İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

KAPALI REGLE YÜZEYLERİN İNVARYANTLARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Ali İhsan SİVRİDAĞ
İ.Ü.T.B. Fakültesi
Matematik Asistanı

MALATYA-1980

Beni bu çalışmaya sevk eden ve çalışmalarım süresince değerli yardımlarını esirgemeyen, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Cebir-Geometri Kürsüsü Başkanı, Hocam; Sayın Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölüm uzay hareketlerine ayrılmış olup, burada genel anlamda hareketler, bir parametreli uzay hareketleri, diferensiyel geometrinin eğriler teorisi, diferensiyel formlar ve şeritler teorisinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölümde regle yüzeylerin hareket geometrisinde önemli rol oynayan invaryantlarına ait özelikler sıralanmıştır. Üçüncü bölümde kapalı ve küresel bir eğri boyunca tanımlanan harekete bağlı olarak, bu eğrinin küresel gösterge eğrileri boyunca meydana gelen harekette, esas eğriye ait bazı doğrultuların küresel göstergeler boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin açılım invaryantları ve bunlar arasındaki bağıntılar araştırılmıştır.

Bu çalışmanın orijinal sayılabilecek kısmı ise dördüncü bölümdedir. Bu bölümde, bir regle yüzeyin açılım invaryantlarını, regle yüzey üzerinde dayanak eğrisi boyunca alınan bir şeridin şerit elemanları cinsinden hesaplamak suretiyle, açılabilirlikle ilgili bazı karakterizasyonlar ifade edilmiştir.

1.BÖLÜM

UZAY HAREKETLERİ

1.1 ÖKLİD UZAYLARI

TANIM 1.1.1 (İç Çarpım Uzayı):

V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\varphi : V x V \longrightarrow IR$$

fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı olarak verilmiş ise φ ye V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve V ye de iç çarpım uzayı denir [1].

TANIM 1.1.2:

V bir n-boyutlu reel vektör uzayı ve V nin üzerinde de Öklid İç Çarpımı tanımlanmış olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n-boyutlu Öklid Uzayı denir [1].

TANIM 1.1.3:

n-boyutlu Öklid Uzayında bir nokta X ve bir afin koordinat sistemine göre X in koordinatları $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun.

$$x_i : A \longrightarrow IR$$

fonksiyonuna A Öklid Uzayının i-yinci koordinat fonksiyonu adı verilir [1].

n-boyutlu reel standard afin uzayı, n-boyutlu standard vektör uzayı IR^n ile eşleyelim. IR^n vektör uzayında bir

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$$

iç çarpımını $\forall X, Y \in IR^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle , \rangle (X,Y) = \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu iç çarpıma IR^n de standard iç çarpım veya Öklid İç Çarpımı adı verilir. $\{ IR^n , \langle , \rangle \}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standard afin uzay, n-boyutlu Öklid Uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir.

TANIM 1.1.4 (Uzaklık):

n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı IR^n ile birleşen Öklid Uzayı E^n olsun. Bir

$$d: E^n \times E^n \longrightarrow IR$$

fonksiyonu $\forall X,Y \in E^n$ için IR^n deki $\|\ \|$ norm ile

$$d:(X,Y) \longrightarrow d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle} \qquad (1.1.2)$$

şeklinde tanımlanır ve E^n de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adını alır [1].

TEOREM 1.1.1:

E^n n-boyutlu Öklid Uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İSPAT :

$\forall X,Y,Z \in E^n$ için

i) E^n ile birleşen IR^n reel iç çarpım uzayında iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\forall \vec{\alpha} \in E^n$ için

$$\|\vec{\alpha}\| \geq 0$$

dır. O halde $\vec{\alpha} = \overrightarrow{XY}$ olmak üzere

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| \geq 0$$

elde edilir. $\|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$ olacağından

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = 0$$

buradan

$$\|\overrightarrow{XY}\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{XY} = \theta$$

veya

$$X = Y$$

olur.

Tersine $X = Y$ ise $\overrightarrow{XY} = 0 \Longrightarrow \|\overrightarrow{XY}\| = 0$ dır. Buradan $d(X,Y) = 0$ olur. O halde

$$d(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X = Y$$

bulunur.

ii) $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX} \Longrightarrow \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{YX}\|$ olur. Buradan

$$d(X,Y) = d(Y,X)$$

elde edilir.

iii) İç çarpım uzayında normun özelliklerinden

$$\|\overrightarrow{XZ}\| = \|\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}\| \leq \|\overrightarrow{XY}\| + \|\overrightarrow{YZ}\|$$

olur ki bu da

$$d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z)$$

olması demektir

TANIM 1.1.5:

E^n n-boyutlu Öklid Uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna E^n de Öklid Metriği denir [1].

TANIM 1.1.6(Öklid Çatısı):

Bir n-boyutlu reel iç çarpım uzayı IR^n olsun. IR^n ile birleşen E^n Öklid Uzayında sıralı bir $\{p_o, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ nokta n+1-lisi için eğer $\{\overrightarrow{p_o p_1}, \overrightarrow{p_o p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_o p_n}\}$ vektör sistemi IR^n nin bir ortonormal bazı ise $\{p_o, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ nokta cümlesine E^n de bir Öklid Çatısı (veya dik çatı) denir. Böyle bir çatı için tanımlanan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinat sistemine ise Öklid Koordinat Sistemi (veya dik koordinat sistemi) denir [1].

TANIM 1.1.7 (İzometri):

E_1^n ve E_2^n, sırası ile, IR_1^n ve IR_2^n n-boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Oklid Uzayı olsunlar. Eğer bir

$$f: E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in IR_1^n$ için

$$\langle \Psi(\vec{\alpha}), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \tag{1.1.3}$$

olacak şekilde bir

$$\Psi: IR_1^n \longrightarrow IR_2^n$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri denir [1].

TEOREM 1.1.2:

Bir $f: E_1^n \longrightarrow E_2^n$ dönüşümü izometri ise,

i) $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$, $\forall A, B \in E_1^n$;

ii) f birebir ve üzerinedir;

iii) E_1^n ve E_2^n Öklid Uzaylarındaki dik koordinat sistemleri, sırası ile $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ise f izometrisi, $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i,j \leq n$, $A \in O(n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $C, X, Y \in IR^n{}_1$ dir[i].

Bir n-boyutlu vektör uzayı E^n olmak üzere

$$R(n) = \{ f \mid f: E^n \xrightarrow{\text{izometri}} E^n \}.$$

cümlesini ele alalım. R(n) de dönüşümlerin birleşimi işlemi "o" ile gösterilir ise (R(n),o) ikilisi bir gruptur. Bu gruba izometriler grubu denir [1].

1.2 HAREKETLER

TANIM 1.2.1:

n-boyutlu bir E^n Öklid Uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^n deki bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Öklid Koordinat Sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$ ve $C \in IR^n{}_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

formundadır. f ye E^n de bir hareket adı verilir [1].

$A \in O(n)$ olduğundan

$$\det A = \mp 1 \tag{1.2.2}$$

dir. Eğer det A = +1 ise f hareketine direkt hareket, det A = -1 ise karşıt hareket denir. Hareket deyince daha çok direkt hareketleri anlayacağız. Direkt hareketler de iki çeşit hareketin birleşimidir; direkt dönme ve öteleme.

TANIM 1.2.2 (Dönme):

E^n Öklid Uzayının bir f izometrisi için

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye "O" noktası etrafında bir dönme denir. Eğer f direkt hareket ise f ye direkt dönme, karşıt hareket ise karşıt dönme adı verilir [1].

TEOREM 1.2.1:

E^n de başlangıcı $O \in E^n$ olan bir Öklid Koordinat Sistemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. Bir $f: E^n \longrightarrow E^n$ izometrisi için;

i) O noktası etrafında bir dönme f ise f nin bu Öklid Koordinat Sistemine göre ifadesi ;

$$X' = AX$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}^n_1$ dir.

ii) f bir direkt dönmedir $\Longleftrightarrow$ $X' = AX$ ve $A \in SO(n)$ dir.

İSPAT:

i) $f: E^n \longrightarrow E^n$ bir izometri olduğundan f nin E^n deki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dik koordinat sistemine göre ifadesi Teorem (1.1.2) den

$$X' = f(X) \Longrightarrow \begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. $\forall X \in E^n$ için doğru olan bu ifade $X = O$ içinde doğru olacağından,

$$\begin{bmatrix} O \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $C = O$ olur. Böylece f dönmesinin matrisel ifadesi,

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya aynı şey demek olan

$$X' = AX \tag{1.2.3}$$

şekline dönüşür.

ii) $:\Longrightarrow$ f bir direkt dönme ise f bir hareket olacağından Tanım(1.2.1) den $A \in SO(n)$ olur.

$\Leftarrow$:

$$X' = AX$$

ve $A \in SO(n)$ ise

$$\begin{bmatrix} X' \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} X' \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu ifadeyi Tanım (1.2.1) deki ifade ile karşılaştırırsak $C = 0$ olduğunu ve dolayısı ile f nin hem bir hareket, hem de O noktası etrafında bir dönme olduğunu görmüş oluruz [1].

TANIM 1.2.3 (Öteleme):

E^n n-boyutlu Öklid Uzayının bir f izometrisi için

$$f(X) = X + h \ , \forall X \in E^n$$

olacak şekilde bir tek $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in h ile belirtilen bir ötelemesi denir [1].

1.3 E^3 ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

TANIM 1.3.1 (Parametrik Eğri):

IR reel sayılar ekseni üzerinde bir açık aralık I olsun. E^3 de bir diferensiyellenebilir

$$\alpha : I \longrightarrow E^3$$

dönüşümü E^3 de bir eğri belirtir [2].

Burada I intervali $a, b \in IR$ ve $t \in I$ olmak üzere $a < t < b$, $-\infty < t < b$, $a < t < +\infty$ ve hatta $I = IR$ olarakta seçilebilir. t değerine eğrinin parametresi denir. $I = \{t \in IR \mid a \leq t \leq b\}$ ise eğriye kapalı eğri, $I = \{t \in IR \mid a \nleq t \nleq b\}$ ise açık eğri adı verilir. $\forall t \in IR$ için α eğrisi üzerinde değişken bir noktayı E^3 de bir $O = (0,0,0)$ başlangıç noktasına göre bir vektör ile

$$\vec{\alpha}(t) = \{ \alpha_1(t), \ \alpha_2(t), \ \alpha_3(t) \mid \alpha_i : E^3 \longrightarrow IR, 1 \leq i \leq 3 \} \qquad (1.3.1)$$

şeklinde göstermek mümkündür.

TANIM 1.3.2 (Hız Vektörü):

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için αnın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü diye

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\bigg|_t , \frac{d\alpha_2}{dt}\bigg|_t , \frac{d\alpha_3}{dt}\bigg|_t \right)_{\alpha(t)}$$

veya

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t) , \frac{d\alpha_2}{dt}(t) , \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)} \quad (1.3.2)$$

olmak üzere $\alpha'(t) \in T_{E^3}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne denir [2].

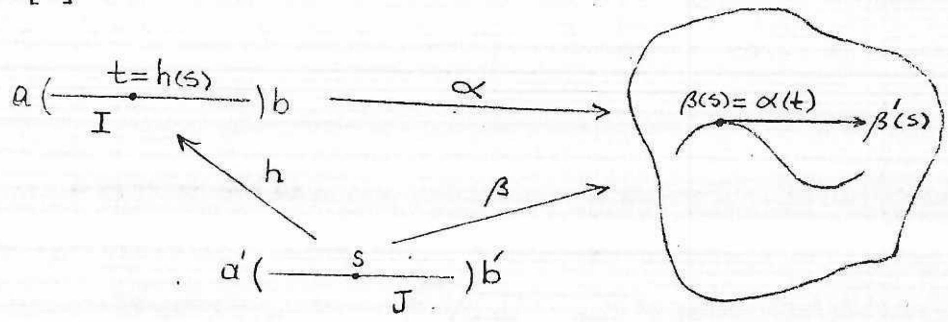
Hız vektörü, eğrinin teğetinin doğrultu ve çizilme yönündedir.

TANIM 1.3.3 (Parametre Değişimi):

IR reel sayılar ekseni üzerinde iki açık aralık I ve J olsun. $\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir eğri ve $h = \alpha^{-1} o \beta : J \longrightarrow I$ diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\beta = \alpha o h : J \longrightarrow E^3$$

bileşke fonksiyonuna parametresi h ile değiştirilmiş bir eğri denir [2].



Şekil 1.3.1

Burada $\beta(s) = (\alpha o h)(s)$ alındığında $\beta(s) = \alpha(h(s))$ olur. $h(s) = t$ yazılırsa $\beta(s) = \alpha(t)$ bulunur. J intervalinde her s değerine eğri üzerinde $\beta(s) = \alpha(t)$ noktası karşılık gelir. Bu nokta I intervalindeki $h(s) = t$ değerine tekabül eder. Dolayısıyla α ve β aynı eğriyi belirtmiş olur şekil (I.3.1).

TANIM 1.3.4:

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisi verildiğinde $\forall t \in I$ için

$$\vec{\alpha}(t+T) = \vec{\alpha}(t)$$

olacak şekilde bir $0 < T \in IR$ sayısı varsa α eğrisine peryodiktir, T sayısının en küçüğüne ise peryod denir [2].

TANIM 1.3.5 (Regüler Eğri)

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise α eğrisine regüler eğri denir [2].

TANIM 1.3.6:

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir s parametresine göre ifade edilmiş bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in T_{E^3}(\alpha(s))$ hız vektörünün boyu

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \tag{1.3.3}$$

ise α eğrisine yayı cinsinden parametrik olarak ifade edilmiştir denir. Burada $T_{E^3}(\alpha(s))$ ile E^3 ün $\alpha(s)$ noktasındaki tanjant uzayı gösteriliyor [2].

TEOREM 1.3.1:

E^3 de herbir parametrik regüler eğri daima kendi yayı cinsinden parametrik olarak ifade edilebilir.

İSPAT:

E^3 de bir

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}: I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

eğri olsun. α eğrisinin ilk parametresi t ise, yay uzunluğu s(t) olup

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle}\, dt$$

şeklindedir. O halde

$$s = s(t)$$

fonksiyonunun $\frac{ds}{dt}$ türevi

$$\alpha = \alpha(t)$$

eğrisinin

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \tag{1.3.4}$$

skalar hızıdır. α regüler bir eğri, yani $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ olduğundan $T_{E^3}(\alpha(t))$ deki iç çarpımının pozitif tanımlılık aksiyomu gereğince

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} > 0$$

olur. Bu durumda $\forall t \in I$ için

$$\frac{ds}{dt} > 0$$

elde edilir. Bu ise

$$s = s(t)$$

fonksiyonun monoton artan olduğunu gösterir. O halde $t = t(s)$ ters fonksiyonu vardır ve bu ters fonksiyonun türevi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} ,$$

şeklindedir.

$$\frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} > 0$$

olduğundan $t = t(s)$ ters fonksiyonuda monoton artandır. Şekil (1.3.1) den, $\beta = \beta(s)$ eğrisi için

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle \Big|_{(s)} = 1$$

olduğunu götereceğiz. Bunun için $L = s(b)$, $I = [a,b]$, $J = [a',b']$ olmak üzere şekil (1.3.1) de $a' = 0$, $b' = L$ alarak bir

$$h: J \longrightarrow I$$
$$h: [0,L] \longrightarrow [a,b]$$
$$s \longrightarrow t(s) = h(s)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. O zaman

$$\beta(s) = (\alpha o h)(s): [0,L] \longrightarrow E^3$$

fonksiyonu $\vec{\alpha} = \overrightarrow{\alpha(t)}$ eğrisinin s parametresine göre $[0,L]$ üzerinde tanımlanmış olur. Buradan

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d}{ds}(\alpha o h)$$

olur. Buradan da zincir kaidesine göre

$$\beta'(s) = \frac{d\alpha}{dh} \cdot \frac{dh}{ds}$$

elde edilir. $t = h(s)$ olduğundan

$$\beta'(s) = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1}$$

bulunur. O halde

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1}, \frac{d\alpha}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \right\rangle$$

ve

$$\frac{ds}{dt} = \| \alpha'(t) \| \in IR$$

olduğundan

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-2} \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle$$

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-2} \| \alpha'(t) \|^{2} \qquad (1.3.5)$$

elde edilir. (1.3.4) den $\| \alpha'(t) \|$ değeri (1.3.5) de yerine yazılırsa

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$$

bulunur. O halde bir eğri kendi yayı cinsinden parametrik olarak ifade edilebilir [3].

