

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EŞİT GENİŞLİKLİ (EW) DALGA DENKLEMİNİN
TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN
YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Sercan KARAKAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

HAZİRAN 2020

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EŞİT GENİŞLİKLİ (EW) DALGA DENKLEMİNİN
TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN
YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Sercan KARAKAŞ
(36173614008)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya ayrıca tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğün üstesinden gelmem için bana yol gösteren bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim hocalarım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY, Prof. Dr. Alaattin ESEN, Prof. Dr. Kemal Özdemir, Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bu zorlu süreçte büyük motivasyon veren değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatın zorluklarına karşı bana yol gösteren, cesaretlendirip sorunları çözmemde yardımcı olan, hasta iken kendisini düşünmeyip benim öğrenimime devam etmemi isteyen rahmetli abim Serkan KARAKAŞ'a ithafen...

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Eşit Genişlikli (EW) Dalga Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ali Sercan KARAKAŞ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Sonlu Eleman Yöntemleri.....	3
2.2 Kollokasyon Yöntemi.....	6
2.3 Spline Fonksiyonlar.....	7
2.4 Trigonometrik B-spline fonksiyonlar.....	9
2.4.1 Lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları.....	9
2.4.2 Kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları.....	12
2.4.3 Kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları.....	14
2.5 Fourier Seri (Von Neumann) Yöntemi.....	17
3. EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (EW) DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER.....	20
3.1 Giriş.....	20
3.2 Model Problemler.....	22
3.2.1 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi.....	23
3.2.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	23
3.2.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	24
3.2.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı.....	25
3.2.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu.....	25
4. EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ.....	27
4.1 Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme.....	27
4.1.1 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi.....	29
4.1.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	34
4.1.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	36
4.1.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı.....	39
4.1.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu.....	40
4.2 Bir Lineerleştirme Tekniği.....	44
4.2.1 Kararlılık Analizi.....	45
4.2.2 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi.....	46
4.2.3 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	50
4.2.4 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	54
4.2.5 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı.....	55
4.2.6 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu.....	57

4.3 Lumped İç İterasyonlu Lineerleştirme	61
4.3.1 Kararlılık Analizi.....	62
4.3.2 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi	62
4.3.3 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi	68
4.3.4 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi	69
4.3.5 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı	71
4.3.6 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu	72
4.4 Sonlu Eleman Yaklaşımlarının Karşılaştırılması.....	76
4.4.1 Problem 1: Tek Solitary Dalga Hareketi.....	80
4.4.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi	80
4.4.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi	82
4.4.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı	82
4.4.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu	84
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	90

ÇİZELGELER DİZİNİ

- Çizelge 4.1** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 30
- Çizelge 4.2** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 31
- Çizelge 4.3** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).. 32
- Çizelge 4.4** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 33
- Çizelge 4.5** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 34
- Çizelge 4.6** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).. 35
- Çizelge 4.7** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).. 35
- Çizelge 4.8** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 2' nin k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$). 36
- Çizelge 4.9** : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$). 37
- Çizelge 4.10**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$). 38
- Çizelge 4.11**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$). 38
- Çizelge 4.12**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri. 39
- Çizelge 4.13**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri. 40
- Çizelge 4.14**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dakilerin karşılaştırılması..... 40
- Çizelge 4.15**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$). 41
- Çizelge 4.16**: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$). 41

Çizelge 4.17: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	42
Çizelge 4.18: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in $d = 5, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları. 42	42
Çizelge 4.19: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	43
Çizelge 4.20: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	43
Çizelge 4.21: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in $d = 2, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları. 43	43
Çizelge 4.22: Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	44
Çizelge 4.23: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 47	47
Çizelge 4.24: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 48	48
Çizelge 4.25: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).. 49	49
Çizelge 4.26: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 50	50
Çizelge 4.27: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$). 51	51
Çizelge 4.28: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).. 52	52
Çizelge 4.29: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	52
Çizelge 4.30: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 2' nin k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).....	53
Çizelge 4.31: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).	53
Çizelge 4.32: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$).....	54

Çizelge 4.33: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).....	55
Çizelge 4.34: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nin farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.....	56
Çizelge 4.35: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nin farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.....	56
Çizelge 4.36: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dakilerin karşılaştırılması.....	57
Çizelge 4.37: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in k nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	57
Çizelge 4.38: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in k nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	58
Çizelge 4.39: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	58
Çizelge 4.40: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 5, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.....	59
Çizelge 4.41: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	59
Çizelge 4.42: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	59
Çizelge 4.43: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 2, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.....	60
Çizelge 4.44: Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	60
Çizelge 4.45: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	63
Çizelge 4.46: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	63
Çizelge 4.47: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	64
Çizelge 4.48: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	65
Çizelge 4.49: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	66

Çizelge 4.50: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	66
Çizelge 4.51: Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	67
Çizelge 4.52: Lumped iç iterasyon ile Problem 2' nin k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).	68
Çizelge 4.53: Lumped iç iterasyon ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).	69
Çizelge 4.54: Lumped iç iterasyon ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$).	70
Çizelge 4.55: Lumped iç iterasyon ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).	70
Çizelge 4.56: Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.	71
Çizelge 4.57: Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.	72
Çizelge 4.58: Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dekilerin karşılaştırılması.	72
Çizelge 4.59: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	73
Çizelge 4.60: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	73
Çizelge 4.61: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	74
Çizelge 4.62: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 5, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.	74
Çizelge 4.63: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	75
Çizelge 4.64: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	75
Çizelge 4.65: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 2, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.	75
Çizelge 4.66: Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	76

Çizelge 4.67: Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).	80
Çizelge 4.68: Problem 2' nin $t_{final} = 30$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).	81
Çizelge 4.69: Problem 3' ün $t_{final} = 15$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).	81
Çizelge 4.70: Problem 4' ün $t_{final} = 12$ zamanında $h = 0.05$ ve $k = 0.025$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri.	82
Çizelge 4.71: Problem 5' in $t_{final} = 800$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	83
Çizelge 4.72: Problem 5' in $t_{final} = 800$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	83
Çizelge 4.73: Problem 5' in $d = 2, d = 5, h = 0.07, k = 0.05$ için hesaplanan korunum sabitleri lineer artış oranları ($\mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).	83

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	: Lineer B-spline fonksiyonların gösterimi.....	11
Şekil 2.2	: Kuadratik B-spline fonksiyonların gösterimi	13
Şekil 2.3	: Kübik B-spline fonksiyonların gösterimi	16
Şekil 2.4	: Trigonometrik Kübik B-spline fonksiyonlar	18
Şekil 4.1	: Tek solitary dalğanın hareketi	76
Şekil 4.2	: İki solitary dalğanın girişimi	77
Şekil 4.3	: Üç solitary dalğanın girişimi	78
Şekil 4.4	: $t = 12$ zamanında μ nün farklı değerleri için Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu	78
Şekil 4.5	: $d=5$ için ardışık dalga oluşumu	79
Şekil 4.6	: $d=2$ için ardışık dalga oluşumu	79



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

- \mathbb{N} : Doğal sayılar cümlesi
 \mathbb{R} : Reel sayılar cümlesi
EW : Eşit Genişlikli Dalga
R.G : Rubin-Graves
Lin : Lineerleştirilmiş



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EŞİT GENİŞLİKLİ (EW) DALGA DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ALİ SERCAN KARAKAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

90+xiii sayfa

2020

Danışman: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, tezin temel amacından kısaca bahsedildikten sonra tezde ele alınacak olan Eşit Genişlikli Dalga (EW) denklemi hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan sonlu eleman yöntemleri ve trigonometrik B-spline baz fonksiyonları hakkında bazı önemli bilgiler sunuldu.

Üçüncü bölümde EW denklemi için daha önce yapılan literatürde mevcut bazı çalışmalardan bahsedildi. Ayrıca yine bu bölümde tezde EW denklemi için ele alınacak model problemler başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, EW denklemi için beş test problemi gözönüne alındı. Her bir problemin trigonometrik kübik baz fonksiyonlarına dayalı kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen nümerik şemaları çözüldü. Sunulan yöntemle elde edilen nümerik çözümler literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla ve aynı zamanda varsa analitik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlardan hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri çizelgeler halinde sunuldu. Ayrıca elde edilen nümerik çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışlarını sergilediğini göstermek için bazı grafikler verildi. Bunlarla birlikte bu bölümde tezde kullanılan sonlu eleman yaklaşımlarının kararlılık analizi incelendi.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde ise bu tez çalışmasında elde edilen nümerik sonuçlar kendi aralarında ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı ve kısa bir değerlendirilmesi yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Eşit Genişlikli Dalga Denklemi, Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi, Trigonometrik B-spline.

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF EQUAL WIDTH (EW) WAVE EQUATION USING TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

Ali Sercan KARAKAŞ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

90+xiii pages

2020

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

In the first chapter of this five-chapter study, after mentioning the main purpose of the thesis briefly, general information about the Equal Width Wave (EW) equation to be discussed in the thesis is given.

In the second chapter, some important information about finite element methods and trigonometric B-spline base functions that will be used in the next sections are presented.

In the third chapter of the thesis, some studies in the literature for the EW equation are mentioned. Also in this section, the model problems to be discussed for the EW equation in the thesis are explained together with the initial and boundary conditions.

In the fourth chapter, five test problems are considered for the EW equation. Numerical schemes of each problem obtained by collocation finite element method based on trigonometric cubic base functions were solved. The numerical solutions obtained by the presented method were compared with the results of some other researchers available in the literature and also analytical results, if any. The obtained results, the error norms L_2 and L_∞ and the conservation constants I_1 , I_2 and I_3 are presented in tables. In addition, some graphs were given to demonstrate the continuity and correct physical behavior of the obtained numerical solutions for the problem. Also in this section, the stability analysis of the finite element approaches used in the thesis is examined.

In the fifth chapter, which is the last chapter of the thesis, the numerical results obtained in the thesis are compared within themselves and those in the literature, and a brief discussion is presented.

Keywords: Equal Width Wave Equation, Collocation Finite Element Method, Trigonometric B-spline.

1. GİRİŞ

Bilim insanlarının yaptıkları en önemli görevlerden biri fiziksel olayları modellemektir. Uzay, biyoloji, kimya, fizik, jeoloji veya mekanik ile ilgili olmasına bakılmaksızın doğadaki hemen hemen her olay fizik veya diğer bilim dallarının kanunları yardımıyla kendine ait büyüklükler arasında cebirsel, diferansiyel ya da integral denklemler yardımıyla tanımlanabilir. Mekanik, termal ve/veya aerodinamik yüklere maruz kalan çeşitli şekillerde delik ve çok sayıda gergiye sahip bir basınç tüpündeki basınç dağılımı; göl, denizsuyu veya atmosferdeki kirleticilerin yoğunluğunun bulunması; kasırga ve şimşek oluşumunu anlamak ve tahmin etmek için hava tahminlerinin simülasyonu mühendislerin ilgilendikleri en önemli uygulama problemlerden sadece bazılarıdır. Bu tür problemlerin çoğunun denkleminin türetilmesi o kadar çok zor olmasa da, kompleks geometrik ve malzeme yapıları yüzünden tam çözümlerini bulmak sıklıkla zordur. Böyle durumlarda nümerik yöntemler bu denklemlerin çözümlerinin bulunmasında bir alternatif olarak öne çıkarlar. Nümerik yöntemler verilen bir diferansiyel denklemi bilgisayar yardımıyla çözülebilecek bir grup cebirsel denklem sistemine dönüştürür. Diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen çok sayıda nümerik yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri olan sonlu eleman yönteminde, verilen bir çözüm bölgesi alt bölgelerin koleksiyonu olarak göz önüne alınır ve her bir alt bölge üzerinde ana denkleme geleneksel varyasyonel yöntemlerden biri ile yaklaşılır. Yaklaşık çözümü alt bölgelerin koleksiyonu üzerinde aramanın ana sebebi karmaşık fonksiyonları basit polinomların koleksiyonu olarak temsil etmenin daha kolay olmasıdır [1].

Sonlu eleman yöntemleri belirli başlangıç ve sınır şartlarına sahip lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya denklem sistemlerinin çözümünde literatürde yaygın olarak kullanılmıştır. Bu tezde 1-boyutlu eşit genişlikli dalga (EW) denkleminin trigonometrik B-spline sonlu eleman yöntemiyle yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Literatür incelendiğinde, 1-boyutlu EW denkleminin sonlu eleman yöntemleri de dahil olmak üzere çeşitli yöntem ve tekniklerle elde edilen çok sayıda çalışmada ele alındığı görülür.

Morrison ve arkadaşları [2] tarafından

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.0.1)$$

formunda verilen 1-boyutlu EW denklemi

$$U(a,t) = \alpha \quad U(b,t) = \beta \quad (1.0.2)$$

ve

$$U_x(a,t) = U_x(b,t) = 0 \quad (1.0.3)$$

yapay sınır şartları ile birlikte

$$a \leq x \leq b \quad (1.0.4)$$

aralığı üzerinde

$$U(x,0) = U_0(x) \quad (1.0.5)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alınacaktır. Bu problem tanımında x konum değişkeni, t zaman değişkeni, μ pozitif bir parametre ve U konum ve zaman değişkenlerinin bir fonksiyonudur. U 'nun indisleri olan x ve t ise sırasıyla konum ve zaman yönünde kısmi türevleri göstermektedir. Denklemden UU_x ve U_{xxt} terimleri sırasıyla lineer olmayan dalga yükselmesini ve dalga yayılımını göstermektedir. 1-boyutlu EW denklemi çözümleri soliton benzeri çözümler üreten bir denklemdir. Bu çözümlerin temel özellikleri soliter dalgaların bir yönde sabit hızla şekillerini değiştirmeden ilerlemeleri ve soliter dalgaların birbiri içinden şekilce bozulmadan geçmeleridir [3].

Bu tezde 1-boyutlu EW denklemindeki lineer olmayan UU_x terimi Rubin-Graves tipi, İç İterasyon ve lumped olarak adlandırılan üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak lineerleştirildi. Sonraki adımda denklemden zamana göre türev yerine ileri fark ve konum türevi yerine de kübik trigonometrik B-spline yaklaşımları kullanılarak göz önüne alınan model problemlerin yaklaşık çözümleri elde edildi. Daha sonra elde edilen lineer denklem sistemi Matlab sembolik programlama dili yardımıyla çözüldü. Elde edilen nümerik sonuçlar analitik sonuçlar ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla çizelgeler ve grafikler yardımıyla karşılaştırıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve yöntemler hakkında bilgi verildi.

2.1 Sonlu Eleman Yöntemleri

Sonlu eleman yöntemlerinin kullanımı 1940' lardan günümüze McHenry [4] ve Hrennikoff [5]' un yaptığı mühendislik alanındaki çalışmalara dayanmaktadır. “Sonlu eleman” terimi ilk defa 1960 yılında Clough [6] tarafından düzlem gerilme analizini incelemek üzere üçgensel ve dörtgensel elemanları içeren bir çalışmada ortaya atılmıştır. Modern mega hızlı dijital bilgisayarların gelişimine tanıklık eden 1950' li yıllardan günümüze kadar kompleks matematiksel ve mühendislik problemlerinin çözümünde sonlu eleman yöntemleri alanında çok büyük gelişmeler gözlemlenmiştir. Bu alandaki ilerlemeler mühendislik, uygulamalı matematik ve diğer bilim dallarında çalışan bilim insanları tarafından yeni uygulamalarda etkin bir şekilde kullanılmaktadır [7]. Sonlu eleman yöntemi ardında yatan ana fikir kompleks bir problemin çözümünü problemin analizini daha kolay ve iyi yapabileceğimiz daha basit bir problemin çözümüne indirgemektir. Doğal olarak, orijinal problemin çözümü yerine daha basit bir problemin çözümü ele alındığından, tam çözüm yerine yaklaşık bir çözüm elde edilmiş olacaktır. Ele alınan bir doğa probleminin sonlu eleman karşılığı, diferansiyel denklem çözümü yerine bir cebirsel denklem sisteminin çözümü ile sonuçlanır. Bazı diğer yaklaşık çözümlerin aksine, sonlu eleman yöntemleri, problemin çözüm bölgesi üzerindeki düğüm noktalarının yanı sıra istenildiğinde ara noktadaki bilinmeyenlerin yaklaşık değerini verir. Sonlu eleman yöntemlerinde verilen problemin çözüm bölgesi; sonlu elemanlar olarak bilinen birden fazla geometrik şekillere bölünür. Elde edilen bu yeni geometrik şekillerin birbirleriyle bağlantı kurdukları noktalara *düğüm noktaları* ya da *nodal noktalar* adı verilir. Ele alınan problemin çözüm bölgesinin daha basit alt parçalara ayrılması işlemi ayrıklaştırma (*diskritizasyon*) olarak bilinir. Sonlu eleman yöntemlerinin uygulanmasında, problemin çözüm bölgesinin tümü üzerindeki bir defada tek operasyonla çözümü elde etmek yerine, yöntemin uygulanmasıyla elde edilen ayrıklaştırılmış daha basit bölgeler üzerinde tipik elemanlar için denklemler oluşturulur ve tüm bölge üzerindeki çözümü bulmak için elde edilen bu denklemler birleştirilir [7, 8].

Sonlu eleman yöntemi kullanmanın bazı avantajları [7]:

1. Şekli düzgün olmayan yapıların modellenmesini kolaylaştırması,

2. Değişik malzemenen/elementden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Değişik sınır şartlarıyla verilen problemlerle birlikte kullanılabilmesi,
4. İstenildiğinde elemanların boyutlarının esnek olarak değiştirilebilmesi,
5. Gerekliğinde sonlu eleman modelinin az bir maliyetle değiştirilebilmesi,
6. Yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen cebirsel denklemler sistemlerinin çözümlerini günümüz modern bilgisayarları ve sembolik programlama dilleri yardımıyla kolaylıkla bulunabilmesi olarak ifade edilebilir.

Bu avantajların yanısıra, bir nümerik hesaplama metodunun etkin olarak kullanılabilmesi için gerekli olan aşağıdaki özellikleri de sonlu eleman yöntemleri sağlamaktadır [1]:

1. Uygulanan metot problemin fiziksel özelliklerini sağlamanın yanı sıra matematiksel olarak ifade edilebilir bir yapıda olmalıdır. Yani, metodun çözümleri yakınsak olmalı ve ele alınan problemin fiziksel davranışını uygun bir biçimde göstermelidir.
2. Ele alınan problemin çözüm bölgesinin geometrik yapısına ve kullanılan malzeme türüne bağlı olmamalıdır.
3. Sonlu eleman yönteminin uygulanması ile elde edilen matematiksel formülasyon, problemin çözüm bölgesinin şekline ve başlangıç/sınır şartlarının durumuna bağımlı olmamalıdır.
4. Problemin çözüm bölgesinin tümünü ele almadan çeşitli dereceden yaklaşımların kullanımına izin verecek esnekliğe sahip olmalıdır.
5. Metodun uygulanması sonucu elde edilen denklem sistem(ler)i bilgisayar programlama mantığına uygun sistematik bir yapı üretmelidir (bant matris, simetrik matris gibi).

Yukarıda verilen tüm özelliklere sahip olan sonlu eleman yöntemlerinin uygulanması temelde aşağıda verilen altı adımdan oluşur [1]:

1. Çözüm bölgesinin sonlu elemanlara ayrıştırılması
 - a) Elemanların sonlu eleman kümesinin oluşturulması.
 - b) Düğüm noktalarının ve elemanların numaralandırılması.

- c) Çözümde kullanılacak olan geometrik karakteristiklerin (koordinat ve nokta/doğru/düzlem kesit alanların) belirlenmesi.
2. Sonlu eleman kümesinde bulunan tipik elemanlardan her biri için tipik eleman denklemlerinin yazılması.
- a) Ele alınan diferansiyel denklemin her bir tipik bir eleman üzerinde varyasyonel formülasyonunun oluşturulması.
- b) Çözümü aranan “ u ” bağımlı değişkenin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

şeklinde olduğunu varsayıp Adım 2a’ da yerine yazılmasıyla

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\}$$

formunda tipik eleman denklemlerinin elde edilmesi.

- c) ψ_i ile verilen yaklaşım fonksiyonlarının belirlenmesi ve her bir tipik eleman için matrislerin bulunması.
3. Problemin bütününe erişmek için tipik eleman denklemlerinin birleştirilmesi:
- a) Süreklilik şartlarının birincil değişkenler (*primary variable*) arasında sağlanması.
- b) Denge şartlarının ikincil değişkenler (*secondary variable*) arasında sağlanması.
- c) Tipik eleman denklemlerinin Adım 3a ve 3b göz önüne alınarak birleştirilmesi.
4. Problemin sınır şartlarının uygulanması.
5. Birleştirilmiş denklemlerin çözümlerinin uygun bir algoritma ile çözümlerinin bulunması.
6. Elde edilen nümerik sonuçların analiz edilmesi:
- a) Adım 5’ de bulunan birincil değişkenleri kullanarak çözümlerin değişiminin detaylı bir şekilde incelenmesi.
- b) Elde edilen nümerik sonuçların çizelge ve grafik şeklinde sunulması.

2.2 Kollokasyon Yöntemi

Bir Ω bölgesi üzerinde

$$A(u) = f \quad (2.2.1)$$

formunda tanımlı bir operatör denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde A lineer veya lineer olmayan bir operatörü, u bağımlı değişkeni ve f ise bağımsız değişkenlerin belirli bir fonksiyonunu göstermektedir. Çözümü aranan u yerine bir U_N yaklaşık çözümü, ϕ_j yaklaşım fonksiyonları ve c_j ' ler yöntemin ve başlangıç/sınır şartlarının uygulanması ile belirlenecek parametreler olmak üzere

$$U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

formunda verilmiş olsun. u tam çözümü yerine geçecek olan U_N yaklaşık çözümü (2.2.1) ifadesinde yerine yazıldığında genellikle f 'ye denk olmayan $f_N = A(U_N)$ fonksiyonu bulunur. Bu denklemde $A(U_N) - f$ ifadesine yaklaşımın kalanı (*rezidüsü*) denir ve

$$R = A(U_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0$$

formunda ifade edilir [1,9]. Ω iki boyutlu bir bölge, ψ_i genellikle ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarından farklı olarak alınan ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\int_{\Omega} \psi_i(x,y) R(x,y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.2)$$

integral ifadesine ağırlıklı integral formu denir.

Kollokasyon yönteminde, Ω çözüm bölgesi üzerinde verilmiş $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) düğüm noktalarında kalanın sıfır olması şartı aranır. Kollokasyon yönteminde ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ formunda alınır ve

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dx dy = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. (2.2.2) ile verilen denklemde ψ_i ağırlık fonksiyonları özel olarak Dirac delta fonksiyonu $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ seçilirse

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.3) ifadesi kapalı bir formda

$$R(\mathbf{x}_i, c_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.4) ile verilen denklemde N tane düğüm noktası olduğundan, c_j katsayıları için N – tane denklemden meydana gelen N – bilinmeyenden oluşan cebirsel bir denklem sistemi bulunur. Kollokasyon yönteminin iyi-durumlu denklem sistemleri üretmesi ve sonucunda yaklaşık bir çözümün elde edilmesi için seçilen kollokasyon noktalarının yerinin önemi büyüktür [1].

2.3 Spline Fonksiyonlar

Yaklaşık çözümlerin bulunmasında kullanılan yöntemler için seçilen polinom yaklaşımının önemi büyüktür. Çünkü kullanılan noktaların sayısı arttıkça yaklaşımda kullanılacak polinomun derecesi yükseleceği için doğal olarak hesaplama hataları da yükselebilir. Bununda ötesinde yaklaşık değeri aranan fonksiyon kapalı $[a, b]$ aralığının farklı bölgelerinde birbirlerinden farklı karakteristikler sergileyebileceğinden fonksiyona tek bir eğri kullanarak yaklaşmak beklenen sonuçları üretmeyebilir. Bu sebeplerden ötürü ardışık iki veri arasında yüksek derecesi olmayan, birinci, ikinci, üçüncü veya istenilen dereceden polinom fonksiyonları kullanan spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha iyi sonuçlar üretecektir. Yaklaşık çözümlerin bulunmasında kullanılan spline fonksiyonlar parçalı polinomlar tipinden olup, verilen $[a, b]$ kapalı aralığını sonlu sayıda alt bölgelere ayırarak, birbirini örtmeyen alt aralıklarda düşük dereceye sahip polinomlarla yaklaşık değeri bulma esasına dayanır.

Spline kavramı, ilk defa Schoenberg tarafından 1946 yılında literatüre kazandırılmıştır [10]. Spline fonksiyonlar, yaklaşık çözümlerin bulunmasında oynadıkları etkin rol ve bilgisayar ortamındaki hesaplamalarda sağladıkları yararlar sebebiyle interpolasyon, diferansiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümlerinde, eğri ve yüzey uydurma alanlarında içeren bir çok bilim dalının uygulanmasında yaygın olarak kullanılırlar.

Gerçel sayıların monoton artan dizisi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b \quad (2.3.1)$$

olmak üzere düğüm noktalarında verilen k . dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki verilen iki tane özelliği sağlayan herhangi bir fonksiyondur. Söz konusu aralık $(-\infty, \infty)$ açık aralığı da olabilir.

1. $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ ($m = 0(1)N - 1$) ile verilen her bir alt aralığı üzerinde k . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur.
2. $S(x)$ ve kendisinin 1'den $(k - 1)$. mertebeye kadar tüm türevleri tanımlanan her aralıkta ve $m = 1(1)N - 1$ için x_m bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıda verilen özellikler göz önüne alındığında, parçalı polinom fonksiyonlar kendisi ve türevleri belirli koşulları sağladığında bir spline fonksiyon oluşurlar. $k = 0$ için ikinci koşul geçersiz olur ve 0. dereceden spline fonksiyon bir başka deyişle adım fonksiyonu (*step function*) elde edilir. $m = 1$ ise o zaman $S(x)$ fonksiyonu bir kırık çizgi halini alır, doğrusal polinomların eklenmesiyle oluşur [11].

Spline fonksiyonlar bazıları aşağıdaki verilen birtakım özelliklere sahiplerdir [12]:

- Spline fonksiyonlar yeterince düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar verilen uygun bazlara sahip sonlu boyutlu bir lineer uzay oluştururlar.
- Spline fonksiyonların hem hesaplanması hemde depolanması günümüz bilgisayarlarının mimarisine oldukça uygundur.
- Spline fonksiyonların integralleri ve türevleri alındığında yine spline fonksiyonlar elde edilir.
- Spline fonksiyonların kullanılmasıyla bulunan matrisler determinant özellikleri sayesinde kolay hesaplanabilir.
- Alt aralıklara bölünmüş $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde verilen her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyon yardımıyla ifade edilebilir.
- Spline fonksiyonlar kullanılarak sadece fonksiyonun kendisine yaklaşım yapmakla kalmaz aynı zamanda verilen fonksiyonun türevlerine de iyi bir yaklaşım yapılabilir.

- Spline fonksiyonlar kullanıldığında kararlılığın ve yakınsaklığın incelenmesi daha kolay olur.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar esnek olduklarından polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler.

2.4 Trigonometrik B-spline fonksiyonlar

Daha yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonları oluşturmak için, ilk önce sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

ve $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_{i+1}}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad (2.4.2)$$

bağıntısı kullanılır [13]. Eğer $[a, b]$ kapalı çözüm aralığı üzerinde parçalanma düzgün olarak yapılmış ve eşit olan alt aralık uzunluğu h ise (2.4.2) o zaman yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonları elde etmek için

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.3)$$

olarak verilen iteratif bağıntı kullanılır.

