

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE
COUPLED DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yusuf UÇAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2011

Tezin Başlığı : B-Spline Sonlu Eleman Yöntemleri ile Coupled
Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

Tezi Hazırlayan : Yusuf UÇAR

Sınav Tarihi : 29.07.2011

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalı'nda
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri (İlk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. İdris DAĞ

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ

Doç. Dr. Bülent SAKA

Doç. Dr. Alaattin ESEN

Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “B-Spline Sonlu Eleman Yöntemleri ile Coupled Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yusuf UÇAR

ÖZET

Doktora Tezi

B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yusuf UÇAR

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

240+xxiii sayfa

2011

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu eleman yöntemleri hakkında bazı genel bilgiler verildikten sonra, Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon yöntemleri ile birlikte spline fonksiyonlar ve B-spline fonksiyonlar hakkında temel kavramlar verildi.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümler bu tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. İkinci bölümde, coupled Burgers denklemi, farklı dereceden B-spline fonksiyonlar yardımıyla Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile çözüldü. Bu yöntemler göz önüne alınan üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelendi.

Üçüncü bölümde, coupled Korteweg-de Vries (KdV) denklemi hakkında genel bilgiler verildikten sonra farklı dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin,

Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile üç model problem çözüldü. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi incelendi.

Dördüncü bölümde, coupled modified Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi farklı dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile çözüldü. Bu yöntemler göz önüne alınan beş model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi yapıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Coupled Burgers Denklemi, Coupled KdV Denklemi, Coupled mKdV Denklemi, Sonlu Eleman Yöntemleri, B-Spline Fonksiyonlar, Galerkin Yöntemi, Petrov-Galerkin Yöntemi, Subdomain Yöntemi, Kollokasyon Yöntemi, Kararlılık Analizi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF COUPLED DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH B-SPLINE FINITE ELEMENT METHODS

Yusuf UÇAR

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

240+xxiii pages

2011

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, after giving some general information about the finite element methods which will be used in the thesis, fundamental concepts about Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain and collocation methods together with spline functions and B-spline functions are presented.

The second, third and fourth chapters of this thesis make up its original parts. In the second chapter, coupled Burgers' equation is solved by Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain and collocation finite element methods with different degrees B-spline functions. These methods are applied to three model problems which are taken into consideration in the thesis. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, the error norms L_2 and L_∞ are given in the form

of tables. The stability analysis of the finite element approximation obtained by applying each method is also investigated.

In the third chapter, after giving general information about the coupled Korteweg-de Vries (KdV) equation, the three test problems are solved by Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain and collocation finite element methods by using different degrees B-spline functions. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given with the error norms L_2 , L_∞ and the invariants in the form of tables. The stability analysis of the approximation obtained by applying each method is also investigated.

In the fourth chapter, the coupled modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation is solved by Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain and collocation finite element methods by using different degrees B-spline functions. These methods are applied to five model problems which are taken into consideration in the thesis. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature, and they are given with the error norms L_2 , L_∞ and the invariants in the form of tables. The stability analysis of the approximation obtained by applying each method is also investigated.

KEY WORDS: Coupled Burgers' Equation, Coupled KdV Equation, Coupled mKdV Equation, Finite Element Methods, B-Spline Functions, Galerkin Method, Petrov-Galerkin Method, Subdomain Method, Collocation Method, Stability Analysis.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY' a, ayrıca yüksek lisans ve doktora süresince üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm başta bölüm başkanımız, Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve diğer bölüm hocalarıma, çalışmalarımda karşılaştığım türlü güçlüklerin üstesinden gelmem için bana yol gösteren ve tezimin her aşamasında bilgi ve görüşlerinden yararlandığım çok değerli hocam Doç. Dr. Alaattin ESEN' e, tez süresince desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Öğr. Grv. N. Murat YAĞMURLU, Muharrem ÖZLÜK ve S. Battal Gazi KARAKOÇ' a, sabır ve sevgiyle bana her zaman yardımcı olan aileme, ayrıca bu çalışmaya, 2009/06 nolu proje ile katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
GİRİŞ	1
1 TEMEL KAVRAMLAR	3
1.1 Sonlu Eleman Yöntemleri	3
1.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri	7
1.2.1 Galerkin Yöntemi	8
1.2.2 Petrov-Galerkin Yöntemi	8
1.2.3 Kollokasyon Yöntemi	9
1.2.4 Subdomain Yöntemi	9
1.3 Spline Fonksiyonlar	10
1.4 B-spline Fonksiyonlar	12
1.4.1 Lineer B-Spline Fonksiyonlar	13
1.4.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar	14
1.4.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar	15
1.4.4 Kuartik B-Spline Fonksiyonlar	16
1.4.5 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar	17
1.4.6 Septik B-Spline Fonksiyonlar	18
2 B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	20
2.1 Model Problemler	22
2.1.1 Problem 1	22
2.1.2 Problem 2	23

2.1.3	Problem 3	23
2.2	Sonlu Eleman Yöntemleri	24
2.2.1	Galerkin Yöntemi	26
2.2.2	Petrov-Galerkin Yöntemi	43
2.2.3	Subdomain Yöntemi	55
2.2.4	Kollokasyon Yöntemi	67
2.2.5	Sonuç	81
3	B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED	
	KdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	82
3.1	Model Problemler	84
3.1.1	Problem 1	84
3.1.2	Problem 2	85
3.1.3	Problem 3	85
3.2	Sonlu Eleman Yöntemleri	86
3.2.1	Galerkin Yöntemi	86
3.2.2	Petrov-Galerkin Yöntemi	106
3.2.3	Subdomain Yöntemi	127
3.2.4	Kollokasyon Yöntemi	146
3.2.5	Sonuç	163
4	B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED	
	mKdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	165
4.1	Model Problemler	166
4.1.1	Problem 1	167
4.1.2	Problem 2	167
4.1.3	Problem 3	167
4.1.4	Problem 4	168
4.1.5	Problem 5	168
4.2	Sonlu Eleman Yöntemleri	168
4.2.1	Galerkin Yöntemi	169
4.2.2	Petrov-Galerkin Yöntemi	188

4.2.3	Subdomain Yöntemi	203
4.2.4	Kollokasyon Yöntemi	220
4.2.5	Sonuç	234
KAYNAKLAR		235
ÖZGEÇMİŞ		240

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1	$\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	34
Tablo 2.2	$N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	34
Tablo 2.3	$\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.	35
Tablo 2.4	$\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	36
Tablo 2.5	Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	37
Tablo 2.6	$\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.	38
Tablo 2.7	$\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarında U_N ve V_N ' nin maksimum değerlerinin referans [18] de verilenler ile karşılaştırılması.	40
Tablo 2.8	$\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	49
Tablo 2.9	$N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	50
Tablo 2.10	$\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.	50
Tablo 2.11	$\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	51
Tablo 2.12	Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	52

Tablo 2.13 $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 45$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.	53
Tablo 2.14 $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarında U_N ve V_N ' nin maksimum değerlerinin referans [18] de verilenler ile karşılaştırılması.	54
Tablo 2.15 $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	61
Tablo 2.16 $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	61
Tablo 2.17 $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.	62
Tablo 2.18 $\Delta t = 0.01, \alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	63
Tablo 2.19 Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	64
Tablo 2.20 $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.	65
Tablo 2.21 Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N ' nin maksimum değerleri ile referans [18] dekilerin karşılaştırılması.	66
Tablo 2.22 $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	74
Tablo 2.23 $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	74
Tablo 2.24 $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.	75
Tablo 2.25 $\Delta t = 0.01, \alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	76
Tablo 2.26 Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	77
Tablo 2.27 $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.	78

Tablo 2.28	Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N ' nin maksimum değerleri ile referans [18] dekilerin karşılaştırılması.	79
Tablo 2.29	$t = 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$ ve $\Delta t = 0.001$ için Problem 1' e uygulanan yöntemlerin karşılaştırılması.	79
Tablo 2.30	$t = 1$, $-10 \leq x \leq 10$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 100$ için Problem 2' ye uygulanan yöntemlerin karşılaştırılması.	80
Tablo 2.31	$t = 0.4$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 50$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' e uygulanan yöntemlerle elde edilen $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ ' nin maksimum değerleri ve konumları.	80
Tablo 3.1	$a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	92
Tablo 3.2	$a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	92
Tablo 3.3	$a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	93
Tablo 3.4	$a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	94
Tablo 3.5	$a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	95
Tablo 3.6	$a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	96
Tablo 3.7	$a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	96
Tablo 3.8	$a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	97
Tablo 3.9	$a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	97

Tablo 3.10	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5, \Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	98
Tablo 3.11	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $h = 0.1$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	98
Tablo 3.12	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları. . .	99
Tablo 3.13	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	99
Tablo 3.14	$a = 0.5, b = -3$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	102
Tablo 3.15	$a = 0.5, b = -3$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	102
Tablo 3.16	$a = 0.5, b = -3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	103
Tablo 3.17	$t = 50, a = 0.5, b = -3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	104
Tablo 3.18	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.2$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	115
Tablo 3.19	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	116
Tablo 3.20	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.2$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	117
Tablo 3.21	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	117
Tablo 3.22	$a = -0.5, b = 3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	118

Tablo 3.23	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5, \Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	118
Tablo 3.24	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5, \Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	119
Tablo 3.25	$a = -0.5, b = 3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $h = 0.1$ için $0 \leq x \leq 65$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	120
Tablo 3.26	$a = -0.5, b = 3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.01$ için $0 \leq x \leq 65$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	120
Tablo 3.27	$a = -0.5, b = 3$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	124
Tablo 3.28	$a = -0.5, b = 3$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	124
Tablo 3.29	$t = 50, a = -0.5, b = 3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	126
Tablo 3.30	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	135
Tablo 3.31	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	136
Tablo 3.32	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	137
Tablo 3.33	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	138
Tablo 3.34	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	139
Tablo 3.35	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	139

Tablo 3.36	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	140
Tablo 3.37	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	140
Tablo 3.38	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	140
Tablo 3.39	$a = 0.5, b = -3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	141
Tablo 3.40	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $h = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	142
Tablo 3.41	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	142
Tablo 3.42	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10$ ve $\gamma_2 = 30$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	143
Tablo 3.43	Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.	143
Tablo 3.44	Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.	144
Tablo 3.45	$a = 0.5, b = -3$ ve $h = 0.0625$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	144
Tablo 3.46	$a = 0.5, b = -3$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	145
Tablo 3.47	$a = 0.5$ ve $b = -3$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	145
Tablo 3.48	$t = 50, a = 0.5, b = -3, h = 0.0625$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	145

Tablo 3.49	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	153
Tablo 3.50	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	154
Tablo 3.51	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	155
Tablo 3.52	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	155
Tablo 3.53	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	156
Tablo 3.54	$a = -0.125, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	157
Tablo 3.55	$a = 0.5, b = -3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	157
Tablo 3.56	$a = -0.5, b = 3, \lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	157
Tablo 3.57	$a = -0.125, b = -3$ ve $\lambda = 0.5$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	158
Tablo 3.58	$a = 0.5, b = -3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	158
Tablo 3.59	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $h = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	160
Tablo 3.60	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	160
Tablo 3.61	$a = 0.5, b = -3, \lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.6, \gamma_1 = 10$ ve $\gamma_2 = 30$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	161
Tablo 3.62	Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.	161

Tablo 3.63	Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.	161
Tablo 3.64	$a = 0.5$, $b = -3$ ve $h = 0.05$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	162
Tablo 3.65	$a = 0.5$, $b = -3$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	162
Tablo 3.66	$a = 0.5$ ve $b = -3$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.	163
Tablo 3.67	$t = 50$, $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	163
Tablo 4.1	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	175
Tablo 4.2	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	176
Tablo 4.3	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	176
Tablo 4.4	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	178
Tablo 4.5	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	178
Tablo 4.6	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	180
Tablo 4.7	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	181
Tablo 4.8	$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	182

Tablo 4.9	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.	182
Tablo 4.10	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	185
Tablo 4.11	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	186
Tablo 4.12	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	186
Tablo 4.13	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	194
Tablo 4.14	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	195
Tablo 4.15	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	195
Tablo 4.16	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	196
Tablo 4.17	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	196
Tablo 4.18	Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	197
Tablo 4.19	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	198
Tablo 4.20	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	198
Tablo 4.21	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	199
Tablo 4.22	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.	200
Tablo 4.23	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	200

Tablo 4.24	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	201
Tablo 4.25	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	201
Tablo 4.26	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	201
Tablo 4.27	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq$ 50 aralığında Problem 5' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	202
Tablo 4.28	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	211
Tablo 4.29	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	211
Tablo 4.30	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	212
Tablo 4.31	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	213
Tablo 4.32	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	213
Tablo 4.33	Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	214
Tablo 4.34	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.05$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	215
Tablo 4.35	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	215
Tablo 4.36	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	216
Tablo 4.37	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.	217
Tablo 4.38	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	217
Tablo 4.39	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	218

Tablo 4.40	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	218
Tablo 4.41	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	219
Tablo 4.42	$\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	219
Tablo 4.43	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	226
Tablo 4.44	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.	226
Tablo 4.45	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	227
Tablo 4.46	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	228
Tablo 4.47	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.7, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.	228
Tablo 4.48	Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	229
Tablo 4.49	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	230
Tablo 4.50	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.	230
Tablo 4.51	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	231
Tablo 4.52	$\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.	232
Tablo 4.53	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	232
Tablo 4.54	Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.	233

Tablo 4.55 $\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	233
Tablo 4.56 $\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5, \gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.	233
Tablo 4.57 $\alpha = 1, \beta = 0.5, A = 0.5, B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.	234

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	1. Dereceden Spline Fonksiyon.	10
Şekil 1.2	0. Dereceden B-spline Fonksiyon.	12
Şekil 1.3	Lineer B-spline Şekil Fonksiyonları.	14
Şekil 1.4	Kuadratik B-spline Şekil Fonksiyonları.	15
Şekil 1.5	Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları.	16
Şekil 1.6	Kuartik B-spline Şekil Fonksiyonları.	17
Şekil 1.7	Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları.	18
Şekil 1.8	Septik B-spline Şekil Fonksiyonları.	19
Şekil 2.1	Problem 1' in farklı t zamanlarındaki çözümleri.	35
Şekil 2.2	$\eta = 2$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	39
Şekil 2.3	$\eta = 2$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	39
Şekil 2.4	$\eta = 20$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	41
Şekil 2.5	$\eta = 200$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	41
Şekil 2.6	$\eta = 2000$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	42
Şekil 2.7	$\eta = 10000$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.	42
Şekil 3.1	Problem 1' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.	94
Şekil 3.2	Problem 2' nin farklı t zamanlarında U için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	100

Şekil 3.3	Problem 2' nin farklı t zamanlarında V için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	101
Şekil 3.4	Problem 3' ün farklı t zamanlarında U için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	104
Şekil 3.5	Problem 3' ün farklı t zamanlarında V için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	105
Şekil 3.6	$a = -0.5$ ve $b = 3$ için Problem 1' in farklı zamanlarda Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.	119
Şekil 3.7	Problem 2' nin farklı t zamanlarında U için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	122
Şekil 3.8	Problem 2' nin farklı t zamanlarında V için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	123
Şekil 3.9	Problem 3' ün farklı t zamanlarında U için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	125
Şekil 3.10	Problem 3' ün farklı t zamanlarında V için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	126
Şekil 3.11	Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.	141
Şekil 3.12	Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.	159
Şekil 4.1	Problem 1' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	177
Şekil 4.2	Problem 2' nin farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	179
Şekil 4.3	Problem 3' ün farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	183
Şekil 4.4	Problem 4' ün farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	184

Şekil 4.5	Problem 5' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.	187
Şekil 4.6	Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	196
Şekil 4.7	Problem 3' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	199
Şekil 4.8	Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	212
Şekil 4.9	Problem 3' ün $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	216
Şekil 4.10	Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	227
Şekil 4.11	Problem 3' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.	231

GİRİŞ

Doğadaki biyolojik, jeolojik veya mekanik birçok olay fizik kuralları yardımıyla cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler olarak tanımlanabilir. Bunları inceleyen bilim adamlarının bu olayların matematiksel modellerini oluşturmak ve bu modellerin sayısal analizini yapmak gibi iki temel görevi vardır. Doğadaki olayların matematiksel modelini oluşturmak o alanda bir altyapıyı ve belirli matematiksel araçları gerektirir. Doğadaki bu olayların matematiksel modelleri çoğunlukla lineer olmayan diferansiyel denklemler ile sonuçlanır. Bu tip diferansiyel denklemlerin genellikle tam çözümleri aranır. Ancak böyle diferansiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak çoğu zaman zor veya hatta mümkün olmayabilir. Bu durumda diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için nümerik yöntemler kullanılır. En yaygın olarak kullanılan nümerik yöntemlerden başlıcaları sonlu fark, varyasyonel ve sonlu eleman yöntemleridir [1].

Sonlu fark ve varyasyonel yöntemler bazı problemler için sonlu eleman yöntemlerinden daha iyi sonuçlar verebilir. Fakat keyfi sınırları kullanmadaki esnekliği ve gelişmiş sonlu eleman yazılımlarının ortaya çıkması, sonlu eleman yöntemlerini bir çok pratik problemin çözümü için tercih edilen yöntem haline getirmiştir [2]. Ayrıca sonlu eleman yönteminde verilen bir bölge sonlu elemanlar diye adlandırılan alt bölgelere ayrıldığı ve problemin yaklaşık çözümü bu elemanların her biri üzerinde geliştirildiği için karmaşık geometrilerin, farklı malzeme özelliklerinin ve yerel etkilerin tam olarak temsil edilmesi sağlanır [1].

Sonlu eleman yöntemleri literatürde lineer ve lineer olmayan birçok diferansiyel denkleme uygulanmıştır. Bunlardan başlıcaları, $U = U(x, t)$ verilen bölge üzerinde bir fonksiyon ve v , ε ve μ birer reel parametre olmak üzere,

Burgers denklemi :

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = 0$$

Korteweg-de Vries (KdV denklemi) :

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0$$

modified Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi :

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0$$

dir. Bu denklemlerde olduğu gibi bir tek denklemden oluşan kısmi diferansiyel denklemlerin dışında, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir sistemi olan ve eşzamanlı çözümü gereken, her bir denklemin diğerini etkilediği ve literatürde coupled olarak bilinen denklemler de mevcuttur. Sonlu eleman yöntemleri bir tek denklemden oluşan kısmi diferansiyel denklemlere yaygın olarak uygulanmıştır. Ancak coupled kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü üzerine belirli nümerik yöntemlerle çalışmalar olsa da sonlu eleman yöntemleri ile bu denklemlerin çözümü üzerine çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu tezde;

Coupled Burgers :

$$U_t - U_{xx} + \eta U U_x + \alpha (UV)_x = 0$$

$$V_t - V_{xx} + \eta V V_x + \beta (UV)_x = 0$$

Coupled Korteweg-de Vries (KdV) :

$$U_t - 6\alpha U U_x - 2b V V_x - \alpha U_{xxx} = 0$$

$$V_t + 3U V_x + V_{xxx} = 0$$

Coupled modified Korteweg-de Vries (mKdV) :

$$U_t + U_{xxx} + \alpha [(U^2 + V^2)U]_x + \beta V_x = 0$$

$$V_t + V_{xxx} + \alpha [(U^2 + V^2)V]_x + \beta U_x = 0$$

denklemlerinin sonlu eleman yöntemleri ile yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Sonlu Eleman Yöntemleri

Sonlu eleman yöntemlerinin ortaya çıkışı 1960' ların başına dayanmaktadır ve o zamandan beri mühendislik ve fiziğin hemen hemen tüm alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Sonlu eleman yöntemlerinin gelişiminde katkısı olan isimlerin önde gelenlerinden bazıları Argyris, Clough ve Zienkiewicz' dir [3]. Bu yöntemlerin tarihçesi incelendiğinde, yüksek hızlı dijital bilgisayarların gelişimine paralel olarak son 50 yılda mühendislik ve fizik problemlerinin çözümünde pratik bir yol olduğu görülmektedir [4].

Fiziksel bir problemin sonlu eleman formülasyonu bir diferansiyel denklemin çözümü problemini eş zamanlı cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirger. Sonlu eleman yöntemleri sürekli bir bütün içindeki ayırık noktalarda bilinmeyen yaklaşık değerini verir. Bu yöntemlerde problemin çözüm bölgesi; iki veya daha fazla ortak düğüm noktalarında (*nodal noktalar veya nodlar*), sınır çizgilerinde veya yüzeylerde birbirine bağlı daha küçük alt bölgelere veya elemanlara ayrılır. Bu işleme ayrıklaştırma (*diskritizasyon*) denir. Sonlu eleman yöntemlerinde, tek bir işlemle tüm bölge üzerinde problemi çözmek yerine, her bir eleman veya alt bölge için denklemler formüle edilir ve çözüm bulunurken bu denklemler birleştirilir. Sonlu eleman yöntemlerinin en önemli avantajları:

1. Düzgün olmayan şekilli yapıları oldukça kolay bir biçimde modelleyebilmesi,
2. Eleman denklemleri ayrı ayrı değerlendirildiğinden farklı bir takım malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Çok çeşitli sınır şartlarının birlikte kullanılabilmesi,
4. Gerektiğinde elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
5. Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi,

6. Sonlu eleman yöntemlerinin bilgisayar programlama mantığına uygun olması olarak sıralanabilir [4].

Yukarıda verilen avantajlarının yanında sonlu eleman yöntemlerinin en önemli dezavantajı, çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir alt yapıyı gerektirmesidir. Ayırıklaştırma işleminin uygun yapılmaması durumunda iyi sonuçlar elde etmek zordur.