TANIM 1.3.7 (Eğilim Çizgisi):

E^3 de bir yüzey M olsun. $I \in IR$ olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisi s yay parametresi ile verilsin. E^3 de sabit bir birim vektör $\vec{u}$ olsun. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(s)$ ve $\overrightarrow{\alpha'(s)}$ ile $\vec{u}$ birim vektörü arasındaki sabit açı φ olmak üzere

$$\left\langle \overrightarrow{\alpha'(s)}\Big|_{\alpha(s)}, \vec{u} \right\rangle = \cos\varphi = \text{sabit}, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} \qquad (1.3.6)$$

bağıntısı var ise α eğrisine M üzerinde bir eğilim çizgisi denir [3].

TEOREM 1.3.2:

M bir yüzey ve $\alpha: I \longrightarrow M$ bir diferensiyellenebilir eğri olsun. α bir eğilim çizgisidir $\Longleftrightarrow \frac{k_1}{k_2}$ = sabitdir.

İSPAT:

: $\Longrightarrow$ α bir eğilim çizgisi olsun. Diğer taraftan $\vec{T}$ teğet vektör alanı

$$\vec{T} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

olup, s yay-parametresi olduğundan $\|\alpha'(s)\| = 1$ dir. O halde

$$\vec{T} = \alpha'(s)$$

olur. O zaman

$$\langle \alpha'(s), \vec{u} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$$

yazılabilir. Buradan türev alınırsa

$$\langle \vec{T}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{T}, 0 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{T}', \vec{u} \rangle = 0$$

bulunur. Frenet-Serret formüllerinden

$$\langle k_1\vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$k_1 \langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0, \quad k_1 \neq 0,$$

$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$$

dır. Buradan tekrar türev alınırsa;

$$\langle \vec{N}', \vec{u} \rangle + \langle N, 0 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{N}', \vec{u} \rangle = 0$$

olup, Frenet-Serret formüllerinden

$$\langle -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$-k_1 \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle + k_2 \langle \vec{B}, \vec{u} \rangle = 0 \qquad (1.3.7)$$

elde edilir. Tanım (1.3.7) den

$$\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos \varphi \qquad (1.3.8)$$

ve $\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{B}, \vec{u} \rangle = \sin \varphi \qquad (1.3.9)$$

olur. Dolayısıyla (1.3.8) ve (1.3.9) değerleri (1.3.7) de yerine yazılarak

$$-k_1\cos\varphi + k_2\sin\varphi = 0$$

$$k_1\cos\varphi = k_2\sin\varphi$$

$k_2 \neq 0$ ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\frac{k_1}{k_2} = \tan\varphi = \text{sabit} \tag{1.3.10}$$

elde edilir.

$\Longleftarrow$: $c \neq 0$ ve sabit olmak üzere $\frac{k_1}{k_2} = c$ ise $k_1 = k_2 c$ yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{d}{ds}(\vec{B} + \frac{\vec{T}}{c}) = \frac{d}{ds}(\vec{B}) + \frac{1}{c}\frac{d}{ds}(\vec{T})$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{B} + \frac{\vec{T}}{c}) = -k_2\vec{N} + \frac{k_1\vec{N}}{c}$$

ve $k_1 = ck_2$ olduğundan

$$\frac{d}{ds}(\vec{B} + \frac{\vec{T}}{c}) = -k_2\vec{N} + k_2\vec{N}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{B} + \frac{\vec{T}}{c}) = 0$$

dır. Ayrıca

$$\frac{d}{ds}(\vec{u}) = 0$$

olduğundan

$$\vec{B} + \frac{\vec{T}}{c} = \vec{u}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafı $\vec{T}$ ile iç çarpıma tabî tutarsak

$$\langle \vec{B} + \frac{\vec{T}}{c}, \vec{T} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{T} \rangle$$

$$\langle \vec{B}, \vec{T} \rangle + 1/c \, \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle$$

olur. Buradan

$$\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{c} = \text{sabit}$$

bulunur. c = sabit olduğundan α bir eğilim çizgisidir [3].

TANIM 1.3.8

Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi verildiğinde, k_1 bu eğrinin eğriliği, k_2 de burulması olmak üzere,

$$h = \frac{k_1}{k_2}$$

değrine bu α eğrisinin harmonik eğriliği denir [5].

O halde teorem (1.3.2) yi şöyle ifade etmek mümkündür:

TEOREM 1.3.3

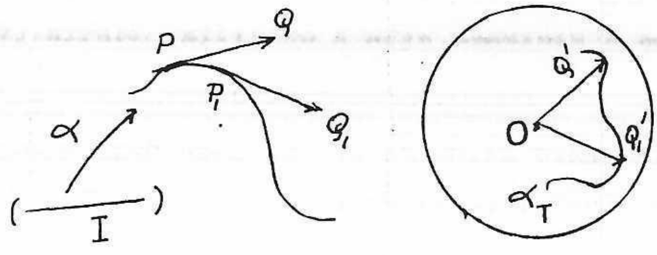
Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart harmonik eğriliğinin sabit olmasıdır [5].

TANIM 1.3.9

Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektör alanı $\vec{T} = \vec{PQ}$ olacak şekilde alınmak üzere, O merkezli birim yarıçaplı S^2 küresi üzerinde $\vec{PQ} = \vec{OQ'}$ olacak şekilde, P noktası $\alpha(I)$ eğrisi üzerinde gezerken Q' nün S^2 küresi üzerinde oluşturduğu eğriye α nın teğetler göstergesi denir (Şek.1.3.2). Buna göre α nın teğetler göstergesini,

$$\alpha_T : I \longrightarrow S^2$$
$$s \longrightarrow \vec{\alpha}_T(s) = \vec{T}(s)$$

şeklinde formüle edebiliriz. α_T nın yay-parametresini s_T ile gösterirsek, $ds_T = k_1\, ds$ olduğu görülür, burada k_1, α nın eğriliği ve s de α nın yay-parametresidir.



(Şek.1.3.2)

Benzer şekilde $\vec{T}$ yerine $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ almak suretiyle α nın aslî normaller göstergesi ve binormaller göstergesi tanımlanır.

1.4 E^3 DE DİFERENSİYEL FORMLAR

TANIM 1.4.1

E^3 Öklid uzayında bir vektör alanı sistemi $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ olsun. Eger $\forall P \in E^3$ için $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ sistemi P noktasındaki

$T_E3(p)$ tanjant uzayının bir bazı ise $\{V_1, V_2, V_3\}$ üçlüsüne E^3 de bir çatı alanı denir [5].

E^3 Öklid Uzayında $\forall\, p \in E^3$ için

$$e_1(p) = (1,0,0)\big|_p,\ e_2(p) = (0,1,0)\big|_p,\ e_3(p) = (0,0,1)_p \tag{1.4.1}$$

şeklindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına doğal çatı alanı denir. E^3 de diğer bir ortonormal çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. $\forall\, p \in E^3$ için

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix},\quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

olarak alınır ise, $A \in O(3)$ olmak üzere

$$E = Ae \tag{1.4.3}$$

şeklinde yazılabilir.

TANIM 1.4.2:

E^3 deki bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı verildiğinde $\forall\, p \in E^3$ için

$$\det\left[E_1(p), E_2(p), E_3(p)\right] = 1$$

ise bu çatı alanına pozitif olarak yönlendirilmiştir denir [6].

TANIM 1.4.3:

V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için (p,v) sıralı ikilisine A afin uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü denir [2].

Özel olarak A afin uzay yerine E^3 Öklid Uzayı alınarak, E^3 Öklid Uzayının $p \in E^3$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini $T_E3(p)$ ile gösterebiliriz. Buna göre

$$T_E3(p) = \left\{(p,v) \,\middle|\, p \in E^3,\ \vec{v} \in V\right\}$$

dir.

$T_E3(p)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırası ile

$$\oplus : T_E3(p) \times T_E3(p) \longrightarrow T_E3(p)$$

$$((p,v),\ (p,u)) \longrightarrow (p,v) \oplus (p,u) = (p, v+u),$$

$$\odot : \mathbb{R} \times T_{E^3}(p) \longrightarrow T_{E^3}(p)$$
$$(\lambda , (p,v)) \longrightarrow \lambda \odot (p,v) = (p, \lambda v)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\{T_{E^3}(p), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı reel bir vektör uzayıdır. Bu reel vektör uzayına E^3 Öklid Uzayının $p \in E^3$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısalığın hatırı için $T_{E^3}(p)$ şeklinde gösterilir. Bu tanjant uzay $p \in E^3$ için reel bir vektör uzayı olduğundan dualinden bahsedebiliriz. Bunun için $\forall p \in E^3$ noktasındaki tanjant uzay $T_{E^3}(p)$ olmak üzere $\emptyset_p$ fonksiyonlarını

$$\emptyset_p : T_{E^3}(p) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde elde edilen

$$T^*_{E^3}(p) = \left\{ \emptyset_p : T_{E^3}(p) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \right\}$$

cümlesi IR reel sayılar cümlesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya $T_{E^3}(p)$ tanjant uzayının dual (kotanjant) uzayı denir. $\forall \emptyset_p \in T^*_{E^3}(p)$ elemanına ise kovektör adı verilir.

TANIM 1.4.4 (1-Form):

E^3 Öklid Uzayının $p \in E^3$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^3}(p)$ olsun. Ve E^3 ün bütün p noktası üzerindeki kotanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{p \in E^3} T^*_{E^3}(p)$ ile gösterilmek üzere bir

$$\emptyset : E^3 \longrightarrow \bigcup_{p \in E^3} T^*_{E^3}(p)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ \emptyset = I : E^3 \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^3$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p \in E^3} T^*_{E^3}(p) \xrightarrow{\emptyset^{-1}} E^3$$
$$(\emptyset_p) \longrightarrow \pi(\emptyset_p) = p$$

π dönüşümü var ise $\emptyset$ fonksiyonuna (dönüşümüne) E^3 üzerinde bir 1-form denir [2].

E^3 üstünde 1-formların cümlesini

$$\chi^*(E^3) = \left\{ \emptyset \mid \emptyset : E^3 \longrightarrow \bigcup_{p \in E^3} T_{E^3}(p) \right\}$$

ile gösterelim. $\chi^*(E^3)$ de toplama işlemini;

$$\oplus: \chi^*(E^3) \times \chi^*(E^3) \longrightarrow \chi^*(E^3)$$
$$(\phi\ ,\ \psi\ ) \longrightarrow \phi \oplus \psi$$

öyleki; $\forall p \in E^3$ için

$$(\phi \oplus \psi)(p) = \phi(p) + \psi(p)$$

ve skalar ile çarpma işlemini,

$$\odot: IR \times \chi^*(E^3) \longrightarrow \chi^*(E^3)$$
$$(\lambda\ ,\ \phi\ ) \longrightarrow \lambda \odot \phi$$

öyleki; $\forall p \in E^3$ için

$$(\lambda \odot \phi)(p) = \lambda \phi(p)$$

biçiminde tanımlarsak

$$\{\chi^*(E^3), \oplus, IR, +, \cdot, \odot\}$$

altılısına 1-formların vektör uzayı denir. Bu uzay $\chi^*(E^3)$ ile gösterilir.

1-formlar vektör alanlarını reel değerli fonksiyonlara dönüştürürler. $\phi(V)$ diferensiyellenebilir ise ϕ 1-formuna da diferensiyellenebilirdir denir. $\phi(V)$ fonksiyoneli hem ϕ ve hemde V ye göre lineerdir. Yani

$$\phi(fv + gw) = f\,\phi(v) + g\,\phi(w)$$

ve

$$(f\phi + g\psi)(v) = f\phi(v) + g\psi(v)$$

dir. Burada

$$f, g: E^3 \longrightarrow IR\ ,\ \forall f, g \in C(E^3, IR)$$

dir. Buradan verilen her fonksiyonu 1-formlara dönüştüren d-operatörünü tanımlayabiliriz.

TANIM 1.4.5:

$$d: C(E^3, IR) \longrightarrow \chi^*(E^3)$$
$$f \longrightarrow df$$

olsun. Burada f fonksiyonu,

$$f: E^3 \longrightarrow IR$$

verildiğinde f nin df diferensiyeli, $\forall V_p \in T_{E^3}(p)$ için

$$df(V_p) = V_p[f] = \sum_{i=1}^{3} \frac{df}{dx_i}\Big|_p v_i \ , \ 1 \leq i \leq 3$$

şeklinde tanımlı bir 1-formdur. (Buradaki $x_i : E^3 \longrightarrow IR$ koordinat fonksiyonları ve $V = (v_1, v_2, v_3)$dir.) Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonuna $C(E^3, IR)$ cebri üzerinde diferensiyel operatörü denir [2].

TANIM 1.4.6 (Dual Baz):

V vektör uzayının bir bazı $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ve duali olan bir diğer vektör uzayı da V^*ise

$$\alpha_i^* \in V \ , \ 1 \leq i \leq 3 \ , \ \alpha_i^*(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

olarak tanımlanan $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ bazına $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bazının dual bazı denir [3].

TEOREM 1.4.1:

E^3 Öklid Uzayında Öklid Koordinat Fonksiyonları x_1, x_2, x_3 ün diferensiyelleri ile teşkil edilen $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ sistemi $\forall\, p \in E^3$ noktasındaki $T^*_{E^3}(p)$ kotanjant uzayının bir bazını oluşturur.

İSPAT:

$T_{E^3}(p)$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_p \right\}$$

olsun. Tanım (1.4.5) den, $f = x_i$, $1 \leq i \leq 3$, $V_p = \frac{\partial}{\partial x_j} = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3})$ alınarak

$$dx_i\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)[x_i] = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}\Big|_p \delta_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik}\, \delta_{jk}$$

$$dx_i\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \delta_{ij} \qquad (1.4.4)$$

elde edilir ki bu da Tanım (1.4.6) gereğince ispatı tamamlar [3].

TEOREM 1.4.2:

E^3 de herbir $\emptyset \in \mathcal{X}^*(E^3)$ 1-formu

$$\emptyset = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i \quad \text{ve} \quad f_i(p) = \emptyset\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right), \; f_i : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir.