2.4.1 Lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

$[a, b]$ kapalı çözüm aralığı üzerinde bölgenin bir düzgün parçalanışı

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 0(1)N \quad (2.4.4)$$

olarak verilsin. İlk önce $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere T_i lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulmak için (2.4.3) iteratif bağıntısında $k = 1$ alınır

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^1(x) = \frac{\rho(x_i)}{\theta} T_i^0(x) - \frac{\rho(x_{i+2})}{\theta} T_{i+1}^0(x) \quad (2.4.5)$$

yazılır. Elde edilen bu eşitlik parçalı fonksiyon olarak düzenlenirse

$$T_i^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho(x_i) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ -\rho(x_{i+2}) & , x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi yaygın olarak kullanılan lineer B-spline fonksiyonların yazılımı ile uyum içinde olması için lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar düzenlenirse düğüm noktalarındaki $T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

olmak üzere

$$T_m^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho(x_{m-1}) & , \quad x_{m-1} \leq x \leq x_m \\ -\rho(x_{m+1}) & , \quad x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.7)$$

şeklinde yazılır. Lineer trigonometrik B-splinelar için

$$\lim_{x \rightarrow x_m^+} T_m^1(x) = \lim_{x \rightarrow x_m^-} T_m^1(x) \quad (2.4.8)$$

eşitliği geçerli olduğu için lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları x_m düğüm noktalarında süreklidir.

Ele alınan problemin $U(x,t)$ tam çözümüne karşılık gelen $U_N(x,t)$ genel yaklaşımı lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla

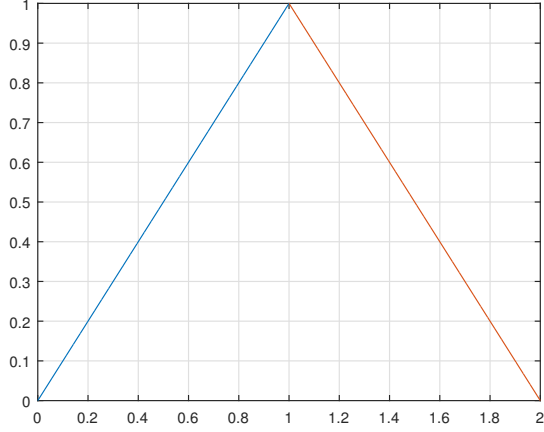
$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=0}^N T_m^1(x) \delta_i(t) \quad (2.4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada T_i^1 fonksiyonları lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları ve δ_i katsayıları belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir.

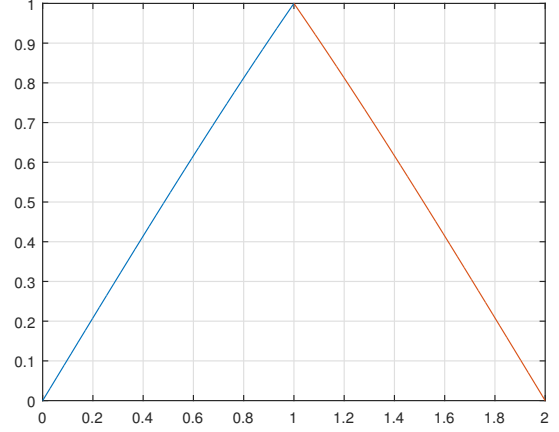
Eşitlikte görülen $T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ tipik eleman aralığı dışında sıfırdır. Aynı zamanda $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı ardışık iki elemanı örtmektedir. Bunu açıkça göstermek için konum adım uzunluğu $h = 1$ alınır ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ kapalı aralığı $[0, 2]$ kapalı aralığına dönüştürülerek lineer B-spline ve lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları elde edilen bu aralık üzerinde sırasıyla Şekil 2.1'de gösterilmiştir.

Bu şekillerden görüldüğü üzere bir lineer spline fonksiyon ardışık iki elemanı örtmektedir ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı iki farklı lineer spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Özel olarak $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı ardışık iki lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtüldüğünden bu tipik eleman üzerindeki yaklaşım

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=m}^{m+1} T_i^1(x) \delta_i = T_m^1(x) \delta_m + T_{m+1}^1(x) \delta_{m+1} \quad (2.4.10)$$



(a) Linear B-spline



(b) Linear trigonometrik B-spline

Şekil 2.1 : Linear B-spline fonksiyonların gösterimi

olarak yazılır. x_m düğüm noktasında verilen $U(x_m, t)$ değeri için yaklaşım (2.4.7) lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarının (2.4.10) denkleminde yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = T_m^1(x_m)\delta_m + T_{m+1}^1(x_m)\delta_{m+1} \\
 &= -\frac{\sin\left(\frac{x_m - x_{m+1}}{2}\right)}{\theta}\delta_m + \frac{\sin\left(\frac{x_m - x_m}{2}\right)}{\theta}\delta_{m+1} \\
 U_m &= \delta_m
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

olarak elde edilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ kapalı aralığı üzerinde verilen bir sonlu eleman

$$\xi = x - x_m$$

lokal dönüşümü kullanılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülür. Bu dönüşümden sonra lineer trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

$$T_m^1(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \tag{2.4.12}$$

$$T_{m+1}^1(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.4.13}$$

formunda bulunur.

2.4.2 Kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

T_i^2 kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları (2.4.3) ile verilen iteratif bağıntıda $k = 2$ olarak alınırsa,

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^2(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin(h)} T_i^1(x) - \frac{\rho(x_{i+3})}{\sin(h)} T_{i+1}^1(x) \quad (2.4.14)$$

formunda yazılabilir. (2.4.14) iteratif bağıntısında kullanılacak olan lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\frac{\rho(x_i)}{\sin(h)} T_i^1(x) = \frac{1}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} \begin{cases} \rho(x_i)\rho(x_i) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+2}) & , x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+3})}{\sin(h)} T_{i+1}^1(x) = \frac{1}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} \begin{cases} -\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ \rho(x_{i+3})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacağı için (2.4.14) ile verilen eşitlik

$$T_i^2(x) = \frac{1}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} \begin{cases} \rho^2(x_i) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+2}) & , x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ -\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ \rho^2(x_{i+3}) & , \text{diğer durumlar} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.15)$$

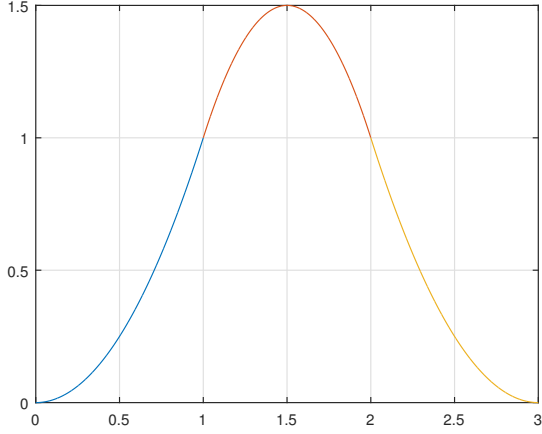
formunda yazılabilir. Kuadratik B-spline baz fonksiyonlarının yazım tarzı ile uyum içinde olması için gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

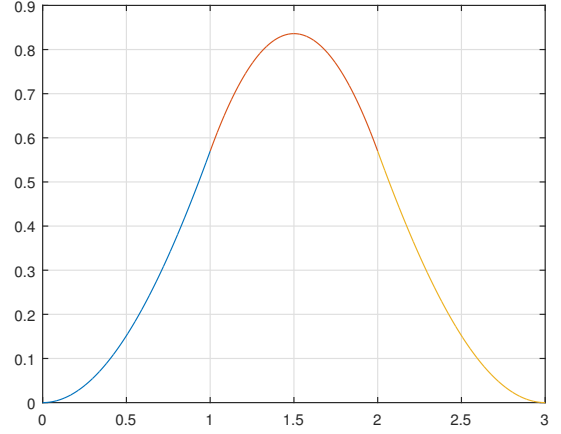
olarak alınmak üzere

$$T_m^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho^2(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x \leq x_m \\ -\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) - \rho(x_{m+2})\rho(x_m) & , x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ \rho^2(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

formunda verilen $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları bulunur. $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ ile verilen kapalı aralığın dışında sıfırdır. Bunun yanısıra bir kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ kapalı aralığındaki ardışık üç elemanı örter. $h = 1$ alınarak ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 3]$ aralığına dönüştürülerek kuadratik B-spline ve kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlar bu aralık üzerinde sırasıyla Şekil 2.2'de verilerek bu durum gösterilmiştir.



(a) Kuadratik B-spline



(b) Kuadratik trigonometrik B-spline

Şekil 2.2 : Kuadratik B-spline fonksiyonların gösterimi

(2.4.16) ile verilen kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarının yerine yazılmasıyla x_m noktasındaki $U(x_m, t)$ ve $U_x(x_m, t)$ için yaklaşımlar,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x_m) \delta_i$$

$$\frac{U_N(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dT_i^2(x_m)}{dx} \delta_i$$

formunda yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa düğüm noktalarındaki yaklaşım fonksiyonları için

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{\theta}, \quad b_1 = \frac{\sin(h)}{\theta},$$

alınarak

$$U_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_1 \delta_m$$

$$U'_m = -b_1 \delta_{m-1} + b_1 \delta_m$$

eşitlikleri elde edilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ kapalı aralığı üzerinde verilen tipik sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

lokal dönüşümü kullanılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülür. Bu dönüşümden sonra kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} T_{m-1}^2(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \\ T_m^2(\xi) &= \frac{\sin\left(\frac{h+\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}, \\ T_{m+1}^2(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \end{aligned}$$

formunda yazılır.

2.4.3 Kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

T_i^3 kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları (2.4.3) ile verilen iteratif bağıntıda $k = 3$ alınır

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) - \frac{\rho(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \quad (2.4.17)$$

bulunur. Kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarını elde edebilmek için gerekli olan aşağıda verilen kuadratik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

$$\frac{\rho(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho^3(x_i) & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , \quad x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ \rho(x_i)\rho^2(x_{i+3}) & , \quad x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} -\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) & , \quad x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ \rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) + \rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & , \quad x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ -\rho^3(x_{i+4}) & , \quad x_{i+3} \leq x \leq x_{i+4} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

sabiti kullanıldığında, (2.4.17) iteratif bağıntıdan

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho^3(x_i) & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , \quad x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ -\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) & , \quad x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ \rho(x_i)\rho^2(x_{i+3}) + \rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & , \quad x_{i+3} \leq x \leq x_{i+4} \\ +\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & , \quad \text{diğer durumlar} \\ -\rho^3(x_{i+4}) & , \quad \text{diğer durumlar} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

trigonometrik kübik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. Kübik B-spline fonksiyonları ile uyum içinde olmasını sağlamak amacıyla gerekli düzenlemeler yapılırsa düğüm noktalarındaki $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right), m = 0, 1, 2, \dots, N$$

olmak üzere

$$T_m^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho^3(x_{m-2}) & , x_{m-2} \leq x \leq x_{m-1} \\ -\rho^2(x_{m-2})\rho(x_m) \\ -\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x \leq x_m \\ \rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}) \\ \rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) \\ + (x_{m+2})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & , x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ + \rho^2(x_{m+2})\rho(x_m) \\ -\rho^3(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.18)$$

formunda bulunur. Ele alınan bir problemin tam çözümünü bulmak için genel bir yaklaşım kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} T_i^3(x) \delta_i(t) \quad (2.4.19)$$

formunda yazılabilir. Bu yaklaşımda δ_i şekil parametreleri bulunacak olan zamana bağlı değişkenler ve $T_i^3(x)$ fonksiyonları ise şekil fonksiyonu olarak bilinen ve bu durumda kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarına karşılık gelen fonksiyonlardır.

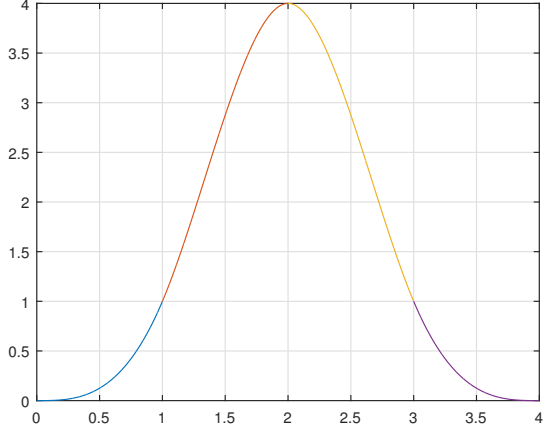
Elde edilen $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ kapalı aralığının dışında sıfırdır ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ kapalı aralığı üzerinde dört ardışık elemanı örtmektedir. $h = 1$ alınır ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ kapalı aralığı $[0, 4]$ kapalı aralığına dönüştürülürse kübik B-spline ve kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları verilen kapalı aralık üzerinde sırasıyla Şekil 2.3'de verilen biçimde gösterilebilir.

Dolayısıyla tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $T_{m-1}^3(x)$, $T_m^3(x)$, $T_{m+1}^3(x)$ ve $T_{m+2}^3(x)$ ile verilen dört kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonu ile örtüleceğinden (2.4.19) ile verilen yaklaşım

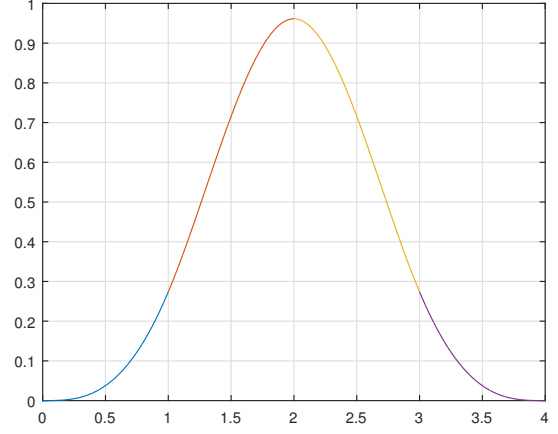
$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x) \delta_i \quad (2.4.20)$$

$$U(x, t) \approx T_{m-1}^3(x) \delta_{m-1} + T_m^3(x) \delta_m + T_{m+1}^3(x) \delta_{m+1} + T_{m+2}^3(x) \delta_{m+2}$$

formunda yazılır. Elde edilen bu yeni yaklaşım için (2.4.18) ile verilen kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarının kullanılmasıyla x_m düğüm noktasındaki $U(x_m, t)$, $U_x(x_m, t)$ ve



(a) Kübik B-spline



(b) Kübik trigonometrik B-spline

Şekil 2.3 : Kübik B-spline fonksiyonların gösterimi

$U_{xx}(x_m, t)$ için yaklaşımlar,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x_m) \delta_i$$

$$\frac{dU_N(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{dT_i^3(x_m)}{dx} \delta_i$$

$$\frac{d^2U_N(x_m, t)}{dx^2} = U''_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2T_i^3(x_m)}{dx^2} \delta_i$$

formunda yazılır ve gerekli olan düzenlemeler yapılırsa düğüm noktalarındaki yaklaşımlar,

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad \alpha_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))},$$

$$\beta_1 = -\frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}, \quad \beta_2 = \frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}$$

$$\gamma_1 = \frac{3 \left((1+3\cos(h)) \csc^2\left(\frac{h}{2}\right) \right)}{16 \left(2\cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(\frac{3h}{2}\right) \right)}, \quad \gamma_2 = -\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(2+4\cos(h))}$$

olmak üzere

$$U_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}$$

$$U'_m = \beta_1 \delta_{m-1} + \beta_1 \delta_{m+1}$$

$$U''_m = \gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}$$

formunda bulunur.

Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ kapalı aralığı üzerinde verilen sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

lokal dönüşümü kullanılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. Böylece kübik trigonometrik B-spline baz fonksiyonları

$$T_{m-1}^3(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}$$

$$T_m^3(\xi) = \frac{1}{\theta} \left[\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) + \sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right]$$

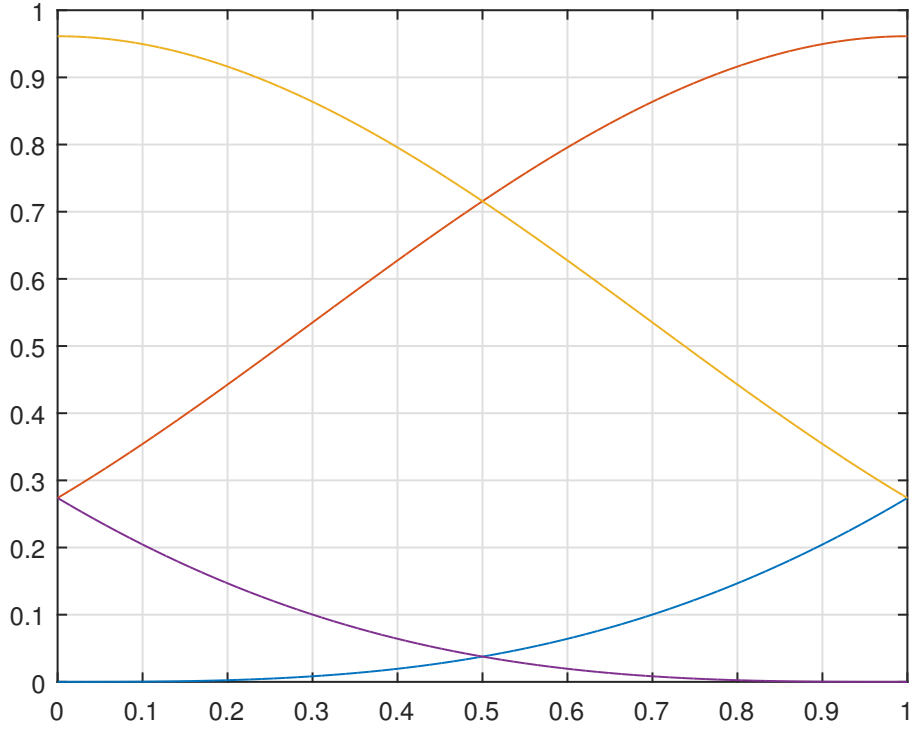
$$T_{m+1}^3(\xi) = \frac{1}{\theta} \left[\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right]$$

$$T_{m+2}^3(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}$$

formunda elde edilir. Dolayısıyla tipik bir eleman üzerinde $T_{m-1}^3, T_m^3, T_{m+1}^3, T_{m+2}^3$ trigonometrik kübik B-spline baz fonksiyonları hariç tüm diğer trigonometrik kübik B-spline baz fonksiyonları sıfırdır. Bu durum Şekil 2.4'de gösterildi.

2.5 Fourier Seri (Von Neumann) Yöntemi

Fourier seri yöntemi diferansiyel denklemlerin kararlılığını inceler. Bu kısımda T sonlu zamanında $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ değerleri için $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x, t)$ 'nin lineer iki zaman seviyesinde verilen denkleminin kararlılığı ele alınacaktır. Fourier seri veya Von Neumann yöntemi olarak bilinen bu yöntem $t = 0$ başlangıç zamanında düğüm noktaları boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini temsil eder. Dolayısıyla kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için ele alınan değişkenlerine ayırma tekniğine benzer bir şekilde $t = 0$ başlangıç zamanında Fourier serileri cinsinden yazılan bir fonksiyon ele alınır. Fourier serileri yaygın olarak sinüs ve cosinüs fonksiyonları cinsinden ifade edilse de cebirsel olarak üstel biçimde yazılması bu yöntem için daha kullanışlıdır. Bir başka deyişle yöntemin ele alınmasında $\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ veya $\sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ ifadelerine karşılık gelen $\sum A_n e^{in\pi x/\ell}$ üstel ifadesi kullanılacaktır. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve ℓ, x konum değişkeninin tanımlı olduğu çözüm bölgesinin



Şekil 2.4 : Trigonometrik Kübik B-spline fonksiyonlar

uzunluğudur. Bu gösterimler kullanıldığında

$$A_n e^{in\pi x/\ell} = A_n e^{in\pi mh/\ell} = A_n e^{i\beta_n mh/\ell}$$

olur. Burada $\beta_n = n\pi/Mh$ ve $Mh = \ell$ olarak alınmıştır. $t = 0$ başlangıç noktasındaki başlangıç değeri $U(mh, 0) = U_m^0$, ($m = 0(1)M$) şeklinde olan $(M + 1)$ adet denklem, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ($N + 1$) adet bilinmeyen sabitlerini tek olarak bulmak için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel biçimde yazılabildiğini gösterir. Ayrık çözümler toplanabilir olduğundan ve sadece lineer fark denklemleri hesaba katıldığından $e^{i\beta mh}$ olacak biçimde sadece bir tek başlangıç değerinin incelenmesi gerekir.

t değerinin artışı göz önüne alındığında üstel dağılım incelemek için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta mh} e^{\alpha nk} = e^{i\beta mh} \xi^n$$

eşitlikleri ele alınır. Burada α sıklıkla kompleks bir sabit, $\xi = e^{\alpha k}$ olup ξ güçlendirme faktörü (*amplification factor*) olarak bilinir. Elde edilen denklemlerin kararlılığı için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda verilen her $n \leq N$ için başlangıç ve sınır şartını sağlayan tüm β için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir.

Elde edilen ardışık denklemlerin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyorsa kararlılık için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ yani $-1 \leq \xi \leq 1$ olmasıdır. Fakat $|U_m^n|$ zamana bağlı olarak artıyorsa, o zaman kararlılık için gerek ve yeter şart K pozitif sayısının h, k ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere $\xi \leq 1 + Kk \leq 1 + O(k)$ şartını sağlamasıdır.



3. EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (EW) DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER

Yüksek lisans tez çalışmamızın bu bölümünde EW denklemiyle ilgili literatür araştırması verilip farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen EW denklemi için 5 farklı model problem tanıtılmıştır.

3.1 Giriş

Morrison vd. [2] tarafından sunulan EW denklemi sığ su dalgaları ve iyon akustik plazma dalgaları gibi fiziksel olayları tanımlayan dalga yayılımı konusunda lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

1- boyutlu EW denklemi

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (3.1.1)$$

şeklinde olup sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U(x, t) \rightarrow 0$ dır. Burada U, x konum değişkeni ve t zaman değişkeninin bir fonksiyonu ve μ ise pozitif bir parametredir. U 'nun alt indisleri olan x ve t kısmi türevleri göstermektedir.

$U = U(x, t)$ akışkanlar mekaniğinde dalga genliğini veya benzer bir niceliği gösterirken plazma uygulamalarında negatif elektrostatik potansiyeli göstermektedir. Denklemdaki UU_x terimi lineer olmayan dalga yükselmesini ve U_{xxt} terimi lineer olmayan dalga yayılımını göstermektedir. EW denklemi ile RLW denklemi arasında $U_{EW} \rightarrow U_{RLW} - 1$ şeklinde bir ilişki olmasına rağmen her iki denklem için sınır şartları farklı olduğundan EW denkleminin çözümü RLW denkleminin çözümünden elde edilemez. EW denkleminin tek solitary dalga çözümü dışında analitik çözümü mevcut değildir. Bu nedenle çeşitli başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen EW denkleminin sayısal çözümleriyle ilgilenilir. Bu yüzden bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için çeşitli nümerik yöntemler kullanılır. Örneğin, Gardner ve Gardner [14], soliter dalgaların hareket ve etkileşimini modellemek için kübik B-spline sonlu elemanları kullanan Galerkin yöntemine dayalı bir nümerik yöntemi EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için önerdiler. Archilla [15], EW denklemi için bir spectral ayrıştırma kullanarak sayısal çözümleri elde etti ve kullandığı metodun yakınsak ve kararlı olduğunu gösterdi. Gardner ve Gardner [16] kuadratik B-spline sonlu elemanlarını kullanan Petrov-Galerkin yöntemiyle EW denkleminin yaklaşık çözümlerini elde ettiler. Zaki [17], EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için lineer konum-zaman sonlu elemanları ile en küçük kareler tekniğini kullandı. Zaki [18] EW denkleminin solitary dalga gelişimini incelemek için şekil fonksiyonlarını kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak Petrov-Galerkin sonlu eleman şemasını

kullandı. Saka vd. [19], kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile EW denkleminin solitary dalga hareketini ve dalga oluşumunu incelemişlerdir. Dağ ve Saka [3], kübik B-spline'ları kullanan kollokasyon yöntemine dayalı olarak EW denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiler ve L_2 , L_∞ hata normları ile çözümlerinin doğruluğunu gösterdiler. Raslan [20], düğüm noktalarında şekil fonksiyonu olarak kuintik B-spline'ları kullanan kollokasyon yöntemiyle EW denklemini çözmüştür. Hamdi vd. [21], Maple yazılımı kullanarak genelleştirilmiş EW (GEW) denkleminin soliter dalga çözümlerini analitik olarak elde etmiştir. Raslan [22], EW denklemini ara düğüm noktalarında eleman şekil fonksiyonu olarak kuartik B-spline fonksiyonlarını kullanan kollokasyon yöntemine dayalı yeni bir algoritma ile nümerik olarak çözdü. Esen [23], tek soliter dalga hareketi, iki soliter dalganın girişimi ve dalga oluşumunu incelemek için kuartik B-spline sonlu elemanlarını kullanan lumped Galerkin yöntemine dayalı bir nümerik teknik ile EW denklemini çözmüştür. Doğan [24], lineer B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir. Saka [25], kuadratik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi ile konum ayrıştırma tekniğini birleştirerek EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir. Esen ve Kutluay [26], EW dalga denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için bir lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yöntemini sunmuşlardır. Ramos [27, 28], EW ve RLW denklemlerinin soliter dalga çözümlerini incelemek için farklı sonlu fark metotlarını uygulamıştır. Yusifoğlu ve Bekir [29], EW denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için varyasyonel iterasyon metodunu uygulamış ve sonuçlarını adomian ayrışım yöntemiyle elde edilenlerle karşılaştırmışlardır. Güleç [30], lineer B-spline baz fonksiyonlarına dayalı Galerkin sonlu eleman yöntemini uygulayarak eşit genişlikli dalga denkleminin nümerik çözümlerini elde etti. Ali [31], EW denkleminin spectral çözümünü Chebyshev polinomlarına dayalı kollokasyon yöntemi ile çözmüştür. Saka vd. [32], kuartik B-spline sonlu elemanları Galerkin yöntemine Cos açılım bazlarıyla diferansiyel kuadrature yöntemi ve radyal baz fonksiyonlarıyla meshless yöntemini kullanarak EW denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Dereli ve Schaback [33], sıradışı bir başlangıç kullanarak çizgi yöntemi ile eşit genişlikli denklemin nümerik olarak çözmüşlerdir. Roshan [34, 35], EW ve GEW denklemlerinin nümerik çözümlerini lineer fonksiyonları test fonksiyonu, kuadratik B-spline fonksiyonlarında şekil baz fonksiyonları olarak kullanarak Petrov-Galerkin yöntemiyle nümerik olarak çözmüştür. Kaplan ve Dereli [36], EW denkleminin sayısal çözümünü konum ayrıştırması yaparak radyal baz fonksiyon kollokasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Fazal vd. [37], Rubin Graves tipi linerizasyon tekniğini kullanarak septik B-spline kollokasyon yöntemiyle EW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Uddin [38], radyal çekirdekleri kullanarak kısmi diferansiyel denklemin adi diferansiyel denkleme

sistemine dönüştürmüş ve radyal baz fonksiyonları pseudospectral şema kullanarak EW denklemini nümerik olarak çözmüştür. Mersin [39], EW denklemine konuma göre türevlere yaklaşım için quasi spline interpolasyonu ve zaman parçalaması için de Crank-Nicolson metodu kullanarak çözmüştür. Banaja ve Bakadoh [40], Runga-Kutta integrasyonuna dayalı çizgi yöntemi kullanarak EW denkleminin nümerik çözümü elde ettiler ve Von Neuman kararlılık analiziyle şemanın şartsız kararlılığını buldular. Ghafoor ve Haq [41], Haar wavelet yöntemi ile sonlu fark şemasını birlikte kullanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümünü yeni bir nümerik şema ile elde ettiler. Bu şemayı eşit genişlikli dalga denklemine uygulayarak 1,2,3 soliter dalganın, dalga oluşumunu ve soliton çarpışmasının davranışını incelediler. Dianchen vd. [42], extend basit denklem ve $\exp(-\varphi(\xi))$ açılım metotlarını kullanarak eşit genişlikli ve modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denklemlerinin tam hareket eden dalga çözümlerini oluşturdular.