Verilen bir probleme sonlu eleman yöntemlerinin uygulanması aşağıda verilen altı adımı içerir [1].

1. Verilen bölgenin ayırıklaştırılması:

- a. Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman kümesinin oluşturulması.
- b. Elemanların ve düğüm noktalarının numaralandırılması.
- c. Problem için gerekli olan geometrik özelliklerin (örneğin koordinat ve kesit alanlarının) belirlenmesi.

2. Tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi:

- a. Tipik bir eleman üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formülünün oluşturulması.
- b. Tipik bir “ u ” bağımlı değişkeninin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

formunda olduğu varsayılarak ve bu yaklaşımın Adım 2a’ da yerine yazılmasıyla

$$\mathbf{K}^e \underline{u}^e = \underline{F}^e$$

formunda eleman denklemlerinin elde edilmesi.

- c. Yaklaşım fonksiyonlarının ve eleman matrislerinin belirlenmesi.

3. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi:

- a. Birincil değişkenlerin elemanlar arası süreklilik şartlarını sağlanması.
- b. İkincil değişkenler arasında denge şartlarının sağlanması.
- c. Adım 3a ve 3b’ nin kullanılmasıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.

4. Problemin sınır şartlarının uygulanması:

- a. Problemde verilen birincil değişkenlerin uygulanması.

- b. Problemde verilen ikincil değişkenlerin uygulanması.
5. Birleştirilmiş denklemlerin çözülmesi.
6. Sonuçların değerlendirilmesi:
 - a. Adım 5 de elde edilen birincil değişkenlerden hareketle çözümlerin değişiminin incelenmesi.
 - b. Sonuçların grafik/tablo şeklinde sunulması.

Şimdi bu adımları kısaca açıklayalım.

1. *Verilen bölgenin ayrıklaştırılması:* Sonlu eleman yöntemlerinin ana fikri, çözüm bölgesinin eleman diye adlandırılan daha basit bir takım alt bölgelere ayrılmasıdır. Gözönüne alınan bir probleme yaklaşık çözüm, düğüm adı verilen belirli noktalardaki çözümler kullanılarak bir tipik eleman üzerinde yapılır. Bu adım bir yapının ilgili düğümlerle birlikte sonlu elemanlara bölünmesini ve gerçek fiziksel davranışını en iyi modelleyecek uygun eleman tipinin seçimini içerir. Kullanılan elemanların toplam sayısı, büyüklükleri ve yapı içerisindeki tipleri temelde mühendislik konusudur. Elemanlar iyi sonuçlar verecek kadar küçük fakat hesaplama işlemlerini azaltacak kadar da büyük olmalıdır. Düzgün geometriye sahip olmayan yapılar için sonuçların hızlı değiştii durumlarda genellikle küçük elemanlar (ve muhtemelen yüksek dereceli yaklaşım fonksiyonları), düzgün olduğu yerlerde ise büyük elemanlar kullanılır [2, 4].

2. *Tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi :* Tipik bir eleman için eleman denklemi türetilirken, yaklaşık çözümün hesaplanmasında kullanılacak bir yaklaşım fonksiyonu seçilir. Bu fonksiyon eleman üzerinde elemanın düğüm değerleri kullanılarak tanımlanır. Genellikle sonlu eleman formülasyonu içinde çalışılması kolay olan birinci, ikinci ve üçüncü dereceden polinom fonksiyonlar ile birlikte basit trigonometrik fonksiyonlar da kullanılabilir [4].

3. *Eleman denklemlerinin birleştirilmesi :* Bu adımda, 2. adımda türetilen her bir eleman denklemi birleştirilir ve

$$\mathbf{K}u = \underline{F}$$

formunda yazılır. Bu formda yazılan denklem birleştirilmiş veya global denklem

olarak adlandırılır. Burada \underline{F} global düğüm kuvvet vektörü, \mathbf{K} global yapı veya toplam stiffness matrisi (çoğu problem için global stiffness matrisi karesel ve simetriktir) ve \underline{u} bilinmeyenlerin oluşturduğu vektördür [4].

4. *Problemın sınır şartlarının uygulanması* : Sonlu eleman yöntemlerinde, sınır şartlarından bazıları direkt olarak eleman denklemlerinin içinde yer alır. Bu tür şartlar doğal (*natural*) sınır şartları, direkt olarak eleman denklemlerinin içinde yer almayan sınır şartları ise temel (*essential*) sınır şartları olarak adlandırılır [2].

5. *Birleştirilmiş denklemlerin çözülmesi* : 3. ve 4. adımlardan sonra ortaya çıkan n -bilinmeyenli n -tane denklemden oluşan global denklem sistemi matris formunda kapalı olarak

$$\mathbf{K}\underline{u} = \underline{F}$$

biçimindedir. Bu cebirsel denklem sistemi, değişik paket programlar veya herhangi bir programlama dilinde hazırlanan programlar yardımıyla çözülebilir. Hızla gelişen bilgisayar teknolojileriyle birlikte bu tür çözümler daha hassas hesaplanabilmektedir.

6. *Sonuçların değerlendirilmesi* : Bu adım elde edilen sonuçların tablo ve/veya grafikler ile sunulmasını içerir [1].

Sonlu eleman yöntemleri günümüzde yapısal ve yapısal olmayan çok sayıda probleme uygulanmaktadır. Yapısal analizin sonlu eleman yöntemleri, tasarımcıya tasarım işlemi esnasında gerilim, titreşim, termal vb. problemleri ortaya çıkarma ve olası bir prototipin üretiminden önce tasarım değişikliklerini belirleme imkânı sağlar. Dolayısıyla prototipin kabul edilebilirliğine olan güven artar. Bununda ötesinde sonlu eleman yöntemleri uygun bir şekilde kullanılırsa inşasına ihtiyaç duyulabilecek prototip sayısını azaltabilir. Ayrıca sonlu eleman yöntemleri akışkanlar, ısı transferi, elektromanyetik potansiyel, zemin mekaniği ve akustik gibi yapısal olmayan problemlerin analizinde de kullanılmaktadır [4].

Sonlu eleman yöntemlerinde tipik bir eleman üzerindeki denklemi formüle ederken ağırlıklı kalan veya varyasyonel yöntemler kullanılır. Bu tezde tipik eleman denklemlerinin oluşturulmasında Galerkin, Petrov-Galerkin, kollokasyon ve subdomain ağırlıklı kalan yöntemleri kullanılacaktır. Şimdi bu yöntemleri kısaca açıklayalım.

1.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için bir Ω bölgesinde

$$A(u) = f \quad (1.2.1)$$

olarak verilen bir operatör denklemini göz önüne alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, u bir bağımlı değişken ve f ise bağımsız değişkenlerin bir bilinen fonksiyonudur. u çözümüne, bir u_N yaklaşımı

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.2.2)$$

olarak tanımlanır. (1.2.2) ile verilen yaklaşık çözümde, ϕ_j uygun yaklaşım fonksiyonları olup c_j parametreleri yaklaşık çözümün ağırlıklı integral formunu sağlayacak şekilde belirlenecek olan parametrelerdir.

Ağırlıklı kalan yöntemlerinde ağırlık fonksiyonları yaklaşım fonksiyonları kümesinden bağımsız olarak seçilebilir. Bu yöntemlerde bilinmeyen c_j parametrelerinin bulunması için sadece ağırlıklı integral formunun kullanılması yeterlidir. u_N yaklaşık çözümü (1.2.1) denkleminde yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir ki bu fonksiyon genellikle f ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f arasındaki farka

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.2.3)$$

yaklaşımın kalanı (*rezidüsü*) denir. Açıkça R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır. Ω iki boyutlu bir bölge ve Ψ_i ' ler ise ağırlık fonksiyonları olmak üzere ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \Psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (1.2.4)$$

ağırlıklı integral formundaki R kalanını sıfır yapacak şekilde aranır. (1.2.4) integralinden elde edilen denklem sisteminde c_j parametrelerinin tek türlü belirlenebilmesi için Ψ_i ağırlık fonksiyonlarının kümesi lineer bağımsız olmalıdır [1].

1.2.1 Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları, ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarıyla aynı seçilir. Böylece (1.2.4) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (1.2.1.1)$$

olarak elde edilir. Burada A_{ij} ve F_i

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy$$

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

olup c_j parametreleri (1.2.1.1) cebirsel denklem sisteminden kolayca elde edilir [1].

1.2.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

$\Psi_i \neq \phi_j$ olması durumunda ağırlıklı kalan yöntemi Petrov-Galerkin yöntemi olarak bilinir. Böylece (1.2.4) yaklaşımı, A bir lineer operatör olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \Psi_i A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} \Psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (1.2.2.1)$$

olarak elde edilir. Burada A_{ij} ve F_i

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \Psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji}$$

$$F_i = \int_{\Omega} \Psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

olup A simetrik olmayan bir matristir. c_j parametreleri (1.2.2.1) cebirsel denklem sisteminden kolayca elde edilir [1].

1.2.3 Kollokasyon Yöntemi

$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1(1)n$)' ler Ω bölgesinde seçilmiş n adet nokta olsun. Kollokasyon yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ olarak gösterilir ve

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dx dy = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada \mathbf{x}_i lere kollokasyon noktaları denir ve keyfi olarak seçilir. (1.2.4) denkleminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları yerine $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ yazılmasıyla

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0 \quad (1.2.3.1)$$

elde edilir. Buradan (1.2.3.1) denklemi kapalı formda

$$R(\mathbf{x}_i, c_j) = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (1.2.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. (1.2.3.2) denklemi n adet kollokasyon noktalarında hesaplanırsa n -bilinmeyenli n -tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. c_j katsayıları bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden kolayca bulunur. \mathbf{x}_i noktalarının seçimi iyi şartlı denklem sisteminin ve sonuçta iyi bir yaklaşık çözümün elde edilmesinde önemlidir [1, 5].

1.2.4 Subdomain Yöntemi

Subdomain yönteminde ağırlık fonksiyonları bölgenin belirli bir alt aralığında 1, diğer aralıklarda ise 0 olacak şekilde seçilir. Matematiksel olarak ağırlık fonksiyonları $i = 0(1)N$ için

$$\Psi_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

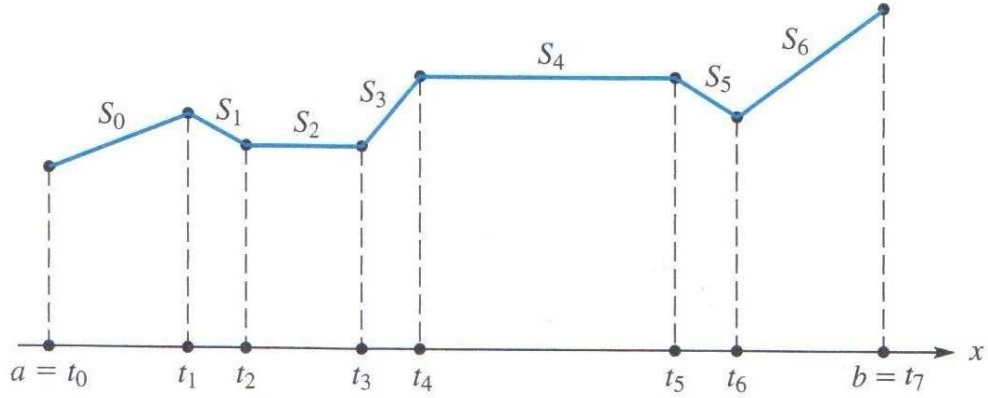
olarak tanımlanır. Ψ_i ağırlık fonksiyonlarının (1.2.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\int_{\Omega_i} R(x, y, c_j) dx dy = 0, \quad i = 0(1)N \quad (1.2.4.1)$$

elde edilir. Buradan (1.2.4.1) denklemi n -bilinmeyenli n -tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi olup bu sistemin çözümünden c_j katsayıları kolayca bulunur [5].

1.3 Spline Fonksiyonlar

Bu kısımda spline fonksiyonlar hakkında bazı tanım ve kavramlar verilecektir. Belirli düzgünlük (smoothness) şartlarını sağlayan polinom parçalarının birleştirilmesiyle elde edilen fonksiyona spline fonksiyonu denir. Bunun basit bir örneği olan poligonal fonksiyon (*veya 1. dereceden spline*) sekiz düğüm noktası için Şekil 1.1 de görüldüğü gibi doğrusal polinomların birleştirilmesiyle elde edilir.



Şekil 1.1: 1. Dereceden Spline Fonksiyon.

Bu fonksiyonun karakterini değiştirdiği $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ noktalarına düğüm noktaları denir. $S(x)$ fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x), & x \in [t_1, t_2], \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-1}(x), & x \in [t_{n-1}, t_n], \end{cases} \quad (1.3.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $S_i(x) = a_i x + b_i$ dir. $S(x)$ ' in her bir parçası bir lineer polinomdur. Bu tür bir $S(x)$ fonksiyonu parçalı lineerdir. Eğer $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ düğüm noktaları verilir ve $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ katsayılarının tümü bilinirse, belirli bir x noktasında $S_i(x)$ ' in hesaplanması önce x ' i içeren aralığının belirlenmesi ve sonra bu aralıkta uygun bir lineer fonksiyonun kullanılmasıyla gerçekleştirilir. (1.3.1) ile

tanımlı S fonksiyonu sürekli ise 1. dereceden spline fonksiyonlar diye adlandırılır [6].

$S(x)$ ' in 1. dereceden spline fonksiyonlar olabilmesi için;

- S fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,
- S fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli,
- $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ olmak üzere her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralığında S lineer polinom olmalıdır.

Birinci dereceden daha yüksek spline fonksiyonlar daha komplikedir. $Q(x)$ ile gösterilen spline fonksiyonlar sürekli türevlenebilir parçalı kuadratik fonksiyonlardır. $Q(x)$ kuadratik spline fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- Q fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,
- Q ve Q' fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli,
- $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ olmak üzere her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralığında Q en çok ikinci dereceden polinom olmalıdır.

Birinci ve ikinci dereceden spline fonksiyonlar belirli uygulamalar için etkili olsa da yüksek mertebeli türev veya türevler içeren denklemlerin yaklaşık çözümlerinde, en az denklemin mertebesi kadar türevlenebilecek yüksek dereceli spline fonksiyonlar kullanılır.

$S(x)$ ' in k . dereceden bir spline fonksiyon olabilmesi için

- S fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,
- $S, S', S'', \dots, S^{(k-1)}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli,
- $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ olmak üzere elde edilen $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralıklarında S en çok k . dereceden polinom olmalıdır. Spline fonksiyonların nümerik işlemler için daha uygun ve üretim tipi programlarda veri yaklaşımı için daha sık kullanılan özel tipine B-spline fonksiyonlar denir [6, 7].

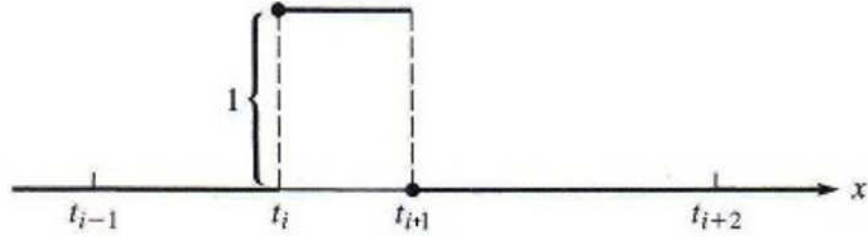
1.4 B-spline Fonksiyonlar

Bu kısımda B-spline fonksiyonların bazı özellikleri verilecektir. B-spline fonksiyonlar bütün spline fonksiyonlar için bir baz oluşturduklarından *B* spline diye adlandırılır [6].

0. dereceden B-spline fonksiyonlar, Şekil 1.2' de gösterildiği gibi

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

şeklinde tanımlanır. $B_i^0(x)$ ' in süreksiz olduğu açıktır. Fakat $B_i^0(x)$, sıçramaların



Şekil 1.2: 0. Dereceden B-spline Fonksiyon.

olduğu tüm noktalarda sağdan süreklidir. $B_i^0(x)$ parçalı sabit bir fonksiyon olduğu için 0. dereceden bir spline fonksiyondur. Ayrıca her x ve i için

$$B_i^0(x) \geq 0$$

ve

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 \quad (1.4.2)$$

olduğu açıktır. Her ne kadar (1.4.2) eşitliği sonsuz bir seri içerse de bir yakınsaklık problemi yoktur. Çünkü her bir x için bu serideki yalnızca bir terim 0 dan farklıdır.

Yani

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_m^0(x) = 1$$

dir. 0. dereceden herhangi bir spline, 0. dereceden B-spline fonksiyonların lineer birleşimi olarak yazılabilir. Doğrusu böyle bir S fonksiyonu, $t_i \leq x < t_{i+1}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) olmak üzere,

$$S(x) = b_i$$

ile verilen bir kural ile belirlenebilir. O zaman S ,

$$S = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i B_i^0$$

olarak yazılabilir.

0. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak diğer bütün yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x), \quad (1.4.3)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bağıntısından kolayca bulunabilir [6, 7]. Örneğin B_i^1 fonksiyonu yukarıdaki bağıntı kullanılarak

$$\begin{aligned} B_i^1(x) &= \left(\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) B_i^0(x) + \left(\frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^0(x) \\ &= \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t_{i+1} \leq x < t_{i+2} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

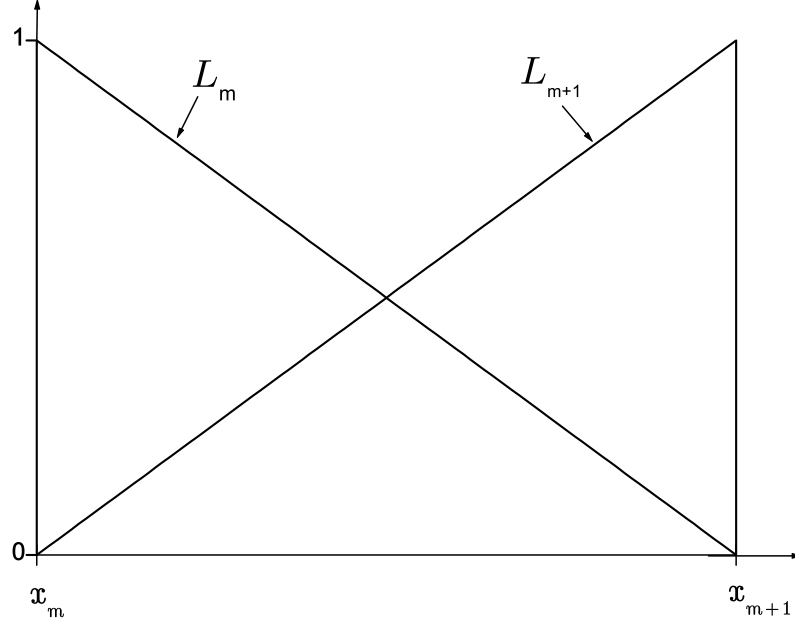
Bu tezde ele alınan coupled denklemlerin sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri bulunurken, baz ve/veya ağırlık fonksiyonları yerine kullanılacak olan lineer, kuadratik, kübik, kuartik, kuintik ve septik B-spline fonksiyonların tanımları ile birlikte bazı özellikleri aşağıda verildi.