İSPAT:

$$V_p = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p v_i$$ olduğundan $\forall\, p \in T_{E^3}(p)$ için Tanım (1.4.5)

den

$$dx_i(V_p) = V_p\left[x_i\right] = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\bigg|_p . v_j = \sum_{j=1}^{3} v_j \,\delta_{ij}$$

veya

$$dx_i(V_p) = v_i \qquad (1.4.5)$$

olur. Diğer taraftan

$$\emptyset(V_p) = \emptyset\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p v_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \emptyset\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) v_i$$

$$\emptyset(V_p) = \sum_{i=1}^{3} v_i \emptyset\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)$$

bulunur ve hipotezden $\emptyset\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)$ nin değerini yerine yazacak olursak

$$\emptyset(V_p) = \sum_{i=1}^{3} f_i\big|_p v_i$$

elde edilir. (1.4.5) den $dx_i(V_p) = v_i$ olduğundan

$$\emptyset(V_p) = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i(V_p)$$

veya

$$\emptyset(V_p) = \left(\sum_{i=1}^{3} f_i dx_i\right)(V_p)$$

olur. Fonksiyonların eşitliği tanımından

$$\emptyset = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i \qquad (1.4.6)$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur [5].

E^3 Öklid Uzayında bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. Frenet vektörlerinde olduğu gibi, her vektörün türevinin kendi cinsinden ifade edilebileceği gözönünde tutularak, $\forall p \in E^3$ noktasındaki dE_i $(1 \leq i \leq 3)$ diferensiyelleri $T_{E^3}(p)$ uzayına ait vektörler olacağından $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ sistemi cinsinden ifade edilebilirler. Buna göre $w_{ij}(p) \in IR$, $(i,j = 1,2,3)$ olmak üzere

$$dE_1(p) = w_{11}E_1(p) + w_{12}E_2(p) + w_{13}E_3(p)$$
$$dE_2(p) = w_{21}E_1(p) + w_{22}E_2(p) + w_{23}E_3(p)$$
$$dE_3(p) = w_{31}E_1(p) + w_{32}E_2(p) + w_{33}E_3(p)$$

şeklinde veya matris formunda,

$$\begin{bmatrix} d\vec{E}_1 \\ d\vec{E}_2 \\ d\vec{E}_3 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}_p \qquad (1.4.7)$$

yazılabilir.

TEOREM 1.4.3:

E^3 Öklid Uzayında bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. O zaman $\forall p \in E^3$ için

$$W_{ij}(p) = \langle dE_i(p), E_j(p) \rangle, \quad (i,j = 1,2,3) \qquad (1.4.8)$$

reel değerli fonksiyonları anti-simetrik 1-formlardır.

İSPAT:

$\{E_1, E_2, E_3\}$ Öklid Çatı Alanı ve $\forall p \in E^3$ için

$$\langle E_i, E_j \rangle \big|_p = \delta_{ij}$$

olduğundan diferensiyel alınırsa

$$\langle dE_i, E_j \rangle \big|_p + \langle E_i, dE_j \rangle \big|_p = 0$$

veya

$$W_{ij}\big|_p + W_{ji}\big|_p = 0 \qquad (1.4.9)$$

bulunur. Ayrıca $W_{ij}\big|_p \in IR$ reel değerli fonksiyonlar olduklarından anti-simetrik oldukları gösterilmiş olur [5].

Eğer,

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

dersek, i=j için (1.4.9) dan dolayı

$$W_{ii} = -W_{ii}$$

$$2W_{ii} = 0 \quad \text{ise} \quad W_{ii} = 0$$

dır. Ve $i \neq j$ için $W_{ij} = -W_{ji}$ olacağından $w_{12} = w_3$, $w_{13} = -w_2$, $w_{23} = w_1$ olarak alınırsa Ω matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4.10)$$

olarak bulunur. Son bulunan Ω matrisinin w_1, w_2, w_3 elemanlarına E^3 Öklid Uzayındaki $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı için bağ-formları denir.

TEOREM 1.4.4:

E^3 Öklid Uzayında $\{e_1, e_2, e_3\}$ doğal çatı alanı ve $\{E_1, E_2, E_3\}$ de diğer bir ortonormal çatı alanı olsun. Bu taktirde $A \in O(3)$ ve Ω da $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi için bağ-formlarının matrisi olmak üzere

$$\Omega = dA\, A^T$$

veya $\Omega = [W_{ij}]$ ve $A = [a_{ij}]$, $(i,j = 1,2,3)$ cinsinden

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}^T\, da_{ik} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq 3$$

şeklindedir.

İSPAT:

$p \in E^3$ deki bir tanjant vektör V_p olsun. Teorem (1.4.3) den

$$W_{ij}(V_p) = \langle dE_i, E_j \rangle \Big|_p \qquad (1.4.8)$$

dir. Diğer taraftan A ortogonal bir matris olduğu için

$$E_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, e_k$$

dır. Buradan her iki tarafın diferensiyeli alınır ve $df(V_p) = V_p[f]$ olduğu gözönünde tutulursa

$$dE_i(V_p) = V_p[E_i] = \sum_{k=1}^{3} V_p[a_{ik}]\, e_k(p)$$

olur. Ayrıca $E_j(p) = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}(p)\, e_k(p)$ vektörü ile iç çarpıma tabî tutulursa

$$\langle dE_i(V_p), E_j(p)\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{3} V_p[a_{ik}]\, e_k(p), \sum_k a_{jk}(p)\, e_k(p) \Big\rangle$$

$$= \sum_k V_p[a_{ik}] \sum_k a_{jk}(p) \langle e_k, e_k \rangle \Big|_p$$

$$= \sum_k V_p[a_{ik}]\, a_{jk}(p)$$

bulunur. Halbuki diferensiyel tanımından $V_p[a_{ik}] = da_{ik}(V_p)$ ve (1.4.8) den $\langle dE_i(V_p), E_j(p)\rangle = W_{ij}(V_p)$ olduğundan

$$W_{ij}(V_p) = \sum_k a_{jk}(p)\, da_{ik}(V_p)$$

veya

$$W_{ij}(V_p) = \Big(\sum_k da_{ik}\, a_{jk}\Big)(V_p)$$

olur. $\forall V_p \in T_{E^3}(p)$ için, bu eşitlik doğru olduğundan

$$W_{ij} = \sum_k da_{ik}\, a_{jk}$$

bulunur. Burada diğer matris formülleri ile bağıntı kurulabilir. A nın transpozu A^T ise

$$a^T_{kj} = a_{jk}$$

dır. Buradan; $W_{ij} = \sum_k da_{ik}\, a^T_{kj}$, $(1 \leq i,j \leq 3)$ veya matris olarak

$$\left[W_{ij}\right] = \left[\sum_k da_{ik}\, a^T_{kj}\right]$$

olur. Matris çarpımının tanımı kullanılır ve hipotezden $\left[W_{ij}\right] = \Omega$ yazılırsa

$$\Omega = dA\, A^T \tag{1.4.11}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlamış olur [5].

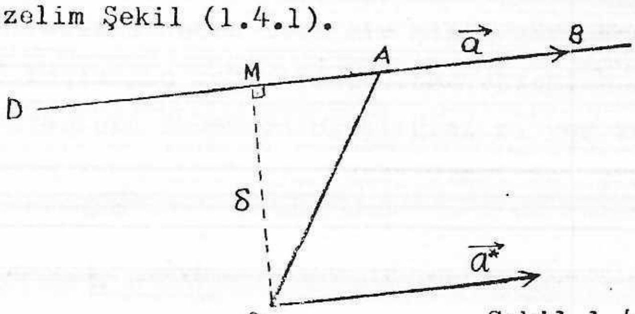
TANIM 1.4.7 (Bağlı Vektör):

Bir $\vec{a}$ serbest vektörü ile, uzayın bir A noktasının cümlesine bağlı vektör denir ve $(A,\vec{a})$ ile gösterilir [7].

TANIM 1.4.8 (Kayan Vektör):

Bir $\vec{a}$ serbest vektörü ile, uzayın, $\vec{a}$ ya paralel olan belirli bir D doğrusunun cümlesine kayan vektör denir ve $(D,\vec{a})$ ile gösterilir. D doğrusuna da kayan vektörün tesir çizgisi denir [7].

Tesir çizgisi D olan bir $\vec{a}$ kayan vektörünü gözönüne alalım ve D üzerindeki keyfi bir A noktasından itibaren $\vec{a}$ yı temsil eden $\overrightarrow{AB}$ yönlenmiş doğrusunu çizelim Şekil (1.4.1).



Şekil 1.4.1

TANIM 1.4.9:

$\vec{a}$ kayan vektörünün O noktasına göre vektörel momenti diye

$$\vec{a^*} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{a}$$

vektörüne denir. Bu vektör bağlı bir vektör gibi düşünülür ise de tatbik edilen moment A noktasına bağlı değildir [7].

Buna göre $(\vec{a},\vec{a^*})$ ikilisi bir doğru belirtir.

$$\|\vec{a}\| = 1$$

$$\|\vec{a^*}\| = \|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{a}\| = \|\overrightarrow{OA}\|\, \|\vec{a}\|\, \|\sin\theta\|$$

veya A noktası M ile çakıştığında $\theta = \widehat{OMA} = 90^\circ$ olduğundan

$$\| \vec{a}^* \| = \| \vec{OM} \wedge \vec{a} \| = \delta$$

olur.

1- $\|\vec{a}^*\| = \delta$ ile aranan doğrunun başlangıçtan uzaklığı bellidir.

2- $\vec{a}^*$ ın doğrultusu $\vec{OA}$ ve $\vec{a}$ nın teşkil ettikleri düzleme dik ve şiddeti bu paralel kenarın alanına eşitdir. Böylece $\vec{a}^*$ nın düzlemide bellidir.

3- $\vec{a}^*$ nın düzleminde O merkezli δ yarıçaplı çember aranan doğruya teğetdir.

4- O dan $\vec{a}$ alınırsa $\vec{a}^* = \vec{OA} \wedge \vec{a}$ sistemi sağ olacak şekilde $\vec{a}$ ya paralel olan teğet, aranan doğrudur.

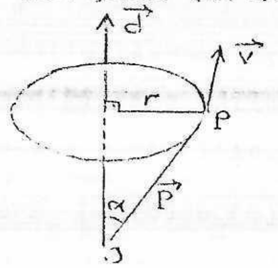
Burada $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ vektörünün bileşenleri sırası ile;

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1$$

$$\vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i a_i^* = 0 \qquad (1.4.13)$$

dır. İleride bahsedileceği gibi bu bileşenlere E^3 de bir doğrunun normlanmış Plücker Koordinatları denir.

Bir eksen etrafında dönen katı bir cisim gözönüne alalım. Koordinat sisteminin O başlangıç noktasıda, dönme ekseni üzerinde olsun. Bu cismin bir p noktasının eksenden uzaklığını r, yer vektörünü $\vec{P}$, hızını $\vec{V}$ ile gösterelim Şekil (1.4.2). Eksen üzerinde öyle bir $\vec{d}$ vektörü



Şekil 1.4.2

alalım ki $\vec{d}$ etrafındaki dönme pozitif yönde olsun ve $\|\vec{d}\| = \vec{w}$ bulunsun. Burada $\vec{w}$ açısal hız vektörüdür.

TANIM 1.4.10:

Bir cismin, bir eksen etrafında dönme hızı;

$$\vec{V} = \vec{d} \wedge \vec{P}$$

dir. Burada $\vec{d}$ vektörüne hareketin eksen etrafında ani dönme vektörü adı verilir [4].

Şimdi bir uzay eğrisinin bir X noktası etrafından birim hızla, yani parametre yerine s yay uzunluğu alınarak çizildiğini düşünelim. Böyle bir harekette Frenet üçyüzlüsü katı bir cisim gibi hareket eder.

TANIM 1.4.11:

Bu hareketin ani dönme vektörü

$$\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B} \tag{1.4.14}$$

dir. Bu hareketin ani dönme vektörüne C. Darboux (1887) vektörü denir. Burada k_1 ve k_2 sırası ile, bir eğrinin eğrilik ve burulması, $\vec{T}$, $\vec{B}$ de eğrinin birim teğet ve binormal vektör alanlarıdır[4].

1.5 ÇİZGİLER UZAYINDA HAREKETLER

E^3 Öklid Uzayında 1-parametreli hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular E^3 ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid Uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de çizgiler uzayı adını vereceğiz.

Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir refarans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı nokta da bulunan gözleyiciğe göre sabit olduğu farz edilir. Bu noktayı $O \in E^3$ ile gösterelim ve hareketi inceleyebilmek için ortonormal bir

$$\{\vec{e_1}(0), \vec{e_2}(0), \vec{e_3}(0)\} = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

sistemi tesbit edelim. Ayrıca bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığı, yani hareket etmediği farz edilerek bu halde E^3 uzayına sabit çizgiler uzayı denir ve H' ile gösterilir. Yani;

$$H' = S_p\{\overrightarrow{e_1(0)}, \overrightarrow{e_2(0)}, \overrightarrow{e_3(0)}\} \tag{1.5.1}$$

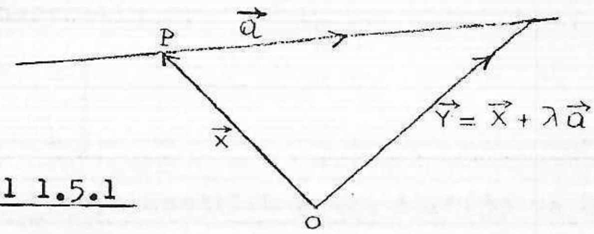
dır.

Diğer taraftan "O" noktasına göre hareketli bir p noktasını ve bu noktaya sıkı bir şekilde bağlı olan ortonormal bir $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}\big|_p$ sistemini düşünelim. Yani;

$$H = S_p\{\vec{E_1}(p), \vec{E_2}(p), \vec{E_3}(p)\} \tag{1.5.2}$$

olsun.

Çizgiler uzayında artık noktaların hareketi yerine doğruların hareketi alınabilir. Bu sebeble uzayın en basit elemanı olarak doğruları alırız. Hareketli bir p noktasının $\overrightarrow{OP}$ yer vektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir $\vec{a}$ birim vektörü ile belirlenen doğrunun parametrik denklemi:



Şekil 1.5.1

$$\vec{Y} = \vec{X} + \lambda\vec{a} \tag{1.5.3}$$

şeklindedir. P noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması için, $\wedge$; vektörel çarpımı göstermek üzere,(1.4.13) den

$$\vec{a}^* = \vec{X}\wedge\vec{a} = \vec{Y}\wedge\vec{a} \tag{1.5.4}$$

vektörel momentini kullanarak,doğruyu $(\vec{a},\vec{a}^*)$ çifti ile belirliyebiliriz. $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ vektörlerinin bileşenlerine normlanmış Plücker doğru koordinatları denir ve (1.4.13) deki gibidir.

Çizgiler uzayında hareketleri üç gruba ayıracağız:

1) $(\vec{a},\vec{a}^*)$ doğrusunun H' sabit uzayına göre hareketi,

2) $(\vec{a},\vec{a}^*)$ doğrusunun H hareketli uzayına göre hareketi,

3) H hareketli uzayının H' sabit uzayına göre hareketi.

H nın H' uzayına göre 1-parametreli hareketine kısaca uzay hareketi diyerek H/H' ile göstereceğiz.

H/H' hareketini O noktası etrafında bir dönme ve O noktasına göre bir öteleme olmak üzere iki kısma ayırmak mümkündür:

Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid Koordinat sistemi, sırası ile, $\{x_1', x_2', x_3'\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ ise;

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1.5.5}$$

olmak üzere (1.2.1) den dolayı H/H' uzay hareketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada $A \in O(3)$, $C \in IR^3_1$ dir.

