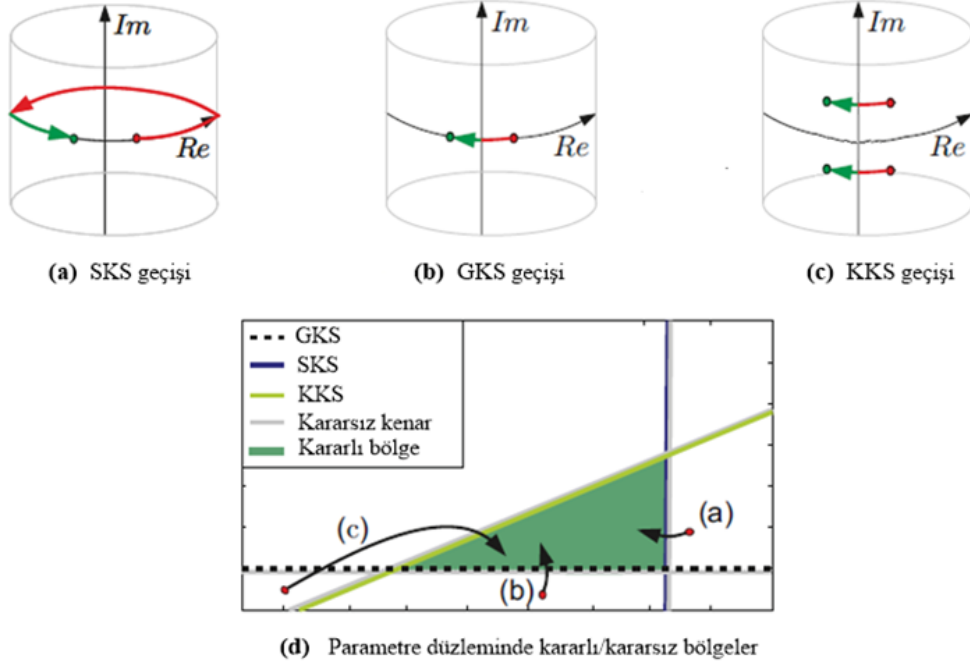
Not 5.1: Denklem 5.15 ve 5.16'da $k_d = 0$ alınarak PI kontrolöre ait kararlılaştırma denklemleri ilave bir işlem yapmaya gerek kalmadan doğrudan elde edilir. Bu durumda k_d ifadesi içermeyen Denklem 5.15 aynı kalırken, Denklem 5.16

$$k_i = \frac{I_N I_{\bar{D}} - R_N R_{\bar{D}}}{R_N^2 + I_N^2} \quad (5.17)$$

şeklini alır.

Denklem 5.13'te k_i parametresi sabit tutularak Denklem 5.15 ve 5.16, k_p ve k_d parametrelerine ait formüller olarak elde edilebilir. Bu denklemler, k_i 'nin sabit bir değeri için ve ω sıfırdan sonsuza doğru değiştirilerek (k_p, k_d) -düzleminde bir eğri oluşturur. k_i 'nin değişik değerleri için yeni eğriler elde edilerek (k_p, k_i, k_d) -uzayında üç boyutlu kararlılık ve kararsızlık bölgeleri elde edilir. Benzer şekilde, Denklem 5.13'te k_p parametresi sabit tutularak, k_i ve k_d parametrelerine ait formüller elde edilebilir. k_p 'nin sabit bir değeri için ve ω sıfırdan sonsuza doğru değiştirilerek (k_i, k_d) -düzlemi aracılığıyla k_p 'nin değişik değerleri için (k_p, k_i, k_d) -uzayında üç boyutlu kararlılık ve kararsızlık bölgeleri elde edilir. k_p parametresinin sabit tutulduğu bu üçüncü yolda, parametre denklemlerine ait payda polinomları sıfır çıkacağından bir belirsizlik durumu ortaya çıkar. Bu durumu aşmak için parametre uzay metodu veya kararlılık sınır eğrisi metodu kullanılarak yardımcı doğrular yardımıyla üç boyutlu kararlılık bölgesi elde edilir. Bunun için Ackermann ve Kaesbauer (2001) ve Tan ve diğ. (2003) referansları incelenebilir.

Sıfır kök sınırı, sonsuz kök sınırı ve kompleks kök sınırına ait tanımların grafiksel bir özeti Şekil 5.2'de görülmektedir. Kompleks düzlemde meydana gelen kök geçişleri parametre düzleminde kararlılık sınırlarının oluşmasına neden olmaktadır. Bu sınırların çevrelediği alan kararlılık bölgesi olarak tanımlanır. Bunun için kararlılık sınırları ile parçalara ayrılan parametre düzlemindeki her bölgeden seçilen birer keyfi kontrolör parametre seti karakteristik denklemde yerine konulur ve bu denklemin kararlılığı incelenir. Her bir bölge kök değişmezlik özelliğine sahip olduğundan bir bölgeden seçilen rastgele bir karakteristik polinomun kararlı ve kararsız kök sayısı o bölgeden seçilen tüm karakteristik polinomun kökleri için aynı özelliğe sahip olmaktadır. Sonuç olarak tüm kökleri kararlı olan karakteristik polinomun ait olduğu bölge kararlılık bölgesi olarak belirlenir. PI kontrolör için bu bölge iki boyutlu iken, PID kontrolör için üç boyutlu olmak zorundadır.



Şekil 5.2 : Sistemin kökleri ve kararlılık sınırları arasındaki ilişki.

5.2 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin PI Kontrolör ile Kararlılaştırılması

Şekil 5.1’de verilen geri beslemeli kontrolör sisteminde $G(s)$ kompleks eşlenik dereceli bir sistem olmak üzere transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{r}{s^q - p} + \frac{\bar{r}}{s^{\bar{q}} - \bar{p}} \quad (5.18)$$

şeklinde verilsin. Burada $q = u + jv$, $r = a + jb$ ve $p = c + jd$ ($u > 0$ and $u, v, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) formunda olmalıdır. $C(s)$ ise sistemi kararlılaştırmak için kullanılan ve transfer fonksiyonu

$$C(s, k) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (5.19)$$

biçiminde olan bir PI kontrolördür. Burada k_p ve k_i sırasıyla kontrolörün oransal ve integral kazançlarını göstermekte olup, $k = \{k_p, k_i\}$ ’dir. Amacımız, kompleks eşlenik dereceli sistem içeren kontrol sistemini mutlak kararlı hale getiren PI kontrolörlerinin parametre uzayında kararlılık bölgesini elde etmektir. Geri beslemeli sisteminin karakteristik denklemi

$$P(s, k) = 1 + \left(\frac{r}{s^q - p} + \frac{\bar{r}}{s^{\bar{q}} - \bar{p}} \right) \left(k_p + \frac{k_i}{s} \right) \quad (5.20)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 5.20 düzenlenirse

$$P(s, k) = s(s^q - p)(s^{\bar{q}} - \bar{p}) + [r(s^{\bar{q}} - \bar{p}) + \bar{r}(s^q - p)](k_p s + k_i) \quad (5.21)$$

ve $q = u + jv$, $r = a + jb$ and $p = c + jd$ yukarıda yerine yazılırsa, aşağıdaki kompleks dereceli karakteristik denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} P(s, k) = & s^{2u+1} + [(ak_p - c) + j(d - bk_p)]s^{u+1+jv} \\ & + [(ak_p - c) + j(bk_p - d)]s^{u+1-jv} \\ & + [c^2 + d^2 - 2(ac + bd)k_p]s + (a - jb)k_i s^{u+jv} \\ & + (a + jb)k_i s^{u-jv} - 2(ac + bd)k_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

Görüldüğü üzere, karakteristik denklem hem kompleks dereceye hem de kompleks katsayılarla sahiptir. Bu durum kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kontrol işlemlerini zorlaştırmaktadır. Bununla birlikte, Şekil 5.1'deki kompleks eşlenik dereceli kontrol sisteminin tüm elemanları reel değerli özelliğe sahip olduğundan, GKS, SKS ve KKS denklemlerinin hepsinin reel değerli olacağı açıktır. D-ayrıştırma yöntemi Denklem 5.22 için uygulanırsa, GKS sınırı aşağıdaki şekilde verilen düz bir çizgi oluşturur:

$$-2(ac + bd)k_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \quad (5.23)$$

SKS'yi hesaplarken, kompleks dereceli karakteristik denklemde terimlerden hangisinin derecesinin daha büyük olduğunu belirlemek gerekir. Bölüm 4.2.4'te anlatıldığı gibi kompleks sayılar arasında geçerli bir kıyaslama kuralı bulunmadığından dolayı bu sayıları reel kısımlarına göre kıyaslayabiliriz (Bower, 2008). Denklem 5.22'de derecelerin reel kısımları dikkate alındığı zaman en büyük derecenin ' $2u + 1$ ' olduğu görülmektedir. En büyük dereceli terimin katsayısı 1 olduğundan ve bir kontrolör parametresi içermediğinden Denklem 5.18'deki sistem için herhangi bir SKS bulunmamaktadır.

KKS eğrisinin elde edilmesi için Denklem 5.22'de $s = j\omega$ yazılarak karakteristik denklem sifıra eşitlenirse

$$P(j\omega, k) = R_p + jI_p = 0 + j0 \quad (5.24)$$

yardımla karakteristik denklemin reel ve sanal kısımları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
R_p &= \Re\{P(\omega)\} = m_3x_3 \\
&+ \omega(cm_2y_2 + cn_2x_2 + dm_2x_2 - dn_2y_2 + cm_1y_1 + cn_1x_1 - dm_1x_1 + dn_1y_1) \\
&+ k_p\omega(-am_2y_2 - an_2x_2 - bm_2x_2 + bn_2y_2 - am_1y_1 - an_1x_1 + bm_1x_1 - bn_1y_1) \\
&+ k_i(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - \\
&2bd)=0
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
I_p &= \Im\{P(\omega)\} = n_3x_3 + \omega(-cm_2x_2 + cn_2y_2 + dm_2y_2 + dn_2x_2 - cm_1x_1 + cn_1y_1 - \\
&dm_1y_1 - dn_1x_1 + c^2 + d^2) + k_p\omega(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - \\
&an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd) + k_i(am_2y_2 + an_2x_2 + bm_2x_2 - bn_2y_2 + \\
&am_1y_1 + an_1x_1 - bm_1x_1 + bn_1y_1)=0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Burada, Denklem 3.31-3.33'de verilen açılımlar kullanılarak

$$\omega^{u+jv} = x_1 + jy_1 \quad j^{u+jv} = m_1 + jn_1 \tag{5.27a}$$

$$\omega^{u-jv} = x_2 + jy_2 \quad j^{u-jv} = m_2 + jn_2 \tag{5.27b}$$

$$\omega^{2u+1} = x_3 \quad j^{2u+1} = m_3 + jn_3. \tag{5.27c}$$

şeklinde hesaplanır. Denklem 5.25 ve 5.26'da 2 bilinmeyenli 2 denklem halinde yeniden düzenlenirse

$$k_pA(\omega) + k_iB(\omega) = C(\omega) \tag{5.28}$$

$$k_pD(\omega) + k_iE(\omega) = F(\omega) \tag{5.29}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \omega(-am_2y_2 - an_2x_2 - bm_2x_2 + bn_2y_2 - am_1y_1 - an_1x_1 + bm_1x_1 \\
&- bn_1y_1)
\end{aligned} \tag{5.30a}$$

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 \\
&+ bn_1x_1 - 2ac - 2bd
\end{aligned} \tag{5.30b}$$

$$\begin{aligned}
C(\omega) &= -m_3x_3 - \omega(cm_2y_2 + cn_2x_2 + dm_2x_2 - dn_2y_2 + cm_1y_1 + cn_1x_1 \\
&- dm_1x_1 + dn_1y_1)
\end{aligned} \tag{5.30c}$$

$$\begin{aligned}
D(\omega) &= \omega(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 \\
&+ bn_1x_1 - 2ac - 2bd)
\end{aligned} \tag{5.30d}$$

$$E(\omega) = am_2y_2 + an_2x_2 + bm_2x_2 - bn_2y_2 + am_1y_1 + an_1x_1 - bm_1x_1 + bn_1y_1 \quad (5.30e)$$

$$F(\omega) = -n_3x_3 - \omega(-cm_2x_2 + cn_2y_2 + dm_2y_2 + dn_2x_2 - dm_1y_1 + cn_1y_1 - dn_1x_1 - cm_1x_1 + c^2 + d^2). \quad (5.30f)$$

şeklinde hesaplanır. Görüldüğü üzere bilinmeyen kontrolör parametrelerinin sayısı denklemlerin sayısına eşittir. Bu durumda;

$$k_p = \frac{C(\omega)E(\omega) - B(\omega)F(\omega)}{A(\omega)E(\omega) - B(\omega)D(\omega)} \quad (5.31)$$

$$k_i = \frac{C(\omega)D(\omega) - A(\omega)F(\omega)}{B(\omega)D(\omega) - A(\omega)E(\omega)} \quad (5.32)$$

elde edilir. Denklem 5.31 ve 5.32 kullanılarak ve ω frekansı sıfırdan sonsuza doğru değiştirilerek KKS eğrisi (k_p, k_i) -düzleminde bir eğriye denk gelir. Kararlılık sınırlarını oluşturan KKS eğrisi ve Denklem 5.23'te verilen GKS doğrusu parametre düzlemi olan (k_p, k_i) -düzlemini çok sayıda bölgeye ayırır. Parametre düzleminde hangi bölgenin kararlı olduğunu belirlemek için Bölüm 4'te tanımlanan GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılacaktır. Bunun için gerekli olan $\psi(s)$ rasyonel fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{w_{rPI}(s)} \quad (5.33)$$

Burada $w_{rPI}(s)$, referans polinomdur ve kontrol sisteminin kompleks dereceli karakteristik denklemi ile aynı dereceye sahip olmalıdır. PI kontrolör ile kontrol edilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemin Denklem 5.22'de verilen karakteristik denklemi için referans polinomu $w_{rPI}(s)$,

$$w_{rPI}(s) = (s + \varepsilon)^{2u+1} \quad \varepsilon > 0, \quad (5.34)$$

şeklinde belirlenir. $\varepsilon > 0$ için Denklem 5.34'ün kararlı olduğu farzedilsin. Yukarıda tanımlanan kompleks dereceli rasyonel fonksiyon ancak ve ancak aşağıdaki şartı sağlaması durumunda kararlıdır:

$$\Delta_{\omega \in (-\infty, \infty)} \arg \psi(j\omega) = 0 \quad (5.35)$$

Ayrıca Denklem 5.22, 5.33 ve 5.34'ten anlaşılacağı gibi kararlılık şartı için aşağıda verilen koşulların sağlanması gerekir.

$$1. \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{P(j\omega)}{w_{rPI}(j\omega)} = 1 \quad (5.36)$$

$$2. \psi(0) = \frac{P(0)}{w_{rPI}(0)} = \frac{-2(ac+bd)k_i}{(\varepsilon)^{2u+1}} > 0 \quad (5.37)$$

KKS ve GKS eğrileri tarafından elde edilen bölgelerden hangisinin kararlı olduğuna karar vermek için her bir bölgeden test için kontrolör parametreleri seçilir. Daha sonra, seçilen bu test noktaları doğrultusunda Denklem 5.33'te verilen rasyonel fonksiyon $\psi(s)$ çizdirilir. $-\infty < \omega < \infty$ aralığında rasyonel fonksiyon $\psi(s)$ 'in çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin orijini çevrelemiyorsa, bölgenin kararlı olduğuna karar verilir.

Örnek 5.1: Transfer fonksiyonu

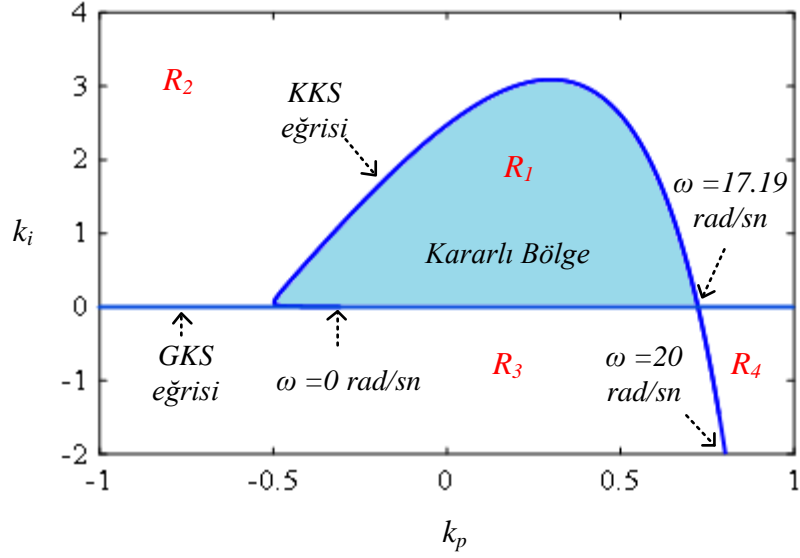
$$G(s) = \frac{1-j}{s^{0.5+j0.5} + 0.5 - j0.75} + \frac{1+j}{s^{0.5-j0.5} + 0.5 + j0.75} \quad (5.38)$$

şeklinde verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemin PI kontrolör ile kararlılaştırılmasını göz önüne alalım. Burada amaç, kontrol sistemini kararlı yapan tüm PI kontrolör setini bulmaktır. PI kontrolörlü kompleks eşlenik dereceli sistemin karakteristik denklemi

$$P(s) = s^2 + (0.5 + j0.75)s^{1.5+j0.5} + (0.5 - j0.75)s^{1.5-j0.5} + 0.8125s + \left((1+j)s^{0.5+j0.5} + (1-j)s^{0.5-j0.5} + 2.5 \right) (k_p s + k_i) \quad (5.39)$$

şeklinde hesaplanır. GKS, Denklem 5.23'ten $k_i = 0$ olarak belirlenir. KKS eğrisi için Denklem 5.31 ve 5.32 kullanılarak k_p ve k_i denklemleri analitik olarak elde edilir. $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığı için GKS ve KKS eğrileri tarafından oluşturulan kararlılık sınırları Şekil 5.3'te gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere KKS ile GKS eğrisi, (k_p, k_i) -parametre düzlemini R_1, R_2, R_3 ve R_4 olmak üzere 4 farklı bölgeye ayırmaktadır. Bu bölgelerden test noktaları seçilerek her bir bölgenin kararlılığı, GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak test edilmiştir. Çizelge 5.1'de bu bölgelerden seçilen bazı k_p ve k_i değerleri görülmektedir. Denklem 5.34'ten kompleks dereceli karakteristik denklem ile aynı dereceye sahip kararlı bir referans polinom aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_{rPI}(s) = (s + 4)^2 \quad (5.40)$$



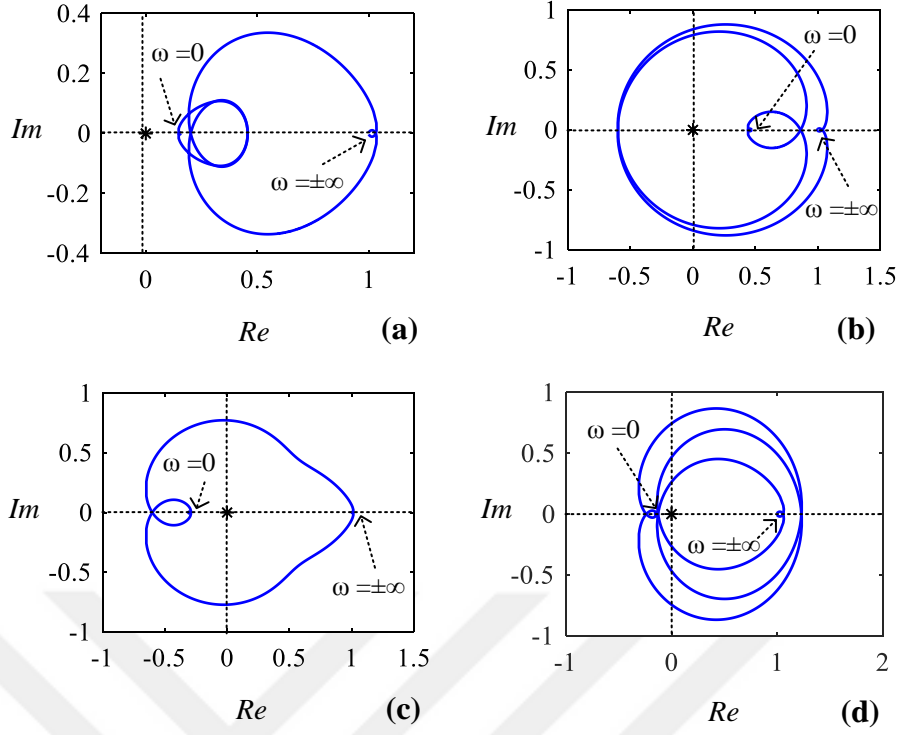
Şekil 5.3 : (k_p, k_i) -düzleminde kararlılık sınırları.

Çizelge 5.1: Şekil 5.3'teki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_i\}$ değerleri.

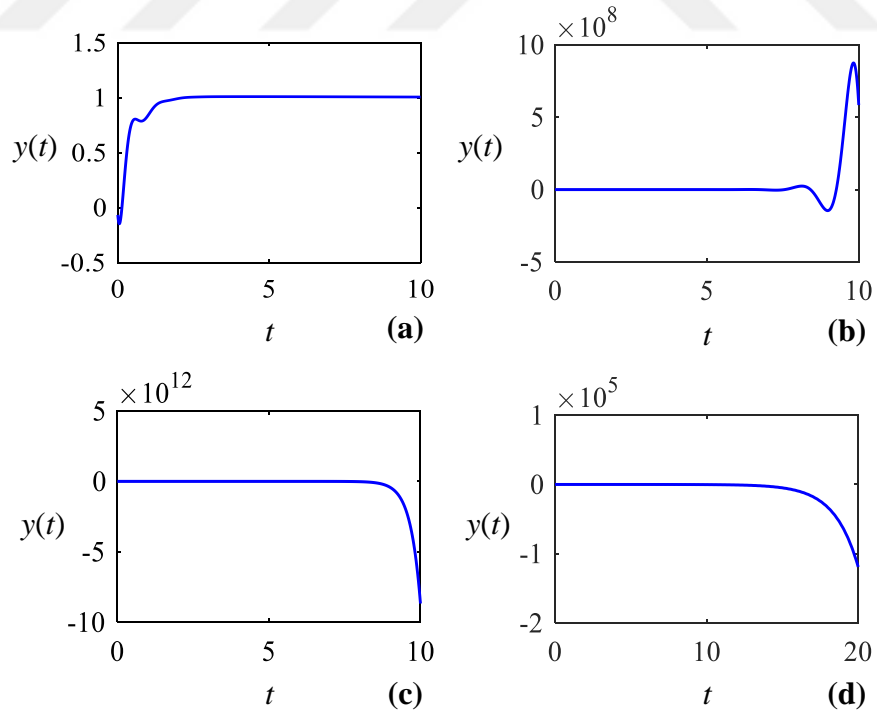
	R_1	R_2	R_3	R_4
k_p	0.2	-0.8	-0.4	1
k_i	1	3	-2	-1

Çizelge 5.1'de verilen kontrolör parametreleri doğrultusunda, Denklem 5.33'te tanımlanan rasyonel fonksiyonun Matlab ortamında $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi Şekil 5.4'te gösterilmektedir. Şekil 5.4(a)'da GD Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevrelemediği Şekil 5.4(b-d)'de ise çevrelediği görülmektedir. Dolayısıyla kontrol sisteminin R_1 bölgesinde kararlı kontrolör parametrelerine sahip olduğu anlaşılmaktadır. Kararlı R_1 bölgesi Şekil 5.3'te taralı alan ile gösterilmiştir.

Çizelge 5.1'deki değerler kullanılarak her bir bölge için kontrol sisteminin zaman bölgesi simülasyonu Şekil 5.5'te Oustaloup'un yaklaşım metodu kullanılarak elde edilmiştir. Yaklaşım metodunda $N = 5$ ve $\omega = [0.01 \ 100]$ rad/sec alınmıştır. Şekilden kontrol sisteminin R_1 bölgesinde sistem kararlı bir zaman cevabına; R_2 , R_3 ve R_4 bölgelerinde ise kararsız bir zaman cevabına sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 5.4 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için.



Şekil 5.5 : Kapalı döngü birim basamak zaman cevapları (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için.

5.3 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin PID Kontrolör ile Kararlılaştırılması

Şekil 5.1’de verilen geri beslemeli kontrol sisteminde kontrolör tipini PID kontrolör olarak ele alalım ve kompleks eşlenik dereceli sistemin PID kontrolör ile kararlılaştırılmasını gerçekleştirelim. Kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonu $G(s)$, Denklem 5.18’de verilmektedir. PID kontrolörün transfer fonksiyonu,

$$C(s, k) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (5.41)$$

şeklindedir. Burada k_p , k_i ve k_d sırasıyla kontrolörün oransal, integral ve türev kazançları olmak üzere $k = \{k_p, k_i, k_d\}$ olarak tanımlanır. Bu kısımda amaç, kontrol sistemini mutlak kararlı hale getiren PID kontrolörün parametre uzayında kararlılık bölgesini elde etmektir. Kapalı çevrim sisteminin PID kontrolör için karakteristik denklemi

$$P(s; k) = 1 + \left(\frac{r}{s^q - p} + \frac{\bar{r}}{s^{\bar{q}} - \bar{p}} \right) \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \quad (5.42)$$

şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemin mutlak kararlılığını garanti eden $k = \{k_p, k_i, k_d\}$ kümesini D-ayırışma yöntemini kullanarak elde edelim. Kapalı döngü sisteminin kompleks dereceli karakteristik denklemi daha açık bir ifade ile yazılırsa;

$$P(s; k) = s(s^q - p)(s^{\bar{q}} - \bar{p}) + [r(s^{\bar{q}} - \bar{p}) + \bar{r}(s^q - p)](k_d s^2 + k_p s + k_i) \quad (5.43)$$

ve $q = u + jv$, $r = a + jb$ and $p = c + jd$ ifadeleri Denklem 5.43’te yerine yazılırsa, aşağıdaki kompleks dereceli karakteristik denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} P(s; k) = & s^{2u+1} + (a - jb)k_d s^{u+2+jv} + (a + jb)k_d s^{u+2-jv} - 2(ac + bd)k_d s^2 \\ & + [(ak_p - c) + j(d - bk_p)]s^{u+1+jv} \\ & + [(ak_p - c) + j(bk_p - d)]s^{u+1-jv} \\ & + [c^2 + d^2 - 2(ac + bd)k_p]s + (a - jb)k_i s^{u+jv} \\ & + (a + jb)k_i s^{u-jv} - 2(ac + bd)k_i \end{aligned} \quad (5.44)$$

D-ayırışma yöntemi uygulanırsa, GKS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$2k_i(ac + bd) = 0 \implies k_i = 0 \quad (5.45)$$

Denklem 5.44’teki s^{2u+1} , s^{2+u+jv} ve s^{2+u-jv} derece terimlerinin SKS’nin belirlenmesinde etkili olduğu görülmektedir. Bu nedenle, bu terimlerin sadece reel kısımları dikkate alındığında, SKS aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$SKS: \begin{cases} k_d = 0 & \text{for } u < 1 \\ k_d = -1/2a & \text{for } u = 1 \\ yok & \text{for } u > 1 \end{cases} \quad (5.46)$$

KKS denklemi için karakteristik denklemde s yerine $j\omega$ yazılarak reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılarak

$$P(j\omega, k) = R_p + jI_p = 0 + j0 \quad (5.47)$$

reel kısım için Denklem 5.48 ve sanal kısım içinse Denklem 5.49 elde edilir.

$$\begin{aligned} R_p = \Re\{P(\omega)\} = & m_3x_3 + \omega(cm_2y_2 + cn_2x_2 + dm_2x_2 - dn_2y_2 + cm_1y_1 + cn_1x_1 \\ & - dm_1x_1 + dn_1y_1) + k_p\omega(-am_2y_2 - an_2x_2 - bm_2x_2 + bn_2y_2 \\ & - am_1y_1 - an_1x_1 + bm_1x_1 - bn_1y_1) + k_i(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 \\ & - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd) \\ & + k_d\omega^2(-am_2x_2 + an_2y_2 + bm_2y_2 + bn_2x_2 - am_1x_1 + an_1y_1 \\ & - bm_1y_1 - bn_1x_1 + 2ac + 2bd) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} I_p = \Im\{P(\omega)\} = & n_3x_3 + \omega(-cm_2x_2 + cn_2y_2 + dm_2y_2 + dn_2x_2 - cm_1x_1 + cn_1y_1 \\ & - dm_1y_1 - dn_1x_1 + c^2 + d^2) + k_p\omega(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 \\ & - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd) \\ & + k_i(am_2y_2 + an_2x_2 + bm_2x_2 - bn_2y_2 + am_1y_1 + an_1x_1 - m_1x_1b \\ & + bn_1y_1) + k_d\omega^2(-am_2y_2 - an_2x_2 - bm_2x_2 + bn_2y_2 - am_1y_1 \\ & - an_1x_1 + bm_1x_1 - bn_1y_1) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Burada, Denklem 3.31-3.33'de verilen açılımlar kullanılarak

$$\omega^{u+jv} = x_1 + jy_1 \quad j^{u+jv} = m_1 + jn_1 \quad (5.50a)$$

$$\omega^{u-jv} = x_2 + jy_2 \quad j^{u-jv} = m_2 + jn_2 \quad (5.50b)$$

$$\omega^{2u+1} = x_3 \quad j^{2u+1} = m_3 + jn_3. \quad (5.50c)$$

şeklinde hesaplanılır. Reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı 0'a eşitlenerek, aşağıdaki verilen 3 bilinmeyenli 2 boyutlu denklem seti elde edilir:

$$k_pA(\omega) + k_iB(\omega) + k_dC(\omega) = D(\omega) \quad (5.51)$$

$$k_pE(\omega) + k_iF(\omega) + k_dG(\omega) = H(\omega) \quad (5.52)$$

Burada,

$$A(\omega) = \omega(-am_2y_2 - an_2x_2 - bm_2x_2 + bn_2y_2 - am_1y_1 - an_1x_1 + bm_1x_1 - bn_1y_1) \quad (5.53a)$$

$$B(\omega) = am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd \quad (5.53b)$$

$$C(\omega) = -\omega^2(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd) \quad (5.53c)$$

$$D(\omega) = -m_3x_3 - \omega(cm_2y_2 + cn_2x_2 + dm_2x_2 - dn_2y_2 + cm_1y_1 + cn_1x_1 - dm_1x_1 + dn_1y_1) \quad (5.53d)$$

$$E(\omega) = \omega(am_2x_2 - an_2y_2 - bm_2y_2 - bn_2x_2 + am_1x_1 - an_1y_1 + bm_1y_1 + bn_1x_1 - 2ac - 2bd) \quad (5.53e)$$

$$F(\omega) = am_2y_2 + an_2x_2 + bm_2x_2 - bn_2y_2 + am_1y_1 + an_1x_1 - bm_1x_1 + bn_1y_1 \quad (5.53f)$$

$$G(\omega) = -\omega^2(am_2y_2 + an_2x_2 + bm_2x_2 - bn_2y_2 + am_1y_1 + an_1x_1 - bm_1x_1 + bn_1y_1) \quad (5.53g)$$

$$H(\omega) = -n_3x_3 - \omega(-cm_2x_2 + cn_2y_2 + dm_2y_2 + dn_2x_2 - dm_1y_1 + cn_1y_1 - dn_1x_1 - cm_1x_1 + c^2 + d^2). \quad (5.53h)$$

Bölüm 5.1.2.3'te de bahsedildiği gibi, bilinmeyenlerin sayısı denklemlerin sayısından fazla olduğundan dolayı KKS için çözüm, kontrolör parametrelerinden birine bağlı olarak elde edilebilir. Bu parametre k_d olarak seçilirse k_p ve k_i formülleri

$$k_p = \frac{B(\omega)H(\omega) - D(\omega)F(\omega) + k_d[C(\omega)F(\omega) - B(\omega)G(\omega)]}{[B(\omega)E(\omega) - A(\omega)F(\omega)]} \quad (5.54)$$

$$k_i = \frac{D(\omega)E(\omega) - A(\omega)H(\omega) + k_d[A(\omega)G(\omega) - C(\omega)E(\omega)]}{[B(\omega)E(\omega) - A(\omega)F(\omega)]} \quad (5.55)$$

şeklinde bulunur.

Denklem 5.54 ve 5.55 kullanılarak KKS eğrisi (k_p, k_i) -düzleminde sabit bir k_d değeri için ω 'ya bağlı olarak çizdirilir. Benzer şekilde, k_i 'ye bağlı (k_p, k_d) - düzlemi ve k_p 'ye bağlı (k_i, k_d) -düzlemi için Denklem 5.54 ve 5.55'teki gibi formülasyonlar elde edilerek KKS eğrileri çizilebilir. Üçüncü durumda, k_i ve k_d formüllerindeki her ω değeri için payda sıfır olacağından, KKS'yi doğrudan elde etmenin mümkün olmadığına dikkat edilmelidir. Bu

durumda KKS, Tan ve diğ. (2003) tarafından önerilen ve yardımcı doğruların kullanıldığı kararlılık sınır eğrisi yöntemi ile dolaylı olarak elde edilebilir. Ancak sonuç olarak her üç formülasyon ile elde edilecek kararlılık bölgeleri aynı olacaktır.

Denklem 5.45'ten elde edilen GKS, Denklem 5.46'dan elde edilen SKS ve Denklem 5.54-5.55'ten elde edilen KKS eğrilerinin oluşturduğu kararlılık sınırları (k_p, k_i) -düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere ayırır. Her bir bölgeden seçilen test noktaları ile GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak kararlı bölgenin tespiti gerçekleştirilir. $-\infty < \omega < \infty$ aralığında rasyonel fonksiyon $\psi(s)$ 'nin çizilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin merkezini çevrelemiyorsa bölgenin kararlı olduğuna karar verilir. İlk olarak, sabit bir k_d değeri için (k_p, k_i) -düzleminde 2-D kararlılık bölgesi belirlenir. Daha sonra farklı k_d değerleri için tüm kararlı $\{k_p, k_i, k_d\}$ kontrolör parametrelerini içeren 3 boyutlu kararlılık bölgesi (k_p, k_i, k_d) -uzayı elde edilir.

PID kontrolör için sunulan kararlılaştırma algoritması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Denklem 5.45 ve 5.46'dan sırasıyla GKS ve SKS'nin varlığı araştırılır.

Adım 2: KKS için k_d cinsinden k_p ve k_i formülleri Denklem 5.54 ve 5.55 kullanılarak elde edilir.

Adım 3: k_d 'nin sabit bir değeri için;

- (a) Aynı (k_p, k_i) -parametre düzleminde GKS, SSK ve KKS eğrileri çizdirilerek tüm bölgeler elde edilir.
- (b) Her bir bölgeden test noktaları seçilerek GD Mikhailov kararlılık kriteri ile genel kararlılık bölgesi tespit edilir.
- (c) Her bir bölgeden seçilen kontrolör parametre değerleri kullanılarak kapalı döngü sisteminin zaman cevabı elde edilerek genel kararlılık bölgesi doğrulanır.

Adım 4: Farklı k_d değerleri için 3 boyutlu (k_p, k_i, k_d) -parametre uzayında 3 boyutlu kararlılık bölgesi elde edilir.

Örnek 5.2: Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kompleks eşlenik dereceli sistemin PID kontrolör ile kararlılaştırılmasını göz önüne alalım.

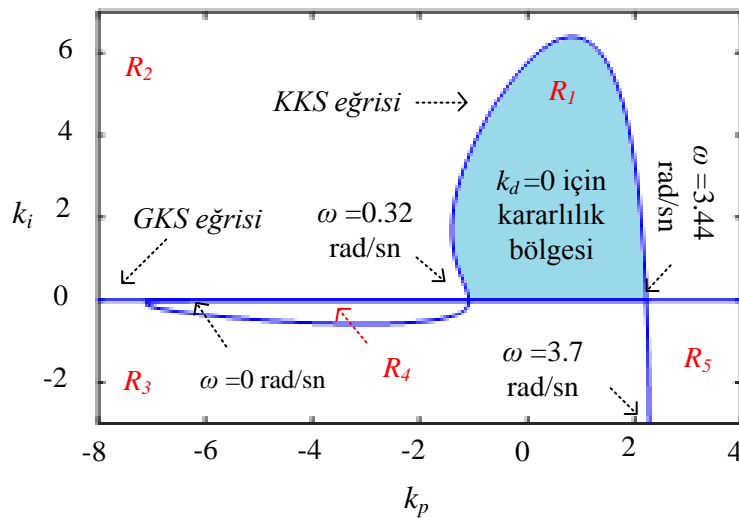
$$G(s) = \frac{0.1 - j0.2}{s^{1.2+j0.8} - (-1 - j0.1)} + \frac{0.1 + j0.2}{s^{1.2-j0.8} - (-1 + j0.1)} \quad (5.56)$$

Burada amaç, Şekil 5.1'deki kapalı döngü sistemini kararlı hale getiren tüm $\{k_p, k_i, k_d\}$ kontrolör parametre setini elde etmektir. Kompleks eşlenik dereceli sistemin kapalı döngü karakteristik denklemi $P(s)$ şu şekilde yazılabilir.

$$P(s) = s^{3.4} + (1 - j0.1)s^{2.2+j0.8} + (1 + j0.1)s^{2.2-j0.8} + 1.01s + (k_d s^2 + k_p s + k_i) \left((0.1 + j0.2)s^{1.2+j0.8} + (0.1 - j0.2)s^{1.2-j0.8} + 0.16 \right) \quad (5.57)$$

Karakteristik denklemden GKS denklemi $k_i = 0$ olarak elde edilir. Denklemin en büyük dereceli teriminin katsayısı herhangi bir kontrolör parametresi içermediğinden, SKS sınırı bulunmamaktadır. KKS eğrisini (k_p, k_i) -düzleminde k_d cinsinden elde etmek için Denklem 5.54 ve 5.55 kullanılarak k_p ve k_i formülleri analitik olarak hesaplanır. $k_d = 0$ için (k_p, k_i) -düzleminde GKS ve KKS eğrileri tarafından oluşturulan kararlılık sınırları Şekil 5.6'da gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere, KKS eğrisi ve GKS eğrisi (k_p, k_i) -parametre düzlemini R_1, R_2, R_3, R_4 ve R_5 olmak üzere beş farklı bölgeye ayırmaktadır. Her bölgedeki kararlı ve kararsız kutup sayısı sabit olduğundan, her bölgeden rastgele seçilen test noktaları Çizelge 5.2'de verilmiştir. Bu bölgelerin kararlılığı GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak test edilir. Şekil 5.7, Çizelge 5.2'de verilen k_p ve k_i değerleri kullanılarak elde edilen GD Mikhailov test grafiklerini göstermektedir. Bu grafikler için referans polinom aşağıdaki gibi seçilir.

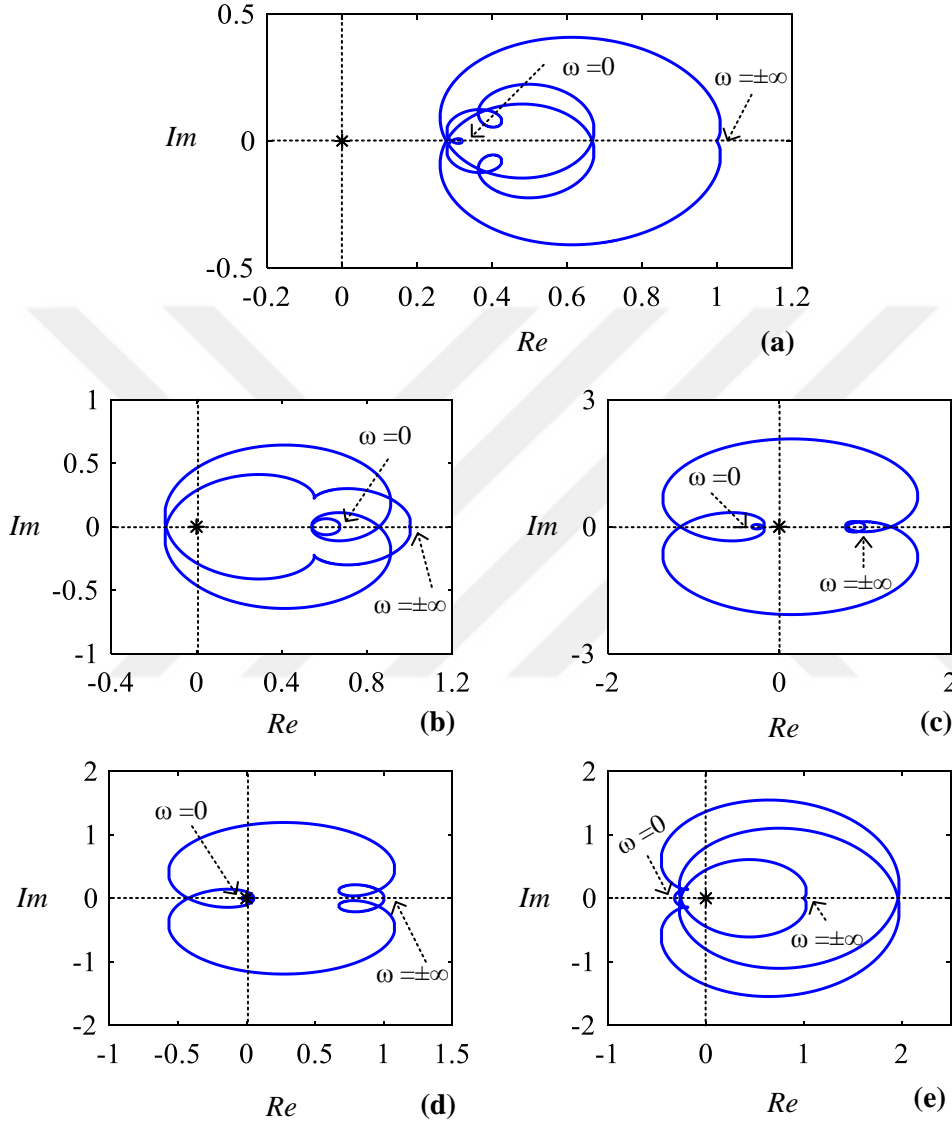
$$w_{rPID}(s) = (s + 1)^{3.4} \quad (5.58)$$



Şekil 5.6 : $k_d = 0$ için (k_p, k_i) -düzleminde kararlılık sınırları.

Çizelge 5.2: Şekil 5.6'daki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_i\}$ değerleri.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
k_p	0.5	-1.4	-6	-3	4
k_i	2	4.2	-2	-0.2	-2



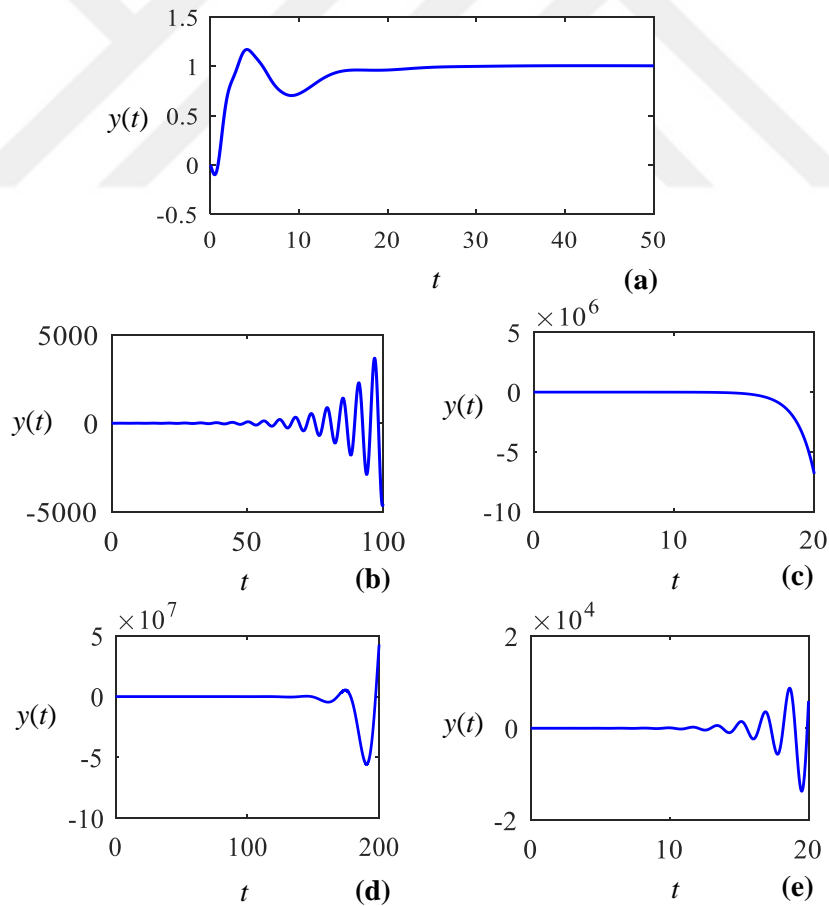
Şekil 5.7 : GD Mikhailov eğrileri: (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için.