1.4.1 Linear B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğümlerinde $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = 0(1)N$ olmak üzere,

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.1.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Şekil 1.3' de gösterilen L_m ve L_{m+1} gibi iki tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



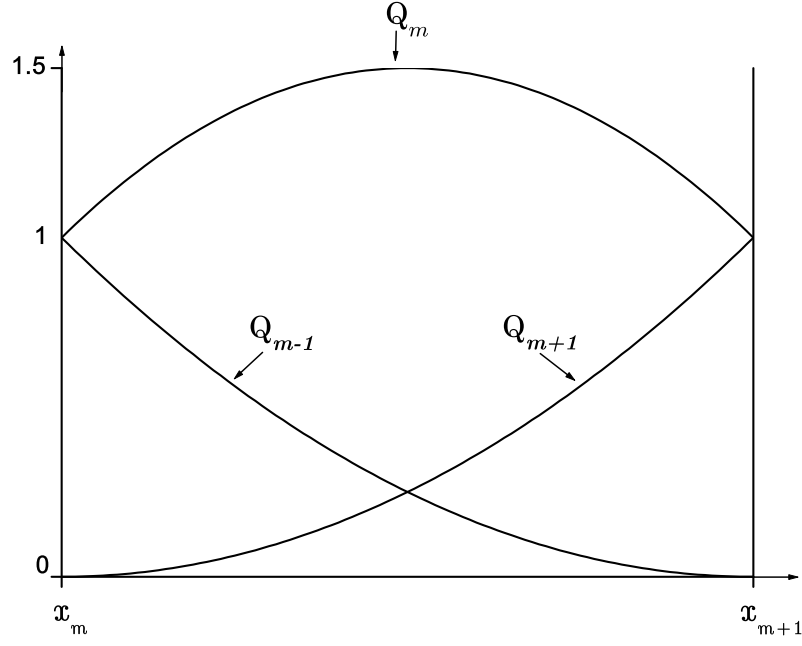
Şekil 1.3: Lineer B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1(1)N$ olmak üzere,

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.2.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onun birinci mertebeden türevi $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Şekil 1.4' de gösterilen Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1} gibi üç tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



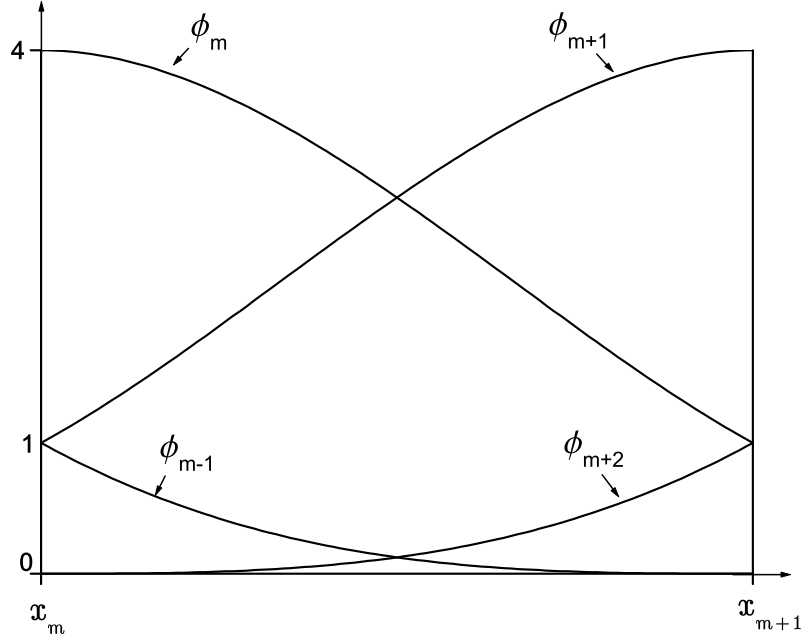
Şekil 1.4: Kuadratik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğümlerinde $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1(1)N + 1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.3.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Kübik B-spline fonksiyonları ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Şekil 1.5' de gösterilen $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} gibi dört tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



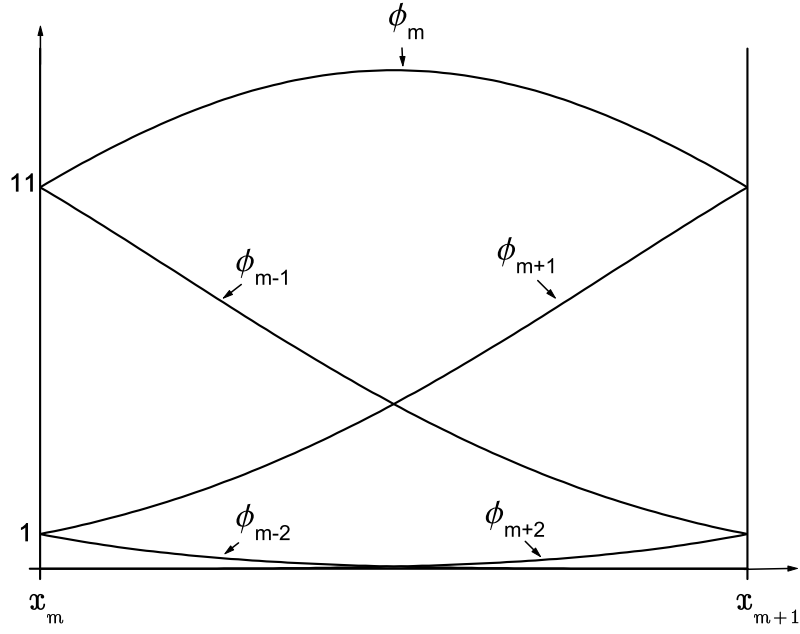
Şekil 1.5: Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.4 Kuartik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğümlerinde $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -2(1)N + 1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.4.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Kuartik B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Şekil 1.6' da gösterilen $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} gibi beş tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



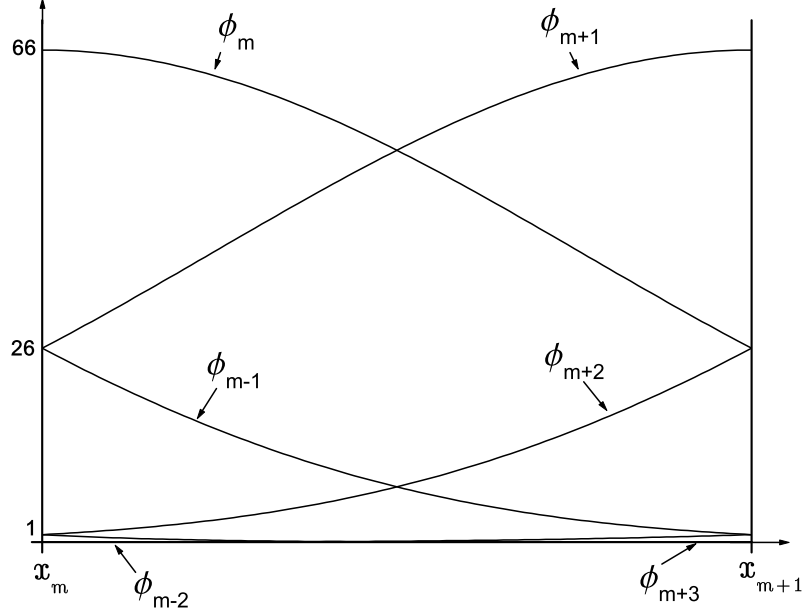
Şekil 1.6: Kuartik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.5 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğümlerinde $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -2(1)N + 2$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.5.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Kuintik B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri $x_{m-3} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Şekil 1.7' de gösterilen $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} gibi altı tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



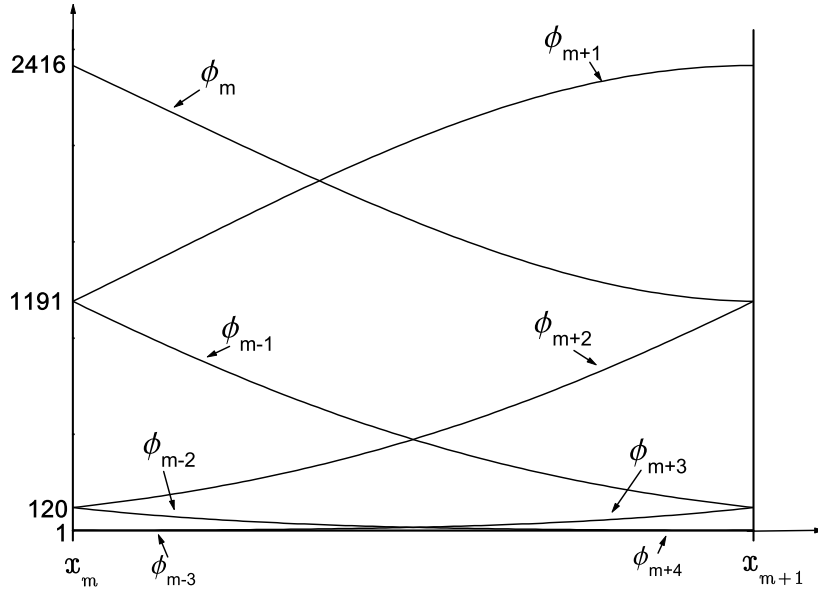
Şekil 1.7: Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları.

1.4.6 Septik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğümlerinde $\phi_i(x)$ Septik B-spline fonksiyonları, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -3(1)N + 3$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4.6.1)$$

olarak tanımlanır [8]. Septik B-spline fonksiyonları ile onun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı türevleri $x_{m-4} \leq x \leq x_{m+4}$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece her bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı Şekil 1.8' de gösterilen $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ ve ϕ_{m+4} gibi sekiz tane B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür.



Şekil 1.8: Septik B-spline Şekil Fonksiyonları.

BÖLÜM 2

B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde,

$$U_t - U_{xx} + \eta UU_x + \alpha(UV)_x = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (2.1a)$$

$$V_t - V_{xx} + \eta VV_x + \beta(UV)_x = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (2.1b)$$

coupled Burgers denklemi

$$U(x, 0) = \phi_1(x), \quad V(x, 0) = \phi_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç şartları ve

$$U(a, t) = f_1(a, t), \quad U(b, t) = f_2(b, t), \quad t > 0$$

$$V(a, t) = g_1(a, t), \quad V(b, t) = g_2(b, t), \quad t > 0$$

sınır şartları ile birlikte ele alındı. Burada $\phi_i(x)$, $f_i(x, t)$ ve $g_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) önceden tanımlı fonksiyonlar, η bir reel sabit, α ve β ise sistem parametrelerine bağlı sabitlerdir [9].

Coupled Burgers denkleminin çözümleri farklı tekniklerle çeşitli araştırmacılar tarafından bulunmuştur. İlk olarak Esipov [10] tarafından ortaya konulan sistem, iki tür madde içeren sıvı süspansiyonlarında veya koloitlerde yer çekiminin etkisiyle meydana gelen çökme veya yayılmaların incelenmesi sonucunda ortaya çıkmıştır [9]. Jain ve Kadalbajoo [11], coupled Burgers denklemini düzensiz bölgeler üzerinde lineer yaklaşım ve invariant embedding birleşik tekniğine dayalı yöntemle çözmüşlerdir. Kaya [12], coupled viskoz Burgers denklemini kolaylıkla hesaplanabilir bileşenli bir yakınsak kuvvet serisi formunda Adomian ayrışım

yöntemiyle çözmüştür. Dehghan vd. [13], Adomian-Padé tekniği ile coupled Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Khater vd. [14], Chebyshev spectral kollokasyon yöntemiyle coupled Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Ghotbi vd. [15], coupled Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini homotopi perturbasyon yöntemiyle, Rashid ve Ismail [16] ise Fourier pseudospectral yöntemiyle bulmuşlardır. Abazari ve Borhanifar [17], diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak Burgers ve coupled Burgers denklemlerinin hem nümerik hem de analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Mittal ve Arora [18], konum integralleri için kübik B-spline fonksiyonlarına ve zaman integrasyonu için de Crank-Nicolson formüllerine dayalı düzgün dağılımlı düğüm noktaları üzerinde kübik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak coupled viskoz Burgers denklemini çözmüşlerdir. Siraj-ul-Islam vd. [19], coupled Burgers denkleminin basit klasik radyal bazlar yardımıyla kollokasyon yöntemi ile düğüm noktaları kullanmaksızın yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Inan vd. [20], coupled Burgers denklemi için Bäcklund dönüşüm ve benzerlik indirgemelerini uygulamışlar ve aynı zamanda denklemin solitary ve hareketli dalga çözümlerini elde etmişlerdir. Yıldırım ve Kelleci [21], homotopy perturbasyon ve Padé tekniklerini birleştirerek coupled Burgers denklemini çözmek için etkin bir nümerik yöntem sunmuşlardır. Liu ve Hou [22], parçalı türevleri sunarak konum ve zaman parçalı türevlerle birlikte coupled Burgers denklemlerini çözmek için genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini direkt olarak uygulamışlardır. Ghoreishi vd. [23], parçalı zaman türevi ile birlikte lineer olmayan viskoz Burgers denklemlerini çözmek için uygun bir yaklaşık analitik yöntem olan Homotopy perturbasyon yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmaların yanında, homojen olmayan coupled Burgers denklemi Soliman [24] tarafından varyasyonel iteratif yöntemiyle, Lian ve Lou [25] ise simetrik coupled Burgers denklemini tekrarlı operatör yardımıyla çözmüşlerdir.

Abdou ve Soliman [26], varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak Adomian ayrışım yöntemiyle Burgers ve coupled Burgers denklemlerinin tam çözümlerini elde etmişlerdir. Soliman [27], bu denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemini sunmuştur. Abassy vd. [28], coupled Burgers denkleminin Laplace dönüşümleri ve Padé tekniği ile birleştirilmiş

varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. Sweilam ve Khader [29], kısmi diferansiyel denklemlerin lineer olmayan coupled sistemlerinin kapalı formda çözümlerini elde etmek için Padé yaklaşımı ve Laplace dönüşümünü kullanan homotopy pertürbasyonunun bir modifikasyonunu sunmuşlardır. Liu [30], uyumluluk yöntemini kullanarak değişken-katsayılı coupled Burgers denkleminin simetrisini elde etmiştir. Zuo ve Yao-Ming [31], coupled Burgers denkleminin tamamen integrallenebilir olduğunu Hirota bilineer yöntemini uygulayarak göstermişlerdir.

Bu bölümde coupled Burgers denklemine, değişik dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon yöntemleri uygulandı. Denklemden görülen α , β ve η parametrelerinin bazı değerleri için elde edilen nümerik çözümler problemin literatürde mevcut çözümleriyle karşılaştırıldı ve L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin probleme uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelendi.

2.1 Model Problemler

Bu bölümde, (2.1) ile verilen coupled Burgers denklemi farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Her bir problemin U_N nümerik çözümünün U analitik çözümüne ne ölçüde yaklaştığını görmek için

$$L_2 = \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2}}{\sqrt{\sum_{j=0}^N |U_j|^2}},$$

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |U_j - (U_N)_j|$$

ile tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

2.1.1 Problem 1

İlk problem olarak,

$$U_t - U_{xx} - 2UU_x + (UV)_x = 0,$$

$$V_t - V_{xx} - 2VV_x + (UV)_x = 0$$

coupled Burgers denklemi

$$U(x, 0) = \sin(x), \quad V(x, 0) = \sin(x)$$

başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = V(x, t) = e^{-t} \sin(x)$$

dir [12]. Bu problemin sonlu eleman yöntemleri ile yaklaşık çözümlerinin bulunmasında nümerik yöntemi başlatmak için gerekli olan sınır şartları problemin tam çözümünden alındı.

2.1.2 Problem 2

İkinci problem olarak,

$$U_t - U_{xx} + 2UU_x + \alpha(UV)_x = 0,$$

$$V_t - V_{xx} + 2VV_x + \beta(UV)_x = 0$$

coupled Burgers denklemi göz önüne alındı. Bu denklemin tam çözümü

$$a_0 = 0.05 \quad \text{ve} \quad A = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{4\alpha\beta - 1}{2\alpha - 1}\right)$$

olmak üzere

$$U(x, t) = a_0(1 - \tanh(A(x - 2At))),$$

$$V(x, t) = a_0\left(\left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1}\right) - \tanh(A(x - 2At))\right)$$

dir [27]. Bu problemin sonlu eleman yöntemleri ile yaklaşık çözümlerinin bulunmasında nümerik yöntemi başlatmak için gerekli olan başlangıç ve sınır şartları problemin tam çözümünden alındı.

2.1.3 Problem 3

Son olarak, (2.1) ile verilen coupled Burgers denklemi,

$$U(x, 0) = \begin{cases} \sin(2\pi x), & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$
$$V(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -\sin(2\pi x), & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç şartları ve sınır şartlarının tümü sıfır olarak göz önüne alındı [18].

2.2 Sonlu Eleman Yöntemleri

Bu kısımda, (2.1) coupled Burgers denkleminin Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi. Galerkin, Petrov-Galerkin ve subdomain sonlu eleman yöntemlerinin uygulanmasında kullanılacak olan (2.1) ile verilen coupled Burgers denkleminin ağırlıklı integral formunu oluşturmak için denklem önce W ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve sonra bölge üzerinden integrali alınır

$$\int_a^b W[U_t - U_{xx} + \eta UU_x + \alpha(UV)_x] dx = 0, \quad (2.2.1a)$$

$$\int_a^b W[V_t - V_{xx} + \eta VV_x + \beta(UV)_x] dx = 0 \quad (2.2.1b)$$

elde edilir. Daha sonra (2.2.1) denklemlerinde gerekli düzenlemeler yapırsa

$$\int_a^b W[U_t - U_{xx} + (\eta U + \alpha V)U_x + \alpha UV_x] dx = 0, \quad (2.2.2a)$$

$$\int_a^b W[V_t - V_{xx} + (\eta V + \beta U)V_x + \beta U_x V] dx = 0 \quad (2.2.2b)$$

bulunur. (2.2.2) ağırlıklı kalan integrallerinde, kısmi integrasyon uygulanırsa tek bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde (2.1) denklemlerinin zayıf formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [WU_t + W_x U_x + (\eta U + \alpha V)WU_x + \alpha WUV_x] dx = WU_x \Big|_{x_m}^{x_{m+1}}, \quad (2.2.3a)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [WV_t + W_x V_x + (\eta V + \beta U)WV_x + \beta WU_x V] dx = WV_x \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \quad (2.2.3b)$$

olarak elde edilir.

Bu bölümde (2.1) ile verilen coupled Burgers denkleminin uygulanacak yöntemlerden Galerkin, Petrov-Galerkin ve subdomain sonlu eleman yöntemlerinde yaklaşım fonksiyonlarını tanımlamak için baz fonksiyonları yerine kuadratik B-spline fonksiyonlar seçildi.

Bölüm 1' de (1.4.2.1) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılırsa problemin $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ tam çözümlerine sırasıyla karşılık gelen $U_N(x, t)$ ve

$V_N(x, t)$ yaklaşımları,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) Q_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \sigma_j(t) Q_j(x) \quad (2.2.4)$$

olarak yazılabilir [8]. Burada δ_j ve σ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (1.4.2.1) ile verilen kuadratik B-Spline fonksiyonlarına

$$\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq h$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} Q_{m-1} &= (h - \xi)^2/h^2, \\ Q_m &= (h^2 + 2h\xi - 2\xi^2)/h^2, \\ Q_{m+1} &= \xi^2/h^2 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

kuadratik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. Burada $0 \leq \xi \leq h$ dir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm spline değerleri sıfır olduğundan, (2.2.4) yaklaşımları (2.2.5) ile verilen kuadratik baz fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j(t) Q_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j(t) Q_j(x) \quad (2.2.6)$$

olarak yazılabilir. (2.2.5) kuadratik B-spline fonksiyonları ile (2.2.6) yaklaşımları kullanılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x' e göre birinci mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \\ V_N(x_m, t) &= V_m = \sigma_{m-1} + \sigma_m, \\ U'_N(x_m, t) &= U'_m = \frac{2}{h}(\delta_m - \delta_{m-1}), \\ V'_N(x_m, t) &= V'_m = \frac{2}{h}(\sigma_m - \sigma_{m-1}) \end{aligned}$$

olarak bulunur [32]. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi göstermektedir.

2.2.1 Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (2.1) ile verilen coupled Burgers denkleminde Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulandı. (2.2.5) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar ağırlık fonksiyonları olarak alınır ve (2.2.6) yaklaşımları (2.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $Z1_m = \alpha U$, $Z2_m = \eta U + \alpha V$, $G1_m = \beta V$ ve $G2_m = \eta V + \beta U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \dot{\delta}_j^e + \left(\int_0^h Q'_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e + Z2_m \left(\int_0^h Q_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e \right. \\ & \left. + Z1_m \left(\int_0^h Q_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right\} = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (Q_i Q'_j) \delta_j^e \Big|_0^h \right\}, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (2.2.1.1a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \left(\int_0^h Q'_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e + G2_m \left(\int_0^h Q_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right. \\ & \left. + G1_m \left(\int_0^h Q_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e \right\} = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (Q_i Q'_j) \sigma_j^e \Big|_0^h \right\}, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (2.2.1.1b)$$

denklemler elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \\ B_{ij}^e &= \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi, \\ C_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q'_j d\xi, \\ D_{ij}^e &= (Q_i Q'_j) \Big|_0^h \end{aligned}$$

alınırsa (2.2.1.1) denklemleri matris formunda

$$A^e \dot{\delta}^e + B^e \delta^e + Z2_m C^e \delta^e + Z1_m C^e \sigma^e - D^e \delta^e = 0, \quad (2.2.1.2a)$$

$$A^e \dot{\sigma}^e + B^e \sigma^e + G2_m C^e \sigma^e + G1_m C^e \delta^e - D^e \sigma^e = 0 \quad (2.2.1.2b)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ dir. Kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak integraller hesaplandığında,

$i, j = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere, $A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h Q_i' Q_j' d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j' d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = Q_i Q_j' \Big|_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $Z1_m, Z2_m, G1_m$ ve $G2_m$ eşitliklerinde U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki

$$Z1_m = \alpha(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$Z2_m = \eta(\delta_{m-1} + \delta_m) + \alpha(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G1_m = \beta(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G2_m = \eta(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \beta(\delta_{m-1} + \delta_m)$$

noktasal değerleri (2.2.1.2) ile verilen eleman denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra eleman matrisleri birleştirilirse

$$A\dot{\delta} + B\delta + C(Z2_m)\delta + C(Z1_m)\sigma - D\delta = 0, \quad (2.2.1.3a)$$

$$A\dot{\sigma} + B\sigma + C(G2_m)\sigma + C(G1_m)\delta - D\sigma = 0 \quad (2.2.1.3b)$$

denklemleri elde edilir. Burada global eleman parametreleri $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ dir. $A, B, C(Z1_m), C(Z2_m), C(G1_m), C(G2_m)$ ve D matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1),$$

$$B : \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1),$$

$$D : (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$C(Z1_m) : \frac{1}{6}(-Z1_{m1}, -2Z1_{m1} - 8Z1_{m2}, 3Z1_{m1} - 3Z1_{m3}, 8Z1_{m2} + 2Z1_{m3}, Z1_{m3}),$$

$$C(Z2_m) : \frac{1}{6}(-Z2_{m1}, -2Z2_{m1} - 8Z2_{m2}, 3Z2_{m1} - 3Z2_{m3}, 8Z2_{m2} + 2Z2_{m3}, Z2_{m3}),$$

$$C(G1_m) : \frac{1}{6}(-G1_{m1}, -2G1_{m1} - 8G1_{m2}, 3G1_{m1} - 3G1_{m3}, 8G1_{m2} + 2G1_{m3}, G1_{m3}),$$

$$C(G2_m) : \frac{1}{6}(-G2_{m1}, -2G2_{m1} - 8G2_{m2}, 3G2_{m1} - 3G2_{m3}, 8G2_{m2} + 2G2_{m3}, G2_{m3})$$

olarak bulunur. Burada $m = 1(1)N - 2$ olmak üzere,

$$Z1_{m1} = \alpha(\delta_{m-2} + \delta_{m-1}),$$

$$Z1_{m2} = \alpha(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$Z1_{m3} = \alpha(\delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$G1_{m1} = \beta(\sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}),$$

$$G1_{m2} = \beta(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G1_{m3} = \beta(\sigma_m + \sigma_{m+1}),$$

$$Z2_{m1} = \eta(\delta_{m-2} + \delta_{m-1}) + \alpha(\sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}),$$

$$Z2_{m2} = \eta(\delta_{m-1} + \delta_m) + \alpha(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$Z2_{m3} = \eta(\delta_m + \delta_{m+1}) + \alpha(\sigma_m + \sigma_{m+1}),$$

$$G2_{m1} = \eta(\sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}) + \beta(\delta_{m-2} + \delta_{m-1}),$$

$$G2_{m2} = \eta(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \beta(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$G2_{m3} = \eta(\sigma_m + \sigma_{m+1}) + \beta(\delta_m + \delta_{m+1})$$

dir. (2.2.1.3) denklemlerinde δ ve σ yerine

$$\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma^n + \sigma^{n+1}}{2} \quad (2.2.1.4)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de

$$\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}, \quad \dot{\sigma} = \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \quad (2.2.1.5)$$

ileri sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} [A + \frac{\Delta t}{2}(B + C(Z2_m) - D)]\delta^{n+1} + [\frac{\Delta t}{2}C(Z1_m)]\sigma^{n+1} \\ = [A - \frac{\Delta t}{2}(B + C(Z2_m) - D)]\delta^n - [\frac{\Delta t}{2}C(Z1_m)]\sigma^n, \end{aligned} \quad (2.2.1.6a)$$

$$\begin{aligned} [\frac{\Delta t}{2}C(G1_m)]\delta^{n+1} + [A + \frac{\Delta t}{2}(B + C(G2_m) - D)]\sigma^{n+1} \\ = [-\frac{\Delta t}{2}C(G1_m)]\delta^n + [A - \frac{\Delta t}{2}(B + C(G2_m) - D)]\sigma^n \end{aligned} \quad (2.2.1.6b)$$

formunda $(2N + 4)$ -bilinmeyenli $(2N + 4)$ -tane denklemden oluşan karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sınır şartlarının kullanılmasıyla δ_{-1} , δ_N , σ_{-1} ve σ_N parametreleri sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu denklem sistemi bulunur.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu parametreler problemin verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak kolayca aşağıdaki biçimde hesaplanabilir.