TANIM 1.5.1:

H/H' uzay hareketinin;

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in IR^3_1$ matrisleri

$$A = A(t) \qquad (1.5.6)$$

$$C = C(t) \qquad (1.5.7)$$

olacak şekilde bir tek reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine bir parametreli uzay hareketi denir [6].

TANIM 1.5.2:

H/H' uzay hareketini belirliyen $A \in O(3)$ ve $C \in IR^3_1$ matrisleri, $\forall t \in IR$ için

$$A(t+2\pi) = A(t) \qquad (1.5.8)$$

$$C(t+2\pi) = C(t) \qquad (1.5.9)$$

olacak şekilde peryodik iseler H/H' uzay hareketine kapalı, aksi halde açık hareket adı verilir [6].

H/H' uzay hareketinin değişimini incelemek için (1.4.3) ün diferensiyeli alınırsa

$$E = Ae \, , \quad A \in O(3)$$

olduğundan

$$dE = dA\, e + A\, de = dA\, e$$

elde edilir. Ayrıca

$$e = A^{-1}E \, , \quad A \in O(3) \Longrightarrow A^{-1} = A^T$$

olduğu için

$$e = A^T E$$

olacağından

$$dE = dA\, A^T E$$

bulunur. Bağ-formlarının $\Omega = dA\, A^T$ matrisini kullanarak

$$dE = \Omega E \tag{1.5.10}$$

yazılabilir.

Şimdi de hareketli uzayda bir $(\vec{a},\vec{a}^*)$ doğrusu düşünelim. $\vec{a}$ birim doğrultman vektörünü $\forall p \in H$ için,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{1.5.11}$$

olmak üzere

$$\vec{a} = a^T E \tag{1.5.12}$$

şeklinde yazalım. Doğrunun hareketinin değişimi için diferensiyel alırsak,

$$\vec{da} = da^T E + a^T dE,$$

ayrıca (1.5.10) dan dolayı,

$$\vec{da} = da^T E + a^T \Omega E$$

$$\vec{da} = (da + \Omega^T a)^T E \tag{1.5.13}$$

elde edilir. $(\vec{a},\vec{a}^*)$ doğrusu H hareketli uzayında sabit ise;

$$da = 0 \tag{1.5.14}$$

olacağından

$$\vec{da} = a^T \Omega E \tag{1.5.15}$$

bulunur. Eğer Ω matrisinin (1.4.10) daki ifadesinden bir $\vec{W}$ vektörünü

$$\vec{W} = (w_1, w_2, w_3) \tag{1.5.16}$$

şeklinde alacak olursak (1.5.15) ifadesi

$$\vec{da} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\vec{da} = \vec{W} \wedge \vec{a} \tag{1.5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\wedge$ vektörel çarpımı gösterir. Darboux dönme vektörünün rolünü oynayan $\vec{W}$ vektörüne H/H' hareketinin ani Pfaff vektörü denir.

TANIM 1.5.3 (Steiner Vektörü):

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir kapalı eğri olsun. Bir ortonormal çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$, eğriye sıkı bir şekilde bağlı ve ayrıca $\forall\ t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki hareketli çizgiler uzayı

$$H = S_p\{E_1, E_2, E_3\}_{\alpha(t)}$$

olsun. H/H' uzay hareketindeki $\vec{W}$ Pfaff Vektörünün α eğrisi boyunca eğrisel integrali ile belirtilen

$$\vec{D} = \oint \vec{W} \tag{1.5.18}$$

vektörüne H/H' hareketinin Steiner Vektörü denir [6].

TANIM 1.5.4 (Steiner Öteleme Vektörü):

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ diferensiyellenebilir kapalı bir eğri ve bu eğriye sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi H hareketli uzayı olarak seçilsin. $\vec{dX} \in T_H(\alpha(t))$ olduğundan

$$\vec{dX} = \sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2 + \sigma_3 E_3 \tag{1.5.19}$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir. α eğrisi boyunca eğrisel integrali ile belirtilen

$$\vec{V} = \oint \vec{dX} \tag{1.5.20}$$

vektörüne H/H' uzay hareketinin Steiner Öteleme Vektörü denir [6]

H hareketli uzayının, bir $\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisini çizen bir $\alpha(s)$ noktasına sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{\alpha(s)}$ Frenet çatı alanı olarak alalım. O zaman E^3 deki hareketli çizgiler uzayı olan H yı

$$H = S_p\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{\alpha(s)} \tag{1.5.21}$$

şeklinde düşünebiliriz.

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisinin s yay parametresine göre $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{\alpha(s)}$

sisteminin değişimini, (1.5.10) daki Ω matrisinde $w_1 = k_2$, $w_2 = 0$ ve $w_3 = k_1$ olmak üzere teşkil edersek,

$$R = \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} , \quad A \quad O(3) \text{ için}$$

$$R = Ae \qquad e = A^T R , \quad A^T = A^{-1}$$

dir. Buradan

$$dR = dA\, e$$

veya $dR = dA\, A^T R$

olur. Teorem (1.4.4) den $\Omega = dA\, A^T$ olduğundan,

$$dR = \Omega\, R$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} d\vec{T} \\ d\vec{N} \\ d\vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (1.5.22)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada k_1 ve k_2 sırası ile r eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

1.6 ŞERİTLER TEORİSİ

TANIM 1.6.1

E^3 de bir yüzey M ve M üzerinde bir eğri

$$r : I \longrightarrow M \subset E^3$$
$$s \longrightarrow \vec{r}(s)$$

olmak üzere $\{ r(I), M \} = \{$ eğri , yüzey $\}$ ikilisine bir şerit adı verilir ve kısaca

$$\{ \vec{r}(s) \, , \, \vec{\xi}(s) \}$$

ile gösterilir. Burada $\vec{\xi}(s)$, M yüzeyinin r(I) eğrisi boyunca birim normalini ve s de eğrinin yay-parametresini göstermektedir. Bir şeride ait türev deklemleri şöyledir:

$$\frac{d\vec{\xi}}{ds} = 0.\vec{\xi} + c\vec{\eta} + -b\vec{\zeta}$$

$$\frac{d\vec{\eta}}{ds} = -c\vec{\xi} + 0\vec{\eta} + a\vec{\zeta} \qquad (1.6.1)$$

$$\frac{d\vec{\zeta}}{ds} = b\vec{\xi} + -a\vec{\eta} + 0\vec{\zeta}$$

Burada

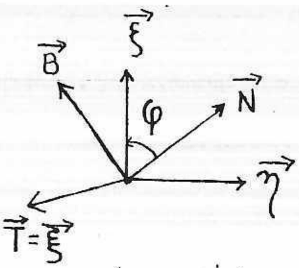
$$\vec{\xi} = \frac{dr}{ds} = T \quad \text{ve} \quad \vec{\eta} = \vec{\zeta} \wedge \vec{\xi}$$

dir ve a,b,c şerit eğrilikleridir. Bir şeride ait $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ birim vektörleriyle, bu şeridin eğrisine ait $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ Frenet vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\vec{T} = \vec{\xi}$$

$$\vec{N} = \frac{c\vec{\eta} + -b\vec{\zeta}}{\sqrt{b^2 + c^2}} \qquad (1.6.2)$$

$$\vec{B} = \frac{c\vec{\xi} + b\vec{\eta}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$



(Şek.1.6.1)

Ayrıca (Şek.1.6.1) den görüldüğü gibi,

$$\langle \vec{\zeta}, \vec{N} \rangle = \cos\varphi \ ,$$

$$\langle \vec{\eta}, \vec{N} \rangle = \sin\varphi \qquad (1.6.3)$$

olmak üzere a, b, c şerit eğrilikleriyle eğrinin k_1, k_2 eğrilikleri arasında,

$$b = -k_1 \cos\varphi$$

$$c = k_1 \sin\varphi \qquad (1.6.4)$$

bağıntıları da mevcuttur. Burada b ve c şerit eğriliklerinin geometrik yorumu şöyle verilebilir:

Şeridin b normal eğriliği, eğrinin k_1 eğriliğinin normal düzlem üzerindeki izdüşümüne eşittir. Bir başka ifade ile b, şerit eğrisinin normal düzlem üzerindeki izdüşümünün eğriliğine eşittir.

Şeridin c geodezik eğriliği, eğrinin k_1 eğriliğinin teğet düzlem üzerindeki izdüşümüne eşittir. Veya, şerit eğrisinin teğet düzlem üzerindeki izdüşümünün eğriliğine eşittir.

TANIM 1.6.2

a, b, c şerit eğrisinin eğrilikleri olmak üzere,

a = 0 ise eğrilik şeridi elde edilir.

b = 0 ise oskülatör şerit elde edilir.

c = 0 ise geodezik şerit elde edilir.

$\{\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}\}$ şerit 3-ayaklı alanının elemanlarını, eğrinin $\vec{T}$, $\vec{N}, \vec{B}$ Frenet elemanları cinsinden şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}\vec{\xi} &= \vec{T} \\ \vec{\eta} &= \sin\varphi\, \vec{N} - \cos\varphi\, \vec{B} \\ \vec{\zeta} &= \cos\varphi\, \vec{N} + \sin\varphi\, \vec{B}.\end{aligned} \qquad (1.6.5)$$

2.BÖLÜM

REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

TANIM 2.1.1

Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir. Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$r: I \longrightarrow E^3$$
$$t \longrightarrow \vec{r}(t)$$

eğrisi seçilir ve regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak bilinir. M regle yüzeyinin r dayanak eğrisinin $\vec{r}(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişen bir nokta

$$\beta : R \longrightarrow M$$
$$v \longrightarrow \vec{\beta}(v) = \vec{r}(t) + v\,\vec{a}(t) \qquad (2.1.1)$$

şeklindedir, burada $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey,

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$
$$\vec{\varphi}(t,v) = (\, r_1(t) + v\, a_1(t), r_2(t) + v\, a_2(t), r_3(t) + v\, a_3(t))$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur. Böylece $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ sistemi M regle yüzeyi için bir atlastır.

TANIM 2.1.2

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$
$$\varphi(t,v) \longrightarrow \varphi(t,v) = \vec{r}(t) + v\,\vec{a}(t) \qquad (2.1.2)$$

regle yüzeyi $\forall\, t \in I$ için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t,v)$$

olacak şekilde peryodik ise regle yüzeye kapalıdır denir. Buradan görülür ki v nin sabit bırakılmasıyla elde edilen t-parametre eğrisi(dayanak eğrisi) kapalı bir eğridir.

TANIM 2.1.3

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

TANIM 2.1.4

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz noktası adı verilir.

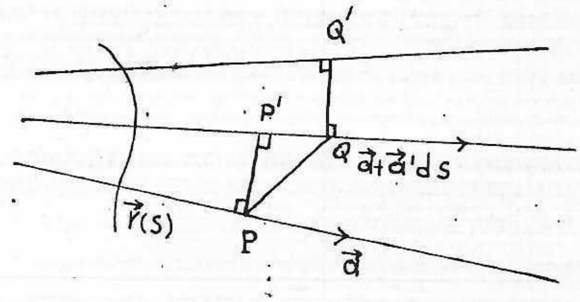
TANIM 2.1.5

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca H/H' uzay hareketinde boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\bar{r}}(s)$ yer vektörü, dayanak eğrisinin $\vec{r}(s)$ yer vektörü, $\vec{a}(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\vec{\bar{r}}(s,\bar{u})=\vec{r}(s)+\bar{u}\,\vec{a}(s) \qquad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{a}(s)$ ve $\vec{a}(s)+d\vec{a}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin Şekil(2.1.1).



(Şek.2.1.1)

P,P' VE Q,Q' komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrusunun ortak dikmesi

$$\vec{a}(s)\wedge(\vec{a}(s)+\vec{a}'(s)\,ds)=\vec{a}(s)\wedge\vec{a}'(s)\,ds \qquad (2.1.4)$$

bağıntısından dolayı $\vec{a}\wedge\vec{a}'$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\vec{PQ}$ vektörü $\vec{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır.Dolayısıyle

$$\langle\vec{a},\vec{PQ}\rangle=0\ ,\ \langle\vec{a}+\vec{a}'\,ds,\ \vec{PQ}\rangle=0 \qquad (2.1.5)$$

olacağından

$$\langle\vec{a}',\ \vec{PQ}\rangle=0 \qquad (2.1.6)$$

elde edilir.Ayrıca (2.1.3) den dayanak eğrisinin s-yayparametresine göre türevi alınırsa ve (2.1.5) den dolayı,

$$\left\langle\frac{d\vec{a}}{ds},\frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}\right\rangle=0 \qquad (2.1.7)$$

$$\left\langle\frac{d\vec{a}}{ds},\ \vec{T}+\frac{d\bar{u}}{ds}\vec{a}+\bar{u}\frac{d\vec{a}}{ds}\right\rangle=0$$

$$\langle\vec{a}',\vec{T}\rangle+\bar{u}\,\|\vec{a}'\|^2=0 \qquad (2.1.8)$$

bulunur.Böylece strikisyon eğrisinin yer vektörü için (2.1.3) den

$$\vec{\overline{r}}(s)=\vec{r}(s)-\frac{\langle \vec{a}', \vec{T}\rangle}{\|\vec{a}'\|^2}\vec{a}(s) \qquad (2.1.9)$$

elde edilir. Eğer $\|\vec{a}'\| = 0$ ise regle yüzey strikisyon çizgisine sahip değildir.

$$\|\vec{a}'\|= 0 \Longrightarrow \vec{a}' = \vec{0}$$
$$\Longrightarrow \vec{a} = \text{sabit}$$

olacağından bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için strikisyon eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (2.1.8) formülünde

$$\overline{u}=0, \qquad \langle \vec{a}',\vec{T}\rangle = 0 \qquad (2.1.10)$$

alınması yeterlidir.

TANIM 2.1.6

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teget düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilirdir denir.

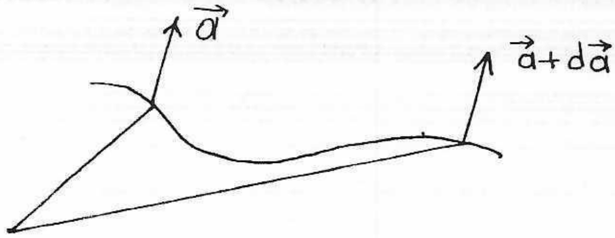
TANIM 2.1.7

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir regle yüzeyin dralini P_a ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki bir vektör (2.1.4) den dolayı $\vec{a}\wedge\vec{a}'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$$

dir.



(Şek.2.1.2)

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{r}(s)$ ve $\vec{r}(s)+d\vec{r}(s)$ olduğundan bu noktalar arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{r}$ vektörünün $\dfrac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklığı,

$$l = \left\langle d\vec{r}, \frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|a'\|} \right\rangle ,$$

$$l = \frac{\det[\, d\vec{r}, \vec{a}, \vec{a}']}{\|\vec{a}'\|} \qquad (2.1.11)$$

olarak buluruz. Eğer anadoğruların küresel göstergelerini gözönüne alacak olursak, bu göstergenin yay elementi olan

$$d\psi = \left\| \frac{d\vec{a}}{ds} \right\| ds \qquad (2.1.12)$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_a = \frac{l}{d\psi}$$

$$P_a = \frac{\det[\, d\vec{r}, \vec{a}, \vec{a}']}{\|a'\|} : \|\vec{a}'\|\, ds$$

$$P_a = \frac{\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|^2} \qquad (2.1.13)$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır [8].