Şekil 5.7(a)'da R_1 bölgesi için GD Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevrelemediği, bununla birlikte Şekil 5.7(b-e)'de GD Mikhailov eğrilerinin R_2 - R_5 bölgeleri için kompleks düzlemin merkezini çevrelediği görülmektedir. Bu, Denklem 5.57'deki kompleks dereceli karakteristik denklemin GD Mikhailov kararlılık kriterine göre $k_d = 0$

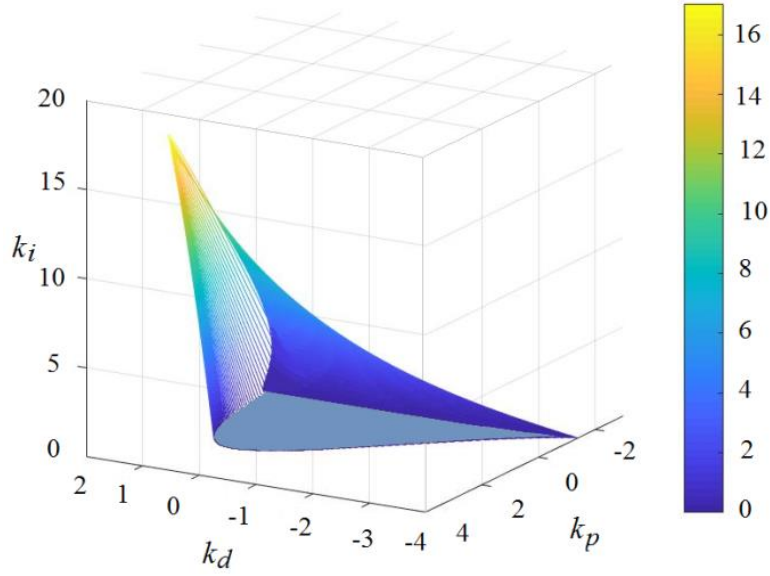
için R_1 bölgesindeki tüm $\{k_p, k_i\}$ değerlerinde kararlı olduğu anlamına gelmektedir.

GD Mikhailov kararlılık kriteriyle elde edilen kararlılık sonuçlarını doğrulamak için Çizelge 5.2'de verilen parametre değerleri için kapalı çevrim sisteminin birim basamak cevapları Şekil 5.8'de gösterilmiştir. Şekilden açıkça görülmektedir ki, kontrol sistemi R_1 bölgesinden seçilen k_p ve k_i değerleri için kararlı bir zaman yanıtına sahipken, diğer bölgelerde kararsız zaman yanıtları üretmektedir. Zaman alanı simülasyonları için, [0.01-100] rad/s frekans bandı üzerinde beşinci mertebeden ($N = 5$) Oustaloup yaklaşımı kullanılmıştır.

Kontrolör parametresi k_d değiştirilerek, farklı k_d değerleri için benzer şekilde 2 boyutlu kararlılık bölgeleri elde edilebilir. Bunun için yukarıda $k_d = 0$ için yapılan işlem farklı k_d değerleri için tekrarlanır. Bu bölgeler birleştirilerek, kararlılaştırıcı k_p, k_i ve k_d değerlerini içeren 3 boyutlu kararlılık bölgesi Şekil 5.9'da görüldüğü gibi elde edilir. Şekilden de anlaşılacağı gibi 3 boyutlu kararlılık bölgesi kapalı bölge şeklindedir.



Şekil 5.8 : Kapalı döngü birim basamak fonksiyonu cevapları (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için.



Şekil 5.9 : Örnek 5.2 için kararlılık bölgesi.

Bu örnekte verilen sonuçlardan, sunulan PID kararlılaştırma algoritmasının kompleks eşlenik dereceli sistemler için tüm kararlılaştırıcı PID kontrolör setini elde etmek için güvenilir bir yöntem olduğu açıkça görülmektedir.

Örnek 5.3: Transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{0.1 - j0.2}{s^{1.5+j0.7} + 1} + \frac{0.1 + j0.2}{s^{1.5-j0.7} + 1} \quad (5.59)$$

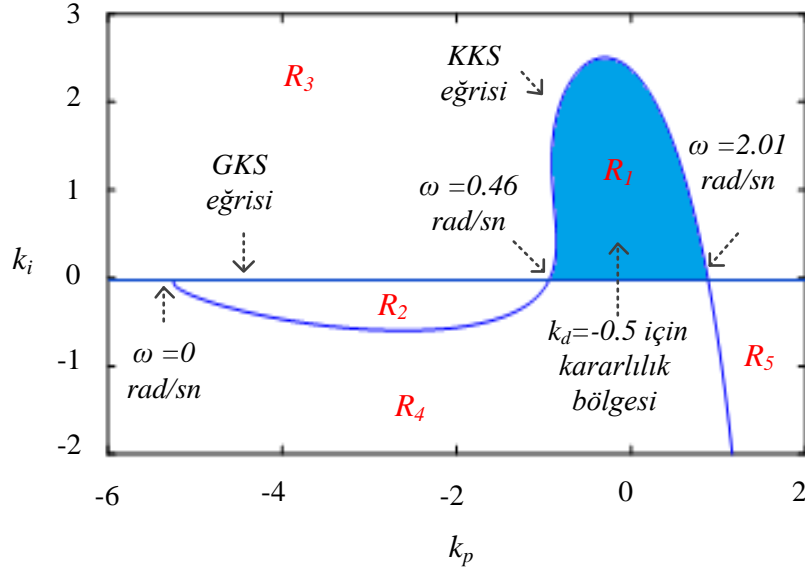
şeklinde verilen kompleks eşlenik dereceli sistemi ele alalım. PID kontrolörlü kompleks eşlenik dereceli sisteminin kapalı döngü karakteristik denklemi şu şekilde elde edilir:

$$P(s) = s^4 + s^{2.5+j1.7} + s^{2.5-j1.7} + s + (k_d s^2 + k_p s + k_i)x \quad (5.60)$$

$$\left((0.1 + j0.2)s^{1.5+j0.7} + (0.1 - j0.2)s^{1.5-j0.7} + 0.2 \right)$$

Herhangi bir k_d değeri ($k_d = -0.5$) için parametre düzleminde kararlılık sınırları ve bu sınırların oluşturduğu bölgeler Şekil 5.10'da gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere, KKS eğrisi ve GKS eğrisi (k_p, k_i)-parametre düzlemini R_1, R_2, R_3, R_4 ve R_5 olmak üzere beş farklı bölgeye ayırmaktadır. Kararlılık testi için her bölgeden seçilen rastgele (k_p, k_i) test noktaları Çizelge 5.3'te verilmiştir. Bölgelerin kararlılık testi için referans polinom aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_{rPID}(s) = (s + 1)^4 \quad (5.61)$$



Şekil 5.10 : $k_d = -0.5$ için (k_p, k_i) -düzleminde kararlılık sınırları.

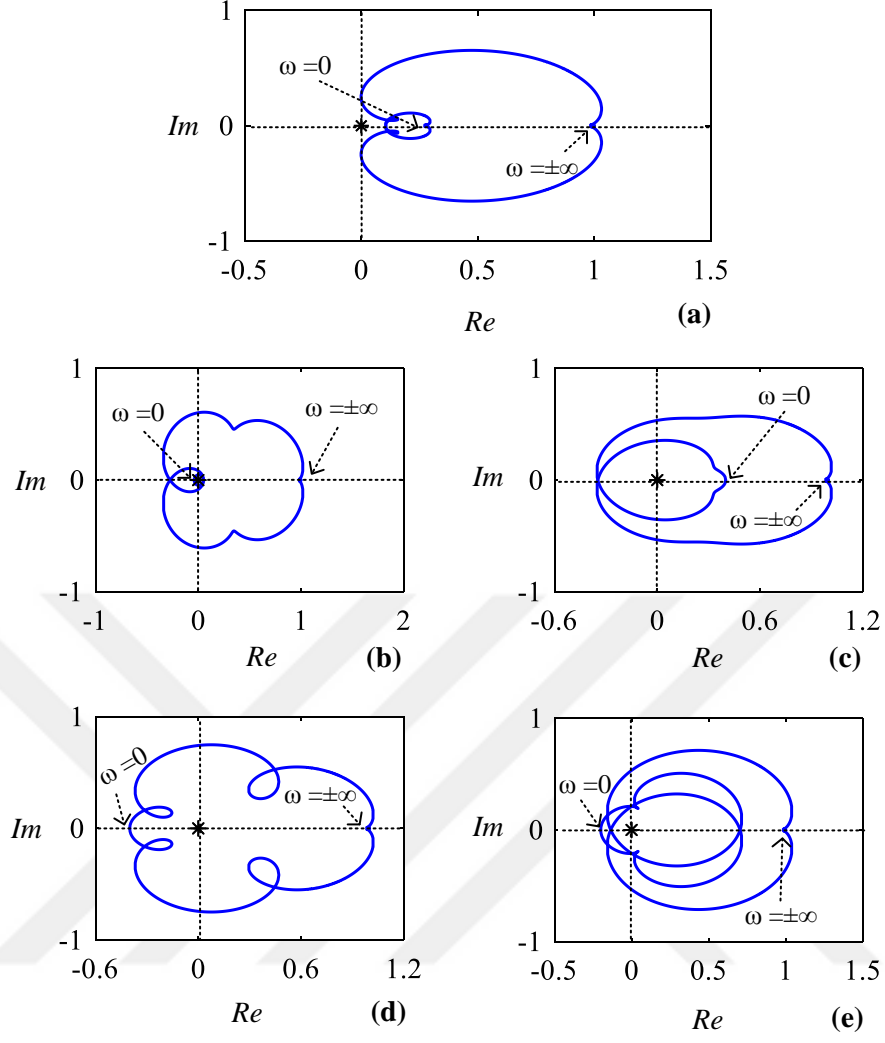
Çizelge 5.3: Şekil 5.10'daki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_i\}$ değerleri.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
k_p	-0.2	-3	-3	-2	2
k_i	1.4	-0.2	2	-2	-1

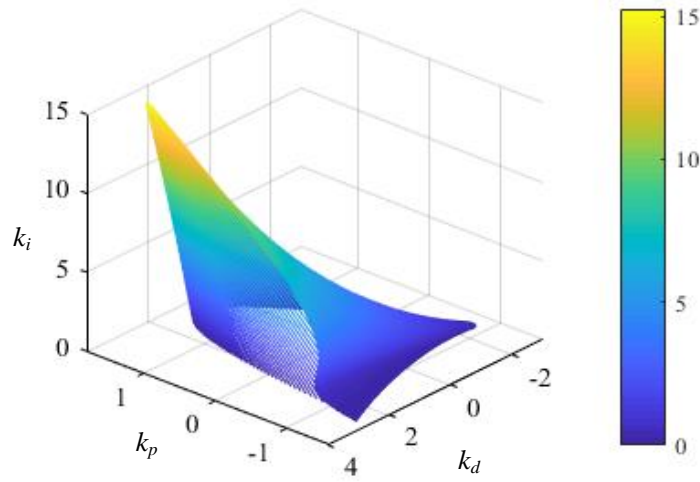
Çizelge 5.3'teki değerler kullanılarak elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 5.11'de görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere sadece Şekil 5.11(a)'da R_1 bölgesi için GD Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemin merkezini çevrelemediği, Şekil 5.11(b-e)'de GD Mikhailov eğrileri, R_2 - R_5 bölgeleri için kompleks düzlemin merkezini çevrelediği görülmektedir. Bu durum, kompleks dereceli karakteristik denklemin ($k_d = -0.5$) değeri için GD Mikhailov kararlılık kriterine göre Şekil 5.10'daki mavi renkli R_1 bölgesindeki kontrolör değerleri için kararlı olduğu anlamına gelmektedir. Verilen prosedürü farklı k_d değerleri için tekrarlayarak, kararlılaştırıcı k_p , k_i ve k_d değerlerini içeren üç boyutlu kararlılık bölgesi Şekil 5.12'te çizdirilmiştir.

Örnek 5.4: Sistemin derecesinin irrasyonel bir sayı olduğu ve transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemin PID kontrolör ile kararlılaştırılması işlemini gerçekleştirelim.

$$G(s) = \frac{1}{s^{\sqrt{3}+j\frac{\pi}{4}} - (-0.2 - j)} + \frac{1}{s^{\sqrt{3}-j\frac{\pi}{4}} - (-0.2 + j)} \quad (5.62)$$



Şekil 5.11 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için.



Şekil 5.12 : Örnek 5.3 için kararlılık bölgesi.

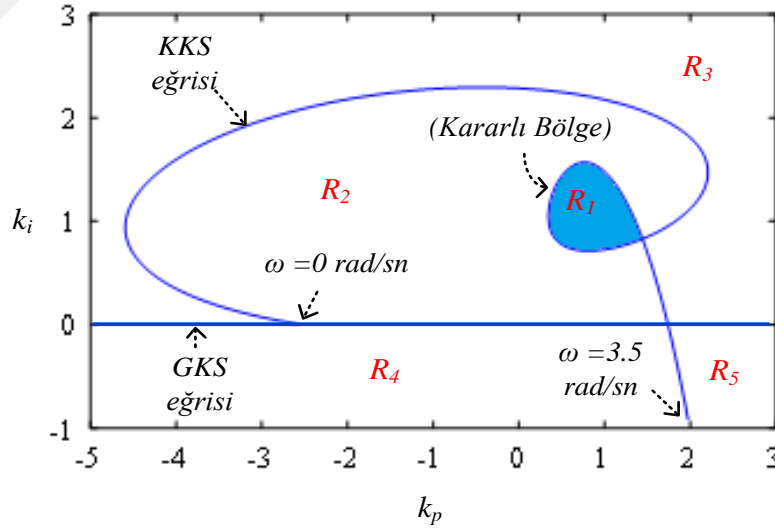
Kontrol sisteminin kompleks dereceli karakteristik denklemi şu şekilde elde edilir.

$$P(s) = s^{1+2\sqrt{3}} + (0.2 - j)s^{\sqrt{3}+1+j\frac{\pi}{4}} + (0.2 + j)s^{\sqrt{3}+1-j\frac{\pi}{4}} + 1.04s + (k_d s^2 + k_p s + k_i) \left(s^{\sqrt{3}+j\frac{\pi}{4}} + s^{\sqrt{3}-j\frac{\pi}{4}} + 0.4 \right) \quad (5.63)$$

$k_d = -0.01$ için, (k_p, k_i) -düzlemindeki kararlılık sınırları ve 2-D boyutlu kararlılık bölgesi Şekil 5.13'te gösterilmektedir. Bölgelerin kararlılık testi için referans polinom aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_{rPID}(s) = (s + 1)^{1+2\sqrt{3}} \quad (5.64)$$

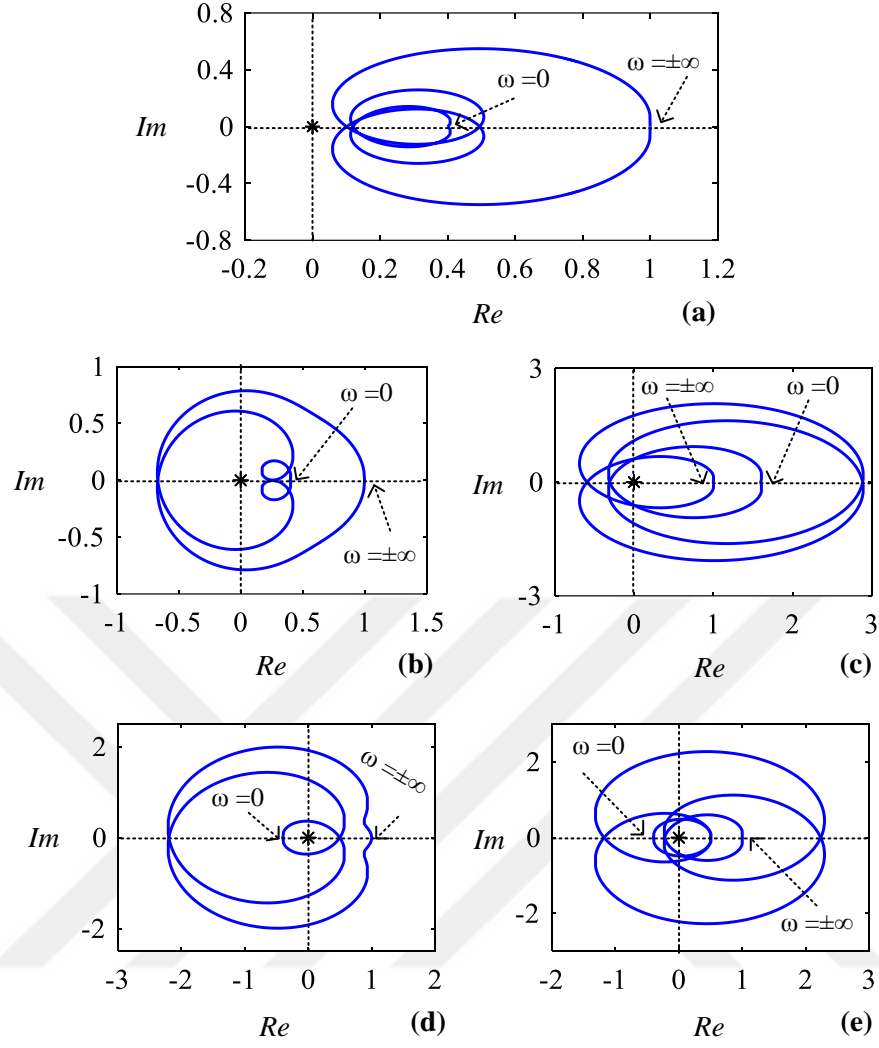
Çizelge 5.4'teki değerler kullanılarak elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 5.14'te görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere sadece Şekil 5.14(a)'daki GD Mikhailov eğrisi kompleks düzlemin merkezini çevrelememektedir. Bu durum, kompleks dereceli karakteristik denklemin verilen k_d değerinde GD Mikhailov kararlılık kriterine göre Şekil 5.13'teki mavi renkli bölgedeki kontrolör değerleri için kararlı olduğu anlamına gelmektedir. Diğer k_d değerleri için prosedür tekrarlanarak, tüm kararlılaştırıcı k_p , k_i ve k_d değerlerini içeren üç boyutlu kararlılık bölgesi, Şekil 5.15'te gösterilmektedir.



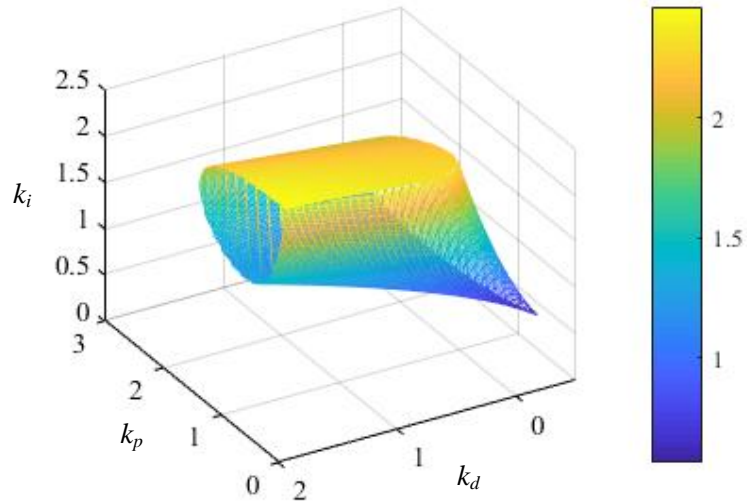
Şekil 5.13 : $k_d = -0.01$ için (k_p, k_i) -düzleminde kararlılık sınırları.

Çizelge 5.4: Şekil 5.13'teki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_i\}$ değerleri.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
k_p	1	-0.5	3	-2	3
k_i	1	1	4	-1	-1



Şekil 5.14 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için.



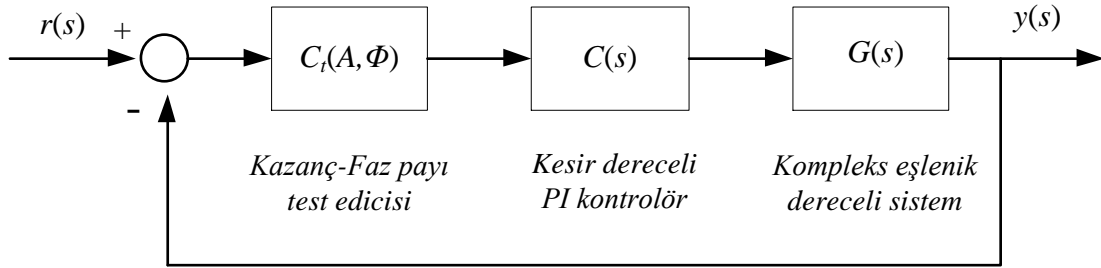
Şekil 5.15 : Örnek 5.4 için kararlılık bölgesi.

5.4 Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemler için Frekans Özelliklerine Göre Kesir Dereceli PI (PI^λ) Kontrolör Tasarımı

Bu bölümde, kompleks eşlenik dereceli sistemler için kararlılaştırma işleminin bir uygulaması olması amacıyla belli frekans spesifikasyonlarını sağlayan kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolör tasarımı gerçekleştirilecektir. Bunun için önce ele alınan bir kompleks eşlenik dereceli sistem için kontrolörün değişik λ değerleri için kararlılık bölgeleri elde edilecek, ardından bu kararlılık bölgeleri için değişik faz ve kazanç paylarına ait kontrolörler belirlenecektir. Böylece bir tasarımcı elde edilen kararlılık bölgesi içinden hangi kontrolör parametrelerini seçeceğine dair bilgiler edinmiş olacaktır. D-ayırıştırma yöntemi ile kararlılaştırma işlemi bir frekans bölgesi tekniği olduğundan kontrolör tasarımına dair spesifikasyonların frekans bölgesine ait olan kazanç ve faz payı cinsinden olması büyük kolaylık sağlamaktadır. Bununla birlikte zaman bölgesi spesifikasyonları da kontrolör tasarımına dahil edilebilir. Bunun için Hamamci ve Tan (2006) tarafından önerilen FTDP-map metodu kullanılabilir. Parametre düzleminde kararlılık bölgesi içinde belli kazanç ve faz payına sahip kontrolörleri elde etmek için Şekil 5.1’de verilen kontrol sistemine bir Kazanç-Faz Payı Test Edicisi (KFPT) (Chang ve Han,1989) eklenecektir. Şekil 5.16’da görülen sistemin yeni halinde KFPT sabit bir sayı olup istenilen kazanç ve faz paylarında kontrolör etkisi oluşturmak için kullanılacaktır.

Şekil 5.16’da gösterilen tek girişli-tek çıkışlı geri beslemeli kontrolör sisteminde kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolör yapısını ele alalım. PI^λ kontrolörün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C(s, k) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} = \frac{k_p s^\lambda + k_i}{s^\lambda} \quad (5.65)$$



Şekil 5.16 : Kompleks eşlenik dereceli sistemler için PI^λ kontrolör tasarımı.

Burada k_p oransal kazanç, k_i integral kazanç ve λ ise integratör elemanın kesirli derecesidir. Dolayısıyla k vektörü $k = \{k_p, k_i, \lambda\}$ şeklinde tanımlanır. Şekilden, kompleks eşlenik dereceli bir sistemin tasarımcı tarafından istenilen faz ve kazanç paylarını sağlayacak şekilde kontrol edilmesini sağlamak için PI^λ kontrolörün önüne KFPT yerleştirilmiştir. Bu test edici elemanın transfer fonksiyonu

$$C_t(A, \Phi) = A \cdot e^{-j\Phi} \quad (5.66)$$

biçimindedir. Burada A , kontrol sisteminin kazanç payını, ϕ ise kontrol sisteminin faz payını temsil etmektedir. Bu blok frekanstan bağımsızdır ve bir “sanal kompanzatör” olarak düşünülebilir. Şekil 5.16’da verilen kontrol sisteminin belirli bir kazanç payı için kontrolör parametrelerinin bulunması amacıyla Denklem 5.66’da $\phi = 0^\circ$ olarak ayarlanması gerekir. Öte yandan, $A = 1$ ayarı yapıldığında, belirli bir faz payı için kontrolör parametreleri elde edilir. Şekil 5.16’da gösterilen kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemi

$$P(s, k, A, \Phi) = 1 + C_t(A, \Phi)C(s, k)G(s) \quad (5.67)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 5.18, 5.65 ve 5.66 yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$P(s, k, A, \Phi) = 1 + Ae^{-j\Phi} \left(\frac{k_p s^\lambda + k_i}{s^\lambda} \right) \left(\frac{a + jb}{s^{u+jv} - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s^{u-jv} - (c - jd)} \right) \quad (5.68)$$

elde edilir. Gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} P(s, k, A, \Phi) = & s^{2u+\lambda} - (c - jd)s^{\lambda+u+jv} - (c + jd)s^{\lambda+u-jv} + (c^2 + d^2)s^\lambda \\ & + (A\cos(\phi))(a - jb)s^{u+jv} + A\cos(\phi)(a + jb)s^{u-jv} \\ & - A\cos(\phi)(2ac + 2bd) - jA\sin(\phi)(a - jb)s^{u+jv} \\ & - jA\sin(\phi)(a + jb)s^{u-jv} + jA\sin(\phi)(2ac + 2bd) + (k_p s^\lambda + k_i) \end{aligned} \quad (5.69)$$

ve

$$\begin{aligned} P(s, k, A, \Phi) = & s^{2u+\lambda} + (-c + jd + k_p A\cos(\phi)(a - jb) - jk_p A\sin(\phi)(a - jb))s^{\lambda+u+jv} \\ & + (-c - jd + k_p A\cos(\phi)(a + jb) - jk_p A\sin(\phi)(a + jb))s^{\lambda+u-jv} \\ & + (c^2 + d^2 - k_p A\cos(\phi)(2ac + 2bd) + jk_p A\sin(\phi)(2ac + 2bd))s^\lambda \\ & + (k_i A\cos(\phi)(a - jb) - jk_i A\sin(\phi)(a - jb))s^{u+jv} \\ & + (k_i A\cos(\phi)(a + jb) - jk_i A\sin(\phi)(a + jb))s^{u-jv} \\ & + (-k_i A\cos(\phi)(2ac + 2bd) + jk_i A\sin(\phi)(2ac + 2bd)) \end{aligned} \quad (5.70)$$

bulunur. Denklem 5.70 için GKS sınırı için s yerine 0 konulursa

$$k_i[-A\cos\Phi(2ac + 2bd) + jA\sin\Phi(2ac + 2bd)] = 0 \quad (5.71)$$

ve sonuç olarak

$$k_i = 0 \quad (5.72)$$

doğrusu elde edilir. SKS'yi hesaplariken, Denklem 5.70'teki karakteristik denklemde terimlerden hangisinin derecesinin daha büyük olduğunu belirlemek gerekir. En büyük derece $2u + \lambda$ olup, katsayısı bir kontrolör parametresi içermediğinden karakteristik denklem için herhangi bir SKS bulunmamaktadır. KKS denklemini elde etmek için, Denklem 5.70'te s yerine $j\omega$ konularak, reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$P(j\omega, k, A, \Phi) = \Re\{P(j\omega)\} + \Im\{P(j\omega)\} = R_p + jI_p = 0 + j0 \quad (5.73)$$

Denklem 3.31-3.33'teki açılımlar kullanılarak reel ve sanal kısımlar sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} R_p = k_p [& A\cos(\phi)(ax_5m_5 + bx_5n_5 + by_5m_5 - ay_5n_5 + ax_6m_6 - bx_6n_6 - by_6m_6 \\ & - ay_6n_6 - (2ac + 2bd)x_1m_1 + (2ac + 2bd)y_1n_1) \\ & + A\sin(\phi)(-bx_5m_5 + ax_5n_5 + ay_5m_5 + by_5n_5 + bx_6m_6 + ax_6n_6 \\ & + ay_6m_6 - by_6n_6 - (2ac + 2bd)x_1n_1 - (2ac + 2bd)y_1m_1)] \\ & + k_i [A\cos(\phi)(ax_3m_3 + bx_3n_3 + by_3m_3 - ay_3n_3 + ax_4m_4 - bx_4n_4 \\ & - by_4m_4 - ay_4n_4 - (2ac + 2bd)) + A\sin(\phi)(-bx_3m_3 + ax_3n_3 \\ & + ay_3m_3 + by_3n_3 + bx_4m_4 + ax_4n_4 + ay_4m_4 - by_4n_4)] \\ & + [x_2m_2 - y_2n_2 - cx_5m_5 + cy_5n_5 - dx_5n_5 - dy_5m_5 - cx_6m_6 \\ & + cy_6n_6 + dx_6n_6 + dy_6m_6 + (c^2 + d^2)x_1m_1 - (c^2 + d^2)y_1n_1] = 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
I_P = k_p [& \text{Acos}(\phi)(-bx_5m_5 + ax_5n_5 + ay_5m_5 + by_5n_5 + bx_6m_6 + ax_6n_6 + ay_6m_6 \\
& - by_6n_6 - (2ac + 2bd)x_1n_1 - (2ac + 2bd)y_1m_1) \\
& + \text{Asin}(\phi)(-ax_5m_5 - bx_5n_5 - by_5m_5 + ay_5n_5 - ax_6m_6 + bx_6n_6 \\
& + by_6m_6 + ay_6n_6 + (2ac + 2bd)x_1m_1 - (2ac + 2bd)y_1n_1)] \\
& + k_i [\text{Acos}(\phi)(-bx_3m_3 + ax_3n_3 + ay_3m_3 + by_3n_3 + bx_4m_4 + ax_4n_4 \\
& + ay_4m_4 - by_4n_4) \\
& + \text{Asin}(\phi)(-ax_3m_3 - bx_3n_3 - by_3m_3 + ay_3n_3 - ax_4m_4 + bx_4n_4 \\
& + by_4m_4 + ay_4n_4) + (2ac + 2bd)] \\
& + [x_2n_2 + y_2m_2 - cx_5n_5 - cy_5m_5 + dx_5m_5 - dy_5n_5 - cx_6n_6 \\
& - cy_6m_6 - dx_6m_6 + dy_6n_6 + (c^2 + d^2)x_1n_1 - (c^2 + d^2)y_1m_1] = 0
\end{aligned} \tag{5.75}$$

bulunur. Burada,

$$\omega^\lambda = x_1 + jy_1 \quad j^\lambda = m_1 + jn_1 \tag{5.76a}$$

$$\omega^{2u+\lambda} = x_2 + jy_2 \quad j^{2u+\lambda} = m_2 + jn_2 \tag{5.76b}$$

$$\omega^{u+jv} = x_3 + jy_3 \quad j^{u+jv} = m_3 + jn_3 \tag{5.76c}$$

$$\omega^{u-jv} = x_4 + jy_4 \quad j^{u-jv} = m_4 + jn_4 \tag{5.76d}$$

$$\omega^{\lambda+u+jv} = x_5 + jy_5 \quad j^{\lambda+u+jv} = m_5 + jn_5 \tag{5.76e}$$

$$\omega^{\lambda+u-jv} = x_6 + jy_6 \quad j^{\lambda+u-jv} = m_6 + jn_6 \tag{5.76f}$$

şeklinde hesaplanır. Denklem 5.74 ve 5.75 düzenlenerek aşağıda verilen iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir:

$$k_p K(\omega) + k_i L(\omega) = M(\omega) \tag{5.77}$$

$$k_p P(\omega) + k_i R(\omega) = S(\omega) \tag{5.78}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
K(\omega) = & \text{Acos}(\phi)(ax_5m_5 + bx_5n_5 + by_5m_5 - ay_5n_5 + ax_6m_6 - bx_6n_6 - by_6m_6 - ay_6n_6 \\
& - (2ac + 2bd)x_1m_1 + (2ac + 2bd)y_1n_1) \\
& + \text{Asin}(\phi)(-bx_5m_5 + ax_5n_5 + ay_5m_5 + by_5n_5 + bx_6m_6 + ax_6n_6 + ay_6m_6 \\
& - by_6n_6 - (2ac + 2bd)x_1n_1 - (2ac + 2bd)y_1m_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\omega) = & \text{Acos}(\phi)(ax_3m_3 + bx_3n_3 + by_3m_3 - ay_3n_3 + ax_4m_4 - bx_4n_4 - by_4m_4 - ay_4n_4 \\
& - (2ac + 2bd)) + \text{Asin}(\phi)(-bx_3m_3 + ax_3n_3 + ay_3m_3 + by_3n_3 + bx_4m_4 \\
& + ax_4n_4 + ay_4m_4 - by_4n_4)
\end{aligned}$$

$$M(\omega) = -[x_2m_2 - y_2n_2 - cx_5m_5 + cy_5n_5 - dx_5n_5 - dy_5m_5 - cx_6m_6 + cy_6n_6 + dx_6n_6 + dy_6m_6 + (c^2 + d^2)x_1m_1 - (c^2 + d^2)y_1n_1]$$

$$P(\omega) = A\cos(\phi)(-bx_5m_5 + ax_5n_5 + ay_5m_5 + by_5n_5 + bx_6m_6 + ax_6n_6 + ay_6m_6 - by_6n_6 - (2ac + 2bd)x_1n_1 - (2ac + 2bd)y_1m_1) + A\sin(\phi)(-ax_5m_5 - bx_5n_5 - by_5m_5 + ay_5n_5 - ax_6m_6 + bx_6n_6 + by_6m_6 + ay_6n_6 + (2ac + 2bd)x_1m_1 - (2ac + 2bd)y_1n_1)$$

$$R(\omega) = A\cos(\phi)(-bx_3m_3 + ax_3n_3 + ay_3m_3 + by_3n_3 + bx_4m_4 + ax_4n_4 + ay_4m_4 - by_4n_4) + A\sin(\phi)(-ax_3m_3 - bx_3n_3 - by_3m_3 + ay_3n_3 - ax_4m_4 + bx_4n_4 + by_4m_4 + ay_4n_4) + (2ac + 2bd)$$

$$S(\omega) = -[x_2n_2 + y_2m_2 - cx_5n_5 - cy_5m_5 + dx_5m_5 - dy_5n_5 - cx_6n_6 - cy_6m_6 - dx_6m_6 + dy_6n_6 + (c^2 + d^2)x_1n_1 - (c^2 + d^2)y_1m_1]$$

(5.79a-f)

biçimindedir. Denklem sistemi çözülerek, k_p ve k_i parametreleri

$$k_p(\omega) = \frac{R(\omega)M(\omega) - S(\omega)L(\omega)}{R(\omega)K(\omega) - P(\omega)L(\omega)} \quad (5.80)$$

$$k_i(\omega) = \frac{M(\omega)P(\omega) - S(\omega)K(\omega)}{P(\omega)L(\omega) - K(\omega)R(\omega)} \quad (5.81)$$

şeklinde hesaplanır. Denklem 5.80 ve 5.81 kullanılarak, önce $\lambda = 1$, $A = 1$ ve $\phi = 0$ alınarak (k_p, k_i) -düzleminde tam sayı dereceli PI kontrolör için kararlılık bölgesi elde edilir. Daha sonra değişik λ değerleri için kararlılık bölgesinin değişimi gözlemlenir. Bu işlem esnasında karakteristik denklemin en büyük derecesi $2u + \lambda$ olduğundan GD Mikhailov kararlılık kriteri ile her bir bölgenin kararlılık durumu test edilirken referans polinom aşağıdaki gibi seçilir:

$$w_{rPI\lambda}(s) = (s + \varepsilon)^{2u+\lambda} \quad \varepsilon > 0 \quad (5.82)$$

Kararlılık bölgesinin tayininin ardından, arzu edilen kazanç payına göre A 'ya değerler verilerek ilgili kazanç payına ait kontrolör değerlerini veren KKS eğrileri elde edilir. Ayrıca istenilen faz payına karşılık gelecek şekilde ϕ 'ye değerler verilerek ilgili faz payına ait KKS eğrileri bulunur. Son olarak, tasarımcının istediği kazanç payı ve faz payı değerlerine ait iki eğri tek bir grafikte çizdirilerek, grafiklerin kesiştiği noktadaki ilgili kazanç ve faz payına karşılık gelen kontrolör parametreleri doğrudan elde edilebilir.

Kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kesir dereceli PI^λ kontrolör kullanılarak kararlılık bölgesinin elde edilmesi ve bu bölge içinde istenilen kazanç ve faz payı değerlerine sahip kontrolörün elde edilmesi için yukarıda verilen prosedür şu şekilde maddeler halinde özetlenebilir:

Adım 1: Şekil 5.16'da verilen kontrol sisteminin karakteristik denklemi elde edilir.

Adım 2: Denklem 5.71 kullanılarak GKS doğrusu elde edilir. Denklem 5.80 ve 5.81 kullanılarak KKS eğrisinin çizimi için gerekli olan k_p ve k_i formülleri elde edilir.

Adım 3: Her hangi bir λ değeri için;

- (a) GKS doğrusu ve KKS eğrisi çizdirilerek, (k_p, k_i) -parametre düzlemi bölgelere ayrıştırılır.
- (b) Her bir bölgeden test noktaları seçilerek bölgelerin kararlılığı GD Mikhailov kararlılık kriteri ile test edilir ve kararlı bölge tespit edilir.
- (c) Her bir bölgeden seçilen kontrolör parametre değerleri kullanılarak kapalı döngü sisteminin zaman cevabı elde edilerek kararlı bölge doğrulanır.

Adım 4: İntegratörün kesir derecesinin (λ) farklı değerleri için kararlılık bölgesinin değişimi gözlemlenir.

Adım 5: Herhangi bir λ değeri için istenilen kazanç ve faz payına ait kontrolör seti elde edilir. Bunun için:

- (a) $\phi = 0$ ve farklı kazanç payı değerleri için (k_p, k_i) -parametre düzleminde KKS eğrileri elde edilir.
- (b) $A = 1$ ve farklı faz payı değerleri için (k_p, k_i) -parametre düzleminde KKS eğrileri elde edilir.

Adım 6: $\lambda = 1$ değeri için istenilen kazanç ve faz payı eğrileri tek bir grafik üzerinde çizdirilerek, kesişim noktasındaki ilgili kazanç ve faz payını veren PI kontrolör belirlenir. λ 'nın değeri $(0, 2)$ aralığında değiştirilerek, istenilen kazanç ve faz payına sahip olan tüm PI^λ kontrolör seti elde edilir.

Sonuç olarak, tasarımcı tasarımın başında arzu ettiği kazanç ve faz payı değerlerini sağlayan ve her bir λ değeri için birer tane PI^λ kontrolör elde etmiş olur. Her bir kontrolör için kontrol sisteminin zaman cevabını çizdirerek, altıncı adımda elde ettiği set içinde isteği PI^λ kontrolörü belirlemiş olur.

Örnek 5.5: Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.5+j0.5} - (-0.5 + j0.75)} + \frac{1}{s^{0.5-j0.5} - (-0.5 - j0.75)} \quad (5.83)$$

şeklinde verilen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım. Bu sistem için genlik payının 2 ve faz payının ise 45° olduğu bir PI^λ kontrol sistem tasarımı hedeflenmektedir. Kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemi

$$P(s) = s^{1+\lambda} - (-0.5 - j0.75)s^{\lambda+0.5+j0.5} - (-0.5 + j0.75)s^{\lambda+0.5-j0.75} + 0.8125s^\lambda + Ae^{-j\phi}(k_p s^\lambda + k_i)(s^{0.5+j0.5} + s^{0.5-j0.5} + 1) \quad (5.84)$$

şeklinde elde edilir. Tasarıma başlamadan önce, sistemin kararlılık bölgesi elde edilir. Herhangi bir λ değeri için $A = 1$ ve $\phi = 0$ alınarak kararlılık sınırları bulunur. GKS denklemi;

$$k_i = 0 \quad (5.85)$$

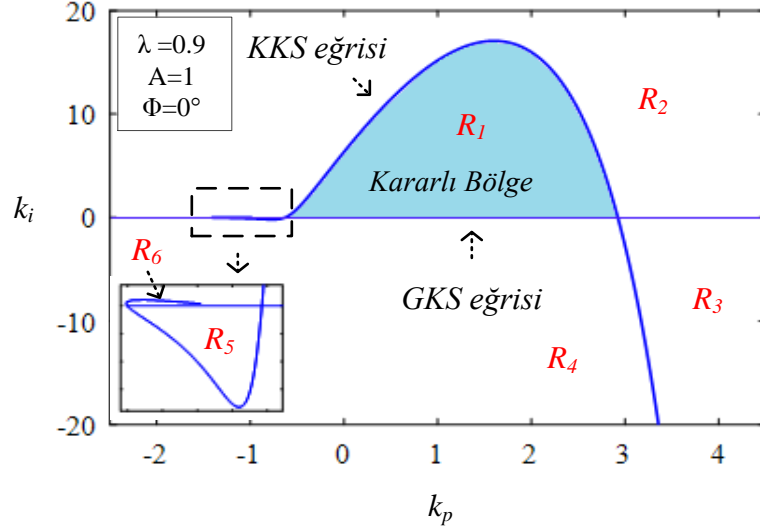
olarak elde edilirken, SKS sınırı bulunmamaktadır. (k_p, k_i) -parametre düzleminde KKS eğrisini elde etmek için analitik olarak k_p ve k_i formülleri Denklem 5.80 ve 5.81 kullanılarak hesaplanır. Şekil 5.17'de $\lambda = 0.9$ seçilerek (k_p, k_i) düzleminde KKS ve GKS sınırları çizdirilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere KKS eğrisi ile GKS eğrisi, (k_p, k_i) parametre düzlemini R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ve R_6 olmak üzere 6 ayrı bölgeye ayırmaktadır.

Şekil 5.17'de her bir noktadan seçilen k_p ve k_i değerleri Çizelge 5.5'te verilmiştir. Denklem 5.84'te verilen karakteristik denklemde en büyük derece " $(1 + \lambda)$ " olduğu için referans polinom aşağıdaki gibi seçilir.

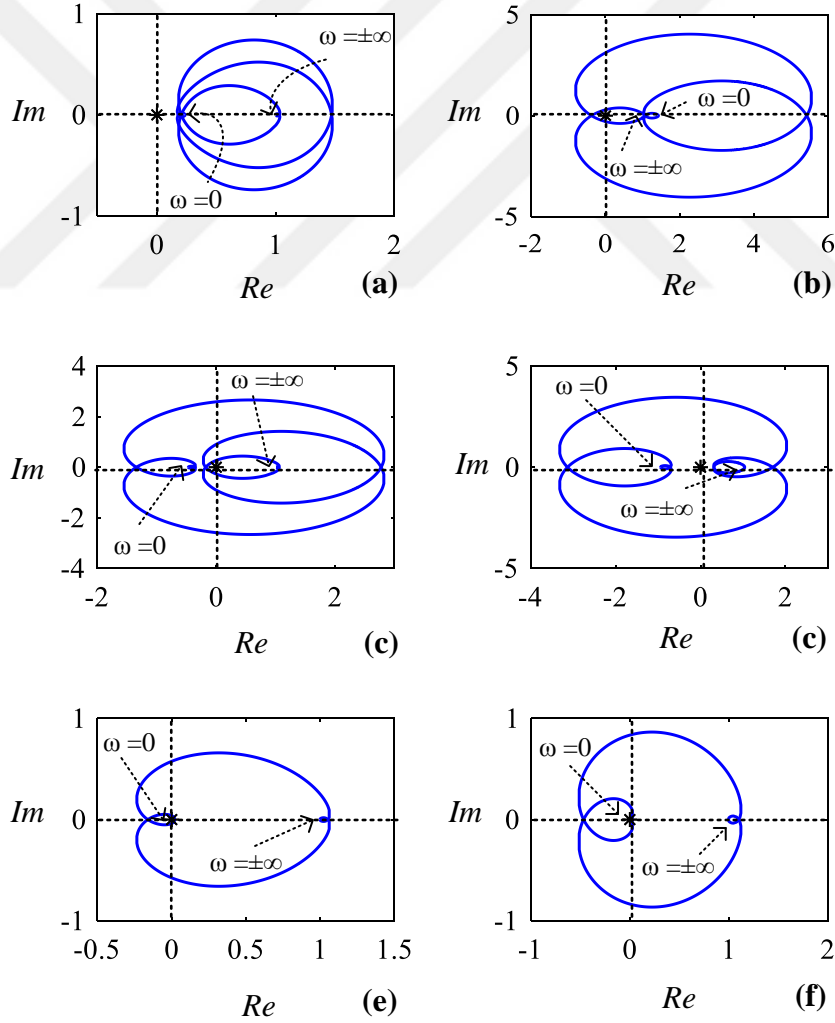
$$w_{rPI^\lambda}(s) = (s + 5)^{1+\lambda} = (s + 5)^{1.9} \quad (5.86)$$

Çizelge 5.5: Şekil 5.17'deki bölgelerden test için seçilen $\{k_p, k_i\}$ değerleri.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
k_p	1.5	1	4	2	-0.8	-1.25
k_i	5	30	-10	-20	-0.05	0.005



Şekil 5.17 : $\lambda = 0.9$ için (k_p, k_i) -düzleminde kararlılık bölgeleri.