3.2 Model Problemler

EW denklemleri dalga etkileşimlerini içeren elastik olmayan karakteristiğinden dolayı matematiksel olarak integrallenemez bir özelliğe sahiptir. İntegrallenebilen denklemler sonsuz sayıda korunum sabitine sahiptir. Fakat integrallenemeyen denklemlerin korunum sabitleri sınırlı sayıda korunum sabitine sahiptir. Bu tezde göz önüne alınan EW denklemleri üç adet korunum sabitine sahiptir ve bunlar

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^b U dx \simeq h \sum_{m=0}^M U_m^n, \\
 I_2 &= \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx \simeq h \sum_{m=0}^M [(U_m^n)^2 + \mu((U_x)_m^n)^2], \\
 I_3 &= \int_a^b U^3 dx \simeq h \sum_{m=0}^M (U_m^n)^3
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlanır. Bunlar sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunumunu temsil ederler [43].

Bu tez çalışmasında EW denkleminin aşağıda verilen model problemler için trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri elde edildi. Bu yöntemin kullanılmasıyla elde edilen sayısal çözümlerin doğruluğunu test etmek için

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \|U^{tam} - U_N\|_2 = \left[h \sum_{m=0}^M |U_m^{tam} - U_m|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ortalama hata normu}) \\
 L_\infty &= \|U^{tam} - U_N\|_\infty = \max_{0 \leq m \leq M} |U_m^{tam} - U_m| \quad (\text{maksimum hata normu})
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

olarak verilen hata normları kullanıldı.

3.2.1 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi

Birinci problemde (3.1.1) ile verilen eşit genişlikli dalga denklemi bir $[a, b]$ kapalı aralığında

$$U(a, t) = U(b, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - x_0)]$$

başlangıç şartı ile ele alındı.

Problemin tam çözümü

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - ct - x_0)]$$

dir [2] . Burada $3c$ solitary dalganın genliğini, c dalganın hızını, $p = (1/4\mu)^{1/2}$ dalganın genişliğini ve $U(x, t)$ ise tepe noktası x_0 olan sağa doğru c sabit hızıyla hareket eden $3c$ genliğinde tek solitary dalgayı göstermektedir.

Ele alınan problem için korunum sabitleri analitik olarak

$$I_1 = \frac{6c}{p}, I_2 = \frac{12c^2}{p} + \frac{48pc^2}{5}, I_3 = \frac{144c^3}{5p}$$

dir [16]. Problemin tüm hesaplamalarında $\mu = 1, x_0 = 10$ parametre değerleri kullanıldı. Bu değerler kullanıldığında korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$$

olarak bulundu.

3.2.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problemde (3.1.1) ile verilen EW denklemi bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde

$$U(a, t) = U(b, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \operatorname{sech}^2[0.5(x - x_j)]$$

başlangıç şartı ile ele alındı.

Ele alınan problemde $x = x_1$ başlangıç noktasında dalganın genliği $3c_1$ ve $x = x_2$ noktasında dalganın genliği $3c_2$ olan iki solitary dalgayı göstermektedir. Genliği büyük olan dalganın hızı, genliği küçük olan dalganın hızından büyüktür. Problemin simülasyonu esnasında, zaman ilerledikçe iki dalganın girişiminin oluşabilmesi için $c_1 > c_2$ ve $x_1 < x_2$ olarak alınmalıdır.

Bu problemde korunum sabitleri analitik olarak

$$I_1 = 12(c_1 + c_2), I_2 = 28.8(c_1^2 + c_2^2), I_3 = 57.6(c_1^3 + c_2^3)$$

hesaplandı [20]. Problemin tüm hesaplamalarında $\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri kullanıldı. Ele alınan bu değerler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$I_1 = 27, I_2 = 81, I_3 = 218.7$$

olarak bulundu.

3.2.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problemde (3.1.1) ile verilen EW denklemi bir $[a, b]$ kapalı sonlu aralığı üzerinde

$$U(a, t) = U(b, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^3 3c_j \operatorname{sech}^2[0.5(x - x_j)]$$

başlangıç şartı ile ele alındı.

Bu problem $x = x_1$ başlangıç noktasında genliği $3c_1$, $x = x_2$ noktasında genliği $3c_2$ ve $x = x_3$ noktasında genliği $3c_3$ olan üç farklı solitary dalgayı gösterir. Genliği büyük olan dalganın hızı, genliği küçük olan dalganın hızından büyüktür. Zaman ilerledikçe üç dalganın girişiminin oluşabilmesi için $c_1 > c_2 > c_3$ ve $x_1 < x_2 < x_3$ olarak alınmalıdır.

Bu problemde korunum sabitleri analitik olarak

$$I_1 = 12(c_1 + c_2 + c_3), I_2 = 28.8(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2), I_3 = 57.6(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)$$

dir [20]. Problemin tüm hesaplamalarında $\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ parametre değerleri kullanıldı. Ele alınan bu değerler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$I_1 = 78, I_2 = 655.2, I_3 = 5450.4$$

olarak hesaplandı.

3.2.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı

Dördüncü problemde (3.1.1) ile verilen EW denkleminin solitary dalga oluşumu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$U(a, t) = U(b, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \frac{1}{e^{(x-20)^2}}$$

başlangıç şartı kullanılarak μ nün ele alınan farklı değerleri için incelendi.

3.2.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu

Beşinci problemde (3.1.1) EW denklemini bir $[a, b]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde

$$U(a, t) = U_0$$

$$U(b, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x-x_0}{d}\right) \right]$$

başlangıç şartı ile ele alınarak ardışık dalga oluşumu incelendi. Burada $U(x, 0)$, $t = 0$ zamanında durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yüksekliğini, d ise durgun su ve derin su arasındaki eğimi göstermektedir. Su seviyesindeki $U(x, 0)$ yükseklik değişimi $x = x_0$ noktasındadır. Durgun su bölgenin sağında yer alır ve $U = 0$ yüzeyinden U_0 ilave yükseltisinde suyun sahip olduğu akış soldan sağa doğru hareket eder [44].

Ele alınan problem için I_1, I_2 ve I_3 korunum büyüklüklerinin değerleri sabit değildir. Fakat bu değerler sırasıyla aşağıda formülleri verilen M_1, M_2 ve M_3 oranlarında lineer olarak artış gösterirler [16].

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_a^b U dx = \frac{1}{2} (U_0)^2,$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx = \frac{2}{3} (U_0)^3,$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_a^b U^3 dx = \frac{3}{4} (U_0)^4.$$

Sayısal hesaplamaların tümünde $\mu = 0.16666667$, $U_0 = 0.1$ ve $x_0 = 0$ parametre değerleri kullanıldı. Bu parametre değerleri için korunum sabitlerindeki lineer artış oranları

$$M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}, M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$$

olarak bulundu. Korunum sabitlerindeki değişim aşağıdaki M_i formülleri kullanılarak hesaplanmıştır [32].

$$M_i = \frac{I_{i_{son}} - I_{i_{ilk}}}{t_{son} - t_{ilk}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

4. EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ

EW denkleminde zaman yönündeki türevler yerine ileri fark, konum yönündeki türevler yerine Crank-Nicolson tipi yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} - \mu \frac{(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n}{\Delta t} = 0$$

denklemini elde edilir.

4.1 Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme

Bu denklemde lineer olmayan $(UU_x)^{n+1}$ terimi yerine

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n \quad (4.1.1)$$

Rubin-Graves tipi yaklaşım kullanılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n + (UU_x)^n}{2} - \mu \frac{(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n}{\Delta t} = 0$$

bulunur. Basit bir düzenlemeden sonra aşağıda verilen

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1}}{2} - \mu \frac{(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n}{\Delta t} = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı Δt ile çarpılır ve düzenlenirse

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t(U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1})}{2} - \mu [(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n] = 0$$

elde edilir. Burada $(n + 1)$. zaman adımındaki ifadeler sol tarafta, n . zaman adımındaki ifadeler sağ tarafta toplanır

$$U^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{2} U_x^n\right) + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} U^n\right) - \mu (U_{xx})^{n+1} = U^n - \mu (U_{xx})^n \quad (4.1.2)$$

iteratif denklem elde edilir. Bu denklemde U , U_x ve U_{xx} ifadeleri yerine $j = 0(1)N$ değerleri için düğüm noktalarında aşağıda verilen

$$U(x_j, t) = U_j = \alpha_1 \delta_{j-1} + \alpha_2 \delta_j + \alpha_1 \delta_{j+1},$$

$$U_x(x_j, t) = (U_x)_j = \beta_1 \delta_{j-1} + \beta_2 \delta_{j+1},$$

$$U_{xx}(x_j, t) = (U_{xx})_j = \gamma_1 \delta_{j-1} + \gamma_2 \delta_j + \gamma_1 \delta_{j+1}$$

trigonometrik kübik B-spline yaklaşımları kullanılırsa aşağıdaki iteratif denklem elde edilir

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_j^{n+1} + \alpha_1 \delta_{j+1}^{n+1}) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} (\beta_1 \delta_{j-1}^n + \beta_2 \delta_{j+1}^n)\right) \\ & + (\beta_1 \delta_{j-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{j+1}^{n+1}) \left(\frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 \delta_{j-1}^n + \alpha_2 \delta_j^n + \alpha_1 \delta_{j+1}^n)\right) \\ & - (\gamma_1 \delta_{j-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_j^{n+1} + \gamma_1 \delta_{j+1}^{n+1}) (\mu) \\ = & (\alpha_1 \delta_{j-1}^n + \alpha_2 \delta_j^n + \alpha_1 \delta_{j+1}^n) - \mu (\gamma_1 \delta_{j-1}^n + \gamma_2 \delta_j^n + \gamma_1 \delta_{j+1}^n) \end{aligned}$$

Elde edilen bu iteratif denklemde $N + 1$ denklem $N + 3$ bilinmeyen vardır. Çözülebilir bir denklem sistemi elde edebilmek için problemle birlikte verilen sol sınır şartı

$$U(a, t) = U_0^n = \alpha_1 \delta_{-1}^n + \alpha_2 \delta_0^n + \alpha_1 \delta_1^n$$

ve sağ sınır şartı

$$U(b, t) = U_N^n = \alpha_1 \delta_{N-1}^n + \alpha_2 \delta_N^n + \alpha_1 \delta_{N+1}^n$$

kullanılırsa tüm zaman adımları için δ_{-1}^n ve δ_{N+1}^n bilinmeyenleri

$$\delta_{-1}^n = \frac{U(a, t) - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1}$$

ve

$$\delta_{N+1}^n = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1}$$

olacak şekilde sırası ile δ_0^n, δ_1^n ve $\delta_{N-1}^n, \delta_N^n$ bilinmeyenleri cinsinden bulunmuş olur. Böylece $N + 1$ denklem $N + 1$ bilinmeyenden oluşan çözülebilir bir denklem sistemi elde edilmiş olur. Şimdi, bu iteratif denklemde çözüme başlayabilmek için $t = t_{ilk}$ zamanındaki başlangıç değerlerine ihtiyaç vardır. Bu başlangıç değerlerinin elde edilmesi içinde problemle birlikte verilen

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

başlangıç şartı $j = 0(1)N$ değerleri için düğüm noktalarında kullanılırsa, yukarıda genel sistemin elde edilmesine benzer bir şekilde $N + 1$ denklem $N + 3$ bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için bu defa problemle birlikte verilen türevli sınır şartları sol sınır

$$U_x(a, t) = \beta_1 \delta_{-1}^0 + \beta_2 \delta_1^0 = 0$$

ve sağ sınırda

$$U_x(b, t) = \beta_1 \delta_{N-1}^0 + \beta_2 \delta_{N+1}^0 = 0$$

Çizelge 4.1 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199901397	0.0028799999	0.0000576000	0.003536	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199910766	0.0028799999	0.0000576000	0.003199	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199919243	0.0028799999	0.0000576000	0.002897	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199926913	0.0028799999	0.0000576000	0.002625	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199940134	0.0028799999	0.0000576000	0.002165	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199945816	0.0028799999	0.0000576000	0.001974	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1199950957	0.0028799999	0.0000576000	0.001806	0.002448	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 4.623916 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 2.952600 \times 10^{-11}, \Delta I_3 = 2.136942 \times 10^{-12}$							
0.05	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199901397	0.0028799999	0.0000576000	0.003536	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199910766	0.0028799999	0.0000576000	0.003199	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199919243	0.0028799999	0.0000576000	0.002897	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199926913	0.0028799999	0.0000576000	0.002625	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199940134	0.0028799999	0.0000576000	0.002165	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199945816	0.0028799999	0.0000576000	0.001974	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1199950957	0.0028799999	0.0000576000	0.001806	0.002448	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 4.623915 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 2.955754 \times 10^{-11}, \Delta I_3 = 2.137891 \times 10^{-12}$							
0.01	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199901397	0.0028799999	0.0000576000	0.003536	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199910766	0.0028799999	0.0000576000	0.003199	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199919243	0.0028799999	0.0000576000	0.002897	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199926913	0.0028799999	0.0000576000	0.002625	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199940134	0.0028799999	0.0000576000	0.002165	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199945816	0.0028799999	0.0000576000	0.001974	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1199950957	0.0028799999	0.0000576000	0.001806	0.002448	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 4.623912 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 2.957560 \times 10^{-11}, \Delta I_3 = 2.138434 \times 10^{-12}$							
Analitik:		$I_1 = 0.12, I_2 = 0.00288, I_3 = 0.0000576$						

sırasıyla 1.806092×10^{-6} , 1.806207×10^{-6} ve 1.806244×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.447841×10^{-6} , 2.447841×10^{-6} ve 2.447841×10^{-6} olarak bulundu. Elde edilen değerlerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinin değerlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.2 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.456522 \times 10^{-10}$ ve $\Delta I_3 = 4.832457 \times 10^{-11}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.463336 \times 10^{-10}$ ve $\Delta I_3 = 4.838741 \times 10^{-11}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.469809 \times 10^{-10}$ ve $\Delta I_3 = 4.844616 \times 10^{-11}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 3.595×10^{-6} , 3.626×10^{-6} ve 3.637×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.597×10^{-6} , 1.647×10^{-6} ve 1.663×10^{-6} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinin değerlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.3 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için

Çizelge 4.2 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599757728	0.0259199995	0.0015551999	0.008689	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599820401	0.0259199995	0.0015551999	0.006494	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3599866827	0.0259199995	0.0015551999	0.004977	0.006645	10.890	0.09000
	40	0.3599901214	0.0259199995	0.0015551999	0.004024	0.004923	11.190	0.09000
	60	0.3599945536	0.0259199995	0.0015552000	0.003384	0.002702	11.790	0.09000
	70	0.3599959491	0.0259199995	0.0015552000	0.003439	0.002001	12.090	0.09000
	80	0.3599969809	0.0259199995	0.0015552000	0.003595	0.001597	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 2.456522 \times 10^{-10}, \Delta I_3 = 4.832457 \times 10^{-11}$							
0.05	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599757728	0.0259199995	0.0015551999	0.008690	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599820401	0.0259199995	0.0015551999	0.006495	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3599866827	0.0259199995	0.0015551999	0.004981	0.006645	10.890	0.09000
	40	0.3599901214	0.0259199995	0.0015551999	0.004033	0.004923	11.190	0.09000
	60	0.3599945537	0.0259199995	0.0015552000	0.003405	0.002702	11.790	0.09000
	70	0.3599959491	0.0259199995	0.0015552000	0.003466	0.002001	12.090	0.09000
	80	0.3599969809	0.0259199995	0.0015552000	0.003626	0.001647	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 2.463336 \times 10^{-10}, \Delta I_3 = 4.838741 \times 10^{-11}$							
0.01	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599757728	0.0259199995	0.0015551999	0.008690	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599820401	0.0259199995	0.0015551999	0.006496	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3599866827	0.0259199995	0.0015551999	0.004982	0.006645	10.890	0.09000
	40	0.3599901214	0.0259199995	0.0015551999	0.004035	0.004923	11.190	0.09000
	60	0.3599945537	0.0259199995	0.0015552000	0.003412	0.002702	11.790	0.09000
	70	0.3599959491	0.0259199995	0.0015552000	0.003474	0.002001	12.090	0.09000
	80	0.3599969809	0.0259199995	0.0015552000	0.003637	0.001663	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 2.469809 \times 10^{-10}, \Delta I_3 = 4.844616 \times 10^{-11}$							
Analitik:		$I_1 = 0.36, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.0015552$						

sırasıyla $\Delta I_1 = 3.876951 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.142049 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.758083 \times 10^{-9}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 3.876875 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.287610 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.794998 \times 10^{-9}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 3.876849 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.345012 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.810115 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.8491×10^{-5} , 2.4562×10^{-5} ve 2.4454×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.3589×10^{-5} , 9.604×10^{-6} ve 9.344×10^{-6} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinin değerlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.4 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 8.532081 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 4.340472 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.085355 \times 10^{-11}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 3.971401 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 2.679227 \times 10^{-11}$ ve $\Delta I_3 = 2.135618 \times 10^{-12}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 4.623915 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 2.955754 \times 10^{-11}$ ve $\Delta I_3 = 2.137891 \times 10^{-12}$ olarak bulundu. Hesaplanarak bulunan verilerde konum adımı azaldığında I_1 ' de önemli bir ölçüde değişim görülmezken I_2 ve I_3 ' deki değişimlerin azaldığı görülmektedir. $t_{final} = 80$ zamanında

Çizelge 4.3 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1$, $3c = 0.3$, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.1999598174	0.2879999943	0.0575999980	0.015207	0.020041	11.010	0.29999
	20	1.1999850990	0.2879999944	0.0575999982	0.010818	0.007373	12.000	0.30000
	30	1.1999943447	0.2879999945	0.0575999982	0.012691	0.005806	12.990	0.29999
	40	1.1999975984	0.2879999946	0.0575999982	0.015249	0.007341	14.010	0.29999
	60	1.1999975988	0.2879999948	0.0575999983	0.021405	0.010304	15.990	0.30000
	70	1.1999943461	0.2879999950	0.0575999983	0.024770	0.011884	17.010	0.30000
	80	1.1999851027	0.2879999950	0.0575999982	0.028491	0.013589	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 3.876951 \times 10^{-3}$, $\Delta I_2 = 2.142049 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.758083 \times 10^{-9}$							
0.05	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.1999598177	0.2879999943	0.0575999980	0.015299	0.020041	11.010	0.29999
	20	1.1999850993	0.2879999944	0.0575999982	0.011178	0.007373	12.000	0.30000
	30	1.1999943449	0.2879999945	0.0575999982	0.013070	0.005327	12.990	0.29999
	40	1.1999975985	0.2879999945	0.0575999982	0.015369	0.006233	14.010	0.29999
	60	1.1999975989	0.2879999947	0.0575999982	0.020114	0.007832	15.990	0.29999
	70	1.1999943459	0.2879999948	0.0575999982	0.022288	0.008701	17.010	0.30000
	80	1.1999851019	0.2879999949	0.0575999982	0.024562	0.009604	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 3.876875 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.287610 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.794998 \times 10^{-9}$							
0.01	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.1999598178	0.2879999943	0.0575999980	0.015358	0.020041	11.010	0.29999
	20	1.1999850993	0.2879999944	0.0575999982	0.011450	0.007373	12.000	0.30000
	30	1.1999943450	0.2879999945	0.0575999982	0.013495	0.006005	12.990	0.29999
	40	1.1999975986	0.2879999945	0.0575999982	0.015877	0.006190	14.010	0.29999
	60	1.1999975989	0.2879999947	0.0575999982	0.020525	0.008614	15.990	0.29999
	70	1.1999943459	0.2879999948	0.0575999982	0.022493	0.009246	17.010	0.30000
	80	1.1999851017	0.2879999948	0.0575999982	0.024454	0.009344	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 3.876849 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.345012 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.810115 \times 10^{-9}$							
Analitik:			$I_1 = 1.2$, $I_2 = 0.288$, $I_3 = 0.0576$					

$h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 4.7288×10^{-5} , 2.172×10^{-6} ve 1.806×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.4019×10^{-5} , 2.448×10^{-6} ve 2.448×10^{-6} olarak bulundu.

Çizelge 4.5 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 7.774669 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 1.723821 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 7.172577 \times 10^{-10}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 1.285976 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.277315 \times 10^{-10}$ ve $\Delta I_3 = 4.838434 \times 10^{-11}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.463336 \times 10^{-10}$ ve $\Delta I_3 = 4.838741 \times 10^{-11}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 3.52785×10^{-4} , 9.749×10^{-6} ve 3.626×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.66316×10^{-4} , 4.605×10^{-6} ve 1.647×10^{-6} olarak bulundu.

Çizelge 4.6 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.195438 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.568189 \times 10^{-6}$ ve $\Delta I_3 = 3.241496 \times 10^{-8}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 3.804707 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.562817 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.779266 \times 10^{-9}$; $h = 0.03$

Çizelge 4.4 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.1199953284	0.0028800096	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.900	0.02993
	10	0.1199900376	0.0028800097	0.0000576000	0.007188	0.004929	10.200	0.02992
	20	0.1199908795	0.0028800099	0.0000576000	0.012583	0.006213	10.200	0.03000
	30	0.1199916401	0.0028800103	0.0000576000	0.018388	0.009332	10.200	0.02992
	40	0.1199923275	0.0028800108	0.0000576000	0.024268	0.012272	10.500	0.02992
	60	0.1199935098	0.0028800122	0.0000576000	0.035938	0.018248	10.500	0.02992
	70	0.1199940169	0.0028800130	0.0000576000	0.041663	0.021321	10.800	0.02992
	80	0.1199944752	0.0028800139	0.0000576000	0.047288	0.024019	10.800	0.02999
$\Delta I_1 = 8.532081 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 4.340472 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.085355 \times 10^{-11}$								
0.05	0	0.1199946871	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	10.000	0.03000
	10	0.1199901378	0.0028799999	0.0000576000	0.003571	0.004929	10.100	0.03000
	20	0.1199910729	0.0028799999	0.0000576000	0.003239	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199919190	0.0028799999	0.0000576000	0.002953	0.004036	10.300	0.03000
	40	0.1199926846	0.0028799999	0.0000576000	0.002710	0.003652	10.400	0.03000
	60	0.1199940040	0.0028800000	0.0000576000	0.002357	0.002990	10.600	0.03000
	70	0.1199945711	0.0028800000	0.0000576000	0.002244	0.002705	10.700	0.03000
	80	0.1199950842	0.0028800000	0.0000576000	0.002172	0.002448	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 3.971401 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 2.679227 \times 10^{-11}, \Delta I_3 = 2.135618 \times 10^{-12}$								
0.03	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199901397	0.0028799999	0.0000576000	0.003536	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199910766	0.0028799999	0.0000576000	0.003199	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199919243	0.0028799999	0.0000576000	0.002897	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199926913	0.0028799999	0.0000576000	0.002625	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199940134	0.0028799999	0.0000576000	0.002165	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199945816	0.0028799999	0.0000576000	0.001974	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1199950957	0.0028799999	0.0000576000	0.001806	0.002448	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 4.623915 \times 10^{-7}, \Delta I_2 = 2.955754 \times 10^{-11}, \Delta I_3 = 2.137891 \times 10^{-12}$								
Analitik:		$I_1 = 0.12, I_2 = 0.00288, I_3 = 0.0000576$						

değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 3.876875 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.287610 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.794998 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.397504×10^{-3} , 6.6422×10^{-5} ve 2.4562×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 9.45757×10^{-4} , 2.4906×10^{-5} ve 9.604×10^{-6} olarak bulundu.

Çizelge 4.1-4.3'de h 'nın sabit k 'nın azalan değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarında az miktarda artış olduğu veya sabit kaldığı görülmüştür. Çizelge 4.4-4.6'da k 'nın değeri sabitken h azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.7 de $k = 0.05$, $h = 0.03$, $\mu = 1$, $3c = 0.3$, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, ve $0 \leq t \leq 80$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan hata normları ve korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemler kullanılarak hesaplanan nümerik sonuçların karşılaştırılması verildi. Mevcut yöntem kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince sabit kaldığı ve $I_1 = 1.2$, $I_2 = 0.288$ ve $I_3 = 0.0576$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Ayrıca çizelgede

Çizelge 4.5 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.3599859851	0.0259200865	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.900	0.08978
	10	0.3599749204	0.0259200923	0.0015551999	0.055164	0.027994	10.200	0.08977
	20	0.3599805295	0.0259201094	0.0015551998	0.107810	0.054741	10.500	0.08976
	30	0.3599846676	0.0259201346	0.0015551997	0.158391	0.078543	10.800	0.08975
	40	0.3599877205	0.0259201641	0.0015551995	0.205587	0.103576	11.100	0.08973
	60	0.3599916333	0.0259202204	0.0015551993	0.287500	0.140511	11.700	0.08970
	70	0.3599928577	0.0259202423	0.0015551993	0.322052	0.151674	12.000	0.08970
	80	0.3599937598	0.0259202589	0.0015551993	0.352785	0.166316	12.300	0.08970
$\Delta I_1 = 7.774669 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 1.723821 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 7.172577 \times 10^{-10}$								
0.05	0	0.3599840612	0.0259199998	0.0015552000	0.000000	0.000000	10.000	0.09000
	10	0.3599757570	0.0259199995	0.0015551999	0.008857	0.012107	10.300	0.09000
	20	0.3599820121	0.0259199996	0.0015551999	0.007069	0.008969	10.600	0.09000
	30	0.3599866453	0.0259199996	0.0015551999	0.006410	0.006645	10.900	0.09000
	40	0.3599900769	0.0259199996	0.0015551999	0.006613	0.004923	11.200	0.09000
	60	0.3599944994	0.0259199996	0.0015552000	0.008108	0.003892	11.800	0.09000
	70	0.3599958916	0.0259199997	0.0015552000	0.008952	0.004290	12.100	0.09000
	80	0.3599969210	0.0259199997	0.0015552000	0.009749	0.004605	12.400	0.09000
$\Delta I_1 = 1.285976 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.277315 \times 10^{-10}, \Delta I_3 = 4.838434 \times 10^{-11}$								
0.03	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599757728	0.0259199995	0.0015551999	0.008690	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599820401	0.0259199995	0.0015551999	0.006495	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3599866827	0.0259199995	0.0015551999	0.004981	0.006645	10.890	0.09000
	40	0.3599901214	0.0259199995	0.0015551999	0.004033	0.004923	11.190	0.09000
	60	0.3599945537	0.0259199995	0.0015552000	0.003405	0.002702	11.790	0.09000
	70	0.3599959491	0.0259199995	0.0015552000	0.003466	0.002001	12.090	0.09000
	80	0.3599969809	0.0259199995	0.0015552000	0.003626	0.001647	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 1.308092 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 2.463336 \times 10^{-10}, \Delta I_3 = 4.838741 \times 10^{-11}$								
Analitik:		$I_1 = 0.36, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.0015552$						

(4.1.2) yaklaşımı kullanılarak elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [25] hariç tüm diğer referanslarda verilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

4.1.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problemde hesaplamalar $[0,80]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $x_1 = 10, x_2 = 25, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, \mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0'$ dan $t_{final} = 30$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Her bir zaman adımında (4.1.2) ile verilen Rubin-Graves tipi yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla sunuldu.