$t = 0$ için (2.2.4) denklemleri

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^N \delta_j^0 Q_j, \quad V_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^N \sigma_j^0 Q_j$$

olur. Başlangıç şartlarının x_j düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_j, 0) = U(x_j, 0), \quad V_N(x_j, 0) = V(x_j, 0), \quad j = 0(1)N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 parametreleri için

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0, \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1, \\
U(x_2, 0) &= \delta_1 + \delta_2, \\
&\vdots \\
U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2} + \delta_{N-1}, \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde σ_j^0 parametreleri için de

$$\begin{aligned}
V(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + \sigma_0, \\
V(x_1, 0) &= \sigma_0 + \sigma_1, \\
V(x_2, 0) &= \sigma_1 + \sigma_2, \\
&\vdots \\
V(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-2} + \sigma_{N-1}, \\
V(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + \sigma_N
\end{aligned}$$

$(N + 2)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinde yardımcı şart olarak

$$\begin{aligned}
U'(x_0, 0) &= U'_0 = \frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1}), \\
V'(x_0, 0) &= V'_0 = \frac{2}{h}(\sigma_0 - \sigma_{-1})
\end{aligned}$$

türevli sınır şartları kullanılır ve δ_{-1} , σ_{-1} parametreleri yok edilirse $(N + 1)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir.

Bu denklem sistemleri

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{h} & \frac{2}{h} & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_0 \\ U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (2.2.1.7)$$

ve

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{h} & \frac{2}{h} & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{-1} \\ \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{N-1} \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_0 \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} \quad (2.2.1.8)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Bu sistemler kolayca çözümlenerek başlangıç parametreleri bulunur. Böylece (2.2.1.6) ile verilen matris formundaki denklem sisteminde başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir.

(2.2.1.6) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n), \quad (2.2.1.9)$$

$$\sigma_m^* = \sigma_m^n + \frac{1}{2}(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n) \quad (2.2.1.10)$$

olarak tanımlanan iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi von Neumann yöntemi kullanılarak incelenecektir. (2.2.1.6) sistemi iki değişken ve iki denklemden oluştuğundan, çözüm

$$\delta_m^n = Pq^n e^{im\varphi}, \quad \sigma_m^n = Wq^n e^{im\varphi} \quad (2.2.1.11)$$

formunda aranacaktır. Burada q bulunması gereken bir karmaşık sayı, $i = \sqrt{-1}$, φ bir reel sayı, P ve W ise harmoniklerin genlikleridir [33, 34]. Galerkin yöntemi ile elde edilen yaklaşımın kararlı olması için $|q| \leq 1$ olmalıdır.

(2.2.1.6) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{30}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta t}{3h}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t \hat{U}}{12}, \quad \gamma_4 = \frac{\Delta t \hat{U}_1}{12},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z2_m, G2_m\} \text{ ve } \hat{U}_1 = \max_m \{Z1_m, G1_m\}$$

olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \delta_{m-1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \delta_m^{n+1}[66\gamma_1 + 6\gamma_2] + \\
& \delta_{m+1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] + \sigma_{m-2}^{n+1}[-\gamma_4] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1}[-10\gamma_4] + \sigma_{m+1}^{n+1}[10\gamma_4] + \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] = \delta_{m-2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \quad (2.2.1.12) \\
& \delta_{m-1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \delta_m^n[66\gamma_1 - 6\gamma_2] + \delta_{m+1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \\
& \delta_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_{m-2}^n[\gamma_4] + \sigma_{m-1}^n[10\gamma_4] + \sigma_{m+1}^n[-10\gamma_4] + \sigma_{m+2}^n[-\gamma_4]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1}[-\gamma_4] + \delta_{m-1}^{n+1}[-10\gamma_4] + \delta_{m+1}^{n+1}[10\gamma_4] + \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] \\
& + \sigma_{m-2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_{m-1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 - 10\gamma_3] \\
& + \sigma_m^{n+1}[66\gamma_1 + 6\gamma_2] + \sigma_{m+1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] \quad (2.2.1.13) \\
& = \delta_{m-2}^n[\gamma_4] + \delta_{m-1}^n[10\gamma_4] + \delta_{m+1}^n[-10\gamma_4] + \delta_{m+2}^n[-\gamma_4] + \sigma_{m-2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] \\
& + \sigma_{m-1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \sigma_m^n[66\gamma_1 - 6\gamma_2] + \sigma_{m+1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3] \\
& + \sigma_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3]
\end{aligned}$$

dır. (2.2.1.12) ve (2.2.1.13) denklemlerinde (2.2.1.11) eşitlikleri yerlerine yazılır ve $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a &= (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1 + (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2 + \\
& i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3, \\
b &= (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1 - (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2 - \\
& i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3, \\
c &= i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4, \\
d &= -i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$[aq - b]P + [cq - d]W = 0$$

$$[cq - d]P + [aq - b]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W ' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 - c^2)q^2 + (2cd - 2ab)q + b^2 - d^2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3},$$

$$q_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_4}$$

bulunur. Burada

$$\lambda_1 = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$\lambda_2 = (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2,$$

$$\lambda_3 = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4 - (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$\lambda_4 = -(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4 - (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3$$

dir. Kararlılık için $|q_1| \leq 1$ ve $|q_2| \leq 1$ olmalıdır. $|q_1| \leq 1$ olması için

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. λ_1, λ_2 ve λ_3 ' ün yukarıdaki eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| &= 4\lambda_1\lambda_2 \\ &= 4(66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1[6 - \\ &2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi)]\gamma_2 \\ &= \frac{8}{45} \Delta t (3 - 2 \cos(\varphi) - \cos(2\varphi)) [33 + \\ &26 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi)] \end{aligned}$$

bulunur.

$$-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$$

olduğundan

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Böylece $|q_1| \leq 1$ dir.

Benzer şekilde $|q_2| \leq 1$ şartının sağlandığı da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen üç model problemin nümerik çözümleri bulundu. Problem 1 için tüm hesaplamalar $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında yapıldı. Tablo 2.1 ve 2.2 sırası ile farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan konum ve zaman adımı küçüldükçe hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 2.1: $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0.1	1.13627	2.92076	0.17570	0.40187	0.09102	0.08634
0.5	2.13930	2.26627	0.57409	0.31176	0.44238	0.26979
1.0	3.30964	1.46179	1.09532	0.37945	0.87799	0.32455
1.5	4.56195	0.94716	1.62600	0.34800	1.31068	0.29255
2.0	5.87706	0.73805	2.15893	0.28426	1.75271	0.23677
2.5	7.22954	0.55475	2.69427	0.21605	2.18538	0.17914
3.0	8.58154	0.40272	3.22783	0.15759	2.61376	0.12992

Tablo 2.2: $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.17570	0.40187	0.14633	0.40051	0.13961	0.39846
0.5	0.57409	0.31176	0.30059	0.28998	0.24739	0.28698
1.0	1.09532	0.37945	0.50507	0.18232	0.35300	0.17864
1.5	1.62600	0.34800	0.71772	0.14843	0.44528	0.10957
2.0	2.15893	0.28426	0.93608	0.11969	0.55176	0.07300
2.5	2.69427	0.21605	1.15397	0.08993	0.66956	0.05365
3.0	3.22783	0.15759	1.37862	0.06617	0.78953	0.03903

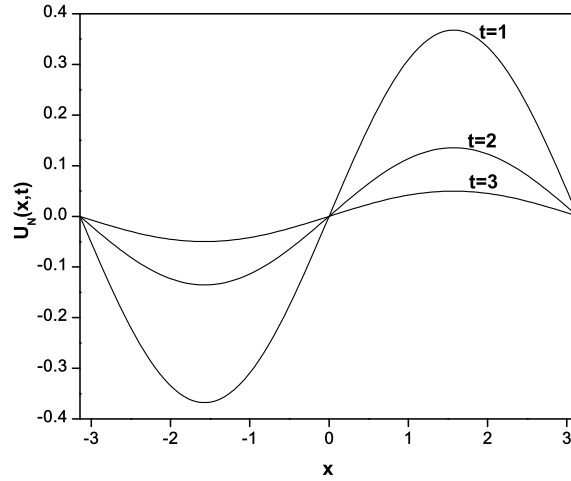
Tablo 2.3' de Galerkin sonlu eleman yöntemi ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları t ' nin değişik değerleri ve farklı konum adımları için referans [18] de verilen düzgün dağılımlı düğüm noktaları üzerinde kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan Galerkin sonlu eleman yöntemiyle

elde edilen sonuçların referans [18] de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 2.3: $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.

N	t	Galerkin Yöntemi		[18]	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
200	0.1	0.17×10^{-6}	0.52×10^{-6}	8.21×10^{-6}	7.45×10^{-6}
	0.5	0.27×10^{-6}	0.36×10^{-6}	2.49×10^{-5}	4.10×10^{-5}
	1.0	0.36×10^{-6}	0.22×10^{-6}	3.00×10^{-5}	8.21×10^{-5}
400	0.1	0.07×10^{-6}	0.14×10^{-6}	2.05×10^{-6}	1.86×10^{-6}
	0.5	0.16×10^{-6}	0.14×10^{-6}	1.02×10^{-5}	6.22×10^{-6}
	1.0	0.15×10^{-6}	0.10×10^{-6}	2.04×10^{-5}	7.56×10^{-6}

Galerkin sonlu eleman yönteminin problemin gerçek fiziksel karakteristiklerini ne kadar iyi sergilediğini göstermek için, farklı t zaman adımlarındaki $N = 100$ için tam ve nümerik çözümler Şekil 2.1' de verildi. Her iki çözüm birbirine çok yakın olduğu için grafikleri ayırt edilememekte olup aynı diyagramda gösterilmiştir. Problem 1' in başlangıç ve sınır şartları simetrik olduğundan $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ için elde edilen nümerik sonuçlar birbirine eşittir.



Şekil 2.1: Problem 1' in farklı t zamanlarındaki çözümleri.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 10$ aralığında $\Delta t = 0.01$ ve

$N = 100$ değerleri için yapıldı. Tablo 2.4, farklı zamanlarda farklı konum adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablo 2.4' den konum adımı küçüldükçe hata normlarında kayda değer ölçüde değişiklik olmadığı görülmektedir.

Tablo 2.4: $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	t	U_N		V_N	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.13872	0.00857	0.10633	0.00466
	0.5	0.67850	0.04226	0.51451	0.02228
	1.0	1.33399	0.08358	1.00365	0.04293
	1.5	1.97397	0.12420	1.47658	0.06268
	2.0	2.60110	0.16433	1.93632	0.08171
	2.5	3.21694	0.20395	2.38469	0.10017
	3.0	3.82247	0.24309	2.82314	0.11800
100	0.1	0.13864	0.00854	0.10540	0.00464
	0.5	0.67827	0.04208	0.51007	0.02206
	1.0	1.33355	0.08320	0.99480	0.04255
	1.5	1.97330	0.12366	1.46315	0.06208
	2.0	2.60026	0.16356	1.91842	0.08087
	2.5	3.21583	0.20297	2.36238	0.09906
	3.0	3.82111	0.24198	2.79631	0.11669
200	0.1	0.13863	0.00851	0.10495	0.00461
	0.5	0.67819	0.04198	0.50785	0.02195
	1.0	1.33337	0.08301	0.99038	0.04233
	1.5	1.97301	0.12337	1.45654	0.06176
	2.0	2.59981	0.16317	1.90950	0.08044
	2.5	3.21529	0.20250	2.35122	0.09851
	3.0	3.82048	0.24139	2.78292	0.11604

Tablo 2.5' de α ve β nın değişik değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları literatürdeki değişik çalışmalarda [14, 16, 18, 19] elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile karşılaştırıldı. Tablo 2.5' den Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen hata normlarının referans [14, 18, 19] da elde edilenlerle uyum içerisinde olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca Tablo 2.5' den Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen L_2 hata normunun referans [16] da verilen L_2 hata normundan daha büyük, L_∞ normunun ise daha küçük olduğu görülmektedir.

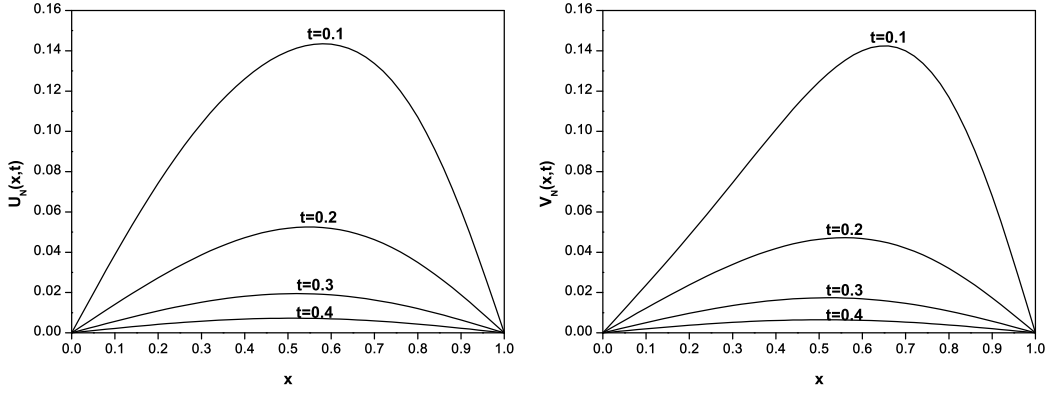
Tablo 2.5: Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

t	α	β	Galerkin Yöntemi		[14]		[16]		[18]		[19]	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	6.783×10^{-4}	1.44×10^{-3}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}	3.245×10^{-5}
		0.3	0.03	7.609×10^{-4}	6.68×10^{-4}	2.733×10^{-5}	7.326×10^{-4}	2.733×10^{-5}	7.326×10^{-4}	2.733×10^{-5}	7.326×10^{-4}	2.733×10^{-5}
		1.0	0.1	0.30	1.334×10^{-3}	1.27×10^{-3}	2.405×10^{-5}	1.325×10^{-3}	2.405×10^{-5}	1.325×10^{-3}	1.325×10^{-3}	2.405×10^{-5}
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	1.500×10^{-3}	1.30×10^{-3}	2.832×10^{-5}	1.452×10^{-3}	2.832×10^{-5}	1.452×10^{-3}	2.832×10^{-5}	1.452×10^{-3}	2.832×10^{-5}
		0.3	0.03	5.101×10^{-4}	5.42×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}	2.746×10^{-5}
		1	0.1	0.30	1.327×10^{-3}	1.20×10^{-3}	2.454×10^{-4}	1.591×10^{-3}	2.454×10^{-4}	1.591×10^{-3}	2.454×10^{-4}	1.591×10^{-3}
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	0.995×10^{-3}	1.29×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}	3.745×10^{-5}
		0.3	0.03	2.617×10^{-3}	2.35×10^{-3}	4.525×10^{-4}	2.250×10^{-3}	4.525×10^{-4}	2.250×10^{-3}	4.525×10^{-4}	2.250×10^{-3}	4.525×10^{-4}
		1	0.1	0.30	4.208×10^{-5}	4.38×10^{-5}	9.619×10^{-4}	4.167×10^{-5}	9.619×10^{-4}	4.167×10^{-5}	4.167×10^{-5}	9.619×10^{-4}
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	4.703×10^{-5}	4.58×10^{-5}	4.310×10^{-4}	4.590×10^{-5}	4.310×10^{-4}	4.590×10^{-5}	4.310×10^{-4}	4.590×10^{-5}	4.310×10^{-4}
		0.3	0.03	8.320×10^{-5}	8.66×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}	1.153×10^{-3}
		1	0.1	0.30	9.409×10^{-5}	9.16×10^{-5}	1.268×10^{-3}	9.182×10^{-5}	1.268×10^{-3}	9.182×10^{-5}	1.268×10^{-3}	9.182×10^{-5}
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	0.221×10^{-4}	4.99×10^{-5}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}	3.332×10^{-4}
		0.3	0.03	1.818×10^{-4}	1.81×10^{-4}	1.148×10^{-3}	5.729×10^{-4}	1.148×10^{-3}	5.729×10^{-4}	1.148×10^{-3}	5.729×10^{-4}	1.148×10^{-3}
		1	0.1	0.30	4.255×10^{-5}	9.92×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}
	0.3	0.03	3.636×10^{-4}	3.62×10^{-4}	1.638×10^{-3}	3.617×10^{-4}	1.638×10^{-3}	3.617×10^{-4}	1.638×10^{-3}	3.617×10^{-4}	1.638×10^{-3}	

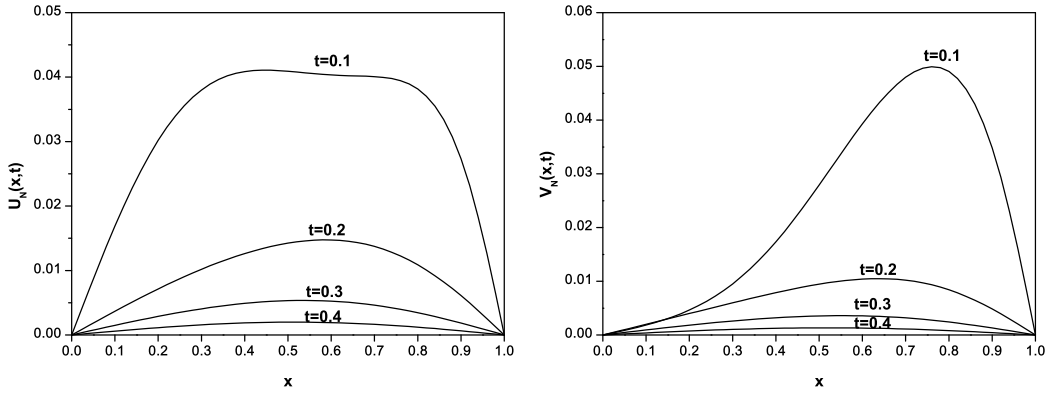
Problem 3 ise $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ için $0 \leq x \leq 1$ aralığında çözüldü. $\eta = 2$, $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N çözümleri Tablo 2.6' da verildi. Ayrıca sonuçlar grafiksel olarak Şekil 2.2 ve 2.3 de gösterildi.