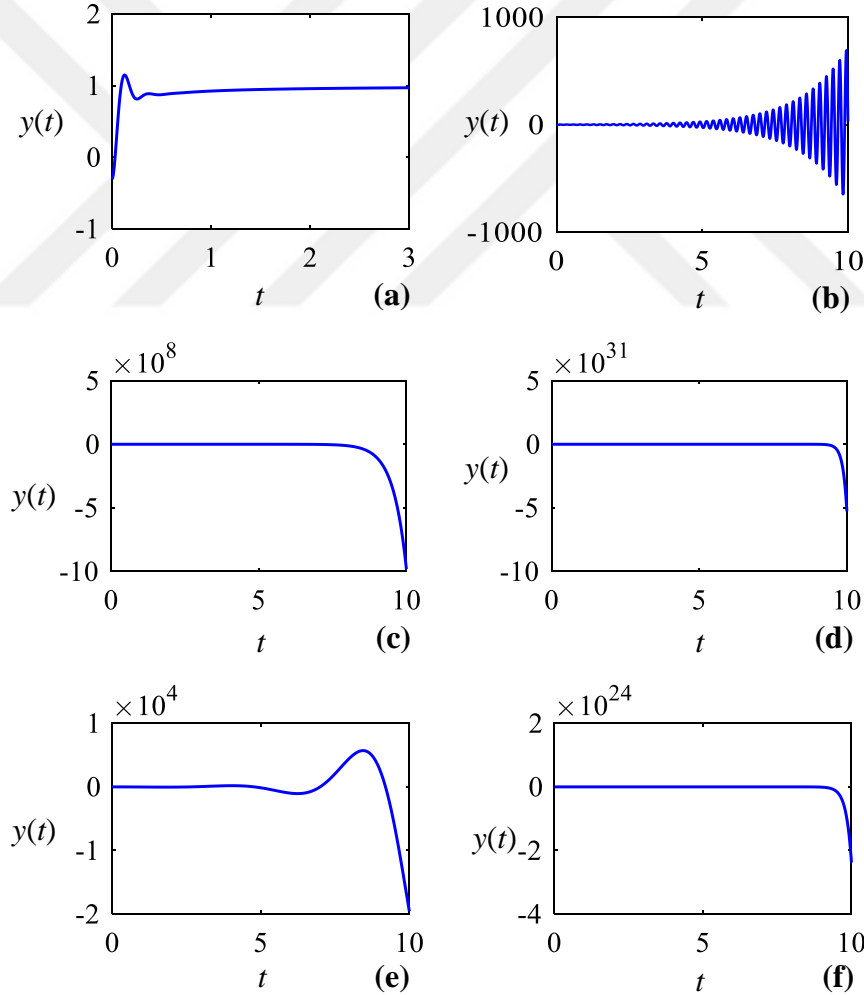


Şekil 5.18 : GD Mikhailov eğrisi: (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için (f) R_6 bölgesi için.

Bu durumda rasyonel fonksiyon;

$$\psi(s) = \frac{P(s)}{(s + 5)^{1.9}} \quad (5.87)$$

formunda elde edilir. Çizelge 5.5'te her bir bölgeden seçilen k_p ve k_i değerleri kullanılarak Denklem 5.87'deki rasyonel fonksiyon için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 5.18'de gösterilmektedir. Şekilden, R_1 bölgesinin kararlılık bölgesi olduğu görülmektedir. Bu sonucu doğrulamak için, Çizelge 5.5'teki değerler kullanılarak her bir bölge için kontrol sisteminin zaman bölgesi simülasyonu Şekil 5.19'da Oustaloup'un yaklaşım metodu kullanılarak elde edilmiştir. Yaklaşım metodunda $N=5$ ve $\omega = [0.01 \ 100]$ rad/sec alınmıştır. Şekilden de görüldüğü üzere, R_1 bölgesinde kontrol sistem kararlı bir zaman cevabına sahiptir.



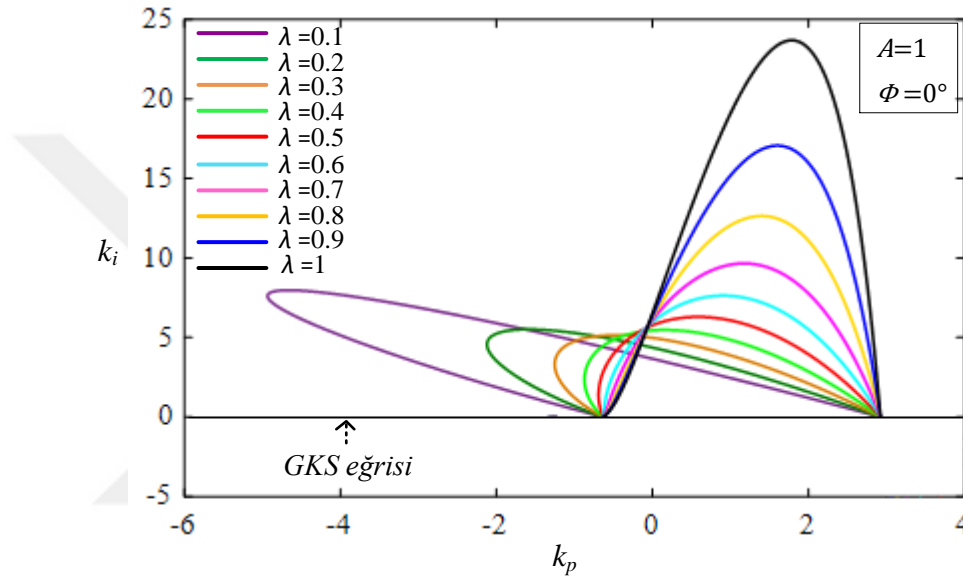
Şekil 5.19 : Kapalı döngü zaman cevapları (a) R_1 bölgesi için (b) R_2 bölgesi için (c) R_3 bölgesi için (d) R_4 bölgesi için (e) R_5 bölgesi için (f) R_6 bölgesi için.

Şekil 5.16’da verilen kontrol sisteminde kararlılık üzerine etkisi bulunan parametrelerden biri de kesir dereceli PI kontrolörün (PI^λ) integratör derecesidir. λ ’nın farklı değerleri için kararlılık bölgeleri Şekil 5.20, 5.21 ve 5.22’de verilmiştir. $0 < \lambda \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 5.20’de; $1 \leq \lambda \leq 1.7$ aralığındaki değerler için elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 5.21’de ve $1.7 \leq \lambda \leq 1.9$ aralığındaki değerler için elde edilen kararlılık bölgeleri ise Şekil 5.22’de gösterilmiştir. Şekil 5.20 ve 5.21’den de görüldüğü üzere; $0.1 \leq \lambda \leq 0.3$ aralığında integratör derecesi arttıkça sistemin kararlılık bölgesi azalmıştır. $\lambda = 0.3$ ’te kararlılık bölgesindeki azalma durmuş ve $0.3 \leq \lambda \leq 1$ aralığında λ değerinin artışına bağlı olarak kararlılık bölgeleri tekrar büyümeye başlamıştır. Bu aralıkta Şekil 5.21’den de görüldüğü üzere en büyük kararlılık bölgesi $\lambda = 1.7$ ’de gözlemlenmiştir. Ancak Şekil 5.22’ye bakıldığında zaman $1.7 \leq \lambda \leq 1.9$ aralığında λ değerinin artışına bağlı kararlılık bölgesinin tekrardan çok küçülerek sifira yaklaştığı görülmüştür. Kesirli integral derecesi $\lambda = 2$ değeri için herhangi bir kararlılık bölgesi oluşmamıştır.

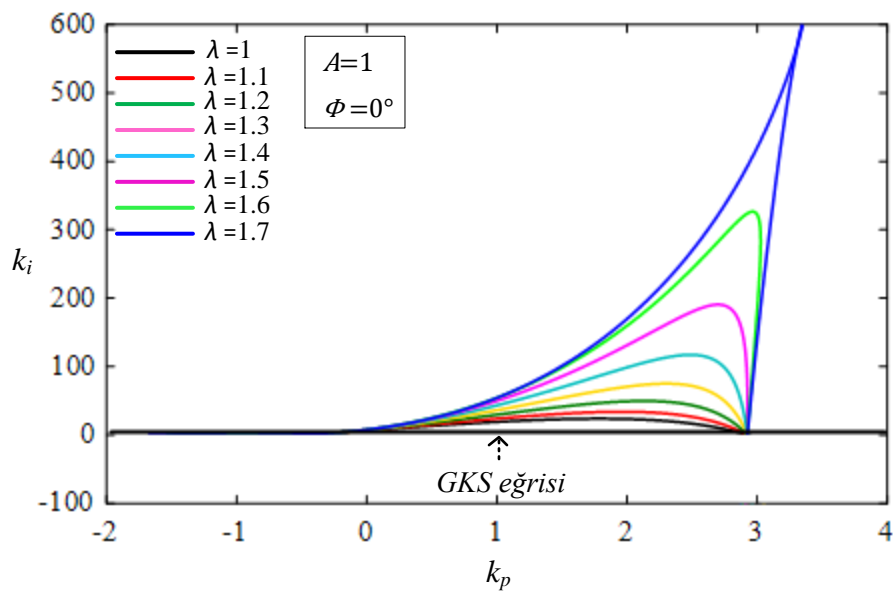
Şekil 5.23’te istenilen kazanç payına sahip olan kontrolörleri ifade eden eğriler görülmektedir. Bunun için Denklem 5.80 ve 81’deki A yerine farklı değerler verilerek KKS eğrileri çizdirilmiştir. Normalde kararlılık sınırını ifade eden KKS eğrisi, A ’nın değişik değerlerinde ilgili kazanç payını veren eğriye dönüşür. Bu eğri, ilgili A kazanç payını sağlayan kontrolörlerin setini ifade etmektedir. Şekilde kontrol sisteminin diğer parametrelerinden integratör derecesi $\lambda = 0.9$ ve faz payı $\phi = 0^\circ$ kabul edilmiş ve kazanç payı $0.4 \leq A \leq 2$ aralığında belirli oranlarla değiştirilerek seçilen kazanç payı değerini sağlayan kontrolörleri ifade eden eğriler görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere kazanç payındaki artış kararlılık sınırlarının daralmasına ve dolayısıyla daha küçük kararlılık bölgelerinin oluşmasına neden olmuştur. Söz konusu kazanç payı aralığında $A = 2$ için en küçük kararlılık bölgesi elde edilirken $A = 0.4$ için en büyük kararlılık bölgesi elde edilmiştir.

Kararlılık bölgelerinin değişimi üzerinde etkili olan bir diğer parametre ise faz payıdır. Bilindiği üzere faz payının aşma miktarı ve kararlılık bölgesi üzerine doğrudan bir etkisi bulunduğu için dolaylı olarak tasarlanan kontrol sisteminde faz payının önceden ayarlanma imkanının bulunması sistem için uygun kontrolör tasarımında büyük önem arz etmektedir. Şekil 5.24’te istenilen faz payına sahip olan kontrolörleri ifade eden eğriler görülmektedir. Bunun için Denklem 5.80 ve 81’deki ϕ yerine farklı değerler verilerek KKS eğrileri çizdirilmiştir. Normalde kararlılık sınırını ifade eden KKS eğrisi, ϕ ’nin değişik

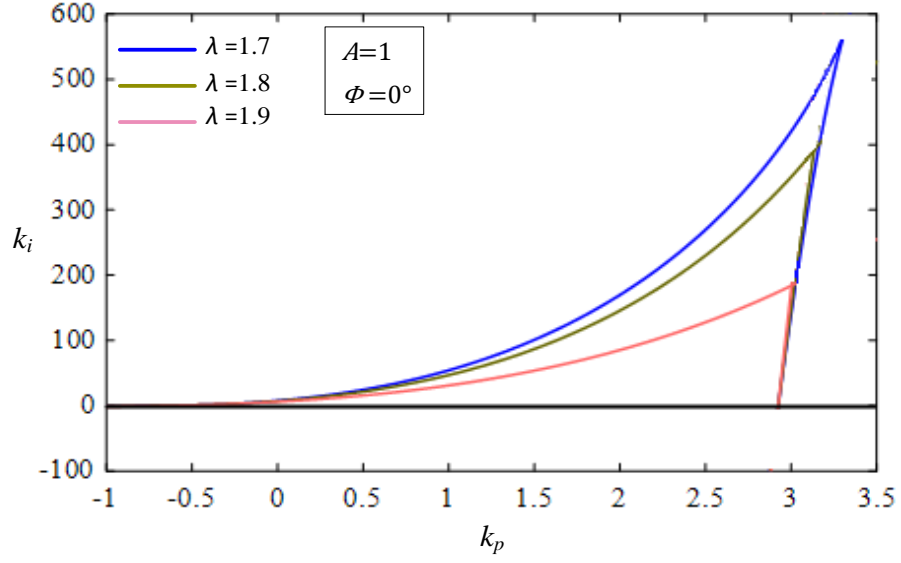
değerlerinde ilgili faz payını veren eğriye dönüşür. Bu eğri, ilgili ϕ faz payını sağlayan kontrolörlerin setini ifade etmektedir. Şekilde integratör derecesi $\lambda = 0.9$, kazanç payı $A = 1$ için farklı faz payı (ϕ) değerlerinin kararlılık bölgesi üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Faz payının kararlılık bölgesi üzerindeki etkilerini incelemek için faz payı $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ aralığında değiştirilmiş ve sınırların oluşturulduğu kararlılık bölgelerindeki değişim gözlemlenmiştir. Şekilden de anlaşıldığı üzere, faz payındaki artış kararlılık bölgesinde küçülmeye sebep olmuştur. En büyük kararlılık bölgesi $\phi = 0^\circ$ için ve en küçük kararlılık bölgesi de $\phi = 90^\circ$ değeri için elde edilmiştir.



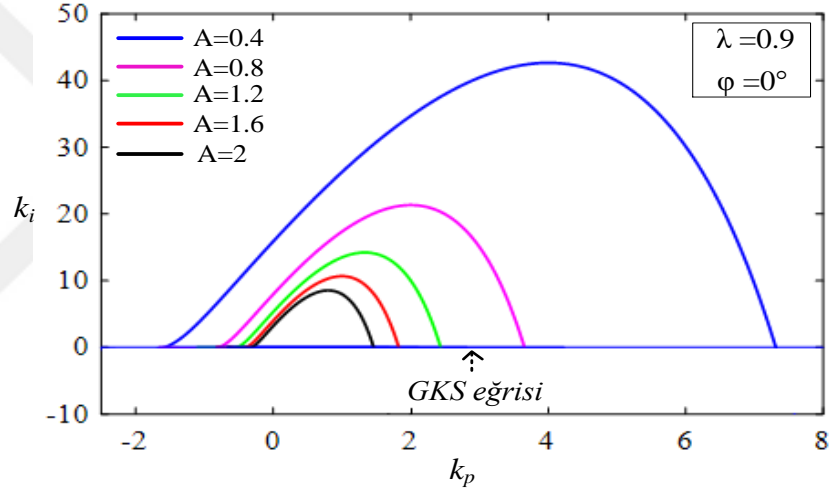
Şekil 5.20 : $0.1 \leq \lambda \leq 1$ aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.



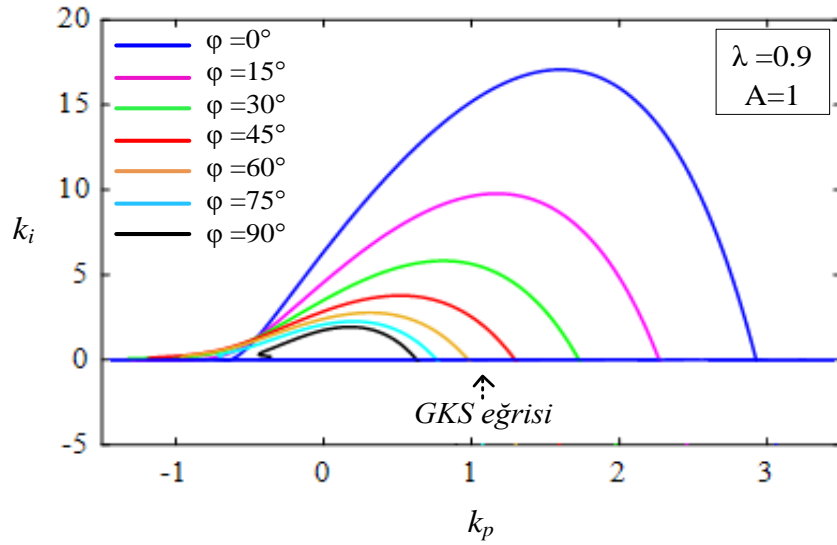
Şekil 5.21 : $1 \leq \lambda \leq 1.7$ aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.



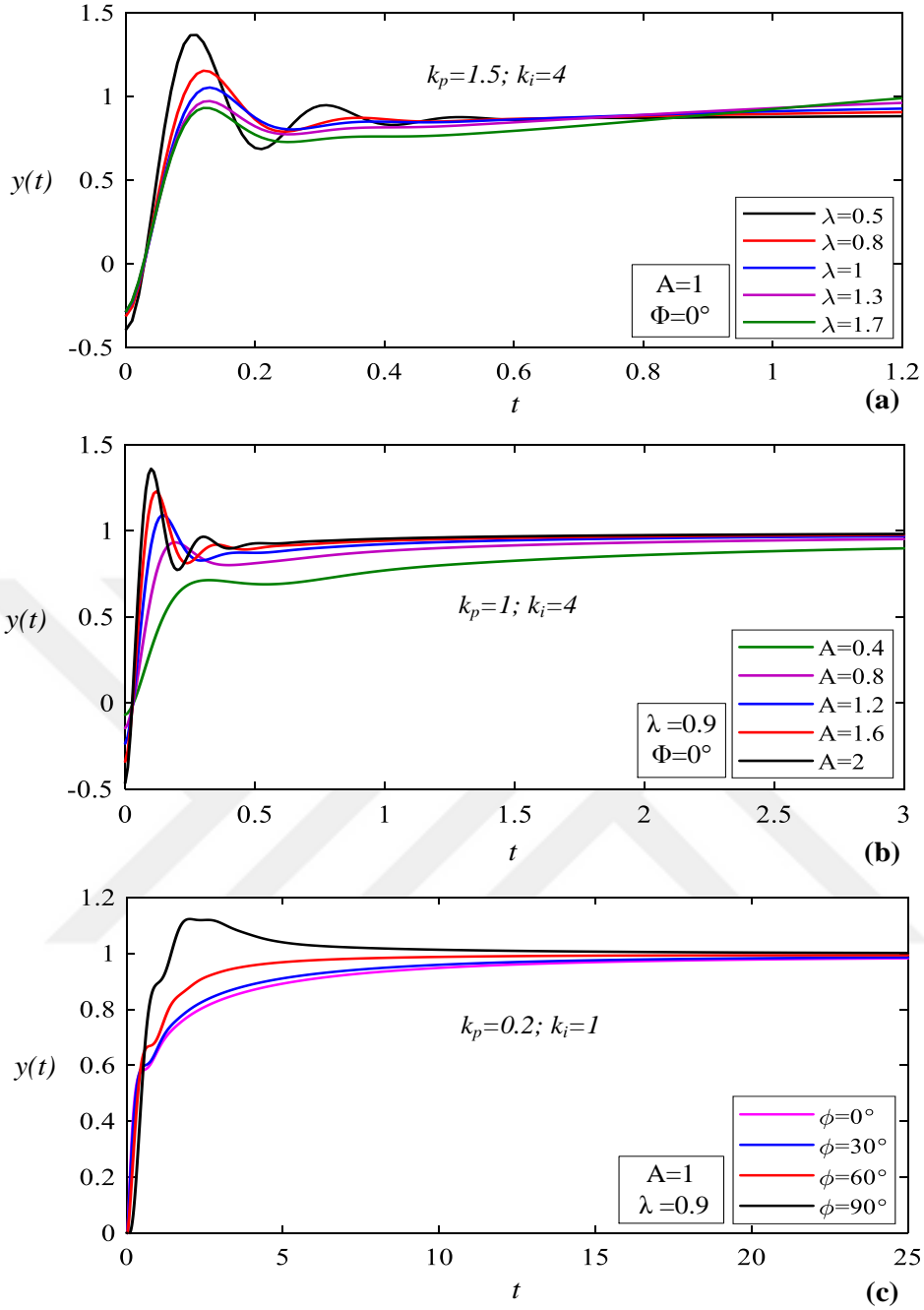
Şekil 5.22 : $1.7 \leq \lambda \leq 1.9$ aralığındaki integral derecesinin kararlılık bölgesi üzerine etkisi.



Şekil 5.23 : $0.4 \leq A \leq 2$ aralığında kazanç payı değişimin kararlılık bölgelerine etkisi.



Şekil 5.24 : $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ aralığında faz payı değişimin kararlılık bölgelerine etkisi.

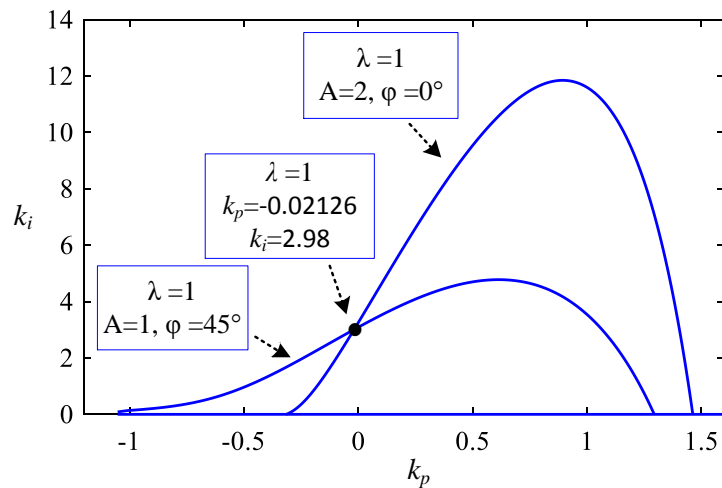


Şekil 5.25 : Kapalı döngü zaman cevapları (a) Farklı kesirli integral derecesi (λ) değerleri için (b) Farklı kazanç payı (A) değerleri için (c) Farklı faz payı (ϕ) değerleri için.

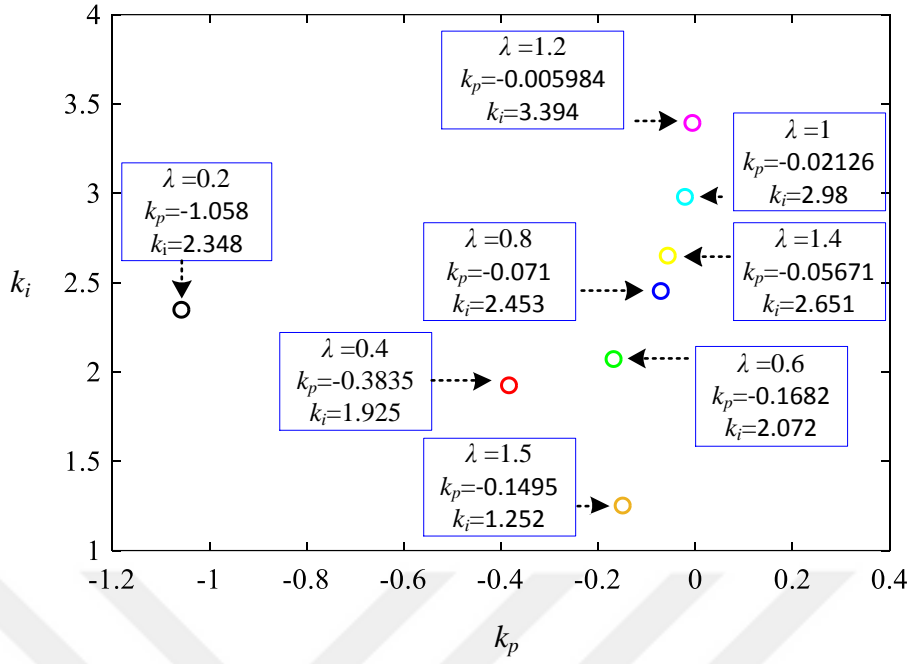
Şekil 5.25(a-c)'de sistemi kararlı yapan sabit kontrolör parametreleri kullanılarak farklı integral derecesi, kazanç payı ve faz payı değerleri için elde edilen birim basamak cevapları verilmiştir. Şekil 5.25 (a)'da sabit $A = 1$, $\phi = 0^\circ$ değerlerinde kararlı kontrolör parametreleri $k_p = 1.5$ ve $k_i = 4$ değerleri kullanılarak farklı integral derecelerine ait birim basamak cevapları verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere λ değerinde meydana gelen artışın sistemin aşma miktarını azalttığı fakat yerleşme süresini uzattığı

görülmektedir. Şekil 5.25 (b)'de sabit $\lambda = 0.9$, $\phi = 0^\circ$ değerlerinde kararlı kontrolör parametreleri $k_p = 1$ ve $k_i = 4$ değerleri için farklı kazanç payı değerlerine ait birim basamak cevapları verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere A değerinde meydana gelen artışın sistemin aşma miktarını arttırdığı fakat yerleşme süresini azaltarak daha iyi cevap verilmesini sağladığı görülmektedir. Şekil 5.25 (c)'de sabit $\lambda = 0.9$, $A = 1$ değerlerinde kararlı kontrolör parametreleri $k_p = 0.2$ ve $k_i = 1$ değerleri kullanılarak için farklı faz payı değerlerine ait birim basamak cevapları verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere ϕ değerinde meydana gelen artışın sistemin aşma miktarını arttırdığı gözlemlenmektedir.

Şekil 5.26'da $\lambda = 1$ için kazanç payı $A = 2$ (dolayısıyla $\phi = 0^\circ$) olan ve faz payı $\phi = 45^\circ$ (dolayısıyla $A = 1$) olan iki eğri görülmektedir. İki eğrinin kesiştiği nokta kazanç payı $A = 2$ ve faz payı $\phi = 45^\circ$ olan kontrolör değerlerini bize vermektedir. Dolayısıyla tam sayı dereceli PI kontrolör, $k_p = -0.02126$ ve $k_i = 2.98$ parametre değerleri için başlangıçta arzu edilen kazanç ve faz payı değerlerini sağlayan bir kontrolör olarak tasarlanmış olmaktadır. Bununla birlikte, kesir dereceli PI kontrolörde λ değeri 0'dan 2'ye kadar değişebileceği için farklı kesir derecelerinde istenilen kazanç ve faz payını sağlayan kontrolör parametreleri ise Şekil 5.27'de görülmektedir. Kesir dereceli kontrolör kullanmanın bir avantajı olarak aynı kazanç ve faz payını sağlayan çok sayıda kontrolör tasarımcının seçim alanı içinde bulunacaktır. Tasarımcının her bir kontrolör için zaman cevaplarına da bakarak istediği kontrolörü seçme esnekliğine sahip olması büyük bir avantaj sağlayacaktır.



Şekil 5.26 : $A = 2$ kazanç payı ve $\phi = 45^\circ$ faz payına sahip olan PI kontrolör parametrelerinin elde edilmesi.



Şekil 5.27 : Çeşitli λ değerleri için, $A = 2$ kazanç payı ve $\phi = 45^\circ$ faz payına sahip olan PI^λ kontrolör parametrelerinin elde edilmesi.

6. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİNE SAHİP KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLERİN DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ

6.1 Giriş

Kontrol sistem tasarımında çoğunlukla sistemin nominal modeli göz önüne alınarak işleme başlanır. Bununla birlikte, gerçek sistemin davranışı neredeyse her zaman modelin davranışından farklıdır. Çünkü mühendislik sistemlerinde matematiksel olarak modelleme yapılırken çevresel faktörler, fiziksel parametrelerdeki değişiklikler ve parça üretim toleransları gibi sistem parametrelerini etkileyen birçok faktör bulunduğundan elde edilen model hiçbir zaman sistemin davranışını tam olarak tanımlayamamaktadır. (Matuš, 2008). Tasarlanan bir kontrolörün sistemde meydana gelebilecek bu tür değişikliklerle başa çıkabilmesi gerekmektedir. Bir kontrol sisteminin bu yeteneği *dayanıklılık (robustness)* olarak bilinir. Dolayısıyla dayanıklı kontrol, çeşitli türden belirsizliklere sahip sistemlerin kontrolünü ifade eder. Dayanıklı kontrol problemi, belirsizliğin varlığında kabul edilebilir performansı garanti eden sabit tek bir kontrolör tasarlamaktır. Dayanıklı kontrolün olmadığı ortamlarda sistem parametrelerindeki her değişim için kontrolörün yeniden tasarlanarak kontrol sistemine dahil edilmesi gerekmektedir. Bu durum maliyet, zaman kaybı ve performans düşmesi gibi sorunları beraberinde getirmektedir. Kontrol sistemlerindeki belirsizlikler genel olarak yapılandırılmış ve yapılandırılmamış belirsizlikler olmak üzere iki kategori altında sınıflandırılabilir (Tan, 1999). Parametrik belirsizlik olarak da adlandırılan yapılandırılmış belirsizlik, sistem parametreleri hakkında bilginin kesin veya hassas olarak bilinmediği durumları ifade eder. Bu belirsizlik türünde sistemin genel matematiksel modeli bilinir ancak model parametrelerinde belli aralıklarda değişimler söz konusudur. Parametrik olmayan belirsizlik olarak da adlandırılan yapılandırılmamış belirsizlik ise modellenmemiş dinamikleri, yüksek frekans modlarının ihmal edilmesi, doğrusal olmayan durumları ve doğrusallaştırmadan kaynaklanan hataları ifade etmektedir. Bununla birlikte, bir sistem modelinde hem parametrik hem de parametrik olmayan belirsizlikler birlikte bulunabilir. Karışık belirsizlik olarak adlandırılan bu durum dayanıklı kontrolün en zor kısmını ifade eder (Bhattacharyya ve diğ, 1995; Sanchez-Pena ve Sznaier, 1998; Tan ve Atherton, 2002).

1970'li yıllardan itibaren parametre belirsizliği içeren sistemler kontrol sistem araştırmacılarının dikkatini çekmeye başlamış, birçok araştırmacı parametrik belirsizlik altındaki sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi ve dayanıklı kontrolör tasarımı üzerine çalışmalara başlamıştır (Ackermann ve diğ, 1993; Barmish, 1994; Bhattacharyya ve diğ, 1995; Djaferis, 1995). Kharitonov teoremi (Kharitonov, 1979) bu alandaki gerçek bir dönüm noktası olmuştur. Bu teorem; aralıklı bir polinomun dayanıklı kararlılığını özel olarak dört tane polinomun kararlılığının test edilmesiyle belirlenebileceğini kanıtlamaktadır. Daha sonra, birçok araştırmacı, daha karmaşık belirsizlik içeren yapılar için bir dizi yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemler kenar teoremi (Bartlett ve diğ, 1988), Genelleştirilmiş Kharitonov teoreminin bir sonucu olan otuz iki kenar teoremi (Chapellat ve Bhattacharyya, 1989), on altı sistem teoremi (Barmish ve diğ, 1992) ve haritalama/mapping teoremi (Barmish ve Jury, 1994; Bhattacharyya ve diğ, 1995; Zadeh ve Desoer, 1963) vb. şeklinde sıralanabilir. Kenar teoremi sadece doğrusal belirsizlik yapıları için kullanılabilir. Bu teoreme göre, doğrusal belirsizlik yapısına sahip polinom ailesinin tüm etkin kenarları kararlı ise tüm aile kararlıdır. Çoklu doğrusal ve polinom belirsizlik yapılarına sahip polinom aileleri için uç noktalara veya kenarlara dayalı yöntemler işe yaramamaktadır. Çoklu doğrusal belirsiz sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için mapping/haritalama teoremi kullanılırken, polinom belirsizlik yapıları için değer kümesi kavramının sıfırın dışlanma koşulu ile birlikte kullanılması önerilmektedir (Matuşu ve diğ, 2017). Belirsiz parametrelili polinomların değer kümesinden sıfırın hariç tutulması hesabına dayalı dayanıklı kararlılık analizi her parametre belirsizliği için kullanılabilen evrensel bir grafiksel yöntemdir (Matuşu, 2008). Sıfırın dışlanma prensibini kullanan değer kümesi yaklaşımı, 1950'lerde polinom aileleri için bir frekans grafiği yöntemi öneren Curtis'e kadar dayanmaktadır. Zaman içinde Zadeh ve Desoer (1963) ve Barmish (1988) tarafından yapılan çalışmalarla bu yaklaşım kontrol tasarımcıları arasında bilini hale gelmiştir (Ackermann, 2002).

Mikhailov kriterinin dayanıklı kararlılık için kullanılabilmesine dair ilk ipucu Kharitonov'un makalesinde ünlü Kharitonov teoreminin (Kharitonov, 1979) kanıtında belirtilmiştir. Mikhailov kararlılık kriterine olan ilgi, dayanıklı kararlılık analizinde Routh-Hurwitz kriterinin düşük performans gösterdiği yerlerde potansiyel uygulaması nedeniyle 1990'lı yıllarda yeniden ortaya çıkmıştır (Fu ve Tsytkin, 1993). Dayanıklı kararlılık analizi için Mikhailov kriterinin ilk doğrudan kullanımı Tsytkin ve Polyak (1991,1992) tarafından yapılan çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmalarda hem nominal

polinomun kararlılığının hem de maksimum dayanıklı kararlılık marjının tek bir değiştirilmiş Mikhailov grafiği kullanılarak elde edilebileceğini gösterdiler.

Bu bölümde öncelikle polinom ailelerinin belirsizlik yapıları tanıtılacak, parametre belirsizliği içeren polinom ailelerinin dayanıklı kararlılık analizi için literatürde sıklıkla kullanılan yöntemler ele alınacaktır. Ele alınan yöntemlerin kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistem ailelerinin dayanıklı kararlılık analizi için uygulanabilirliği ayrı ayrı incelenecektir. Bu bölümün temel amacı, parametre belirsizliği içeren sürekli zamanlı kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizine yönelik frekans çizimlerine dayalı iki farklı yaklaşım sunmaktır. Sunulan yaklaşımın birincisinde parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi, değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi kullanılarak araştırılacaktır. İkincisinde ise parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilecektir. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi üzerine literatürde hiçbir çalışma bulunmadığından dolayı her iki yöntem birbirinin ispatı niteliğinde sunulacaktır.

6.2 Polinom Ailelerinin Belirsizlik Yapıları

Bir sistemin $\mathcal{P}(s)$ karakteristik polinomu, parametre belirsizliği içeren bir polinom olsun ve parametre belirsizliği vektörü $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_m]^T$ ile ifade edilsin. Belirsizlik kümesi/kutusu \mathcal{Q} , \mathbb{R}^m 'de

$$\mathcal{Q} = \left\{ \rho \mid \rho_i \in [\underline{\rho}_i; \overline{\rho}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\underline{\rho}_i$ ve $\overline{\rho}_i$, ρ_i parametresindeki değişimin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Bu durumda,

$$\mathcal{P}(s, \mathcal{Q}) = \{ \mathcal{P}(s, \rho) \mid \rho \in \mathbb{R}^m \} \quad (6.2)$$

kümesine *polinom ailesi* denir. Bu durumda belirsiz parametrelili polinom, ρ belirsizlik vektörüne bağlı olarak daha genel bir şekilde yazılırsa;

$$\mathcal{P}(s, \rho) = \alpha_n(\rho)s^n + \alpha_{n-1}(\rho)s^{n-1} + \dots + \alpha_1(\rho)s + \alpha_0(\rho) \quad (6.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha_i(\rho)$, $i = 1, 2, \dots, n$ polinomun katsayıları olup, ρ belirsizlik vektörüne bağlıdır. Belirsiz parametrelili polinom ailesinin kararlılık analizinde Denklem

6.3'teki polinomun katsayılarının yapısı önemli bir rol oynamaktadır. $\alpha_i(\rho)$ katsayılarının yapısına bağlı olarak dört çeşit belirsiz polinom yapısı vardır (Barmish ve Jury, 1994; Tan, 1999):

1. **Bağımsız Belirsizlik Yapısı:** Denklem 6.3'teki her bir $\alpha_i(\rho)$ katsayısı $\alpha_0(\rho) = \rho_0$, $\alpha_1(\rho) = \rho_1, \dots, \alpha_n(\rho) = \rho_n$ gibi yalnızca tek bir parametreye bağlıysa, bu polinom türü bağımsız belirsizlik yapısına sahip bir polinomdur. Bu polinomlar aynı zamanda aralık polinomlar (interval polynomials) olarak da adlandırılırlar. Örneğin;

$$\mathcal{P}(s, \rho) = \rho_2 s^2 + \rho_1 s + \rho_0 \quad (6.4)$$

polinomu bağımsız (aralık) belirsizlik yapısını içermektedir. Aralık belirsizlik yapısına sahip polinomların değer kümesi bir kutudur.

2. **Afin (İlişkili) Doğrusal Belirsizlik Yapısı:** Bu belirsizlik yapısında, Denklem 6.3'te verilen $\mathcal{P}(s, \rho)$ belirsiz polinom ailesinin $\alpha_i(\rho)$ katsayısı belirsiz parametrelerin doğrusal fonksiyonudur. Örnek olarak aşağıdaki polinom verilebilir:

$$\mathcal{P}(s, \rho) = (\rho_1 + \rho_3)s^2 + (2\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 + 5)s + (\rho_2 + \rho_3) \quad (6.5)$$

Bu tür polinomlar aynı zamanda politopik polinom ailesi olarak da bilinmektedir. Afin belirsizlik yapısına sahip polinomların değer kümeleri dışbükey çokgenlerdir.

3. **Çoklu Doğrusal (Multilinear) Belirsizlik Yapısı:** Denklem 6.3'te verilen $\mathcal{P}(s, \rho)$ belirsiz polinomunda eğer her bir $\alpha_i(\rho)$ katsayısı aşağıdaki gibi belirsiz parametrelerin çoklu fonksiyonu ise çoklu doğrusal belirsizlik yapısı vardır denir. Örnek olarak aşağıdaki polinom verilebilir.

$$\mathcal{P}(s, \rho) = 5\rho_1\rho_2\rho_3s^2 + (3\rho_1\rho_2 - \rho_3)s + (4\rho_2\rho_3 + 2\rho_1\rho_2\rho_3) \quad (6.6)$$

4. **Doğrusal olmayan (Polinom) Belirsizlik Yapısı:** $\mathcal{P}(s, \rho)$ belirsiz polinomun $\alpha_i(\rho)$ katsayıları belirsiz parametrelerin doğrusal olmayan fonksiyonları ise bu durumda polinom belirsizlik yapısı vardır denir. Örnek olarak aşağıdaki polinom yapısı verilebilir.

$$\mathcal{P}(s, \rho) = 3\rho_1\rho_3 - (5\rho_1\rho_2 + \rho_2^3)s + \rho_1^2s^2 \quad (6.7)$$

Parametrik belirsizliğe sahip sistemlerin, belirsizlik yapısına göre polinom türleri arasındaki sıralama

Bağımsız (Aralık) \subset Afin (İlişkili) Doğrusal \subset Çoklu Doğrusal (Multilinear)
 \subset Doğrusal Olmayan (Polinom)

şeklinde yazılabilir. Bu sıralamadan anlaşıldığı üzere en basit belirsizlik yapısı, bağımsız belirsizlik yapısı olduğu görülmektedir. Bu dört belirsizlik yapısının tümü için de geçerli olmak üzere, bir polinom ailesi $\mathcal{P}(s, Q)$ verildiğinde, eğer $\mathcal{P}(s, Q)$ 'daki her polinom kararlı ise o zaman $\mathcal{P}(s, Q)$ 'nun dayanıklı kararlı olduğu söylenir. Aksine, eğer $\mathcal{P}(s, Q)$ 'daki bir veya daha fazla polinom kararsızsa o zaman $\mathcal{P}(s, Q)$ dayanıklı kararlı değildir denir.

6.3 Değer Kümesi Kavramı

Değer kümesi kavramı, parametre belirsizliğine sahip sistemlerin kararlılığını kontrol etmek ve frekans yanıtlarını hesaplamak için dayanıklı kontrolde yaygın olarak kullanılan önemli bir kavramdır. Sabit bir polinom için, polinomun sabit bir frekanstaki görüntüsü kompleks düzlemde bir noktadır. Ancak parametre belirsizliğine sahip bir polinom ailesinin sabit bir frekanstaki görüntüsü noktalar kümesidir. Bu kümelere değer kümeleri ya da değer setleri denilmektedir. $\mathcal{P}(s, \rho)$ 'nin, Denklem 6.3 ile tanımlanan belirsiz parametrelili bir polinom ailesi olduğunu varsayalım ve sabit bir frekansta $\omega \in \mathbb{R}$ değer kümesi,

$$\mathcal{P}(j\omega, Q) = \{\mathcal{P}(s, \rho) | \rho \in Q\} \quad (6.8)$$

şeklinde ifade edilir. Başka bir deyişle, $\mathcal{P}(j\omega, Q)$, Q 'nun $\mathcal{P}(j\omega, \rho)$ 'deki görüntüsüdür. Pratikte değer kümeleri, $\mathcal{P}(s, Q) = \{\mathcal{P}(s, \rho) | \rho \in Q\}$ ailesinde s yerine $j\omega$ yazıldığı zaman, sabit bir frekans ω değeri için Q kümesi üzerinde ρ belirsiz parametre vektörünün örneklendirilmesi (grid) ile değer kümeleri elde edilir.

6.4 Sıfırın Dışlanma Prensibi

Denklem 6.3'te tanımlanan sürekli zamanlı polinomlar ailesinin değişmez dereceli olduğunu farz edelim ve Q belirsizlik sınırlayıcı küme içinde en az bir kararlı polinoma sahip olsun. Bu durumda sınır geçiş teoremine (Barmish ve Jury, 1994) göre, Denklem 6.3'te verilen $\mathcal{P}(s, \rho)$ belirsiz parametrelili polinom kümesinin dayanıklı kararlı olabilmesi için ancak ve ancak tüm $\omega \geq 0$ frekans değerlerinde, değer kümesi $\mathcal{P}(j\omega, Q)$ 'nin kompleks düzlemin merkezini yani sıfır noktasını içine almaması gerekir. Sıfırın dışlanma prensibi olarak tanımlanan bu durum

$$0 \notin P(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0 \quad (6.9)$$

şeklinde ifade edilir. Sıfırın dışlanma prensibinin geçerliliği oldukça evrenseldir ve kullanımı kapsamlı bir alana sahiptir. Zaman gecikmeli sistemlerden kompleks belirsiz yapıya sistemlere kadar uygulanabilmektedir (Matušů, 2008). Sıfırın dışlanma prensibiyle birleştirilen değer kümesi kavramı, belirsiz parametrelili polinomların dayanıklı kararlılığı analizinde kullanılan etkili bir yöntemdir. Bu, belirsiz bir polinomun değer kümesine orjinin dahil edilmesi veya hariç tutulmasının, değer kümesinin sınırı kullanılarak kontrol edilebilmesi gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, belirsiz bir polinomun değer kümeleri kolaylıkla oluşturulabilir olduğunda böyle bir polinomun analizi de kolay olmaktadır.