Çizelge 4.8 de korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 2.692321 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.499911 \times 10^{-2}, \Delta I_3 = 5.410303 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 1.675837 \times 10^{-4}, \Delta I_2 = 8.777821 \times 10^{-5}, \Delta I_3 = 6.132817 \times 10^{-4}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 1.762146 \times 10^{-4}, \Delta I_2 = 4.345072 \times 10^{-5}, \Delta I_3 = 3.703043 \times 10^{-4}$ olarak elde edilirken; $k = 0.01$

Çizelge 4.6 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	1.1999532838	0.2880009609	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.900	0.29925
	10	1.1999526333	0.2880016020	0.0575999854	0.581639	0.292173	11.100	0.29911
	20	1.1999749677	0.2880026172	0.0575999732	1.036283	0.503249	12.000	0.29978
	30	1.1999830354	0.2880031144	0.0575999765	1.351115	0.609572	12.900	0.29906
	40	1.1999858503	0.2880034696	0.0575999805	1.601855	0.623235	14.100	0.29938
	60	1.1999858982	0.2880050102	0.0575999744	2.068275	0.875843	15.900	0.29942
	70	1.1999831563	0.2880058645	0.0575999704	2.255769	0.940302	17.100	0.29957
	80	1.1999752381	0.2880065291	0.0575999676	2.397504	0.945757	18.000	0.30030
	$\Delta I_1 = 2.195438 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 5.568189 \times 10^{-6}, \Delta I_3 = 3.241496 \times 10^{-8}$							
0.05	0	1.1999468707	0.2879999979	0.0576000000	0.000000	0.000000	10.000	0.30000
	10	1.1999596845	0.2879999954	0.0575999980	0.021218	0.020041	11.000	0.30000
	20	1.1999849110	0.2879999962	0.0575999982	0.028604	0.013415	12.000	0.29999
	30	1.1999941344	0.2879999967	0.0575999982	0.036779	0.016013	13.000	0.30000
	40	1.1999973795	0.2879999970	0.0575999982	0.043558	0.017238	14.000	0.30000
	60	1.1999973804	0.2879999982	0.0575999982	0.056492	0.022941	16.000	0.30001
	70	1.1999941369	0.2879999989	0.0575999982	0.061935	0.024657	17.000	0.30001
	80	1.1999849177	0.2879999994	0.0575999982	0.066422	0.024906	18.000	0.30001
	$\Delta I_1 = 3.804707 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.562817 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.779266 \times 10^{-9}$							
0.03	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.1999598177	0.2879999943	0.0575999980	0.015299	0.020041	11.010	0.29999
	20	1.1999850993	0.2879999944	0.0575999982	0.011178	0.007373	12.000	0.30000
	30	1.1999943449	0.2879999945	0.0575999982	0.013070	0.005327	12.990	0.29999
	40	1.1999975985	0.2879999945	0.0575999982	0.015369	0.006233	14.010	0.29999
	60	1.1999975989	0.2879999947	0.0575999982	0.020114	0.007832	15.990	0.29999
	70	1.1999943459	0.2879999948	0.0575999982	0.022288	0.008701	17.010	0.30000
	80	1.1999851019	0.2879999949	0.0575999982	0.024562	0.009604	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 3.876875 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 2.287610 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.794998 \times 10^{-9}$							
Analitik:		$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$						

Çizelge 4.7 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

t		I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0		1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000
10		1.1999598177	0.2879999943	0.0575999980	0.015299	0.020041
20		1.1999850993	0.2879999944	0.0575999982	0.011178	0.007373
30		1.1999943449	0.2879999945	0.0575999982	0.013070	0.005327
40		1.1999975985	0.2879999945	0.0575999982	0.015369	0.006233
50		1.1999983948	0.2879999946	0.0575999982	0.017751	0.006960
60		1.1999975989	0.2879999947	0.0575999982	0.020114	0.007832
70		1.1999943459	0.2879999948	0.0575999982	0.022288	0.008701
80		1.1999851019	0.2879999949	0.0575999982	0.024562	0.009604
80	[3]	1.199998	0.28798	0.05759	0.056	0.053
80	[45]	1.20000	0.28797	0.0576	0.50338	0.26836
80	[16]	1.19100	0.28550	0.5582	3.849	2.646
80	[17]	1.1964	0.2858	0.05582	7.444	4.373
80	[23]	1.199995	0.28798	0.05759	0.029	0.021
80	[24]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
80	[25]	1.19999	0.28801	0.0576	0.003	0.002
80	[26]	1.20004	0.28799	0.0576	0.125	0.073
80	[30]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
80	[34]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03882	0.05151
80	[37]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03962	0.05446
Analitik:		$I_1 = 1.2$	$I_2 = 0.288$	$I_3 = 0.0576$		

Çizelge 4.8 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 2' nin k ve h nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	26.999859	81.002507	218.702832	26.999859	81.002507	218.702832
	5	26.999878	81.008319	218.706560	26.999878	81.006607	218.701113
	10	26.999880	80.933751	218.679078	26.999880	80.936698	218.711496
	15	26.999882	80.647620	218.405587	26.999882	80.705562	218.782831
	20	26.999883	80.919953	218.674511	26.999883	80.927975	218.713563
	25	26.999885	81.010842	218.707413	26.999885	81.009110	218.700579
0.1	0	26.999827	81.000423	218.702832	26.999827	81.000423	218.702832
	5	26.999994	81.000254	218.702380	26.999994	81.000256	218.702825
	10	26.999994	80.991029	218.662392	26.999994	80.997113	218.702434
	15	26.999994	80.928546	218.323771	26.999994	80.987457	218.699146
	20	26.999994	80.988751	218.653571	26.999994	80.996753	218.702377
	25	26.999994	80.999918	218.701901	26.999994	81.000122	218.702821
0.05	0	26.999822	81.000420	218.702832	26.999822	81.000420	218.702832
	5	26.999998	81.000319	218.702191	26.999998	81.000374	218.702822
	10	26.999998	80.993355	218.662124	26.999999	80.999539	218.702413
	15	26.999998	80.937783	218.323690	26.999999	80.996724	218.699024
	20	26.999998	80.991435	218.653264	26.999999	80.999439	218.702354
	25	26.999998	81.000073	218.701651	26.999999	81.000337	218.702818
30	26.999998	81.000463	218.703203	26.999999	81.000406	218.702833	
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$	$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 2.690157 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.272663 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 2.732315 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 1.677244 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 3.682655 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 2.622181 \times 10^{-6}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 1.763642 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.392027 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 1.494145 \times 10^{-7}$ olarak hesaplandı. Hesaplanarak bulunan verilerde konum adımı azaldığında I_1 'deki değişimin bir miktar arttığı, I_2 ve I_3 'deki değişimin küçüldüğü görülmektedir.

Çizelge 4.9 da $\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak elde edilen korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir. Ayrıca hesaplanan korunum sabitlerinin $I_1 = 27, I_2 = 81$ ve $I_3 = 218.7$ analitik değerlerinin ve bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle verilen değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

4.1.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problemde hesaplamalar $[0, 100]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, \mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 15$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.1.2) Rubin-Graves tipi yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nin

Çizelge 4.9 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

t		I_1	I_2	I_3
1		26.999914	81.000428	218.702860
5		26.999994	81.000254	218.702380
10		26.999994	80.991029	218.662392
15		26.999994	80.928546	218.323771
20		26.999994	80.988751	218.653571
25		26.999994	80.999918	218.701901
30		26.999994	81.000511	218.703446
30	[45]	27.0000378	80.215356	218.583344
30	[20]	27.12702	80.98988	218.6996
30	[23]	27.00003	81.01719	218.70650
30	[25]	27.00068	81.02407	218.73673
30	[26]	27.00017	80.96848	218.70210
30	[31] ($h = 0.4$)	27.00000	80.999703	218.69966
30	[32]	27.00017	81.00044	218.70304
30	[33] ($h = 0.4$)	27.000582	81.001095	218.726082
30	[37]	27.00019	81.00045	218.70312
30	[38] ($h = 0.2, k = 0.05$)	26.93310	80.80028	218.16659
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.10 de korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 2.070714 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 3.563971 \times 10^{-1}$, $\Delta I_3 = 2.639069 \times 10^0$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 1.993873 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 6.766622 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 8.762278 \times 10^{-1}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 2.128906 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 6.204431 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 8.178493 \times 10^{-1}$ olarak elde edilirken. $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 6.878516 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 1.193300 \times 10^{-1}$, $\Delta I_3 = 5.106896 \times 10^{-2}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 9.361171 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 4.216666 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 1.910094 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 1.046474 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.042688 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 1.335444 \times 10^{-3}$ olarak elde edildi. Bu sonuçlardan korunum adım azaldıkça I_1 'deki değişimin bir miktar arttığı, I_2 ve I_3 'deki değişimin azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.11 de $\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan diğer araştırmacılar tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden bulunan korunum sabitlerinin simülasyon boyunca hemen hemen sabit kaldığı ve $I_1 = 78, I_2 = 655.2$ ve $I_3 = 5450.4$ analitik değerleriyle oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.10 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	77.999979	655.294189	5451.148182	77.999979	655.294189	5451.148182
	3	77.999977	649.193915	5387.779013	77.999977	652.917702	5452.292143
	6	77.999978	654.916802	5451.348656	77.999978	654.965306	5451.221844
	9	77.999978	655.355680	5453.570407	77.999978	655.171561	5451.159404
	12	77.999979	655.570691	5453.763654	77.999978	655.343719	5451.108762
	15	77.999977	655.650586	5453.787251	77.999972	655.413519	5451.097113
0.1	0	77.999974	655.276959	5451.148182	77.999974	655.276959	5451.148182
	3	77.999999	651.234593	5384.432384	77.999999	655.133954	5450.405302
	6	77.999999	655.104249	5449.200781	77.999999	655.257393	5451.130712
	9	77.999999	655.283723	5451.739310	77.999999	655.267129	5451.147398
	12	77.999999	655.334238	5451.984813	77.999999	655.274378	5451.149744
	15	77.999994	655.344625	5452.024410	77.999983	655.277380	5451.150092
0.05	0	77.999973	655.276933	5451.148182	77.999973	655.276933	5451.148182
	3	78.000000	651.303032	5384.382362	78.000000	655.207873	5450.402058
	6	78.000000	655.114505	5449.136500	78.000000	655.270836	5451.129873
	9	78.000000	655.285456	5451.680792	78.000000	655.274098	5451.146727
	12	78.000000	655.330871	5451.926324	78.000000	655.276234	5451.149150
	15	77.999995	655.338977	5451.966032	77.999984	655.277037	5451.149518
Analitik:		$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$	$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

Çizelge 4.11 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).

t	I_1	I_2	I_3
0	77.999974	655.276959	5451.148182
3	77.999999	651.234593	5384.432384
6	77.999999	655.104249	5449.200781
9	77.999999	655.283723	5451.739310
12	77.999999	655.334238	5451.984813
15	77.999994	655.344625	5452.024410
15 [45]	77.999995	655.077177	5452.01470
15 [20]	78.00490	652.3474	5412.232
15 [22]	77.995390	652.810400	5411.6390
15 [31] ($h = 0.4$)	77.999984	652.411538	5412.23185
15 [33] ($h = 0.5$)	78.000222	655.341909	5452.481409
15 [38] ($h = 0.1833, k = 0.05$)	77.86967	654.09104	5440.78956
Analitik:	$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

Çizelge 4.12 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772454	1.266992	1.029004	1.772454	1.264397	1.023843
	6	1.772454	1.267111	1.030493	1.772454	1.263687	1.024010
	9	1.772454	1.266997	1.030598	1.772454	1.263489	1.024033
	12	1.772454	1.266939	1.030618	1.772454	1.263413	1.024039
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772454	1.268590	1.028909	1.772454	1.265892	1.023551
	6	1.772454	1.269474	1.030366	1.772454	1.265895	1.023608
	9	1.772454	1.269560	1.030458	1.772454	1.265889	1.023612
	12	1.772454	1.269578	1.030474	1.772454	1.265887	1.023613

4.1.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı

Dördüncü problemde tüm hesaplamalar $[0, 40]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı ve μ nün farklı değerleri için solitary dalga oluşumu gözlemlendi. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 12$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.1.2) ile verilen Rubin-Graves tipi yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı kullanılarak çözüldü. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.12 de $t = 0$ ve $t = 12$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde mutlak değişim, $\mu = 0.01$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 6.383782 \times 10^{-13}$, $\Delta I_2 = 1.092194 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 7.290935 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 3.154144 \times 10^{-12}$, $\Delta I_2 = 2.434745 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 7.125605 \times 10^{-4}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 2.852607 \times 10^{-12}$, $\Delta I_2 = 3.730352 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 7.147350 \times 10^{-3}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 1.442646 \times 10^{-11}$, $\Delta I_2 = 3.955578 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 2.860050 \times 10^{-4}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan h ve k küçüldükçe I_1 'deki değişimin arttığı, I_2 ve I_3 'deki değişimin nispeten azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.13 de I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki mutlak değişim, $\mu = 0.05$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.901946 \times 10^{-13}$, $\Delta I_2 = 2.306645 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 8.032268 \times 10^{-4}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 3.043565 \times 10^{-12}$, $\Delta I_2 = 4.818272 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 4.757827 \times 10^{-5}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 9.680479 \times 10^{-12}$, $\Delta I_2 = 5.112716 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 7.962135 \times 10^{-3}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 4.871148 \times 10^{-11}$, $\Delta I_2 = 7.492122 \times 10^{-7}$, $\Delta I_3 = 3.188020 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan h ve k nın bu değerleri için

Çizelge 4.13 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772454	1.315978	1.023821	1.772454	1.315676	1.023357
	6	1.772454	1.316018	1.024116	1.772454	1.315525	1.023373
	9	1.772454	1.316018	1.024128	1.772454	1.315515	1.023374
	12	1.772454	1.316003	1.024130	1.772454	1.315498	1.023374
0.01	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772454	1.316284	1.023815	1.772454	1.315980	1.023346
	6	1.772454	1.316480	1.024109	1.772454	1.315981	1.023358
	9	1.772454	1.316490	1.024122	1.772454	1.315981	1.023359
	12	1.772454	1.316491	1.024123	1.772454	1.315981	1.023359

Çizelge 4.14 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dakilerin karşılaştırılması.

μ	t	Rubin-Graves			[45]			[34]		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.77245	1.31582	1.02333	1.77245	1.31598	1.02333
	3	1.772454	1.315742	1.023458	1.77245	1.31745	1.02823	1.77245	1.31648	1.02356
	6	1.772454	1.315632	1.023536	1.77245	1.31874	1.03149	1.77245	1.31619	1.02340
	9	1.772454	1.315625	1.023539	1.77245	1.31891	1.03170	1.77245	1.31617	1.02339
	12	1.772454	1.315608	1.023540	1.77245	1.31901	1.03180	1.77245	1.31612	1.02339
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.77245	1.26585	1.02333	1.77245	1.26585	1.02333
	3	1.772454	1.264966	1.024972	1.77245	1.27653	1.05877	1.77245	1.26632	1.02330
	6	1.772454	1.264435	1.025426	1.77245	1.28282	1.07337	1.77245	1.26599	1.02294
	9	1.772454	1.264255	1.025467	1.77245	1.28445	1.07573	1.77245	1.26639	1.02295
	12	1.772454	1.264183	1.025476	1.77245	1.28512	1.07645	1.77245	1.26567	1.02293

küçüldükçe I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.14 de $h = 0.05$, $k = 0.05$ olmak üzere $\mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] de verilen sonuçlarla oldukça iyi uyum içinde olduğu görülmektedir.

4.1.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu

Beşinci problemde tüm hesaplamalar $[-20, 50]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde $U(-20, t) = U_0$ ve $U(50, t) = 0$ sınır şartları kullanılarak elde edildi. Tüm çalışmalarda $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$, $U_0 = 0.1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ile $t_{final} = 800$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.1.2) Rubin-Graves tipi yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle hesaplanan MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.15 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003583	0.175478	0.016287	2.003583	0.175478	0.016287
100	2.503561	0.242142	0.023787	2.503562	0.242142	0.023787
200	3.003541	0.308811	0.031289	3.003542	0.308800	0.031287
300	3.503522	0.375485	0.038793	3.503522	0.375454	0.038787
400	4.003502	0.442158	0.046298	4.003503	0.442108	0.046286
500	4.503483	0.508832	0.053802	4.503484	0.508761	0.053786
600	5.003464	0.575506	0.061306	5.003465	0.575414	0.061286
700	5.503445	0.642179	0.068810	5.503445	0.642068	0.068786
800	6.003424	0.708853	0.076315	6.003425	0.708721	0.076286

Çizelge 4.16 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005082	0.175628	0.016302	2.005082	0.175628	0.016302
100	2.505041	0.242289	0.023802	2.505041	0.242289	0.023802
200	3.005002	0.308940	0.031301	3.005002	0.308939	0.031301
300	3.504962	0.375581	0.038801	3.504962	0.375580	0.038801
400	4.004923	0.442221	0.046301	4.004923	0.442220	0.046300
500	4.504884	0.508862	0.053801	4.504884	0.508860	0.053800
600	5.004845	0.575502	0.061300	5.004845	0.575499	0.061300
700	5.504805	0.642142	0.068800	5.504805	0.642139	0.068799
800	6.004765	0.708782	0.076300	6.004765	0.708778	0.076299

Çizelge 4.15 de $d = 5$, $h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak bulunan korunum sabitleri verildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6672 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5035 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6655 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4999 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.16 da $d = 5$, $h = 0.1$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6644 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4998 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6644 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4996 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi.

Bu sonuçlara göre zaman adımı k küçüldüğünde M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarında önemli ölçüde değişim olmadığı, konum adımı h küçüldükçe M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarının $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ teorik değerleri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.17 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

t	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.003583	0.175478	0.016287	-20.00	0.09997
200	3.003542	0.308800	0.031287	8.77	0.16047
300	3.503522	0.375454	0.038787	14.51	0.17494
400	4.003503	0.442108	0.046286	20.39	0.17909
500	4.503484	0.508761	0.053786	26.41	0.18124
600	5.003465	0.575414	0.061286	32.50	0.18258
700	5.503445	0.642068	0.068786	38.59	0.18335
800	6.003425	0.708721	0.076286	44.75	0.18380
800 [3]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800 [45]	6.003580	0.709577	0.076505	44.75	0.184379
800 [16]	6.027221	0.713333	0.077000	44.70	0.183760
800 [19]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.183970
800 [23]	6.003578	0.708498	0.076192	44.75	0.183822
800 [24]	5.446117	0.606864	0.062520	44.89	0.191063
800 [25]	6.00259	0.70885	0.07628	44.75	0.184050
800 [26]	5.996421	0.707090	0.076213	44.75	0.183684
800 [32]	6.002578	0.708710	0.076277	44.75	0.18405

Çizelge 4.18 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in $d = 5, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
RG	4.999802	6.665537	7.49987
[3]	5.000650	6.666390	7.50050
[45]	4.995664	6.676238	7.53588
[16]	5.030800	6.724400	7.59020
[19]	5.000600	6.666400	7.50050
[23]	5.000000	6.662800	7.48810
[24]	4.332000	5.396100	5.78280
[26]	4.999800	6.653900	7.49930
[32]	4.999990	6.666650	7.50000
Analitik:	5	6.66667	7.5

Çizelge 4.17 de $h = 0.07, d = 5$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre Çizelge 4.18 de M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.19 da $d = 2, h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Simülasyon boyunca I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 4.99978 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6673 \times 10^{-4}, M_3 = 7.50388 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 4.99978 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6654 \times 10^{-4}, M_3 = 7.49975 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}, M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.19 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003500	0.190628	0.018535	2.003500	0.190628	0.018535
100	2.503481	0.257296	0.026037	2.503481	0.257287	0.026035
200	3.003462	0.323969	0.033541	3.003462	0.323940	0.033535
300	3.503442	0.390642	0.041045	3.503442	0.390594	0.041034
400	4.003423	0.457316	0.048549	4.003423	0.457247	0.048534
500	4.503404	0.523989	0.056054	4.503404	0.523900	0.056034
600	5.003385	0.590663	0.063558	5.003385	0.590554	0.063534
700	5.503366	0.657337	0.071062	5.503366	0.657207	0.071033
800	6.003323	0.724010	0.078566	6.003322	0.723860	0.078533

Çizelge 4.20 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005000	0.190778	0.018550	2.005000	0.190778	0.018550
100	2.504961	0.257430	0.026050	2.504961	0.257429	0.026049
200	3.004922	0.324070	0.033549	3.004922	0.324069	0.033549
300	3.504882	0.390710	0.041049	3.504882	0.390708	0.041049
400	4.004843	0.457350	0.048549	4.004843	0.457348	0.048548
500	4.504804	0.523990	0.056048	4.504804	0.523987	0.056048
600	5.004765	0.590630	0.063548	5.004765	0.590627	0.063547
700	5.504725	0.657270	0.071048	5.504725	0.657266	0.071047
800	6.004662	0.723910	0.078548	6.004662	0.723905	0.078547

Çizelge 4.20 de $d = 2$, $h = 0.1$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 4.99958 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6642 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.49975 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 4.99958 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.49963 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Bu sonuçlara göre korunum sabitlerinin lineer artış oranlarında zaman adımı k küçüldükçe önemli ölçüde değişimin olmadığı, konum adımı h küçüldükçe analitik değeri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.21 de $d = 2$, $h = 0.07$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı

Çizelge 4.21 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in $d = 2$, $h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
RG	4.99980	6.665538	7.49988
[3]	5.00090	6.662200	7.48630
[45]	4.99997	6.677588	7.54100
[16]	4.92730	6.526900	7.29380
[23]	5.00000	6.662200	7.48630
[24]	4.58670	5.883400	6.52150
[26]	5.00000	6.652500	7.50000
[32]	4.99997	6.666650	7.50000
Analitik:	5	6.66667	7.5

Çizelge 4.22 : Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $k = 0.05$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.003500	0.190628	0.018535	-20.00	0.10000
200	3.003462	0.323940	0.033535	9.40	0.17591
300	3.503442	0.390594	0.041034	15.35	0.17991
400	4.003423	0.457247	0.048534	21.37	0.18197
500	4.503404	0.523900	0.056034	27.46	0.18303
600	5.003385	0.590554	0.063534	33.55	0.18370
700	5.503366	0.657207	0.071033	39.71	0.18422
800	6.003322	0.723860	0.078533	45.87	0.18451
800 [3]	6.003194	0.723867	0.078534	45.85	0.18460
800 [45]	6.003472	0.724835	0.078793	45.87	0.185059
800 [16]	5.994366	0.712677	0.076876	45.70	0.183918
800 [23]	6.003478	0.723605	0.078426	45.87	0.184518
800 [24]	5.669824	0.660997	0.070677	46.73	0.197568
800 [25]	6.00248	0.72402	0.07853	45.85	0.184713
800 [26]	5.996473	0.722126	0.078465	45.87	0.184431
800 [32]	6.002474	0.723860	0.078525	45.85	0.18471

yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde diğer araştırmacılar tarafından verilen değerlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.22 de $h = 0.07$ ve $d = 2$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak bulunan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde bazı diğer araştırmacılar tarafından sunulan değerler ile verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

4.2 Bir Lineerleştirme Tekniği

Bu bölümde

$$U_t + UU_x - \mu U_{xx} = 0$$

denkleminde

$$Z_m = U$$

şeklinde verilen bir lineerleştirme uygulandı. Denkleminde zaman yönündeki türevler yerine ileri fark, konum yönündeki türev yerine Crank-Nicolson tipi yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(Z_m U_x)^{n+1} + (Z_m U_x)^n}{2} - \mu \frac{(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bulunan denkleminde eşitliğin her iki tarafında Δt ile çarpılır

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t [(Z_m U_x)^{n+1} + (Z_m U_x)^n]}{2} - \mu [(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n] = 0$$

ve düzenlenirse

$$U^{n+1} - U^n + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m^{n+1} \right) + U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m^n \right) - \mu U_{xx}^{n+1} - \mu U_{xx}^n = 0$$

elde edilir. Fakat Z_m ifadesinin sabit olduğu kabul edildiğinden

$$Z_m^{n+1} = Z_m^n = Z_m$$

olur. Buna göre denklem yeniden düzenlenirse

$$U^{n+1} - U^n + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) + U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^{n+1} - \mu U_{xx}^n = 0$$

şeklinde olur. $(n+1)$. zaman adımı sol tarafa (n) . zaman adımı sağ tarafa toplanırsa

$$U^{n+1} + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^n$$

elde edilir. Şimdi Rubin-Graves tipi yaklaşımda olduğu gibi U , U_x ve U_{xx} ifadeleri yerine $j = 0(1)N$ değerleri için düğüm noktalarında trigonometrik kübik B-spline yaklaşımları kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{j-1}^{n+1} \left[\alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] + \delta_j^{n+1} \left[\alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] + \delta_{j+1}^{n+1} \left[\alpha_1 + \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] \\ & = \delta_{j-1}^n \left[\alpha_1 - \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] + \delta_j^n \left[\alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] + \delta_{j+1}^n \left[\alpha_1 - \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

iteratif denklemi elde edilir.

4.2.1 Kararlılık Analizi

EW denkleminde UU_x non-lineer teriminde U yerine Z_m gibi yerel bir sabit alınarak bir linerleştirme elde edildi. Elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi von-Neuman yöntemi kullanılarak incelendi. Bunun için (4.2.1) yaklaşımında δ_j^n yerine $\delta_j^n = e^{i\beta j h} \xi^n$, $i = \sqrt{-1}$ yazılır

$$\begin{aligned} & e^{i\beta(j-1)h} \xi^{n+1} \left[\alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] + e^{i\beta(j)h} \xi^{n+1} \left[\alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] \\ & \quad + e^{i\beta(j+1)h} \xi^{n+1} \left[\alpha_1 + \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] \\ & = e^{i\beta(j-1)h} \xi^n \left[\alpha_1 - \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] + e^{i\beta(j)h} \xi^n \left[\alpha_2 - \mu \gamma_2 \right] \\ & \quad + e^{i\beta(j+1)h} \xi^n \left[\alpha_1 - \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1 \right] \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılır, $e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$ Euler formülü ile $e^{-i\beta h} + e^{i\beta h} = 2 \cos \beta h$ ve $e^{i\beta h} - e^{-i\beta h} = 2i \sin \beta h$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\xi = \frac{2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos \beta h + (\alpha_2 - \mu\gamma_2) - i(\frac{3}{4}Z_m\Delta t \csc(\frac{3}{4}) \sin \beta h)}{2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos \beta h + (\alpha_2 - \mu\gamma_2) + i(\frac{3}{4}Z_m\Delta t \csc(\frac{3}{4}) \sin \beta h)}$$

bulunur. Bu eşitlikte a, b sabitlerinin

$$a = 2(\alpha_1 - \mu\gamma_1) \cos \theta + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)$$

$$b = \frac{3}{4}Z_m\Delta t \csc(\frac{3}{4}) \sin \theta$$

olarak alınmasıyla

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (4.2.2)$$

yazılabilir. (4.2.1) sonlu eleman yaklaşımının kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. (4.2.2)'dan $|\xi| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla (4.2.1) yaklaşımı şartsız kararlıdır.