Tablo 2.6: $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.

x	t	$\alpha = \beta = 10$		$\alpha = \beta = 100$	
		U_N	V_N	U_N	V_N
0.2	0.1	0.07429	0.04838	0.03019	0.00464
	0.2	0.02731	0.02381	0.00714	0.00399
	0.3	0.01089	0.00969	0.00288	0.00183
	0.4	0.00418	0.00374	0.00113	0.00074
0.4	0.1	0.12610	0.10096	0.04086	0.01734
	0.2	0.04721	0.04184	0.01263	0.00787
	0.3	0.01812	0.01619	0.00490	0.00320
	0.4	0.00684	0.00612	0.00187	0.00124
0.6	0.1	0.14326	0.14009	0.04034	0.03929
	0.2	0.05184	0.04680	0.01474	0.01040
	0.3	0.01882	0.01687	0.00525	0.00356
	0.4	0.00694	0.00621	0.00192	0.00129
0.8	0.1	0.10699	0.11689	0.03816	0.04905
	0.2	0.03495	0.03200	0.01089	0.00841
	0.3	0.01201	0.01081	0.00346	0.00241
	0.4	0.00434	0.00389	0.00121	0.00082



Şekil 2.2: $\eta = 2$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.



Şekil 2.3: $\eta = 2$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.

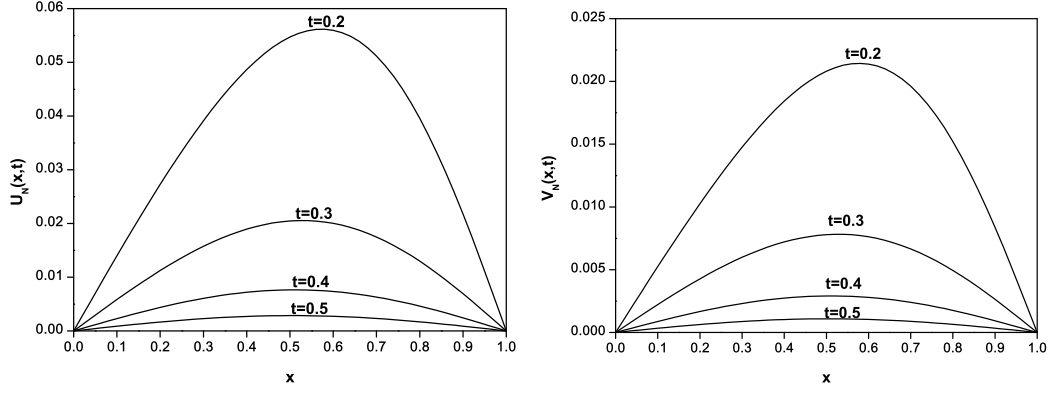
Problem 3' ün Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum değerleri, referans [18] de $\Delta t = 0.01$ için verilenler ile Tablo 2.7' de karşılaştırıldı. Tablodan her ne kadar karşılaştırma Δt ' nin farklı değerleri için yapıldıysa da U_N ve V_N ' nin hesaplanan maksimum değerlerinin referans [18] dekilerle oldukça uyum içinde olduğu ve bu değerleri aynı x noktalarında aldıkları kolayca görülmektedir.

Problem 3' ün nümerik çözümlerinin nasıl bir davranış sergilediğini daha iyi görmek açısından $\alpha = \beta = 10$ için $\eta = 20, 200, 2000$ ve 10000 alınarak elde edilen

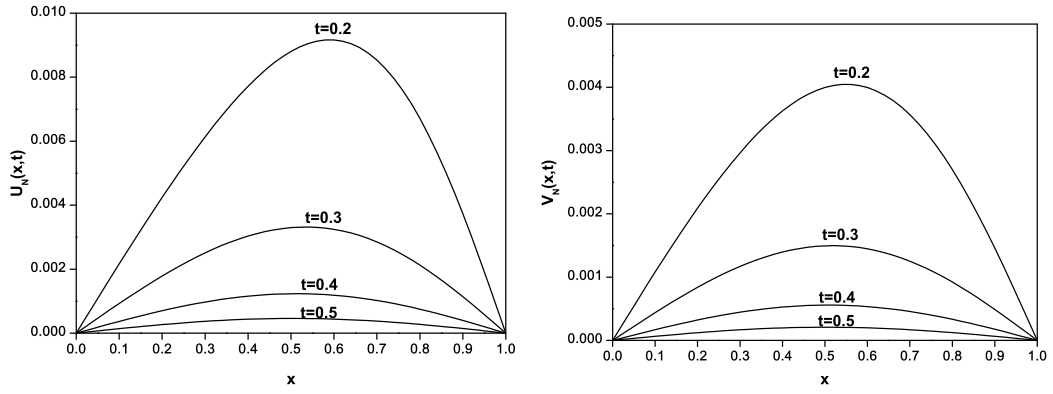
Tablo 2.7: $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarında U_N ve V_N ' nin maksimum değerlerinin referans [18] de verilenler ile karşılaştırılması.

		Galerkin Yöntemi		[18]	
		($\Delta t = 0.001$)		($\Delta t = 0.01$)	
	t	U_{\max}^N	x	U_{\max}^N	x
$\alpha = \beta = 10$	0.1	0.14348	0.58	0.14456	0.58
	0.2	0.05252	0.54	0.05237	0.54
	0.3	0.01945	0.52	0.01932	0.52
	0.4	0.00724	0.50	0.00718	0.50
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04108	0.44	0.04175	0.46
	0.2	0.01475	0.58	0.01479	0.58
	0.3	0.00536	0.54	0.00534	0.54
	0.4	0.00199	0.52	0.00198	0.52
		V_{\max}^N		V_{\max}^N	
$\alpha = \beta = 10$	0.1	0.14238	0.66	0.14306	0.66
	0.2	0.04723	0.56	0.04697	0.56
	0.3	0.01741	0.52	0.01725	0.52
	0.4	0.00648	0.50	0.00641	0.50
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04994	0.76	0.05065	0.76
	0.2	0.01049	0.64	0.01033	0.64
	0.3	0.00360	0.56	0.00350	0.56
	0.4	0.00133	0.52	0.00129	0.52

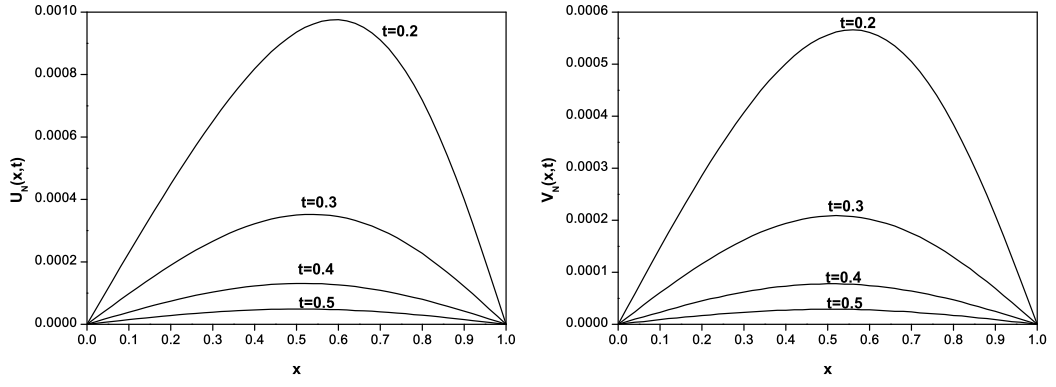
U_N ve V_N çözümleri Şekil 2.4-2.7' de grafiklerle verildi. Grafiklerden t ve η' nın gittikçe büyüyen değerlerinde çözümlerin bozulduğu açıkça görülmektedir.



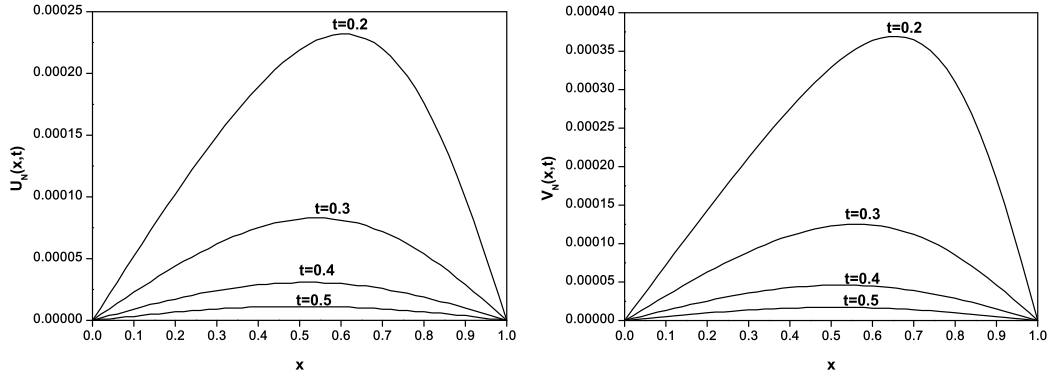
Şekil 2.4: $\eta = 20$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.



Şekil 2.5: $\eta = 200$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.



Şekil 2.6: $\eta = 2000$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.



Şekil 2.7: $\eta = 10000$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki nümerik çözümleri.

2.2.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (2.1) ile verilen coupled Burgers denkleminin Petrov-Galerkin yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. (2.1) sisteminin (2.2.3) ile verilen zayıf formunda, U_N ve V_N yaklaşımlarındaki Q_j yerine (2.2.5) ile verilen kuadratik baz fonksiyonları ve W ağırlık fonksiyonu yerine de lineer B-spline fonksiyonlar alındı. Bölüm 1' de (1.4.1.1) ile verilen $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonlarına

$$\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq h$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$L_m = 1 - \frac{\xi}{h}, \quad L_{m+1} = \frac{\xi}{h} \quad (2.2.2.1)$$

lineer B-spline fonksiyonları elde edilir. (2.2.2.1) ağırlık fonksiyonları ile (2.2.6) yaklaşımları (2.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $Z1_m = \alpha U$, $Z2_m = \eta U + \alpha V$, $G1_m = \beta V$ ve $G2_m = \eta V + \beta U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h L_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e + \left(\int_0^h L'_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e + Z2_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e \right. \\ & \left. + Z1_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right\} = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (L_i Q'_j) \delta_j^e \Big|_0^h \right\}, \quad i = m, m+1 \quad (2.2.2.2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h L_i Q_j d\xi \right) \sigma_j^e + \left(\int_0^h L'_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e + G2_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right. \\ & \left. + G1_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e \right\} = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (L_i Q'_j) \sigma_j^e \Big|_0^h \right\}, \quad i = m, m+1 \quad (2.2.2.2b) \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$A_{ij}^e = \int_0^h L_i Q_j d\xi,$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h L'_i Q'_j d\xi,$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h L_i Q'_j d\xi,$$

$$D_{ij}^e = L_i Q'_j \Big|_0^h$$

alnırsa (2.2.2.2) denklemleri matris formunda

$$A^e \dot{\delta}^e + B^e \delta^e + Z2_m C^e \delta^e + Z1_m C^e \sigma^e - D^e \delta^e = 0, \quad (2.2.2.3a)$$

$$A^e \dot{\sigma}^e + B^e \sigma^e + G2_m C^e \sigma^e + G1_m C^e \delta^e - D^e \sigma^e = 0 \quad (2.2.2.3b)$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ dir.

Lineer ve kuadratik B-spline fonksiyonlar ile basit integral alma kuralları kullanılırsa, $i = m, m + 1$ ve $j = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere $A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h L_i Q_j d\xi = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h L_i' Q_j' d\xi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h L_i Q_j' d\xi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = L_i Q_j' |_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $Z1_m, Z2_m, G1_m$ ve $G2_m$ eşitliklerinde U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki

$$Z1_m = \alpha(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$Z2_m = \eta(\delta_{m-1} + \delta_m) + \alpha(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G1_m = \beta(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G2_m = \eta(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \beta(\delta_{m-1} + \delta_m)$$

noktasal değerleri (2.2.2.3) ile verilen eleman denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra eleman matrisleri birleştirilirse

$$A \dot{\delta} + B \delta + C(Z2_m) \delta + C(Z1_m) \sigma - D \delta = 0, \quad (2.2.2.4a)$$

$$A \dot{\sigma} + B \sigma + C(G2_m) \sigma + C(G1_m) \delta - D \sigma = 0 \quad (2.2.2.4b)$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada global eleman parametreleri $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ dir. Böylece $A, B, C(Z1_m),$

$C(Z2_m)$, $C(G1_m)$, $C(G2_m)$ ve D matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$A : \frac{h}{12}(1, 11, 11, 1),$$

$$B : \frac{1}{h}(-1, 1, 1, -1),$$

$$D : (0, 0, 0, 0),$$

$$C(Z1_m) : \frac{1}{3}(-Z1_{m1}, -Z1_{m1} - 2Z1_{m2}, 2Z1_{m1} + Z1_{m2}, Z1_{m2}),$$

$$C(Z2_m) : \frac{1}{3}(-Z2_{m1}, -Z2_{m1} - 2Z2_{m2}, 2Z2_{m1} + Z2_{m2}, Z2_{m2}),$$

$$C(G1_m) : \frac{1}{3}(-G1_{m1}, -G1_{m1} - 2G1_{m2}, 2G1_{m1} + G1_{m2}, G1_{m2}),$$

$$C(G2_m) : \frac{1}{3}(-G2_{m1}, -G2_{m1} - 2G2_{m2}, 2G2_{m1} + G2_{m2}, G2_{m2})$$

olarak bulunur. Burada $m = 0(1)N - 2$ olmak üzere,

$$Z1_{m1} = \alpha(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$Z1_{m2} = \alpha(\delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$G1_{m1} = \beta(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G1_{m2} = \beta(\sigma_m + \sigma_{m+1}),$$

$$Z2_{m1} = \eta(\delta_{m-1} + \delta_m) + \alpha(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$Z2_{m2} = \eta(\delta_m + \delta_{m+1}) + \alpha(\sigma_m + \sigma_{m+1}),$$

$$G2_{m1} = \eta(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \beta(\delta_{m-1} + \delta_m),$$

$$G2_{m2} = \eta(\sigma_m + \sigma_{m+1}) + \beta(\delta_m + \delta_{m+1})$$

dır. (2.2.2.4) denklemlerinde δ ve σ yerine (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} & [A + \frac{\Delta t}{2}(B + C(Z2_m) - D)]\delta^{n+1} + [\frac{\Delta t}{2}C(Z1_m)]\sigma^{n+1} \\ & = [A - \frac{\Delta t}{2}(B + C(Z2_m) - D)]\delta^n - [\frac{\Delta t}{2}C(Z1_m)]\sigma^n, \end{aligned} \tag{2.2.2.5a}$$

$$\begin{aligned} & [\frac{\Delta t}{2}C(G1_m)]\delta^{n+1} + [A + \frac{\Delta t}{2}(B + C(G2_m) - D)]\sigma^{n+1} \\ & = [-\frac{\Delta t}{2}C(G1_m)]\delta^n + [A - \frac{\Delta t}{2}(B + C(G2_m) - D)]\sigma^n \end{aligned} \tag{2.2.2.5b}$$

formunda $(2N + 4)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. δ_{-1} , δ_N , σ_{-1} ve σ_N parametreleri sınır şartları yardımıyla sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri (2.2.1.7) ve (2.2.1.8) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (2.2.2.5) denklem sistemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler hesaplanabilir.

(2.2.2.5) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi de Galerkin yöntemindekine benzer şekilde incelenir. (2.2.2.5) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{12}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta t}{2h}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t \hat{U}}{6}, \quad \gamma_4 = \frac{\Delta t \hat{U}_1}{6},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z2_m, G2_m\} \text{ ve } \hat{U}_1 = \max_m \{Z1_m, G1_m\}$$

olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \delta_m^{n+1}[11\gamma_1 + \gamma_2 - 3\gamma_3] + \delta_{m+1}^{n+1}[11\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3] + \\ & \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] + \sigma_{m-1}^{n+1}[-\gamma_4] + \sigma_m^{n+1}[-3\gamma_4] + \sigma_{m+1}^{n+1}[3\gamma_4] + \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] \quad (2.2.2.6) \\ & = \delta_{m-1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \delta_m^n[11\gamma_1 - \gamma_2 + 3\gamma_3] + \delta_{m+1}^n[11\gamma_1 - \gamma_2 - 3\gamma_3] + \\ & \delta_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_{m-1}^n[\gamma_4] + \sigma_m^n[3\gamma_4] + \sigma_{m+1}^n[-3\gamma_4] + \sigma_{m+2}^n[-\gamma_4] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}[-\gamma_4] + \delta_m^{n+1}[-3\gamma_4] + \delta_{m+1}^{n+1}[3\gamma_4] + \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] + \sigma_{m-1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \\ & \sigma_m^{n+1}[11\gamma_1 + \gamma_2 - 3\gamma_3] + \sigma_{m+1}^{n+1}[11\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3] + \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] \quad (2.2.2.7) \\ & = \delta_{m-1}^n[\gamma_4] + \delta_m^n[3\gamma_4] + \delta_{m+1}^n[-3\gamma_4] + \delta_{m+2}^n[-\gamma_4] + \sigma_{m-1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \\ & \sigma_m^n[11\gamma_1 - \gamma_2 + 3\gamma_3] + \sigma_{m+1}^n[11\gamma_1 - \gamma_2 - 3\gamma_3] + \sigma_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] \end{aligned}$$

dır. (2.2.2.6) ve (2.2.2.7) denklemlerinde (2.2.1.11) eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a &= (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi) + 10i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_1 + \\
&\quad (1 - \cos(2\varphi) + 2i \sin(\varphi) - i \sin(2\varphi))\gamma_2 + \\
&\quad (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + 4i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_3, \\
b &= (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi) + 10i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_1 - \\
&\quad (1 - \cos(2\varphi) + 2i \sin(\varphi) - i \sin(2\varphi))\gamma_2 - \\
&\quad (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + 4i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_3, \\
c &= (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + 4i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_4, \\
d &= -(-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + 4i \sin(\varphi) + i \sin(2\varphi))\gamma_4
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$[aq - b]P + [cq - d]W = 0$$

$$[cq - d]P + [aq - b]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W' ya göre aşıkâr olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 - c^2)q^2 + (2cd - 2ab)q + b^2 - d^2 = 0$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda_3 + i\lambda_4}, \\
q_2 &= \frac{\lambda_5 + i\lambda_6}{\lambda_7 + i\lambda_8}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 - (1 - \cos(2\varphi))\gamma_2 - \\
&\quad (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_3 + (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_4, \\
\lambda_2 &= (10 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_1 - (2 \sin(\varphi) - \sin(2\varphi))\gamma_2 - \\
&\quad (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_3 + (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_4,
\end{aligned}$$

$$\lambda_3 = (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 + (1 - \cos(2\varphi))\gamma_2 +$$

$$(-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_3 - (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_4,$$

$$\lambda_4 = (10 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_1 + (2 \sin(\varphi) - \sin(2\varphi))\gamma_2 +$$

$$(4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_3 - (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_4$$

ve

$$\lambda_5 = (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 - (1 - \cos(2\varphi))\gamma_2 -$$

$$(-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_3 - (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_4,$$

$$\lambda_6 = (10 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_1 - (2 \sin(\varphi) - \sin(2\varphi))\gamma_2 -$$

$$(4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_3 - (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_4,$$

$$\lambda_7 = (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 + (1 - \cos(2\varphi))\gamma_2 +$$

$$(-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_3 + (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_4,$$

$$\lambda_8 = (10 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_1 + (2 \sin(\varphi) - \sin(2\varphi))\gamma_2 +$$

$$(4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_3 + (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_4$$

dır.

$$|q_1| = \frac{|\lambda_1 + i\lambda_2|}{|\lambda_3 + i\lambda_4|}$$

olup $|q_1| \leq 1$ olması için

$$|\lambda_1 + i\lambda_2| - |\lambda_3 + i\lambda_4| \geq 0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve λ_4 yerine yukarıda verilen eşitlikleri yazılırsa

$$|\lambda_1 + i\lambda_2| - |\lambda_3 + i\lambda_4| = 4(11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 [(1 - \cos(2\varphi))\gamma_2 +$$

$$(-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_3 - (-3 + 2 \cos(\varphi) + \cos(2\varphi))\gamma_4] -$$

$$(10 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_1 [(2 \sin(\varphi) - \sin(2\varphi))\gamma_2 + (4 \sin(\varphi) +$$

$$\sin(2\varphi))\gamma_3 - (4 \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))\gamma_4]$$

$$= 32(5 + \cos(\varphi)) \sin^2(\varphi)$$

olur.

$$-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$$

olduğundan

$$|\lambda_1 + i\lambda_2| - |\lambda_3 + i\lambda_4| \geq 0$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. Böylece $|q_1| \leq 1$ dır. Benzer şekilde $|q_2| \leq 1$ şartının sağlandığı da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, Petrov-Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Kısım 2.1' de verilen üç model problem Petrov-Galerkin yöntemi ile çözüldü. Problem 1 için tüm hesaplamalar $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında yapıldı. Farklı konum adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 2.8' de verildi. Tablodan konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ ' da kayda değer iyileşmenin olmadığı görülmektedir. Farklı zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 2.9' da verildi. Tablodan zaman adımı küçüldükçe hata normlarının oldukça azaldığı açıktır.