6.5 Kharitonov Teoremi

Parametrik belirsizlik altındaki sistemlerin dayanıklı kararlılık analizindeki gerçek dönüm noktası, Kharitonov teoremi ile olmuştur (Kharitonov, 1979). Teoremin batı literatürü tarafından keşfi Barmish (Barmish, 1984; Barmish ve Jury, 1994) ve Bialas'ın (1983) çalışmaları ile gerçekleşmiştir. Kharitonov teoremi, değişmez dereceli bağımsız belirsiz polinom ailesinin dayanıklı kararlılığını bilinmeyen parametrelerin üst ve alt değerleri kullanılarak sadece dört polinomun kararlılığının test edilmesiyle belirlenebileceğini kanıtlamaktadır. Aralık belirsizlik yapısına sahip bir polinomun katsayılarının reel ve kompleks olması durumunda iki şekilde Kharitonov polinomları oluşturulur (Bhattacharyya ve diğ., 1995):

1. *Reel Katsayılı Aralık Belirsizliğine Sahip Polinomlar için Kharitonov Teoremi:*

Aşağıda verilen reel katsayılı bağımsız belirsizlik yapısına sahip bir tam sayı dereceli aralık polinomunu ele alalım.

$$P(s) = \rho_0 + \rho_1 s + \rho_2 s^2 + \rho_3 s^3 + \dots + \rho_n s^n \quad (6.10)$$

Bu polinomun katsayıları $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ parametre belirsizliği yapısında olup, $\rho_0 \in [x_0, y_0], \rho_1 \in [x_1, y_1], \dots, \rho_n \in [x_n, y_n]$ şeklinde ifade edilsin. Burada x_i değerleri belirsizliğin alt sınırını, y_i değerleri ise üst sınırını ifade eder. Bu polinomun her bir katsayısı sadece bir parametreye bağlı olduğundan dolayı bağımsız belirsizlik yapısına sahiptir. Kharitonov teoremine göre, Denklem 6.10'da verilen parametre belirsizliği yapısındaki aralık kümesinin kararlı olabilmesi için Denklem 6.11'de verilen dört Kharitonov polinomunun Hurwitz kararlı olması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
K^1(s) &= x_0 + x_1s + y_2s^2 + y_3s^3 + x_4s^4 + x_5s^5 + y_6s^6 + \dots \\
K^2(s) &= x_0 + y_1s + y_2s^2 + x_3s^3 + x_4s^4 + y_5s^5 + y_6s^6 + \dots \\
K^3(s) &= y_0 + x_1s + x_2s^2 + y_3s^3 + y_4s^4 + x_5s^5 + x_6s^6 + \dots \\
K^4(s) &= y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \dots
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Yukarıdaki dört Kharitonov polinomu aşağıdaki gibi basit bir kural ile kolay bir şekilde oluşturulabilir.

$$\begin{aligned}
K^1 &= - - + + - - \dots \\
K^2 &= - + + - - + \dots \\
K^3 &= + - - + + - \dots \\
K^4 &= + + - - + + \dots
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Denklem 6.10'da verilen aralık polinomun her bir belirsiz parametresi için elde edilecek sonsuz sayıdaki polinom ailesinin kararlılığını incelemeye gerek kalmadan sadece bu dört Kharitonov polinomu test edilerek aralık polinomun kararlılığı hakkında fikir sahibi olunabilir. Bu dört polinomun kararlılığı da Routh-Hurwitz ya da herhangi bir yöntemle test edilebilir. Kharitonov teoremi, aralık belirsizlik yapısına sahip tam sayı dereceli polinomların dayanıklı kararlılık analizi için oldukça önemli sonuçlar sağlamaktadır.

2. Kompleks Katsayılı Aralık Belirsizliğine Sahip Polinomlar için Kharitonov Teoremi:

Aşağıda verilen kompleks katsayılı bağımsız belirsizlik yapısına sahip bir tam sayı dereceli aralık polinomunu ele alalım.

$$P(s) = (\alpha_0 + j\beta_0) + (\alpha_1 + j\beta_1)s + \dots + (\alpha_n + j\beta_n)s^n \tag{6.13}$$

Bu polinomun katsayıları,

$$\alpha_0 \in [x_0, y_0], \alpha_1 \in [x_1, y_1], \dots, \alpha_n \in [x_n, y_n] \tag{6.14}$$

$$\beta_0 \in [z_0, t_0], \beta_1 \in [z_1, t_1], \dots, \beta_n \in [z_n, t_n] \tag{6.15}$$

şeklinde ifade edilsin. Burada x_i ve z_i değerleri belirsizliğin alt sınırlarını, y_i ve t_i değerleri ise üst sınırlarını ifade eder. Denklem 6.13'te verilen kompleks katsayılı aralık polinom ailesinin kararlı olabilmesi için aşağıda verilen 8 tane Kharitonov polinomunun Hurwitz kararlı olması gerekir. Bu durumda Kharitonov polinomları aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\begin{aligned}
K_1^+(s) &:= (x_0 + jz_0) + (x_1 + jt_1)s + (y_2 + jt_2)s^2 + (y_3 + jz_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + jz_4)s^4 + (x_5 + jt_5)s^5 + \dots,
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
K_2^+(s) &:= (x_0 + jt_0) + (y_1 + jt_1)s + (y_2 + jz_2)s^2 + (x_3 + jz_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + jt_4)s^4 + (y_5 + jt_5)s^5 + \dots, \\
K_3^+(s) &:= (y_0 + jz_0) + (x_1 + jz_1)s + (x_2 + jt_2)s^2 + (y_3 + jt_3)s^3 \\
&\quad + (y_4 + jz_4)s^4 + (x_5 + jz_5)s^5 + \dots, \\
K_4^+(s) &:= (y_0 + jt_0) + (y_1 + jz_1)s + (x_2 + jz_2)s^2 + (x_3 + jt_3)s^3 \\
&\quad + (y_4 + jt_4)s^4 + (y_5 + jz_5)s^5 + \dots,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_1^-(s) &:= (x_0 + jz_0) + (y_1 + jz_1)s + (y_2 + jt_2)s^2 + (x_3 + jt_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + jz_4)s^4 + (y_5 + jz_5)s^5 + \dots, \\
K_2^-(s) &:= (x_0 + jt_0) + (x_1 + jz_1)s + (y_2 + jz_2)s^2 + (y_3 + jt_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + jt_4)s^4 + (x_5 + jz_5)s^5 + \dots, \\
K_3^-(s) &:= (y_0 + jz_0) + (y_1 + jz_1)s + (x_2 + jt_2)s^2 + (x_3 + jz_3)s^3 \\
&\quad + (y_4 + jz_4)s^4 + (y_5 + jt_5)s^5 + \dots, \\
K_4^-(s) &:= (y_0 + jt_0) + (x_1 + jt_1)s + (x_2 + jz_2)s^2 + (y_3 + jz_3)s^3 \\
&\quad + (y_4 + jt_4)s^4 + (x_5 + jt_5)s^5 + \dots,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

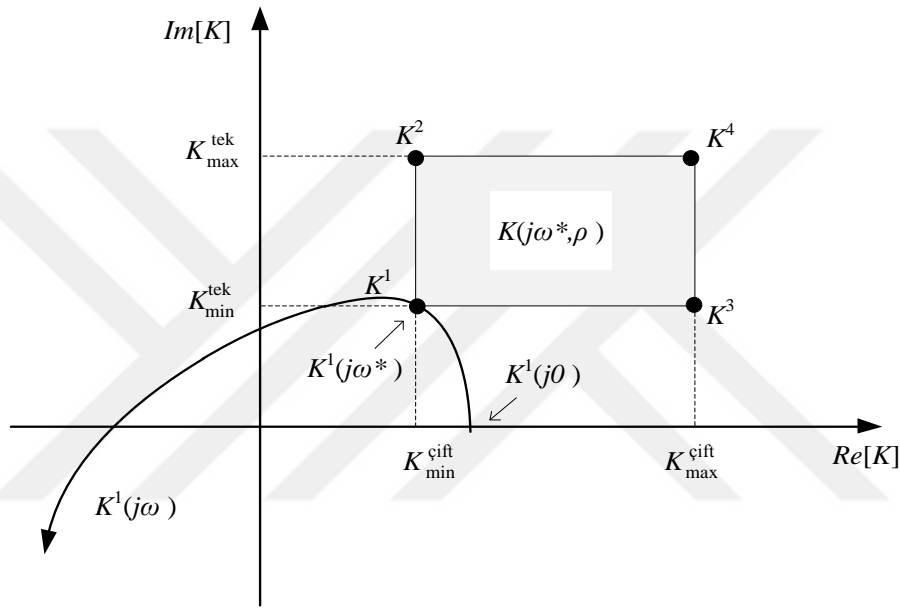
Kharitonov'un orjinal teoreminin kanıtı karmaşıktır ve anlaşılması nispeten zordur (Anagnost ve diğ, 1989; Dasgupta, 1988; Minnichelli ve diğ, 1989). Denklem 6.11'de verilen Kharitonov polinomları; $K_{max}^{cift}(s)$ ve $K_{min}^{cift}(s)$ olmak üzere iki farklı çift ve $K_{max}^{tek}(s)$ ve $K_{min}^{tek}(s)$ olmak üzere iki farklı tek kısımdan oluşmaktadır. Denklem 6.11 yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
K^1(s) &= K_{min}^{cift}(s) + K_{min}^{tek}(s) \\
K^2(s) &= K_{min}^{cift}(s) + K_{max}^{tek}(s) \\
K^3(s) &= K_{max}^{cift}(s) + K_{min}^{tek}(s) \\
K^4(s) &= K_{max}^{cift}(s) + K_{max}^{tek}(s)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
K_{max}^{cift}(s) &= y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + x_6s^6 + y_8s^8 + \dots, \\
K_{min}^{cift}(s) &= x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + y_6s^6 + x_8s^8 + \dots, \\
K_{max}^{tek}(s) &= y_1s + x_3s^3 + y_5s^5 + x_7s^7 + y_9s^9 + \dots, \\
K_{min}^{tek}(s) &= x_1s + y_3s^3 + x_5s^5 + y_7s^7 + x_9s^9 + \dots,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

şeklinde oluşturulur. Denklem 6.10'da verilen aralıklı polinomun sabit bir $s = j\omega^*$ frekansında değer kümesi, kompleks düzlemde ortaya çıkan tüm olası kompleks değerlerin iki boyutlu bir kümesidir ve buna Kharitonov dikdörtgeni de denir. Kharitonov dikdörtgeni, değer kümesinin özel bir türüdür. Şekil 6.1'de, Denklem 6.10'da verilen aralık belirsizliğine sahip polinomun $s = j\omega^*$ frekansında değer kümesinin oluşturduğu Kharitonov dikdörtgeni ve Kharitonov polinomlarından birine ait Mikhailov eğrisi görülmektedir. Dört Kharitonov polinomu, Şekil 6.1'de görüldüğü gibi dikdörtgenin köşelerini oluşturmaktadır.



Şekil 6.1 : Kharitonov dikdörtgeni ve $K^1(s)$ 'in Mikhailov eğrisi.

Genellikle sıfırın dışlanma prensibiyle birlikte değer kümesi kavramı kullanıldığında, Kharitonov teoreminin arkasındaki mantık anlaşılabilir. Bu teoremin temeli aslında Mikhailov kararlılık kriterine dayanmaktadır. Bölüm 4'te de ele alındığı gibi n . dereceden bir doğrusal bir sistemin kararlılığı için gerekli ve yeterli şart verilen sistemin karakteristik denklemi için çizilen Mikhailov eğrisinin pozitif reel eksenden başlayarak saat yönünün tersinde koordinatların orjinini çevreleyerek n ekseni art arda kesmesi gerekir (Popov, 1962). Mikhailov eğrisinin sıfırın dışlanması kuralına göre saat yönünün tersine orjini çevrelememesi ya da orjinden geçmemesi gerekir. Aralık polinomunun sabit bir frekanstaki değer kümesinin, kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgen (Kharitonov dikdörtgeni) olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla dikdörtgen şeklindeki değer kümesinin kenarları reel ve sanal eksene paralel olduğundan, Kharitonov polinomlarına karşılık gelen köşe noktaları kullanılarak orjinin bu dikdörtgenin içinde veya

dışında olduğu kolayca test edilebilir. Kharitonov teoremi sadece aralık belirsiz parametreler için uygulanabilmektedir.

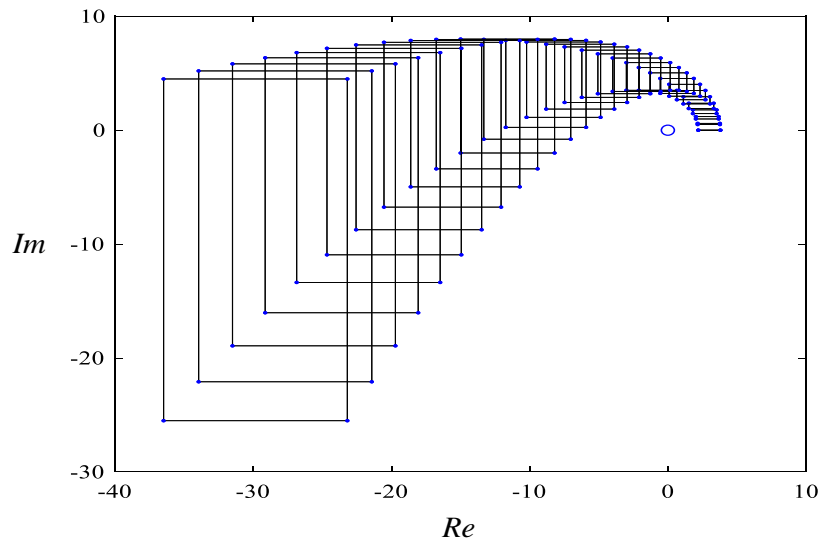
Örnek 6.1: Üçüncü dereceden aralık belirsizlik yapısına sahip bir polinom aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$\mathcal{P}(s, p) = \rho_0 + \rho_1 s + \rho_2 s^2 + \rho_3 s^3 \quad (6.20)$$

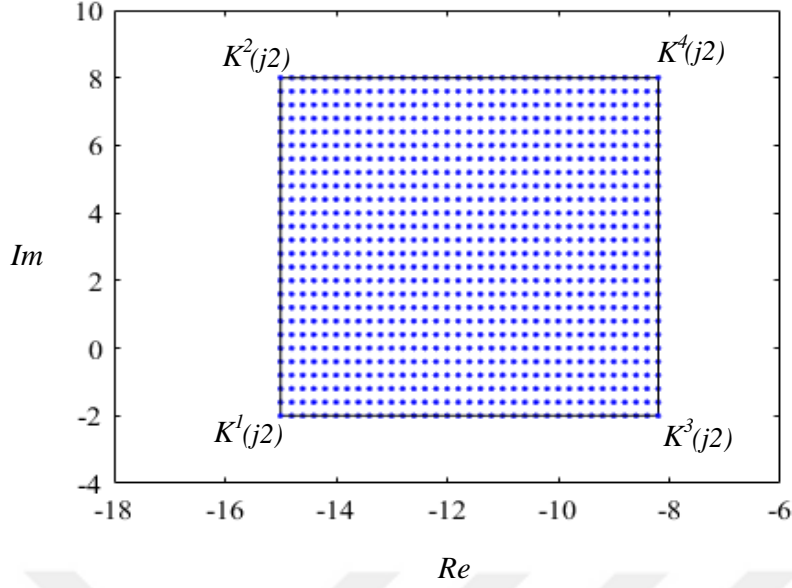
Burada $p_0 \in [2.2, 3.8]$, $p_1 \in [5, 6]$, $p_2 \in [3, 4.3]$ ve $p_3 \in [0.5, 1.5]$ olarak verilsin. Dört Kharitonov polinomu;

$$\begin{aligned} K^1(s, p) &= 2.2 + 5s + 4.3s^2 + 1.5s^3 \\ K^2(s, p) &= 2.2 + 6s + 4.3s^2 + 0.5s^3 \\ K^3(s, p) &= 3.8 + 5s + 3s^2 + 1.5s^3 \\ K^4(s, p) &= 3.8 + 6s + 3s^2 + 0.5s^3 \end{aligned} \quad (6.21)$$

biçiminde elde edilir. Yukarıda verilen dört Kharitonov polinomu kararlı ise Denklem 6.20’de verilen parametre belirsizliğine sahip aralıklı polinomu ailesinin Hurwitz kararlı olduğu sonucuna varılır. $0 \leq \omega \leq 3$ için değer kümeleri Şekil 6.2’de gösterilmiştir. Her bir frekans için değer kümeleri, köşeleri Kharitonov polinomlarına karşılık gelen bir dikdörtgendir. Şekil 6.2’de görüldüğü üzere Kharitonov dikdörtgenleri orjini (sıfır noktasını) kapsamadığından dolayı sistem kararlıdır yorumu yapılır. Ayrıca $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için Denklem 6.20’deki aralık polinomunda her bir katsayı parametresinin belirli adım aralığında elde edilen değer kümesi Şekil 6.3’te verilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümesi Kharitonov dikdörtgenin içinde ve yüzeyinde bulunmaktadır.



Şekil 6.2 : Denklem 6.20’deki aralık polinomun $\omega \in [0,3] \text{ rad/sn}$ aralığında değer kümelerinin oluşturduğu Kharitonov dikdörtgenleri.



Şekil 6.3 : $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için Denklem 6.20'deki aralık polinomun değer kümesi.

6.5.1 Kharitonov teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli polinom ailesine uygulanabilir mi?

Belirsiz parametreye sahip tam sayı dereceli aralıklı bir polinomun dayanıklı kararlılık analizi Kharitonov teoremi kullanılarak gerçekleştirilir. Fakat aralıklı polinomun derecesi kompleks bir sayı olması durumunda Kharitonov teoreminin geçerli olup olmadığını analiz edelim.

Örnek 6.2 : Aşağıda verilen parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli aralıklı bir polinom yapısını ele alalım.

$$P(s, \rho) = \rho_0 + \rho_1 s^{0.4+j0.5} + \rho_2 s^{0.6+j0.2} \quad (6.22)$$

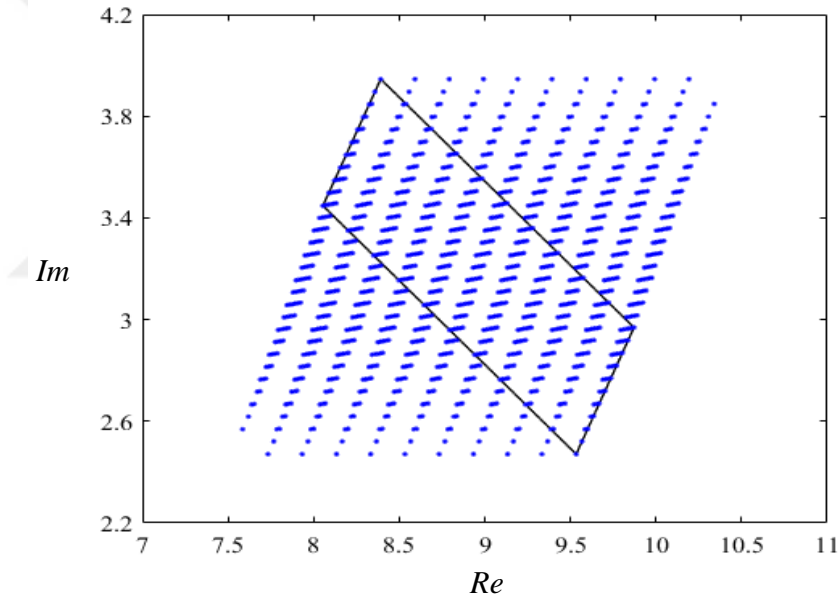
Burada $\rho_0 \in [6, 8]$, $\rho_1 \in [3, 4]$ ve $\rho_2 \in [1, 2]$ olsun. Denklem 6.22'deki polinomda s yerine $j\omega$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} P(j\omega, \rho) = & \rho_0 + \rho_1 \omega^{0.4} \left(\cos\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) \right) (\cos(0.5 \ln(j\omega)) \\ & + j \sin(0.5 \ln(j\omega))) \\ & + \rho_2 \omega^{0.6} \left(\cos\left(\frac{0.6\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{0.6\pi}{2}\right) \right) (\cos(0.2 \ln(j\omega)) \\ & + j \sin(0.2 \ln(j\omega))) \end{aligned} \quad (6.23)$$

elde edilir. Yukarıdaki polinomu reel ve sanal kısımlarına ayırdığımız zaman ρ_1 ve ρ_2 belirsiz parametrelerinin her iki denklemde de bulunduğu görülmektedir. Böyle bir

polinom yapısının, bağımsız belirsizlik yapısına uymadığı görülmektedir. Denklem 6.24'te dört Kharitonov polinomu verilmektedir. Denklem 6.22'nin her bir belirsiz parametresinin değişim aralığında 10 nokta alınarak ve $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için elde edilen 1000 polinomun görüntüsü ve Kharitonov dikdörtgeni Şekil 6.4'te gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi değer kümesi bu dikdörtgenin dışına çıkmaktadır. Bu sebeple Kharitonov teoreminin kompleks dereceli aralık belirsizliğine sahip polinomu aileleri için uygulanabilir olmadığı sonucuna varılmaktadır.

$$\begin{aligned}
 K^1(s) &= 6 + 3s^{0.4+j0.5} + 2s^{0.6+j0.2} \\
 K^2(s) &= 6 + 4s^{0.4+j0.5} + 2s^{0.6+j0.2} \\
 K^3(s) &= 8 + 3s^{0.4+j0.5} + 1s^{0.6+j0.2} \\
 K^4(s) &= 8 + 4s^{0.4+j0.5} + 1s^{0.6+j0.2}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$



Şekil 6.4 : Denklem 6.22'deki kompleks dereceli belirsiz polinom ailesinin $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için dört Kharitonov polinomunun görüntüleri.

6.6 Kenar Teoremi

Kharitonov teoreminin uygulama alanında iki temel kısıtlama ile karşılaşmaktadır.

1. Kharitonov teoreminin uygulama alanı, aralık belirsizlik yapısına sahip tam sayı dereceli polinom aileleri ile sınırlıdır. Aralık belirsizlik yapısına sahip polinomlarda, katsayı fonksiyonlarının bağımsız olarak değiştiği varsayılmaktadır. Yani, hiçbir ρ_i katsayısı başka katsayılar ile etkileşimde bulunmamalıdır. Bu sebepten ötürü

Kharitonov teoremi afin doğrusal, çoklu doğrusal ve polinom belirsizlik yapıları için kullanılamamaktadır.

2. Ayrıca Kharitonov teoremi, kararlılık alanının açık sol yarı düzlemde kesiştiği polinomlara veya sistemlere uygulanabilmektedir. Bilindiği üzere kesir dereceli veya kompleks dereceli sistemlerin kararlılık alanı sadece sol yarı s-düzlemi ile sınırlı değildir. Bu yüzden kompleks dereceli polinom aileleri aralık belirsizlik yapısına sahip olsa dahi Kharitonov teoremi uygulanamamaktadır.

Bir polinom ailesi, her zaman bağımsız aralık yapısına sahip değildir. Belirsiz parametrelerin birbirine doğrusal bir şekilde bağımlı olduğu durumlar da mevcuttur. Bu tür polinom yapıları afin belirsizlik yapısına sahiptir (Bhattacharyya ve diğ, 1995). Kompleks düzlemde böyle bir polinomun değer kümesi bir poligondur. Bu yüzden bu polinomların belirsiz parametre sayısına bağlı olarak köşe polinomları ve etkin kenarları parametre düzleminde çokgenler şeklinde bir belirsizlik kümesi oluştururlar. Kenar teoremi, afin doğrusal belirsizlik yapısına sahip polinom aileleri için kullanılmaktadır. Kenar teoremi için “ m ” tane belirsiz parametre içeren bir belirsiz polinomda, parametre düzlemindeki belirsizlik kutusu 2^m tane köşeye, $2^{(m-1)}x(2^m - 1)$ tane kenara ve bu kenarların içerisinde $mx2^{(m-1)}$ tane etkin kenara sahiptir. “ m ” tane belirsiz parametre içeren bir polinom kümesinin kararlı olabilmesi için $mx2^{(m-1)}$ tane etkin kenarın kararlı olması gerekmektedir (Bartlett ve diğ, 1988). Belirsiz parametrelerin alt ve üst değerleri kullanılarak $P(s)$ 'in tüm 2^m köşe noktası polinomları Denklem 6.25'teki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 k_1(s) &= \underline{\rho}_0 s^{\alpha_0} + \underline{\rho}_1 s^{\alpha_1} + \underline{\rho}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{\rho}_n s^{\alpha_n} \\
 k_2(s) &= \overline{\rho}_0 s^{\alpha_0} + \underline{\rho}_1 s^{\alpha_1} + \underline{\rho}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{\rho}_n s^{\alpha_n} \\
 k_3(s) &= \underline{\rho}_0 s^{\alpha_0} + \overline{\rho}_1 s^{\alpha_1} + \underline{\rho}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{\rho}_n s^{\alpha_n} \\
 k_4(s) &= \overline{\rho}_0 s^{\alpha_0} + \overline{\rho}_1 s^{\alpha_1} + \underline{\rho}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{\rho}_n s^{\alpha_n}
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$k_{2^m}(s) = \overline{\rho}_0 s^{\alpha_0} + \overline{\rho}_1 s^{\alpha_1} + \overline{\rho}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \overline{\rho}_n s^{\alpha_n}$$

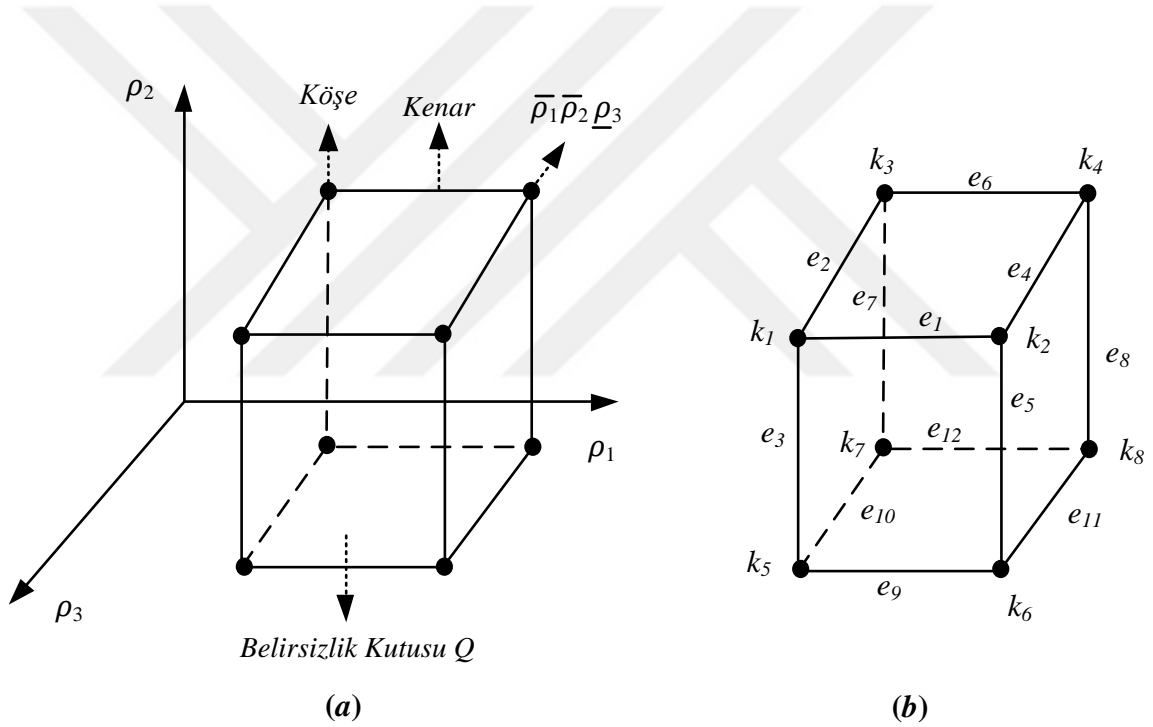
Bu köşe polinomları kullanılarak etkin kenarlar elde edilebilir. $k_1(s)$ ile $k_2(s)$ köşe polinomlarına baktığımız zaman ρ_0 parametresi dışında diğer parametrelerin aynı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $k_1(s)$ ile $k_2(s)$ köşe polinomları arasındaki bu fark, iki köşeyi birbirine bağlayan bir kenarın mevcut olduğunu gösterir. Bir etkin kenar şöyle ifade edilebilir.

$$e(k_1, k_2) = (1 - \lambda)k_1(s) + \lambda k_2(s) \quad (6.26)$$

Burada $\lambda \in [0,1]$ 'dir. Benzer şekilde diğer etkin kenarlarda bu şekilde oluşturulabilir. Tüm etkin kenarları içeren küme aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_E(s) &= \{e_1, e_2, \dots, e_{m2^{m-1}}\} \\ &= \{(1 - \lambda)k_1(s) + \lambda k_2(s), (1 - \lambda)k_1(s) \\ &\quad + \lambda k_3(s), \dots, (1 - \lambda)k_{2^{m-1}}(s) + \lambda k_{2^m}(s)\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Örneğin 3 tane parametre belirsizliğine sahip bir polinomun; Şekil 6.5(a)'da parametre uzayındaki belirsizlik kutusu ve Şekil 6.5(b)'de ise köşe polinomları ile etkin kenarlar arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere bu polinom; $2^3 = 8$ tane köşe polinoma ve $3 \times 2^2 = 12$ tane etkin kenara sahiptir.



Şekil 6.5 : 3 tane parametre belirsizliğine sahip bir polinomun; (a) parametre uzayındaki belirsizlik kutusu (b) köşe polinomları ile etkin kenarlar arasındaki ilişki.

Denklem 6.3'te verilen polinomun $s = j\omega$ 'da değer kümesinin sınırları,

$$\partial\mathcal{P}(j\omega, \rho) \subset \mathcal{P}_E(j\omega) \quad (6.28)$$

şartını sağlamalıdır. Burada ∂ sınırları göstermektedir. \mathcal{P}_E ise Denklem 6.27'de tanımlanmıştır. Denklem 6.3'te verilen polinomun $s = j\omega$ 'da değer kümesinin sınırları etkin kenarların görüntüsünden elde edilebilir. Böylece bütün ω 'ler için $\partial\mathcal{P}(j\omega, p) \subset$

$\mathcal{P}_E(j\omega)$ yazılabilir. Denklem 6.28'den de anlaşıldığı üzere $\mathcal{P}(s, \rho)$ polinomunun değer kümesinin sınırları, etkin kenarlar kümesi $\mathcal{P}_E(s)$ 'nin içerisinde yer almaktadır. $\mathcal{P}_E(s)$ konveks bir poligonudur. Böylelikle $\mathcal{P}(s, \rho)$ polinomunun kararlılığını belirlemek için etkin kenarların kararlılığını test etmek yeterlidir. $\mathcal{P}_E(s)$ 'nin kararlılığı, $\mathcal{P}(s, \rho)$ polinomunun kararlılığını garantiler. Sıfırın dışlanma prensibi değer kümesi kavramıyla birlikte kullanarak; Denklem 6.3'te tanımlanan $\mathcal{P}(s, \rho)$ polinom en az bir kararlı polinoma sahipse ve tüm frekans değerlerinde $\mathcal{P}_E(s)$ 'nin kenarları orijini yani sıfır noktasını içermiyor ise dayanıklı kararlıdır denir (Bhattacharyya ve diğ., 1995).

6.6.1 Kenar teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli polinom ailesine uygulanabilir mi?

Örnek 6.3 : Aşağıdaki gibi kompleks dereceli bir aralık polinom ailesi verilsin.

$$\mathcal{P}(s, \rho) = \rho_0 + \rho_1 s^{0.6+j0.4} + \rho_2 s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \quad (6.29)$$

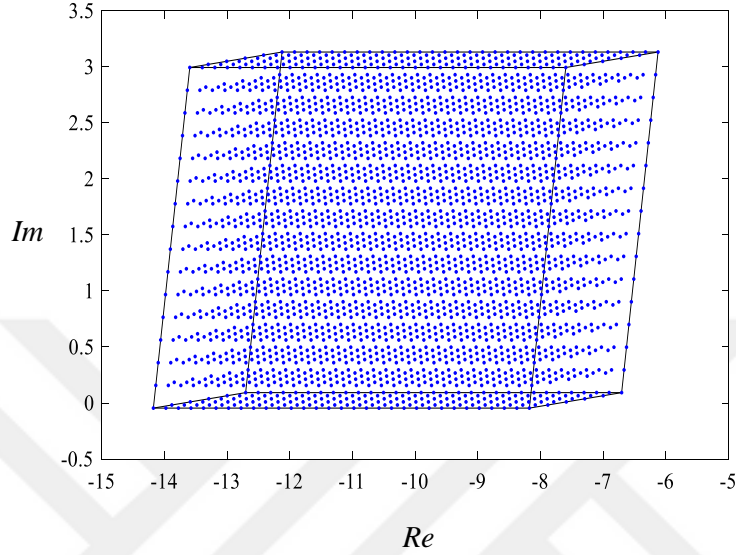
Burada $\rho_0 \in [8, 14]$, $\rho_1 \in [7, 10]$ ve $\rho_2 \in [0.5, 1.5]$ olsun. Kompleks dereceli polinom ailesi 3 tane belirsiz parametreye sahiptir. $2^3 = 8$ tane köşe polinoma ve $3 \times 2^2 = 12$ tane etkin kenara sahiptir. Köşe polinomları Denklem 6.30'da, etkin kenarlar kümesi ise Denklem 6.31'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} k_1(s) &= 8 + 7s^{0.6+j0.4} + 0.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_2(s) &= 14 + 7s^{0.6+j0.4} + 0.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_3(s) &= 8 + 10s^{0.6+j0.4} + 0.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_4(s) &= 14 + 10s^{0.6+j0.4} + 0.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_5(s) &= 8 + 7s^{0.6+j0.4} + 1.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_6(s) &= 14 + 7s^{0.6+j0.4} + 1.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_7(s) &= 8 + 10s^{0.6+j0.4} + 1.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \\ k_8(s) &= 14 + 10s^{0.6+j0.4} + 1.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\mathcal{P}_E(s) = \left\{ \begin{array}{l} e(k_1(s), k_2(s)), e(k_1(s), k_3(s)), e(k_1(s), k_5(s)) \\ e(k_2(s), k_4(s)), e(k_2(s), k_6(s)), e(k_3(s), k_4(s)) \\ e(k_3(s), k_7(s)), e(k_4(s), k_8(s)), e(k_5(s), k_6(s)) \\ e(k_5(s), k_7(s)), e(k_6(s), k_8(s)), e(k_7(s), k_8(s)) \end{array} \right\} \quad (6.31)$$

Kenar teoremine göre, Denklem 6.29 ile verilen kompleks dereceli aralık polinomun değer kümesi, sabit $\omega = \omega^*$ frekansında Denklem 6.31 ile verilen etkin kenarların oluşturduğu

görüntüleriyle sınırlanır. Her bir belirsiz parametrenin 0.2 adım aralıklarla örnekleme (grid) ile $\omega = 3 \text{ rad/sn}$ için Denklem 6.29'da verilen polinom ailesinin değer kümesi Şekil 6.6'da noktalar halinde gösterilmiştir. Şekilde, $\omega = 3 \text{ rad/sn}$ için değer kümesinin etkin kenarlar kümesi tarafından sınırlandırıldığı açıkça görülmektedir.



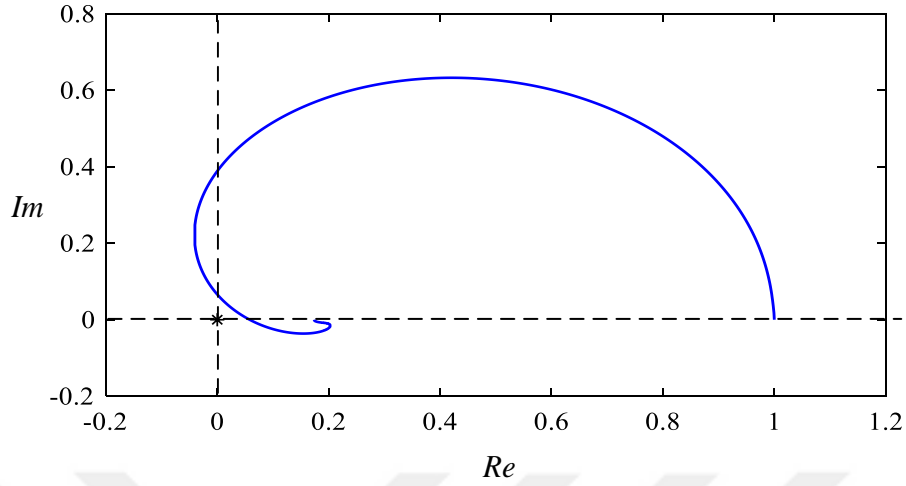
Şekil 6.6 : Denklem 6.29'un $\omega = 3 \text{ rad/sn}$ 'deki değer kümeleri ve etkin kenarların görüntüsü.

Sıfırın dışlanma prensibine göre Denklem 6.29 ile verilen belirsiz parametrelili polinom ailesinin en az bir tane kararlı polinoma sahip olması gerekmektedir. Verilmiş olan belirsiz polinom ailesinin bir elemanı Denklem 6.32'deki gibidir.

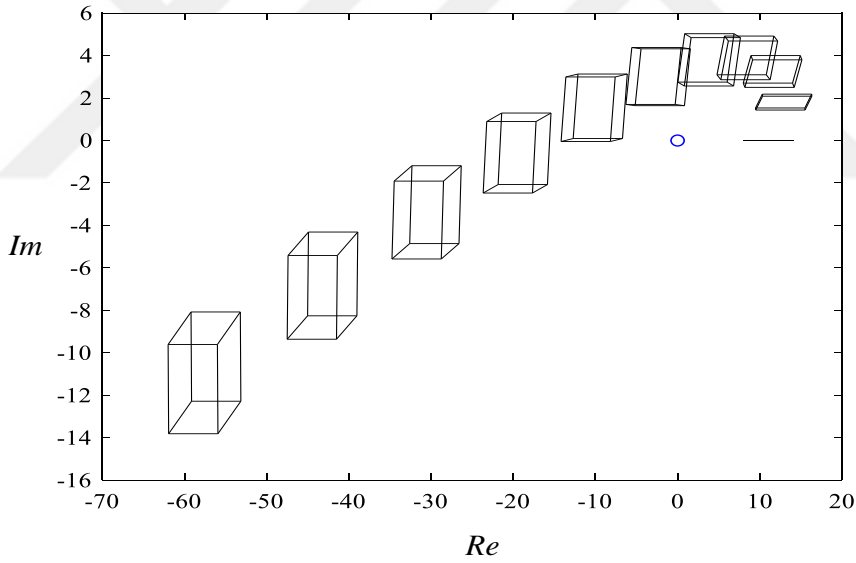
$$\mathcal{P}(s, \rho) = 12 + 9s^{0.6+j0.4} + 0.5s^{1.5+j0.8} + 2s^{2.2} \quad (6.32)$$

Denklem 6.32'de verilen polinomun kararlılığını test etmek için Bölüm 4'te anlatılan GD Mikhailov kararlılık kriterinden faydalanabiliriz. Referans polinom $w_r(s) = 2(s + 5)^{2.2}$ formunda seçilerek, rasyonel fonksiyonun $0 \leq \omega < \infty$ aralığında çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrisi Şekil 6.7'de verilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere eğri kompleks düzlemin merkezini kapsamadığından dolayı Denklem 6.32'de verilen polinom kararlıdır denir. Dolayısıyla verilmiş olan belirsiz parametrelili kompleks dereceli polinom ailesinin en az bir kararlı elemanı mevcuttur ve polinom ailesinin $\omega \in [0,5] \text{ rad/sn}$ aralığında aralığında 0.5 adım aralıklı frekans değerleri için etkin kenarların görüntüsü Şekil 6.8'de görülmektedir. Şekil 6.8 incelendiğinde tüm frekans değerlerinde $\mathcal{P}_E(s)$ 'nin kenarları orijini yani sıfır noktasını kapsamamaktadır ve ayrıca Denklem 6.29'da verilen

polinom ailesi bir kararlı polinoma sahiptir. Dolayısıyla Denklem 6.29'da verilen belirsiz parametrelili kompleks dereceli polinom ailesi dayanıklı kararlıdır denir.



Şekil 6.7 : Denklem 6.32'de verilen polinomun $0 \leq \omega < \infty$ frekans aralığında GD Mikhailov eğrisi.



Şekil 6.8 : Denklem 6.29'daki polinom ailesinin $\omega \in [0,5]$ rad/sn için değer kümelerini içine alan kenarlar kümesinin görüntüleri.

6.6.2 Kenar teoremi parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için uygulanabilir mi?

Örnek 6.4 : Aşağıda verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesini ele alalım.

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.7+j0.6} - (c + jd)} + \frac{1}{s^{0.7-j0.6} - (c - jd)} \quad (6.33)$$

Burada $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$ ve $d \in [\underline{d}, \bar{d}]$ parametreleri belirsiz parametreler olsun. Bu sistem ailesinin karakteristik denklemi

$$\begin{aligned} P(s) = s^{1.4} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])s^{0.7+j0.6} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])s^{0.7-j0.6} + [\underline{c}, \bar{c}]^2 \\ + [\underline{d}, \bar{d}]^2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

şeklinde yazılabilir. Karakteristik denklemden de görüldüğü üzere belirsiz parametrelerin kareleri mevcuttur. Bu sebepten ötürü Denklem 6.34'te verilen karakteristik denklem polinom belirsizliğine sahiptir. $d = 0$ ve $d \neq 0$ için olmak üzere kenar teoremini her iki durum için uygulayalım.

- $d = 0$ olduğu durumda; $c \in [-1, -0.5]$ aralığında değişsin. Bu sistem ailesinin karakteristik denklemi,

$$P(s) = s^{1.4} - [-1, -0.5]s^{0.7+j0.6} - [-1, -0.5]s^{0.7-j0.6} + [-1, -0.5]^2 \quad (6.35)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda Denklem 6.35'te verilen polinom ailesinde bir tane ($m = 1$) parametre belirsizliği mevcuttur. Kenar teoremine göre bu polinomun ailesi, $2^m = 2^1 = 2$ tane köşeye ve $m \times 2^{(m-1)} = 1 \times 2^0 = 1$ tane etkin köşeye sahip olmalıdır. Bu durumda köşe polinomu c 'nin alt ve üst sınırları kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} k_1(s) = s^{1.4} + 1s^{0.7+j0.6} + 1s^{0.7-j0.6} + 1 \\ k_2(s) = s^{1.4} + 0.5s^{0.7+j0.6} + 0.5s^{0.7-j0.6} + 0.25 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Etkin kenarları içeren küme ise;

$$P_E(s) = \{e(k_1(s), k_2(s))\} \quad (6.37)$$

şeklindedir. Kenar teoremine göre Denklem 6.35'te verilen polinom ailesinin değer kümesi sabit frekans değerinde Denklem 6.37'de tanımlanan etkin kenarların oluşturduğu görüntü kümesi ile sınırlanmalıdır. Yani değer kümesi etkin kenarların oluşturduğu şeklin içinde veya üzerinde olmalıdır. $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ ve $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için $c \in [-1, -0.5]$ aralığından 0.01 adım aralıklı değerler alınarak elde edilen Denklem 6.35'in değer kümesi Şekil 6.9'da noktalar ile gösterilmiştir. Aynı zamanda aynı frekans değerlerinde Denklem 6.36 ve 6.37 kullanılarak elde edilen etkin kenarların görüntüsü de Şekil 6.9'da siyah çizgi halinde görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri etkin kenarların dışına kaymaktadır.