4.2.2 Problem 1: Tek Solitary Dalga'nın Hareketi

Birinci problemde tüm hesaplamalar $[0, 30]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $x_0 = 10$ ve $\mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 80$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.2.1) de lineerleştirilmiş ve iç iterasyon uygulanmış yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi h, k ve c nin farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerinde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak hata normları çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.23 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771263 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.417998 \times 10^{-12}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771255 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.417767 \times 10^{-12}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771258 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.417840 \times 10^{-12}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.194440×10^{-6} , 2.194476×10^{-6} ve 2.194500×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.911159×10^{-6} , 2.911159×10^{-6} ve 2.911159×10^{-6} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.24 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820161 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.757225 \times 10^{-11}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820162 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.757671 \times 10^{-11}$; $k = 0.01$

Çizelge 4.23 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1$, $3c = 0.03$, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771263 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.417998 \times 10^{-12}$							
0.05	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771255 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.417767 \times 10^{-12}$							
0.01	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002195	0.002911	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771258 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.417840 \times 10^{-12}$							
Analitik:		$I_1 = 0.12$, $I_2 = 0.00288$, $I_3 = 0.0000576$						

değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820163 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.757833 \times 10^{-11}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1$, 0.05 ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 1.0981×10^{-5} , 1.0992×10^{-5} ve 1.0995×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.4422×10^{-5} , 1.4422×10^{-5} ve 1.4422×10^{-5} olarak bulundu. Elde edilen sonuçlardan zaman adımı küçüldüğünde korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.25 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248499 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.671619 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.752302 \times 10^{-9}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 9.248420 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.671821 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.746153 \times 10^{-9}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248394 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.671893 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.744199 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1$, 0.05 ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 4.5486×10^{-5} , 4.5117×10^{-5} ve 4.5367×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 5.2852×10^{-5} , 5.2852×10^{-5} ve 5.2852×10^{-5} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.24 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1$, $3c = 0.09$, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918716	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005496	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027843	0.0259200786	0.0015552000	0.007065	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008298	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009981	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010545	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130867	0.0259200779	0.0015552000	0.010981	0.014422	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820161 \times 10^{-8}$, $\Delta I_3 = 4.757225 \times 10^{-11}$							
0.05	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918716	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027843	0.0259200786	0.0015552000	0.007067	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008301	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009988	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010553	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130866	0.0259200779	0.0015552000	0.010992	0.014422	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820162 \times 10^{-8}$, $\Delta I_3 = 4.757671 \times 10^{-11}$							
0.01	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918716	0.0259200793	0.0015552000	0.003673	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027843	0.0259200786	0.0015552000	0.007068	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008302	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009990	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010556	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130866	0.0259200779	0.0015552000	0.010995	0.014422	12.390	0.09000
	$\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820163 \times 10^{-8}$, $\Delta I_3 = 4.757833 \times 10^{-11}$							
Analitik:		$I_1 = 0.36$, $I_2 = 0.02592$, $I_3 = 0.0015552$						

Çizelge 4.26 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 3.736303 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 5.125188 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 7.736610 \times 10^{-12}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 5.709003 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 5.212570 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.411848 \times 10^{-12}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771255 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.417767 \times 10^{-12}$ olduğu görülmektedir. Bu verilerden korunum adımı azaldığında I_1 ' de önemli bir değişiklik olmazken I_2 ve I_3 ' deki değişimlerin azaldığı görülmektedir. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 4.7394×10^{-5} , 2.532×10^{-6} ve 2.194×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.4020×10^{-5} , 2.854×10^{-6} ve 2.911×10^{-6} olarak bulundu.

Çizelge 4.27 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.154799 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.788556 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 6.330225 \times 10^{-10}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 2.879986 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 4.627327 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.735761 \times 10^{-11}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820162 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.757671 \times 10^{-11}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları

Çizelge 4.25 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.024965	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387826	0.2880008671	0.0576000017	0.034365	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480350	0.2880008652	0.0576000018	0.038222	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512942	0.2880008645	0.0576000018	0.040007	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513048	0.2880008642	0.0576000018	0.042484	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480570	0.2880008643	0.0576000018	0.043835	0.052821	17.010	0.29999
	80	1.2000388182	0.2880008643	0.0576000018	0.045486	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248499 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.671619 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.752302 \times 10^{-9}$							
0.05	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.025017	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387824	0.2880008671	0.0576000017	0.034520	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480348	0.2880008652	0.0576000018	0.038528	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512939	0.2880008645	0.0576000018	0.040470	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513045	0.2880008642	0.0576000018	0.042929	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480565	0.2880008643	0.0576000018	0.043978	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388174	0.2880008644	0.0576000017	0.045117	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248420 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.671821 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.746153 \times 10^{-9}$							
0.01	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.025047	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387824	0.2880008671	0.0576000017	0.034607	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480347	0.2880008652	0.0576000018	0.038700	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512939	0.2880008645	0.0576000018	0.040738	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513044	0.2880008642	0.0576000018	0.043304	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480563	0.2880008643	0.0576000018	0.044323	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388171	0.2880008644	0.0576000017	0.045367	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248394 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.671893 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.744199 \times 10^{-9}$							
Analitik:			$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$					

sırasıyla 3.53111×10^{-4} , 1.4263×10^{-5} ve 1.0992×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.66321×10^{-4} , 1.4139×10^{-5} ve 1.4422×10^{-5} olarak bulundu.

Çizelge 4.28 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 6.790045 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.634140 \times 10^{-6}$ ve $\Delta I_3 = 2.995413 \times 10^{-8}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 9.121034 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.148957 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.742149 \times 10^{-9}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248420 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.671821 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.746153 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.397713×10^{-3} , 7.6258×10^{-5} ve 4.5117×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 9.45906×10^{-4} , 5.1818×10^{-5} ve 5.2852×10^{-5} olarak bulundu. Çizelge 4.23-4.25'de h 'nın sabit k 'nın azalan değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarında az miktarda artış olduğu veya sabit kaldığı görülmüştür. Çizelge 4.26-4.28'da k 'nın değeri sabitken h azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında azaldığı gözlemlenmektedir.

Çizelge 4.29 da $k = 0.05, h = 0.03, \mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30$, ve $0 \leq t \leq 80$ değerleri için (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak bulunan hata normlarının ve korunum

Çizelge 4.26 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1$, $3c = 0.03$, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.1199953284	0.0028800096	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.900	0.02993
	10	0.1199946259	0.0028800105	0.0000576000	0.006670	0.004929	10.200	0.02992
	20	0.1199954679	0.0028800107	0.0000576000	0.012422	0.006213	10.200	0.03000
	30	0.1199962288	0.0028800111	0.0000576000	0.018357	0.009332	10.200	0.02992
	40	0.1199969164	0.0028800116	0.0000576000	0.024299	0.012272	10.500	0.02992
	60	0.1199980990	0.0028800130	0.0000576000	0.036023	0.018248	10.500	0.02992
	70	0.1199986063	0.0028800138	0.0000576000	0.041761	0.021322	10.800	0.02992
	80	0.1199990647	0.0028800147	0.0000576000	0.047394	0.024020	10.800	0.02999
	$\Delta I_1 = 3.736303 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 5.125188 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 7.736610 \times 10^{-12}$							
0.05	0	0.1199946871	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	10.000	0.03000
	10	0.1199954484	0.0028800053	0.0000576000	0.001172	0.004929	10.100	0.03000
	20	0.1199963837	0.0028800053	0.0000576000	0.001259	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972301	0.0028800053	0.0000576000	0.001429	0.004036	10.300	0.03000
	40	0.1199979958	0.0028800052	0.0000576000	0.001640	0.003652	10.400	0.03000
	60	0.1199993156	0.0028800052	0.0000576000	0.002095	0.002990	10.600	0.03000
	70	0.1199998828	0.0028800052	0.0000576000	0.002318	0.002705	10.700	0.03000
	80	0.1200003961	0.0028800052	0.0000576000	0.002532	0.002854	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 5.709003 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 5.212570 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.411848 \times 10^{-12}$							
0.03	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
	$\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771255 \times 10^{-9}$, $\Delta I_3 = 1.417767 \times 10^{-12}$							
Analitik:		$I_1 = 0.12$, $I_2 = 0.00288$, $I_3 = 0.0000576$						

sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemler kullanılarak hesaplanan nümerik sonuçların karşılaştırılması verildi. Mevcut yöntem kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince sabit kaldığı ve $I_1 = 1.2$, $I_2 = 0.288$ ve $I_3 = 0.0576$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Ayrıca çizelgede (4.1.2) yaklaşımı kullanılarak elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer referanslarda elde edilmiş olan sonuçlarla iyi uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir.

4.2.3 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problemde tüm hesaplamalar $[0, 80]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.75$, $\mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ile $t_{final} = 30$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.2.1) de lineerleştirilmiş ve iç iterasyon uygulanmış yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.27 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalğanın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.3599859851	0.0259200865	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.900	0.08978
	10	0.3599886865	0.0259200999	0.0015552000	0.055071	0.027995	10.200	0.08977
	20	0.3599942971	0.0259201166	0.0015551999	0.108067	0.054743	10.500	0.08976
	30	0.3599984366	0.0259201416	0.0015551997	0.158727	0.078544	10.800	0.08975
	40	0.3600014905	0.0259201709	0.0015551996	0.205941	0.103578	11.100	0.08973
	60	0.3600054051	0.0259202270	0.0015551994	0.287846	0.140515	11.700	0.08970
	70	0.3600066303	0.0259202488	0.0015551994	0.322388	0.151678	12.000	0.08970
	80	0.3600075331	0.0259202653	0.0015551994	0.353111	0.166321	12.300	0.08970
$\Delta I_1 = 2.154799 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.788556 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 6.330225 \times 10^{-10}$								
0.05	0	0.3599840612	0.0259199998	0.0015552000	0.000000	0.000000	10.000	0.09000
	10	0.3599916902	0.0259200473	0.0015552000	0.004286	0.012107	10.300	0.09000
	20	0.3599979468	0.0259200469	0.0015552000	0.006283	0.008969	10.600	0.09000
	30	0.3600025813	0.0259200466	0.0015552000	0.008209	0.009227	10.900	0.09000
	40	0.3600060139	0.0259200464	0.0015552000	0.009866	0.010866	11.200	0.09000
	60	0.3600104382	0.0259200462	0.0015552000	0.012436	0.012979	11.800	0.09000
	70	0.3600118311	0.0259200461	0.0015552000	0.013425	0.013645	12.100	0.09000
	80	0.3600128611	0.0259200461	0.0015552000	0.014263	0.014139	12.400	0.09000
$\Delta I_1 = 2.879986 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 4.627327 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.735761 \times 10^{-11}$								
0.03	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918716	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027843	0.0259200786	0.0015552000	0.007067	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008301	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009988	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010553	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130866	0.0259200779	0.0015552000	0.010992	0.014422	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.820162 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.757671 \times 10^{-11}$								
Analitik:		$I_1 = 0.36, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.0015552$						

Çizelge 4.30 da korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 3.577745 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.332360 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 3.882260 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 5.352211 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.005383 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 4.621848 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.484454 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.046070 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 4.556464 \times 10^{-3}$ olarak elde edilirken; $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 1.599315 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.270017 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 2.790911 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 3.409812 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 3.469233 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 1.087844 \times 10^{-6}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 3.542936 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 7.965926 \times 10^{-6}$, $\Delta I_3 = 4.411093 \times 10^{-7}$ olarak elde edildi. Hesaplanarak bulunan verilerde konum adımı azaldıkça I_1 'deki değişimin bir miktar arttığı, I_2 ve I_3 'deki değişimin küçüldüğü görülmektedir.

Çizelge 4.31 de $\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak elde edilen korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir. Ayrıca hesaplanan korunum

Çizelge 4.28 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	1.1999532838	0.2880009609	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.900	0.29925
	10	1.1999985312	0.2880016792	0.0575999886	0.582816	0.292250	11.100	0.29911
	20	1.2000208757	0.2880026904	0.0575999764	1.037432	0.503355	12.000	0.29978
	30	1.2000289509	0.2880031854	0.0575999796	1.352090	0.609745	12.900	0.29906
	40	1.2000317723	0.2880035387	0.0575999834	1.602631	0.623336	14.100	0.29938
	60	1.2000318324	0.2880050770	0.0575999770	2.068721	0.875880	15.900	0.29942
	70	1.2000290965	0.2880059307	0.0575999729	2.256094	0.940397	17.100	0.29957
	80	1.2000211842	0.2880065951	0.0575999700	2.397713	0.945906	18.000	0.30030
$\Delta I_1 = 6.790045 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 5.634140 \times 10^{-6}, \Delta I_3 = 2.995413 \times 10^{-8}$								
0.05	0	1.1999468707	0.2879999979	0.0576000000	0.000000	0.000000	10.000	0.30000
	10	1.2000128058	0.2880005174	0.0576000015	0.029234	0.032763	11.000	0.30000
	20	1.2000380419	0.2880005128	0.0576000017	0.043516	0.044817	12.000	0.29999
	30	1.2000472720	0.2880005112	0.0576000018	0.051689	0.049252	13.000	0.30000
	40	1.2000505227	0.2880005108	0.0576000018	0.057435	0.050884	14.000	0.30000
	60	1.2000505338	0.2880005116	0.0576000018	0.067944	0.051706	16.000	0.30001
	70	1.2000472953	0.2880005122	0.0576000018	0.072478	0.051788	17.000	0.30001
	80	1.2000380810	0.2880005127	0.0576000017	0.076258	0.051818	18.000	0.30001
$\Delta I_1 = 9.121034 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 5.148957 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.742149 \times 10^{-9}$								
0.03	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.025017	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387824	0.2880008671	0.0576000017	0.034520	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480348	0.2880008652	0.0576000018	0.038528	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512939	0.2880008645	0.0576000018	0.040470	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513045	0.2880008642	0.0576000018	0.042929	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480565	0.2880008643	0.0576000018	0.043978	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388174	0.2880008644	0.0576000017	0.045117	0.052852	18.000	0.30000
$\Delta I_1 = 9.248420 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.671821 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.746153 \times 10^{-9}$								
Analitik:		$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$						

Çizelge 4.29 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000
10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.025017	0.033418
20	1.2000387824	0.2880008671	0.0576000017	0.034520	0.045713
30	1.2000480348	0.2880008652	0.0576000018	0.038528	0.050236
40	1.2000512939	0.2880008645	0.0576000018	0.040470	0.051900
50	1.2000520954	0.2880008643	0.0576000018	0.041785	0.052513
60	1.2000513045	0.2880008642	0.0576000018	0.042929	0.052738
70	1.2000480565	0.2880008643	0.0576000018	0.043978	0.052821
80	1.2000388174	0.2880008644	0.0576000017	0.045117	0.052852
80	[3]	1.199998	0.28798	0.05759	0.056
80	[45]	1.20000	0.28797	0.0576	0.50338
80	[16]	1.19100	0.28550	0.5582	3.849
80	[17]	1.1964	0.2858	0.05582	7.444
80	[23]	1.199995	0.28798	0.05759	0.029
80	[24]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697
80	[25]	1.19999	0.28801	0.0576	0.003
80	[26]	1.20004	0.28799	0.0576	0.125
80	[30]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697
80	[34]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03882
80	[37]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03962
Analitik:		$I_1 = 1.2$	$I_2 = 0.288$	$I_3 = 0.0576$	

Çizelge 4.30 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 2' nin k ve h nin farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	26.999859	81.002507	218.702832	26.999859	81.002507	218.702832
	5	27.000049	81.006453	218.703147	27.000011	81.006587	218.701074
	10	27.000110	80.937712	218.705461	27.000013	80.936736	218.711750
	15	27.000225	80.707364	218.695352	27.000014	80.706154	218.785709
	20	27.000156	80.926545	218.707437	27.000016	80.928032	218.713849
	25	27.000174	81.009295	218.705837	27.000018	81.009087	218.700530
	30	27.000217	81.015830	218.706715	27.000019	81.015207	218.700042
0.1	0	26.999827	81.000423	218.702832	26.999827	81.000423	218.702832
	5	27.000209	81.000471	218.703483	27.000167	81.000260	218.702831
	10	27.000267	80.997700	218.694658	27.000168	80.997180	218.702748
	15	27.000377	80.989041	218.612150	27.000168	80.988059	218.702010
	20	27.000309	80.997459	218.693594	27.000168	80.996834	218.702736
	25	27.000323	81.000940	218.706088	27.000168	81.000127	218.702831
	30	27.000362	81.001428	218.707454	27.000168	81.000388	218.702834
0.05	0	26.999822	81.000420	218.702832	26.999822	81.000420	218.702832
	5	27.000218	81.000603	218.703437	27.000176	81.000381	218.702830
	10	27.000276	81.000114	218.694578	27.000176	80.999609	218.702729
	15	27.000385	80.998306	218.612036	27.000176	80.997330	218.701887
	20	27.000318	81.000213	218.693500	27.000176	80.999523	218.702714
	25	27.000331	81.001180	218.706023	27.000176	81.000347	218.702829
	30	27.000371	81.001466	218.707389	27.000176	81.000412	218.702833
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$	$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

Çizelge 4.31 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

t	I_1	I_2	I_3	
1	27.000096	81.000470	218.702973	
5	27.000209	81.000471	218.703483	
10	27.000267	80.997700	218.694658	
15	27.000377	80.989041	218.612150	
20	27.000309	80.997459	218.693594	
25	27.000323	81.000940	218.706088	
30	27.000362	81.001428	218.707454	
30 [45]	27.0000378	80.215356	218.583344	
30 [20]	27.12702	80.98988	218.6996	
30 [23]	27.00003	81.01719	218.70650	
30 [25]	27.00068	81.02407	218.73673	
30 [26]	27.00017	80.96848	218.70210	
30 [31] ($h = 0.4$)	27.00000	80.999703	218.69966	
30 [32]	27.00017	81.00044	218.70304	
30 [33] ($h = 0.4$)	27.000582	81.001095	218.726082	
30 [37]	27.00019	81.00045	218.70312	
30 [38] ($h = 0.2, k = 0.05$)	26.93310	80.80028	218.16659	
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

Çizelge 4.32 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	77.999979	655.294189	5451.148182	77.999979	655.294189	5451.148182
	3	78.055760	653.817810	5446.844400	78.000000	652.960713	5452.841715
	6	78.053933	655.750510	5462.448086	77.999998	654.964866	5451.220369
	9	78.097050	656.730483	5472.628630	77.999999	655.169924	5451.146784
	12	78.142296	657.648375	5482.746366	78.000000	655.341654	5451.094450
	15	78.187788	658.471917	5492.908412	77.999994	655.411395	5451.082680
0.1	0	77.999974	655.276959	5451.148182	77.999974	655.276959	5451.148182
	3	78.055511	655.996561	5444.478700	78.000027	655.178289	5450.965090
	6	78.053293	656.105164	5461.539651	78.000026	655.258881	5451.144103
	9	78.093499	656.789941	5471.203177	78.000026	655.267519	5451.148279
	12	78.135878	657.494876	5480.707295	78.000027	655.274345	5451.148925
	15	78.178472	658.199477	5490.209268	78.000012	655.277288	5451.149119
0.05	0	77.999973	655.276933	5451.148182	77.999973	655.276933	5451.148182
	3	78.055506	656.069358	5444.460011	78.000029	655.252249	5450.962163
	6	78.053278	656.120717	5461.515138	78.000027	655.272384	5451.143733
	9	78.093398	656.795987	5471.160214	78.000028	655.274553	5451.148040
	12	78.135692	657.494379	5480.644459	78.000028	655.276265	5451.148762
	15	78.178200	658.195224	5490.126331	78.000013	655.277009	5451.148975
Analitik:		$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$	$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

sabitlerinin $I_1 = 27, I_2 = 81$ ve $I_3 = 218.7$ analitik değerleri ve bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle verilen değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

4.2.4 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problemde tüm hesaplamalar $[0, 100]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, \mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ile $t_{final} = 15$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.2.1) de lineerleştirilmiş ve iç iterasyon uygulanmış yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.32 de korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 1.878095 \times 10^{-1}, \Delta I_2 = 3.177728 \times 10^0, \Delta I_3 = 4.176023 \times 10^1$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 1.784981 \times 10^{-1}, \Delta I_2 = 2.922519 \times 10^0, \Delta I_3 = 3.906109 \times 10^1$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 1.782261 \times 10^{-1}, \Delta I_2 = 2.918292 \times 10^0, \Delta I_3 = 3.897815 \times 10^1$ olarak elde edilirken. $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 1.528597 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.172060 \times 10^{-1}, \Delta I_3 = 6.550204 \times 10^{-2}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 3.751655 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 3.292909 \times 10^{-4}, \Delta I_3 = 9.362230 \times 10^{-4}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 3.931750 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.623458 \times 10^{-5}, \Delta I_3 = 7.923246 \times 10^{-4}$ olarak elde edildi.

Çizelge 4.33 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).

t		I_1	I_2	I_3
0		77.999974	655.276959	5451.148182
3		78.055511	655.996561	5444.478700
6		78.053293	656.105164	5461.539651
9		78.093499	656.789941	5471.203177
12		78.135878	657.494876	5480.707295
15		78.178472	658.199477	5490.209268
15	[45]	77.999995	655.077177	5452.01470
15	[20]	78.00490	652.3474	5412.232
15	[22]	77.995390	652.810400	5411.6390
15	[31] ($h = 0.4$)	77.999984	652.411538	5412.23185
15	[33] ($h = 0.5$)	78.000222	655.341909	5452.481409
15	[38] ($h = 0.1833, k = 0.05$)	77.86967	654.09104	5440.78956
Analitik:		$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

k zaman adımı azaltıldığında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim miktarında azaldığı görüldü.

Çizelge 4.33 de $\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleri için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı ve $I_1 = 78, I_2 = 655.2$ ve $I_3 = 5450.4$ analitik değerleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

4.2.5 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı

Dördüncü problemde tüm hesaplamalar $[0, 40]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı ve μ nün farklı değerleri için solitary dalga oluşumu gözlemlendi. Program $t = 0$ ile $t_{final} = 12$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.2.1) de lineerleştirilmiş ve iç iterasyon uygulanmış yaklaşımdan bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.34 de $t = 0$ ve $t = 12$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki mutlak değişim, $\mu = 0.01$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 7.147695 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.409013 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 2.368771 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 2.316194 \times 10^{-8}$, $\Delta I_2 = 2.580664 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 5.072348 \times 10^{-4}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 7.849497 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.521246 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 2.034026 \times 10^{-3}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için

Çizelge 4.34 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nin farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772436	1.264285	1.024925	1.772454	1.264290	1.023681
	6	1.772455	1.263587	1.025449	1.772454	1.263545	1.023808
	9	1.772490	1.263451	1.025588	1.772454	1.263343	1.023828
	12	1.772525	1.263438	1.025695	1.772454	1.263267	1.023834
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772435	1.265756	1.024678	1.772454	1.265779	1.023383
	6	1.772456	1.265772	1.025117	1.772454	1.265746	1.023398
	9	1.772494	1.265834	1.025248	1.772454	1.265737	1.023399
	12	1.772532	1.265902	1.025361	1.772454	1.265733	1.023399

Çizelge 4.35 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nin farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772453	1.315664	1.023457	1.772454	1.315663	1.023342
	6	1.772453	1.315504	1.023534	1.772454	1.315504	1.023350
	9	1.772453	1.315495	1.023538	1.772454	1.315495	1.023350
	12	1.772453	1.315477	1.023539	1.772454	1.315477	1.023351
0.01	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772453	1.315966	1.023448	1.772454	1.315967	1.023332
	6	1.772453	1.315960	1.023521	1.772454	1.315960	1.023335
	9	1.772453	1.315959	1.023524	1.772454	1.315960	1.023335
	12	1.772453	1.315959	1.023525	1.772454	1.315959	1.023335

$\Delta I_1 = 2.362448 \times 10^{-8}$, $\Delta I_2 = 1.140446 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 7.202300 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 de korunum sabitlerinin hemen hemen sabit kaldığı görüldü.

Çizelge 4.35 de I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki mutlak değişim, $\mu = 0.05$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.387333 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 5.023107 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 2.122037 \times 10^{-4}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 1.578851 \times 10^{-9}$, $\Delta I_2 = 5.028353 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 2.395554 \times 10^{-5}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.439132 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 2.084692 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 1.984345 \times 10^{-4}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 1.599014 \times 10^{-9}$, $\Delta I_2 = 2.052906 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 7.986997 \times 10^{-6}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan h ve k nin bu değerleri için küçüldükçe I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.36 da $h = 0.05$, $k = 0.05$ olmak üzere $\mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] de verilen sonuçlarla oldukça iyi uyum içinde olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.36 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dakilerin karşılaştırılması.

μ	t	Liç			[45]			[34]		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.77245	1.31582	1.02333	1.77245	1.31598	1.02333
	3	1.772454	1.315663	1.023367	1.77245	1.31745	1.02823	1.77245	1.31648	1.02356
	6	1.772454	1.315504	1.023391	1.77245	1.31874	1.03149	1.77245	1.31619	1.02340
	9	1.772454	1.315495	1.023392	1.77245	1.31891	1.03170	1.77245	1.31617	1.02339
	12	1.772454	1.315477	1.023392	1.77245	1.31901	1.03180	1.77245	1.31612	1.02339
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.77245	1.26585	1.02333	1.77245	1.26585	1.02333
	3	1.772453	1.264292	1.023960	1.77245	1.27653	1.05877	1.77245	1.26632	1.02330
	6	1.772453	1.263549	1.024159	1.77245	1.28282	1.07337	1.77245	1.26599	1.02294
	9	1.772454	1.263349	1.024187	1.77245	1.28445	1.07573	1.77245	1.26639	1.02295
	12	1.772455	1.263275	1.024197	1.77245	1.28512	1.07645	1.77245	1.26567	1.02293

Çizelge 4.37 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003583	0.175478	0.016287	2.003583	0.175478	0.016287
100	2.503423	0.242114	0.023783	2.503423	0.242114	0.023783
200	3.003387	0.308769	0.031283	3.003387	0.308769	0.031282
300	3.503365	0.375422	0.038784	3.503366	0.375422	0.038782
400	4.003346	0.442076	0.046284	4.003346	0.442076	0.046282
500	4.503327	0.508729	0.053785	4.503327	0.508729	0.053781
600	5.003307	0.575382	0.061286	5.003308	0.575382	0.061281
700	5.503288	0.642035	0.068787	5.503289	0.642035	0.068781
800	6.003268	0.708688	0.076288	6.003268	0.708688	0.076281

4.2.6 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu

Beşinci problemde tüm hesaplamalar $[-20, 50]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde $U(-20, t) = U_0$ ve $U(50, t) = 0$ sınır şartları kullanılarak elde edildi. Tüm çalışmalarda $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$, $U_0 = 0.1$ olarak alındı. Program $t = 0$ 'dan $t_{final} = 800$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.2.1) de lineerleştirilmiş ve iç iterasyon uygulanmış yaklaşımdan bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.37 de $d = 5$, $h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleriyle bulunan korunum sabitleri verildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6651 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5001 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6655 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4999 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6651 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4993 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.38 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005082	0.175628	0.016302	2.005082	0.175628	0.016302
100	2.504937	0.242268	0.023799	2.504937	0.242268	0.023799
200	3.004893	0.308917	0.031298	3.004893	0.308917	0.031298
300	3.504854	0.375558	0.038798	3.504854	0.375558	0.038798
400	4.004814	0.442198	0.046297	4.004814	0.442198	0.046297
500	4.504775	0.508837	0.053797	4.504775	0.508837	0.053797
600	5.004736	0.575477	0.061296	5.004736	0.575477	0.061296
700	5.504697	0.642116	0.068796	5.504697	0.642116	0.068796
800	6.004656	0.708755	0.076296	6.004656	0.708755	0.076296

Çizelge 4.39 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

t	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.003583	0.175478	0.016287	-20.00	0.09997
200	3.003387	0.308769	0.031282	8.77	0.16047
300	3.503366	0.375422	0.038782	14.51	0.17494
400	4.003346	0.442076	0.046282	20.39	0.17909
500	4.503327	0.508729	0.053781	26.41	0.18124
600	5.003308	0.575382	0.061281	32.50	0.18257
700	5.503289	0.642035	0.068781	38.59	0.18334
800	6.003268	0.708688	0.076281	44.75	0.18377
800	[3] 6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800	[45] 6.003580	0.709577	0.076505	44.75	0.184379
800	[16] 6.027221	0.713333	0.077000	44.70	0.183760
800	[19] 6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.183970
800	[23] 6.003578	0.708498	0.076192	44.75	0.183822
800	[24] 5.446117	0.606864	0.062520	44.89	0.191063
800	[25] 6.00259	0.70885	0.07628	44.75	0.184050
800	[26] 5.996421	0.707090	0.076213	44.75	0.183684
800	[32] 6.002578	0.708710	0.076277	44.75	0.18405

Çizelge 4.38 de $d = 5, h = 0.1$ değerleriyle k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}, M_3 = 7.4993 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}, M_3 = 7.4991 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi.