Tablo 2.8: $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.07596	0.06943	0.08310	0.07727	0.08728	0.08431
0.5	0.36543	0.22202	0.41716	0.25388	0.41767	0.25913
1.0	0.74106	0.27678	0.83196	0.30791	0.82711	0.30677
1.5	1.10180	0.24705	1.25111	0.28065	1.24125	0.27146
2.0	1.46516	0.19946	1.66390	0.22653	1.65718	0.22647
2.5	1.82398	0.15132	2.07493	0.17110	2.07022	0.17172
3.0	2.18975	0.10952	2.49151	0.12430	2.47650	0.12470

Tablo 2.10' da Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemi ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları referans [18] de verilen düzgün dağılımlı düğüm noktaları üzerinde kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçların referans [18] de verilen sonuçlardan iyi olduğu açıktır.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 10$ aralığında $\Delta t = 0.01$ ve $N = 100$ değerleri için yapıldı. Farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞

Tablo 2.9: $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.08310	0.07727	0.02247	0.02295	0.01024	0.01482
0.5	0.41716	0.25388	0.11125	0.07093	0.02532	0.02629
1.0	0.83196	0.30791	0.20769	0.07870	0.02922	0.01788
1.5	1.25111	0.28065	0.30594	0.07236	0.03008	0.01211
2.0	1.66390	0.22653	0.40249	0.05758	0.03160	0.00622
2.5	2.07493	0.17110	0.50609	0.04319	0.03144	0.00334
3.0	2.49151	0.12430	0.60340	0.03099	0.03007	0.00242

Tablo 2.10: $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.

N	t	Petrov-Galerkin Yöntemi		[18]	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
200	0.1	0.06×10^{-6}	0.12×10^{-6}	8.21×10^{-6}	7.45×10^{-6}
	0.5	0.08×10^{-6}	0.08×10^{-6}	2.49×10^{-5}	4.10×10^{-5}
	1.0	0.14×10^{-6}	0.09×10^{-6}	3.00×10^{-5}	8.21×10^{-5}
400	0.1	0.05×10^{-6}	0.10×10^{-6}	2.05×10^{-6}	1.86×10^{-6}
	0.5	0.08×10^{-6}	0.10×10^{-6}	1.02×10^{-5}	6.22×10^{-6}
	1.0	0.06×10^{-6}	0.04×10^{-6}	2.04×10^{-5}	7.56×10^{-6}

hata normları Tablo 2.11' de verildi. Tablodan konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ ' un önemli ölçüde değişmediği görülmektedir. α ve β nın değişik değerleri için hesaplanan hata normları ile literatürdeki değişik çalışmalarda [14, 16, 18, 19] elde edilen hata normları Tablo 2.12' de karşılaştırıldı. Tablodan Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen hata normları ile referans [14, 18, 19] da verilenlerin uyumlu olduğu açıktır. Ayrıca Tablo 2.12' den Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen L_2 hata normunun referans [16] da verilen L_2 hata normundan büyük, L_∞ normunun ise daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 2.11: $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	t	U_N		V_N	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.13863	0.00857	0.10621	0.00467
	0.5	0.67846	0.04226	0.51436	0.02227
	1.0	1.33395	0.08358	1.00359	0.04293
	1.5	1.97385	0.12420	1.47638	0.06267
	2.0	2.60105	0.16431	1.93620	0.08170
	2.5	3.21691	0.20394	2.38463	0.10016
	3.0	3.82244	0.24309	2.82307	0.11799
100	0.1	0.13865	0.00853	0.10541	0.00464
	0.5	0.67824	0.04207	0.51012	0.02206
	1.0	1.33351	0.08320	0.99483	0.04255
	1.5	1.97328	0.12366	1.46324	0.06209
	2.0	2.60017	0.16354	1.91843	0.08087
	2.5	3.21579	0.20296	2.36239	0.09905
	3.0	3.82107	0.24196	2.79628	0.11668
200	0.1	0.13863	0.00851	0.10496	0.00461
	0.5	0.67816	0.04198	0.50787	0.02195
	1.0	1.33330	0.08300	0.99039	0.04233
	1.5	1.97294	0.12337	1.45654	0.06176
	2.0	2.59973	0.16317	1.90952	0.08044
	2.5	3.21519	0.20249	2.35123	0.09852
	3.0	3.82038	0.24137	2.78292	0.11604

Tablo 2.12: Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

		Petrov-Galerkin								
		[14]		[16]		[18]		[19]		
		L_2		L_2		L_2				
t	α	β	L_2	L_2	L_2	L_2	L_2			
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	6.783×10^{-4}	1.44×10^{-3}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}			
		0.3	0.03	7.610×10^{-4}	6.68×10^{-4}	2.733×10^{-5}	7.326×10^{-4}			
	1.0	0.1	0.30	1.334×10^{-3}	1.27×10^{-3}	2.405×10^{-5}	1.325×10^{-3}			
		0.3	0.03	1.500×10^{-3}	1.30×10^{-3}	2.832×10^{-5}	1.452×10^{-3}			
	$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	5.101×10^{-4}	5.42×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}		
			0.3	0.03	1.327×10^{-3}	1.20×10^{-3}	2.454×10^{-4}	1.591×10^{-3}		
1	0.1	0.30	0.995×10^{-3}	1.29×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}				
		0.3	0.03	2.617×10^{-3}	2.35×10^{-3}	4.525×10^{-4}	2.250×10^{-3}			
								L_∞		
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	4.208×10^{-5}	4.38×10^{-5}	9.619×10^{-4}	4.167×10^{-5}	Kuadratik (MQ)	4.108×10^{-5}	
		0.3	0.03	4.704×10^{-5}	4.58×10^{-5}	4.310×10^{-4}	4.590×10^{-5}		4.285×10^{-5}	
	1	0.1	0.30	8.320×10^{-5}	8.66×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}		8.201×10^{-5}	
		0.3	0.03	9.407×10^{-5}	9.16×10^{-5}	1.268×10^{-3}	9.182×10^{-5}		8.873×10^{-5}	
	$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	0.221×10^{-4}	4.99×10^{-5}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}		3.731×10^{-5}
			0.3	0.03	1.819×10^{-4}	1.81×10^{-4}	1.148×10^{-3}	5.729×10^{-4}		7.680×10^{-5}
1.0	0.1	0.30	4.255×10^{-5}	9.92×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}		7.358×10^{-5}		
		0.3	0.03	3.636×10^{-4}	3.62×10^{-4}	1.638×10^{-3}	3.617×10^{-4}		1.572×10^{-4}	

Problem 3, $0 \leq x \leq 1$ aralığında $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ için çözüldü. Tablo 2.13' de $\eta = 2$, $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 45$ için Problem 3' ün farklı zamanlarda U_N ve V_N çözümleri verildi.

Tablo 2.13: $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 45$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.

x	t	$\alpha = \beta = 10$		$\alpha = \beta = 45$	
		U_N	V_N	U_N	V_N
0.2	0.1	0.07429	0.04838	0.04509	0.01852
	0.2	0.02731	0.02382	0.01356	0.00991
	0.3	0.01089	0.00969	0.00563	0.00438
	0.4	0.00418	0.00374	0.00222	0.00176
0.4	0.1	0.12610	0.10097	0.07299	0.04726
	0.2	0.04722	0.04184	0.02453	0.01893
	0.3	0.01813	0.01619	0.00962	0.00760
	0.4	0.00684	0.00612	0.00367	0.00292
0.6	0.1	0.14327	0.14010	0.08811	0.08447
	0.2	0.05184	0.04681	0.02934	0.02412
	0.3	0.01882	0.01688	0.01036	0.00835
	0.4	0.00694	0.00621	0.00378	0.00303
0.8	0.1	0.10701	0.11692	0.09146	0.10087
	0.2	0.03495	0.03201	0.02203	0.01899
	0.3	0.01201	0.01081	0.00685	0.00561
	0.4	0.00434	0.00389	0.00239	0.00193

$\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum değerleri ile referans [18] de $\Delta t = 0.01$ için verilenler Tablo 2.14' de karşılaştırıldı. Tablodan her ne kadar karşılaştırma Δt ' nin farklı değerleri için yapıldıysa da Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçlar ile referans [18] dekilerin uyum içinde olduğu ve verilen maksimum değerleri aynı x noktalarında aldıkları açıkça görülmektedir.

Tablo 2.14: $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarında U_N ve V_N ' nin maksimum değerlerinin referans [18] de verilenler ile karşılaştırılması.

		Petrov-Galerkin [18]			
		Yöntemi ($\Delta t = 0.001$)		($\Delta t = 0.01$)	
	t	U_{\max}^N	x	U_{\max}^N	x
$\alpha = \beta = 10$	0.1	0.14349	0.58	0.14456	0.58
	0.2	0.05252	0.54	0.05237	0.54
	0.3	0.01945	0.52	0.01932	0.52
	0.4	0.00724	0.50	0.00718	0.50
$\alpha = \beta = 10$		V_{\max}^N		V_{\max}^N	
	0.1	0.14241	0.66	0.14306	0.66
	0.2	0.04724	0.56	0.04697	0.56
	0.3	0.01741	0.52	0.01725	0.52
	0.4	0.00648	0.50	0.00641	0.50

2.2.3 Subdomain Yöntemi

Bu kısımda, (2.1) ile verilen coupled Burgers denkleminin subdomain yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Subdomain yönteminde W_m ağırlık fonksiyonları, $m = 0(1)N$ olmak üzere,

$$W_m = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.2.3.1)$$

dir. Bu ağırlık fonksiyonu (2.2.2) de yerine yazılırsa her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} [U_t - U_{xx} + (\eta U + \alpha V)U_x + \alpha UV_x] dx &= 0, \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} [V_t - V_{xx} + (\eta V + \beta U)V_x + \beta U_x V] dx &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. $\xi = x - x_m$ lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa

$$\int_0^h [U_t - U_{\xi\xi} + (\eta U + \alpha V)U_\xi + \alpha UV_\xi] d\xi = 0, \quad (2.2.3.2a)$$

$$\int_0^h [V_t - V_{\xi\xi} + (\eta V + \beta U)V_\xi + \beta U_\xi V] d\xi = 0 \quad (2.2.3.2b)$$

bulunur. (2.2.3.2) denklem sistemindeki integralleri hesaplamak için önce sistemde yaklaşım fonksiyonları yerine (2.2.5) ile verilen kuadratik baz fonksiyonları yazılır ve sonra (2.2.3.2a) denklemindeki her bir terim hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^h U_t d\xi &= \int_0^h \left[\left(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2}\right) \dot{\delta}_{m-1} + \left(1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2}\right) \dot{\delta}_m + \frac{\xi^2}{h^2} \dot{\delta}_{m+1} \right] d\xi \\ &= \frac{h}{3} (\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemde $\dot{\delta}$ yerine

$$\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} \quad (2.2.3.3)$$

ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_0^h U_t d\xi = \frac{h}{3\Delta t} [(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 4(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n)]$$

bulunur. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_{\xi\xi} d\xi$ integrali hesaplanırsa

$$\int_0^h U_{\xi\xi} d\xi = [U_\xi]_0^h = \frac{2}{h} (\delta_{m+1} - 2\delta_m + \delta_{m-1})$$

elde edilir. Bu denklemde δ yerine

$$\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2} \quad (2.2.3.4)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_0^h U_{\xi\xi} d\xi = \frac{1}{h} [\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - 2(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) + \delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n]$$

bulunur. (2.2.3.2a) denklemdeki diğer terimler, $Z1_m = \alpha U$ ve $Z2_m = \eta U + \alpha V$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_0^h (\eta U + \alpha V) U_{\xi} d\xi &= Z2_m \int_0^h U_{\xi} d\xi = Z2_m [U]_0^h \\ &= Z2_m \left[-\left(\frac{\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n}{2} \right) + \left(\frac{\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^h \alpha U V_{\xi} d\xi &= Z1_m \int_0^h V_{\xi} d\xi = Z1_m [V]_0^h \\ &= Z1_m \left[-\left(\frac{\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $Z1_m$ ve $Z2_m$ eşitliklerinde, U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} Z1_m &= \alpha(\delta_{m-1} + \delta_m), \\ Z2_m &= \eta(\delta_{m-1} + \delta_m) + \alpha(\sigma_{m-1} + \sigma_m) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (2.2.3.2a) denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{h}{3\Delta t} - \frac{1}{h} - \frac{Z2_m}{2} \right] + \delta_m^{n+1} \left[\frac{4h}{3\Delta t} + \frac{2}{h} \right] + \\ &\delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{h}{3\Delta t} - \frac{1}{h} + \frac{Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{Z1_m}{2} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{Z1_m}{2} \right] \\ &= \delta_{m-1}^n \left[\frac{h}{3\Delta t} + \frac{1}{h} + \frac{Z2_m}{2} \right] + \delta_m^n \left[\frac{4h}{3\Delta t} - \frac{2}{h} \right] + \\ &\delta_{m+1}^n \left[\frac{h}{3\Delta t} + \frac{1}{h} - \frac{Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{Z1_m}{2} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[-\frac{Z1_m}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.2.3.5)$$

denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde (2.2.3.2) denklem sisteminin ikinci denklemindeki integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^h V_t d\xi &= \int_0^h [(1 - 2\frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2}{h^2})\dot{\sigma}_{m-1} + (1 + 2\frac{\xi}{h} - 2\frac{\xi^2}{h^2})\dot{\sigma}_m + \frac{\xi^2}{h^2}\dot{\sigma}_{m+1}]d\xi \\ &= \frac{h}{3}(\dot{\sigma}_{m-1} + 4\dot{\sigma}_m + \dot{\sigma}_{m+1})\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemdede $\dot{\sigma}$ yerine

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \quad (2.2.3.6)$$

ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_0^h V_t d\xi = \frac{h}{3\Delta t}[(\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) + 4(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n) + (\sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n)]$$

bulunur. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{\xi\xi} d\xi$ integrali hesaplanırsa

$$\int_0^h V_{\xi\xi} d\xi = [V_{\xi}^1]_{x_m}^{x_{m+1}} = [V_{\xi}(x_{m+1}) - V_{\xi}(x_m)] = \frac{2}{h}(\sigma_{m+1} - 2\sigma_m + \sigma_{m-1})$$

elde edilir. Bu denklemdede σ yerine

$$\sigma = \frac{\sigma^n + \sigma^{n+1}}{2} \quad (2.2.3.7)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_0^h V_{\xi\xi} d\xi = \frac{1}{h}[\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n - 2(\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n) + \sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n]$$

elde edilir. (2.2.3.2b) denklemindeki diğer terimler, $G1_m = \beta V$ ve $G2_m = \eta V + \beta U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_0^h (\eta V + \beta U)V_{\xi} d\xi &= G2_m \int_0^h V_{\xi} d\xi = G2_m [V]_0^h \\ &= G2_m [-(\frac{\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n}{2}) + (\frac{\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n}{2})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^h \beta U_{\xi} V d\xi &= G1_m \int_0^h U_{\xi} d\xi = G1_m [U]_0^h \\ &= G1_m [-(\frac{\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n}{2}) + (\frac{\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n}{2})]\end{aligned}$$

olarak bulunur. $G1_m$ ve $G2_m$ eşitliklerinde, U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki değerleri kullanılırsa

$$G1_m = \beta(\sigma_{m-1} + \sigma_m),$$

$$G2_m = \eta(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \beta(\delta_{m-1} + \delta_m)$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (2.2.3.2b) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}[-\frac{G1_m}{2}] + \delta_{m+1}^{n+1}[\frac{G1_m}{2}] + \sigma_{m-1}^{n+1}[\frac{h}{3\Delta t} - \frac{1}{h} - \frac{G2_m}{2}] + \\ & \sigma_m^{n+1}[\frac{4h}{3\Delta t} + \frac{2}{h}] + \sigma_{m+1}^{n+1}[\frac{h}{3\Delta t} - \frac{1}{h} + \frac{G2_m}{2}] = \delta_{m-1}^n[\frac{G1_m}{2}] + \quad (2.2.3.8) \\ & \delta_{m+1}^n[-\frac{G1_m}{2}] + \sigma_{m-1}^n[\frac{h}{3\Delta t} + \frac{1}{h} + \frac{G2_m}{2}] + \sigma_m^n[\frac{4h}{3\Delta t} - \frac{2}{h}] + \\ & \sigma_{m+1}^n[\frac{h}{3\Delta t} + \frac{1}{h} - \frac{G2_m}{2}] \end{aligned}$$

bulunur. (2.2.3.5) ve (2.2.3.8) denklemlerinden oluşan sistemde $(2N + 2)$ -tane denklem, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N+1})$ olmak üzere $(2N + 6)$ -tane hesaplanması gereken parametre bulunmaktadır. $\delta_{-1}, \delta_N, \delta_{N+1}, \sigma_{-1}, \sigma_N$ ve σ_{N+1} parametreleri sınır şartları yardımıyla sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri (2.2.1.7) ve (2.2.1.8) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (2.2.3.5) ve (2.2.3.8) ile verilen denklem sistemleri kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler hesaplanabilir.

(2.2.3.5) ve (2.2.3.8) denklemlerinin lineer olmayan terimlerine, her bir zaman adımında (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi de Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemlerinde olduğu gibi von Neumann yöntemi kullanılarak incelenecektir. (2.2.3.5) ve (2.2.3.8) denklemlerinin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{3\Delta t}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{h}, \quad \gamma_3 = \frac{\hat{U}}{2}, \quad \gamma_4 = \frac{\hat{U}_1}{2},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z2_m, G2_m\} \text{ ve } \hat{U}_1 = \max_m \{Z1_m, G1_m\}$$

olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \delta_m^{n+1}[4\gamma_1 + 2\gamma_2] + \delta_{m+1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] + \\ & \sigma_{m-1}^{n+1}[-\gamma_4] + \sigma_{m+1}^{n+1}[\gamma_4] = \delta_{m-1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \delta_m^n[4\gamma_1 - 2\gamma_2] + \\ & \delta_{m+1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_{m-1}^n[\gamma_4] + \sigma_{m+1}^n[-\gamma_4] \end{aligned} \quad (2.2.3.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}[-\gamma_4] + \delta_{m+1}^{n+1}[\gamma_4] + \sigma_{m-1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_m^{n+1}[4\gamma_1 + 2\gamma_2] + \\ & \sigma_{m+1}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] = \delta_{m-1}^n[\gamma_4] + \delta_{m+1}^n[-\gamma_4] + \sigma_{m-1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \\ & \sigma_m^n[4\gamma_1 - 2\gamma_2] + \sigma_{m+1}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] \end{aligned} \quad (2.2.3.10)$$

dır. (2.2.3.9) ve (2.2.3.10) denklemlerinde δ_m^n ve σ_m^n yerine (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} a &= (4 + 2 \cos(\varphi))\gamma_1 + (2 - 2 \cos(\varphi))\gamma_2 + i(2 \sin(\varphi))\gamma_3, \\ b &= (4 + 2 \cos(\varphi))\gamma_1 - (2 - 2 \cos(\varphi))\gamma_2 - i(2 \sin(\varphi))\gamma_3, \\ c &= i(2 \sin(\varphi))\gamma_4, \\ d &= -i(2 \sin(\varphi))\gamma_4 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$[aq - b]P + [cq - d]W = 0$$

$$[cq - d]P + [aq - b]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W' ya göre aşık olmaması için en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 - c^2)q^2 + (2cd - 2ab)q + b^2 - d^2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3},$$

$$q_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_4}$$

bulunur. Burada

$$\lambda_1 = 4h^2 + 2h^2 \cos(\varphi),$$

$$\lambda_2 = 6\Delta t - 6\Delta t \cos(\varphi),$$

$$\lambda_3 = 3h\hat{U}\Delta t \sin(\varphi) - 3h\hat{U}_1\Delta t \sin(\varphi),$$

$$\lambda_4 = -3h\hat{U}\Delta t \sin(\varphi) - 3h\hat{U}_1\Delta t \sin(\varphi)$$

dır. Kararlılık için $|q_1| \leq 1$ ve $|q_2| \leq 1$ olmalıdır. $|q_1| \leq 1$ olması için

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. λ_1, λ_2 ve λ_3 ' ün yukarıdaki eşitlikleri kullanılırsa,

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| = 4\lambda_1\lambda_2 = 4(4h^2 + 2h^2 \cos(\varphi))(6\Delta t - 6\Delta t \cos(\varphi))$$

bulunur.

$$-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$$

olduğundan

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. Böylece $|q_1| \leq 1$ dır. Benzer şekilde $|q_2| \leq 1$ şartının sağlandığı da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, subdomain yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, yukarıda verilen üç model problem subdomain sonlu eleman yöntemi ile çözüldü. Problem 1 için tüm hesaplamalar $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında yapıldı. Problem 1' in farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 2.15 ve 2.16' da verildi. Tablolardan konum ve zaman adımlarının küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ ' un azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 2.15: $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.13249	0.11965	0.03374	0.03052	0.00906	0.00820
0.5	0.66228	0.40090	0.16867	0.10230	0.04529	0.02747
1.0	1.32413	0.48616	0.33731	0.12409	0.09058	0.03332
1.5	1.98553	0.44216	0.50593	0.11289	0.13587	0.03032
2.0	2.64650	0.35746	0.67452	0.09129	0.18115	0.02452
2.5	3.30703	0.27092	0.84307	0.06920	0.22644	0.01859
3.0	3.96713	0.19712	1.01160	0.05036	0.27172	0.01353

Tablo 2.16: $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.03374	0.03052	0.03311	0.02996	0.03291	0.02978
0.5	0.16867	0.10230	0.16554	0.10041	0.16454	0.09980
1.0	0.33731	0.12409	0.33106	0.12179	0.32906	0.12105
1.5	0.50593	0.11289	0.49655	0.11080	0.49355	0.11013
2.0	0.67452	0.09129	0.66201	0.08959	0.65801	0.08905
2.5	0.84307	0.06920	0.82745	0.06792	0.82245	0.06751
3.0	1.01160	0.05036	0.99285	0.04943	0.98685	0.04913

Tablo 2.17' de subdomain sonlu eleman yöntemi ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları referans [18] de verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan subdomain sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçların referans [18] de verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 10$ aralığında $\Delta t = 0.01$ ve $N = 100$ değerleri için yapıldı. Tablo 2.18, farklı t zamanlarında farklı konum adımları için hesaplanan hata normlarını göstermektedir. Tablo 2.18' den konum adımı küçüldükçe hata normlarında kayda değer ölçüde değişimin olmadığı görülmektedir.