- $d \neq 0$ olduğu durumda $c \in [-0.9, -0.4]$ ve $d \in [-0.9, -0.5]$ aralığında değişsin. Bu sistemin karakteristik denklemi;

$$\begin{aligned}
P(s) = s^{1.4} - ([-0.9, -0.4] - j[-0.9, -0.5])s^{0.7+j0.6} \\
- ([-0.9, -0.4] + j[-0.9, -0.5])s^{0.7-j0.6} + [-0.9, -0.4]^2 \\
+ [-0.9, -0.5]^2
\end{aligned} \quad (6.38)$$

şeklinde yazılabilir. Karakteristik denklemin polinom belirsiz yapıya sahip olduğu görülmektedir ve iki tane ($m = 2$) bilinmeyen parametresi mevcuttur. Kenar teoremi için Denklem 6.33'te verilen polinom ailesi, $2^m = 2^2 = 4$ tane köşeye ve $m2^{(m-1)} = 2 \cdot 2^1 = 4$ tane etkin köşeye sahip olmalıdır. Bu durumda köşe polinomları belirsiz parametrelerin alt ve üst sınırları kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned}
k_1(s) &= s^{1.4} - (\underline{c} - j\underline{d})s^{0.7+j0.6} - (\underline{c} + j\underline{d})s^{0.7-j0.6} + \underline{c}^2 + \underline{d}^2 \\
k_2(s) &= s^{1.4} - (\bar{c} - j\underline{d})s^{0.7+j0.6} - (\bar{c} + j\underline{d})s^{0.7-j0.6} + \bar{c}^2 + \underline{d}^2 \\
k_3(s) &= s^{1.4} - (\underline{c} - j\bar{d})s^{0.7+j0.6} - (\underline{c} + j\bar{d})s^{0.7-j0.6} + \underline{c}^2 + \bar{d}^2 \\
k_4(s) &= s^{1.4} - (\bar{c} - j\bar{d})s^{0.7+j0.6} - (\bar{c} + j\bar{d})s^{0.7-j0.6} + \bar{c}^2 + \bar{d}^2
\end{aligned} \quad (6.39)$$

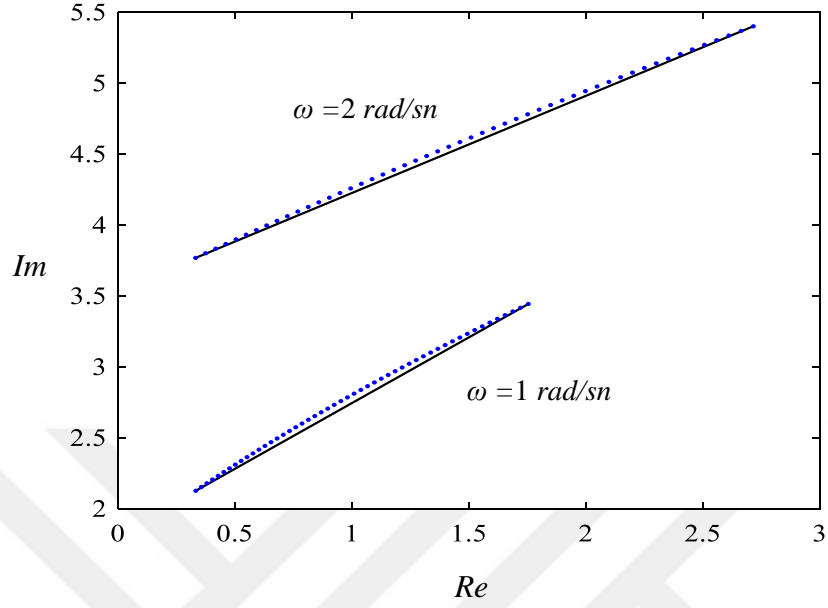
Etkin kenarları içeren küme ise;

$$P_E(s) = \{e(k_1(s), k_2(s)), e(k_1(s), k_3(s)), e(k_2(s), k_4(s)), e(k_3(s), k_4(s))\} \quad (6.40)$$

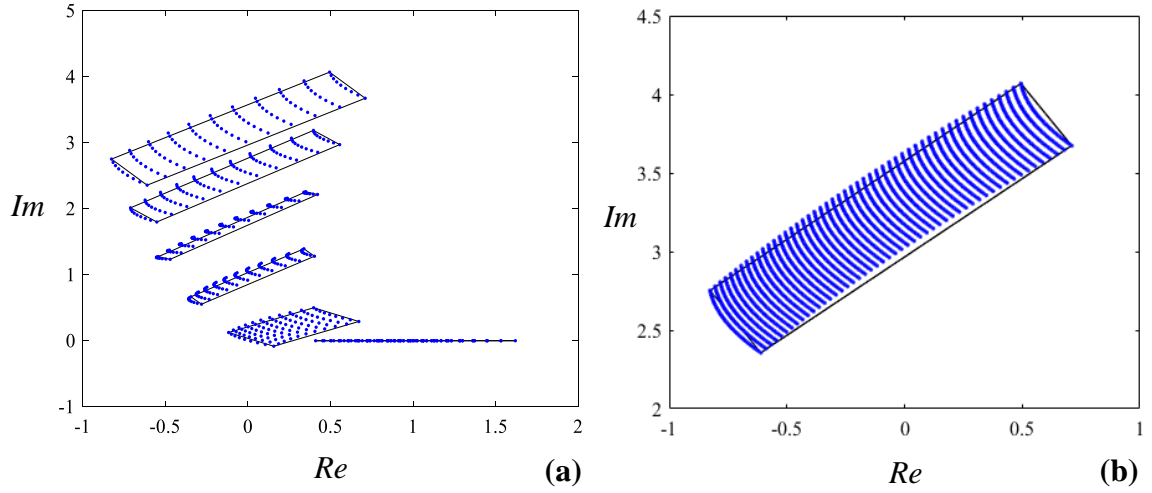
şeklindedir. $\omega \in [0, 1]$ rad/sn arasında 0.2 adım aralıklı alınan frekans değerleri ve $c \in [-0.9, -0.4]$ ve $d \in [-0.9, -0.5]$ parametre aralığından 0.05 adım aralıklarla alınan parametre değerleri için elde edilen Denklem 6.38'in değer kümesi Şekil 6.10(a)'da noktalar ile gösterilmiştir. Aynı frekans değerleri için Denklem 6.39 ve 6.40 tarafından oluşan etkin kenarların görüntüsü de Şekil 6.10(a)'da görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri yine etkin kenarların dışına kaymaktadır. Şekil 6.10(b)'de ise belirsiz parametreler daha yoğun bir şekilde örneklendirilerek $\omega = 1$ rad/sn için ayrıntılı olarak değer kümesi ve köşe polinomlarının oluşturduğu etkin kenarların görüntüsü görülmektedir.

Sonuç olarak Örnek 6.4'ten de görüldüğü üzere, kenar teoremi belirsiz parametreye sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlere uygulanamamaktadır. Çünkü bu sistemlerin karakteristik denklemleri kompleks dereceli sistemlerin aksine polinom belirsizliğine sahiptir. Bu tür polinom ailelerinin köşeleri düz bir kenara sahip olmamaktadır ve değer kümeleri bu kenarların dışına taşabilmektedir. Bu yüzden kenar teoremi ile yapılan dayanıklı kararlılık analizi kararlılığı garantilememektedir. Özetle, kenar teoremi aralık ve afın doğrusal belirsizlik polinom yapısına sahip kesir ve kompleks dereceli polinomu aileleri için kullanılabilir. Fakat, çoklu doğrusal ve polinom belirsizliğine sahip

kompleks dereceli polinom aileleri için kenar teoremi kesin bir sonuç vermediğinden kompleks eşlenik dereceli sistemler için geçerli değildir.



Şekil 6.9 : Denklem 6.35'te verilen polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ ve $\omega = 2 \text{ rad/sn}$ için değer kümesi ve etkin kenarlar kümesinin görüntüsü.



Şekil 6.10 : Denklem 6.38'in değer kümesi ve etkin kenarlar kümesinin görüntüsü (a) $\omega = [0: 0.2: 1] \text{ rad/sn}$ (b) $\omega = 1 \text{ rad/sn}$.

6.7 Parametre Belirsizliğine Sahip Kompleks Eşlenik Dereceli Sistemlerin Dayanıklı Kararlılık Analizi Uygulamaları

Çoklu doğrusal ve polinom belirsizlik yapılarına sahip polinom aileleri için uç noktalara veya kenarlara dayalı yöntemler işe yaramamaktadır. Bunun nedeni, örneğin çoklu doğrusal belirsizliğe sahip polinomlar ailesi için değer kümeleri yalnızca dışbükey değildir, ayrıca değer kümelerinin sınırları yalnızca kenarların görüntülerinden değil, aynı zamanda iç noktaların görüntülerinden de oluşmaktadır. Çoklu doğrusal belirsiz sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için muhtemelen en iyi bilinen yöntem mapping/haritalama teoremidir (Barmish ve Jury, 1994; Bhattacharyya ve diğ., 1995; Zadeh ve Desoer, 1963). Ayrıca, polinom belirsizlik yapısına sahip polinom ailesi için değer kümesi sadece dışbükey değil, aynı zamanda dışa doğru eğriler uç noktaların dışbükey gövdesini oluşturmaktadır. Bu yüzden Q 'nun iç noktalarının da test edilmesi gerekir. Polinom belirsizlik yapısı, her bir polinom derecesi için yeni parametrelerin eklenmesi ile çoklu doğrusal belirsizlik yapısına dönüştürülebilir. Bu teknik aslında yapıyı basitleştirir, ancak parametre sayısını artırır ve belirsizlik sınırlayıcı küme Q 'nun şeklini değiştirir. Dolayısıyla haritalama teoremi hiçbir şekilde kullanılamamaktadır. Bu nedenle, çoklu doğrusal ve polinom belirsizlik yapıları için değer kümesi kavramı ile sıfırın dışlanma prensibinin beraber kullanılması önerilmektedir. Aslında, daha genel ve karmaşık belirsizlik yapıları için tek olasılık budur, çünkü bu polinom yapıları için geçerli bir herhangi bir teorik yöntem bulunmamaktadır. Değer kümesi kavramı evrensel bir yöntem olup polinom belirsizliği yapısına sahip polinomlar için kullanılan tek yöntemdir. Sıfırın dışlanma prensibinin kullanılması için ön koşul, polinom katsayılarının dikkate alınan aralıklarda sürekli fonksiyonlar olması gerektiğidir (Matuš, 2008).

Belirsiz parametre durumunda kompleks eşlenik dereceli sistemlerin karakteristik denklemi, polinom belirsizlik yapısına sahip olmaktadır. Bu nedenle bu sistemlerin belirsiz parametre durumunda kararlılık analizlerinin gerçekleştirilmesi oldukça zordur ve geçerli bir yöntem bulunmamaktadır. Bu bölümde, parametre belirsizliği içeren sürekli zamanlı kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizine yönelik frekans çizimlerine dayalı iki farklı yaklaşım sunulmaktadır. Belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılığı analizi için önerilen yöntemlerin birincisi, değer kümesi kavramı ve sıfırın dışlanma koşulunun kombinasyonuna dayanmaktadır. İkincisi ise GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlıdır. Bilgimiz dahilinde şu ana kadar bu konuda literatürde yapılmış her hangi bir çalışma bulunmamaktadır. Literatürde ilk defa belirsiz

parametreye sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizleri bu tez kapsamında gerçekleştirilmiştir. Her iki yöntemde frekansa dayalı grafik tabanlı bir yöntem olup en basitinden çok karmaşık olanlara kadar çok çeşitli belirsizlik yapıları için uygulanabilmektedir.

6.7.1 Değer kümesinden sıfırın dışlanma prensibine dayalı dayanıklı kararlılık analizi

Transfer fonksiyon gösterimi en genel formu ile aşağıdaki gibi verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesini ele alalım.

$$G(s) = \frac{[\underline{r}, \bar{r}]}{s^{[\underline{q}, \bar{q}]} - [\underline{p}, \bar{p}]} + \frac{\overline{[\underline{r}, \bar{r}]}}{s^{\overline{[\underline{q}, \bar{q}]}} - \overline{[\underline{p}, \bar{p}]}} \quad (6.41)$$

Burada $G(s)$, belirsiz parametrelerin tüm kombinasyonları altında oluşan kompleks eşlenik dereceli sistem ailesini göstermek üzere bu sistem ailesinde $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$, $r \in [\underline{r}, \bar{r}]$ ve $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ aralığında değişen belirsiz parametreler olsun. $[\underline{\cdot}]$, belirsiz parametrenin alt sınırını, $\overline{[\cdot]}$ ise üst sınırını göstermektedir. $\overline{[\underline{\cdot}, \bar{\cdot}]}$ ise belirsiz parametrenin eşleniğini ifade etmektedir. $q, r, p \in \mathbb{C}$ olmak üzere $q = u + jv$, $r = a + jb$ ve $p = c + jd$ ($u > 0$ ve $u, v, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) formunda olsun. Bu durumda \underline{u} , \underline{v} , \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} ve \underline{d} parametreleri sırasıyla u , v , a , b , c ve d belirsiz parametrelerinin alt sınırını ve \bar{u} , \bar{v} , \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} ve \bar{d} ise üst sınırını göstermek üzere $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$, $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$, $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$, $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$ ve $d \in [\underline{d}, \bar{d}]$ aralığında değişsin. Sistem parametreleri daha açık bir biçimde Denklem 6.41'de yerine yazılırsa, parametre belirsizliği içeren kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin en genel transfer fonksiyon formu

$$G(s) = \frac{[\underline{a}, \bar{a}] + j[\underline{b}, \bar{b}]}{s^{[\underline{u}, \bar{u}] + j[\underline{v}, \bar{v}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])} + \frac{[\underline{a}, \bar{a}] - j[\underline{b}, \bar{b}]}{s^{[\underline{u}, \bar{u}] - j[\underline{v}, \bar{v}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])} \quad (6.42)$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu başlık altındaki amacımız, yukarıda transfer fonksiyon gösterimi verilen sistemin parametre belirsizliği içermesi durumunda dayanıklı kararlılık analizini gerçekleştirmek için değer kümesi kavramı ve sıfırın dışlanma prensibine dayalı bir grafiksel yöntem sunmaktır. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin karakteristik denkleminin en genel formu

$$\begin{aligned} P(s) = & s^{2[\underline{u}, \bar{u}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])s^{[\underline{u}, \bar{u}] + j[\underline{v}, \bar{v}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])s^{[\underline{u}, \bar{u}] - j[\underline{v}, \bar{v}]} \\ & + [\underline{c}, \bar{c}]^2 + [\underline{d}, \bar{d}]^2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

biçiminde ifade edilir. Önceki bölümlerde $P(s)$ simgesi tek bir polinoma ait bir karakteristik denklemi ifade ederken, $\mathcal{P}(s)$ ise parametre belirsizliği içeren bir polinom ailesine ait karakteristik denklemi ifade etmektedir. Denklem 6.43'ten, karakteristik polinom ailesinde sadece kompleks eşlenik derece $q = u + jv$ ve katsayı $p = c + jd$ parametrelerinin belirsiz olması sistemin kararlılık durumunu etkilemektedir. Bir polinom ailesinde polinom belirsizlik türü, katsayılar arasındaki ilişki ile belirlenir. Bu durumda katsayı $p = c + jd$ parametresinin belirsiz olması durumunda, Denklem 6.43'ten de görüldüğü üzere $\mathcal{P}(s)$ 'in katsayı fonksiyonunda belirsiz parametrelerin kareleri mevcuttur. Bu yüzden karakteristik denklem, doğrusal olmayan (polinom) belirsizlik yapısına sahip olmaktadır.

Dayanıklı kararlılık analizi için en genel şekli ile belirsizlik kümesi/kutusu $Q \subset \mathbb{R}^m$;

$$Q = \left\{ u, v, a, b, c, d, \mid u_n \in [\underline{u}_n; \overline{u}_n], v_n \in [\underline{v}_n; \overline{v}_n], a_n \in [\underline{a}_n; \overline{a}_n], b_n \in [\underline{b}_n; \overline{b}_n], c_n \in [\underline{c}_n; \overline{c}_n], d_n \in [\underline{d}_n; \overline{d}_n] \quad n = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (6.44)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 6.43'te tanımlanan $\mathcal{P}(s)$ polinom ailesinin değer kümeleri, $\mathcal{P}(s, Q) = \{\mathcal{P}(s, u, v, a, b, c, d) \mid u, v, a, b, c, d \in Q\}$ ailesinde s yerine $j\omega$ yazıldığı zaman, sabit bir frekans ω değeri için Q kümesi üzerinde belirsiz parametre vektörünün örneklendirilmesi (grid) ile değer kümeleri elde edilir. Karakteristik denklem kompleks dereceli bir forma sahip olduğu için s 'nin kompleks gücü için değer kümeleri Denklem 3.31-3.33 kullanılarak elde edilir. Tüm pozitif frekans değerlerinde $\mathcal{P}(s)$ polinom ailesinin değer kümesi $\mathcal{P}(j\omega, Q)$ ancak ve ancak, $0 \notin \mathcal{P}(j\omega, u, v, a, b, c, d)$ şartını sağlaması durumunda $\mathcal{P}(s)$ dayanıklı kararlıdır denir. Başka bir deyişle, değer kümesi kompleks düzlemin merkezini yani sıfır noktasını içermiyor ise ve en az bir tane kararlı polinoma sahip ise Denklem 6.41'de verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem dayanıklı kararlıdır.

Değer kümelerinin görselleştirilmesi, belirsiz parametrelerin uygun bir şekilde örneklenmesine (grid) ve belli bir frekans aralığı için değer kümelerinin ilgili noktaların doğrudan hesaplanmasına dayanmaktadır. Denklem 6.41'de verilen aralıklı polinomun sabit bir $s = j\omega^*$ frekansında değer kümesi, kompleks düzlemde ortaya çıkan tüm olası kompleks değerlerin iki boyutlu bir kümesidir. Bu yöntemin avantajı, yüksek boyutlu bir Q çalışma alanı, her zaman iki boyutlu kompleks düzlem ile eşleşebilmektedir. Bu nedenle, değer kümelerinin oluşturulması grafiksel bir gösterime çok uygundur. Kümeler bir

bilgisayar ortamında çeşitli frekanslar için görselleştirebilir ve kullanıcı, kümeleri görsel olarak inceleyerek parametre belirsizliğine sahip polinomun kararlılığını araştırabilir. Bu tekniğin kullanımı nispeten kolaydır ve gerekli ve yeterli koşulla dayanıklı kararlılık analizi gerçekleştirilmektedir. Değer kümesi kavramı ve sıfırın dışlanması prensibinin kombinasyonuna dayanan grafiksel yöntemin, en basit belirsizlik yapılarından daha karmaşık belirsizlik yapılarına kadar çok çeşitli belirsizlik yapılarına uygulanabilmesi büyük bir avantajdır. Öte yandan, çok sayıda belirsiz parametre için uzun bir hesaplama süresi bir dezavantaj olsa da gelişen bilgisayar teknolojileri ile birlikte bu sorun ortadan kalkmaktadır.

6.7.2 Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı dayanıklı kararlılık analizi

Tüm frekans değerleri için bir polinomun değerini hesaplamak ve bunu kompleks düzlemde çizmek, polinom frekans grafiğini oluşturmaktadır. Bir polinomun frekans grafiğine Mikhailov grafiği denir. Bu grafiğin incelenmesi, polinomun kararlılığı hakkında bilgi verir. Frekans alanına dayalı grafik yöntemlerin kullanılması, kompleks dereceli sistemlerin kararlılık analizini basitleştirmektedir. Mikhailov kararlılık kriteri, sürekli zamanlı tam sayı dereceli sistemler için klasik frekans alanı kararlılık testlerinden biridir. Kompleks dereceli sistemler sonsuz sayıda köke sahip olduklarından dolayı Mikhailov kararlılık kriterini doğrudan bu sistemlere uygulamak zordur. Bu yüzden kompleks dereceli bir polinoma ait GD Mikhailov eğrisi polinomun kararlılığı hakkında daha kolay bir şekilde bilgi vermektedir. Mikhailov kararlılık kriteri ve GD Mikhailov kararlılık kriteri hakkında detaylı bir bilgi Bölüm 4'te verilmiştir.

Bu kısımda, Denklem 6.41'de transfer fonksiyonu verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin dayanıklı kararlılık analizi için GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı bir yöntem önerilmiştir. Belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin Denklem 6.43'te verilen karakteristik denklem ailesinin her bir denklemi bir referans polinoma bölünerek aşağıdaki gibi bir rasyonel fonksiyon ailesi oluşturulur.

$$\Psi(s) = \frac{s^{2[\underline{u}, \bar{u}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])s^{[\underline{u}, \bar{u}] + j[\underline{v}, \bar{v}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])s^{[\underline{u}, \bar{u}] - j[\underline{v}, \bar{v}]} + [\underline{c}, \bar{c}]^2 + [\underline{d}, \bar{d}]^2}{\mathbb{w}_r(s)} \quad (6.45)$$

Burada $\Psi(s)$, polinom ailesine ait rasyonel fonksiyonu; $w_r(s)$ ise polinom ailesine ait referans polinomu ifade etmektedir. Polinom ailesi için bir referans polinom $w_r(s)$ aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_r(s) = (s + \varepsilon)^{2[\underline{u}, \bar{u}]} \quad \varepsilon > 0 \quad (6.46)$$

şeklinde belirlenir. Görüldüğü üzere referans polinom ailesi sadece sistemin kompleks eşlenik derecesinin reel kısmı ($Re(q) = u$) değiştiğinde değişmektedir. Belirsiz parametre kümesinin alt ve üst sınırları aralığında belirli adım aralıklarıyla parametre değerleri alınarak $\omega \in (-\infty, \infty)$ için Denklem 6.45'te verilen rasyonel fonksiyon ailesinin $\Psi(s = j\omega)$ 'nin çizimi birden fazla GD Mikhailov eğrilerinin oluşmasını sağlayacaktır. Belirsiz parametre kümesinin yoğun bir şekilde örneklendirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri tek bir grafik üzerinde birleştirilir. Oluşan tüm GD Mikhailov eğrilerinin sıfırı çevrelemiyor ise belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi dayanıklı kararlıdır denir. Çizdirilen $\Psi(s)$ 'in daha düzgün bir formda belirgin bir şekil oluşturması için ε 'nin büyüklüğü veya küçüklüğü ayarlanabilir. GD Mikhailov kararlılık kriteri kutupsal düzlemde kapalı eğriler sağladığından, sistemin dayanıklı kararlılık analizini basitleştirmektedir. Kararlılık şartının sağlanması için Denklem 6.45'te verilen rasyonel fonksiyon ailesinin Denklem 6.47 ve 6.48'de belirtilen şartları sağlaması gerekir.

$$1. \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Psi(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{P(j\omega)}{w_r(j\omega)} = 1. \quad (6.47)$$

$$2. \Psi(j0) = \frac{P(j0)}{w_r(j0)} > 0. \quad (6.48)$$

Denklem 6.47 ile 6.48'in Bölüm 4'te verilen Denklem 4.24 ve 4.25'ten farkı, belirsiz parametrelerin örneklenmesi ile oluşan tüm kombinasyonların oluşturduğu tüm polinom ailesini kapsamasıdır.

Hatırlatma 6.1: Önerilen birinci yöntemde, sıfırın dışlanma prensibine göre karakteristik denklem ailesinden en az bir polinomun kararlı olma şartı aranmaktadır. Bilindiği üzere Bölüm 4'te kompleks eşlenik dereceli bir sistemin kararlılığı GD Mikhailov kararlılık kriteri ile test edilmektedir. Önerilen ikinci yöntemde ise GD Mikhailov eğrisi, tek bir eğri olmayıp belirsiz parametre kümesinin örneklendirilmesi elde edilen bir eğri ailesi biçimindedir. Yani bu eğri içerisinde en az bir sistemin kararlılık durumunu içermektedir. Ayrıca önerilen her iki yöntem de birbirini ispatlar nitelikte olduğundan dolayı, aşağıda

verilen örneklerde karakteristik denklem ailesinden en az bir polinomunun kararlı olma şartını tekrardan kontrol etme ihtiyacını ortadan kaldırmaktadır.

6.8 Uygulama Örnekleri

Bu kısımda sunulan iki farklı yöntemin geçerliliğini göstermek üzere, aşağıda dört farklı belirsizlik yapısına sahip kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı kararlılık analizi örneği incelenecektir. Birinci örnekte yalnızca p parametresinin reel olarak, ikinci örnekte yine yalnızca p parametresinin hem reel hem de sanal olarak, üçüncü örnekte yalnızca q parametresinin hem reel hem de sanal olarak ve dördüncü örnekte ise hem p ve hem de p parametreleri birlikte olarak hem reel hem de sanal bir şekilde parametrik belirsizliğe sahip durumları için dayanıklı kararlılık incelemesi yapılacaktır.

Örnek 6.5: Transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.5+j0.5} - [\underline{c}, \bar{c}]} + \frac{1}{s^{0.5-j0.5} - \overline{[\underline{c}, \bar{c}]}} \quad (6.49)$$

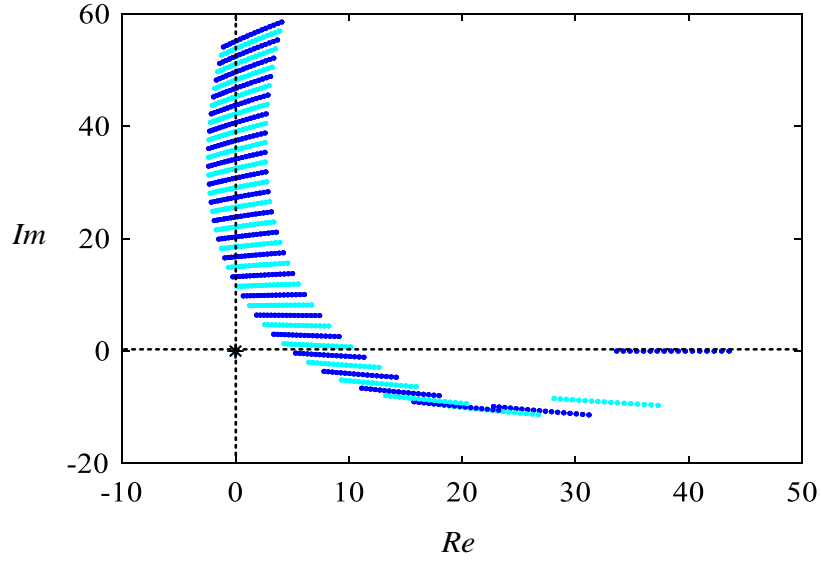
şeklinde verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesini ele alalım. $c \in \mathbb{R}$ olduğu için $\overline{[\underline{c}, \bar{c}]} = [\underline{c}, \bar{c}]$ olur (yani belirsiz parametrenin eşleniği yine kendisine eşit olur). Bu durumda sistem ailesinin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{P}(s) = s - [\underline{c}, \bar{c}]s^{0.5+j0.5} - [\underline{c}, \bar{c}]s^{0.5-j0.5} + [\underline{c}, \bar{c}][\underline{c}, \bar{c}] \quad (6.50)$$

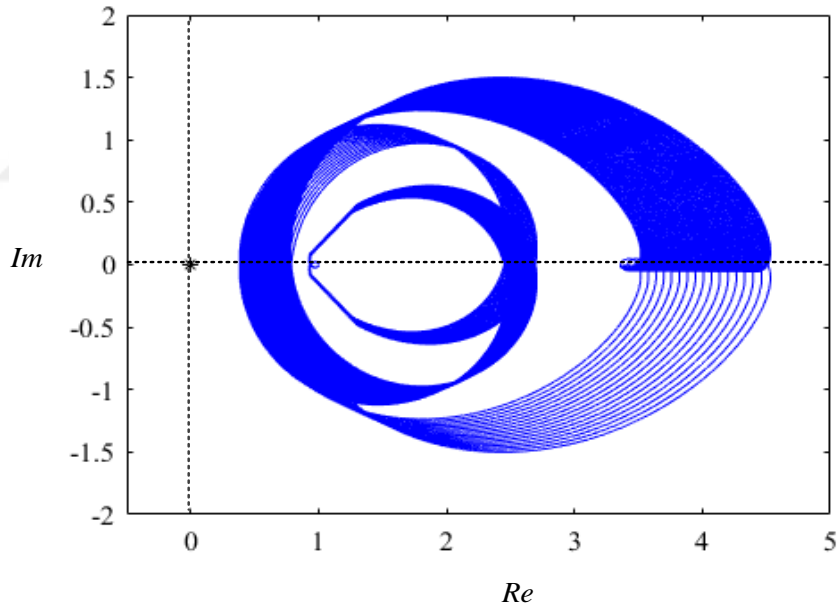
Karakteristik denklemden de görüldüğü üzere $\mathcal{P}(s)$, belirsiz parametrenin karesini içerdiğinden dolayı doğrusal olmayan (polinom) belirsizlik yapısına sahiptir ve sadece tek bir belirsiz parametresi vardır. Bu durumda iki uç noktası $\mathcal{P}(s, \underline{c})$ ve $\mathcal{P}(s, \bar{c})$ olan polinom ailesi elde edilir. Bu polinom ailesinin değer kümesi, $\mathcal{P}(s, \underline{c})$ ve $\mathcal{P}(s, \bar{c})$ 'yi birleştiren bir eğri parçası şeklinde olur. Denklem 6.49'da verilen sistem ailesinin dayanıklı kararlılığını ve dayanıklı kararsızlığını iki farklı belirsiz parametre durumu için analiz edelim.

- Birinci durumda, $c \in [5.8, 6.6]$ aralığında değişsin. Bu durumda sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{P}(s) = s - [5.8, 6.6]s^{0.5+j0.5} - [5.8, 6.6]s^{0.5-j0.5} + [5.8, 6.6][5.8, 6.6] \quad (6.51)$$



Şekil 6.11 : Denklem 6.51’de verilen polinomu ailesinin $\omega \in [0,22]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 6.12 : Denklem 6.51’in $p = [5.8, 6.6]$ aralığında 0.01 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

Karakteristik denklem için $\omega \in [0,22]$ rad/sn arasında 0.5 aralıklarla, sistemin belirsiz parametre aralığında ise 0.05 adım aralıklı parametre değerleri alınarak elde edilen değer kümeleri Şekil 6.11’de gösterilmiştir. Değer kümeleri sıfır noktasını içermediğinden dolayı Denklem 6.51’de incelenen polinom ailesinin dayanıklı bir şekilde kararlı olduğu sonucuna varılır. Dikkat edilirse değer kümeleri $P(s, 5.8)$ ve $P(s, 6.6)$ ’yi birleştiren bir eğri parçası

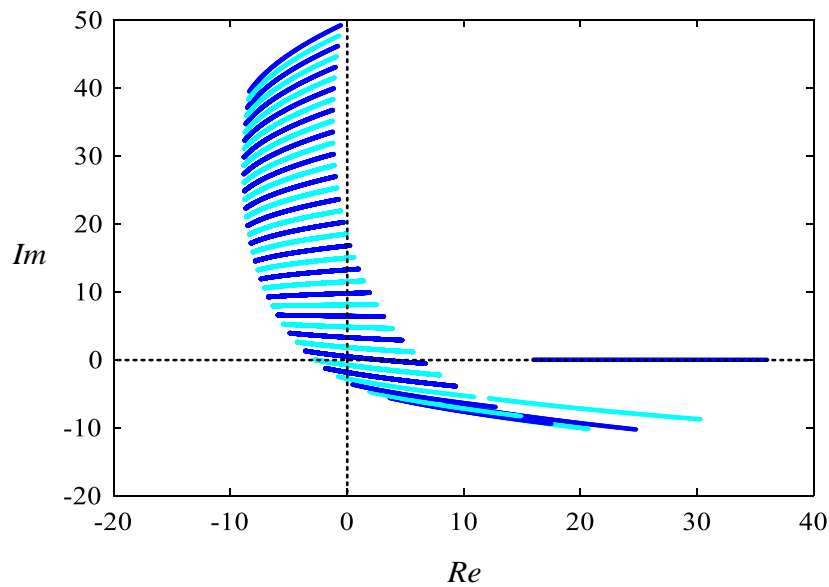
şeklindedir. Belirsiz parametre $[5.8, 6.6]$ aralığından 0.01 adım aralıklarla alınan parametre değerleri için Denklem 6.45'teki rasyonel fonksiyonun ailesinin çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.12'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğri ailesi sıfır noktasını kapsamamaktadır. Bu yüzden $c \in [5.8, 6.6]$ için kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi dayanıklı kararlıdır denir. GD Mikhailov eğrisi ailesi çizdirilirken kullanılan referans polinom aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$w_r(s) = (s + 10) \quad (6.52)$$

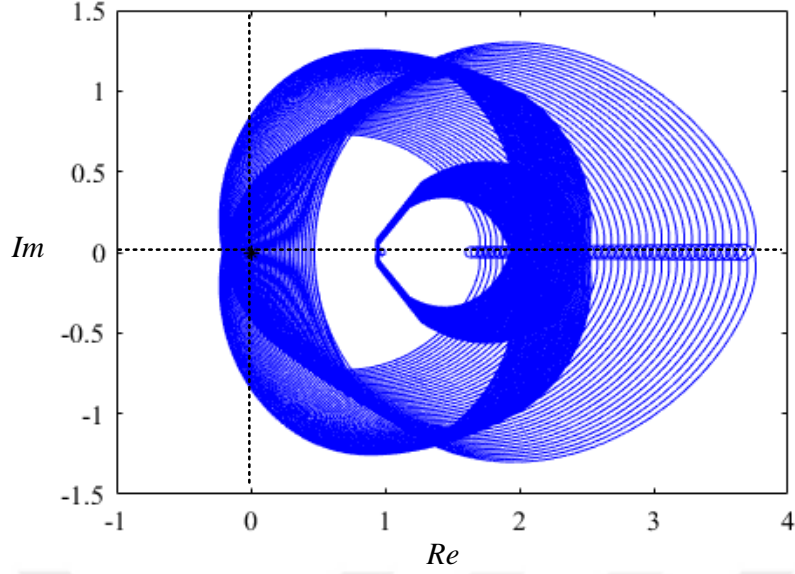
- İkinci durumda belirsiz parametre $c \in [4, 6]$ aralığında değişsin. Bu durumda sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P(s) = s - [4, 6] s^{0.5+j0.5} - [4, 6] s^{0.5-j0.5} + [4, 6][4, 6] \quad (6.53)$$

$\omega \in [0, 20]$ rad/sn arasında 0.5 aralıklarla; sistemin belirsiz parametre aralığında ise 0.01 adım aralıkla parametre değerleri alınarak elde edilen değer kümeleri Şekil 6.13'te gösterilmiştir. Değer kümeleri sıfır noktasını içerdiğinden dolayı Denklem 6.53'te incelenen polinom ailesinin kararsız olduğu sonucuna varılır. Yukarıdaki karakteristik denklemin belirsiz parametre aralığından 0.05 adım aralıklarla alınan parametre değerleri için Denklem 6.52'deki referans polinom kullanılarak rasyonel fonksiyon ailesinin çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.14'te verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsadığından dolayı $c \in [4, 6]$ için Denklem 6.49'da verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi dayanıklı kararlı değildir.



Şekil 6.13 : Denklem 6.53'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0, 20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 6.14 : Denklem 6.53'ün $c \in [4, 6]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

Örnek 6.6 : Transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.632+j0.638} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])} + \frac{1}{s^{0.632-j0.638} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])} \quad (6.54)$$

şeklinde verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesini ele alalım. Bu örnekte belirsiz katsayı parametresi kompleks bir sayı olup iki farklı parametre durumu için sistem ailesinin dayanıklı kararlılığını analiz edelim.

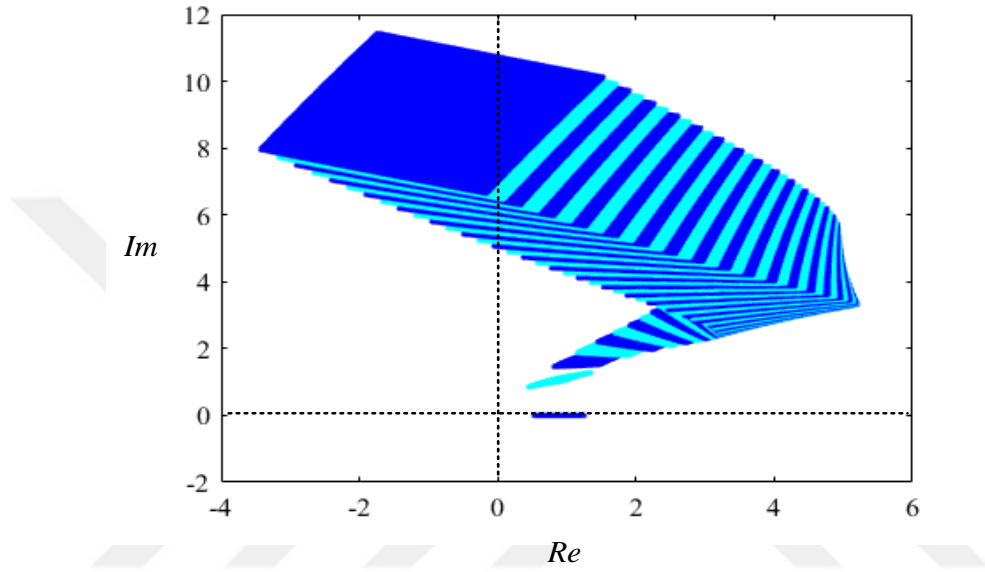
- İlk durumda belirsiz parametreler $c \in [-1, -0.7]$ ve $d \in [0.2, 0.5]$ aralığında değişsin. Sistemin karakteristik denklemi;

$$\begin{aligned} P(s) = & s^{1.264} - ([-1, -0.7] - j[0.2, 0.5])s^{0.632+j0.638} \\ & - ([-1, -0.7] + j[0.2, 0.5])s^{0.632-j0.638} + [-1, -0.7]^2 + [0.2, 0.5]^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

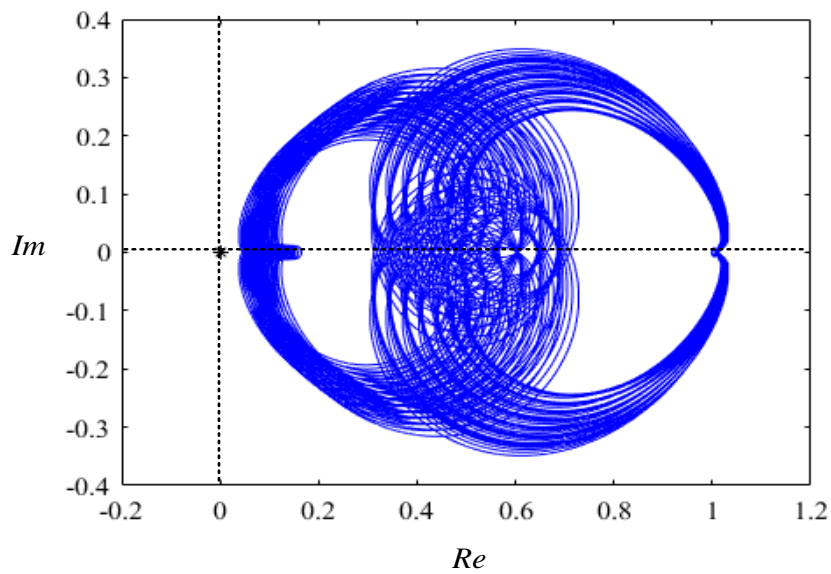
şeklinde elde edilir. Şekil 6.15'te karakteristik denklemin $\omega \in [0, 10]$ rad/sn arasında 0.2 adım aralıklı değer kümesi gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere, değer kümeleri uygun şekilde örneklenmiş belirsiz parametrelerin tüm varyasyonlarının görüntülerine karşılık gelen noktalardan oluşmaktadır. Uygun değer kümeleri elde edildiğinde, kompleks düzlemin merkezine göre konumlarının kontrol edilmesi kararlılık hakkında bilgi vermektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümesi kompleks düzlemin merkezini içermemektedir ve sonuç olarak Denklem 6.54'te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi $c \in [-1, -0.7]$ ve $d \in [0.2, 0.5]$ aralığında dayanıklı kararlıdır. Aşağıdaki referans

polinom kullanılarak, belirsiz parametre aralığından 0.05 adım aralıklı parametre değerleri için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.16’da verilmiştir. GD Mikhailov eğrilerinin sıfır noktasını kapsamadığı görülmektedir. GD Mikhailov eğrisi ile de kompleks eşlenik dereceli sistem ailesinin belirsiz parametre aralığında dayanıklı kararlı olduğu teyit edilmiştir.

$$w_r(s) = (s + 5)^{1.264} \quad (6.56)$$



Şekil 6.15 : Denklem 6.55’te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.

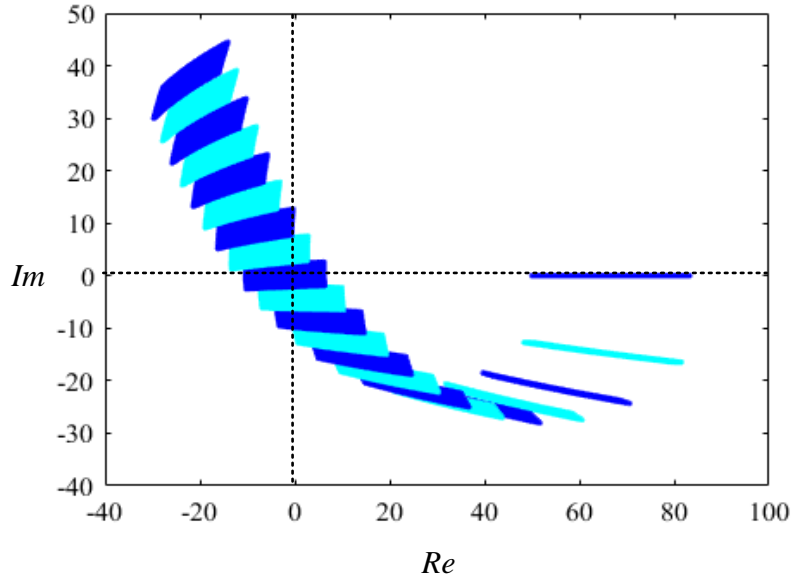


Şekil 6.16 : Denklem 6.55’in $c \in [-1, -0.7]$ ve $d \in [0.2, 0.5]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

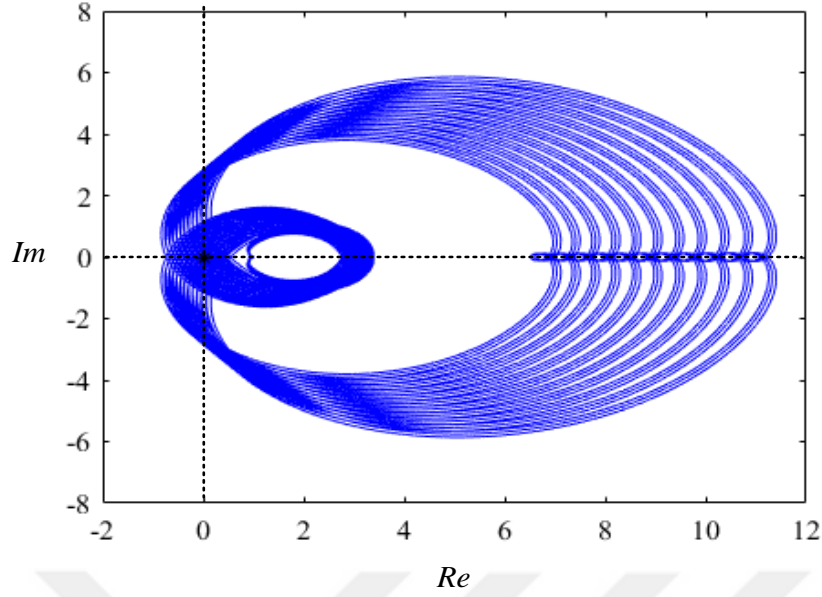
- İkinci durumda belirsiz parametreler olan $c \in [7, 9]$ ve $d \in [1, 1.5]$ aralığında değişsin. Bu durumda sistemin karakteristik denklemi;

$$P(s) = s^{1.264} - ([7, 9] - j[1, 1.5])s^{0.632+j0.638} - ([7, 9] + j[1, 1.5])s^{0.632-j0.638} + [7, 9]^2 + [1, 1.5]^2 \quad (6.57)$$

biçiminde yazılır. $\omega \in [0,10]$ *rad/sn* aralığında 0.5 adım aralıklarla frekans değerlerinin kullanılması ve her iki belirsiz parametrelerin 0.01 adım aralıkla örneklenmesi, Şekil 6.17’de gösterilen değer kümelerine yol açar. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri, kompleks düzlemin orjinini içermektedir. Bu yüzden Denklem 6.54’te verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi $c \in [7, 9]$ ve $d \in [1, 1.5]$ aralığında dayanıklı kararlı değildir. Denklem 6.56’da verilen referans polinom kullanılarak, her iki belirsiz parametre aralığından 0.2 adım aralıklı parametre değerleri için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.18’de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsadığından dolayı sistem ailesi verilen belirsiz parametre aralığında dayanıklı kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.