TEOREM 2.1.1

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat:

1) $\Rightarrow$:

Regle yüzeyin açılabilir olması için anadoğrular boyunca teğet düzlemin, dolayısıyle yüzey normallerinin aynı kalması gerekir. Regle yüzeyin

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\,\vec{a}(s)$$

denkleminden s ve v parametrelerine göre kısmî türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_s &= \vec{T} + v\,\vec{a}'(s) \\ \vec{\varphi}_v &= \vec{a}(s) \end{aligned} \qquad (2.1.14)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v &= (\vec{T} + v\,\vec{a}')\wedge\vec{a} \\ \vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v &= \vec{T}\wedge\vec{a} + v\,\vec{a}'\wedge\vec{a} \end{aligned} \qquad (2.1.15)$$

ve ayrıca yüzey normali

$$\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v\|} \qquad (2.1.16)$$

olduğundan $\vec{n}$ nin değişmemesi için v parametresinden bağımsız olması gerekir. Bu sebeple (2.1.5) deki $\vec{T} \wedge \vec{a}$ ve $\vec{a}' \wedge \vec{a}$ vektörlerinin lineer bağımlı olması lâzımdır. Böylece

$$(\vec{T} \wedge \vec{a}) \wedge (\vec{a}' \wedge \vec{a}) = 0 ,$$

$$\vec{a}(\det[\vec{T}, \vec{a}', \vec{a}]) - \vec{T}(\det[\vec{a}, \vec{a}', \vec{a}]) = 0$$

$$\vec{a}(\det[\vec{T}, \vec{a}', \vec{a}]) = 0 ,$$

$$\det[\vec{T}, \vec{a}', \vec{a}] = 0$$

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = 0$$

veya

$$P_a = 0$$

elde edilir.

2) $\Longleftarrow$:

Tersine hareket ederek $P_a = 0$ ise regle yüzey normallerinin doğrultman boyunca aynı kalacağı, dolayısıyle regle yüzeyin açılabilir olduğu görülür.

NETİCE 2.1.1

Regle yüzeyin açılabilir olması için $\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v$ nin anadoğrular boyunca sabit kalması gerekir. Bunun için (2.1.15) denkleminin v-li teriminin olmaması gerekir. Bunun için $\vec{a}(s) = (a_1, a_2, a_3) =$ st. vektör olması hali ele alınabilir. Bir eğriye dayalı ve sabit bir doğrultuya paralel olarak hareket eden doğrular bir silindir meydana getireceğinden, $\vec{a}(s) =$ st. olması hali bu regle yüzeyin bir silindir olması haline karşılık gelecektir. Dolayısıyle bir silindir açılabilir regle yüzeydir.

NETİCE 2.1.2

Açılabilir regle yüzeyler için dralin sıfr olması (2.1.11) deki komşu anadoğrular arasındaki en kısa l uzaklığının sıfır olmasını, yani bu anadoğruların kesişmesini gerektirir. Dolayısıyle bir koni için $P_a = 0$ olacağından bir koni de açılabilir bir regle yüzeydir.

2.2 REGLE YÜZEYLERİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI

2.2.1 AÇILIM UZUNLUĞU

$H = Sp\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ ve $H' = Sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ sabit çizgiler uzayı olmak üzere H' deki her bir eğri bir uzay hareketi belirtir. Bu hareket H/H' ile gösterilir. Hareketi veren eğri kapalı ise H/H' de kapalı uzay hareketi olur. H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında tesbit edilen her doğru H' de kapalı bir regle yüzey çizer. Bir

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\,\vec{a}(s)$$

regle yüzeyinin anadoğrularının dik yörüngeleri için

$$\langle \vec{a}, d\vec{\varphi} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, d\vec{r} + dv\,\vec{a} + v\,d\vec{a} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle + dv\,\|\vec{a}\|^2 = 0$$

$$-dv = \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle \qquad (2.2.1)$$

bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa

$$L_a = \oint_{(r)} \langle d\vec{r}, \vec{a} \rangle = -\oint_{(r)} dv \qquad (2.2.2)$$

elde edilir. Burada

$$L_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanmış olan L_a fonksiyonuna regle yüzeyin açılım uzunluğu (Adımı) denir.

Açılım uzunluğu regle yüzeylerin bir integral invaryantıdır[6]. Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri gözönüne alınırsa adım hiç bir zaman regle yüzeyin strikisyon eğrisinin uzunluğunu aşamaz[9], fakat eşitlik hali her zaman mümkündür. Eger regle yüzeyi kapalı ve açılabilir farzeder, dayanak eğrisinide strikisyon çizgisi olarak alırsak, $S_{\bar{r}}$ strikisyon çizgisinin uzunluğu olmak üzere

$$L_a = S_{\bar{r}} \qquad (2.2.3)$$

elde edilir. Diğer yandan bu özelik regle yüzeyin açılabilir olması için bir karakterizasyondur, bunu bir teorem ile verelim.

TEOREM 2.2.1.

Açılabilir kapalı bir regle yüzeyin açılım uzunluğu bu regle yüzeyin strikisyon eğrisinin uzunluğuna eşittir.

İspat:

Kapalı bir regle yüzey φ (s,v) ve bu regle yüzeyin dayanak eğrisi r olsun. Ayrıca anadoğrularının küresel göstergesi J olsun. J ve r eğrileri basit irtibatlı eğriler olsun. Regle yüzeyin açılım uzunluğu L_a olmak üzere (2.2.2) geregince

$$L_a = \oint_{(r)} \langle d\vec{r}, \vec{a} \rangle \qquad (2.2.4)$$

dir. Regle yüzeyin strikisyon çizgisi $\bar{r}$, $\bar{r}$ nin uzunluğu $S_{\bar{r}}$ olsun. O zaman (2.2.4) formülü

$$L_a = \oint_{(\bar{r})} \langle d\vec{\bar{r}}, \vec{a} \rangle \qquad (2.2.5)$$

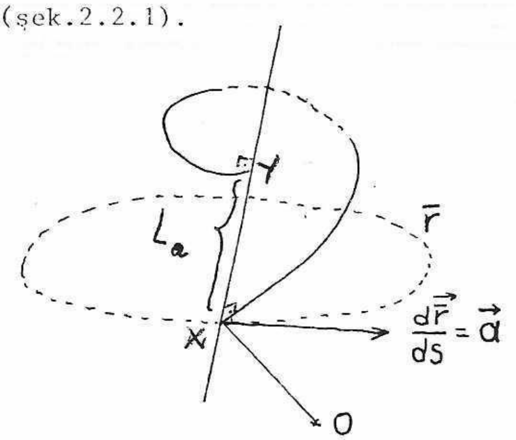
olur. Ayrıca L_a nın

$$L_a = S_{\bar{r}}$$

sınır şartını sağladığı bilinmektedir [9] . Eger regle yüzey açılabilir ise, regle yüzeyin strikisyon çizgisi ile sırt eğrisi aynı eğri olacaklarından dolayı, $\bar{r}$ nin yay-uzunluğu s olmak üzere

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \qquad (2.2.6)$$

alınabilir (şek.2.2.1).



(Şek.2.2.1)

Bu durumda (2.2.5) formülünden

$$L_a = \oint_{(\bar{r})} \left\langle d\vec{\bar{r}}, \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \right\rangle \quad (2.2.7)$$

$$L_a = \oint_{(\bar{r})} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \right\rangle ds \quad (2.2.8)$$

ve $\left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \right\rangle = 1$ olduğundan

$$L_a = \oint_{(\bar{r})} ds \quad (2.2.9)$$

$$L_a = S_{\bar{r}} \quad (2.2.10)$$

elde edilir ki ispat biter.

Şimdi, verilen bu teoremin kapalı açılabilir regle yüzeyler için bir karakterizasyon olduğunu bir teorem ile verelim:

TEOREM 2.2.2

Kapalı bir R regle yüzeyinin L_a adımı onun strikisyon çizgisinin $S_{\bar{r}}$ uzunluğuna eşit ise regle yüzey açılabilirdir.

İspat:

Yukarıdaki notasyonlara bağlı kalmak üzere,

$$L_a = S_{\bar{r}} = \oint_{(\bar{r})} \langle d\vec{\bar{r}}, \vec{a} \rangle$$

dir. Bu ifade

$$S_{\bar{r}} = \oint_{(\bar{r})} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \vec{a} \right\rangle ds \quad (2.2.11)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan

$$S_{\bar{r}} = \oint_{(\bar{r})} ds = \oint_{(\bar{r})} \frac{ds^2}{ds}$$

$$S_{\bar{r}} = \oint_{(\bar{r})} \frac{\langle d\vec{\bar{r}}, d\vec{\bar{r}} \rangle}{ds} = \oint_{(\bar{r})} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \right\rangle ds \quad (2.2.12)$$

olduğundan (2.2.11) ifadesi

$$\oint_{(\bar{r})} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \vec{a} \right\rangle ds = \oint_{(\bar{r})} \frac{\langle d\vec{\bar{r}}, d\vec{\bar{r}} \rangle}{ds^2} ds \quad (2.2.13)$$

veya

$$\oint_{(\bar{r})} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \vec{a} \right\rangle ds - \oint_{\bar{r}} \left\langle \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds}, \frac{d\vec{\bar{r}}}{ds} \right\rangle ds \quad 0$$

ya da

$$\left\langle \vec{a}-\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right\rangle ds = 0 \qquad (2.2.14)$$

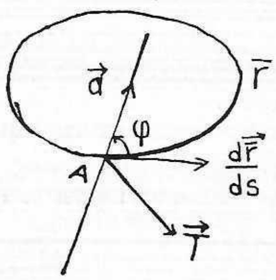
elde edilir. s, $\bar{r}$ nin yay-parametresi olduğu için $\frac{d\vec{r}}{ds}$, $A \in r$ noktasında regle yüzeyin tangent düzleminde yatan bir birim vektördür. A noktasında $\vec{a}$ anadoğrusuna dik olan bir birim vektör (teğet) $\vec{T}$ ise, $\vec{a}$, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ve $\vec{T}$ aynı düzlemdedirler ve dolayısıyle

$$T_R(A) = Sp\{\vec{T}, \vec{a}\}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \cos\varphi\, \vec{a} + \sin\varphi\, \vec{T}$$

olur(Şek.2.2.2).



(Şek.2.2.2)

Burada $\varphi = \varphi(s)$, s nin bir periyodik fonksiyonu olup, peryodu $S_{\bar{r}}$ dir. O zaman

$$\vec{a} - \frac{d\vec{r}}{ds} = (1 - \cos\varphi)\vec{a} - \sin\varphi\, \vec{T} \qquad (2.2.15)$$

$$\left\langle \vec{a} - \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right\rangle = (1-\cos\varphi)\cos\varphi - \sin^2\varphi$$

$$= \cos\varphi - 1(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$= \cos\varphi - 1 \qquad (2.2.16)$$

Böylece (2.2.14) ifadesi

$$\oint_{(\bar{r})} (\cos\varphi - 1)\, ds = 0 \qquad (2.2.17)$$

şekline dönüşür.

$$-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1$$

olduğundan

$$-2 \leqq \cos\varphi - 1 \leqq 0$$

olur. A noktası r üzerinde r yi çizerken s-parametresi de monoton artar. Bunun için s ye A noktasının monoton artan bir fonksiyonu gözüyle bakabiliriz. Bundan dolayıdır ki (2.2.17) deki integralin alt sınırı $\cos\varphi - 1 \leqq 0$ ve ds işaret değiştirmediğinden (2.2.17) integralinin özdeş olarak sıfır olması ancak

$$(\cos\varphi - 1)\, ds = 0 \qquad (2.2.18)$$

olması ile mümkündür. Buradan da

$$\cos\varphi - 1 = 0 \qquad (2.2.19)$$

veya

$$ds = 0 \qquad (2.2.20)$$

olur. Eğer

$$\cos\varphi = 1$$

ise $\varphi = 0$ olur, böylece

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (2.2.21)$$

olması gerekir. Bu ise regle yüzeyin açılabilir olması demektir

$$ds = 0$$

olması halinde ise

$$S_r = \oint_{(\vec{r})} 0 = 0 \qquad (2.2.22)$$

olacağından $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin strikisyon eğrisinin bir nokta olması gerekir. Bu ise regle yüzeyin bir koni (açılabilir bir regle yüzey) olması demektir. Böylece teoremin ispatı biter.

2.2.2 AÇILIM AÇISI

TANIM 2.2.1

Anadoğrusunun birim doğrultmanı $\vec{a}$ olan bir $\varphi(s,v)$

regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrunun bir peryod sonra ilk konumuyla yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir, λ_a ile gösterilir (Şek. 2.2.3).

$\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin $\vec{a}$ doğrultman vektörünü

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(s)$$

şeklinde bir ortonormal 3-ayaklının ilk bileşeni olarak alalım. Doğrultmana dik olan vektörü $\vec{a}_2$ birim vektörü olarak alırsak,

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \qquad (2.2.23)$$

şeklinde $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ortonormal sistemini teşkil etmiş oluruz. Böylece regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden H hareketli uzayını

$$H = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \Big| \vec{r}(s)$$

olarak alabiliriz. Bir tam dönmeden sonra doğrultmanın ilk ve son konumları aynı olacağından $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_1$ ile gösterilen bu konumlar için

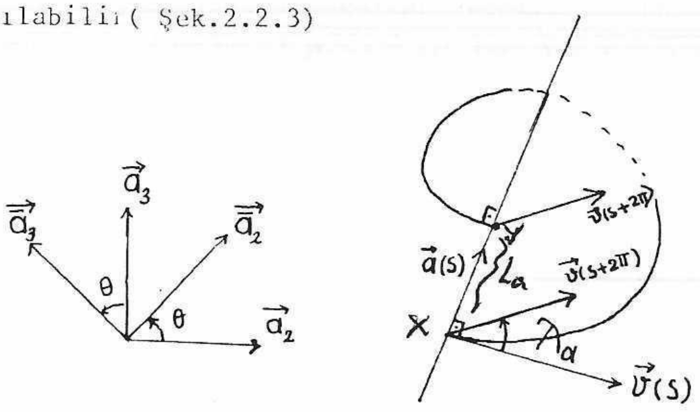
$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1 \qquad (2.2.24)$$

elde edilir. Aynı şekilde 3-ayaklının diğer vektörlerinin ilk ve son konumlarını, sırayla $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ ve $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ ile gösterelim. Böylece sabit sistemi $\{\vec{r}(s_0); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ve hareketli sistemi de $\{\vec{r}(s); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ şeklinde alalım. İkinci ve üçüncü eksenlerin ilk ve son konumları arasındaki açı θ ise, bu takdirde

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cos\theta - \vec{a}_3 \sin\theta$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_2 \sin\theta + \vec{a}_3 \cos\theta \ , \quad \theta = \theta(s) \qquad (2.2.25)$$

yazılabilir (Şek.2.2.3)



(şek.2.2.3)