Tablo 2.19' da α ve β nın değişik değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları

Tablo 2.17: $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.

N	t	Subdomain Yöntemi		[18]	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
200	0.1	8.23×10^{-6}	7.45×10^{-6}	8.21×10^{-6}	7.45×10^{-6}
	0.5	4.12×10^{-5}	2.50×10^{-5}	2.49×10^{-5}	4.10×10^{-5}
	1.0	8.23×10^{-5}	3.03×10^{-5}	3.00×10^{-5}	8.21×10^{-5}
400	0.1	2.06×10^{-6}	1.87×10^{-6}	2.05×10^{-6}	1.86×10^{-6}
	0.5	1.03×10^{-5}	6.26×10^{-6}	1.02×10^{-5}	6.22×10^{-6}
	1.0	2.06×10^{-5}	7.59×10^{-6}	2.04×10^{-5}	7.56×10^{-6}

ile referans [14, 16, 18, 19] da elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldı. Tablo 2.19' dan subdomain sonlu eleman yöntemiyle elde edilen hata normlarının referans [14, 18, 19] da verilen hata normları ile uyumlu olduğu, bu yöntemle elde edilen L_2 hata normunun referans [16] da verileden daha büyük, L_∞ normunun ise daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 2.18: $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2'nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	t	U_N		V_N	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.13893	0.00861	0.10653	0.00475
	0.5	0.67907	0.04233	0.51509	0.02235
	1.0	1.33481	0.08367	1.00455	0.04303
	1.5	1.97500	0.12428	1.47759	0.06276
	2.0	2.60231	0.16442	1.93743	0.08182
	2.5	3.21828	0.20405	2.38598	0.10027
	3.0	3.82393	0.24321	2.82451	0.11810
100	0.1	0.13871	0.00854	0.10547	0.00465
	0.5	0.67842	0.04209	0.51022	0.02208
	1.0	1.33375	0.08322	0.99504	0.04257
	1.5	1.97356	0.12368	1.46347	0.06211
	2.0	2.60052	0.16357	1.91873	0.08090
	2.5	3.21615	0.20300	2.36271	0.09909
	3.0	3.82148	0.24200	2.79669	0.11672
200	0.1	0.13864	0.00852	0.10498	0.00462
	0.5	0.67821	0.04198	0.50789	0.02195
	1.0	1.33338	0.08301	0.99044	0.04233
	1.5	1.97305	0.12337	1.45658	0.06176
	2.0	2.59986	0.16318	1.90957	0.08044
	2.5	3.21536	0.20250	2.35128	0.09851
	3.0	3.82055	0.24139	2.78299	0.11605

Tablo 2.19: Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

		Subdomain		[14]	[16]	[18]	[19]		
t	α	β	Yöntemi	L_2	L_2	L_2			
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	6.784×10^{-4}	1.44×10^{-3}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}		
								0.3	0.03
	1.0	0.1	0.30	1.334×10^{-3}	1.27×10^{-3}	2.405×10^{-5}	1.325×10^{-3}		
								0.3	0.03
	0.5	0.1	0.30	5.102×10^{-4}	5.42×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}		
								0.3	0.03
1	0.1	0.30	0.995×10^{-3}	1.29×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}			
							0.3	0.03	2.617×10^{-3}
L_∞									
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	4.209×10^{-5}	4.38×10^{-5}	9.619×10^{-4}	4.167×10^{-5}	Kuadratik	4.108×10^{-5}
	1	0.1	0.30	8.322×10^{-5}	8.66×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}	Kuadratik	8.157×10^{-5}
	0.5	0.1	0.30	0.221×10^{-4}	4.99×10^{-5}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}	Kuadratik	3.731×10^{-5}
1.0	0.1	0.30	4.257×10^{-5}	9.92×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}	Kuadratik	7.394×10^{-5}	
									0.3

Problem 3, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ için $0 \leq x \leq 1$ aralığında çözüldü. $\eta = 2$, $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N çözümleri Tablo 2.20' de verildi.

Tablo 2.20: $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.

x	t	$\alpha = \beta = 10$		$\alpha = \beta = 100$	
		U_N	V_N	U_N	V_N
0.2	0.1	0.07421	0.04842	0.03007	0.00465
	0.2	0.02729	0.02382	0.00713	0.00400
	0.3	0.01088	0.00969	0.00288	0.00183
	0.4	0.00418	0.00373	0.00113	0.00074
0.4	0.1	0.12602	0.10100	0.04076	0.01735
	0.2	0.04719	0.04184	0.01262	0.00788
	0.3	0.01811	0.01618	0.00489	0.00320
	0.4	0.00683	0.00611	0.00186	0.00124
0.6	0.1	0.14324	0.14007	0.04031	0.03926
	0.2	0.05181	0.04679	0.01472	0.01040
	0.3	0.01880	0.01686	0.00524	0.00356
	0.4	0.00693	0.00621	0.00191	0.00129
0.8	0.1	0.10699	0.11684	0.03821	0.04904
	0.2	0.03492	0.03199	0.01087	0.00841
	0.3	0.01200	0.01080	0.00345	0.00241
	0.4	0.00433	0.00389	0.00121	0.00082

Tablo 2.21, Problem 3' ün subdomain sonlu eleman yöntemiyle elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum değerleri ile referans [18] de $\Delta t = 0.01$ için verilenlerin karşılaştırmasını göstermektedir. Tablodan her ne kadar karşılaştırma Δt ' nin farklı değerleri için yapıldıysa da verilen maksimum değerlerin ve bu değerleri aldıkları x noktalarının uyumlu olduğu kolayca görülmektedir.

Tablo 2.21: Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N ' nin maksimum değerleri ile referans [18] dekilerin karşılaştırılması.

		Subdomain Yöntemi		[18]	
		$(\Delta t = 0.001)$		$(\Delta t = 0.01)$	
	t	U_{\max}^N	x	U_{\max}^N	x
$\alpha = \beta = 10$	0.1	0.14345	0.58	0.14456	0.58
	0.2	0.05249	0.54	0.05237	0.54
	0.3	0.01943	0.52	0.01932	0.52
	0.4	0.00723	0.50	0.00718	0.50
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04099	0.44	0.04175	0.46
	0.2	0.01473	0.58	0.01479	0.58
	0.3	0.00535	0.54	0.00534	0.54
	0.4	0.00199	0.52	0.00198	0.52
$\alpha = \beta = 10$		V_{\max}^N		V_{\max}^N	
	0.1	0.14235	0.66	0.14306	0.66
	0.2	0.04723	0.56	0.04697	0.56
	0.3	0.01740	0.52	0.01725	0.52
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04992	0.76	0.05065	0.76
	0.2	0.01049	0.64	0.01033	0.64
	0.3	0.00360	0.56	0.00350	0.56
	0.4	0.00133	0.52	0.00129	0.52

2.2.4 Kollokasyon Yöntemi

Bu kısımda, (2.1) coupled Burgers denkleminin kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bölüm 1' de (1.4.5.1) ile verilen $\phi_m(x)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak (2.1) coupled Burgers denkleminin $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ çözümüne karşılık gelen $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ yaklaşımları

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (2.2.4.1)$$

şeklinde yazılabilir [8]. Burada δ_j ve σ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (1.4.5.1) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonlarına

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

olarak tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\ \phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \phi_{m+3} &= \xi^5 \end{aligned} \quad (2.2.4.2)$$

kuintik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm B-spline değerleri sıfır olduğundan $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ yaklaşık çözümleri (2.2.4.2) denklemleri ile verilen kuintik baz fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (2.2.4.3)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.4.2) kuintik B-spline fonksiyonları ve (2.2.4.3) yaklaşımları kullanılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x' e göre birinci ve ikinci

mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
V_N(x_m, t) &= V_m = \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \\
U'_m &= \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
V'_m &= \frac{5}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \\
U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \\
V''_m &= \frac{20}{h^2}(\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2})
\end{aligned} \tag{2.2.4.4}$$

olarak elde edilir. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir.

(2.1) denklemlerinde (2.2.4.4) yaklaşımları kullanılırsa, $Z1_m = \alpha U$, $Z2_m = \eta U + \alpha V$, $G1_m = \beta V$ ve $G2_m = \eta V + \beta U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) - \\
&\frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) + \\
&\frac{5Z2_m}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) + \\
&\frac{5Z1_m}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.4.5a}$$

$$\begin{aligned}
&(\dot{\sigma}_{m-2} + 26\dot{\sigma}_{m-1} + 66\dot{\sigma}_m + 26\dot{\sigma}_{m+1} + \dot{\sigma}_{m+2}) - \\
&\frac{20}{h^2}(\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}) + \\
&\frac{5G2_m}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) + \\
&\frac{5G1_m}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.4.5b}$$

elde edilir. (2.2.4.5) denklem sistemlerinde δ ve σ yerine (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa sistemin genelleştirilmiş satırları

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{10}{h^2} - \frac{5}{2h} Z2_m \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{20}{h^2} - \frac{25}{h} Z2_m \right] + \\
& \delta_m^{n+1} \left[\frac{66}{\Delta t} + \frac{60}{h^2} \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{20}{h^2} + \frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{10}{h^2} + \frac{5}{2h} Z2_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{5}{2h} Z1_m \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{25}{h} Z1_m \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{25}{h} Z1_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{5}{2h} Z1_m \right] \quad (2.2.4.6) \\
& = \delta_{m-2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{10}{h^2} + \frac{5}{2h} Z2_m \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{20}{h^2} + \frac{25}{h} Z2_m \right] + \\
& \delta_m^n \left[\frac{66}{\Delta t} - \frac{60}{h^2} \right] + \delta_{m+1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{20}{h^2} - \frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{10}{h^2} - \frac{5}{2h} Z2_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^n \left[\frac{5}{2h} Z1_m \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{25}{h} Z1_m \right] + \sigma_{m+1}^n \left[-\frac{25}{h} Z1_m \right] + \sigma_{m+2}^n \left[-\frac{5}{2h} Z1_m \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{5}{2h} G1_m \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{25}{h} G1_m \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{25}{h} G1_m \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{5}{2h} G1_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{10}{h^2} - \frac{5}{2h} G2_m \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{20}{h^2} - \frac{25}{h} G2_m \right] + \\
& \sigma_m^{n+1} \left[\frac{66}{\Delta t} + \frac{60}{h^2} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{20}{h^2} + \frac{25}{h} G2_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{10}{h^2} + \frac{5}{2h} G2_m \right] \\
& = \delta_{m-2}^n \left[\frac{5}{2h} G1_m \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{25}{h} G1_m \right] + \delta_{m+1}^n \left[-\frac{25}{h} G1_m \right] + \delta_{m+2}^n \left[-\frac{5}{2h} G1_m \right] + \quad (2.2.4.7) \\
& \sigma_{m-2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{10}{h^2} + \frac{5}{2h} G2_m \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{20}{h^2} + \frac{25}{h} G2_m \right] + \\
& \sigma_m^n \left[\frac{66}{\Delta t} - \frac{60}{h^2} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{20}{h^2} - \frac{25}{h} G2_m \right] + \sigma_{m+2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{10}{h^2} - \frac{5}{2h} G2_m \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Z1_m$, $Z2_m$, $G1_m$ ve $G2_m$

$$\begin{aligned}
Z1_m &= \alpha(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
Z2_m &= \eta(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) + \\
& \quad \alpha(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}), \\
G1_m &= \beta(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}), \\
G2_m &= \eta(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) + \\
& \quad \beta(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned}$$

dir. Böylece $(2N + 10)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. (2.2.4.4) yaklaşımlarında U_m , V_m , U'_m ve V'_m sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} , δ_{N+2} , σ_{-2} , σ_{-1} , σ_{N+1} ve σ_{N+2} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \delta_{m-1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \delta_m^{n+1}[66\gamma_1 + 6\gamma_2] + \\
& \delta_{m+1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] + \sigma_{m-2}^{n+1}[-\gamma_4] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1}[-10\gamma_4] + \sigma_{m+1}^{n+1}[10\gamma_4] + \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] = \delta_{m-2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \quad (2.2.4.8) \\
& \delta_{m-1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \delta_m^n[66\gamma_1 - 6\gamma_2] + \delta_{m+1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \\
& \delta_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3] + \sigma_{m-2}^n[\gamma_4] + \sigma_{m-1}^n[10\gamma_4] + \sigma_{m+1}^n[-10\gamma_4] + \sigma_{m+2}^n[-\gamma_4]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1}[-\gamma_4] + \delta_{m-1}^{n+1}[-10\gamma_4] + \delta_{m+1}^{n+1}[10\gamma_4] + \delta_{m+2}^{n+1}[\gamma_4] + \sigma_{m-2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \sigma_m^{n+1}[66\gamma_1 + 6\gamma_2] + \sigma_{m+1}^{n+1}[26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \\
& \sigma_{m+2}^{n+1}[\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3] = \delta_{m-2}^n[\gamma_4] + \delta_{m-1}^n[10\gamma_4] + \delta_{m+1}^n[-10\gamma_4] + \delta_{m+2}^n[-\gamma_4] + \quad (2.2.4.9) \\
& \sigma_{m-2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3] + \sigma_{m-1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 + 10\gamma_3] + \sigma_m^n[66\gamma_1 - 6\gamma_2] + \\
& \sigma_{m+1}^n[26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3] + \sigma_{m+2}^n[\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3]
\end{aligned}$$

dır. (2.2.4.8) ve (2.2.4.9) denklemlerinde (2.2.1.11) eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a &= (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1 + (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2 + \\
& i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3, \\
b &= (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1 - (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2 - \\
& i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3, \\
c &= i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4, \\
d &= -i(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$[aq - b]P + [cq - d]W = 0$$

$$[cq - d]P + [aq - b]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W ' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 - c^2)q^2 + (2cd - 2ab)q + b^2 - d^2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3},$$

$$q_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_4}$$

bulunur. Burada

$$\lambda_1 = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$\lambda_2 = (6 - 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2,$$

$$\lambda_3 = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4 - (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$\lambda_4 = -(2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4 - (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3$$

dır. Kararlılık için $|q_1| \leq 1$ ve $|q_2| \leq 1$ olmalıdır. $|q_1| \leq 1$ olması için

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. λ_1, λ_2 ve λ_3 ' ün yukarıdaki eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| &= 4\lambda_1\lambda_2 \\ &= 4(66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1 [6 - \\ &\quad 2 \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi)]\gamma_2 \\ &= \frac{40}{h^2 \Delta t} (6 - 4 \cos(\varphi) - 2 \cos(2\varphi)) [66 + \\ &\quad 52 \cos(\varphi) + 2 \cos(2\varphi)] \end{aligned}$$

dır.

$$-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$$

olduğundan

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Böylece $|q_1| \leq 1$ dır. Benzer şekilde $|q_2| \leq 1$ şartının sağlandığı da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, kollokasyon yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Kısım 2.1' de verilen üç model problem kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile çözüldü. Problem 1 için tüm hesaplamalar $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında yapıldı. Tablo 2.22 ve 2.23, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe hata normlarının oldukça azaldığı görülmektedir.

Tablo 2.22: $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.061128	0.150742	0.028151	0.073382	0.013578	0.033716
0.5	0.103880	0.111999	0.048968	0.053816	0.025144	0.025814
1.0	0.147630	0.070620	0.071134	0.033296	0.038169	0.016302
1.5	0.194578	0.044052	0.095031	0.020496	0.052147	0.010862
2.0	0.244248	0.030840	0.120279	0.015099	0.066781	0.008370
2.5	0.295325	0.022524	0.146256	0.011147	0.081764	0.006261
3.0	0.347013	0.016128	0.172601	0.008036	0.096929	0.004540

Tablo 2.23: $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

t	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.028151	0.073382	0.014530	0.038919	0.003512	0.008930
0.5	0.048968	0.053816	0.024585	0.027399	0.005926	0.006305
1.0	0.071134	0.033296	0.034929	0.016937	0.008297	0.003900
1.5	0.095031	0.020496	0.046081	0.010417	0.010843	0.002399
2.0	0.120279	0.015099	0.057939	0.007301	0.013564	0.001721
2.5	0.146256	0.011147	0.070195	0.005341	0.016385	0.001248
3.0	0.172601	0.008036	0.082659	0.003835	0.019260	0.000892

Tablo 2.24' de, kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları referans [18] de verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçların referans [18] de verilenlerden iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 2.24: $\Delta t = 0.001$ ve $N = 200, 400$ için farklı t zamanlarında Problem 1' in L_2 ve L_∞ hata normlarının referans [18] dekilerle karşılaştırılması.

N	t	Kollokasyon Yöntemi		[18]	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
200	0.1	1.47×10^{-6}	4.06×10^{-6}	8.21×10^{-6}	7.45×10^{-6}
	0.5	2.46×10^{-6}	2.78×10^{-6}	2.49×10^{-5}	4.10×10^{-5}
	1.0	3.45×10^{-6}	1.70×10^{-6}	3.00×10^{-5}	8.21×10^{-5}
400	0.1	0.69×10^{-6}	1.99×10^{-6}	2.05×10^{-6}	1.86×10^{-6}
	0.5	1.17×10^{-6}	1.35×10^{-6}	1.02×10^{-5}	6.22×10^{-6}
	1.0	1.66×10^{-6}	0.82×10^{-6}	2.04×10^{-5}	7.56×10^{-6}

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 10$ aralığında $\Delta t = 0.01$ ve $N = 100$ değerleri için yapıldı. Tablo 2.25, farklı zamanlarda farklı konum adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablo 2.25' den konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ ' da önemli ölçüde değişimin olmadığı görülmektedir.

Tablo 2.26' da α ve β nın değişik değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları referans [14, 16, 18, 19] da verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile karşılaştırıldı. Tablodan kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen hata normlarının referans [14, 18, 19] da verilenler ile oldukça uyumlu olduğu açıktır. Ayrıca Tablo 2.26' dan kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen L_2 hata normunun referans [16] da verilenden daha büyük, L_∞ normunun ise daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 2.25: $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.3$ için farklı t zamanlarında Problem 2' nin L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

N	t	U_N		V_N	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.13661	0.00870	0.10278	0.00484
	0.5	0.66812	0.04185	0.49687	0.02179
	1.0	1.31320	0.08271	0.96842	0.04192
	1.5	1.94280	0.12291	1.42371	0.06115
	2.0	2.55958	0.16257	1.86597	0.07956
	2.5	3.16508	0.20172	2.29708	0.09750
	3.0	3.76030	0.24042	2.71831	0.11483
100	0.1	0.13770	0.00850	0.10379	0.00460
	0.5	0.67324	0.04187	0.50148	0.02182
	1.0	1.32335	0.08277	0.97747	0.04205
	1.5	1.95795	0.12300	1.43711	0.06131
	2.0	2.57971	0.16267	1.88365	0.07984
	2.5	3.19016	0.20186	2.31896	0.09775
	3.0	3.79032	0.24062	2.74434	0.11510
200	0.1	0.13823	0.00850	0.10427	0.00460
	0.5	0.67580	0.04188	0.50381	0.02184
	1.0	1.32845	0.08280	0.98206	0.04209
	1.5	1.96557	0.12304	1.44391	0.06139
	2.0	2.58984	0.16274	1.89262	0.07993
	2.5	3.20279	0.20195	2.33007	0.09787
	3.0	3.80545	0.24071	2.75755	0.11528

Tablo 2.26: Problem 2 için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

		Kollokasyon								
		Yöntemi		[14]	[16]	[18]	[19]			
t	α	β	L_2	L_2	L_2	L_2				
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	6.732×10^{-4}	1.44×10^{-3}	3.245×10^{-5}	6.736×10^{-4}			
		0.3	0.03	7.430×10^{-4}	6.68×10^{-4}	2.733×10^{-5}	7.326×10^{-4}			
	1.0	0.1	0.30	1.323×10^{-3}	1.27×10^{-3}	2.405×10^{-5}	1.325×10^{-3}			
		0.3	0.03	1.464×10^{-3}	1.30×10^{-3}	2.832×10^{-5}	1.452×10^{-3}			
	$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	5.015×10^{-4}	5.42×10^{-4}	2.746×10^{-5}	9.057×10^{-4}		
			0.3	0.03	1.319×10^{-3}	1.20×10^{-3}	2.454×10^{-4}	1.591×10^{-3}		
1	0.1	0.30	0.977×10^{-3}	1.29×10^{-3}	3.745×10^{-5}	1.251×10^{-3}				
		0.3	0.03	2.600×10^{-3}	2.35×10^{-3}	4.525×10^{-4}	2.250×10^{-3}			
L_∞										
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	4.187×10^{-5}	4.38×10^{-5}	9.619×10^{-4}	4.167×10^{-5}	Kuadratik (MQ)	Kuintik	
		0.3	0.03	4.591×10^{-5}	4.58×10^{-5}	4.310×10^{-4}	4.590×10^{-5}	4.084×10^{-5}	4.285×10^{-5}	
	1	0.1	0.30	8.277×10^{-5}	8.66×10^{-5}	1.153×10^{-3}	8.258×10^{-5}	8.157×10^{-5}	8.201×10^{-5}	
		0.3	0.03	9.183×10^{-5}	9.16×10^{-5}	1.268×10^{-3}	9.182×10^{-5}	8.873×10^{-5}	8.873×10^{-5}	
	$V_N(x, t)$	0.5	0.1	0.30	0.218×10^{-4}	4.99×10^{-5}	3.332×10^{-4}	1.480×10^{-4}	3.713×10^{-5}	3.731×10^{-5}
			0.3	0.03	1.809×10^{-4}	1.81×10^{-4}	1.148×10^{-3}	5.729×10^{-4}	7.681×10^{-5}	7.680×10^{-5}
1.0	0.1	0.30	4.205×10^{-5}	9.92×10^{-5}	1.162×10^{-3}	4.770×10^{-5}	7.358×10^{-5}	7.394×10^{-5}		
		0.3	0.03	3.618×10^{-4}	3.62×10^{-4}	1.638×10^{-3}	3.617×10^{-4}	1.572×10^{-4}	1.572×10^{-4}	

Problem 3, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 50$ için $0 \leq x \leq 1$ aralığında çözüldü. $\eta = 2$, $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün farklı zamanlarda U_N ve V_N çözümleri Tablo 2.27' de verildi. Problem 3 için kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde

Tablo 2.27: $\alpha = \beta = 10$ ve $\alpha = \beta = 100$ için Problem 3' ün bazı x noktalarında ve farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N değerleri.

x	t	$\alpha = \beta = 10$		$\alpha = \beta = 100$	
		U_N	V_N	U_N	V_N
0.2	0.1	0.07174	0.04736	0.02880	0.00467
	0.2	0.02605	0.02271	0.00685	0.00379
	0.3	0.01017	0.00904	0.00271	0.00170
	0.4	0.00383	0.00341	0.00104	0.00067
0.4	0.1	0.12419	0.09987	0.04032	0.01737
	0.2	0.04554	0.04031	0.01228	0.00756
	0.3	0.01711	0.01525	0.00466	0.00300
	0.4	0.00633	0.00565	0.00174	0.00113
0.6	0.1	0.14207	0.13825	0.04094	0.03894
	0.2	0.04988	0.04494	0.01430	0.0994
	0.3	0.01773	0.01586	0.00497	0.00331
	0.4	0.00641	0.00573	0.00178	0.00117
0.8	0.1	0.10463	0.11318	0.03869	0.04806
	0.2	0.03309	0.03021	0.01034	0.00785
	0.3	0.01116	0.01002	0.00322	0.00221
	0.4	0.00396	0.00354	0.00111	0.00074

edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum değerleri ile referans [18] de verilen sonuçlar Tablo 2.28' de karşılaştırıldı. Tablodan her ne kadar karşılaştırma Δt ' nin farklı değerleri için yapıldıysada U_N ve V_N ' nin hesaplanan maksimum değerlerinin referans [18] dekilerle uyum içinde olduğu ve bu değerleri aynı x noktalarında aldıkları kolayca görülmektedir.