Şekil 6.17 : Denklem 6.57’de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,10]$ *rad/sn* aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 6.18 : Denklem 6.57'nin $c \in [7, 9]$ ve $d \in [1, 1.5]$ aralığında 0.2 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

Örnek 6.7 : Transfer fonksiyon gösterimi

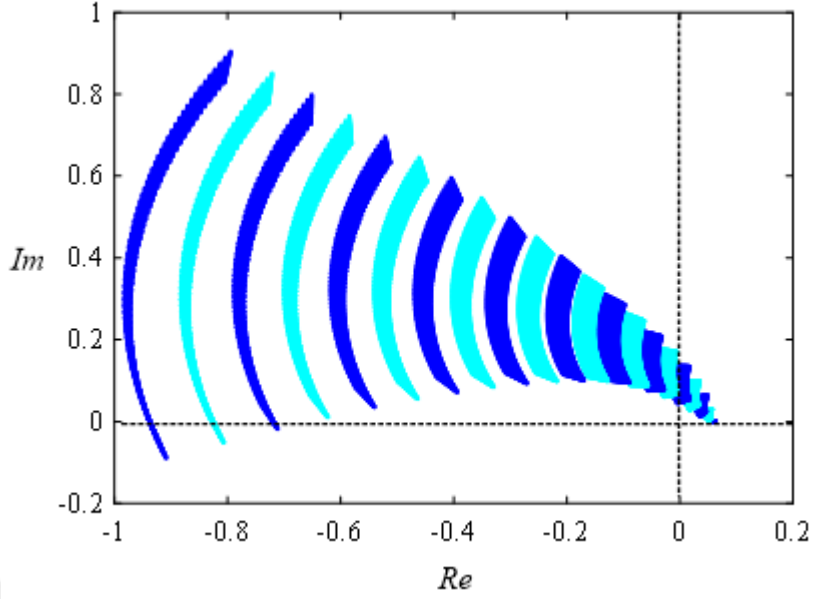
$$G(s) = \frac{1}{s^{[u,\bar{u}] + j[v,\bar{v}]} + 0.25} + \frac{1}{s^{[u,\bar{u}] - j[v,\bar{v}]} + 0.25} \quad (6.58)$$

şeklinde verilen bir sistem ailesinde $u \in [0.9, 1.2]$ ve $v \in [0.2, 0.4]$ aralığında değişsin. Kompleks eşlenik derecesi belirsiz olan bu sistem ailesinin karakteristik denklem ailesi;

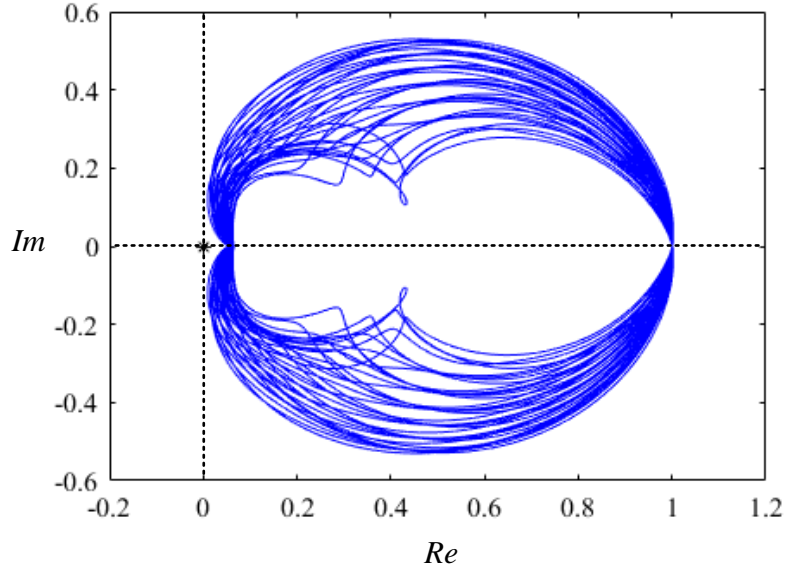
$$\mathcal{P}(s) = s^{2[0.9,1.2]} + 0.25 s^{[0.9,1.2] + j[0.2,0.4]} + 0.25 s^{[0.9,1.2] - j[0.2,0.4]} + 0.25^2 \quad (6.59)$$

biçiminde olur. Karakteristik denklemin, $\omega \in [0,1]$ rad/sn aralığında 0.05 adım aralıklı frekans değerleri için her iki belirsiz parametrenin 0.005 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen değer kümeleri Şekil 6.19'da gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri, kompleks düzlemin orjinini içermemektedir. Bu yüzden Denklem 6.58'de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi $u \in [0.9, 1.2]$ ve $v \in [0.2, 0.4]$ belirsiz parametre aralığında dayanıklı kararlıdır. Bu örnekte belirsiz parametre u 'nun değişimi referans polinomu da değiştirmektedir. Aşağıdaki referans polinom kullanılarak, u ve v belirsiz parametre aralığından 0.05 adım aralıklı parametre değerleri alınarak elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.20'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından dolayı kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi verilen belirsiz parametre aralığında dayanıklı kararlıdır.

$$w_r(s) = (s + 1)^{2[0.9,1.2]} \quad (6.60)$$



Şekil 6.19: Denklem 6.59’da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,1]$ rad/sn aralığında 0.05 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 6.20 : Denklem 6.59’un $u \in [0.9, 1.2]$ ve $v \in [0.2, 0.4]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

Örnek 6.8: Transfer fonksiyon gösterimi,

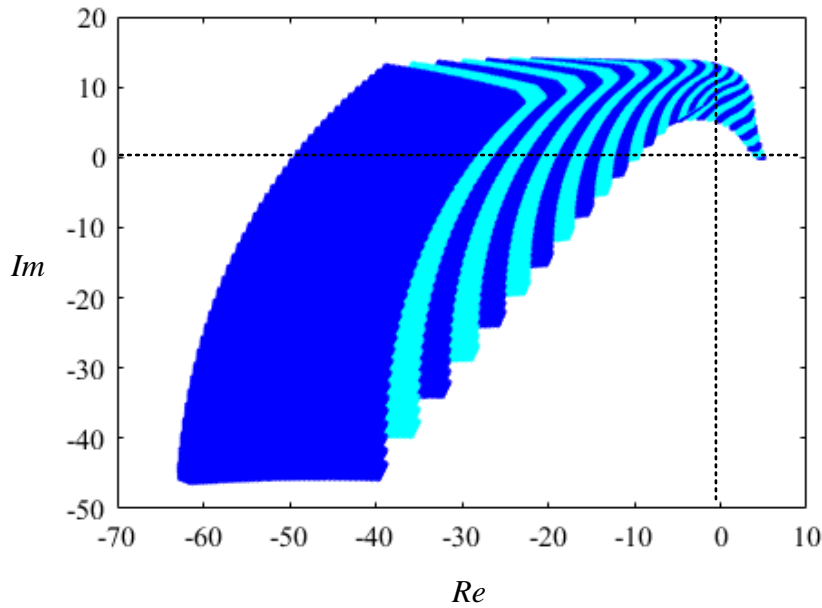
$$G(s) = \frac{1}{s^{[u,\bar{u}] + j[v,\bar{v}]} - ([c,\bar{c}] + j[d,\bar{d}])} + \frac{1}{s^{[u,\bar{u}] - j[v,\bar{v}]} - ([c,\bar{c}] - j[d,\bar{d}])} \quad (6.61)$$

şeklinde verilen bir sistem ailesinde; kompleks eşlenik derece parametreleri $u \in [1.1, 1.3]$ ve $v \in [0.3, 0.5]$ aralığında, sabit katsayı parametreleri ise $c \in [-2.2, -2.1]$ ve $d \in [0.3, 0.4]$ değişsin. Sistem ailesinin karakteristik denklem ailesi;

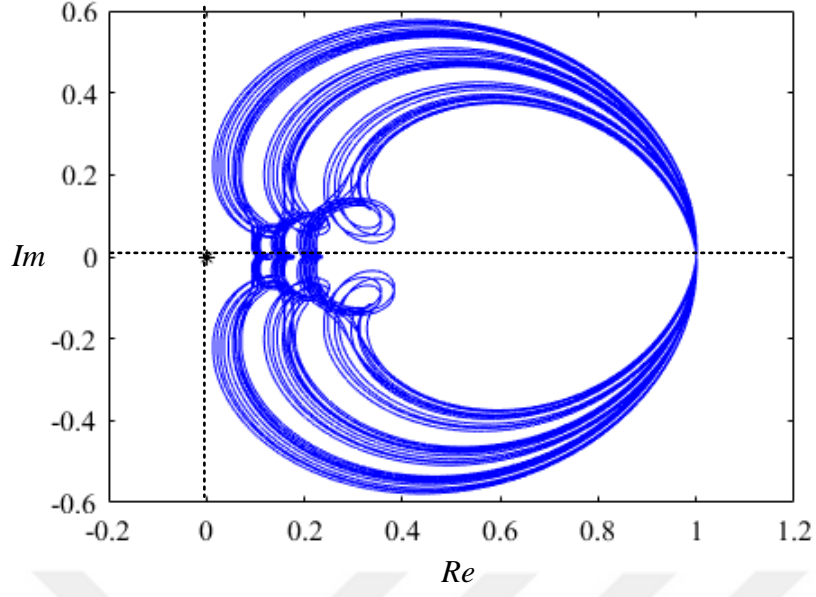
$$\mathcal{P}(s) = s^{2[1.1,1.3]} - ([-2.2, -2.1] - j[0.3, 0.4])s^{[1.1,1.3]+j[0.3,0.5]} - ([-2.2, -2.1] + j[0.3, 0.4])s^{[1.1,1.3]-j[0.3,0.5]} + [-2.2, -2.1]^2 + [0.3, 0.4]^2 \quad (6.62)$$

biçiminde olur. Karakteristik denklemin, $\omega \in [0,6]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı frekans değerleri için her dört belirsiz parametrelerin 0.005 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen değer kümeleri Şekil 6.21’de gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri, kompleks düzlemin orjinini içermemektedir. Bu yüzden Denklem 6.61’de verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi verilen belirsiz parametre aralında dayanıklı kararlıdır. Bu örnekte belirsiz parametre u ’nun değişimi referans polinomu da değiştirmektedir. Aşağıdaki referans polinom kullanılarak, u , v , c ve d belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklı parametre değerleri alınarak elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 6.22’de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından dolayı kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi dayanıklı kararlıdır.

$$w_r(s) = (s + 4)^{2[1.1,1.3]} \quad (6.63)$$



Şekil 6.21 : Denklem 6.62’de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,6]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 6.22: Denklem 6.62'nin $u \in [1.1, 1.3]$, $v \in [0.3, 0.5]$, $c \in [-2.2, -2.1]$ ve $d \in [0.3, 0.4]$ belirsiz parametre aralığında 0.1 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

7. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİNE SAHİP KOMPLEKS EŞLENİK DERECELİ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI KONTROLÖR TASARIMI

7.1 Giriş

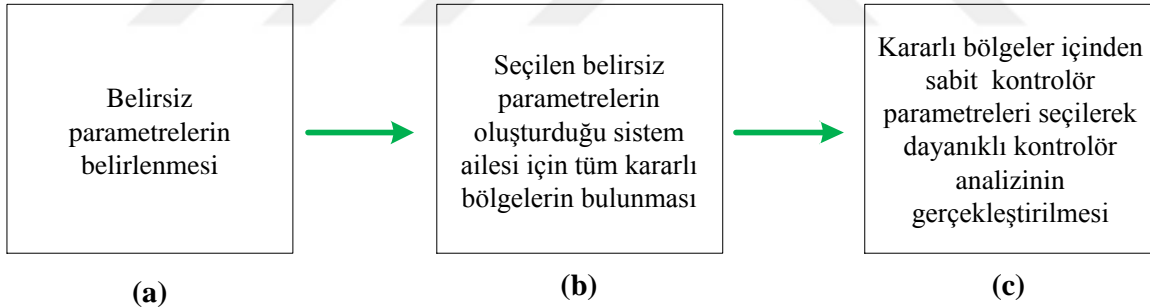
Kontrol sistem tasarımında, kapalı çevrimde sistemi kararlı yapan kontrolör tipinin seçimi, kontrolör parametrelerinin tespit edilmesi ve sistem cevaplarının istenilen bazı performans kriterlerini sağlama amaçlanır. Bunun için daha önce Bölüm 6'da da belirtildiği gibi yapılacak ilk şey, kontrol edilecek sistemin matematiksel bir modelini oluşturmaktır. Basit bir model oluşturma çabası, özellikle sistemin hızlı dinamik etkilerinin, doğrusal olmama durumlarının veya sistemin zamanla değişen davranışlarının ihmal edilmesi, nerdeyse her zaman belirsizliğin kaynağına yol açmaktadır. Fiziksel sistemlerde parametre belirsizliği varlığı istenen performans kriterlerinin sağlanamamasına ve özellikle kararsızlığa neden olabilmektedir. Bütün bu bozucu etkilere rağmen, sistemin verimli çalışabilmesi istenebilmektedir. Dolayısıyla bir sistemde dayanıklı kararlılık ve performans elde edebilmek için sistemdeki belirsizliği de hesaba katmak gerekir. Dayanıklı kontrol teorisi, daha kararlı ve tutarlı bir sistem elde etmek için bütün bu tutarsızlıklardan gelen etkileri minimize etmek adına uğraşır. Bu sebeplerden ötürü bu sistemleri dayanıklı kararlı kılacak kontrolörlerin tasarlanması günümüzde oldukça önem kazanmaktadır. Dolayısıyla parametrik dayanıklı kontrol alanı, gerçek kontrol sistemlerinin tasarımında ve kararlılık analizinde oldukça önemlidir. Dayanıklı olarak tasarlanan kontrolörler, tüm sistem ailesi için seçilen tasarım kriterleri açısından optimal kontrol yanıtını her zaman garanti etmez. Bununla birlikte, kontrol devresinin kararlılık ve asimptotik izleme gibi özelliklerinin garantisizliği veya en fazla verilen sınırlar arasında bazı kriterlerin değerlerinin korunmasını sağlarlar. (Kučera, 2001; Matuš, 2008)

Bu bölümde parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımının gerçekleştirilmesi hedeflenmektedir. Bunun için daha önce Bölüm 5'te sunulan kompleks eşlenik dereceli bir sistemin PI ve PID kontrolör ile kararlaştırılması konusundan yola çıkılarak, bu kararlı bölgeden seçilen sabit değerli bir kontrolörün kompleks eşlenik dereceli sistemin belirsiz parametre içermesi durumunda tüm sistem ailesi için kararlılık özelliğini koruyup koruyamayacağı araştırılacaktır.

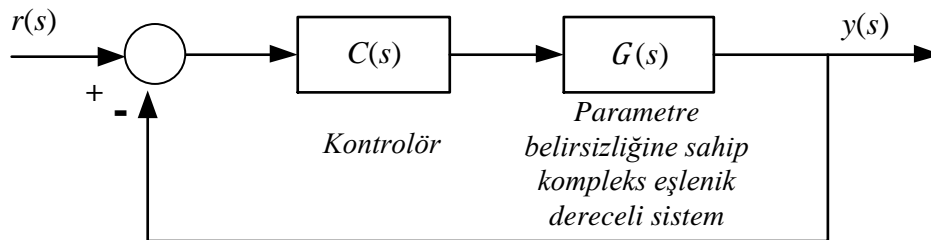
Dolayısıyla, bu bölümde ele alınan parametrik belirsizliğe sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PID tabanlı dayanıklı kontrolü konusu Bölüm 5 ve 6'daki çıkarımların bir araya getirilmesi ile elde edilen bir tasarım prosedürünü sunacaktır. Bunun için frekans bölgesi analizlerine dayalı iki farklı yöntem önerilecektir. Bir sistem için tasarlanan kontrolörün parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesi için dayanıklı kararlılık testi, değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma koşulu ve GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilecektir.

7.2 Belirsiz Parametre Uzayında Dayanıklı Kontrolör Testi ve Tasarımı

Bu bölümde, belirli performans ve dayanıklılık gereksinimleri göz önünde bulundurularak bazı sabit kontrol yapılarının dayanıklı kararlılık testi ve dayanıklı kontrolör tasarımı için bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem Şekil 7.1'den de görüldüğü üzere bir sistemin seçilmesi, sentez aşaması ve analiz aşaması olmak üzere üç adımdan oluşmaktadır. Burada temel yaklaşım, belirsiz parametrelili sistem ailesini belirlemek, bu aileye uygun dayanıklı kontrolör tasarımı yapmak ve en sonunda dayanıklı kontrolörün dayanıklı kararlılık analizini yaparak sonuçları doğrulamak üzerinedir.



Şekil 7.1 : Belirsiz parametre uzayında dayanıklı kontrolör testi ve tasarımı aşamaları : (a) Bir sistemin seçilmesi (b) Sentez aşaması (c) Analiz aşaması.



Şekil 7.2 : Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli bir kontrol sistemi.

Şekil 7.2’de verilen kontrol sistemi için parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için dayanıklı kontrolör tasarımının gerçekleştirilmesine yönelik sunulacak olan prosedür şu şekilde özetlenebilir:

1. Belirsiz Parametrelerin Belirlenmesi: Denklem 6.41 ile tanımlanan belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistemin, Örnek 6.5-6.8’den de görüldüğü gibi bir parametresi belirsiz olabildiği gibi tüm parametreleri de belirsiz olabilmektedir. Bu nedenle, öncelikle sistem ailesinin içerdiği belirsiz parametreler belirlenir.

2. Belirsiz yapıli sistem ailesi için PID tabanlı kontrolör ile tüm kararlılık bölgelerinin elde edilmesi (Sentez Aşaması): Bölüm 5’te anlatılan D-ayırıştırma yöntemi ve kararlılık sınırları kullanılarak Denklem 6.41 ile verilen parametrik belirsizliğe sahip sistem ailesinin her biri için PID tabanlı kararlılık bölgeleri elde edilir. Tek bir parametrik düzlem grafiği üzerinde tüm ailenin kararlılık bölgeleri çizdirilir. Bu kararlılık bölgelerinin kesişimi *dayanıklı kararlılık bölgesi* olarak adlandırılır. Bu bölgenin özelliği, bu bölge içinde seçilen bir kontrolörün tüm belirsiz yapıli sistem ailesini kararlı yapma yeteneğine sahip olmasıdır. Dolayısıyla verilen aralık içindeki tüm belirsizliklerin tümünü elimine ederek kararlılığı koruyan dayanıklı bir kontrol sistemi elde edilmiş olmaktadır.

3. Dayanıklı kararlılık analizi ile sonuçların doğrulanması (Analiz Aşaması): Dayanıklı kararlılık bölgesi içinden bir kontrolör seçilir. Bu kontrolörün, belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi için dayanıklı kararlılığı test edilir. Bunun için Bölüm 6’da verilen prosedürün kontrolör dahil edilen geliştirilmiş bir şekli hem değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi ve hem de GD Mikhailov kararlılık kriteri tabanlı yöntem kullanılarak, ikinci adımda elde edilen dayanıklı kontrolör sonuçları doğrulanır.

Yukarıda verilen dayanıklı kontrolör tasarım prosedürünün yanında, bu bölümde farklı olarak belirsiz yapıli sistem ailesi içinden seçilen bir nominal sistem için elde edilen tek bir kararlılık bölgesinden belirlenen kontrolörün dayanıklı kararlı olup olmadığını anlamak için dayanıklı kararlılık analizinin nasıl yapılacağına dair bilgiler ve uygulama örnekleri verilecektir. Burada, dayanıklı kararlılık analizi için önerilecek olan yöntem yukarıda verilen prosedürün üçüncü adımında bahsedilen test prosedürü ile aynıdır. Dolayısıyla bundan sonraki iki bölümde önce kontrolörün dahil edildiği belirsiz yapıli kompleks eşlenik dereceli kapalı döngü sisteminin dayanıklı kararlılık analizinin nasıl yapılacağı anlatılacak, daha sonra nominal sistem için ele alınan bir PID tabanlı kontrol sisteminin bu

paragrafta anlatılan dayanıklı kontrol analizi uygulamalarına örnekler verilecek, son olarak da parametrik belirsizliğe sahip bir sistem için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımına ait uygulama örnekleri verilecektir.

7.3 Değer Kümesinden Sıfırın Dışlanma Prensibine Dayalı PI ve PID Kontrol Sistemi için Dayanıklı Kararlılık Analizi

Bu bölümde kompleks eşlenik dereceli sistemler için tasarlanan PI ve PID kontrol sistemlerinin dayanıklı kontrol analizi, değer kümesinden sıfırın dışlanma prensibine dayalı olarak gerçekleştirilecektir. Şekil 7.2'de verilen kontrol sisteminde $G(s)$, Bölüm 6'da Denklem 6.41'de verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi; $C(s)$ ise bu sistem ailesini kararlaştırmak için kullanılan herhangi bir kontrolör olsun.

- Kullanılan kontrolörün Bölüm 5'te Denklem 5.19'da transfer fonksiyon gösterimi verilen bir PI kontrolör olması durumunda; Şekil 7.2'de verilen kapalı döngü sisteminin karakteristik denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$P(s, k) = 1 + \left(\frac{[r, \bar{r}]}{s^{[q, \bar{q}]} - [p, \bar{p}]} + \frac{\overline{[r, \bar{r}]}}{s^{[q, \bar{q}]} - \overline{[p, \bar{p}]}} \right) \left(k_p + \frac{k_i}{s} \right) \quad (7.1)$$

Burada $q, r, p \in \mathbb{C}$ ($u > 0$ ve $u, v, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) biçimindedir. $q = u + jv$ olmak üzere $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$ ve $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$ aralığında; $r = a + jb$ olmak üzere $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ve $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ aralığında ve $p = c + jd$ olmak üzere $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$ ve $d \in [\underline{d}, \bar{d}]$ aralığında değişen belirsiz parametreler olsun. Sistemin belirsiz parametreleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa en genel formu ile PI kontrolörlü karakteristik denklem ailesi,

$$P(s, k) = s^{2[\underline{u}, \bar{u}]+1} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])s^{1+[\underline{u}, \bar{u}]+j[\underline{v}, \bar{v}]} - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])^{1+[\underline{u}, \bar{u}]-j[\underline{v}, \bar{v}]} + ([\underline{c}, \bar{c}]^2 + [\underline{d}, \bar{d}]^2)s + ([\underline{a}, \bar{a}] - j[\underline{b}, \bar{b}])s^{[\underline{u}, \bar{u}]+j[\underline{v}, \bar{v}]} + ([\underline{a}, \bar{a}] + j[\underline{b}, \bar{b}])s^{[\underline{u}, \bar{u}]-j[\underline{v}, \bar{v}]} - 2[\underline{a}, \bar{a}][\underline{c}, \bar{c}] - 2[\underline{b}, \bar{b}][\underline{d}, \bar{d}])x[k_p s + k_i] \quad (7.2)$$

şeklinde elde edilir.

- Kullanılan kontrolörün Bölüm 5'te Denklem 5.41'de transfer fonksiyon gösterimi verilen bir PID kontrolör olması durumunda; Şekil 7.2'de verilen kapalı döngü sisteminin karakteristik denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$\mathcal{P}(s, k) = 1 + \left(\frac{[\underline{r}, \bar{r}]}{s^{[\underline{q}, \bar{q}]} - [\underline{p}, \bar{p}]} + \frac{\overline{[\underline{r}, \bar{r}]}}{s^{[\underline{q}, \bar{q}]} - [\underline{p}, \bar{p}]} \right) \left(k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d \right) \quad (7.3)$$

Sistemin belirsiz parametreleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa en genel formu ile PID kontrolörlü karakteristik denklem ailesi en genel formu ile;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s, k) = & s^{2[\underline{u}, \bar{u}]+1} - ([\underline{c}, \bar{c}] - j[\underline{d}, \bar{d}])s^{1+[\underline{u}, \bar{u}]+j[\underline{v}, \bar{v}]} \\ & - ([\underline{c}, \bar{c}] + j[\underline{d}, \bar{d}])^{1+[\underline{u}, \bar{u}]-j[\underline{v}, \bar{v}]} + ([\underline{c}, \bar{c}]^2 + [\underline{d}, \bar{d}]^2)s \\ & + ([\underline{a}, \bar{a}] - j[\underline{b}, \bar{b}])s^{[\underline{u}, \bar{u}]+j[\underline{v}, \bar{v}]} + ([\underline{a}, \bar{a}] + j[\underline{b}, \bar{b}])s^{[\underline{u}, \bar{u}]-j[\underline{v}, \bar{v}]} \\ & - 2[\underline{a}, \bar{a}][\underline{c}, \bar{c}] - 2[\underline{b}, \bar{b}][\underline{d}, \bar{d}]]x[k_i + k_p s + k_d s^2] \end{aligned} \quad (7.4)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda PI ve PID için verilen karakteristik denklemlerin, belirsiz parametrelerin karelerini içerdiğinden dolayı polinom belirsiz yapısına sahip olduğu görülmektedir. Kontrolör parametre vektörü $k = [k_0, k_1, k_2, \dots, k_l] \in \mathcal{K}$ baz alınarak, kullanılan kontrolörün tüm sistem ailesi için dayanıklı kararlılığını değer kümesinden sıfırın hariç tutulması koşulu ile test edelim. Sabit kontrolör parametre değerlerinde Denklem 7.2 ve 7.4 için en genel şekli ile belirsizlik kümesi/kutusu Denklem 6.44'teki gibi olur. Denklem 7.2 ve 7.4'de tanımlanan karakteristik denklem $\mathcal{P}(s)$ ailesinin değer kümeleri, $\mathcal{P}(s, k, \mathcal{Q}) = \{\mathcal{P}(s, k, u, v, a, b, c, d) | u, v, a, b, c, d \in \mathcal{Q}\}$ ailesinde s yerine $j\omega$ yazıldığı zaman, sabit bir frekans ω değeri için \mathcal{Q} kümesi üzerinde belirsiz parametrelerin (belirsiz parametre vektörünün) örneklendirilmesi (grid) ile elde edilir. Sabit kontrolör parametre değerlerinde $\omega \geq 0$ için $\mathcal{P}(s)$ polinom ailesinin değer kümeleri $\mathcal{P}(j\omega, k, \mathcal{Q})$ ancak ve ancak, $0 \notin \mathcal{P}(j\omega, k, u, v, a, b, c, d)$ şartını sağlaması durumunda kullanılan kontrolör dayanıklı kararludur denir.

7.4 Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile PI ve PID Kontrol Sistemi için Dayanıklı Kararlılık Analizi

Bölüm 4-6'dan da bilindiği üzere, öncelikle Şekil 7.2'de kontrol edilen sistemin karakteristik denklem ailesinde her bir karakteristik denklem (PI kontrolör için Denklem 7.2, PID kontrolör için Denklem 7.4) bir referans polinoma bölünerek yeni bir rasyonel fonksiyon ailesi oluşturulur. Kontrolör yapıları için referans polinomun seçimi Bölüm 5'te detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Her bir belirsiz parametrenin belli adım aralıklarla örneklenmesi ile rasyonel fonksiyon ailesinin $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilmesi ile GD Mikhailov kararlılık eğrileri elde edilir. Burada GD Mikhailov eğrisi, tek bir eğri olmayıp

belirsiz parametre kümesinin örneklendirilmesi elde edilen bir eğri ailesi biçimindedir. GD Mikhailov kararlılık eğri ailesi kompleks düzlemin merkezini yani sıfır noktasını çevrelemiyor ise seçilen kontrolör parametre setinde kullanılan kontrolör dayanıklıdır denir.

7.5 Uygulama Örnekleri

Aşağıda, belirsizlik içermeyen bir sistem için tasarlanan PI veya PID kontrol sisteminin, çalışma esnasında sistem parametrelerinde sonradan beklenmeyen bir şekilde meydana gelen parametrik belirsizlik durumunda dayanıklılık anlamında kararlılığını sürdürüp sürdüremeyeceğini anlamak amacıyla dayanıklı kararlılık analiz örnekleri verilecektir. Buradaki uygulama örneklerinin Bölüm 6'daki örneklerden farkı, önceki bölümde tek başına sistemin dayanıklı kararlılık analizi yapılırken bu bölümde kontrolör ilave edildikten sonra kontrol sisteminin tümünün dayanıklı kararlılık analizinin yapılmasıdır. Dolayısıyla bu bölümdeki uygulama örnekleri daha karmaşık bir dinamik üzerine gerçekleştirilmektedir.

7.5.1 PI kontrolör için dayanıklı kararlılık analizi uygulamaları

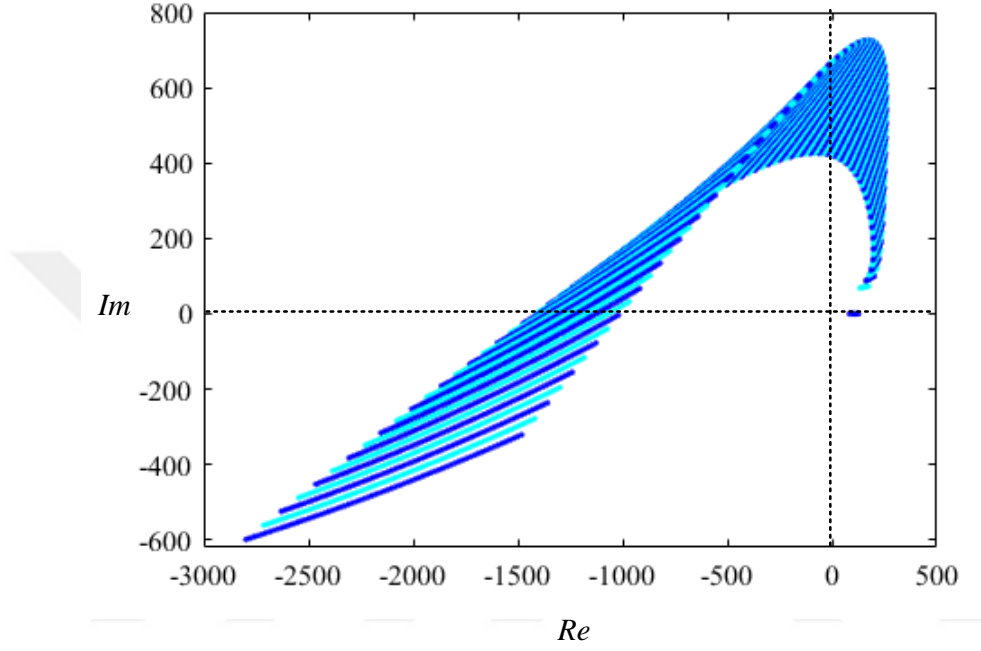
Örnek 7.1: Şekil 7.2'de verilen kontrol sisteminde, transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan ve başlangıçta belirsizlik içermeyen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım:

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.5+j0.5} - p} + \frac{1}{s^{0.5-j0.5} - \bar{p}} \quad (7.5)$$

Bu örnekte p değeri reel bir sayı olup değeri $p = -1.6$ olarak verilsin. Tasarımcının, Bölüm 5.2'de verilen yöntem uygulanarak elde edilen kararlılık bölgesinden $k_p = 1.5$ ve $k_i = 30$ kontrolör parametre değerlerini seçtiği varsayalım. Dolayısıyla bu kontrolör için kontrol sistemi mutlak manada kararlı bir çalışma şekli sergileyecektir. Uzun bir çalışma süresinden sonra, çeşitli sebeplerden dolayı sistem parametrelerinde $p \in [-2.1, -1.4]$ aralığında bir değişim olduğu fark edilsin. Bu durumda PI kontrol sisteminin p parametresinin değişim aralığında mutlak kararlılığı sürdürüp sürdürmeyeceğinin araştırılması gerekir. Artık parametrik belirsiz yapıyla bir şekle dönüşen PI kontrol sisteminin karakteristik denklem ailesi,

$$P(s, k) = s^2 - [-2.1, -1.4]s^{1.5+j0.5} - [-2.1, -1.4]^{1.5-j0.5} + [-2.1, -1.4]^2 s + (s^{0.5+j0.5} + s^{0.5-j0.5} - 2[-2.1, -1.4])(k_p s + k_i) \quad (7.6)$$

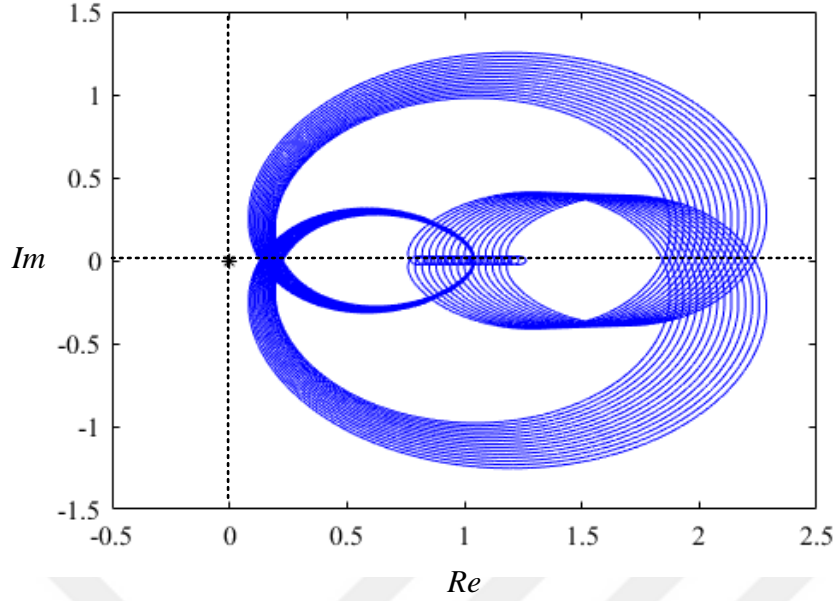
şeklinde olur. Karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0, 90]$ rad/sn arasında 1 adım aralıklarla; sistemin belirsiz parametre aralığında ise 0.01 adım aralıkla parametre değerleri alınarak elde edilen değer kümeleri Şekil 7.3'te gösterilmiştir.



Şekil 7.3 : Denklem 7.6'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0, 90]$ rad/sn aralığında 1 adım aralıklı değer kümeleri.

Şekil 7.3'ten de görüldüğü üzere tek bir bilinmeyen parametre olduğu için sabit bir ω^* frekans değerinde değer kümesi eğri şeklindedir. Değer kümeleri sıfır noktasını içermediğinden dolayı; $k_p = 1.5$ ve $k_i = 30$ değerlerinde PI kontrolörün p parametresinin değişim aralığında dayanıklı kararlı olduğu sonucuna varılmaktadır. Belirsiz parametre $p \in [-2.1, -1.4]$ aralığından 0.05 adım aralıklarla alınan parametre değerleri için aşağıdaki referans polinom kullanılarak $-\infty < \omega < \infty$ için rasyonel fonksiyon ailesinin çizdirilmesi ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.4'te verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğri ailesi sıfır noktasını kapsamadığından dolayı $k_p = 1.5$ ve $k_i = 30$ değerlerinde PI kontrolör dayanıklı kararlıdır.

$$w_r(s) = (s + 10)^2 \quad (7.7)$$



Şekil 7.4 : Denklem 7.6'nın $p \in [-2.1, -1.4]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

Örnek 7.2: Şekil 7.2'de verilen kontrol sisteminde, transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan ve başlangıçta belirsizlik içermeyen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım:

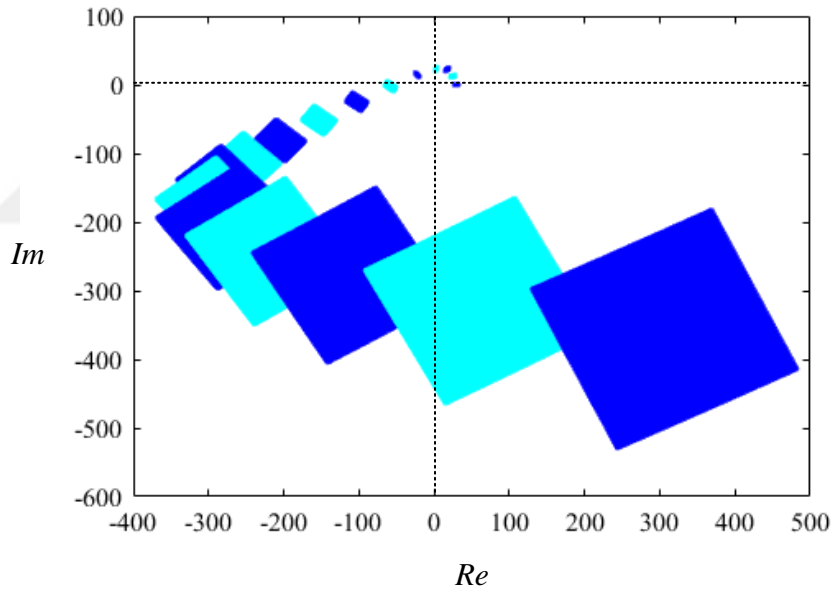
$$G(s) = \frac{1}{s^{1.4+j0.8} - (c + jd)} + \frac{1}{s^{1.4-j0.8} - (c - jd)} \quad (7.8)$$

Bu sistemde $c = -2.95$ ve $d = -3.85$ değerlerinin başlangıçta bilindiği ve buna göre Denklem 7.8'de verilen sistem için elde edilen kararlılık bölgesinden tasarımcının $k_p = 0.1$ ve $k_i = 5$ değerlerini seçtiği farz edilsin. Uzun bir çalışma süresinden sonra, beklenmeyen bir şekilde sistem parametrelerinde $c \in [-3.2, -2.7]$ ve $d \in [-4.1, -3.6]$ aralığında bir değişim olduğu fark edilsin. Bu durumda PI kontrol sisteminin c ve d parametrelerinin değişim aralığında mutlak kararlılığı sürdürüp sürdürmeyeceğinin araştırılması gerekir. Artık parametrik belirsiz yapıya dönüşen PI kontrol sisteminin karakteristik denklem ailesi,

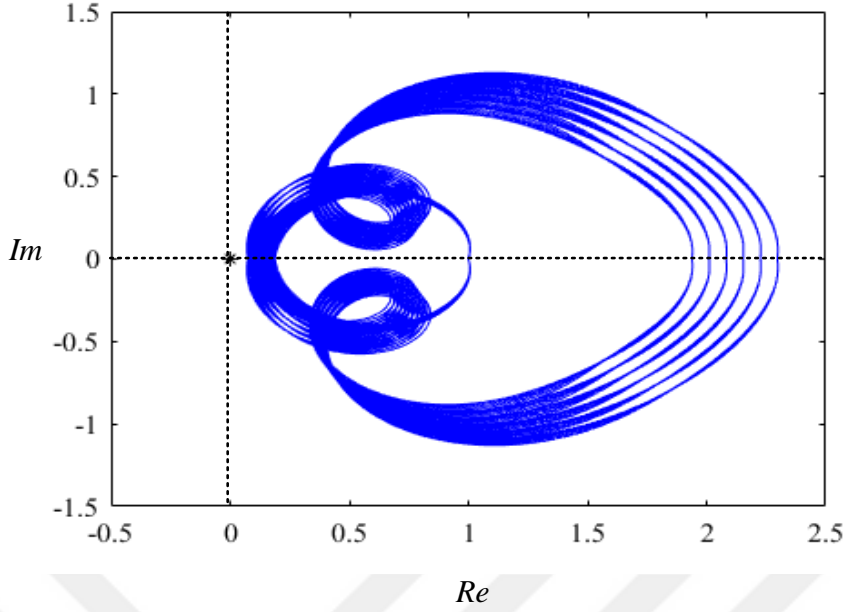
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s) = & s^{3.8} - ([-3.2, -2.7] - j[-4.1, -3.6])s^{1+u+jv} \\ & - ([-3.2, -2.7] + j[-4.1, -3.6])^{1+u-jv} \\ & + ([-3.2, -2.7]^2 + [-4.1, -3.6]^2)s \\ & + (s^{u+jv} + s^{u-jv} - 2[-3.2, -2.7])(k_p s + k_i) \end{aligned} \quad (7.9)$$

şeklini alır. Karakteristik denklemin $\omega \in [0, 8]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı frekans değerleri için her iki belirsiz parametrenin 0.005 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen değer kümeleri Şekil 7.5'te gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri, kompleks düzlemin merkezini içermemektedir. Bu yüzden $k_p = 0.1$ ve $k_i = 5$ kontrolör parametre değerlerinde PI kontrolör Denklem 7.8'de verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi için dayanıklı kararlıdır denir. Aşağıdaki referans polinom kullanılarak, c ve d belirsiz parametre aralığından 0.1 adım aralıklarla parametre değerleri alınarak elde edilen 36 tane sistemin $-\infty < \omega < \infty$ aralığında elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.6'da verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından dolayı $k_p = 0.1$ ve $k_i = 5$ için PI kontrolör dayanıklı kararlıdır.

$$w_r(s) = (s + 2)^{3.8} \quad (7.10)$$



Şekil 7.5 : Denklem 7.9'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0,8]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.6 : Denklem 7.9'un $c \in [-3.2, -2.7]$ ve $d \in [-4.1, -3.6]$ aralığında 0.1 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

7.5.2 PID kontrolör için dayanıklı kararlılık analizi uygulamaları

Örnek 7.3 : Şekil 7.2'de verilen kontrol sisteminde, transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan ve başlangıçta belirsizlik içermeyen kompleks eşlenik dereceli bir sistemi göz önüne alalım:

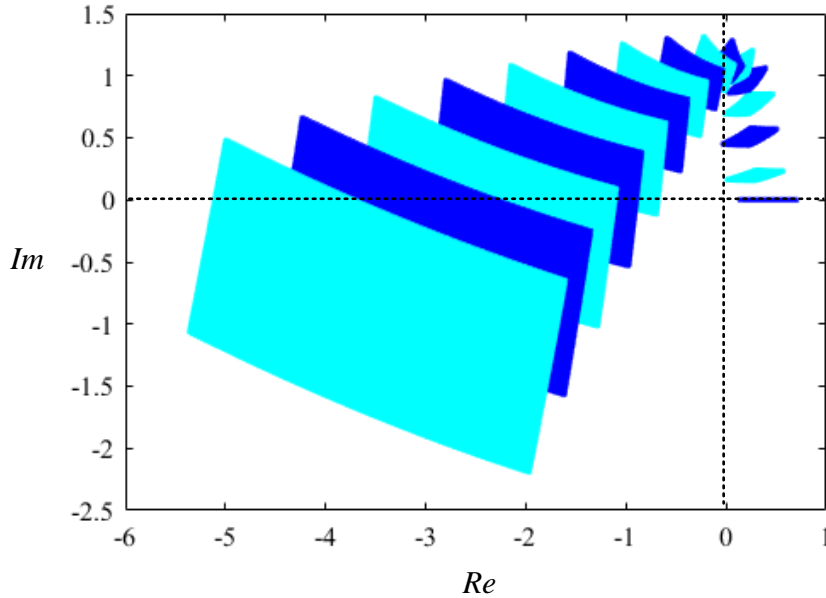
$$G(s) = \frac{0.1 - j0.2}{s^{1.2+j0.8} - (c + jd)} + \frac{0.1 + j0.2}{s^{1.2-j0.8} - (c - jd)} \quad (7.11)$$

Bu sistemde $c = -1$ ve $d = -0.1$ değerlerinin başlangıçta bilindiği ve buna göre Denklem 7.11'de verilen sistem için elde edilen kararlılık bölgesinden tasarımcının $k_p = 0.5$, $k_i = 3.5$ ve $k_d = 0.1$ değerlerinde PID kontrolör seçtiği farz edilsin. Uzun bir çalışma süresinden sonra, beklenmeyen bir şekilde sistem parametrelerinde $c \in [-1.2, -0.8]$ ve $d \in [-0.3, -0.1]$ aralığında bir değişim olduğu fark edilsin. Bu durumda PID kontrol sisteminin c ve d parametrelerinin değişim aralığında mutlak kararlılığı sürdürüp sürdürmeyeceğinin araştırılması gerekir. Parametrik belirsiz yapıyı bir şekle dönüştüren PID kontrol sisteminin karakteristik denklem ailesi,

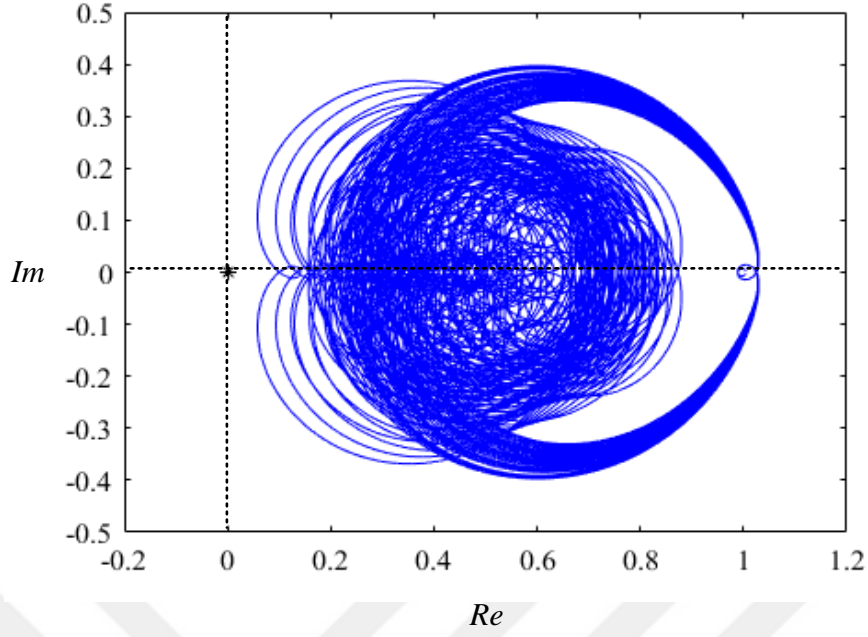
$$\begin{aligned}
P(s, k) = & s^{3.4} - ([-1.2, -0.8] - j[-0.3, -0.1])s^{2.2+j0.8} \\
& - ([-1.2, -0.8] + j[-0.3, -0.1])s^{2.2-j0.8} \\
& + ([-1.2, -0.8]^2 + [-0.3, -0.1]^2)s + ((0.1 + j0.2)s^{1.2+j0.8} \\
& + (0.1 - j0.2)s^{1.2-j0.8} - 0.2[-1.2, -0.8] \\
& + 0.4[-0.3, -0.1])(k_d s^2 + k_p s + k_i)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

şeklini alır. Karakteristik denklemin $\omega \in [0, 1.5]$ rad/sn aralığında 0.1 adım aralıklı frekans değerleri için her iki belirsiz parametrenin 0.001 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen değer kümeleri Şekil 7.7’de gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere değer kümeleri, kompleks düzlemin merkezini içermemektedir. Bu yüzden $k_p = 0.5$, $k_i = 3.5$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde PID kontrolör Denklem 7.11’de verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi için dayanıklı kararlıdır denir. Aşağıdaki referans polinom kullanılarak, c ve d belirsiz parametrelerinin 0.05 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen 45 tane kompleks eşlenik dereceli sistem için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.8’de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından PID kontrolör dayanıklı kararlıdır.

$$w_r(s) = (s + 1)^{3.4} \tag{7.13}$$



Şekil 7.7 : Denklem 7.12’de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0, 1.5]$ rad/sn aralığında 0.1 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.8 : Denklem 7.12'nin $c \in [-1.2, -0.8]$ ve $d \in [-0.3, -0.1]$ aralığında 0.05 adım aralıklı GD Mikhailov eğrileri.