Bu sonuçlara göre zaman adımı k küçüldüğünde M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarında önemli ölçüde değişim olmadığı, konum adımı h küçüldükçe M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarının $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}, M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ teorik değerleri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.39 da $h = 0.07, d = 5$ değerleri için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre Çizelge

Çizelge 4.40 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 5$, $h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
Liç	4.999606	6.665125	7.49925
[3]	5.000650	6.666390	7.50050
[45]	4.995664	6.676238	7.53588
[16]	5.030800	6.724400	7.59020
[19]	5.000600	6.666400	7.50050
[23]	5.000000	6.662800	7.48810
[24]	4.332000	5.396100	5.78280
[26]	4.999800	6.653900	7.49930
[32]	4.999990	6.666650	7.50000
Analitık :	5	6.66667	7.5

Çizelge 4.41 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003500	0.190628	0.018535	2.003500	0.190628	0.018535
100	2.503481	0.257287	0.026035	2.503481	0.257287	0.026035
200	3.003461	0.323940	0.033536	3.003462	0.323940	0.033534
300	3.503442	0.390593	0.041037	3.503442	0.390593	0.041034
400	4.003423	0.457246	0.048538	4.003423	0.457246	0.048534
500	4.503404	0.523899	0.056039	4.503404	0.523899	0.056034
600	5.003384	0.590553	0.063540	5.003385	0.590552	0.063534
700	5.503365	0.657206	0.071040	5.503366	0.657206	0.071033
800	6.003323	0.723859	0.078541	6.003323	0.723859	0.078533

4.40 da M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.41 de $d = 2$, $h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4991 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6654 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4998 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.42 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005000	0.190778	0.018550	2.005000	0.190778	0.018550
100	2.504961	0.257429	0.026049	2.504961	0.257429	0.026049
200	3.004922	0.324069	0.033549	3.004922	0.324069	0.033549
300	3.504882	0.390708	0.041049	3.504882	0.390708	0.041049
400	4.004843	0.457347	0.048548	4.004843	0.457347	0.048548
500	4.504804	0.523986	0.056048	4.504804	0.523986	0.056048
600	5.004765	0.590625	0.063547	5.004765	0.590625	0.063547
700	5.504725	0.657265	0.071047	5.504725	0.657265	0.071047
800	6.004664	0.723904	0.078547	6.004664	0.723904	0.078546

Çizelge 4.43 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 2$, $h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
Liç	4.99978	6.665388	7.49975
[3]	5.00090	6.662200	7.48630
[45]	4.99997	6.677588	7.54100
[16]	4.92730	6.526900	7.29380
[23]	5.00000	6.662200	7.48630
[24]	4.58670	5.883400	6.52150
[26]	5.00000	6.652500	7.50000
[32]	4.99997	6.666650	7.50000
Analitik:	5	6.66667	7.5

Çizelge 4.44 : Linerleştirilmiş iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $k = 0.05$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.003500	0.190628	0.018535	-20.00	0.10000
200	3.003462	0.323940	0.033534	9.40	0.17591
300	3.503442	0.390593	0.041034	15.35	0.17991
400	4.003423	0.457246	0.048534	21.37	0.18197
500	4.503404	0.523899	0.056034	27.46	0.18303
600	5.003385	0.590552	0.063534	33.55	0.18370
700	5.503366	0.657206	0.071033	39.71	0.18422
800	6.003323	0.723859	0.078533	45.87	0.18451
800 [3]	6.003194	0.723867	0.078534	45.85	0.18460
800 [45]	6.003472	0.724835	0.078793	45.87	0.185059
800 [16]	5.994366	0.712677	0.076876	45.70	0.183918
800 [23]	6.003478	0.723605	0.078426	45.87	0.184518
800 [24]	5.669824	0.660997	0.070677	46.73	0.197568
800 [25]	6.00248	0.72402	0.07853	45.85	0.184713
800 [26]	5.996473	0.722126	0.078465	45.87	0.184431
800 [32]	6.002474	0.723860	0.078525	45.85	0.18471

Çizelge 4.42 de $d = 2$, $h = 0.1$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4996 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4995 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Bu sonuçlara göre korunum sabitlerinin lineer artış oranlarında zaman adımı k küçüldükçe önemli ölçüde değişimin olmadığı, konum adımı h küçüldükçe analitik değeri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.43 de $d = 2$, $h = 0.07$ değerleri için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde bazı diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu aşikar bir şekilde görülmektedir.

Çizelge 4.44 de $h = 0.07$, $d = 2$ değerleri için (4.2.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve

M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde bazı diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

4.3 Lumped İç İterasyonlu Lineerleştirme

Bu bölümde

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0$$

denkleminde

$$Z_m = U$$

şeklinde verilen bir lineerleştirme uygulandı. Denkleminde zaman yönündeki türevler yerine ileri fark, konum yönündeki türev yerine Crank-Nicolson tipi yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(Z_m U_x)^{n+1} + (Z_m U_x)^n}{2} - \mu \frac{(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n}{\Delta t} = 0$$

elde edilir. Bulunan denklemde eşitliğin her iki tarafında Δt ile çarpılır

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t [(Z_m U_x)^{n+1} + (Z_m U_x)^n]}{2} - \mu [(U_{xx})^{n+1} - (U_{xx})^n] = 0$$

ve düzenlenirse

$$U^{n+1} - U^n + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m^{n+1} \right) + U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m^n \right) - \mu U_{xx}^{n+1} - \mu U_{xx}^n = 0$$

elde edilir. Fakat Z_m ifadesinin sabit olduğu kabul edildiğinden

$$Z_m^{n+1} = Z_m^n = Z_m$$

olur. Buna göre denklem yeniden düzenlenirse

$$U^{n+1} - U^n + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) + U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^{n+1} - \mu U_{xx}^n = 0$$

şeklinde olur. $(n+1)$. zaman adımı sol tarafa (n) . zaman adımı sağ tarafa toplanırsa

$$U^{n+1} + U_x^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - U_x^n \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu U_{xx}^n$$

elde edilir. Şimdi Rubin-Graves tipi yaklaşımda olduğu gibi U , U_x ve U_{xx} ifadeleri yerine $j = 0(1)N$ değerleri için düğüm noktalarında trigonometrik kübik B-spline yaklaşımları kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{j-1}^{n+1} [\alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1] + \delta_j^{n+1} [\alpha_2 - \mu \gamma_2] + \delta_{j+1}^{n+1} [\alpha_1 + \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1] \\ & = \delta_{j-1}^n [\alpha_1 - \beta_1 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1] + \delta_j^n [\alpha_2 - \mu \gamma_2] + \delta_{j+1}^n [\alpha_1 - \beta_2 \left(\frac{\Delta t}{2} Z_m \right) - \mu \gamma_1] \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

iteratif denklemi elde edilir. İteratif denklem çözümlenirken elde edilen değerlerin 3 nokta ortalaması alınarak

$$Z_m = \frac{U_{j-1} + U_j + U_{j+1}}{3}$$

şeklinde lumped değerleri elde edildi.

4.3.1 Kararlılık Analizi

EW denkleminde UU_x non-lineer teriminde U yerine Z_m gibi yerel bir sabiti alınır ve üç nokta ortalaması hesaplanarak yaklaşım elde edilirse (4.3.1) sonlu eleman fark şeması bulunur. Bir önceki kısımdaki kararlılık analizi kullanılarak bu şemanın da şartsız kararlı olduğu görülür.

4.3.2 Problem 1: Tek Solitary Dalganın Hareketi

Birinci problemde tüm hesaplamalar $[0, 30]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $x_0 = 10$ ve $\mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 80$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi h , k ve c nin farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerinde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak hata normları çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.45 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829485 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771378 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.421426 \times 10^{-12}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 5.829483 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771288 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.418726 \times 10^{-12}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771263 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.417999 \times 10^{-12}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.194411×10^{-6} , 2.194481×10^{-6} ve 2.195×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.911159×10^{-6} , 2.911159×10^{-6} ve 2.911159×10^{-6} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.46 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918678 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.821160 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.847253 \times 10^{-11}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 2.918672 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820408 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.779825 \times 10^{-11}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820168 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.758321 \times 10^{-11}$

Çizelge 4.45 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 5.829485 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 8.771378 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.421426 \times 10^{-12}$								
0.05	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 5.829483 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 8.771288 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.418726 \times 10^{-12}$								
0.01	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002195	0.002911	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 5.829482 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 8.771263 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.417999 \times 10^{-12}$								
Analitik:		$I_1 = 0.12, I_2 = 0.00288, I_3 = 0.0000576$						

Çizelge 4.46 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918717	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981406	0.0259200789	0.0015552000	0.005496	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027844	0.0259200786	0.0015552000	0.007065	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008298	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106582	0.0259200781	0.0015552000	0.009981	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120543	0.0259200780	0.0015552000	0.010545	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130867	0.0259200780	0.0015552000	0.010981	0.014422	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 2.918678 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.821160 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.847253 \times 10^{-11}$								
0.05	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918717	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027844	0.0259200786	0.0015552000	0.007067	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008301	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009988	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010553	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130867	0.0259200779	0.0015552000	0.010992	0.014422	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 2.918672 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.820408 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.779825 \times 10^{-11}$								
0.01	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918716	0.0259200793	0.0015552000	0.003673	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027843	0.0259200786	0.0015552000	0.007068	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008302	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009990	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010556	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130866	0.0259200779	0.0015552000	0.010995	0.014422	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 2.918670 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.820168 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.758321 \times 10^{-11}$								
Analitik:		$I_1 = 0.36, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.0015552$						

Çizelge 4.47 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $h = 0.03$ ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

k	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.1	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134940	0.2880008737	0.0576000019	0.024966	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387852	0.2880008683	0.0576000021	0.034363	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480376	0.2880008664	0.0576000021	0.038216	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512968	0.2880008657	0.0576000021	0.039999	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513074	0.2880008655	0.0576000022	0.042474	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480596	0.2880008655	0.0576000021	0.043825	0.052821	17.010	0.29999
	80	1.2000388208	0.2880008656	0.0576000021	0.045474	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248760 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.683957 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 2.122456 \times 10^{-9}$							
0.05	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134920	0.2880008727	0.0576000016	0.025018	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387831	0.2880008674	0.0576000018	0.034519	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480354	0.2880008655	0.0576000019	0.038526	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512946	0.2880008648	0.0576000019	0.040468	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513051	0.2880008646	0.0576000019	0.042928	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480572	0.2880008646	0.0576000019	0.043977	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388180	0.2880008647	0.0576000018	0.045116	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248486 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.674908 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.838780 \times 10^{-9}$							
0.01	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134913	0.2880008724	0.0576000015	0.025047	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387824	0.2880008671	0.0576000017	0.034607	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480347	0.2880008652	0.0576000018	0.038700	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512939	0.2880008645	0.0576000018	0.040737	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513044	0.2880008643	0.0576000018	0.043304	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480564	0.2880008643	0.0576000018	0.044323	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388171	0.2880008644	0.0576000017	0.045367	0.052852	18.000	0.30000
	$\Delta I_1 = 9.248397 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.672026 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.748171 \times 10^{-9}$							
Analitik:			$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$					

olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla $1.0981 \times 10^{-5}, 1.0992 \times 10^{-5}$ ve 1.0995×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla $1.4422 \times 10^{-5}, 1.4422 \times 10^{-5}$ ve 1.4422×10^{-5} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.47 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $h = 0.03$ olmak şartıyla $k = 0.1$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248760 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.683957 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 2.122456 \times 10^{-9}$; $k = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 9.248486 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.674908 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.838780 \times 10^{-9}$; $k = 0.01$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248397 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.672026 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.748171 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $k = 0.1, 0.05$ ve 0.01 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla $4.5474 \times 10^{-5}, 4.5116 \times 10^{-5}$ ve 4.5367×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla $5.2852 \times 10^{-5}, 5.2852 \times 10^{-5}$ ve 5.2852×10^{-5} olarak bulundu. Elde edilen verilerden zaman adımı azaldığında korunum sabitlerinde önemli bir değişimin olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.48 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 3.736390 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 5.129613 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 7.650106 \times 10^{-12}$; $h = 0.05$

Çizelge 4.48 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.03, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.1199953284	0.0028800096	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.900	0.02993
	10	0.1199946260	0.0028800105	0.0000576000	0.006674	0.004929	10.200	0.02992
	20	0.1199954680	0.0028800107	0.0000576000	0.012426	0.006222	10.200	0.03000
	30	0.1199962289	0.0028800111	0.0000576000	0.018361	0.009341	10.200	0.02992
	40	0.1199969165	0.0028800116	0.0000576000	0.024303	0.012281	10.500	0.02992
	60	0.1199980991	0.0028800130	0.0000576000	0.036027	0.018259	10.500	0.02992
	70	0.1199986064	0.0028800138	0.0000576000	0.041764	0.021332	10.800	0.02992
	80	0.1199990648	0.0028800147	0.0000576000	0.047397	0.024029	10.800	0.02999
$\Delta I_1 = 3.736390 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 5.129613 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 7.650106 \times 10^{-12}$								
0.05	0	0.1199946871	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	10.000	0.03000
	10	0.1199954484	0.0028800053	0.0000576000	0.001172	0.004929	10.100	0.03000
	20	0.1199963837	0.0028800053	0.0000576000	0.001259	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972301	0.0028800053	0.0000576000	0.001429	0.004036	10.300	0.03000
	40	0.1199979958	0.0028800052	0.0000576000	0.001640	0.003652	10.400	0.03000
	60	0.1199993156	0.0028800052	0.0000576000	0.002095	0.002990	10.600	0.03000
	70	0.1199998828	0.0028800052	0.0000576000	0.002318	0.002705	10.700	0.03000
	80	0.1200003961	0.0028800052	0.0000576000	0.002532	0.002854	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 5.709006 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 5.212657 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.414431 \times 10^{-12}$								
0.03	0	0.1199946333	0.0028800000	0.0000576000	0.000000	0.000000	9.990	0.03000
	10	0.1199955055	0.0028800088	0.0000576000	0.000930	0.004929	10.110	0.03000
	20	0.1199964426	0.0028800088	0.0000576000	0.001044	0.004460	10.200	0.03000
	30	0.1199972905	0.0028800088	0.0000576000	0.001224	0.004036	10.290	0.03000
	40	0.1199980578	0.0028800088	0.0000576000	0.001428	0.003652	10.410	0.03000
	60	0.1199993802	0.0028800088	0.0000576000	0.001833	0.002990	10.590	0.03000
	70	0.1199999485	0.0028800088	0.0000576000	0.002020	0.002705	10.710	0.03000
	80	0.1200004628	0.0028800087	0.0000576000	0.002194	0.002911	10.800	0.03000
$\Delta I_1 = 5.829483 \times 10^{-6}, \Delta I_2 = 8.771288 \times 10^{-9}, \Delta I_3 = 1.418726 \times 10^{-12}$								
Analitik:		$I_1 = 0.12, I_2 = 0.00288, I_3 = 0.0000576$						

değeri için $\Delta I_1 = 5.709006 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 5.212657 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.414431 \times 10^{-12}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 5.829483 \times 10^{-6}$, $\Delta I_2 = 8.771288 \times 10^{-9}$ ve $\Delta I_3 = 1.418726 \times 10^{-12}$ olarak bulundu. Elde edilen verilerden konum adımı azaldığında I_1 ' de önemli bir değişim görülmezken I_2 ve I_3 ' deki değişimlerin azaldığı görülmektedir. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 4.7397×10^{-5} , 2.532×10^{-6} ve 2.194×10^{-6} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 2.4029×10^{-5} , 2.854×10^{-6} ve 2.911×10^{-6} olarak bulundu.

Çizelge 4.49 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.154987 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 1.790519 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 6.108378 \times 10^{-10}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 2.879992 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 4.628017 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.798244 \times 10^{-11}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 2.918672 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 7.820408 \times 10^{-8}$ ve $\Delta I_3 = 4.779825 \times 10^{-11}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 3.53079×10^{-4} , 1.4262×10^{-5} ve 1.0992×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 1.66416×10^{-4} , 1.4139×10^{-5} ve 1.4422×10^{-5} olarak bulundu.

Çizelge 4.49 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.09, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	0.3599859851	0.0259200865	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.900	0.08978
	10	0.3599886884	0.0259201001	0.0015552000	0.055108	0.028076	10.200	0.08977
	20	0.3599942990	0.0259201169	0.0015551999	0.108099	0.054838	10.500	0.08976
	30	0.3599984385	0.0259201419	0.0015551998	0.158750	0.078625	10.800	0.08975
	40	0.3600014925	0.0259201712	0.0015551996	0.205954	0.103671	11.100	0.08973
	60	0.3600054070	0.0259202273	0.0015551994	0.287835	0.140619	11.700	0.08970
	70	0.3600066322	0.0259202490	0.0015551994	0.322365	0.151769	12.000	0.08970
	80	0.3600075350	0.0259202655	0.0015551994	0.353079	0.166416	12.300	0.08970
$\Delta I_1 = 2.154987 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 1.790519 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 6.108378 \times 10^{-10}$								
0.05	0	0.3599840612	0.0259199998	0.0015552000	0.000000	0.000000	10.000	0.09000
	10	0.3599916902	0.0259200473	0.0015552000	0.004286	0.012107	10.300	0.09000
	20	0.3599979469	0.0259200469	0.0015552000	0.006283	0.008969	10.600	0.09000
	30	0.3600025814	0.0259200466	0.0015552000	0.008209	0.009227	10.900	0.09000
	40	0.3600060140	0.0259200464	0.0015552000	0.009866	0.010866	11.200	0.09000
	60	0.3600104382	0.0259200462	0.0015552000	0.012436	0.012979	11.800	0.09000
	70	0.3600118311	0.0259200461	0.0015552000	0.013424	0.013645	12.100	0.09000
	80	0.3600128611	0.0259200461	0.0015552000	0.014262	0.014139	12.400	0.09000
$\Delta I_1 = 2.879992 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 4.628017 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.798244 \times 10^{-11}$								
0.03	0	0.3599838999	0.0259199997	0.0015552000	0.000000	0.000000	9.990	0.09000
	10	0.3599918717	0.0259200793	0.0015552000	0.003672	0.012107	10.290	0.09000
	20	0.3599981405	0.0259200789	0.0015552000	0.005498	0.008969	10.590	0.09000
	30	0.3600027844	0.0259200786	0.0015552000	0.007067	0.009412	10.890	0.09000
	40	0.3600062242	0.0259200784	0.0015552000	0.008301	0.011083	11.190	0.09000
	60	0.3600106581	0.0259200781	0.0015552000	0.009988	0.013239	11.790	0.09000
	70	0.3600120542	0.0259200780	0.0015552000	0.010553	0.013918	12.090	0.09000
	80	0.3600130867	0.0259200779	0.0015552000	0.010992	0.014422	12.390	0.09000
$\Delta I_1 = 2.918672 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 7.820408 \times 10^{-8}, \Delta I_3 = 4.779825 \times 10^{-11}$								
Analitik:		$I_1 = 0.36, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.0015552$						

Çizelge 4.50 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

h	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	x	U
0.3	0	1.1999532838	0.2880009609	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.900	0.29925
	10	1.1999985967	0.2880017110	0.0575999976	0.583050	0.293375	11.100	0.29911
	20	1.2000209409	0.2880027201	0.0575999855	1.037231	0.504437	12.000	0.29978
	30	1.2000290160	0.2880032125	0.0575999887	1.351603	0.610887	12.900	0.29906
	40	1.2000318374	0.2880035651	0.0575999926	1.602193	0.624476	14.100	0.29938
	60	1.2000318974	0.2880051053	0.0575999861	2.068737	0.876658	15.900	0.29942
	70	1.2000291614	0.2880059599	0.0575999820	2.256198	0.941201	17.100	0.29957
	80	1.2000212491	0.2880066248	0.0575999792	2.397781	0.946697	18.000	0.30030
$\Delta I_1 = 6.796531 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 5.663883 \times 10^{-6}, \Delta I_3 = 2.084900 \times 10^{-8}$								
0.05	0	1.1999468707	0.2879999979	0.0576000000	0.000000	0.000000	10.000	0.30000
	10	1.2000128077	0.2880005182	0.0576000018	0.029237	0.032763	11.000	0.30000
	20	1.2000380437	0.2880005137	0.0576000020	0.043512	0.044817	12.000	0.29999
	30	1.2000472738	0.2880005121	0.0576000020	0.051678	0.049252	13.000	0.30000
	40	1.2000505245	0.2880005116	0.0576000020	0.057424	0.050884	14.000	0.30000
	60	1.2000505356	0.2880005125	0.0576000020	0.067942	0.051706	16.000	0.30001
	70	1.2000472971	0.2880005131	0.0576000020	0.072477	0.051788	17.000	0.30001
	80	1.2000380828	0.2880005136	0.0576000020	0.076256	0.051818	18.000	0.30001
$\Delta I_1 = 9.121217 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 5.157522 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.999252 \times 10^{-9}$								
0.03	0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000	9.990	0.29999
	10	1.2000134920	0.2880008727	0.0576000016	0.025018	0.033418	11.010	0.29999
	20	1.2000387831	0.2880008674	0.0576000018	0.034519	0.045713	12.000	0.30000
	30	1.2000480354	0.2880008655	0.0576000019	0.038526	0.050236	12.990	0.29999
	40	1.2000512946	0.2880008648	0.0576000019	0.040468	0.051900	14.010	0.29999
	60	1.2000513051	0.2880008646	0.0576000019	0.042928	0.052738	15.990	0.29999
	70	1.2000480572	0.2880008646	0.0576000019	0.043977	0.052821	17.010	0.30000
	80	1.2000388180	0.2880008647	0.0576000018	0.045116	0.052852	18.000	0.30000
$\Delta I_1 = 9.248486 \times 10^{-5}, \Delta I_2 = 8.674908 \times 10^{-7}, \Delta I_3 = 1.838780 \times 10^{-9}$								
Analitik:		$I_1 = 1.2, I_2 = 0.288, I_3 = 0.0576$						

Çizelge 4.51 : Lumped iç iterasyon ile Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri, hata normları, dalganın konumu ve yüksekliği ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	1.1999463332	0.2879999972	0.0576000000	0.000000	0.000000
10	1.2000134920	0.2880008727	0.0576000016	0.025018	0.033418
20	1.2000387831	0.2880008674	0.0576000018	0.034519	0.045713
30	1.2000480354	0.2880008655	0.0576000019	0.038526	0.050236
40	1.2000512946	0.2880008648	0.0576000019	0.040468	0.051900
50	1.2000520961	0.2880008646	0.0576000019	0.041783	0.052513
60	1.2000513051	0.2880008646	0.0576000019	0.042928	0.052738
70	1.2000480572	0.2880008646	0.0576000019	0.043977	0.052821
80	1.2000388180	0.2880008647	0.0576000018	0.045116	0.052852
80	[3] 1.199998	0.28798	0.05759	0.056	0.053
80	[45] 1.20000	0.28797	0.0576	0.50338	0.26836
80	[16] 1.19100	0.28550	0.5582	3.849	2.646
80	[17] 1.1964	0.2858	0.05582	7.444	4.373
80	[23] 1.199995	0.28798	0.05759	0.029	0.021
80	[24] 1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
80	[25] 1.19999	0.28801	0.0576	0.003	0.002
80	[26] 1.20004	0.28799	0.0576	0.125	0.073
80	[30] 1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
80	[34] 1.20004	0.2880	0.0576	0.03882	0.05151
80	[37] 1.20004	0.2880	0.0576	0.03962	0.05446
Anolitik:	$I_1 = 1.2$	$I_2 = 0.288$	$I_3 = 0.0576$		

Çizelge 4.50 incelendiğinde $t = 0$ ve $t = 80$ zamanlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde $\Delta I_1, \Delta I_2$ ve ΔI_3 değişim değerleri $k = 0.05$ olmak şartıyla $h = 0.3$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 6.796531 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.663883 \times 10^{-6}$ ve $\Delta I_3 = 2.084900 \times 10^{-8}$; $h = 0.05$ değeri için $\Delta I_1 = 9.121217 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.157522 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.999252 \times 10^{-9}$; $h = 0.03$ değeri için sırasıyla $\Delta I_1 = 9.248486 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.674908 \times 10^{-7}$ ve $\Delta I_3 = 1.838780 \times 10^{-9}$ olarak bulundu. $t_{final} = 80$ zamanında $h = 0.3, 0.05$ ve 0.03 değerlerine karşılık L_2 hata normları sırasıyla 2.397781×10^{-3} , 7.6256×10^{-5} ve 4.5116×10^{-5} ; L_∞ hata normları ise sırasıyla 9.46697×10^{-4} , 5.1818×10^{-5} ve 5.2852×10^{-5} olarak bulundu. Çizelge 4.45-4.47'de h 'nin sabit k 'nin azalan değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarında az miktarda artış olduğu veya sabit kaldığı görülmüştür. Çizelge 4.48-4.50'da k 'nin değeri sabitken h azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında küçüldüğü görülmektedir.

Çizelge 4.51 de $k = 0.05, h = 0.03, \mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30,$ ve $0 \leq t \leq 80$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak bulunan hata normlarının ve korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemler kullanılarak hesaplanan nümerik sonuçların karşılaştırılması verildi. Mevcut yöntem kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince sabit kaldığı ve $I_1 = 1.2, I_2 = 0.288$ ve $I_3 = 0.0576$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Ayrıca çizelgede

Çizelge 4.52 : Lumped iç iterasyon ile Problem 2' nin k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1$, $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.75$, $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $0 \leq x \leq 80$, $0 \leq t \leq 30$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	26.999859	81.002507	218.702832	26.999859	81.002507	218.702832
	5	27.002635	81.023911	218.779488	27.000037	81.006760	218.701845
	10	27.002696	80.955087	218.781780	27.000039	80.936908	218.712520
	15	27.002811	80.724765	218.771660	27.000040	80.706329	218.786479
	20	27.002742	80.944207	218.783771	27.000042	80.928212	218.714618
	25	27.002760	81.026812	218.782179	27.000044	81.009263	218.701300
	30	27.002803	81.033334	218.783058	27.000045	81.015384	218.700811
0.1	0	26.999827	81.000423	218.702832	26.999827	81.000423	218.702832
	5	27.000317	81.001201	218.706673	27.000168	81.000267	218.702863
	10	27.000375	80.998430	218.697847	27.000169	80.997187	218.702780
	15	27.000484	80.989771	218.615338	27.000169	80.988066	218.702042
	20	27.000416	80.998190	218.696786	27.000169	80.996841	218.702768
	25	27.000430	81.001671	218.709279	27.000169	81.000135	218.702863
	30	27.000469	81.002159	218.710645	27.000169	81.000396	218.702866
0.05	0	26.999822	81.000420	218.702832	26.999822	81.000420	218.702832
	5	27.000245	81.000786	218.704236	27.000176	81.000383	218.702838
	10	27.000303	81.000297	218.695376	27.000177	80.999611	218.702737
	15	27.000412	80.998489	218.612834	27.000177	80.997332	218.701895
	20	27.000345	81.000395	218.694299	27.000177	80.999525	218.702722
	25	27.000358	81.001362	218.706821	27.000177	81.000348	218.702837
	30	27.000398	81.001649	218.708188	27.000177	81.000414	218.702841
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$	$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

(4.3.1) yaklaşımı kullanılarak elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [25] hariç tüm diğer referanslarda verilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

4.3.3 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problemde tüm hesaplamalar $[0, 80]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.75$, $\mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 30$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.52 de korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 2.943931 \times 10^{-3}$, $\Delta I_2 = 3.082701 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 8.022524 \times 10^{-2}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 6.428481 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.736103 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 7.812786 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.753858 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.228997 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 5.355301 \times 10^{-3}$ olarak elde edilirken; $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 1.859606 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.287670 \times 10^{-2}$, $\Delta I_3 = 2.021046 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 3.420663 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 2.732312 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 3.327896 \times 10^{-5}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 3.545652 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 6.121171 \times 10^{-6}$, $\Delta I_3 = 8.499919 \times 10^{-6}$ olarak

Çizelge 4.53 : Lumped iç iterasyon ile Problem 2' nin hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

t		I_1	I_2	I_3
1		27.000203	81.001201	218.706160
5		27.000317	81.001201	218.706673
10		27.000375	80.998430	218.697847
15		27.000484	80.989771	218.615338
20		27.000416	80.998190	218.696786
25		27.000430	81.001671	218.709279
30		27.000469	81.002159	218.710645
30	[45]	27.0000378	80.215356	218.583344
30	[20]	27.12702	80.98988	218.6996
30	[23]	27.00003	81.01719	218.70650
30	[25]	27.00068	81.02407	218.73673
30	[26]	27.00017	80.96848	218.70210
30	[31] ($h = 0.4$)	27.00000	80.999703	218.69966
30	[32]	27.00017	81.00044	218.70304
30	[33] ($h = 0.4$)	27.000582	81.001095	218.726082
30	[37]	27.00019	81.00045	218.70312
30	[38] ($h = 0.2, k = 0.05$)	26.93310	80.80028	218.16659
Analitik:		$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

elde edildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 de korunum sabitlerindeki değişim miktarının hemen hemen sabit kaldığı görüldü.