H/H' hareketinin değişimi için diferansiyel alınırsa,

$$d\vec{a}_2 = d\vec{a}_2 \cos\theta - d\vec{a}_3 \sin\theta + (-\vec{a}_2 \sin\theta - \vec{a}_3 \cos\theta) d\theta$$

$$d\vec{a}_3 = d\vec{a}_2 \sin\theta + d\vec{a}_3 \cos\theta + (\vec{a}_2 \cos\theta - \vec{a}_3 \sin\theta) d\theta \qquad (2.2.26)$$

elde edilir. $\vec{a}_2$ ve $\vec{a}_3$ sabit sistemde olduklarından dolayı,

$$d\vec{a}_2 = d\vec{a}_3 = \vec{0} \qquad (2.2.27)$$

bulunur. Dolayısiyle

$$d\vec{a}_2 = (-\vec{a}_2 \sin\theta - \vec{a}_3 \cos\theta) d\theta$$

$$d\vec{a}_3 = (\vec{a}_2 \cos\theta - \vec{a}_3 \sin\theta) d\theta$$

olacağından (2.2.5) den dolayı

$$d\vec{a}_2 = -\vec{a}_3 \, d\theta$$

$$d\vec{a}_3 = \vec{a}_2 \, d\theta \qquad (2.2.28)$$

olur. Buradan $d\theta$ çözülürse,

$$-d\theta = \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = - \langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \qquad (2.2.29)$$

elde edilir. Eğer (2.2.9) un, $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak, açılım açısının λ_a değeri

$$\lambda_a = - \oint_{(r)} d\theta \qquad (2.2.30)$$

$$\lambda_a = - \oint_{(r)} \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = - \oint_{(r)} \langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \qquad (2.2.31)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\{\vec{r}(s); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ sisteminin değişimi için (1.5.10) daki Ω matrisi kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} d\vec{a}_1 \\ d\vec{a}_2 \\ d\vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \qquad (2.2.32)$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = - \langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle = w_1 \qquad (2.2.33)$$

ve açılım açısı için,

$$\lambda_a = \oint_{(r)} w_1 \qquad (2.2.34)$$

elde edilir. Diğer yandan H/H' hareketinin (1.5.18) de tanımlanan $\vec{D}$ Steiner vektörü için,

$$\vec{D} = \oint_{(r)} (w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3)$$

ve dolayısıyle

$$\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{D}, \vec{a}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle = \oint w_1$$

elde edilir. (2.2.34) formülünden dolayı regle yüzeyin açılım açısı için

$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle \qquad (2.2.35)$$

ifadesi bulunur. Ayrıca H/H' hareketinin (1.5.10) daki steiner öteleme vektörü,

$$\vec{V} = \oint_{(r)} d\vec{r}$$

kullanılarak (2.2.2) deki açılım uzunluğu için

$$L_a = \langle \vec{V}, \vec{a} \rangle \qquad (2.2.36)$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz:

TEOREM 2.2.3

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir kapalı regle yüzeyin L_a açılım uzunluğu ve λ_a açılım açısı sırası ile H/H' uzay hareketinin steiner öteleme vektörü $\vec{V}$ ve steiner vektörü $\vec{D}$ üzerindeki dik izdüşümlerine eşittir, yani

$$L_a = \langle \vec{V}, \vec{a} \rangle$$

$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle \qquad (2.2.37)$$

dir.

Açılım açısı da regle yüzeyler için bir integral invaryanttır. Diğer taraftan regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca H/H' hareketinde H hareketli uzayını (1.5.21) deki gibi

$$H = Sp\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{r(s)}$$

olarak seçelim. Bu durumda hareketin steiner vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(r)} (k_2\vec{T} + k_1\vec{B})\, ds \qquad (2.2.38)$$

bulunur. Burada $\vec{T}$, $\vec{B}$ sırasiyle dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı ve binormal vektör alanıdır, k_1 ve k_2 ise dayanak eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyi verilsin. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak strikisyon eğrisini alalım. Strikisyon eğrisinin hareketli

Frenet üçlüsünde tesbit edilmiş bir doğru $\vec{a}$ olsun. $\vec{a}$ doğrusunun H/H' hareketinde H' de çizmiş olduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\vec{T} = \vec{a}$$

olmasıdır. Buna göre regle yüzeyin λ_a açılım açısı (2.2.37) gereğince

$$\lambda_T = \lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{T} \rangle$$

veya

$$\lambda_T = \lambda_a = \oint_{(r)} k_2 \, ds. \qquad (2.2.39)$$

elde edilir ki böylece şu teoremi verebiliriz:

TEOREM 2.2.4

Bir kapalı açılabilir regle yüzeyin açılım açısı onun strikisyon eğrisinin toplam burulmasına eşittir.

Kapalı küresel bir eğrinin toplam burulması sıfırdır. Tersine bir yüzey üzerindeki bütün kapalı eğrilerin toplam burulmaları sıfır ise bu yüzey bir küredir[6].

Eğer açılabilir bir regle yüzeyin strikisyon eğrisi küresel bir kapalı eğri ise (2.2.39) dan dolayı

$$\lambda_a = \lambda_T = 0$$

elde edilir. Ayrıca $\vec{a}=\vec{T}$ ve $\vec{a}=\vec{B}$ almakla elde edeceğimiz regle yüzeyler için,

$$\lambda_T = \oint_{(r)} k_2 \, ds \quad \text{ve} \quad \lambda_B = \oint_{(r)} k_1 \, ds$$

bulunacağından, $\vec{a} = a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B}$ alırsak, (2.2.35) gereğince

$$\lambda_a = a_1 \lambda_T + a_3 \lambda_B \qquad (2.2.40)$$

elde edilir. Dolayısıyle $\lambda_a = 0$ ise (2.2.40) dan dolayı

$$0 = a_1 \lambda_T + a_3 \lambda_B ,$$

$$a_1 \oint k_2 \, ds - a_3 \oint k_1 \, ds = 0 \qquad (2.2.41)$$

$$a_3 \oint k_1 \, ds = 0$$

bulunur. Burada, $a_3 = 0$ ise $\vec{a} = \vec{T}$ olacağından regle yüzey açılabilir olacaktır. $\oint k_1 \, ds = 0$ ise, $ds = 0$ olacağından strikisyon eğrisi bir nokta - dan ibaret olur. Dolayısıyla regle yüzey bir koni olacağından yine açılabilir bir regle yüzey olacaktır[6].

3. BÖLÜM

BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLERİN AÇILIM İNVARYANTLARI

3.1. DAYANAK EĞRİSİ, KAPALI KÜRESEL BİRER EĞRİ OLAN REGLE YÜZEYLERİN AÇILIM İNVARYANTLARI:

$\varphi(s,v)$ ile gösterdiğimiz kapalı regle yüzeyin dayanak eğrisinin yay-parametresi s, doğrultman vektörü $\vec{a}$ olsun. Regle yüzeyin kapalı ve küresel

$$r : I \longrightarrow E^3$$

dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinin Steiner Vektörü (2.2.38) de olduğu gibi

$$\vec{D} = \vec{T} \oint_{(r)} k_2\, ds + \vec{B} \oint_{(r)} k_1\, ds \qquad (3.1.1)$$

dir. Dayanak eğrisinin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörlerinin ve

$$\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$$

Darboux Vektörünün H/H' hareketi esnasında dayanak eğrisi boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin açılım açıları, sırasıyle, (2.2.37) gereğince,

$$\lambda_T = \langle \vec{D}, \vec{T} \rangle,$$

$$\lambda_T = \oint_{(r)} k_2\, ds \qquad (3.1.2)$$

$$\lambda_T = 0$$

$$\lambda_N = \langle \vec{D}, \vec{N} \rangle,$$

$$\lambda_N = \langle \vec{T} \oint_{(r)} k_2\, ds + \vec{B} \oint_{(r)} k_1\, ds\, , \vec{N} \rangle$$

$$\lambda_N = 0 \qquad (3.1.3)$$

$$\lambda_B = \langle \vec{T} \oint_{(r)} k_2 ds + \vec{B} \oint_{(r)} k_1\, ds\, , \vec{B} \rangle$$

$$\lambda_B = \oint_{(r)} k_1\, ds \qquad (3.1.4)$$

$$\lambda_W = k_1 \oint_{(r)} k_1\, ds$$

dir. Benzer şekilde bu regle yüzeylerin açılım uzunlukları da sırasıyle

$$L_T = \oint_{(r)} \langle d\vec{r}, \vec{T} \rangle,$$

$$L_T = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\, ds, \vec{T} \rangle = \oint_{(r)} ds \qquad (3.1.5)$$

$$L_N = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\, ds\, , \vec{N} \rangle = 0$$

$$L_B = 0$$

$$L_W = k_2 \oint_{(r)} ds \tag{3.1.6}$$

dir. (2.2.38), (3.1.2) ve (3.1.4) bağıntıları yardımıyla

$$\vec{D} = \lambda_T \vec{T} + \lambda_B \vec{B} \tag{3.1.7}$$

bulunur ki bunun sonucu olarak şu teoremi ifade edebiliriz:

TEOREM 3.1.1

Kapalı bir regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet 3-ayaklısının hareketinde, hareketin steiner vektörünün bileşenleri bu 3-ayaklının ayaklarının temsil ettikleri doğruların çizdikleri regle yüzeylerin açılım açılarından ibarettir.

Şimdi de $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sistemine sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden bir $\vec{a}$ doğrusunun çizmiş olduğu regle yüzeyi düşünelim. $\vec{a}$ vektörü bu sisteme göre tek türlü olarak

$$\vec{a} = a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B}\, , \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{3.1.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda a_i ,(i 1,2,3) bileşenleri H da sabittirler. $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım açısını hesaplayalım. (2.2.37), (3.1.7) ve (3.1.8) eşitliklerinden dolayı açılım açısı,

$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle$$

$$\lambda_a = \langle \lambda_T\vec{T} + \lambda_B\vec{B}\, , a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B} \rangle ,$$

$$\lambda_a = \lambda_T a_1 + \lambda_B a_3$$

elde edilir. Burada şu teoremleri verebiliriz:

TEOREM 3.1.2

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir doğrunun H' de çizmiş olduğu regle yüzeyin açılım açısı, seçilen doğrunun asli normal doğrultusundaki bileşeninden bağımsızdır.

TEOREM 3.1.3

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde, H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ile harekete katılan $\vec{T}$, $\vec{B}$ vektörleriyle belli olan doğruların H' de çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında,

$$\lambda_a = a_1\lambda_T + a_3\lambda_B \qquad (3.1.9)$$

lineer bağıntısı vardır.

Benzeri şekilde $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin L_a açılım uzunluğu için, (2.2.4) den dolayı,

$$L_a = \oint_{(r)} \langle d\vec{r}, \vec{a} \rangle,$$

$$L_a = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\, ds, a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B} \rangle$$

$$L_a = a_1 \oint_{(r)} ds \qquad (3.1.10)$$

ve ayrıca (3.1.5) den dolayı,

$$L_a = a_1 L_T \qquad (3.1.11)$$

elde edileceğinden, şu teorem verilebilir:

TEOREM 3.1.4

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu, hareketi belirten r eğrisinin $\vec{T}$ teğetinin çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu ile $\vec{a}$ doğrusunun teğet yönündeki bileşeninin çarpımıdır.

Diğer taraftan $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için, regle yüzeyin dralinin sıfır olması gerektiğinden, (2.1.13) den dolayı,

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = 0$$

olmalıdır. (3.1.18) ifadesinden türev hesaplanırsa,

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = -a_2k_1\vec{T} + (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N} + a_2k_2\vec{B}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \vec{a} = \vec{T} \wedge \vec{a},$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \vec{a} = a_2\vec{B} - a_3\vec{N} \qquad (3.1.12)$$

olduğundan

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\ \vec{a},\ \frac{d\vec{a}}{ds}\right]=\left\langle \vec{T}\wedge\vec{a},\ \frac{d\vec{a}}{ds}\right\rangle$$

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\ \vec{a},\ \frac{d\vec{a}}{ds}\right]=\left\langle a_2\vec{B}-a_3\vec{N},\ \frac{d\vec{a}}{ds}\right\rangle$$

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\ \vec{a},\ \frac{d\vec{a}}{ds}\right]=a_2^{\,2}k_2-a_3(a_1k_1-a_3k_2)=0 \qquad (3.1.13)$$

$$(a_2^{\,2}+a_3^{\,2})k_2-a_1a_3k_1=0$$

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}{a_1\,a_3}\ ,\quad a_1^2+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}=1 \qquad (3.1.14)$$

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-a_1^{\,2}}{a_1a_3}\ , \qquad (3.1.15)$$

Ayrıca (3.1.9) ve (3.1.11) den a_1 ve a_3 çözülecek olursa

$$a_1=\frac{L_a}{L_T}$$

$$\lambda_a=\frac{L_a}{L_T}\lambda_T+a_3\lambda_B$$

$$a_3=\frac{\lambda_a L_T-L_a\lambda_T}{L_T\lambda_B}$$

elde edilir. a_1 ve a_3 ün bu değerleri (3.1.15) de yerine yazılacak olursa,

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{(L_T^{\,2}-L_a^{\,2})\,\lambda_B}{(\lambda_a L_T-L_a\lambda_T)L_a}$$

bulunur. Diğer taraftan $\vec{a}$ doğrusu $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sisteminde sabit bir doğru olduğundan bu sisteme göre bileşenleri olan a_1,a_2,a_3 de sabit olacak ve dolayısıyle (3.1.15) den

$$h=\frac{k_1}{k_2}=st$$

elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir:

TEOREM 3.1.5

Hareketli $H=Sp\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ uzayının sabit H' uzayına göre kapalı bir parametreli H/H' hareketinde, H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart bu regle yüzeyin dayanak eğrisinin harmonik eğriliği,

$$h = \frac{k_1}{k_2} = \frac{(\lambda_T^2 - L_a^2)\lambda_B}{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T) L_a}$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır.

3.2. KAPALI VE KÜRESEL BİR EĞRİ BOYUNCA TANIMLANAN, BİR PARAMETRELİ H/H' KAPALI UZAY HAREKETİNDE KÜRESEL GÖSTERGELER BOYUNCA OLUŞAN BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER VE BUNLARIN AÇILIM İNVARYANTLARI

3.2.1 Kapalı ve küresel bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde, r nin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörleriyle, $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux Vektörünün, r eğrisinin r_T teğetler göstergesi boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin açılım invaryantlarının hesaplanması:

r_T teğetler göstergesi olmak üzere, $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ ve $\vec{W}$ nın r_T boyunca hareketini incelerken, bu doğrultuların H da sabit oldukları kabül edilecektir, bununla kasdedilen, hareketin başlangıç anındaki konumlarının esas alınacağıdır. $\{\vec{T}_T,\vec{N}_T,\vec{B}_T\}$ teğetler göstergesinin Frenet 3-ayaklı alanı, $(k_1)_T$ ve $(k_2)_T$ teğetler göstergesinin eğrilikleri, $\vec{D}_T$ de teğetler göstergesi boyunca meydana gelen hareketin Steiner Vektörü olmak üzere,

$$r_T = \vec{T}(s) \ , \quad ds_T = k_1 \, ds \tag{3.2.1}$$

$$\vec{T}_T = \vec{N}(s) \tag{3.2.2}$$

$$\vec{N}_T = \frac{-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \tag{3.2.3}$$

$$B_T = \frac{k_1\vec{B} - k_2\vec{T}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \ , \qquad (k_1)_T = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_2} \tag{3.2.4}$$

$$D_T = \vec{T}_T \oint_{(r_T)} (k_2)_T \, ds_T + \vec{B}_T \oint_{(r_T)} (k_1)_T ds_T \tag{3.2.5}$$

$$D_T = \left(\frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\vec{T} + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\vec{B}\right) \oint_{(r)} \sqrt{1+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2} \, k_1 ds \tag{3.2.6}$$

dir, burada k_1, k_2 r nin eğrilikleri , ds_T teğetler göstergesinin yay uzunluğudur.