7.5.3 Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı PI kontrolör tasarımı

Örnek 7.4: Bu örnekte hem kompleks eşlenik derecenin hem de katsayı parametresinin belirsiz olduğu durum için aşağıda transfer fonksiyonu verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesinin dayanıklı PI kontrolör tasarımını gerçekleştirelim.

$$G(s) = \frac{1}{s^{[u, \bar{u}] + j[v, \bar{v}]} - ([c, \bar{c}] + j[d, \bar{d}])} + \frac{1}{s^{[u, \bar{u}] - j[v, \bar{v}]} - ([c, \bar{c}] + j[d, \bar{d}])} \quad (7.14)$$

Burada belirsiz parametreler $u \in [0.9, 1.1]$, $v \in [0.5, 0.7]$, $c \in [-2.3, -2]$ ve $d \in [-3.8, -3.5]$ aralığında değişsin. Bu durumda PI kontrolörlü kontrol sistem ailesinin karakteristik denklem ailesi,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s, k) = & s^{2[0.9, 1.1] + 1} - ([-2.3, -2] - j[-3.8, -3.5])s^{1 + [0.9, 1.1] + j[0.5, 0.7]} \\ & - ([-2.3, -2] + j[-3.8, -3.5])^{1 + [0.9, 1.1] - j[0.5, 0.7]} \\ & + ([-2.3, -2]^2 + [-3.8, -3.5]^2)s + (s^{[0.9, 1.1] + j[0.5, 0.7]} \\ & + s^{[0.9, 1.1] - j[0.5, 0.7]} - 2[-2.3, -2])(k_p s + k_i) \end{aligned} \quad (7.15)$$

şeklinde oluşturulur. Bölüm 5.2'de bahsedilen kararlılaştırma prosedürü belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile oluşan $3 \times 3 \times 4 \times 4 = 144$ tane sistem için

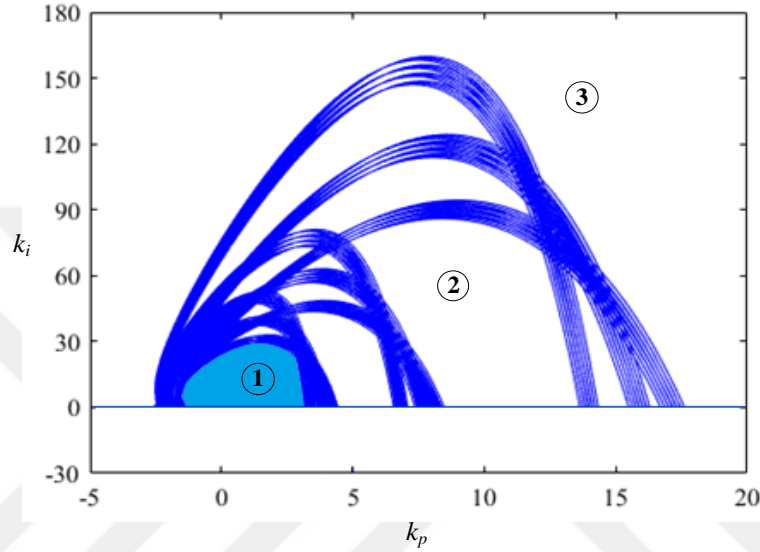
uygularsak elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 7.9'da gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere taralı olan bölge ortak kararlılık bölgesidir.

Şekil 7.9'da belirtilen bölgelerden sabit kontrolör parametreleri seçerek u ve v belirsiz parametrelerinin 0.1, c ve d belirsiz parametrelerinin ise 0.005 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen karakteristik denklem ailesi için PI kontrolörün dayanıklı kararlılığını test edelim. ① nolu bölgeden seçilen $k_p = 1$ ve $k_i = 10$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı frekans değerleri için değer kümeleri Şekil 7.10'da gösterilmiştir. Şekil 7.10'da değer kümeleri saat yönünün tersinde sıfır noktasını dışlamaktadır. Bu ① nolu bölgeden seçilen kontrolör parametre değerlerinde PI kontrolör, Denklem 7.14'te verilen belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli sistem ailesi için dayanıklı olduğu anlamına gelmektedir. ② nolu bölgeden seçilen $k_p = 8$ ve $k_i = 50$ ve ③ nolu bölgeden seçilen $k_p = 8$ ve $k_i = 170$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı frekans değerleri için değer kümeleri sırasıyla Şekil 7.11 ve 7.12'de gösterilmiştir. Şekil 7.11'e bakıldığı zaman sistem ailesinin bazı parametre değerlerinde saat yönünde sıfır noktasını dışlarken; bazı parametre değerlerinde ise saat yönünün tersine sıfır noktasını dışladığı görülmektedir. ② nolu bölge Şekil 7.9'da incelendiği zaman bazı belirsiz parametre değerlerinde bir kararlı bölgeyi temsil ederken bazı parametre aralığında ise kararsız bir bölgeyi temsil ettiği görülmektedir. Başka bir deyişle, $k_p = 8$ ve $k_i = 50$ kontrolör parametre değerleri bu sistem ailesini bazı belirsiz parametre değerlerinde kararlı bazılarının da ise kararsız yaptığından dolayı dayanıklı kararlılığından söz edilemez. Şekil 7.12'e bakıldığı zaman sistem ailesinin tüm belirsiz parametre değerlerinde saat yönünde sıfır noktasını dışladığı görülmektedir. ③ nolu bölge Şekil 7.9'da incelendiği zaman tüm belirsiz parametre aralığında sistem ailesi için kararsız bir bölgeyi temsil ettiği görülmektedir. Başka bir deyişle, $k_p = 8$ ve $k_i = 170$ kontrolör parametre değerleri bu sistem ailesini tüm belirsiz parametre aralığında kararsız yaptığından dolayı kontrolör bu değerlerde dayanıklılık anlamında kararsızdır denir. $-\infty < \omega < \infty$ aralığında her bir belirsiz parametrenin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen 144 tane sistemin aşağıdaki referans polinom ailesi kullanılarak $k_p = 1$ ve $k_i = 10$ için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.13(a)'da, $k_p = 8$ ve $k_i = 50$ için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.13(b)'de ve $k_p = 8$ ve $k_i = 170$ için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.13(c)'de verilmiştir. Şekil 7.13 (a)'da görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından dolayı kullanılan PI kontrolör dayanıklı

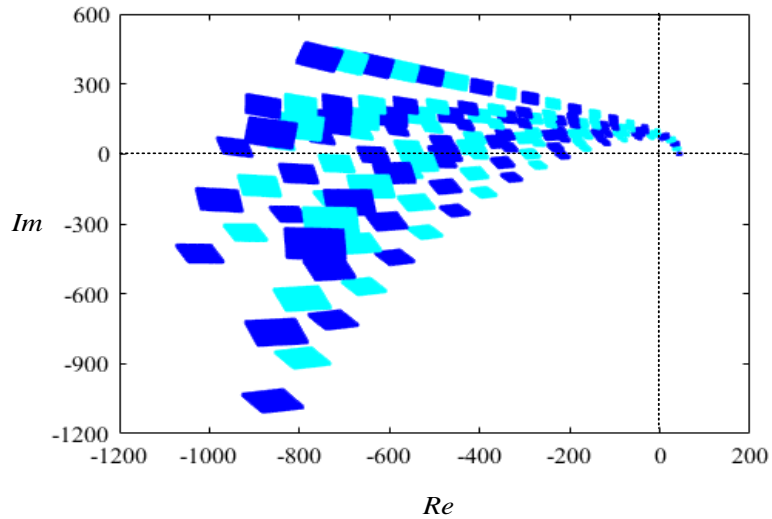
kararlıdır denir. Şekil 7.13 (b-c)'de ise GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsadığından dolayı sistem ailesi için kullanılan kontrolörün dayanıklı kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.

$$w_r(s) = (s + 2)^{2[\underline{u}, \bar{u}]+1} \quad (7.16)$$

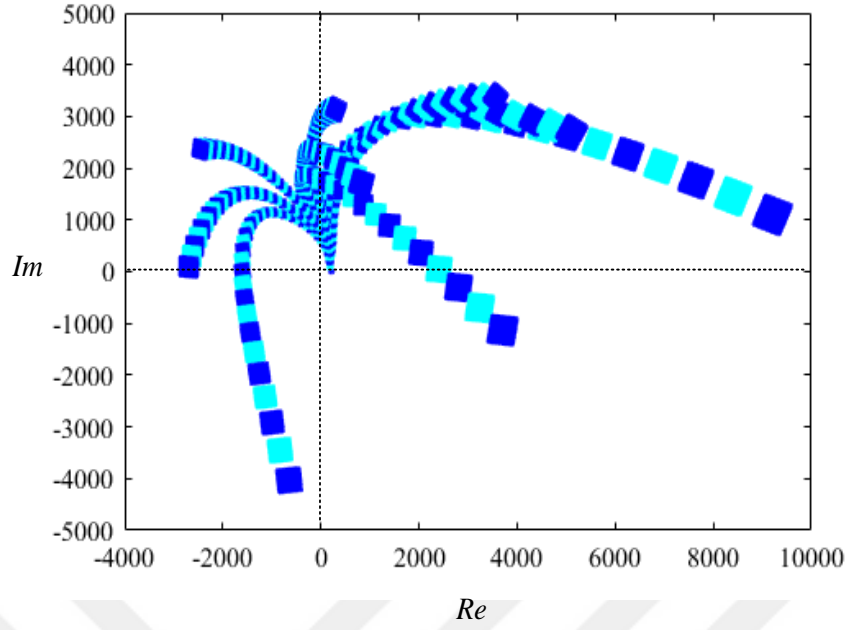
Sonuç olarak, Denklem 7.14'teki parametrik belirsiz yapıya sahip kompleks eşlenik dereceli sistem Şekil 7.9'da görülen taralı bölgeden seçilen herhangi bir PI kontrolör ile kontrol edildiğinde kontrol sistemi kesin olarak dayanıklı kararlılığa sahip olacaktır.



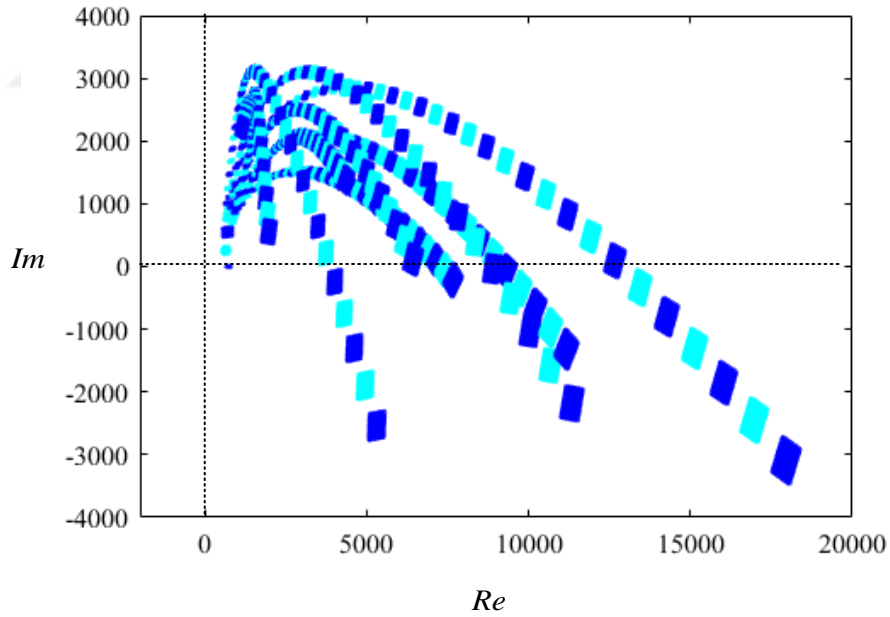
Şekil 7.9 : Denklem 7.14'te verilen sistem ailesinde belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen kararlılık bölgeleri.



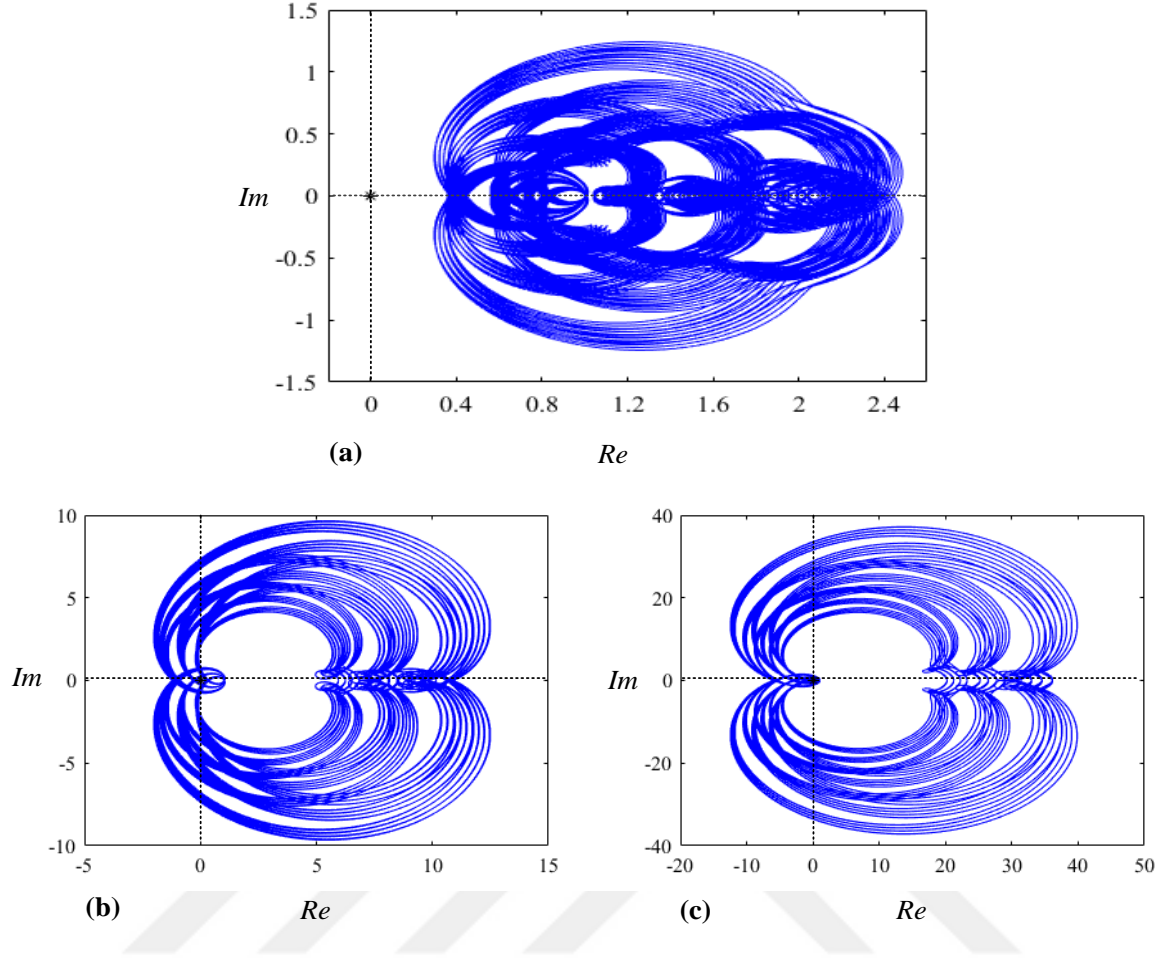
Şekil 7.10 : $k_p = 1$ ve $k_i = 10$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,10]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.11 : $k_p = 8$ ve $k_i = 50$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.12 : $k_p = 8$ ve $k_i = 170$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,20]$ rad/sn aralığında 0.5 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.13 : Denklem 7.15'ün u , v , c ve d belirsiz parametrelerinin 0.1 adım aralıklarla örnekleme ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri : (a) $k_p = 1$ ve $k_i = 10$ için (b) $k_p = 8$ ve $k_i = 50$ için (c) $k_p = 8$ ve $k_i = 170$ için.

7.5.4 Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistem için dayanıklı PID kontrolör tasarımı

Örnek 7.5: Bu örnekte hem kompleks eşlenik derecenin hem de katsayı parametresinin belirsiz olduğu durum için aşağıda transfer fonksiyonu verilen kompleks eşlenik dereceli sistem ailesini ele alalım ve dayanıklı PID kontrolör tasarımını gerçekleştirelim:

$$G(s) = \frac{1}{s^{[1.3,1.5]+j[0.5,0.7]} - ([-1.2, -1] + j[-0.6, -0.4])} + \frac{1}{s^{[1.3,1.5]-j[0.5,0.7]} - ([-1.2, -1] - j[-0.6, -0.4])} \quad (7.17)$$

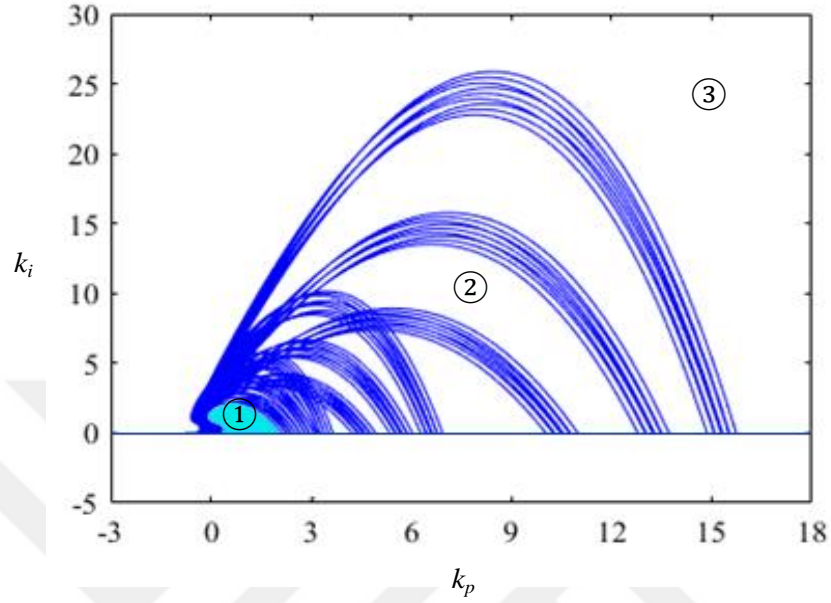
Bu durumda PID kontrolörlü kontrol sisteminin karakteristik denklem ailesi,

$$\begin{aligned}
P(s, k_p, k_i, k_d) = & s^{2[1.3,1.5]+1} - ([-1.2, -1] - \\
& j[-0.6, -0.4])s^{1+[1.3,1.5]+j[0.5,0.7]} - ([-1.2, -1] + \\
& j[-0.6, -0.4])^{1+[1.3,1.5]-j[0.5,0.7]} + ([-1.2, -1]^2 + [-0.6, -0.4]^2)s + \\
& (s^{[1.3,1.5]+j[0.5,0.7]} + s^{[1.3,1.5]-j[0.5,0.7]} - 2[-1.2, -1])(k_i + k_p s + k_d s^2)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

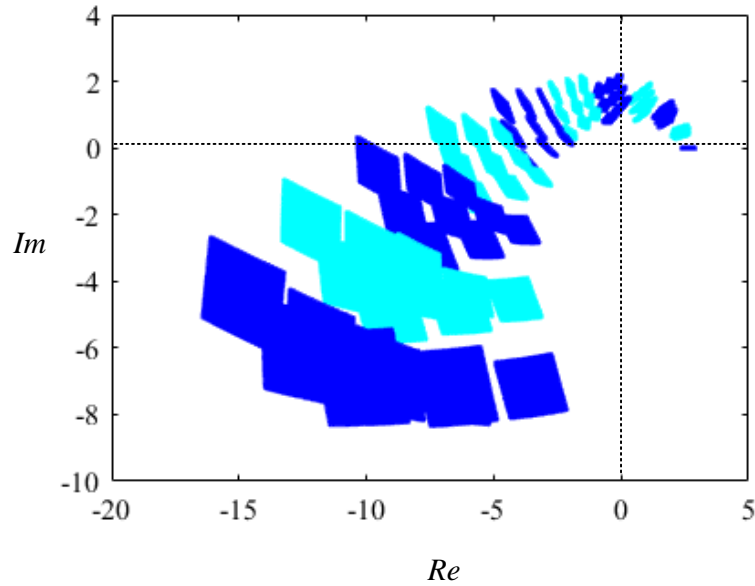
şeklinde elde edilir. Başlık 5.3'te bahsedilen kararlılaştırma prosedürü, belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile oluşan $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ tane sistem için uygularsak $k_d = 0.1$ için elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 7.14'te gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere taralı olan bölge, 81 sistemin dayanıklı kararlılık bölgesidir.

Şekil 7.14'te belirtilen bölgelerden sabit kontrolör parametreleri seçerek u ve v belirsiz parametrelerinin 0.1, c ve d belirsiz parametrelerinin de 0.005 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen karakteristik denklem ailesi için kullanılan PID kontrolörün dayanıklı kararlılığını test edelim. ① nolu bölgeden seçilen $k_p = 0.5$, $k_i = 1.2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0, 2]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı frekans değerleri için değer kümeleri Şekil 7.15'te gösterilmiştir. Şekil 7.15'te değer kümeleri saat yönünün tersinde sıfır noktasını dışlamaktadır. Bu ① nolu bölgeden seçilen kontrolör parametre değerlerinde verilen belirsiz parametre aralığında PID kontrolörün dayanıklı kararlı olduğu anlamına gelmektedir. ② nolu bölgeden seçilen $k_p = 8$, $k_i = 2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0, 7.5]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı frekans değerleri için değer kümeleri Şekil 7.16'da gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere sistem ailesinin bazı parametre değerlerinde saat yönünde sıfır noktasını dışlarken; bazı parametre değerlerinde ise saat yönünün tersine sıfır noktasını dışladığı görülmektedir. Bu durum seçilen kontrolör parametre değerinin bazı sistem parametreleri için kararlılığa bazılarında ise kararsızlığa sebep olduğunu göstermektedir. ② nolu bölge Şekil 7.14'te incelendiği zaman bazı belirsiz parametre değerlerinde bir kararlı bölgeyi temsil ederken diğer parametre aralığında ise kararsız bir bölgeyi temsil ettiği görülmektedir. Bu yüzden ② nolu bölgeden seçilen kontrolör parametre değerlerinde verilen belirsiz parametre aralığında PID kontrolörün dayanıklı kararlılığından söz edilemez. ③ nolu bölgeden seçilen $k_p = 5$, $k_i = 25$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0, 6]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı frekans değerleri için değer kümeleri Şekil 7.17'de gösterilmiştir. Şekil 7.17'ye bakıldığı zaman sistem ailesinin tüm belirsiz parametre değerlerinde saat yönünde sıfır noktasını dışladığı görülmektedir. ③ nolu bölge Şekil 7.14'te incelendiği zaman tüm belirsiz

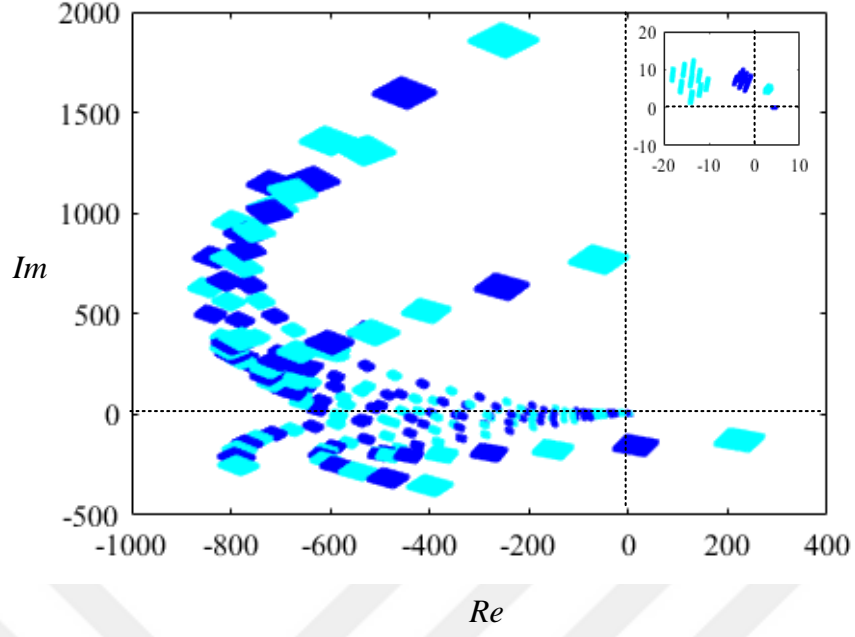
parametre aralığında sistem ailesi için kararsız bir bölgeyi temsil ettiği görülmektedir. Başka bir deyişle, ③ nolu bölgeden seçilen kontrolör parametre değerleri bu sistem ailesini tüm belirsiz parametre aralığında kararsız yaptığından dolayı dayanıklı kararlı değildir.



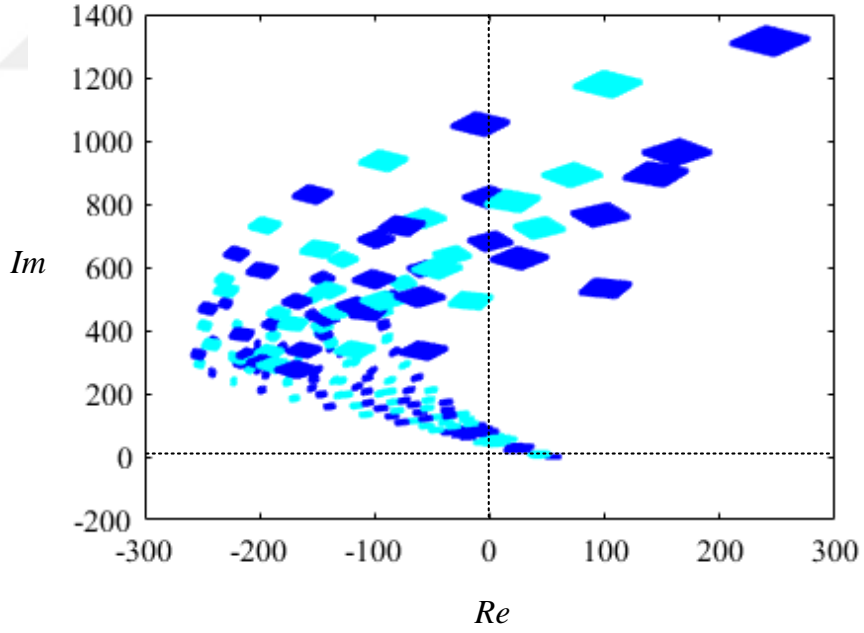
Şekil 7.14 : Denklem 7.17’de verilen sistem ailesinde belirsiz parametrelerin 0.1 adım aralıklarla örneklenmesi ile elde edilen kararlılık bölgeleri ($k_d = 0.1$).



Şekil 7.15 : $k_p = 0.5$, $k_i = 1.2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,2]$ rad/sn aralığında 0.2 adım aralıklı değer kümeleri.



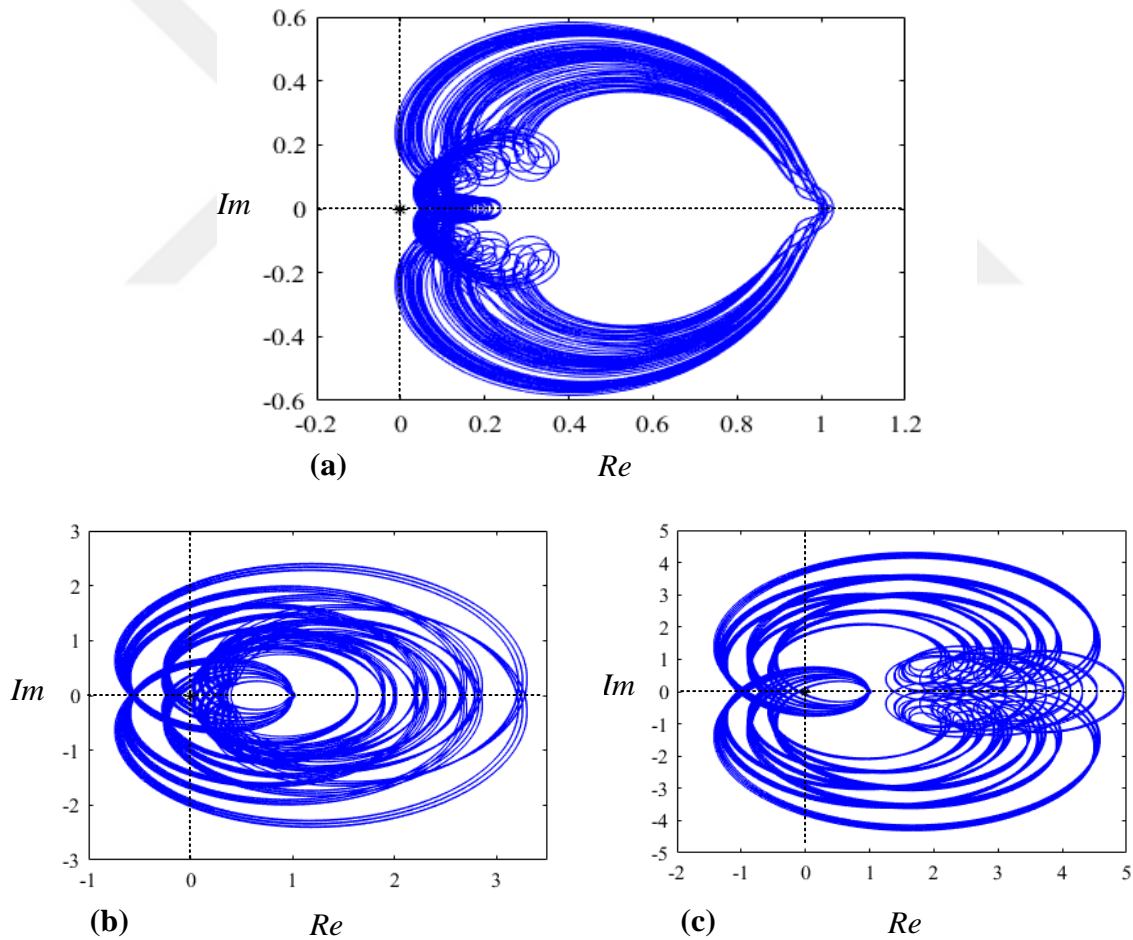
Şekil 7.16 : $k_p = 8$, $k_i = 2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,7.5]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı değer kümeleri.



Şekil 7.17 : $k_p = 5$, $k_i = 25$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerlerinde karakteristik denklem ailesinin $\omega \in [0,6]$ rad/sn aralığında 0.3 adım aralıklı değer kümeleri.

$-\infty < \omega < \infty$ aralığında her bir belirsiz parametrenin 0.1 adım aralıklarla örnekleme ile elde edilen 81 tane sistemin aşağıdaki referans polinom kullanılarak $k_p = 0.5$, $k_i = 1.2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerleri için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.18(a)'da, $k_p = 8$, $k_i = 2$ ve $k_d = 0.1$ kontrolör parametre değerleri için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.18(b)'de ve $k_p = 5$, $k_i = 25$ ve $k_d = 0.1$ için elde edilen GD Mikhailov eğrileri Şekil 7.18(c)'de verilmiştir. Şekil 7.18 (a)'da görüldüğü üzere GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsamadığından dolayı kullanılan PID kontrolör dayanıklı kararlıdır denir. Şekil 7.18 (b-c)'de ise GD Mikhailov eğrileri sıfır noktasını kapsadığından dolayı sistem ailesi için kullanılan kontrolörün dayanıklı kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.

$$w_r(s) = (s + 2)^{2u+1} \quad (7.19)$$



Şekil 7.18 : Denklem 7.18'in u , v , c ve d belirsiz parametrelerinin 0.1 adım aralıklarla örnekleme ile elde edilen GD Mikhailov eğrileri : (a) $k_p = 0.5$, $k_i = 1.2$ ve $k_d = 0.1$ için (b) $k_p = 8$, $k_i = 2$ ve $k_d = 0.1$ için (c) $k_p = 5$, $k_i = 25$ ve $k_d = 0.1$ için.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1 Bu Tez Kapsamında Elde Edilen Sonuçlar

Kompleks dereceli integro-türev operatörleri, son zamanlarda sistem modellemesi ve kontrol sistem tasarımında artan bir ilgi görmeye başlamıştır. Kompleks dereceli türev operatörleri kullanılarak oluşturulan diferansiyel denklemlerle modellenen kompleks dereceli dinamik sistemlerin analiz ve kontrol problemleri oldukça zor bir konu olup birçok açık problemi barındırmaktadır. Çünkü kompleks bir türev ya da integral kullanımı, anlamı şu anda tam olarak anlaşılamayan ve aynı zamanda ölçülemeyen kompleks değerli bir zaman yanıtıyla sonuçlanmaktadır. Zaman tepkisinin sanal kısmının varlığı bu alandaki çalışmaları sınırlandırmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için kompleks eşlenik dereceli integro-türev operatörlerinin kullanımı önerilmiştir. Kompleks dereceli operatörler ancak, eşlenik dereceli operatörüyle eşleştirildiğinde reel değerli zamanlı yanıtların ortaya çıktığı görülmüştür. Böylelikle, kompleks dereceli bir sistem kendi eşleneği ile birleştirilerek kompleks eşlenik dereceli sistem yapısı oluşturulmuştur.

Bu tez çalışmasında, kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizleri ve kontrol işlemlerinin gerçekleştirilmesine dair çalışmalar yer almaktadır. Tezde yer alan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Konuyla ilgili detaylı literatür araştırması yapılarak kesir ve kompleks dereceli analizin tarihsel süreci ve gelişimi ele alınmış, kontrol mühendisliğinde kullanımına dair yapılan çalışmalar ve bu çalışmalarda konunun ele alınış biçimleri hakkında özet bir bilgi sunulmuştur.
2. Kesir dereceli ve kompleks dereceli analizin temelini oluşturan matematiksel kavramlar tanıtılmıştır. Önce kesir dereceli integro-türev kavramı tanıtılmıştır. Kesirli dereceli matematiğin analiz işlemlerinde kullanılmak üzere Gamma fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Miller-Ross fonksiyonu gibi bazı yardımcı fonksiyonlardan bahsedilmiştir. Literatürde kesir dereceli türev ve integral tanımlarından en çok ilgi gören Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları ile bu tanımların Laplace dönüşümleri verilmiştir. Daha sonra kompleks dereceli integro-türev kavramı tanıtılmıştır. Türev ve integral operatörünün üssünün

kompleks olması durumu için Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları yeniden tanıtılmış ve bunların Laplace dönüşümleri verilmiştir. Ayrıca kompleks eşlenik dereceli integro-türev kavramından bahsedilmiştir.

3. Kompleks dereceli ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin transfer fonksiyon gösterimi üzerinden tanımı yapılmış ve bu sistemlerin zaman/frekans bölgesi analizleri gerçekleştirilmiştir. Kompleks dereceli transfer fonksiyonların tam sayı dereceli yaklaşım modellerine değinilmiş ve bu işlem için Oustaloup yaklaşıklık metodu tanıtılmıştır.
4. Kesir dereceli sistemler için önerilen GD Mikhailov kararlılık kriteri kompleks eşlenik dereceli sistemler ve kaskat kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi için uyarlanmıştır. GD Mikhailov kararlılık kriterine göre $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen rasyonel fonksiyonun kompleks düzlemin merkezini çevreleme ya da çevrelememe durumuna göre kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılığı hakkında yorum yapılabilmektedir. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi ayrıca kutup-konum analizinden yola çıkarak literatürde var olan iki ayrı yöntem ile gerçekleştirilerek önerilen yöntem cebirsel olarak da doğrulanmış ve güvenilirliği ortaya konulmuştur. Kararlılık kriterlerinin uygulanmasına yönelik örnekler verilmiştir. Önerilen GD Mikhailov kararlılık analiz yöntemin avantajları şu şekilde sıralanabilir:
 - ✓ Kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin analizi için literatürde kullanılan yöntemler çok fazla matematiksel analiz gerektirmektedir. Önerilen yöntem frekans tabanlı grafiksel bir yöntem olup matematiksel hesaplama zorluklarını ortadan kaldırmaktadır.
 - ✓ Mikhailov'un birinci kararlılık kriterinde Mikhailov eğrisinin yönüne (saat yönünde veya saat yönünün tersinde sıfır noktasını dışlamasına) bakmak kararlılık analizi için önem arz etmekte idi. Fakat önerilen bu yöntem kapalı formda bir eğri tanımladığı için sıfır noktasının saat yönünde mi yoksa tersinde mi dışlandığının bir önemi bulunmamaktadır.
 - ✓ Sistem derecesinin büyük olması durumunda kompleks düzlemin merkezi düzlemdeki grafiğin içinde kaybolmamaktadır.
 - ✓ Önerilen yöntem orantılı-orantısız kompleks eşlenik dereceli sistemlerin tümüne uygulanabilmektedir.

5. Bu tez çalışmasında, kompleks eşlenik dereceli sistemler için sistemi kararlı hale getiren tüm PI, PID veya kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolör setini elde eden kararlılaştırma işlemi ilk kez gerçekleştirilmiştir. Önerilen algoritmanın temeli, D-ayırıştırma yöntemiyle kararlılık alanının sınırlarını belirlemeye ve bu sınırları kullanarak parametre uzayında kararlılık bölgelerini elde etmeye dayanmaktadır. Kompleks eşlenik dereceli sistemler için D-ayırıştırma yöntemi kullanılarak;
- PI kontrolör ile kararlılaştırma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamada; D-ayırıştırma yöntemi ile kontrolör parametreleri analitik olarak formüle edilmiştir. Kararlılık sınırlarının belirleyicisi olan GKS, KKS ve SKS'nin varlığı araştırılmıştır. PI kontrolör için SKS'nin bulunmadığı görülmüştür. GKS doğrusu ve KKS eğrisi (k_p, k_i) -düzleminde ω frekansı belirli bir aralık içinde değiştirilerek çizdirilmiştir. Bu sınırlar parametre düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere ayırmıştır. Bu bölgelerin kararlılığını test etmek için GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılmıştır. Ayrıca kontrol edilen her bir sistemin zaman cevapları elde edilerek kararlılık bölgeleri test edilmiştir. Önerilen yöntem için bir uygulama örneği yapılarak, elde edilen simülasyon sonuçlarının sunulan PI kararlılaştırma yönteminin kompleks eşlenik dereceli sistemlerin analizi ve kontrolünde etkili ve pratik olarak faydalı olduğu gösterilmiştir.
 - PID kontrolör ile kararlılaştırılması işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamada; D-ayırıştırma yöntemi ile kontrolör parametreleri analitik olarak formüle edilmiştir. Kararlılık sınırları olan GKS, KKS ve SKS'nin varlığı araştırılmıştır ve analitik olarak elde edilmiştir. Sabit bir k_d değeri için kararlılık sınırları (k_p, k_i) -düzleminde belirli bir aralık içinde ω frekansı değiştirilerek çizdirilmiştir. Eğrilerinin oluşturduğu kararlılık sınırları (k_p, k_i) -düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere ayırmıştır. Her bir bölgeden seçilen test noktaları ile GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak kararlılık bölgesinin tespiti gerçekleştirilmiştir. Daha sonra farklı k_d değerleri için işlemler tekrarlanarak tüm kararlı (k_p, k_i, k_d) kontrolör parametrelerini içeren üç boyutlu kararlılık bölgesi (k_p, k_i, k_d) -uzayında elde edilmiştir. Bu bölge, bir kompleks eşlenik dereceli sistem için kapalı döngü kararlılığını sağlayan tüm kararlı PID kontrolör parametre setini içermektedir. Kullanılan yöntemler ve metotlar üç örnek üzerinden pekiştirilmiştir. Simülasyon sonuçları, sunulan PID kararlılaştırma yönteminin kompleks eşlenik dereceli sistemlerin analizi ve kontrolünde etkili ve pratik olarak faydalı olduğunu göstermiştir.

- Kazanç ve faz payı gibi frekans bölgesi özelliklerine göre kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Parametre düzleminde kararlılık bölgesi içinde belirli kazanç ve faz payı değerlerini veren kontrolörleri tespit etmek amacıyla kapalı çevrim kontrol sisteminin ileri kısmına bir kazanç-faz payı test edicisi eklenmiştir. D-ayrıştırma yöntemiyle değişik λ dereceleri için kararlılık bölgeleri belirlenmiş ve bu bölgeler içinde arzu edilen kazanç ve faz payına karşılık gelen kontrolör parametreleri belirlenmiştir. Bu çalışmada, kazanç payı (A) ve faz payı (ϕ) parametrelerindeki artışın kararlılık bölgelerinde küçülmeye neden olduğu görülmüştür. Ayrıca sistemi kararlı yapan sabit kontrolör parametreleri kullanılarak farklı integral derecesi, kazanç payı ve faz payı değerleri için elde edilen birim basamak cevapları elde edilmiştir.
- ✓ Literatürde kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kontrolü ile ilgili yeterli çalışma bulunmadığından, bu sistemlerin PI, PID ve kesir dereceli PI (PI^λ) kontrolü için bir yöntem ilk kez bu tez kapsamında kararlaştırılma perspektifinden sunulmuştur.
- 6. Dayanıklı kararlılığın araştırılması için kullanılacak yöntemin seçimi esas olarak belirsizliğin yapısına bağlı olarak değişmektedir. Genel olarak ifade etmek gerekirse, bir polinomda katsayılar arasındaki ilişki belirsizlik yapısını daha karmaşık bir hale getirir ve bu sebepten ötürü dayanıklı kararlılık analizi daha da zorlaşır. Literatürde tam sayı dereceli polinom aileleri için birçok yöntem mevcut iken kompleks ve kesir dereceli polinom aileleri için seçim daha sınırlıdır. Bu tez çalışmasında, parametre belirsizliğine sahip kompleks ve kompleks eşlenik dereceli polinomların dayanıklı kararlılığı incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, parametre belirsizliği içeren tam sayı dereceli polinom ailelerinin dayanıklı kararlılık analizi için literatürde kullanılan yöntemler ele alınarak bu yöntemlerin kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistem ailelerinin dayanıklı kararlılık analizi için uygulanabilirliği ayrı ayrı incelenmiştir. Kharitonov teoreminin; aralık belirsizlik yapısına sahip tam sayı dereceli polinom aileleri için uygulanabildiği fakat aralık belirsizlik yapısına sahip kompleks dereceli polinom aileleri için uygulanamadığı gösterilmiştir. Çünkü böyle bir polinomun değer kümesinin bir poligon olduğu görülmüştür. Kompleks dereceli aralık ve afın belirsizlik yapısına sahip polinom aileleri için kenar teoreminin uygulanabileceği gösterilmiştir. Fakat parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için kenar teoreminin geçersiz olduğu gösterilmiştir. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin karakteristik denklemleri polinom belirsizlik yapısına sahip olduğundan dolayı kenar teoreminin dayanıklı

kararlılık analizi için kullanılmadığı anlaşılmıştır. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için frekans çizimlerinin grafiksel kullanımına dayalı olarak iki farklı yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemlerin ilkinde belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin dayanıklı kararlılık analizi, değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi kullanılarak araştırılmıştır. İkincisinde ise belirsiz parametrelili kompleks eşlenik dereceli bir sistem ailesinin dayanıklı kararlılık analizi GD Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Her iki yöntemde de, sonuçlar grafiksel bir gösterim ile verilmiştir. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar, belirsiz parametre içeren kompleks dereceli ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi için bir temel oluşturmaktadır. Bilgimiz dahilinde şu ana kadar bu konuda literatürde yapılmış her hangi bir çalışma bulunmamaktadır. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi üzerine yapmış olduğumuz çalışmalar literatürde bir ilk özelliğindedir ve bu konu üzerine çalışan araştırmacılara yeni bir bakış açısı kazandıracaktır. Ayrıca dayanıklı kararlılık alanında bu sistemlere uygulanabilecek yeni yöntemlerin keşfi açık bir alandır.

7. Parametre belirsizliğine sahip kompleks eşlenik dereceli sistemler için dayanıklı PI ve PID kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Parametre belirsizliğine sahip sistem ailesinin her bir üyesi için Bölüm 5'te verilen kararlılaştırma yöntemi ile kararlılık bölgeleri elde edilmiş, bu bölgelerin kesişimi ile dayanıklı kararlılık bölgesi elde edilmiştir. Bu kararlı bölgeden seçilen kontrolör parametre değerleri için kullanılan kontrolörün dayanıklı kararlılık testi için

- Değer kümelerinin görselleştirilmesi ile desteklenen sıfırın dışlanma prensibi
- GD Mikhailov kararlılık kriteri

olmak üzere iki ayrı yöntem önerilmiştir. Örnek sistemler üzerinde önerilen her iki yöntem tüm özellikleriyle gösterilmiştir ve anlatılan tekniğin detayları uygulanmıştır. Bu bağlamda bir çalışma literatürde ilk kez bu tezde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca önerilen yöntemlerin diğer kontrolör yapılarına uygulanabilmesi de mümkündür.