Çizelge 4.53 de $\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak elde edilen korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir. Ayrıca hesaplanan korunum sabitlerinin $I_1 = 27, I_2 = 81$ ve $I_3 = 218.7$ analitik değerleri ve bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle verilen değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

4.3.4 Problem 3: Üç Solitary Dalga'nın Etkileşimi

Üçüncü problemde hesaplamalar $[0, 100]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı. Tüm çalışmalarda $c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, \mu = 1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 15$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.54 : Lumped iç iterasyon ile Problem 3' ün k ve h nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 15$).

h	t	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.5	0	77.999979	655.294189	5451.148182	77.999979	655.294189	5451.148182
	3	78.117220	655.086042	5463.767775	78.000649	652.974211	5453.024347
	6	78.115383	657.032513	5479.556426	78.000647	654.978589	5451.402845
	9	78.158850	658.014761	5489.825906	78.000648	655.183589	5451.329288
	12	78.204417	658.938824	5500.036927	78.000649	655.355320	5451.276955
	15	78.250232	659.768392	5510.293120	78.000643	655.425058	5451.265185
0.1	0	77.999974	655.276959	5451.148182	77.999974	655.276959	5451.148182
	3	78.058063	656.049724	5445.183383	78.000054	655.178859	5450.972719
	6	78.055844	656.158376	5462.252362	78.000053	655.259451	5451.151733
	9	78.096064	656.843395	5471.919212	78.000053	655.268090	5451.155909
	12	78.138456	657.548566	5481.426947	78.000054	655.274916	5451.156555
	15	78.181062	658.253405	5490.932567	78.000039	655.277858	5451.156749
0.05	0	77.999973	655.276933	5451.148182	77.999973	655.276933	5451.148182
	3	78.056145	656.082669	5444.636407	78.000036	655.252392	5450.964072
	6	78.053917	656.134036	5461.693542	78.000034	655.272527	5451.145643
	9	78.094040	656.809367	5471.339448	78.000034	655.274695	5451.149950
	12	78.136337	657.507818	5480.824596	78.000035	655.276408	5451.150673
	15	78.178848	658.208723	5490.307380	78.000020	655.277152	5451.150885
Analitik:		$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$	$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

Çizelge 4.55 : Lumped iç iterasyon ile Problem 3' ün hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).

t	I_1	I_2	I_3	
0	77.999974	655.276959	5451.148182	
3	78.058063	656.049724	5445.183383	
6	78.055844	656.158376	5462.252362	
9	78.096064	656.843395	5471.919212	
12	78.138456	657.548566	5481.426947	
15	78.181062	658.253405	5490.932567	
15 [45]	77.999995	655.077177	5452.01470	
15 [20]	78.00490	652.3474	5412.232	
15 [22]	77.995390	652.810400	5411.6390	
15 [31] ($h = 0.4$)	77.999984	652.411538	5412.23185	
15 [33] ($h = 0.5$)	78.000222	655.341909	5452.481409	
15 [38] ($h = 0.1833, k = 0.05$)	77.86967	654.09104	5440.78956	
Analitik:		$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

Çizelge 4.54 de korunum sabitlerinde değişim, $k = 0.1$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 2.502525 \times 10^{-1}$, $\Delta I_2 = 4.474203 \times 10^0$, $\Delta I_3 = 5.914494 \times 10^1$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 1.810882 \times 10^{-1}$, $\Delta I_2 = 2.976446 \times 10^0$, $\Delta I_3 = 3.978438 \times 10^1$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 1.788744 \times 10^{-1}$, $\Delta I_2 = 2.931790 \times 10^0$, $\Delta I_3 = 3.915920 \times 10^1$ olarak elde edilirken. $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 6.639609 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.308694 \times 10^{-1}$, $\Delta I_3 = 1.170030 \times 10^{-1}$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 6.451453 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 8.997594 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 8.566210 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ için $\Delta I_1 = 4.607542 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.190450 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 2.702466 \times 10^{-3}$ olarak elde edildi. Bu sonuçlardan korunum adım azaldıkça I_1, I_2 ve I_3 'deki değişimin bir miktar azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.55 de $\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri

Çizelge 4.56 : Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.01$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772437	1.264287	1.024927	1.772454	1.264290	1.023681
	6	1.772456	1.263589	1.025451	1.772454	1.263545	1.023808
	9	1.772491	1.263452	1.025590	1.772454	1.263344	1.023828
	12	1.772527	1.263440	1.025698	1.772454	1.263267	1.023834
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772435	1.265756	1.024678	1.772454	1.265779	1.023383
	6	1.772456	1.265773	1.025117	1.772454	1.265746	1.023398
	9	1.772494	1.265834	1.025248	1.772454	1.265737	1.023399
	12	1.772532	1.265903	1.025361	1.772454	1.265733	1.023399

ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden hesaplanan korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı ve $I_1 = 78$, $I_2 = 655.2$ ve $I_3 = 5450.4$ analitik değerleriyle oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

4.3.5 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı

Dördüncü problemde tüm hesaplamalar $[0,40]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde yapıldı ve μ nün farklı değerleri için solitary dalga oluşumu gözlemlendi. Program $t = 0$ ' dan $t_{final} = 12$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla çözümlendi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denkleminde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanarak çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.56 da $t = 0$ ve $t = 12$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde mutlak değişim, $\mu = 0.01$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 7.280583 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 2.407087 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 2.371005 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 3.012054 \times 10^{-8}$, $\Delta I_2 = 2.580587 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 5.073242 \times 10^{-4}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 7.854821 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 5.528983 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 2.034116 \times 10^{-3}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 2.148970 \times 10^{-8}$, $\Delta I_2 = 1.140415 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 7.202658 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan h ve k küçüldükçe I_1 'deki değişimin arttığı, I_2 ve I_3 'deki değişimin nispeten azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.57 de I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde mutlak değişim, $\mu = 0.05$ olmak üzere $h = 0.05$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.477785 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 5.007405 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 2.139962 \times 10^{-4}$; $h = 0.05$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 4.193221 \times 10^{-8}$, $\Delta I_2 = 5.027725 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 2.402731 \times 10^{-5}$; $h = 0.01$ ve $k = 0.05$ için $\Delta I_1 = 5.003802 \times 10^{-7}$, $\Delta I_2 = 2.078394 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 =$

Çizelge 4.57 : Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $\mu = 0.05$ için k ve h nın farklı değerleri ile hesaplanan korunum sabitleri.

h	t	$k = 0.05$			$k = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772454	1.315665	1.023459	1.772454	1.315663	1.023342
	6	1.772454	1.315505	1.023536	1.772454	1.315504	1.023350
	9	1.772454	1.315496	1.023540	1.772454	1.315495	1.023351
	12	1.772454	1.315479	1.023541	1.772454	1.315477	1.023351
0.01	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772453	1.315967	1.023448	1.772454	1.315967	1.023332
	6	1.772453	1.315960	1.023521	1.772454	1.315960	1.023335
	9	1.772453	1.315960	1.023524	1.772454	1.315960	1.023335
	12	1.772453	1.315959	1.023525	1.772454	1.315959	1.023335

Çizelge 4.58 : Lumped iç iterasyon ile Problem 4' ün $k = 0.025$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile referans [45] ile [34] dekilerin karşılaştırılması.

μ	t	Lumped			[45]			[34]		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.05	0	1.772454	1.315980	1.023327	1.77245	1.31582	1.02333	1.77245	1.31598	1.02333
	3	1.772454	1.315664	1.023368	1.77245	1.31745	1.02823	1.77245	1.31648	1.02356
	6	1.772454	1.315504	1.023391	1.77245	1.31874	1.03149	1.77245	1.31619	1.02340
	9	1.772454	1.315495	1.023392	1.77245	1.31891	1.03170	1.77245	1.31617	1.02339
	12	1.772454	1.315478	1.023392	1.77245	1.31901	1.03180	1.77245	1.31612	1.02339
0.01	0	1.772454	1.265847	1.023327	1.77245	1.26585	1.02333	1.77245	1.26585	1.02333
	3	1.772453	1.264293	1.023960	1.77245	1.27653	1.05877	1.77245	1.26632	1.02330
	6	1.772453	1.263549	1.024160	1.77245	1.28282	1.07337	1.77245	1.26599	1.02294
	9	1.772454	1.263350	1.024188	1.77245	1.28445	1.07573	1.77245	1.26639	1.02295
	12	1.772455	1.263275	1.024197	1.77245	1.28512	1.07645	1.77245	1.26567	1.02293

1.985064×10^{-4} ; $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 1.447864 \times 10^{-10}$, $\Delta I_2 = 2.052654 \times 10^{-5}$, $\Delta I_3 = 7.989875 \times 10^{-6}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan k ve h nın bu değerleri küçüldükçe I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin simülasyon süresince hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.58 de $h = 0.05$, $k = 0.05$ olmak üzere $\mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin ile referans [45] ile [34] de verilen sonuçlarla oldukça iyi uyum içinde olduğu görülmektedir.

4.3.6 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu

Beşinci problemde tüm hesaplamalar $[-20, 50]$ sonlu aralığında $U(-20, t) = U_0$ ve $U(50, t) = 0$ sınır şartları kullanılarak elde edildi. Tüm çalışmalarda $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$, $U_0 = 0.1$ olarak alındı. Program $t = 0$ ile $t_{final} = 800$ arasında çalıştırılarak sonuçları alındı. Zaman adımlarının her birinde (4.3.1) lineerleştirilmiş lumped iç iterasyon yaklaşımından bulunan lineer cebirsel denklem sistemi k ve h nın farklı değerleriyle MATLAB (R2015a) programı vasıtasıyla verildi. Ulaşılan U_m^n yaklaşık çözümleri (3.2.1) denklemde yazılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplandı ve çizelgeler vasıtasıyla verildi.

Çizelge 4.59 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003583	0.175478	0.016287	2.003583	0.175478	0.016287
100	2.503423	0.242114	0.023783	2.503423	0.242114	0.023783
200	3.003387	0.308769	0.031283	3.003387	0.308769	0.031282
300	3.503365	0.375422	0.038784	3.503366	0.375422	0.038782
400	4.003346	0.442076	0.046284	4.003346	0.442076	0.046282
500	4.503327	0.508729	0.053785	4.503327	0.508729	0.053781
600	5.003307	0.575382	0.061286	5.003308	0.575382	0.061281
700	5.503288	0.642035	0.068787	5.503289	0.642035	0.068781
800	6.003268	0.708688	0.076288	6.003268	0.708688	0.076281

Çizelge 4.60 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005082	0.175628	0.016302	2.005082	0.175628	0.016302
100	2.504937	0.242268	0.023799	2.504937	0.242268	0.023799
200	3.004893	0.308917	0.031298	3.004893	0.308917	0.031298
300	3.504854	0.375558	0.038798	3.504854	0.375558	0.038798
400	4.004814	0.442198	0.046297	4.004814	0.442198	0.046297
500	4.504775	0.508837	0.053797	4.504775	0.508837	0.053797
600	5.004736	0.575477	0.061296	5.004736	0.575477	0.061296
700	5.504697	0.642116	0.068796	5.504697	0.642116	0.068796
800	6.004656	0.708755	0.076296	6.004656	0.708755	0.076295

Çizelge 4.59 da $d = 5$, $h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6651 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5001 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6651 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4993 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6651 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4993 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.60 de $d = 5$, $h = 0.1$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4993 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4991 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi.

Bu sonuçlara göre zaman adımı k küçüldüğünde M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarında önemli ölçüde değişim olmadığı, konum adımı h küçüldükçe M_1, M_2 ve M_3 artış oranlarının $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ teorik değerleri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.61 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

t	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.003583	0.175478	0.016287	-20.00	0.09997
200	3.003387	0.308769	0.031282	8.77	0.16047
300	3.503366	0.375422	0.038782	14.51	0.17494
400	4.003346	0.442076	0.046282	20.39	0.17909
500	4.503327	0.508729	0.053781	26.41	0.18124
600	5.003308	0.575382	0.061281	32.50	0.18257
700	5.503289	0.642035	0.068781	38.59	0.18334
800	6.003268	0.708688	0.076281	44.75	0.18377
800 [3]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800 [45]	6.003580	0.709577	0.076505	44.75	0.184379
800 [16]	6.027221	0.713333	0.077000	44.70	0.183760
800 [19]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.183970
800 [23]	6.003578	0.708498	0.076192	44.75	0.183822
800 [24]	5.446117	0.606864	0.062520	44.89	0.191063
800 [25]	6.00259	0.70885	0.07628	44.75	0.184050
800 [26]	5.996421	0.707090	0.076213	44.75	0.183684
800 [32]	6.002578	0.708710	0.076277	44.75	0.18405

Çizelge 4.62 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 5, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
Lumped	4.999606	6.665125	7.49925
[3]	5.000650	6.666390	7.50050
[45]	4.995664	6.676238	7.53588
[16]	5.030800	6.724400	7.59020
[19]	5.000600	6.666400	7.50050
[23]	5.000000	6.662800	7.48810
[24]	4.332000	5.396100	5.78280
[26]	4.999800	6.653900	7.49930
[32]	4.999990	6.666650	7.50000
Analitik :	5	6.66667	7.5

Çizelge 4.61 de $h = 0.07, d = 5$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre Çizelge 4.62 de M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.63 de $d = 2, h = 0.07$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Simülasyon süresince I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sabit kalmayıp $k = 0.5$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6654 \times 10^{-4}, M_3 = 7.5008 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.6654 \times 10^{-4}, M_3 = 7.4998 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Elde edilen bu nümerik değerlerin $M_1 = 5 \times 10^{-3}, M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}, M_3 = 7.5 \times 10^{-5}$ analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.64 de $d = 2, h = 0.1$ değerleri ile k nın farklı değerleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri verildi. Korunum sabitlerinin değişim oranları $k = 0.1$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3},$

Çizelge 4.63 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.5$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.003500	0.190628	0.018535	2.003500	0.190628	0.018535
100	2.503481	0.257287	0.026035	2.503481	0.257287	0.026035
200	3.003461	0.323940	0.033536	3.003462	0.323940	0.033534
300	3.503442	0.390593	0.041037	3.503442	0.390593	0.041034
400	4.003423	0.457246	0.048538	4.003423	0.457246	0.048534
500	4.503404	0.523899	0.056039	4.503404	0.523899	0.056034
600	5.003384	0.590553	0.063540	5.003385	0.590552	0.063534
700	5.503365	0.657206	0.071040	5.503366	0.657206	0.071033
800	6.003323	0.723859	0.078541	6.003323	0.723859	0.078533

Çizelge 4.64 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.1$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$, $-20 \leq x \leq 50$, $0 \leq t \leq 800$).

t	$k = 0.1$			$k = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	2.005000	0.190778	0.018550	2.005000	0.190778	0.018550
100	2.504961	0.257429	0.026049	2.504961	0.257429	0.026049
200	3.004922	0.324069	0.033549	3.004922	0.324069	0.033549
300	3.504882	0.390708	0.041049	3.504882	0.390708	0.041049
400	4.004843	0.457347	0.048548	4.004843	0.457347	0.048548
500	4.504804	0.523986	0.056048	4.504804	0.523986	0.056048
600	5.004765	0.590625	0.063547	5.004765	0.590625	0.063547
700	5.504725	0.657265	0.071047	5.504725	0.657265	0.071047
800	6.004664	0.723904	0.078547	6.004664	0.723904	0.078546

$M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4996 \times 10^{-5}$; $k = 0.05$ için $M_1 = 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.6641 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.4995 \times 10^{-5}$ olarak elde edildi. Bu sonuçlara göre korunum sabitlerinin lineer artış oranlarında zaman adımı k küçüldükçe önemli ölçüde değişimin olmadığı, konum adımı h küçüldükçe analitik değeri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.65 de $d = 2$, $h = 0.07$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve

Çizelge 4.65 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in $d = 2$, $h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

t	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
Lumped	4.99978	6.665388	7.49975
[3]	5.00090	6.662200	7.48630
[45]	4.99997	6.677588	7.54100
[16]	4.92730	6.526900	7.29380
[23]	5.00000	6.662200	7.48630
[24]	4.58670	5.883400	6.52150
[26]	5.00000	6.652500	7.50000
[32]	4.99997	6.666650	7.50000
Analitik:	5	6.66667	7.5

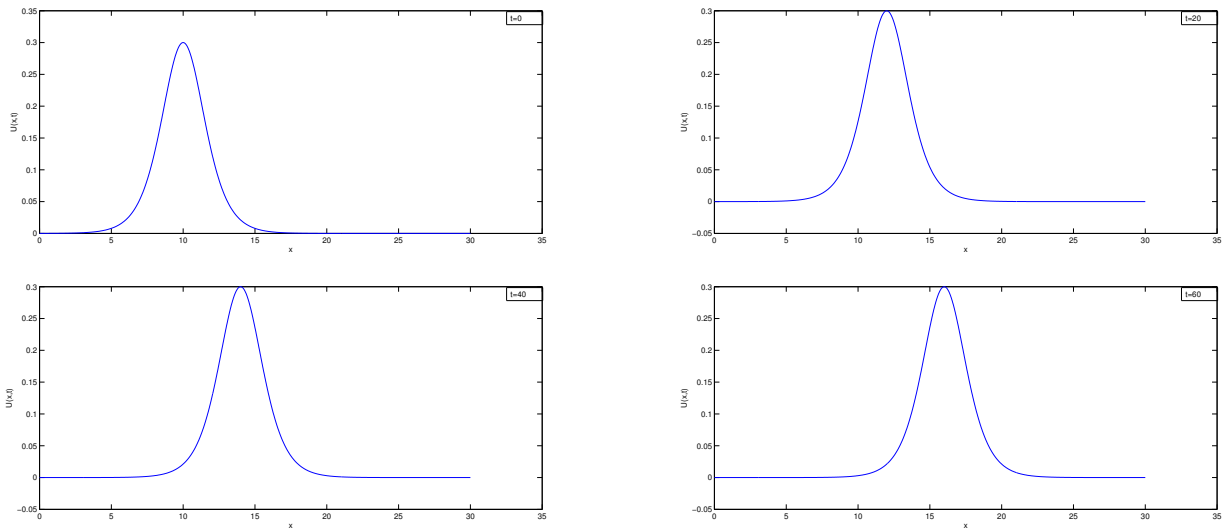
Çizelge 4.66 : Lumped iç iterasyon ile Problem 5' in hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

t		I_1	I_2	I_3	x	U
0		2.003500	0.190628	0.018535	-20.00	0.10000
200		3.003462	0.323940	0.033534	9.40	0.17591
300		3.503442	0.390593	0.041034	15.35	0.17991
400		4.003423	0.457246	0.048534	21.37	0.18197
500		4.503404	0.523899	0.056034	27.46	0.18303
600		5.003385	0.590552	0.063534	33.55	0.18370
700		5.503366	0.657206	0.071033	39.71	0.18422
800		6.003323	0.723859	0.078533	45.87	0.18451
800	[3]	6.003194	0.723867	0.078534	45.85	0.18460
800	[45]	6.003472	0.724835	0.078793	45.87	0.185059
800	[16]	5.994366	0.712677	0.076876	45.70	0.183918
800	[23]	6.003478	0.723605	0.078426	45.87	0.184518
800	[24]	5.669824	0.660997	0.070677	46.73	0.197568
800	[25]	6.00248	0.72402	0.07853	45.85	0.184713
800	[26]	5.996473	0.722126	0.078465	45.87	0.184431
800	[32]	6.002474	0.723860	0.078525	45.85	0.18471

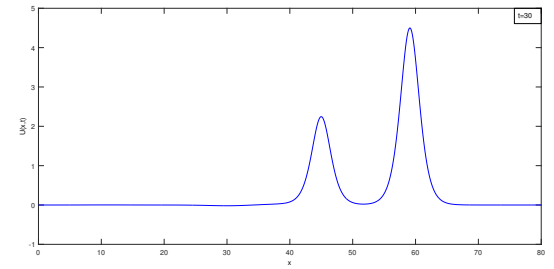
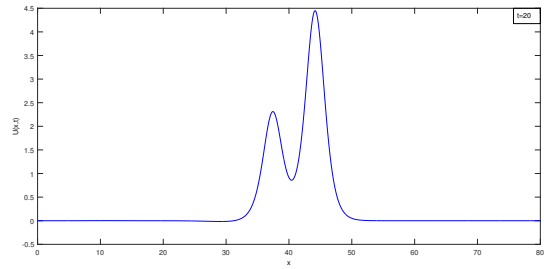
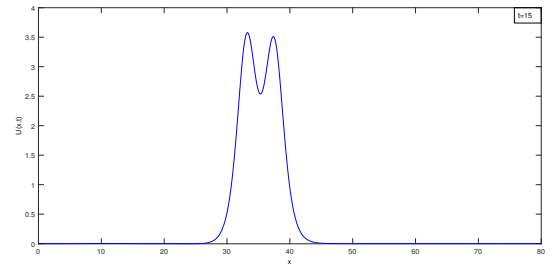
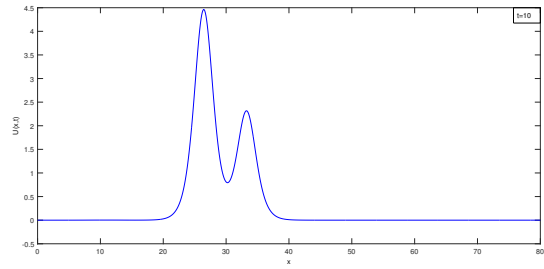
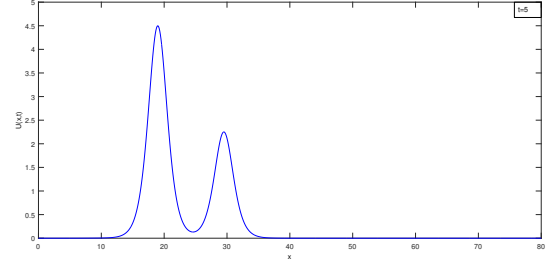
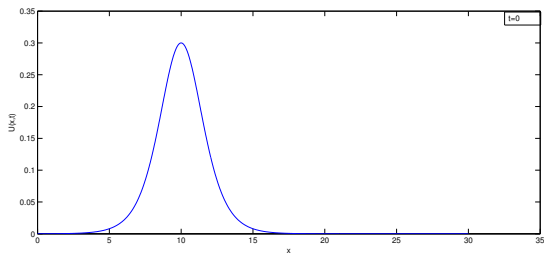
M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde bazı diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.66 da $d = 2, h = 0.07$ değerleri için (4.3.1) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre M_1, M_2 ve M_3 lineer artış oranlarının hem analitik değerleri ile hemde bazı diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

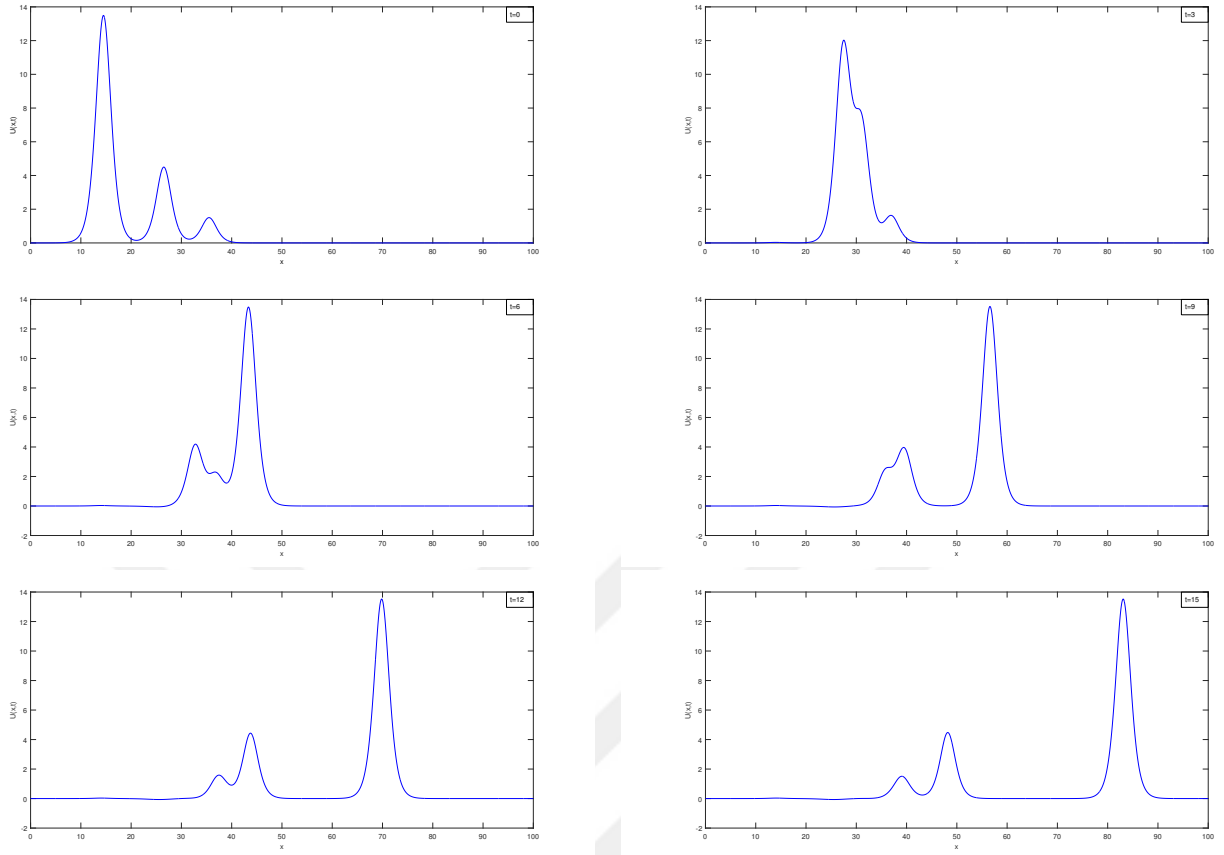
4.4 Sonlu Eleman Yaklaşımlarının Karşılaştırılması