H/H' kapalı uzay hareketinde T nin r_T boyunca oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı λ_T^T ile gösterilirse, (2.2.37) ve (3.2.6) bağıntılarından dolayı

$$\lambda_T^T = \langle \vec{D}_T , \vec{T} \rangle$$

$$\lambda_T^T = \left\langle \left(\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \vec{T} + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \vec{B} \right) \oint_{(r)} \sqrt{1+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}\, k_1 ds , \vec{T} \right\rangle$$

$$\lambda_T^T = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \oint_{(r)} \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_2} k_1 \, ds \qquad (3.2.7)$$

dir. Benzer şekilde r_T boyunca aslî normalin ve binormalin doğrultularının oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları sırayla, λ_N^T ve λ_B^T ise, (2.2.37) ve (3.2.6) eşitliklerinden dolayı

$$\lambda_N^T = \langle \vec{D}_T , \vec{N} \rangle$$

$$= 0 \qquad (3.2.8)$$

$$\lambda_B^T = \langle \vec{D}_T , \vec{B} \rangle$$

$$\lambda_B^T = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \oint_{(r)} \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_2} k_1 \, ds \qquad (3.2.9)$$

elde edilir. Aynı şekilde H/H' kapalı uzay hareketinde $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux vektörünün r_T gösterge eğrisi boyunca oluşturduğu regle yüzeyin λ_W^T açılım açısı için (2.2.37) ve (3.2.6) eşitliklerinden dolayı,

$$\lambda_W^T = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \oint_{(r)} \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_2} k_1 \, ds . \qquad (3.2.10)$$

Burada (3.2.7) ve (3.2.9) bağıntılarının taraf tarafa oranlarından,

$$\frac{\lambda_B^T}{\lambda_T^T} = \frac{k_1}{k_2} \qquad (3.2.11)$$

bulunur ki bu da r eğrisinin harmonik eğriliğidir. O halde şu teoremi ve rebiliriz:

TEOREM 3.2.1

Bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ küresel kapalı eğrisinin harmonik eğriliği, bu eğrinin teğetler göstergesi boyunca $\vec{B}$ ve $\vec{T}$ ayaklarının oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları oranına eşittir.

Aynı şekilde, yukarıdaki açılım açılarının kareleri arasında,

$$(\lambda_W^T)^2 = (k_1^2 + k_2^2)\quad (\lambda_T^T)^2 + (\lambda_B^T)^2 \qquad (3.2.12)$$

bağıntısı vardır. Benzer şekilde bu açılım açıları arasında

$$\lambda_T^T = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \lambda_W^T \qquad (3.2.13)$$

ve

$$\lambda_B^T = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \lambda_W^T \qquad (3.2.14)$$

bağıntıları da vardır.

Kapalı ve küresel bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde r nin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörleriyle $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux vektörünün r_T tegetler göstergesi boyunca hareketleriyle meydana getirdikleri regle yüzeylerin açılım uzunlukları, sırayla, L_T^T, L_N^T, L_B^T ve L_W^T olmak üzere, bu açılım uzunluklarını hesaplayalım:

(2.2.2) formülünden faydalanarak ilgili değerleri yerine koyacak olursak,

$$L_T^T = \oint_{(r_T)} \langle \vec{T}', \vec{T} \rangle ds \qquad (3.2.15)$$

$$L_T^T = \oint_{(r)} \langle k_1 \vec{N}, \vec{T} \rangle ds$$

$$L_T^T = 0 \qquad (3.2.16)$$

$$L_N^T = \oint_{(r_T)} \langle \vec{T}', \vec{N} \rangle ds$$

$$L_N^T = \oint_{(r)} k_1\, ds \qquad (3.2.17)$$

$$L_B^T = \oint_{(r_T)} \langle k_1\vec{N}, \vec{B} \rangle ds$$

$$L_B^T = 0 \tag{3.2.18}$$

$$L_W^T = \oint_{(r_T)} \langle k_1\vec{N}, k_2\vec{T} + k_1\vec{B} \rangle ds$$

$$L_W^T = 0 \tag{3.2.19}$$

elde edilir.

Kapalı ve küresel bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde r nin $\vec{T}$, $\vec{N}, \vec{B}$ Frenet vektörleriyle $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux vektörünün r_T teğetler göstergesi boyunca hareketleriyle meydana gelen regle yüzeylerin, sırayla, P_T^T, P_N^T, P_B^T ve P_W^T dralılerini hesaplayalım: (2.1.13) bağıntısı gereğince,

$$P_T^T = \frac{\det[\vec{T}', \vec{T}, \vec{T}]}{\|T'\|^2}$$

$$P_T^T = 0 \tag{3.2.20}$$

$$P_N^T = \frac{\det[\vec{T}', \vec{N}, \vec{N}']}{\|N'\|^2}$$

$$P_N^T = \frac{\det[k_1\vec{N}, \vec{N}, \vec{N}']}{\|N'\|^2}$$

$$P_N^T = 0 \tag{3.2.21}$$

$$P_B^T = \frac{\det[k_1\vec{N}, \vec{B}, -k_2\vec{N}]}{\|k_2 N\|^2}$$

$$P_B^T = 0 \tag{3.2.22}$$

$$P_W^T = \frac{\det\left[k_1\vec{N}, k_2\vec{T} + k_1\vec{B}, \frac{d}{ds}(k_2)\vec{T} + k_1k_2\vec{N} - \frac{d}{ds}(k_1)\vec{B} - k_1k_2\vec{N}\right]}{(\frac{dk_1}{ds})^2 + (\frac{dk_2}{ds})^2}$$

$$P_W^T = \frac{k_1^3 (k_2 / k_1)'}{(k_1')^2 + (k_2')^2} \tag{3.2.23}$$

3.2.2 Kapalı ve küresel bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde, r nin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörleriyle $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux Vektörünün, r nin r_N asli normaller göstergesi boyunca meydana getirdikleri regle yüzeylerin açılım invaryantlarını hesaplayalım:

r_N asli normaller göstergesi, $\vec{T}_N$, $\vec{N}_N$, $\vec{B}_N$ asli normaller göstergesinin Frenet vektörleri, $(k_1)_N$ ve $(k_2)_N$ bu göstergenin eğrilikleri, $\vec{D}_N$ de asli normaller göstergesi boyunca meydana gelen hareketin Steiner vektörü olmak üzere,

$$r_N = \vec{N}(s) \; , \quad ds_N = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, ds \tag{3.2.24}$$

$$\vec{T}_N = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\vec{T} + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\vec{B} \tag{3.2.25}$$

$$\vec{B}_N = \frac{k_2(k_1^2+k_2^2)}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3+k_1^2(k_2/k_1)'}}\vec{T} + \frac{k_1^2(k_2/k_1)'}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3+k_1^2(k_2/k_1)'}}\vec{N}$$
$$+ \frac{k_1(k_1^2 + k_2^2)}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3+k_1^2(k_2/k_1)'}}\vec{B} \tag{3.2.26}$$

$$(k_1)_N = \frac{\sqrt{k_1^6\left[(k_2/k_1)'\right]^2 - k_2^6\left[(k_1/k_2)'\right]^2 + (k_1^2+k_2^2)^3}}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \tag{3.2.27}$$

$$\vec{D}_N = \vec{T}_N \oint_{(r_N)} (k_2)_N\, ds_N + B_N \oint_{(r_N)} (k_1)_N\, ds_N$$
$$D_N = B_N \oint_{(r_N)} (k_1)_N\, ds_N \tag{3.2.28}$$

$$\oint_{(r_N)} (k_1)_N ds_N = \oint_{(r)} \frac{\sqrt{k_1^6\left[(k_2/k_1)'\right]^2+k_2^6\left[(k_1/k_2)'\right]^2+(k_1^2+k_2^2)^3}}{(k_1^2 + k_2^2)^{3/2}}\, ds \tag{3.2.29}$$

Yukarıda bahsedilen regle yüzeylerin açılım açıları sıra ile, λ_T^N, λ_N^N, λ_B^N ve λ_W^N olmak üzere, (2.2.37), (3.2.26), (3.2.27), (3.2.28) formülleri gereğince,

$$\lambda_T^N = \langle \vec{D}_N , \vec{T} \rangle$$

(3.2.29) ifadesindeki integral değerine I_1 diyecek olursak,

$$\lambda_T^N = \frac{k_2(k_1^2 + k_2^2)}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3+k_1^2(k_2/k_1)'}} \; I_1 \qquad (3.2.30)$$

$$\lambda_N^N = \langle \vec{D}_N , \vec{N} \rangle$$

$$\lambda_N^N = \frac{k_1^2(k_2/k_1)'}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3 + k_1^2(k_2/k_1)'}} \; I_1 \qquad (3.2.31)$$

$$\lambda_B^N = \langle \vec{D}_N , \vec{B} \rangle$$

$$\lambda_B^N = \frac{k_1(k_1^2 + k_2^2)}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3+ k_1^2(k_2/k_1)'}} \; I_1 \qquad (3.2.32)$$

$$\lambda_W^N = \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2)^3 + k_1^2(k_2/k_1)'}} \; I_1 \qquad (3.2.33)$$

elde edilir. Bunlardan (3.2.32) bağıntısıyla (3.2.30) bağıntısının taraf tarafa oranlarıyla,

$$\frac{\lambda_B^N}{\lambda_T^N} = \frac{k_1}{k_2} = h \qquad (3.2.34)$$

elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir:

TEOREM 3.2.2

Bir kapalı ve küresel $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisinin boyunca tanımlanan kapalı H/H' uzay hareketinde bu eğrinin B binormal vektörü ile T teğet vektörünün, aslî normaller göstergesi boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin açılım açıları oranı r eğrisinin harmonik eğriliğine eşittir.

Benzer şekilde, (3.2.30), (3.2.32) ve (3.2.33) bağıntılarından,

$$k_1 \lambda_T^N - k_2 \lambda_B^N = \lambda_W^N \qquad (3.2.35)$$

bağıntısı da elde edilir.

Yukarıda bahsedilen regle yüzeylerin açılım uzunlukları sırası ile L_T^N, L_N^N, L_B^N ve L_W^N ise (2.2.2) bağıntısından dolayı,

$$L_T^N = \oint_{(r_N)} \left\langle \frac{d}{ds}(\vec{r}_N), \vec{T} \right\rangle ds$$

$$L_T^N = \oint_{(r)} \left\langle -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}, \vec{T} \right\rangle ds$$

$$L_T^N = \oint_{(r)} -k_1 ds \qquad (3.2.36)$$

$$L_N^N = \oint_{(r)} \left\langle -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}, \vec{N} \right\rangle ds$$

$$L_N^N = 0 \qquad (3.2.37)$$

$$L_B^N = \oint_{(r)} k_2 ds$$

$$L_B^N = 0 \qquad (3.2.38)$$

$$L_W^N = 0 \qquad (3.2.39)$$

Kapalı bir r eğrisi için, k_1 bu eğrinin eğriliği olmak üzere,

$$\oint_{(r)} k_1 ds \geqq 2\pi$$

olduğu bilinmektedir[10]. Bundan faydalanarak şu neticeyi ifade edebiliriz:

NETİCE 3.2.1

Bir kapalı ve küresel $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde, r nin $\vec{T}$ teğetinin aslî normaller göstergesi boyunca oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu -2π den küçük veya ona eşittir. Eğrinin diğer Frenet vektörleri $\vec{N},\vec{B}$ ile $\vec{W}$ Darboux vektörünün aslî normaller göstergesi boyunca oluşturduğu regle yüzeylerin açılım uzunlukları ise sıfırdır.

Şimdi de, yukarıda sözü edilen regle yüzeylerin dağılma parametreleri, sırası ile, P_T^N, P_N^N, P_B^N ve P_W^N olmak üzere, bu değerleri (2.1.13) bağıntısından faydalanarak hesaplayacak olursak,

$$P_T^N = \frac{\det\left[\vec{N}', \vec{T}, \vec{T}'\right]}{\|T'\|^2}$$

$$P_T^N = 0$$

$$P_N^N = 0$$

$$P_B^N = k_1$$

$$P_W^N = 0$$

elde edilir.

3.2.3 Kapalı ve küresel bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde, r nin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörleriyle $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux Vektörünün, r nin r_B binormaller göstergesi boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin açılım invaryantlarını hesaplayalım:

r_B , r nin binormaller göstergesi, $(k_1)_B$, $(k_2)_B$ binormaller göstergesinin eğrilikleri, k_1, k_2 r nin eğrilikleri ve $\vec{D}_B$ de binormaller göstergesi boyunca meydana gelen hareketin Steiner Vektörü olmak üzere,

$$r_B = \vec{B}(s) ,$$

$$\vec{T}_B = \vec{N}$$

$$\vec{B}_B = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\vec{B} - \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\vec{T}$$

$$(k_1)_B = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_2}$$

$$\vec{D}_B = \vec{T}_B \oint_{(r_B)} (k_2)_B ds_B + \vec{B}_B \oint_{(r_B)} (k_1)_B\, ds_B$$

(r_B), küresel olduğundan,

$$D_B = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\vec{B} \oint_{(r)} \sqrt{k_1^2+k_2^2}\, ds + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\vec{T} \oint_{(r)} \sqrt{k_1^2+k_2^2}\, ds \tag{3.2.40}$$

elde edilir, burada $\vec{T}_B$, $\vec{N}_B$, $\vec{B}_B$ r_B nin Frenet vektörleridir.

Yukarıda bahsettiğimiz regle yüzeylerin açılım açıları, sırasıyla λ_T^B, λ_N^B, λ_B^B, λ_W^B olmak üzere, (2.2.35) ve (3.2.40) bağıntısından dolayı,

$$\lambda_T^B = \langle \vec{D}_B , \vec{T} \rangle$$

$$\lambda_T^B = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2-k_2^2}} \oint_{(r)} \sqrt{k_1^2+k_2^2}\, ds \tag{3.2.41}$$

$$\lambda_N^B = 0 \tag{3.2.42}$$

$$\lambda_B^B = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \oint_{(r)} \sqrt{k_1^2+k_2^2}\, ds \tag{3.2.43}$$

$$\lambda_W^B = \sqrt{k_1^2+k_2^2} \oint_{(r)} \sqrt{k_1^2+k_2^2}\, ds \tag{3.2.44}$$

elde edilir. Buradan, (3.2.33) ve (3.2.31) bağıntılarının taraf tarafa oranlarıyla,

$$\frac{\lambda_B^B}{\lambda_T^B} = \frac{k_1}{k_2} \tag{3.2.45}$$

elde edilir. Böylece teorem (3.2.2) ye benzer olarak şu teorem verilebilir:

TEOREM 3.2.3

Bir $r : I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ kapalı küresel eğrisinin harmonik eğriliği r_B binormaller göstergesi boyunca, H/H' kapalı uzay hareketinde $\vec{B}$ ve $\vec{T}$ doğrultularının oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları oranına eşittir.

Benzeri şekilde, λ_W^B, λ_T^B, λ_B^B açılım açıları arasında

$$(\lambda_W^B)^2 = (k_1^2 + k_2^2)\ (\lambda_T^B)^2 + (\lambda_B^B)^2 \tag{3.2.46}$$

bağıntısı mevcuttur.