8.2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar için Öneriler

1. Son zamanlarda modelleme ve kontrol problemlerinde daha gerçekçi ve doğru bir modelleme sağladığı için kompleks dereceli diferansiyel denklemlerin öne çıktığı

görülmektedir. Kompleks dereceli sistemlerin modellenmesi ve simülasyonlarının oluşturulması üzerine daha detaylı çalışmaların yapılması gerekmektedir.

2. Kompleks dereceli integro-türev operatörlerinin ayrık zaman eşdeğerleri sayısal kontrol uygulamalarında kullanılabilir ve klasik sayısal kontrol için geliştirilen metotlar kompleks dereceli operatörler için de genelleştirilebilir.
3. Kompleks dereceli matematiğin teorik alt yapısı güçlendirilerek bu konunun işaret işleme uygulamaları, ayrık (dijital) kontrol uygulamaları, zaman gecikmeli sistem uygulamaları, uyarlamalı (adaptive) kontrol, yapay sinir ağları (neural network) gibi pek çok farklı alanlarda kullanımına ve gerçek hayat uygulamalarına bir katkı sağlayabilir.
4. Matematiksel olarak kompleks dereceli analizin altyapısına ihtiyaç duyulmadan kompleks ve kompleks eşlenik dereceli sistemlerin analizinde araştırmacıların kolayca kullanabileceği arayüz programları geliştirilebilir.
5. Kompleks dereceli sistemlerin zaman yanıtını elde etmek oldukça zordur ve kompleks bir matematiksel analiz ile uğraşılacak zorunda kalınmaktadır. Bu yüzden bu sistemlerin tam sayı dereceli eşdeğerlerini elde etmek için farklı yaklaşım metotları geliştirilebilir.
6. Kompleks dereceli bir operatörün doğrudan gerçekleştirilmesini yapmak mümkün değildir. Çünkü kompleks dereceli integro-türev operatörleri ile modellenen sistemler sonsuz bir boyuta sahip olmaktadır. Dolayısıyla bu kompleks dereceli sistemlerin realize edilebilmesi için bütün geçmiş girdilerin dikkate alınması gerekmektedir. Bu da gerçek hayat uygulamalarında şu an mümkün görünmemektedir. Bu sistemlerin realizasyonlarının gerçekleştirilmesi açık bir konu olarak devam etmektedir.
7. Yapılan literatür çalışmasında da görüldüğü üzere kompleks dereceli sistemlerin kararlılık analizi üzerine yetersiz çalışma mevcut olmakla beraber bu sistemlerin kararlılık analizi için pratik yöntemler bulunmamaktadır. Yeni yöntemlerin geliştirilmesi, genel kullanılabilir tekniklerin elde edilebilmesi için hala çok ciddi çalışmalara ihtiyaç vardır.
8. Bu tez çalışmasının bir bölümünde kompleks eşlenik dereceli sistemlerin PI, PID ve kesir dereceli PI^λ tasarımı gerçekleştirilmiştir. İleride bu sistemlerin kontrolü için kompleks dereceli kontrolör yapıları kullanılarak literatüre farklı çalışmalar kazandırılabilir. Ayrıca kullanılan kontrolörün parametrelerini elde etmek için farklı yöntem ve teknikler geliştirilebilir. Kararlılık bölgelerinin çeşitli optimizasyon teknikleriyle analiz edilip kullanılan kontrolör tipi için en iyi birim basamak cevabı

veren parametreler seçilebilir. Ayrıca bu yöntemin parametre belirsizliğine sahip kompleks dereceli sistemlere genişletilmesi gelecekteki çalışmaların konusu olabilir.

9. Kompleks eşlenik dereceli sistemlerin karakteristik denklemleri polinom belirsizlik yapısına sahiptir. Bu belirsizlik türüne sahip polinomların dayanıklı kararlılık analizi için farklı yöntemler geliştirilebilir. Dayanıklı kararlılık alanında bu sistemlere uygulanabilecek yeni yöntemlerin keşfi açık bir alandır. Ayrıca geleceğe yönelik olarak farklı belirsizlik yapılarına sahip kompleks dereceli kontrol sistemlerinin dayanıklı kararlılık analizleri incelenebilir.
10. Kompleks dereceli kontrolör yapıları kullanılarak tam sayı ve kesir dereceli sistemlerin analizleri gerçekleştirilerek daha önceden klasik kontrolör yapıları kullanılarak yapılan çalışmalar ile kıyaslanabilir.
11. Kompleks dereceli sistemlerin zaman yanıtı hem reel hem de sanal kısımdan oluşmaktadır. Zaman yanıtının sanal kısmının anlamı günümüzde hala tam olarak anlaşılmamıştır. Bu durum bu sistemlerin kontrol alanında kullanımını kısıtlamaktadır. Kompleks dereceli sistemlerin durum uzayı modelleri, durum uzay denklemlerinin çözümü, Asimtotik ve BIBO kararlılık, kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik, durum geri besleme ile kök yerleştirme, gözlemleyici tasarımı gibi konular üzerine çalışmalar yapılabilir.
12. Zaman gecikmeli kompleks eşlenik dereceli sistemlerin kararlılık analizi ve kontrol işlemlerinin gerçekleştirilmesi üzerine çalışmalar genişletilebilir.

Özetle, bu konuda geliştirilecek her yeni donanım ve yazılım, yapılacak her çalışma kompleks dereceli kontrol sistemlerinin kullanılabilirliğine ve uygulanabilirliğine matematik ve mühendislik anlamında yüksek katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Abdulwahhab, O. W.** (2020). Design of a complex fractional order PID controller for a first order plus time delay system. *ISA transactions*, 99, 154-158.
- Ackermann, J., Bartlett, A., Kaesbauer, D., Sienel, W. & Steinhauser, R.** (1993). *Robust Control: Systems with uncertain physical parameters*: Springer.
- Ackermann, J. & Kaesbauer, D.** (2001). Design of robust PID controllers. In *2001 European Control Conference (ECC 2001)*, IEEE, pp. 522-527.
- Ackermann, J.** (2002). *Robust Control: The Parameter Space Approach* (Vol. 2). London: Springer.
- Adams, J. L.** (2009). *Hankel Operators for Fractional-order Systems* (Doktora Tezi). The University of Akron, the Graduate Faculty, Ohio.
- Adams, J. L., Hartley, T. T. & Lorenzo, C. F.** (2007). Complex Order-Distributions Using Conjugated Order Differintegrals. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, (pp. 347-360). Springer.
- Adams, J. L., Hartley, T. T. & Adams, L. I.** (2010a). A solution to the fundamental linear complex-order differential equation. *Advances in Engineering Software*, 41(1), 70-74. doi: 10.1016/j.advengsoft.2008.12.014.
- Adams, J. L., Veillette, R. J. & Hartley, T. T.** (2010b). Conditions for stable and causal conjugate-order systems. In *2010 IEEE International Symposium on Industrial Electronics* (pp. 108-113). IEEE.
- Adams, J. L., Veillette, R. J. & Hartley, T. T.** (2012). Conjugate-order systems for signal processing: stability, causality, boundedness, compactness. *Signal, Image and Video Processing*, 6(3), 373-380. doi:10.1007/s11760-012-0327-z.
- Akdemir, A. O., Dutta, H. & Atangana, A.** (2020). *Fractional Order Analysis: Theory, Methods and Applications*: John Wiley & Sons.
- Anagnost, J. J., Desoer, C. A. & Minnichelli, R. J.** (1989). Generalized Nyquist tests for robust stability: Frequency domain generalizations of Kharitonov's theorem. In *Robustness in Identification and Control* (pp. 79-96): Springer.
- Åström, K. J. & Hägglund, T.** (1984). Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, 20(5), 645-651.
- Åström, K. J. & Hägglund, T. H.** (1995). *PID Controllers: Theory Design and Tuning*.
- Åström, K. J., Hägglund, T. & Astrom, K. J.** (2006). Advanced PID control, vol. 461. *ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society Research Triangle*.
- Atanacković, T. M., Janev, M., Konjik, S., Pilipovic, S. & Zorica, D.** (2015). Vibrations of an elastic rod on a viscoelastic foundation of complex fractional Kelvin–Voigt type. *Meccanica*, 50(7), 1679-1692. doi:10.1007/s11012-015-0128-x.

- Atanacković, T. M., Konjik, S., Pilipović, S. & Zorica, D.** (2016). Complex order fractional derivatives in viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 20(2), 175-195. doi:10.1007/s11043-016-9290-3.
- Atanacković, T. M. & Pilipović, S.** (2017). On a constitutive equation of heat conduction with fractional derivatives of complex order. *Acta Mechanica*, 229(3), 1111-1121. doi:10.1007/s00707-017-1959-4.
- Atanacković, T. M., Janev, M., Konjik, S. & Pilipović, S.** (2017). Wave equation for generalized Zener model containing complex order fractional derivatives. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(2), 569-583. doi:10.1007/s00161-016-0548-4.
- Atanacković, T. M., Janev, M. & Pilipović, S.** (2018). Non-linear boundary value problems involving Caputo derivatives of complex fractional order. *Applied Mathematics and Computation*, 334, 326-342. doi:10.1016/j.amc.2018.04.026.
- Bandyopadhyay, B. & Kamal, S.** (2015). *Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach* (Vol. 317): Springer.
- Bajcinca, N.** (2004). Computation of stable regions in PID parameter space for time-delay systems. In. *5th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, IFAC.
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. & Trujillo, J. J.** (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods* (Vol. 3). World Scientific Publishing.
- Baleanu, D., Machado, J. A. T. & Luo, A. C.** (2011). *Fractional Dynamics and Control*. Springer New York, NY.
- Barbosa, R. S., Tenreiro Machado, J. A. & Galhano, A. M.** (2007). Performance of fractional PID algorithms controlling nonlinear systems with saturation and backlash phenomena. *Journal of Vibration and Control*, 13(9-10), 1407-1418.
- Barker, L. K.** (1979). *Mikhailov stability criterion for time-delayed systems* (No. NASA-TM-78803).
- Barmish, B.** (1984). Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(10), 935-936.
- Barmish, B. R.** (1988). A generalization of Kharitonov's four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. *Paper presented at the 1988 American Control Conference*.
- Barmish, B., Hollot, C., Kraus, F. & Tempo, R.** (1992). Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first-order compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 707-714.
- Barmish, B. R.** (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, NY.
- Barmish, B. R. & Jury, E.** (1994). New tools for robustness of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12), 2525-2525.
- Bartlett, A. C., Hollot, C. V. & Lin, H.** (1988). Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1(1), 61-71.

- Bettayeb, M., Mansouri, R., Al-Saggaf, U. & Mehedi, I. M.** (2017). Smith predictor based fractional-order-filter PID controllers design for long time delay systems. *Asian Journal of Control*, 19(2), 587-598.
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. & Keel, L. H.** (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall.
- Białas, S.** (1983). A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. *International Journal of Control*, 37(4), 717-722.
- Bode, H. W.** (1940). Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *The Bell System Technical Journal*, 19(3), 421-454.
- Bode, H. W.** (1945). Network analysis and feedback amplifier design.
- Bower, J.** (2008). Problem 2-Lexicographic Order, Citeceerx.
- Buslowicz M.** (2008a). Stability Analysis of Linear Continuous-Time Fractional Systems of Commensurate Order, *Measurements Automatics Robotics 2*, 475–484 (2008), (in Polish).
- Buslowicz M.** (2008b). Stability of Linear Continuous-Time Fractional Order Systems With Delays of the Retarded Type, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 56, 319-324.
- Cafagna, D.** (2007). "Fractional calculus: A mathematical tool from the past for present engineers [Past and present]," in *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 1(2), pp. 35-40, doi: 10.1109/MIE.2007.901479.
- Carlson, G. & Halijak, C.** (1964). Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 11(2), 210-213.
- Casagrande, D., Krajewski, W. & Viaro, U.** (2020). Elementary derivation of the Nyquist criterion for fractional-order feedback systems. *IEEE Open Journal of Circuits and Systems*, 2, 16-22.
- Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L. & Petráš, I.** (2010). *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*. World Scientific, Vol. 72.
- Caputo, M.** (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5), 529-539.
- Caputo, M.** (1969). Elasticita de dissipazione, Zanichelli, Bologna, Italy,(Links). *SIAM journal on numerical analysis*.
- Cetintas, G. & Hamamci, S. E.** (2021). A graphical stability analysis method for cascade conjugate order systems. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Vol. 85437, p. V007T07A027). American Society of Mechanical Engineers.
- Chang, C. H. & Han, K. W.** (1989). Gain margin and phase margin analysis of a nuclear reactor control system with multiple transport lags. in *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 36, no. 4, pp. 1418-1425, doi: 10.1109/23.35366.
- Chapellat, H. & Bhattacharyya, S.** (1989). A generalization of Kharitonov's theorem; Robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3), 306-311.

- Charef, A., Sun, H., Tsao, Y. & Onaral, B.** (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1465-1470.
- Chen, Y.; Petráš, I. & Xue, D.** (2009). Fractional order control – A tutorial, *In: Proceedings of the 2009 American control conference*, St. Louis, MO, USA. June 10-12, pp. 1397-1411.
- Cheng, Y. C. & Hwang, C.** (2006). Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order pd controllers. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 29(2), 241-249.
- Chien, K. L., Hrones, J. & Reswick, J. B.** (1952). On the automatic control of generalized passive systems. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 74(2), 175-183
- Cohen, G. & Coon, G. A.** (1953). Theoretical consideration of retarded control. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 75(5), 827-834.
- Cois O.** (1998). *Contribution à la définition de la représentation d'état généralisée*, DEA thesis, Université Bordeaux I, Talence.
- Cois, O., Levron, F. & Oustaloup, A.** (2001). Complex-fractional systems: Modal decomposition and stability condition. *Paper presented at the 2001 European Control Conference (ECC)*. pp. 1484-1489.
- Cremer, L.** (1947). Ein neues Verfahren zur Beurteilung der Stabilität linearer Regelungssysteme. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 25(5-6), 161-163.
- Çelik, V.** (2015). Bifurcation analysis of fractional order single cell with delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(02), 1550020.
- Çelik, V., Özdemir, M. T. & Lee, K. Y.** (2019). Effects of fractional-order PI controller on delay margin in single-area delayed load frequency control systems. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, 7(2), 380-389.
- Çetintaş, G.** (2016). *Zaman Gecikmeli Sistemlerin Kararlılık ve Çatallaşma Analizi* (Yüksek Lisans Tezi). Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Çetintas, G. & Çelik, V.** (2015). Chaos synchronization of the fractional order time delay system. *In 2015 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)*, (pp. 932-935). IEEE.
- Damarla, S. K. & Kundu, M.** (2018). *Fractional Order Processes: Simulation, Identification, and Control*: CRC Press.
- Das, S.** (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Berlin.
- Das, S.** (2011). *Functional Fractional Calculus* (Vol. 1). Berlin: Springer.
- Das, S. & Pan, I.** (2011). *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications*: Springer Science & Business Media.

- Das, S., Saha, S., Das, S. & Gupta, A.** (2011a). On the selection of tuning methodology of FOPID controllers for the control of higher order processes. *ISA transactions*, 50(3), 376-388.
- Das, S., Das, S. & Gupta, A.** (2011b). Fractional order modeling of a phwr under step-back condition and control of its global power with a robust $PI^\lambda D^\mu$ controller. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 58(5), 2431-2441.
- Dasgupta, S.** (1988). Kharitonov's theorem revisited. *Systems & Control Letters*, 11(5), 381-384.
- De, A. & Sen, S.** (2011). Root locus method for any fractional order commensurate system. *Paper presented at the IEEE Technology Students' Symposium*. (pp. 323-328). IEEE.
- Deniz, F. N., Tan, N., Hamamci, S. E. & Kaya, I.** (2015) Stability region analysis in Smith predictor configurations using a PI controller. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 37(5):606-614.
- Diethelm, K. & Ford, N. J.** (2002). Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(2), 229-248.
- Djaferis, T. E.** (1995). *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Euler, L.** (1738). De progressionibus transcendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequent. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Scientiarum Petropolitanae*, 5, 55.
- Feliu-Battle, V., Rivas-Perez, R. & Castillo-Garcia, F. J.** (2009). Fractional order controller robust to time delay variations for water distribution in an irrigation main canal pool. *Computers and electronics in agriculture*, 69(2), 185-197.
- Fu, M. & Tsyphkin, Y. Z.** (1993). Modified Mikhailov plots for robust absolute stability with non-parametric perturbations and uncertain nonlinearity. *International Journal of Control*, 58(4), 925-932.
- Gorenflo, R. & Mainardi, F.** (1997). *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, pp. 223–276.
- Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F. & Rogosin, S. V.** (2014). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer Monographs in Mathematics.
- Gryazina, E. N. & Polyak, B. T.** (2006). Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited. *Automatica*, 42(1): 13-26.
- Gross, B. & Braga, E. P.** (1961). *Singularities of Linear System Functions*, Elsevier, New York, NY, USA.
- Grünwald, A. K.** (1867). Ueber, begrenzte, derivationen und deren anwendung, *Z. Math. Phys.*, 12, 441–480.
- Guefrachi, A., Najar, S., Amairi, M. & Aoun, M.** (2017a). Tuning of fractional complex order PID controller * *This work was supported by the Ministry of the Higher Education and Scientific Research in Tunisia. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 14563-14568. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.2093.

- Guefrachi, A., Najjar, S., Amairi, M. & Aoun, M.** (2017b). Tuning of a $PI^{x+iy}D$ fractional complex order controller. Paper presented at the 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), (pp. 643-648). IEEE.
- Hamamci, S. E.** (2007). An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10), 1964-1969.
- Hamamci, S. E.** (2012). PI and PID stabilization of neutral and retarded systems with time delay. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 20(Sup. 1): 1189-1205.
- Hamamci, S. E. & Tan, N.** (2006). Design of PI controllers for achieving time and frequency domain specifications simultaneously. *ISA transactions*, 45(4), 529-543.
- Hamamci, S. E., Kanthabhabha, P. & Vaithiyanathan, K.** (2008). Computation of all stabilizing first order controllers for fractional-order systems. In *2008 27th Chinese Control Conference* (pp. 123-128). IEEE.
- Hanif, O., Babu, G. B. & Sharma, S.** (2018, February). Performance improvement of $PI^{x+iy}D$ fractional complex order controller using genetic algorithm. Paper presented at the 2018 Fourth International Conference on Advances in Electrical, Electronics, Information, Communication and Bio-Informatics (AEEICB) (pp. 1-5). IEEE.
- Hartley, T. T., Lorenzo, C. F. & Adams, J. L.** (2005). Conjugated-order differintegrals. Paper presented at the International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Vol. 47438, pp. 1597-1602.
- Hilfer, R.** (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World scientific.
- Ho, W. K., Hang, C. C. & Cao, L. S.** (1995). Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications. *Automatica*, 31(3), 497-502.
- Hollkamp, J. P., Sen, M. & Semperlotti, F.** (2018). Model-order reduction of lumped parameter systems via fractional calculus. *Journal of Sound and Vibration*, 419, 526-543. doi:10.1016/j.jsv.2018.01.011.
- Hohenbichler, N. & Abel, D.** (2008). Calculating all KP admitting stability of a PID control loop. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 5802-5807.
- Hwang, C., Leu, J. F. & Tsay, S. Y.** (2002). A note on time-domain simulation of feedback fractional-order systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4), 625-631.
- Ijaz, S., Choudhry, M. A., Ali, A. & Javaid, U.** (2015). Application of fractional order control technique to an electro-hydraulic position servomechanism. *Journal of Engineering and Technology*, 34, 35-44.
- Jacob, J. A., Tare, A. V., Vyawahare, V. A. & Pande, V. N.** (2016). A review of time domain, frequency domain and stability analysis of linear complex-order systems. Paper presented at the 2016 IEEE International WIE Conference on Electrical and Computer Engineering (WIECON-ECE), (pp. 164-169). IEEE.

- Jiao, Z., Chen, Y. Q. & Podlubny, I.** (2012). *Distributed Order Dynamic Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer.
- Junyi, L. & Chen, Q.** (2015). Fractional order controller designing with firefly algorithm and parameter optimization for hydroturbine governing system. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2015/825608>
- Kashiwagi, Y.** (1965). *Stability of Linear Systems with Time Delay*: (Ph.D. Thesis) Stanford University.
- Kesarkar, A. A. & Selvagesan, N.** (2015). Novel tuning expressions for fractional order ($[PD]^\beta$ and $[PI]^\alpha$) controllers using a generalized plant structure. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 17(1), 70-80.
- Khandani, K., Jalali, A. A. & Mehdiabadi, M. R. R.** (2012). Robust complex order controller design for DC motors. In *20th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE2012)*, (pp. 900-903). IEEE.
- Kharitonov, V.** (1979). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family systems of linear differential equations. *Differential Equations*, 14, 1483-1485.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J.** (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. (Vol. 204): elsevier.
- Kiryakova, V. S.** (1993). *Generalized Fractional Calculus and Applications*: CRC press.
- Kober, H.** (1941). On a theorem of Schur and on fractional integrals of purely imaginary order. *Transactions of the American Mathematical Society*, 50(1), 160-174.
- Krishna, B. T.** (2011). Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. *Signal Processing*, 91(3), 386-426.
- Kučera, V.** (2001). Robust controllers (Robustní regulátory). *Automa*, 7(6), 43-45.
- Lacroix, S. F.** (1819). *Traite du Calcul Differentiel et du Calcul Integral*, Paris (Courtier), second edition, 409-410.
- Ladaci, S. & Charef, A.** (2011). Fractional adaptive control. A survey. *Classification and application of fractals: New research*, 261-275.
- Lagrange, J. L.** (1849). Sur un nouvelle espsce de calcul relatif a la differentiation et a l'integration des quantites variables, *Oeuvres de Lagrange*, Paris (Gauthier-Villars) 3, 441-476.
- Lakshmikantham, V., Leela, S. & Vasundhara Devi, J.** (2009). *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 176 pages, ISBN:978-1-904868-64-4 [in English].
- Lanusse, P., Oustaloup, A. & Mathieu, B.** (1993). Third generation CRONE control. *Paper presented at the Proceedings of IEEE Systems Man and Cybernetics Conference-SMC*. Vol. 2, (pp. 149-155). IEEE.
- Laplace, P. S.** (1820). *Theorie Analytique des Probabilites* (Vol. 7), Paris (Courtier).
- Leibniz, G. W.** (1695a). Letter from Hanover, Germany to G.F.A. L'Hospital, September 30, 1695, in *Mathematische Schriften 1849*, reprinted 1962, Hildesheim, Germany (Olms Verlag) 2, 301-302.

- Leibniz, G. W.** (1695b). Letter from Hanover, Germany to J. Bernoulli, December 28, 1695, in *Mathematische Schriften* 1849, reprinted 1962, Hildesheim, Germany (Olms Verlag) 3.1, 226.
- Leibniz, G. W.** (1697). Letter from Hanover, Germany to John Wallis, May 28, 1697, in *Mathematische Schriften* 1849, reprinted 1962, Hildesheim, Germany (Olms Verlag) 4, 25.
- Leonhard, A.** (1944). Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. *Archiv für Elektrotechnik*, 38(1), 17-28.
- Letnikov, A. V.** (1868). Theory of differentiation of fractional order, *Mat. Sb.*, vol. 3, pp. 1–68.
- Li, W., & Zhao, H.** (2011). Rational function approximation for fractional order differential and integral operators. *Acta Automatica Sinica*, 37(8), 999-1005.
- Liouville, J.** (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, *J. École Polytech.*, 13, 1–69.
- Love, E. R.** (1971). Fractional derivatives of imaginary order. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2), 241-259.
- Lozynskyy, O. Y., Kalenyuk, P., Lozynskyy, A. & Kasha, L.** (2020). A Frequency criterion for analysis of stability of systems with fractional-order derivatives. *Math. Modeling Comput*, 7, 389-399.
- Lurie, B. J.** (1994). Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller.
- Luyben, M. L. & Luyben, W. L.** (1997). *Essentials of Process Control*: McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics.
- MacFarlane, A.** (1979). The development of frequency-response methods in automatic control [Perspectives]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2), 250-265.
- Machado, J. A. T.** (2013). Fractional generalization of memristor and higher order elements. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(2), 264-275.
- Machado, J. A. T., Kiryakova, V. & Mainardi, F.** (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16(3), 1140-1153.
- Makris, N.** (1991). *Theoretical and Experimental Investigation of Viscous Dampers in Application of Seismic and Vibration Isolation*. State University of New York at Buffalo.
- Makris, N.** (1994). Complex-parameter kelvin model for elastic foundations. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 23(3), 251-264.
- Makris, N. & Constantinou, M.** (1993). Models of viscoelasticity with complex-order derivatives. *Journal of engineering mechanics*, 119(7), 1453-1464.
- Malti, R., Aoun, M., Cois, O., Oustaloup, A. & Levron, F. O.** (2003). H_2 norm of fractional differential systems. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, USA, (Vol. 37033, pp. 729-735).

- Manabe, S.** (1960). The non-integer integral and its application to control systems. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, 80(860), 589-597.
- Manabe, S.** (2003). Early development of fractional order control. *Paper presented at the International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Vol. 37033, pp. 609-616.
- Matignon, D.** (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *In Computational engineering in systems applications*. 2(1), pp. 963-968.
- Matignon, D.** (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *In ESAIM: proceedings, EDP Sciences*. Vol. 5, pp. 145-158.
- Matsuda, K. & Fujii, H.** (1993). H (infinity) optimized wave-absorbing control-analytical and experimental results. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(6), 1146-1153.
- Matušů, R.** (2008). *Robust Control of Systems with Parametric Uncertainty: An Algebraic Approach*. (PhD Thesis), Tomas Bata University in Zlín.
- Matušů, R.** (2011). Matlab Toolboxes for Fractional Order Control: An Overview. *Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium "Intelligent Manufacturing & Automation"*, 23-26th November, Vienna, Austria, Vol. 22, No.1.
- Matušů, R., Šenol, B. & Pekař, L.** (2017). Robust stability of fractional order polynomials with complicated uncertainty structure. *Plos one*, 12(6), e0180274.
- Melchor-Aguilar, D. & Mendiola-Fuentes, J.** (2022). Mikhailov stability criterion for fractional commensurate order systems with delays. *Journal of the Franklin Institute*, 359(15), 8395-8408.
- Mendiola-Fuentes, J. & Melchor-Aguilar, D.** (2018). Modification of Mikhailov stability criterion for fractional commensurate order systems. *Journal of the Franklin Institute*, 355(5), 2779-2790.
- Meng, L. & Xue, D.** (2012). A new approximation algorithm of fractional order system models based optimization. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*. 134(4).
- Mikhailov, A.** (1938). The methods of harmonic analysis in the theory of control. *Avtomat. i Telemekh*, 3, 27-81.
- Miller, K. S. & Ross, B.** (1993). *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*: Wiley.
- Minnichelli, R. J., Anagnost, J. J. & Desoer, C. A.** (1989). An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(9), 995-998.
- Mitrović, D.** (1959). Graphical analysis and synthesis of feedback control systems I-Theory and analysis. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, 77(6), 476-487.
- Mittag-Leffler, G. M.** (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *CR Acad. Sci. Paris*, 137(2), 554-558.

- Moghadam, M. G., Padula, F. & Ntogramatzidis, L.** (2018). Tuning and performance assessment of complex fractional-order PI controllers. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4), 757-762.
- Monje, C. A., Vinagre, B. M., Feliu, V. & Chen, Y.** (2008). Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control engineering practice*, 16(7), 798-812.
- Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D. & Feliu-Battle, V.** (2010). *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*: Springer Science & Business Media.
- Morari, M. & Zafiriou, E.** (1989). *Robust Process Control*: Morari.
- Muresan, C. I., Dulf, E. H. & Both, R.** (2015). A novel tuning algorithm for fractional order IMC controllers for time delay processes. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 4(3), 218.
- Naifar, O. & Makhlouf, A. B.** (2022). *Fractional Order Systems-Control Theory and Applications*. Springer International Publishing
- Neimark, Y. I.** (1948). Search for the parameter values that make automatic control system stable. *Automatica i Telemekhanika*, 9(3): 190–203 (in Russian).
- Neimark, Y. I.** (1949). Stability of the linearized systems. *Leningrad: LKVVIA*, (in Russian).
- Nigmatullin, R. R. & Mehaute, A. L.** (2005). Is there geometrical/physical meaning of the fractional integral with complex exponent?. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 351(33-36), 2888-2899. doi:10.1016/j.jnoncrysol.2005.05.035.
- Nyquist, H.** (1932). Regeneration theory. *Bell system technical journal*, 11(1), 126-147.
- Ogata, K.** (1997). *Modern Control Engineering*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall.
- Oldham, K. & Spanier, J.** (1974). *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*: Elsevier.
- Oliveira, De, E. C. & Machado, T. J. A.** (2014). A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Ortigueira, M. D.** (2022). The complex order fractional derivatives and systems are non-hermitian. *In International workshop on Advanced Theory and Applications of Fractional Calculus*, (pp.38-44). Springer, Cham. doi: 10.20944/preprints202103.0399.v1.
- Ortigueira, M. D. & Machado, J. T.** (2015). What is a fractional derivative? *Journal of computational Physics*, 293, 4-13.
- Ortigueira, M. D., Rodríguez-Germá, L. & Trujillo, J. J.** (2011). Complex Grünwald–Letnikov, Liouville, Riemann–Liouville, and Caputo derivatives for analytic functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(11), 4174-4182.
- Oustaloup, A.** (1991). *La Commande CRONE: Commande Robuste D'ordre Non Entier*. Hermes, Paris.
- Oustaloup, A., Sabatier, J. & Lanusse, P.** (1999). From fractal robustness to the CRONE control. *FCAA*, 2(1), 1-30.

- Oustaloup, A., Melchior, P., Lanusse, P., Cois, O. & Dancla, F.** (2000a). The CRONE toolbox for Matlab. *Paper presented at the CACSD. Conference Proceedings. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design* (Cat. No. 00TH8537), pp. 190-195.
- Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B. & Nanot, F. M.** (2000b). Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), 25-39.
- Padula, F. & Visioli, A.** (2015). *Advances in Robust Fractional Control*. Cham: Springer International Publishing, (pp. 1-176).
- Pan, I., Das, S. & Gupta, A.** (2011). Handling packet dropouts and random delays for unstable delayed processes in NCS by optimal tuning of $PI^\lambda D^\mu$ controllers with evolutionary algorithms. *ISA transactions*, 50(4), 557-572.
- Petráš, I.** (2008). Stability of fractional-order systems with rational orders. *arXiv preprint arXiv:0811.4102*.
- Petráš, I.** (2011a). *Fractional-Order Nonlinear Systems, Modeling, Analysis and Simulation*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18101-6>.
- Petráš, I.** (2011b). Stability test procedure for a certain class of the fractional-order systems. *Paper presented at the 2011 12th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. (pp. 303-307). IEEE.
- Petráš, I. & Dorcák, L.** (1999). The frequency method for stability investigation of fractional control systems. *J. of SACTA*, 2(1-2), 75-85.
- Petráš, I. & Hypiusova, M.** (2002). Design of fractional-order controllers via H_∞ norm minimisation. *Selected Topics in Modelling and Control*, 3, 50-54.
- Pinto, C. M. & Machado, J. A. T.** (2011a). Complex order van der Pol oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 65(3), 247-254.
- Pinto, C. M. A. & Machado, J. A. T.** (2011b). Complex-order forced van der Pol oscillator. *Journal of Vibration and Control*, 18(14), 2201-2209. doi:10.1177/1077546311429150.
- Pinto, C. M. & Machado, J. A. T.** (2011c). Complex order biperiodic rhythms. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(10), 3053-3061.
- Pinto, C. M. A. & Carvalho, A. R. M.** (2015a). Effect of drug-resistance in a fractional complex-order model for HIV infection. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1), 188-189. doi:10.1016/j.ifacol.2015.05.162.
- Pinto, C. M. A. & Carvalho, A. R. M.** (2015b). Fractional complex-order model for HIV infection with drug resistance during therapy. *Journal of Vibration and Control*, 22(9), 2222-2239. doi:10.1177/1077546315574964.
- Podlubny, I.** (1999a). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, San Diego. Vol. 198.
- Podlubny, I.** (1999b). Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\lambda$ controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208-214.

- Podlubny, I.** (2001). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv preprint math/0110241*.
- Popov, E. P.** (1962). *The Dynamics of Automatic Control Systems*. New York: Pergamon Press.
- Post, E. L.** (1930). Generalized differentiation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 32(4), 723-781.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P.** (2007). *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*: Cambridge university press.
- Riemann, G. F. B.** (1876). Versuch Einer Allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *Gesammelte Werke*, Leipzig, 62.
- Rivera, D. E., Morari, M. & Skogestad, S.** (1986). Internal model control: PID controller design. *Industrial & engineering chemistry process design and development*, 25(1), 252-265.
- Ross, B.** (1975). A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In: *Ross, B. (eds) Fractional Calculus and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics*, vol 457. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0067096>.
- Ross, B.** (1977). The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 4(1), 75-89.
- Ross, B. & Northover, F.** (1978). A use for a derivative of complex order in the fractional calculus. *Indian J. Pure Appl. Math*, 9(4), 400-406.
- Rubin, B.** (1996). *Fractional Integrals and Potentials*. (Vol. 82): CRC Press.
- Sabatier, J., Agrawal O. P. & Machado, J.T.** (2007). *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in PPhysics and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- Sabatier, J., Lanusse, P., Melchior, P. & Oustaloup, A.** (2015). Fractional order differentiation and robust control design. *Intelligent systems, control and automation: science and engineering*, 77, 13-18.
- Saleh, A. I., Hasan, M. M. & Darwish, N. M.** (2010). The Mikhailov stability criterion revisited. *JES. Journal of Engineering Sciences*, 38(1), 195-207.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. & Marichev, O. I.** (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon.
- Sanchez-Pena, R. S. & Sznaiier, M.** (1998). *Robust Systems Theory and Applications*: John Wiley & Sons, Inc.
- Sathishkumar, P. & Selvaganesan, N.** (2021). Tuning of complex coefficient PI/PD/PID controllers for a universal plant structure. *International Journal of Control*, 94(11), 3190-3212.
- Schrödel, F.** (2016). *Stability Region Based Robust Controller Synthesis* (Doctoral dissertation), Universitätsbibliothek der RWTH Aachen.

- Shah, P., & Agashe, S.** (2013). Design and optimization of fractional PID controller for higher order control system. In International conference of IEEE ICART (pp. 588-592).
- Shah, P. & Agashe, S.** (2016). Review of fractional PID controller. *Mechatronics*, 38, 29-41.
- Shah, P., Sekhar, R., Iswanto, I. & Shah, M.** (2021). Complex order $pi a+ jb d c+ jd$ controller design for a fractional order dc motor system. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, 6(2), 541-51.
- Shahiri, M., Ranjbar, A., Karami, M. R. & Ghaderi, R.** (2015). Robust control of nonlinear PEMFC against uncertainty using fractional complex order control. *Nonlinear Dynamics*, 80(4), 1785-1800. doi:10.1007/s11071-014-1718-1.
- Shahiri, M., Ranjbar Noei, A., Karami, M. R., & Ghaderi, R.** (2016a). Tuning method for fractional complex order controller using standardized k-Chart: Application to pemfc control. *Asian Journal of Control*, 18(3), 1102-1118.
- Shahiri, M., Ranjbar, A., Karami, M. R. & Ghaderi, R.** (2016b). New tuning design schemes of fractional complex-order PI controller. *Nonlinear Dynamics*, 84(3), 1813-1835. doi:10.1007/s11071-016-2608-5.
- Sharma, R., Gaur, P. & Mittal, A.** (2015). Performance analysis of two-degree of freedom fractional order PID controllers for robotic manipulator with payload. *ISA transactions*, 58, 279-291.
- Sekhar, R., Singh, T. P. & Shah, P.** (2020). Complex order $PI \alpha D \gamma$ design for surface roughness control in machining CNT Al-Mg hybrid composites. *Adv. Sci. Technol. Eng. Syst. J*, 5, 299-306.
- Shahrokhi, M. & Zomorodi, A.** (2013). Comparison of Tuning Methods of PID Controller. *Dep. Chem. Pet. Eng. Sharif Univ. Technol*, 15-17.
- Shukla, A. K. & Prajapati, J. C.** (2007). On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *Journal of mathematical analysis and applications*, 336(2), 797-811.
- Si, G., Diao, L., Zhu, J., Lei, Y. & Zhang, Y.** (2017). Attempt to generalize fractional-order electric elements to complex-order ones. *Chinese Physics B*, 26(6). doi:10.1088/1674-1056/26/6/060503.
- Šiljak, D.** (1964). Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane. I—Linear continuous systems, II—Sampled-data systems. *AIEE Transactions (Application and Industry)*, 83, 449–466.
- Šiljak, D.** (1966). Generalization of the parameter plane method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11(1), 63–70.
- Šiljak, D.** (1969). *Nonlinear Systems: The Parameter Analysis and Design*. New York: Wiley.
- Silva, G. J., Datta, A. & Bhattacharyya, S. P.** (2005). *PID Controllers for Time-Delay Systems* (Vol. 43): Springer.
- Silva, M. F., Machado, J. A. T. & Barbosa, R. S.** (2006). Complex-order dynamics in hexapod locomotion. *Signal Processing*, 86(10), 2785-2793. doi:10.1016/j.sigpro.2006.02.024.

- Söylemez, M. T., Munro, N. & Baki, H.** (2003). Fast calculation of stabilizing PID controllers. *Automatica*, 39(1): 121-126.
- Stanislawski, R.** (2022). Modified Mikhailov stability criterion for continuous-time noncommensurate fractional-order systems. *Journal of the Franklin Institute*, 359(4), 1677-1688.
- Stegun, I. A. & Abramowitz, M.** (1964). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications.
- Stojic, M. & Siljak, D.** (1965). Generalization of Hurwitz, Nyquist, and Mikhailov stability criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(3), 250-254.
- Tan, N.** (1999). *Robust Analysis and Design of Control Systems with Parametric Uncertainty* (Doctoral dissertation), University of Sussex.
- Tan, N. & Atherton, D. P.** (2002). Some results on control systems with mixed perturbations. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 163-168.
- Tan, N., Kaya, I. & Atherton, D. P.** (2003). Computation of stabilizing PI and PID controllers, In: *2003 IEEE Conference on Control Applications*, IEEE, pp. 876-881.
- Tan, N. & Atherton, D. P.** (2006). Design of stabilizing PI and PID controllers, *International Journal of Systems Science*, 37(8): 543-554.
- Tare, A. V., Jacob, J. A., Vyawahare, V. A. & Pande, V. N.** (2018). Design of novel optimal complex-order controllers for systems with fractional-order dynamics. *International Journal of Dynamics and Control*, 7(1), 355-367. doi:10.1007/s40435-018-0448-5.
- Tavazoei, M. S. & Haeri, M.** (2009). A note on the stability of fractional order systems. *Mathematics and Computers in simulation*, 79(5), 1566-1576.
- Tepljakov, A.** (2017a). FOMCON: fractional-order modeling and control toolbox. In *Fractional-order modeling and control of dynamic systems* (pp. 107-129). Springer, Cham.
- Tepljakov, A.** (2017b). *Fractional-Order Modeling and Control of Dynamic Systems*: Springer.
- Tepljakov, A., Petlenkov, E. & Belikov, J.** (2011). FOMCOM: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control. *International Journal of Microelectronics and computer science*, 2(2), 51-62.
- Tepljakov, A., Petlenkov, E. & Belikov, J.** (2020). FOMCON toolbox (2011). URL <http://www.fomcon.net>.
- Tustin, A., Allanson, J., Layton, J. & Jakeways, R.** (1958). The design of systems for automatic control of the position of massive objects. *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs*, 105(1S), 1-57.
- Tsytkin, Y. Z. & Polyak, B.** (1991). Frequency domain criterion for robust stability of polytope of polynomials. In *Control of uncertain dynamic systems*, edited by S.P. Bhattacharyya and L. H. Keel (CRC Press), 491-499.
- Tsytkin, Y. Z. & Polyak, B. T.** (1992). Frequency domain criteria for l^p -robust stability of continuous linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(12), 1464-1469.

- Valério, D.** (2005a). Toolbox ninteger for MatLab. Accessed: Jan, 18, 2020. Available from URL: <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>
- Valério, D. P. M. O.** (2005b). *Fractional Robust System Control* (PhD Thesis). Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Valério, D. & Da Costa, J. S.** (2004). Ninteger: A non-integer control toolbox for Matlab, *In: Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Bordeaux, France.
- Valério, D. & Da Costa, J. S.** (2011). Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations. *Signal Processing*, 91(3), 470-483. doi:10.1016/j.sigpro.2010.04.006.
- Valério, D. & Da Costa, J. S.** (2013). *An Introduction to Fractional Control* (Vol. 91). IET.
- Vinagre, B., Podlubny, I., Hernandez, A. & Feliu, V.** (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(3), 231-248.
- Vishnegradsky, I.** (1876). Sur la théorie générale des régulateurs. *Compt. Rend. Acad. Sci*, 83, 318-321.
- Vyhldal, T. & Zitek, P.** (2009). Modification of Mikhaylov criterion for neutral time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10), 2430-2435.
- Wang, Q.-G., Fung, H.-W. & Zhang, Y.** (1999). PID tuning with exact gain and phase margins. *ISA transactions*, 38(3), 243-249.
- Wei, Y., Gao, Q., Peng, C. & Wang, Y.** (2014). A rational approximate method to fractional order systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(6), 1180-1186.
- Wiman, A.** (1905). Über die Nullstellen der Funktionen $E_a(x)$. *Acta Mathematica*, 29(1), 217-234.
- Wright, W. C. & Kerlin, T. W.** (1968). An Efficient, Computer-Oriented Method for Stability Analysis of Large Multivariable Systems. *Univ. of Tennessee Nuc. Eng. Dept. Report NEUT-2806-3*.
- Wright, W. & Kerlin, T.** (1969). The modified Mikhailov method for reactor stability analysis. *Trans. ANS* 12, 736.
- Xue, D.** (2017). *Fractional-Order Control Systems*. In *Fractional-Order Control Systems: de Gruyter*.
- Xue, D. & Chen, Y.** (2015). *Modeling, Analysis and Design of Control Systems in MATLAB and Simulink*: World Scientific Publishing.
- Zadeh, L. A. & Desoer, C. A.** (1963). *Linear Systems Theory: The State Space Approach*. New York, USA: MacGraw Hill.
- Zhang, S., Liu, L. & Xue, D.** (2020). Nyquist-based stability analysis of non-commensurate fractional-order delay systems. *Applied Mathematics and Computation*, 377, 125111.

- Zheng, D. & Ren, Z.** (2009). Computation of stabilizing PI and PID controllers by using Kronecker summation method. *Energy Conversion and Management*, 50(7): 1821-1827.
- Zheng, M., Zhang, G. & Huang, T.** (2021). Tuning of fractional complex-order direct current motor controller using frequency domain analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(4), 3167-3181.
- Zheng, M., Huang, T., Zhang, G. & Zhong, D.** (2019). Stability Region Design of Fractional Complex Order $PI^{\lambda+\mu i}$ controller using D segmentation. *Paper presented at the 2019 6th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)*. (pp. 39-43). IEEE.
- Zhong, J. & Li, L.** (2015). Tuning fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers for a solid-core magnetic bearing system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(4), 1648-1656.
- Zhou, Y.** (2014). *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2014. <https://doi.org/10.1142/9069>.
- Ziegler, J. G. & Nichols, N. B.** (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Trans. Asme*, 64(11).

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Gülten ÇETİNTAŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2016, Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Devreler ve Sistemler Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM:

- 2014 yılından itibaren Muş Alparslan Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

Doktora Projesi

- **Çetintaş, G. & Hamamcı, S. E.** Kompleks Dereceli Sistemlerin Kararlılık Analizi ve Kontrol İşlemlerinin Gerçekleştirilmesi, İnönü Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi, FDK-2021-2370.

Uluslararası (SCI) hakemli dergilerde yayınlanan makaleler:

- **Cetintas, G. & Hamamci, S. E.** (2022). Proportional–integral–derivative stabilization of complex conjugate-order systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 01423312221095840.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

- **Cetintas, G. & Hamamci, S. E.** (2021). A Graphical Stability Analysis Method for Cascade Conjugate Order Systems. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Vol. 85437, p. V007T07A027). American Society of Mechanical Engineers.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

- **Çetintaş, G. & Hamamcı, S. E.** (2019). Kompleks katsayılı sistemlerin kararlılık analizi için kullanıcı dostu bir grafiksel arayüz tasarımı. *Otomatik Kontrol Ulusal Kongresi*, Muğla.