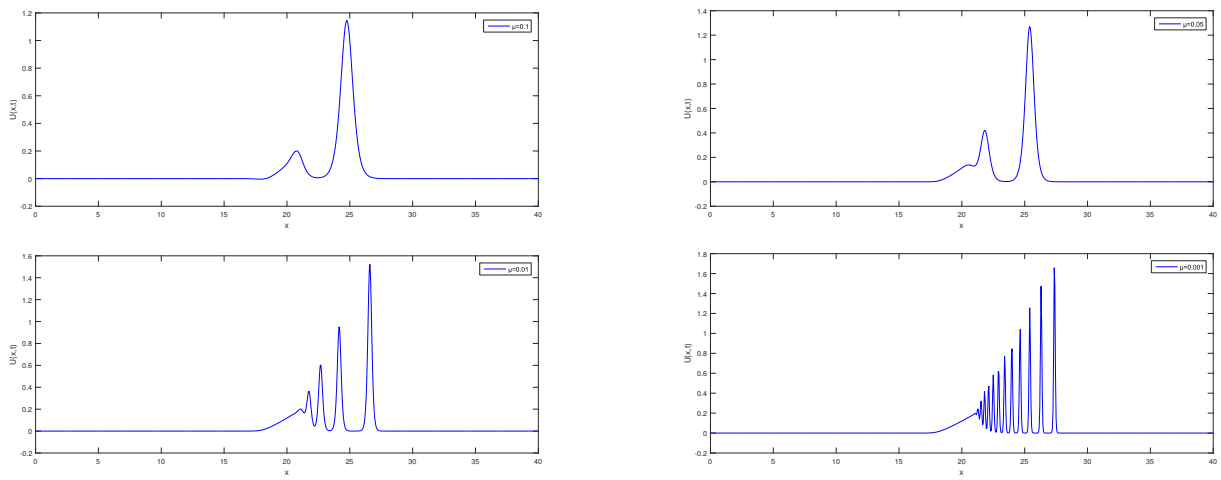
Şekil 4.1 : Tek solitary dalganın hareketi



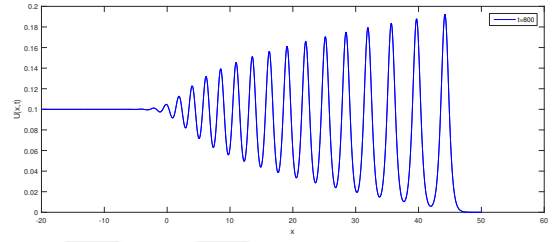
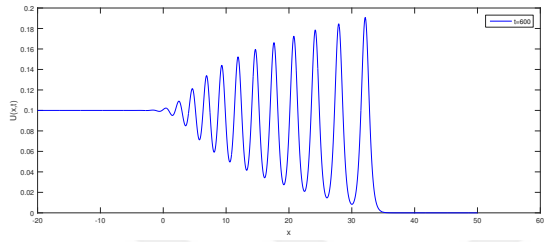
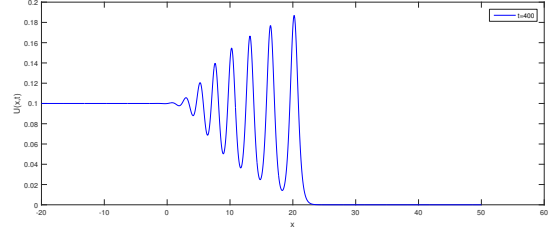
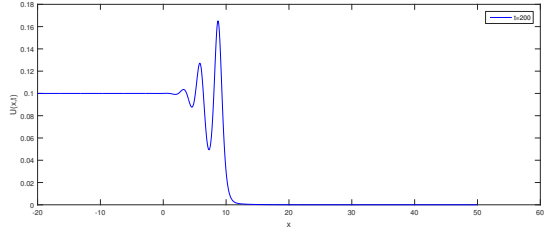
Şekil 4.2 : İki solitary dalganın girişimi



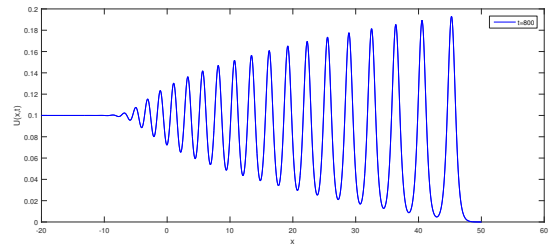
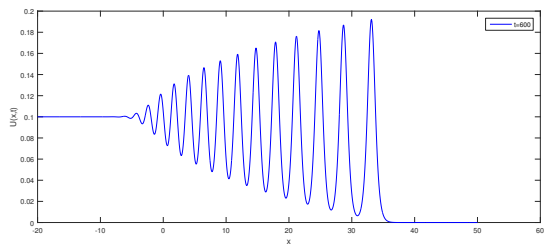
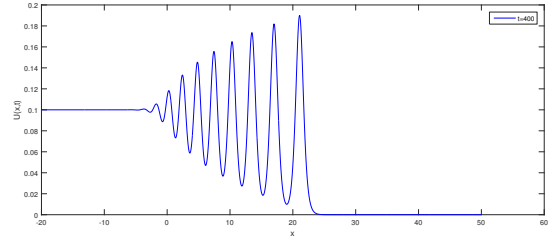
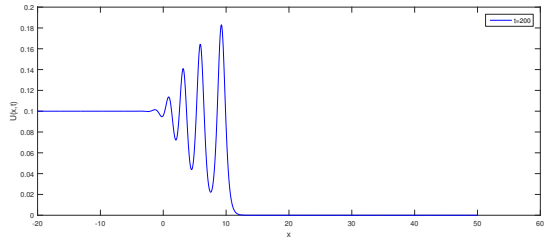
Şekil 4.3 : Üç solitary dalganın girişimi



Şekil 4.4 : $t = 12$ zamanında μ nün farklı değerleri için Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu



Şekil 4.5 : $d=5$ için ardışık dalg oluşumu



Şekil 4.6 : $d=2$ için ardışık dalg oluşumu

Çizelge 4.67 : Problem 1' in $k = 0.05$ ve $h = 0.03$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 80$).

	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
R-G	1.1999851019	0.2879999949	0.0575999982	0.024562	0.009604
Lin.	1.2000388174	0.2880008644	0.0576000017	0.045117	0.052852
Lumped	1.2000388180	0.2880008647	0.0576000018	0.045116	0.052852
[3]	1.199998	0.28798	0.05759	0.056	0.053
[45]	1.199985	0.288000	0.0576	0.17903	0.11022
[16]	1.19100	0.28550	0.5582	3.849	2.646
[17]	1.1964	0.2858	0.05582	7.444	4.373
[23]	1.199995	0.28798	0.05759	0.029	0.021
[24]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
[25]	1.19999	0.28801	0.0576	0.003	0.002
[26]	1.20004	0.28799	0.0576	0.125	0.073
[30]	1.23387	0.29915	0.06097	24.697	16.425
[34]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03882	0.05151
[37]	1.20004	0.2880	0.0576	0.03962	0.05446
Analitik:	$I_1 = 1.2$	$I_2 = 0.288$	$I_3 = 0.0576$		

4.4.1 Problem 1: Tek Solitary Dalga Hareketi

Çizelge 4.67 de tek solitary dalga hareketi için $t_{final} = 80$ zamanında $\mu = 1, 3c = 0.3, x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, k = 0.05$ ve $h = 0.03$ parametre değerleri için korunum sabitleri ve hata normlarının tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen sayısal sonuçlarını karşılaştırılması verildi. Üç farklı yöntemle bulunan sonuçların analitik değerler ve bazı karşılaştırma yapılan nümerik sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Hata normlarının değerine bakıldığında R-G ile elde edilen sonuçların referans [25] hariç bütün diğer araştırmacıların sonuçlarından çok iyi olduğu ve Lin-Lumped ile elde edilen sonuçların referans [23], [25], [34] ve [37] hariç diğer araştırmacıların sonuçlarından iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.1'de tek solitary dalganın grafiğinden başlangıçta $t_{ilk} = 0$ zamanında $x_0 = 10$ noktasında harekete başlayan dalganın genliğinde çok fazla bir değişikliğe uğramadan $t_{final} = 80$ zamanında $x = 18$ konumuna geldiği açıkça görülmektedir. Ayrıca tek solitary dalganın hareketi boyunca oluşan hataların grafiği aynı şekil içerisinde görülebilir.

4.4.2 Problem 2: İki Solitary Dalganın Etkileşimi

Çizelge 4.68 de Problem 2'nin $t_{final} = 30$ zamanında $\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametre değerleri için tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle yayınlanan sayısal sonuçların karşılaştırılması verildi. Elde edilen sonuçların hem analitik değerler ile hemde karşılaştırma yapılan sayısal sonuçlarla çok uyumlu olduğu görüldü. Şekil 4.2'de verilen iki solitary dalganın etkileşim grafiğine bakıldığında, sol

Çizelge 4.68 : Problem 2' nin $t_{final} = 30$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80, 0 \leq t \leq 30$).

	I_1	I_2	I_3
R-G	26.999994	81.000511	218.703446
Lin.	27.000362	81.001428	218.707454
Lumped	27.000469	81.002159	218.710645
[45]	27.0000378	80.215356	218.583344
[20]	27.12702	80.98988	218.6996
[23]	27.00003	81.01719	218.70650
[25]	27.00068	81.02407	218.73673
[26]	27.00017	80.96848	218.70210
[31] ($h = 0.4$)	27.00000	80.999703	218.69966
[32]	27.00017	81.00044	218.70304
[33] ($h = 0.4$)	27.000582	81.001095	218.726082
[37]	27.00019	81.00045	218.70312
[38] ($h = 0.2, k = 0.05$)	26.93310	80.80028	218.16659
Analitik:	$I_1 = 27$	$I_2 = 81$	$I_3 = 218.7$

Çizelge 4.69 : Problem 3' ün $t_{final} = 15$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, h = 0.1, k = 0.1, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$).

	I_1	I_2	I_3
R-G	77.999994	655.344625	5452.024410
Lin.	78.178472	658.199477	5490.209268
Lumped	78.181062	658.253405	5490.932567
[45]	77.999995	655.077177	5452.01470
[20]	78.00490	652.3474	5412.232
[22]	77.995390	652.810400	5411.6390
[31] ($h = 0.4$)	77.999984	652.411538	5412.23185
[33] ($h = 0.5$)	78.000222	655.341909	5452.481409
[38] ($h = 0.1833, k = 0.05$)	77.86967	654.09104	5440.78956
Analitik:	$I_1 = 78$	$I_2 = 655.2$	$I_3 = 5450.4$

Çizelge 4.70 : Problem 4' ün $t_{final} = 12$ zamanında $h = 0.05$ ve $k = 0.025$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri.

	$\mu = 0.01$			$\mu = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
R-G	1.772454	1.264183	1.025476	1.772454	1.315608	1.023540
Lin.	1.772455	1.263275	1.024197	1.772454	1.315477	1.023392
Lumped	1.772455	1.263275	1.024197	1.772454	1.315478	1.023392
[45]	1.77245	1.25909	1.04127	1.77245	1.31424	1.02625
[34]	1.77245	1.26567	1.02293	1.77245	1.31612	1.02339

taftaki büyük dalganın sağda olan küçük olan dalgayı yakalayıp, birleştiği ve en sonda da geçtiği açıkça görülmektedir. Şekilden dalgaların etkileşimden çıktıktan sonra da başlangıçtaki genliklerini hemen hemen korudukları görülmektedir.

4.4.3 Problem 3: Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Çizelge 4.69 da Problem 3'ün $t_{final} = 15$ zamanında $\mu = 1$, $c_1 = 4.5$, $c_2 = 1.5$, $c_3 = 0.5$, $h = 0.1$, $k = 0.1$, $x_1 = 10$, $x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleri için tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri ile literatürde mevcut olan bazı diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle yayınlanan sayısal sonuçlar verildi. Yaklaşımlar sonucu elde edilen değerlerin literatürde yayınlanmış bazı araştırmacıların sonucuyla ve analitik değerleriyle iyi uyum içinde olduğu görülmektedir. Üç solitary dalganın etkileşimini gösteren Şekil 4.3 incelendiğinde, $t_{ilk} = 0$ zamanında solda bulunan büyük genlikli dalganın küçük genlikli diğer iki dalgayı yakaladığı, birleştiği ve daha sonra geçtiği görülmektedir. $t_{final} = 15$ zamanında ise her üç dalgasında başlangıçtaki genliklerinde büyük bir değişim olmadığı görülmüştür.

4.4.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Şartı

Çizelge 4.70 de Maxwellian başlangıç şartı probleminde $t_{final} = 12$ zamanında $h = 0.05$ ve $k = 0.025$ değerleri için $\mu = 0.01$ $\mu = 0.05$ değerleri kullanılarak farklı yaklaşımlar kullanılarak hesaplanan korunum sabitlerinin sonuçları verildi. Çizelgeden $t_{final} = 12$ zamanında hesaplanan korunum sabitlerinin $t_{ilk} = 0$ zamanında hesaplanan değerlerinden fazla uzaklaşmadığı ve tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan değerlerin hem birbiriyle hemde [45] ve [34]' de verilen değerlerle uyumlu olduğu görülmüştür. Şekil 4.4 de Maxwellian başlangıç şartı ile dalga üretimi probleminde μ parametresinin azalan değerleri için dalga sayısının arttığı ve $t_{ilk} = 0$ zamanında görülen ilk dalga formunun bozulduğu ve ardışık dalgalar üretildiği görülmüştür.

Çizelge 4.71 : Problem 5' in $t_{final} = 800$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 5, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

	I_1	I_2	I_3	x	U
R-G	6.003425	0.708721	0.076286	44.75	0.18380
Lin.	6.003268	0.708688	0.076281	44.75	0.18377
Lumped	6.003268	0.708688	0.076281	44.75	0.18377
[3]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
[45]	6.003580	0.708403	0.076313	44.75	0.183935
[16]	6.027221	0.713333	0.077000	44.70	0.183760
[19]	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.183970
[23]	6.003578	0.708498	0.076192	44.75	0.183822
[24]	5.446117	0.606864	0.062520	44.89	0.191063
[25]	6.00259	0.70885	0.07628	44.75	0.184050
[26]	5.996421	0.707090	0.076213	44.75	0.183684
[32]	6.002578	0.708710	0.076277	44.75	0.18405

Çizelge 4.72 : Problem 5' in $t_{final} = 800$ zamanında hesaplanan korunum sabitleri ($h = 0.07, k = 0.05, d = 2, \mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

	I_1	I_2	I_3	x	U
R-G	6.003322	0.723860	0.078533	45.87	0.18451
Lin.	6.003323	0.723859	0.078533	45.87	0.18451
Lumped	6.003323	0.723859	0.078533	45.87	0.18451
[3]	6.003194	0.723867	0.078534	45.85	0.18460
[45]	6.003472	0.723491	0.078574	45.87	0.184654
[16]	5.994366	0.712677	0.076876	45.70	0.183918
[23]	6.003478	0.723605	0.078426	45.87	0.184518
[24]	5.669824	0.660997	0.070677	46.73	0.197568
[25]	6.00248	0.72402	0.07853	45.85	0.184713
[26]	5.996473	0.722126	0.078465	45.87	0.184431
[32]	6.002474	0.723860	0.078525	45.85	0.18471

Çizelge 4.73 : Problem 5' in $d = 2, d = 5, h = 0.07, k = 0.05$ için hesaplanan korunum sabitleri lineer artış oranları ($\mu = 0.16666667, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1, -20 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 800$).

	$d = 5$			$d = 2$		
	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
R-G	4.999802	6.665537	7.49987	4.99980	6.665538	7.49988
Lin.	4.999606	6.665125	7.49925	4.99978	6.665388	7.49975
Lumped	4.999606	6.665125	7.49925	4.99978	6.665388	7.49975
[3]	5.000650	6.666390	7.50050	5.00090	6.662200	7.48630
[45]	4.995664	6.676238	7.53588	4.99997	6.677588	7.54100
[16]	5.030800	6.724400	7.59020	4.92730	6.526900	7.29380
[23]	5.000000	6.662800	7.48810	5.00000	6.662200	7.48630
[24]	4.332000	5.396100	5.78280	4.58670	5.883400	6.52150
[26]	4.999800	6.653900	7.49930	5.00000	6.652500	7.50000
[32]	4.999990	6.666650	7.50000	4.99997	6.666650	7.50000
Analitik:	5	6.66667	7.5	5	6.66667	7.5

4.4.5 Problem 5: Ardışık Dalga Oluşumu

Çizelge 4.71 ve Çizelge 4.72 da $[-20, 50]$ kapalı aralığı üzerinde $h = 0.07$, $k = 0.05$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$, $x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$ parametre değerleri için $t_{final} = 800$ zamanında sırasıyla $d = 5$ ve $d = 2$ için elde edilen korunum sabitlerinin sonuçları verildi. Çizelgelerden tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan korunum sabitlerinin literatürde mevcut bazı diğer araştırmacıların elde ettiği değerlerle uyum içinde olduğu aşikar bir şekilde görülmektedir.

Çizelge 4.73 de tezde kullanılan üç yöntemle hesaplanan değerlerin sayısal sonuçlarına göre korunum sabitlerinin lineer artış oranlarının analitik değerleri ve literatürde yayınlanmış bazı diğer araştırmacıların sonuçlarıyla iyi uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca Şekiller 4.5 ve 4.6 incelendiğinde, dalga sayılarının ve genliklerinin ilerleyen zaman içinde arttığı açıkça görülmektedir. Yine şekillerden $d = 2$ değeri için üretilen dalga sayısının $d = 5$ değeri için üretilen dalga sayısından fazla olduğu görülmüştür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında EW denkleminde UU_x lineer olmayan terimi yerine üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen EW denkleminin trigonometrik kübik B-spline baz fonksiyonları üzerine temellenmiş kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik şemaları elde edildi. Sonra bu tez çalışmasında göz önüne alınan son iki şemanın von Neumann yöntemiyle kararlılık analizi incelendi. Daha sonra elde edilen cebirsel lineer denklem sistemi MATLAB (R2015a) sembolik programı kullanılarak çözüldü.

Bu tez boyunca ele alınan ilk üç problemin zaman adım uzunluğu ve konum adım uzunluğu karşılıklı olarak biri sabitken diğeri azaltılarak korunum sabitlerinde hata değeri ve değişimleri hesaplandı. Göz önüne alınan son iki problem için ilgili denklemin parametre değerleri değiştirilerek korunum sabitlerindeki değişim gözlemlendi. Elde edilen sayısal sonuçların birbirine yakın olmasından dolayı grafikleri arasında ayırım zor olduğundan sadece Rubin-Graves tipi yaklaşımdan elde edilen sayısal sonuçların grafikleri sunuldu.

Tezdeki ilk problem olan tek solitary dalganın hareketi probleminde h ve k değerleri küçüldüğünde hata sonuçlarının azaldığı, çizelgeler incelendiğinde Rubin-Graves tipi yaklaşımın diğer yaklaşımlardan daha iyi sonuç verdiği açıkça görülmektedir. Grafiklerden dalganın hareketini tamamlarken genliğinde kayda değer bir değişimin oluşmadığı görülmektedir.

Tezdeki ikinci ve üçüncü problem olarak ele alınan iki ve üç solitary dalganın etkileşimi problemlerinin analitik çözümleri mevcut olmadığından sadece korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyum içerisinde olup olmadığını birlikte korunum sabitlerindeki salınımlara bakıldı. Ele alınan ikinci ve üçüncü problemde hesaplanan korunum sabitlerinin birbiriyle iyi uyum içinde olduğu ve zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeyip sabit kaldığı görüldü. Ayrıca grafikten dalganın hareketini tamamlarken genliğinde kayda değer bir değişimin olmadığı görüldü.

Tezdeki dördüncü problem olan Maxwellian başlangıç şartı ile solitary dalga oluşumu probleminde korunum sabitlerinin analitik değerleri mevcut olmadığından diğer problemlerde uygulandığı şekilde korunum sabitlerindeki değişimler göz önüne alındı. Rubin-Graves tipi yaklaşımdan bulunan sayısal sonuçların diğer yaklaşımlardaki elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü.

Tezdeki beşinci ve son problem olan ardışık dalga oluşumu probleminde korunum sabitlerindeki lineer artış oranları, öncü dalganın genliği ve konumu göz önüne alındı. Rubin-Graves ile bulunan sayısal sonuçların diğer yaklaşımlara nispeten analitik değerler ve literatürdeki sonuçlarla daha uyumlu olduğu görüldü.

Tezde ele alınan beş probleme uygulanan trigonometrik kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yaklaşımlarıyla elde edilen sayısal sonuçların birbirleriyle, analitik değerleriyle ve literatürde mevcut olan diğer araştırmacıların sonuçlarıyla uyumlu olduğu özellikle Rubin-Graves tipi yaklaşımdan elde edilen sayısal sonuçların diğer yaklaşımlara kıyasla daha iyi sonuçlar verdiği açıkça görüldü. Sonuç olarak, EW denkleminde görülen UU_x lineer olmayan terimi yerine üç farklı lineerleştirme tekniğinin kolayca uygulanabildiği ve trigonometrik kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yaklaşımları ile daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü. Dolayısıyla tezde ele alınan bu yaklaşımlar fizik ve mühendislikte karşılaşılan bu tip lineer olmayan yapıya sahip problemlere de kolayca uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Reddy, J.N.** (1993). *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill, New York.
- [2] **Morrison, P.J., Meiss, J.D. ve Cary, J.R.** (1984). Scattering of regularized-long-wave solitary waves, *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 11(3), 324–336.
- [3] **Dağ, I. ve Saka, B.** (2004). A cubic B-spline collocation method for the EW equation, *Mathematical & Computational Applications*, 9(3), 381–392.
- [4] **McHenry, D.** (1943). A Lattice Analogy for the Solution of Stress Problems, *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 21(2), 59–82.
- [5] **Hrennikoff, A.** (1941). Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method, *ASME J. Appl. Mech.*, 8(4), 169–175.
- [6] **Clough, R.** (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, *Proceedings of American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, Sept.*, 23, 345–378.
- [7] **Logan, D.** (2007). *A first course in the finite element method*, Thomson, Toronto, Canada, 4. sürüm.
- [8] **Rao, S.S.** (2010). *The finite element method in engineering*, Butterworth-Heinemann, Oxford Elsevier.
- [9] **Stasa, F.** (1986). *Applied finite element analysis for engineers*, CBS Pub. Japan Ltd, New York, London.
- [10] **Schoenberg, I.J.** (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, 112–141.
- [11] **Karakoç, S.B.G.** (2011). *Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [12] **Schumaker, L.L.** (2007). *Spline functions: basic theory*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 3. sürüm.
- [13] **Hamid, N., Majid, A. ve Ismail, A.** (2010). Cubic Trigonometric B-Spline Applied to Linear Two-Point Boundary Value Problems of Order Two, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 4(10), 1377–1382.
- [14] **Gardner, L.R.T. ve Gardner, G.A.** (1992). Solitary waves of the equal width wave equation, *Journal of Computational Physics*, 101(1), 218–223.
- [15] **García-Archilla, B.** (1996). A spectral method for the equal width equation, *Journal of Computational Physics*, 125(2), 395–402.

- [16] **GARDNER, L.R.T., GARDNER, G.A., AYOUB, F.A. ve AMEIN, N.K.** (1997). Simulations of the EW undular bore, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(7), 583–592.
- [17] **Zaki, S.** (2000). A least-squares finite element scheme for the EW equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(2), 587–594.
- [18] **Zaki, S.** (2001). Solitary waves induced by the boundary forced EW equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38), 4881–4887.
- [19] **Saka, B., Irk, D. ve Dag, I.** (2003). Numerical study of the equal width wave equation, *Hadronic Journal of Supplementary*, 18, 99–116.
- [20] **Raslan, K.R.** (2004). A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 81(1), 63–72.
- [21] **Hamdi, S., Enright, W.E., Schiesser, W.E., Gottlieb, J.J. ve Alaal, A.** (2003). Exact Solutions of the Generalized Equal Width Wave Equation, *Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Application, LNCS, cilt2668*, Springer-Verlag, Berlin, s.725–734.
- [22] **Raslan, K.R.** (2005). Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 795–805.
- [23] **Esen, A.** (2005). A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation*, 168(1), 270–282.
- [24] **Dogan, A.** (2005). Application of Galerkin's method to equal width wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 65–76.
- [25] **Saka, B.** (2006). A finite element method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 730–747.
- [26] **Esen, A. ve Kutluay, S.** (2006). A linearized implicit finite-difference method for solving the equal width wave equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 83(3), 319–330.
- [27] **Ramos, J.I.** (2006). Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations, *Applied Mathematics and Computation*, 179(2), 622–638.
- [28] **Ramos, J.I.** (2007). Solitary waves of the EW and RLW equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(5), 1498–1518.
- [29] **Yusufoglu, E. ve Bekir, A.** (2007). Numerical simulation of equal-width wave equation, *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, 54(7-8), 1147–1153.
- [30] **Güleç, S.** (2007). *Galerkin sonlu eleman metoduyla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Niğde.
- [31] **Ali, A.H.A.** (2007). Spectral method for solving the equal width equation based on Chebyshev polynomials, *Nonlinear Dynamics*, 51(1-2), 59–70.

- [32] **Saka, B., Dağ, İ., Dereli, Y. ve Korkmaz, A.** (2008). Three different methods for numerical solution of the EW equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(7), 556–566.
- [33] **Dereli, Y.I. ve Schaback, R.** (2010). The meshless kernel-based method of lines for solving the equal width equation, *Georg-August Göttingen University institut for Numerische and AngewandteMathematik Preprint-Serie*, 27.
- [34] **Roshan, T.** (2011). A Petrov-Galerkin method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2730–2739.
- [35] **Roshan, T.** (2011). A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(6), 1641–1652.
- [36] **Kaplan, A.G. ve Dereli, Y.** (2012). EW Denkleminin Radial Basis Fonksiyon Collocation Metodu İle Sayısal Çözümü, *Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 16(1), 48–55.
- [37] **Fazal-i, H., Inayet, A. ve Shakeel, A.** (2013). Septic B-Spline Collocation method for numerical solution of the Equal Width Wave (EW) equation, *Life Science Journal*, 10, 253–260.
- [38] **Uddin, M.** (2013). RBF-PS scheme for solving the equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 222, 619–631.
- [39] **Mersin, M.A.** (2014). *Bazı kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kübik B-spline quasi interpolasyon metodu* (Yüksek Lisans Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- [40] **Banaja, M.A. ve Bakodah, H.O.** (2015). Runge-Kutta integration of the equal width wave equation using the method of lines, *Mathematical Problems in Engineering*, Art. ID 274579, 9.
- [41] **Ghafoor, A. ve Haq, S.** (2018). An efficient numerical scheme for the study of equal width equation, *Results in Physics*, 9, 1411–1416.
- [42] **Lu, D., Seadawy, A.R. ve Ali, A.** (2018). Dispersive traveling wave solutions of the Equal-Width and Modified Equal-Width equations via mathematical methods and its applications, *Results in Physics*, 9, 313–320.
- [43] **Olver, P.J.** (1979). Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85(1), 143–160.
- [44] **Saka, B.** (2002). *RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri* (Doktora Tezi). Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- [45] **Ateş, M.** (2014). *Eşit Genişlikli Dalga (EW) denkleminin sonlu fark yöntemleri ile çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ali Sercan Karakaş
Doğum Tarihi ve Yeri : 04.03.1994, Malatya
E-Posta : ali_sercan_44@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Yağmurlu, N.M., Karakaş, A.S. 2020.** Numerical solutions of the equal width equation by trigonometric cubic B-spline collocation method based on Rubin-Graves type linearization, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (<https://doi.org/10.1002/num.22470>)