Yukarıda bahsettiğimiz regle yüzeylerin açılım uzunlukları sıra ile L_T^B , L_N^B , L_B^B ve L_W^B olmak üzere bu değerleri (2.2.2) bağıntısına göre hesaplarsak,

$$L_T^B = \oint_{(r_B)} \langle \vec{B}'\, ds , \vec{T} \rangle$$

$$L_T^B = \oint_{(r)} \langle -k_2\vec{N} , \vec{T} \rangle\, ds$$

$$L_T^B = 0$$

$$L_N^B = \oint_{(r_B)} \langle -k_2\vec{N} , \vec{N} \rangle\, ds$$

$$L_N^B = \oint_{(r)} k_2\, ds$$

$$L_N^B = 0$$

$$L_B^B = 0$$

$$L_W^B = \oint_{(r_B)} \langle -k_2\vec{N} , k_2\vec{T} - k_1\vec{B} \rangle$$

$$L_W^B = 0$$

elde edilir, burada k_1 ve k_2 r nin eğrilikleridir. Burada şu sonucu ifade edebiliriz:

NETİCE 3.2.2

Bir kapalı ve küresel $r: I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde eğrinin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörleriyle $\vec{W}$ Darboux vektörünün binormaller göstergesi boyunca oluşturdukları regle yüzeylerin her birinin açılım uzunlukları sıfırdır.

Yukarıda adı geçen regle yüzeylerin dralleri sıra ile P_T^B , P_N^B , P_B^B ve P_W^B olmak üzere, (2.1.13) bağıntısına göre bunların değerleri hesaplanırsa

$$P_T^B = \frac{\det\left[\vec{B}' , \vec{T} , \vec{T}'\right]}{\|\vec{T}'\|^2}$$

$$P_T^B = \frac{\det\left[-k_2\vec{N}, \vec{T}, k_1\vec{N}\right]}{\left[k_1\right]^2} = 0$$

$$P_N^B = \frac{\det\left[-k_2\vec{N}, \vec{N}, \vec{N}'\right]}{\|\vec{N}'\|^2} = 0$$

$$P_B^B = \frac{\det\left[-k_2\vec{N}, \vec{B}, -k_2\vec{N}\right]}{\|-k_2\vec{N}\|^2} = 0$$

$$P_W^B = \frac{k_2^3 \, (k_1/k_2)'}{(k_1')^2 + (k_2')^2}$$

elde edilir ki buradan şu teoremleri ifade edebiliriz:

TEOREM 3.2.4

Bir kapalı ve küresel $r: I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ doğrultularının binormaller göstergesi boyunca hareketleriyle oluşan regle yüzeyler birer açılabilir regle yüzeydir

TEOREM 3.2.5

Bir kapalı ve küresel $r: I \longrightarrow S^2 \subset E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde $\vec{W} = k_2\vec{T} + k_1\vec{B}$ Darboux vektörünün binormaller göstergesi boyunca oluşturduğu regle yüzey açılabilirdir ancak ve ancak r bir eğilim çizgisidir.

4. BÖLÜM

BİR REGLE YÜZEYİN AÇILIM İNVARYANTLARININ DAYANAK EĞRİSİ BOYUNCA REGLE YÜZEY ÜZERİNDE ALINAN ŞERİT ELEMANLARININ CİNSİNDEN İFADESİ VE BUNLARLA İLGİLİ BAZI NETİCELER

TEOREM 4.1.1

Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart, dayanak eğrisi boyunca alınan şeridin geodezik burulmasının sıfır olmasıdır.

İspat:

Regle yüzeyimiz

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\,\vec{a}(s)$$

fonksiyonu ile tanımlı $\{ (I\times\mathbb{R}, \varphi) \}$ atlası ile verilmiş olsun.

$$r : I \dashrightarrow M$$

dayanak eğrisinin s yay-parametresi ile verildiğini kabül edelim ve dayanak eğrisi boyunca alınan şeridi gözönüne alalım. Şeridin 3-ayaklısını öyle seçelimki $\vec{T} = \vec{\xi}$ ve $\vec{\eta}$ da doğrultman vektörü olsun. Buna göre,

$$\vec{\zeta} = \vec{T} \wedge \vec{\eta}$$

şeklinde olacaktır. (2.1.13) bağıntısı gereğince M regle yüzeyinin drali

$$P_\eta = \frac{\det[\vec{T}, \vec{\eta}, \vec{\eta}']}{\|\eta'\|^2} \tag{4.1.1}$$

olacağından $\vec{T}$, $\vec{\eta}$ ve $\vec{\eta}'$ nün değerleri (1.6.4) ve (1.6.5) den bulunup (4.1.1) de yerine konacak olursa,

$$\vec{T}\wedge\vec{\eta} = \vec{T}\wedge\left(\frac{c}{k_1}\vec{N} + \frac{b}{k_1}\vec{B}\right)$$

$$\vec{T}\wedge\vec{\eta} = \frac{c}{k_1}\vec{B} - \frac{b}{k_1}\vec{N}$$

$$\vec{\eta}' = -c\,\vec{\xi} + a\,\vec{\zeta}, \quad \|\eta'\| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$P_\eta = \frac{\left\langle \frac{c}{k_1}\vec{B} - \frac{b}{k_1}\vec{N},\ -c\,\vec{T} + a\left(\frac{b}{k_1}\vec{N} + \frac{c}{k_1}\vec{B}\right)\right\rangle}{(a^2 + c^2)}$$

$$P_\eta = \frac{a\,(b^2/k_1^2 + c^2/k_1^2)}{(a^2 + c^2)}, \quad k_1^2 = b^2 + c^2$$

$$P_{\eta} = \frac{a}{(a^2 + c^2)} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Burada, eğer $a = 0$ ise $P_{\eta} = 0$ olacağından Teorem (2.1.1) gereğince regle yüzey açılabilir olur.

Tersine, regle yüzey açılabilir ise Teorem (2.1.1) gereğince $P_{\eta} = 0$ olacağından, (4.1.2) den

$$a = 0$$

elde edilir.

TEOREM 4.1.2

M, $c \neq 0$ olmak üzere bir kapalı regle yüzey olsun. M nin

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3,$$

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\,\vec{a}(s)$$

fonksiyonu ile tanımlı $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası verilsin. O zaman M nin doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık,

$$v = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

değerine karşılık gelen

$$\varphi_v : I \longrightarrow M$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat:

Yukarıdaki kabuller altında $\vec{a}(s)$ birim doğrultmanını,

$$\langle \vec{\eta}(s), \vec{T}(s) \rangle = 0, \ \forall s \in I$$

olacak şekilde η birim vektörü olarak alalım. Aranan eğri, $\vec{a}(s) = \vec{\eta}(s)$ alarak elde edeceğimiz striksiyon eğrisinden ibarettir. Bunun için (2.1.9) da ilgili değerleri yerine koymak yeterlidir.

$$\vec{\bar{r}}(s) = \vec{r}(s) - \frac{\langle \vec{\eta}', \vec{T} \rangle}{\|\eta'\|^2}\, \eta(s)$$

$$\langle \vec{\eta}', \vec{T} \rangle = \langle -c\vec{\xi} + a\vec{\zeta}, \vec{T} \rangle$$

$$\langle \vec{\eta}', \vec{T} \rangle = \langle -c\vec{T} + a(\sin\varphi\,\vec{N} - \cos\varphi\,\vec{B}), \vec{T} \rangle$$

$$\langle \vec{\eta}', \vec{T} \rangle = -c$$

elde edilir. Ayrıca

$$\vec{\eta}' = -c\vec{\xi} + a\vec{\xi}\ , \quad \|\vec{\eta}'\|^2 = c^2 + a^2$$

olduğundan,

$$\bar{\vec{r}}(s) = \vec{r}(s) + \frac{c}{c^2+a^2}\vec{\eta}(s) \qquad (4.1.3)$$

bulunur. Bu ise aranan sonuç olduğundan ispat biter.

$\bar{u} = 0$ ise $\langle \vec{\eta}', \vec{T} \rangle = 0$ olacağından $c=0$ elde edilir. Dolayısıyle, dayanak eğrisi boyunca regle yüzey üzerinde bir şerit almak suretiyle aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 4.1.3

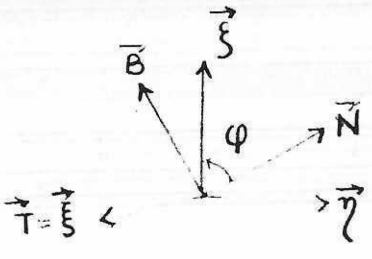
Dayanak eğrisi boyunca regle yüzey üzerinde alınan bir şerit için, şerit eğrisinin, $\forall s \in I$ için elde edilen geodezik eğriliği sıfır ise, dayanak eğrisi striksiyon eğrisinden ibarettir.

TEOREM 4.1.4

$H = Sp\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ve $H' = Sp\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde, $\vec{\xi}$ yüzey normalinin H' de çizdiği regle yüzeyin dralı, dayanak eğrisi boyunca regle yüzey üzerinde alınan şeridin geodezik burulmasına ve normal eğriliğine bağlıdır.

İspat:

Burada $\vec{\xi}$ nın H da sabit olduğu kabül ediliyor. Yani en azından başlangıç anındaki $\vec{\xi}$ esas alınıyor.



(Şek. 4.1.1)

(2.1.13) formülünden ve (şek. 4.1.1) den faydalanarak,

$$P_{\xi} = \frac{\det[\vec{T}, \vec{\xi}, \vec{\xi}']}{\|\vec{\xi}'\|^2}$$

$$P_{\xi} = \frac{\langle T \wedge (\cos\varphi \vec{N} + \sin\varphi \vec{B}),\ b\vec{T} - a\vec{\eta} \rangle}{b^2 - a^2}$$

$$P_\xi = \frac{\langle \cos\varphi\, \vec{B} - \sin\varphi\, \vec{N}\,,\ b\,\vec{T} - a\vec{\eta}\rangle}{b^2 + a^2}$$

$$P_\xi = \frac{-a\cos\varphi\,\langle \vec{B},\vec{\eta}\rangle + a\sin\varphi\,\langle N,\eta\rangle}{b^2 + a^2}$$

$$P_\xi = \frac{a\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi}{b^2 + a^2}$$

$$P_\xi = \frac{a}{b^2 + a^2} \tag{4.1.4}$$

bulunur ki böylece ispat biter.

Şimdi (4.1.2) ve (4.1.4) ün neticesi olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

TEOREM 4.1.5 :

Kapalı bir regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde, $\vec{\xi}$ yüzey normalinin dayanak eğrisi boyunca H' de oluşturduğu regle yüzeyin açılabilir olması için, esas regle yüzeyin açılabilir olması gerek ve yeter şarttır.

Kapalı bir regle yüzeyin üzerinde dayanak eğrisi boyunca alınan şeritinin $\{\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}\}$ şerit 3-lüsünün H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde dayanak eğrisi boyunca meydana getirdikleri regle yüzeylerin açılım açıları sırayla,

$$\lambda_\xi = \lambda_T = \langle \vec{D}\,,\ \vec{T}\rangle$$

$$\lambda_\xi = \langle \vec{T}\oint_{(r)} k_2\, ds + \vec{B}\oint_{(r)} k_1\, ds\,,\ T$$

$$\lambda_\xi = \oint_{(r)} k_2\, ds \tag{4.1.5}$$

$$\lambda_\eta = \langle \vec{T}\oint_{(r)} k_2\, ds + \vec{B}\oint_{(r)} k_1\, ds,\ \sin\varphi\,\vec{N} - \cos\varphi\,\vec{B}\rangle$$

$$\lambda_\eta = -\cos\varphi \oint_{(r)} k_1\, ds \tag{4.1.6}$$

$$\lambda_\zeta = \langle \vec{T}\oint_{(r)} k_2\, ds + \vec{B}\oint_{(r)} k_1\, ds\,,\ \cos\varphi\,\vec{N} + \sin\varphi\,\vec{B}\rangle$$

$$= \sin\varphi \oint_{(r)} k_1\, ds \tag{4.1.7}$$

şeklindedir. Burada φ ile $s = s_0$ başlangıç anı için $\varphi(s_0)$ kasdedilmektedir.

TEOREM 4.1.6

Kapalı bir regle yüzeyin $r : \longrightarrow E^3$ dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' bir parametreli kapalı uzay hareketinde, bu eğri boyunca regle yüzey üzerinde alınan şeridin $\vec{\eta}$ ve $\vec{\xi}$ vektörlerinin bu şerit eğrisi boyunca H' de oluşturdukları regle yüzeylerin açılım açıları oranı,

$$\frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi} = \frac{b}{c}$$

şeklindedir, burada b ve c dayanak eğrisi boyunca alınan şeridin sırayla normal eğriliği ve geodezik eğriliğidir.

Kapalı bir regle yüzeyin üzerinde dayanak eğrisi boyunca alınan şeridinin $\{\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}\}$ şerit üçlüsünün, dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' uzay hareketinde, dayanak eğrisi boyunca H' de oluşturdukları regle yüzeylerin açılım uzunlukları, sırasiyla,

$$L_\xi = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\,ds, \vec{T} \rangle$$

$$L_\xi = \oint_{(r)} ds$$

$$L_\eta = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\,ds, \sin\varphi\,\vec{N} - \cos\varphi\,\vec{B} \rangle = 0$$

$$L_\zeta = \oint_{(r)} \langle \vec{T}\,ds, \cos\varphi\,\vec{N} + \sin\varphi\,\vec{B} \rangle$$

$$L_\zeta = 0$$

dir.

KAYNAKLAR

[1] HACISALİHOĞLU,H.H
Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi - 1976

[2] HACISALİHOĞLU,H.H.
Diferensiyel Geometri (Baskıda)

[3] HACISALİHOĞLU,H.H.
Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş
Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları - 1980

[4] GUGGENHEIMER,H.W.
Differential Geometry
College of Liberal Arts University of Minnesota- 1963

[5] O'NEİLL,B.
Elementary Differential Geometry
Academic Press New York - 1966

[6] YILMAZ,M.
Regle Yüzeyler Teorisi Üzerine
Doktora Tezi, K.T.Ü. Tem. Bil. Fakültesi - 1980

[7] BERKER,R.
Mekanik Dersleri
İ.T.Ü. Makina Fakültesi - 1965

[8] MÜLLER,H.R.
Kinematik Dersleri
A.Ü.Fen Fakültesi - 1963

[9] SABAN,G.
A Characteristic Property of a Developole surface,
Communucations de la Facülte des Sciences de I'Universite d' Ankara 16 a, 93-96 (1967)

[10] MILNOR,J.
On Total Curvatures of knots
Ann.of Math. 52(1950) 248-257

N O T A S Y O N L A R

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu standart reel afin uzay
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	Reel vektör uzaylarında iç çarpım fonksiyonu
$\Vert \ \Vert$	Reel vektör uzaylarında norm fonksiyonu
$R(n)$	E^n Öklid uzayının izometrilerinin cümlesi
$O(n)$	nxn tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi
$\mathbb{R}^n_1$	nx1 tipindeki reel matrislerin cümlesi
δ_{ij}	Kronecker deltası
$SO(n)$	nxn tipinde ve determinantı + 1 olan ortogonal matrislerin cümlesi
A^T	A matrisinin transpozu
$Sp\{\dots\}$	$\{\dots\}$ cümlesinin gerdiği uzay
detA	A matrisinin determinantı
$T_{E^3}(P)$	$P \in E^3$ noktasındaki tanjant uzayı
$T^*_{E^3}$	$P \in E^3$ noktasındaki kotanjant (tanjant uzayın duali) uzay
Ω^1	1-formların uzayı
$\wedge$	Vektörel çarpım
H	Hareketli çizgiler uzayı
H'	Sabit çizgiler uzayı
H/H'	H uzayının H' uzayına göre hareketi
$\mathcal{K}$	Harmonik eğrilik
(r)	Yervektörü $\vec{r}$ olan kapalı eğri
$\oint$	Kapalı bir eğri boyunca eğrisel integral
P_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin dağılma parametresi
L_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin açılım uzunluğu
λ_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin açılım açısı