Tablo 2.29-2.31'de, bu bölümde göz önüne alınan üç model problemin her bir yöntem ile elde edilen sonuçları ayrı ayrı karşılaştırıldı. Tablolara bakıldığında her bir yöntemle elde edilen sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 2.28: Problem 3' ün farklı t zamanlarındaki U_N ve V_N ' nin maksimum değerleri ile referans [18] dekilerin karşılaştırılması.

		Kollokasyon Yöntemi		[18]	
		$(\Delta t = 0.001)$		$(\Delta t = 0.01)$	
	t	U_{\max}^N	x	U_{\max}^N	x
$\alpha = \beta = 10$	0.1	0.14228	0.58	0.14456	0.58
	0.2	0.05063	0.54	0.05237	0.54
	0.3	0.01835	0.52	0.01932	0.52
	0.4	0.00670	0.50	0.00718	0.50
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04099	0.50	0.04175	0.46
	0.2	0.01432	0.58	0.01479	0.58
	0.3	0.00509	0.54	0.00534	0.54
	0.4	0.00185	0.52	0.00198	0.52
$\alpha = \beta = 10$		V_{\max}^N		V_{\max}^N	
	0.1	0.14022	0.64	0.14306	0.66
	0.2	0.04543	0.56	0.04697	0.56
	0.3	0.01640	0.52	0.01725	0.52
$\alpha = \beta = 100$	0.1	0.04917	0.76	0.05065	0.76
	0.2	0.01000	0.64	0.01033	0.64
	0.3	0.00336	0.56	0.00350	0.56
	0.4	0.00121	0.52	0.00129	0.52

Tablo 2.29: $t = 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$ ve $\Delta t = 0.001$ için Problem 1' e uygulanan yöntemlerin karşılaştırılması.

Yöntem	$N = 200$		$N = 400$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
Galerkin	0.36×10^{-6}	0.22×10^{-6}	0.15×10^{-6}	0.10×10^{-6}
Petrov-Galerkin	0.14×10^{-6}	0.09×10^{-6}	0.06×10^{-6}	0.04×10^{-6}
Subdomain	8.23×10^{-5}	3.03×10^{-6}	2.06×10^{-6}	7.59×10^{-6}
Kollokasyon	3.45×10^{-6}	1.70×10^{-6}	1.66×10^{-6}	0.82×10^{-6}

Tablo 2.30: $t = 1$, $-10 \leq x \leq 10$, $\Delta t = 0.01$ ve $N = 100$ için Problem 2' ye uygulanan yöntemlerin karşılaştırılması.

Yöntem	$U_N(x, t)$				
	$\alpha = 0.1, \beta = 0.3$		$\alpha = 0.3, \beta = 0.03$		
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	
Galerkin	1.334×10^{-3}	8.320×10^{-5}	1.500×10^{-3}	9.409×10^{-5}	
Petrov-Galerkin	1.334×10^{-3}	8.320×10^{-5}	1.500×10^{-3}	9.407×10^{-5}	
Subdomain	1.334×10^{-3}	8.322×10^{-5}	1.500×10^{-3}	9.408×10^{-5}	
Kollokasyon	1.323×10^{-3}	8.277×10^{-5}	1.464×10^{-3}	9.183×10^{-5}	
Yöntem	$V_N(x, t)$				
	Galerkin	0.995×10^{-3}	4.255×10^{-5}	2.617×10^{-3}	3.636×10^{-4}
	Petrov-Galerkin	0.995×10^{-3}	4.255×10^{-5}	2.617×10^{-3}	3.636×10^{-4}
	Subdomain	0.995×10^{-3}	4.257×10^{-5}	2.617×10^{-3}	3.636×10^{-4}
	Kollokasyon	0.977×10^{-3}	4.205×10^{-5}	2.600×10^{-3}	3.618×10^{-4}

Tablo 2.31: $t = 0.4$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 50$ ve $\alpha = \beta = 10$ için Problem 3' e uygulanan yöntemlerle elde edilen $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ ' nin maksimum değerleri ve konumları.

Yöntem	U_{\max}^N	x	V_{\max}^N	x
Galerkin	0.00724	0.50	0.00648	0.50
Petrov-Galerkin	0.00724	0.50	0.00648	0.50
Subdomain	0.00723	0.50	0.00648	0.50
Kollokasyon	0.00670	0.50	0.00599	0.50

2.2.5 Sonuç

Bu bölümde, coupled Burgers denklemi farklı dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile çözüldü. Bu yöntemler farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen üç model problem için çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde verildi. Her bir yöntemle elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle cebirsel işlemlerde Mathematica programı kullanılarak incelendi. Ayrıca model problemlerin her bir yöntem ile elde edilen sonuçları karşılaştırıldı. Tablolar incelendiğinde Problem 1 için Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemlerinin subdomain ve kollokasyon yöntemlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği, Problem 2 ve Problem 3 için ise yöntemlerin birbiri ile uyumlu olduğu görüldü. Her bir yöntemle elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olacağından sadece Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik çözümler grafiklerle verildi.

BÖLÜM 3

B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED KdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Hirota ve Satsuma [35] tarafından

$$U_t - 6aUU_x - 2bVV_x - aU_{xxx} = 0, \quad c < x < d, \quad t > 0 \quad (3.1a)$$

$$V_t + 3UV_x + V_{xxx} = 0, \quad c < x < d, \quad t > 0 \quad (3.1b)$$

olarak verilen coupled KdV denklemi göz önüne alındı. Burada a ve b katsayıları keyfi sabitlerdir.

Coupled KdV denkleminin çözümleri farklı yöntemlerle birçok araştırmacı tarafından bulunmuştur. Hirota ve Satsuma ile Tam vd. [35, 36], Hirota yöntemini kullanarak coupled KdV denkleminin analitik çözümünü elde etmişlerdir. Tian ve Gao [37], Bogoyavlenskii coupled KdV denkleminin Painlevé analizi ile tam çözümünü elde etmişlerdir. Fan ve Zhang [38], iyileştirilmiş bir homojen denge yöntemini kullanarak coupled KdV denkleminin bazı tam çözümlerini bulmuşlardır. Roy [39], coupled KdV denkleminin bi-Hamiltonian yapısını incelemiştir. Zhu [40], coupled KdV denkleminin periyodik başlangıç-sınır problemi için fark denklemlerini oluşturmuşlardır. Cao vd. [41], homojen denge yöntemi fikrine dayalı doğrudan ve etkin trigonometrik dönüşüm yöntemi ve Miura dönüşümü yardımıyla coupled KdV denkleminin tam çözümlerini elde etmişlerdir. Zhou vd. [42], Jakobi eliptik fonksiyon açılım yönteminin geliştirilmesi olarak düşünülebilecek F-açılım yöntemiyle değişken katsayılı coupled KdV denkleminin periyodik dalga çözümlerini bulmuşlardır. Karasu ve Kılıç [43], otonom olmayan coupled KdV sisteminin integrallenebilirliğini incelemişler ve integrallenebilir durumların bazıları için tam çözümleri vermişlerdir. Qian ve Tian [44], coupled KdV denklemi için

lokal olmayan Lie–Bäcklund dönüşümünü elde etmişler ve bu dönüşümü kullanarak tek dalga çözümünü de bulmuşlardır. Coupled KdV denkleminin bazı tam çözümleri Inan [45] tarafından geliştirilmiş tanh fonksiyon yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Ma ve Zhu [46], Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ve Hermite dönüşümü yardımıyla coupled KdV denkleminin bazı yeni tam çözümlerini elde etmişlerdir. Assas [47], bir fonksiyonelde bir parametrenin optimal değerinin bulunması için Lagrange çarpanlarının belirlenmesine dayalı olan He’ nin varyasyonel iterasyon yöntemiyle coupled KdV denklemini çözmüştür. Abbasbandy [48], homotopi analiz yöntemini kullanarak geliştirmiş Hirota–Satsuma coupled KdV denkleminin analitik çözümünü elde etmiştir. Al-Khaled vd. [49], He’ nin varyasyonel iterasyon ve tanh yöntemini coupled KdV denklemine uygulamışlardır.

Fan [50], tanh yönteminde bir parametre içeren Riccati denklemini ve çözümünü kullanarak coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Halim vd. [51], keyfi sabit katsayılı keyfi sayıda denklemin Cauchy problemleri için geçerli bir şema kullanılarak genel coupled KdV denklem sistemlerinin nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Halim ve Leble [52], sabit katsayılı keyfi sayıda denklemlerin Cauchy problemleri için fark denklemine dayalı bir yöntemi kullanarak coupled KdV-MKdV denklemlerinin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Kaya ve Inan [53], sembolik hesaplama yardımı ile ayrışım yöntemini kullanarak coupled KdV ve MKdV denklemlerinin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Alvarez-Samaniego ve Carvajal [54], coupled KdV denklemlerinin bazı sistemleri için yerel iyi şartlı olma durumunu incelemişlerdir. İsmail [55], coupled KdV denklemini kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemiyle çözmüştür. Siraj-ul-Islam vd. [19], coupled KdV denkleminin basit klasik radyal bazlar yardımıyla kollokasyon yöntemi ile düğüm noktaları kullanmaksızın yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Rady vd. [56], homojen denge yöntemiyle auto-Bäcklund dönüşümünü elde etmek için coupled KdV denklemlerini lineer olmayan bir basit kısmi diferansiyel denkleme dönüştüren uygun bir dönüşümü elde ettikten sonra lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin soliton çözümünü, Lax çiftlerini ve katlı soliton çözümlerini vermişlerdir. Rashid ve İsmail [57], coupled KdV denklemleri için spektral kollokasyon yönteminin hata tahminlerini elde etmişler ve nümerik sonuçları sunmuşlardır.

Bu bölümde coupled KdV denklemi, uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte değişik dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik olarak çözüldü. Elde edilen nümerik çözümler problemin literatürdeki mevcut çözümleriyle karşılaştırıldı ve denklemin I_1 , I_2 iki korunum sabiti L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin probleme uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelendi.

3.1 Model Problemler

(3.1) coupled KdV denklemi,

$$U(c, t) = 0, \quad U(d, t) = 0, \quad V(c, t) = 0, \quad V(d, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.1a)$$

$$U_x(c, t) = 0, \quad U_x(d, t) = 0, \quad V_x(c, t) = 0, \quad V_x(d, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.1b)$$

sınır şartları ve aşağıdaki üç farklı başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Her bir problemin U_N nümerik çözümünün U analitik çözümüne ne kadar iyi yaklaştığını görmek için

$$L_2 = \|U - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |U_j - (U_N)_j|$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Ayrıca coupled KdV denkleminin korunum sabitlerinden

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx \quad \text{ve} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \frac{2}{3}bV^2) dx$$

göz önüne alındı ve hesaplandı [55].

3.1.1 Problem 1

İlk olarak, (3.1) coupled KdV denklemi

$$\xi = \lambda(x - \lambda^2 t) + \frac{1}{2 \log(\omega)}, \quad \omega = \frac{-b}{8(4a + 1)\lambda^4}$$

olmak üzere,

$$U(x, 0) = 2\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\xi),$$
$$V(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \operatorname{sech}(\xi)$$

başlangıç şartları ve (3.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = 2\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\xi),$$
$$V(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \operatorname{sech}(\xi)$$

dir [35].

3.1.2 Problem 2

İkinci olarak, (3.1) coupled KdV denklemi

$$U_j(x, 0) = 2\lambda_j^2 \operatorname{sech}^2(\xi_j),$$
$$V_j(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_j}} \operatorname{sech}(\xi_j),$$
$$\xi_j = \lambda_j(x - \gamma_j) + \frac{1}{2 \log(\omega_j)}, \quad \omega_j = \frac{-b}{8(4a+1)\lambda_j^4}, \quad (j = 1, 2)$$

olmak üzere,

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 U_j(x, 0),$$
$$V(x, 0) = \sum_{j=1}^2 V_j(x, 0)$$

başlangıç şartları ve (3.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı [55].

3.1.3 Problem 3

Son olarak, (3.1) coupled KdV denklemi

$$U(x, 0) = e^{-0.01x^2},$$
$$V(x, 0) = e^{-0.01x^2}$$

başlangıç şartları ve (3.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı [55].

3.2 Sonlu Eleman Yöntemleri

Bu kısımda, yukarıda verilen model problemlere Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri uygulandı. Bu yöntemlerin probleme uygulanması için önce (3.1) coupled KdV denkleminin ağırlıklı integral formunun bulunması gerekir. Bunun için denklem W ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve sonra bölge üzerinden integrali alınırsa denklemin ağırlıklı integral formu

$$\int_a^b W(U_t - 6aUU_x - 2bVV_x - aU_{xxx}) dx = 0, \quad (3.2.1a)$$

$$\int_a^b W(V_t + 3UV_x + V_{xxx}) dx = 0 \quad (3.2.1b)$$

olarak elde edilir. (3.2.1) ağırlıklı integral formunda, kısmi integrasyon uygulanır ve sonra (3.1.1) sınır şartları kullanılırsa

$$\int_a^b (WU_t - 6aWUU_x - 2bWVV_x + aW_xU_{xx})dx = 0, \quad (3.2.2a)$$

$$\int_a^b (WV_t + 3WUV_x - W_xV_{xx})dx = 0 \quad (3.2.2b)$$

bulunur. Böylece (3.1) coupled KdV denkleminin her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde zayıf formu (3.2.2) denklemlerinden

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (WU_t - 6aWUU_x - 2bWVV_x + aW_xU_{xx})dx = 0, \quad (3.2.3a)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (WV_t + 3WUV_x - W_xV_{xx})dx = 0 \quad (3.2.3b)$$

olarak elde edilir.

3.2.1 Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (3.1) ile verilen coupled KdV denkleminin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar W ağırlık fonksiyonları olarak alınır ve Bölüm 2' de (2.2.6) ile verilen yaklaşımlar (3.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $i = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e - 6a \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \delta_k^e \\
-2b \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q_k Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right] \sigma_k^e + a \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q'_i Q''_j d\xi \right) \delta_j^e = 0, \quad (3.2.1.1a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \sigma_j^e + 3 \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \sigma_k^e - \\
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q'_i Q''_j d\xi \right) \sigma_j^e = 0 \quad (3.2.1.1b)
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.2.1.1) denklemleri matris formunda,

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \\
B_{ikj}^e &= \int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi, \\
B1_{ikj}^e &= \int_0^h Q_i Q_k Q'_j d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h Q'_i Q''_j d\xi
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$A^e \delta^e - 6a B^e(\delta) \delta^e - 2b B1^e(\sigma) \sigma^e + a C^e \delta^e = 0, \quad (3.2.1.2a)$$

$$A^e \sigma^e + 3B^e(\delta) \sigma^e - C^e \sigma^e = 0 \quad (3.2.1.2b)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ dir. Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak integraller hesaplandığında, $i, j, k = m-1, m, m+1$ olmak üzere, $A_{ij}^e, B_{ikj}^e, B1_{ikj}^e$ ve C_{ij}^e eleman matrisleri

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \\
B_{ikj}^e &= \int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-10, -19, -1)\delta^e & (8, 12, 0)\delta^e & (2, 7, 1)\delta^e \\ (-19, -54, -7)\delta^e & (12, 0, -12)\delta^e & (7, 54, 19)\delta^e \\ (-1, -7, -2)\delta^e & (0, -12, -8)\delta^e & (1, 19, 10)\delta^e \end{bmatrix}, \\
B1_{ikj}^e &= \int_0^h Q_i Q_k Q'_j d\xi = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-10, 8, 2)\sigma^e & (-19, 12, 7)\sigma^e & (-1, 0, 1)\sigma^e \\ (-19, 12, 7)\sigma^e & (-54, 0, 54)\sigma^e & (-7, -12, 19)\sigma^e \\ (-1, 0, 1)\sigma^e & (-7, -12, 19)\sigma^e & (-2, -8, 10)\sigma^e \end{bmatrix}, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h Q'_i Q''_j d\xi = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eleman matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilen A , B , $B1$ ve C matrisleri (3.2.1.2) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$A\dot{\delta} - 6aB(\delta)\delta - 2bB1(\sigma)\sigma + aC\delta = 0, \quad (3.2.1.3a)$$

$$A\dot{\sigma} + 3B(\delta)\sigma - C\sigma = 0 \quad (3.2.1.3b)$$

matris formundaki denklem sistemi elde edilir. Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ dir. A , B , $B1$ ve C matrislerinin genelleştirilmiş satırları,

$$\delta = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T,$$

$$\sigma = (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A &: \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), \\
B &: \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-1, -7, -2, 0, 0)\delta, & (0, -31, -62, -7, 0)\delta, & (1, 31, 0, -31, -1)\delta, \\ (0, 7, 62, 31, 0)\delta, & (0, 0, 2, 7, 1)\delta & \end{bmatrix}, \\
B1 &: \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-1, 0, 1, 0, 0)\sigma, & (-7, -31, 31, 7, 0)\sigma, & (-2, -62, 0, 62, 2)\sigma, \\ (0, -7, -31, 31, 7)\sigma, & (0, 0, -1, 0, 1)\sigma & \end{bmatrix}, \\
C &: \frac{2}{h^2}(1, -2, 0, 2, -1)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.1.3) denklemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, δ ve σ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} [A - \frac{a\Delta t}{2}(6B(\delta) - C)]\delta^{n+1} - [b\Delta t B1(\sigma)]\sigma^{n+1} \\ = [A + \frac{a\Delta t}{2}(6B(\delta) - C)]\delta^n + [b\Delta t B1(\sigma)]\sigma^n, \end{aligned} \quad (3.2.1.4a)$$

$$[A + \frac{\Delta t}{2}(3B(\delta) - C)]\sigma^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}(3B(\delta) - C)]\sigma^n \quad (3.2.1.4b)$$

formunda $(2N + 4)$ -bilinmeyenli $(2N + 4)$ -tane denklemden oluşan karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. δ_{-1} , δ_N , σ_{-1} ve σ_N parametreleri sınır şartları yardımıyla sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu karesel denklem sistemi bulunur.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri Bölüm 2' de (2.2.1.7) ve (2.2.1.8) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (3.2.1.4) ile verilen denklem sisteminde başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir.

(3.2.1.4) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu kısımda, göz önüne alınan Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi incelendi. Coupled KdV denkleminin lineer olmayan UU_x , VV_x ve UV_x terimlerini lineerleştirmek için U ve V yerine λ gibi bir sabit alınırsa B ve $B1$ matrislerinin genelleştirilmiş satırları $\frac{\lambda}{3}(-1, -10, 0, 10, 1)$ olarak elde edilir. Böylece (3.2.1.4) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{30}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda\Delta t}{6}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \gamma_4 = \frac{b\Delta t}{3},$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 + 6\gamma_2 a + \gamma_3 a,$$

$$\alpha_2 = 26\gamma_1 + 60\gamma_2 a - 2\gamma_3 a,$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 66\gamma_1, \\ \alpha_4 &= 26\gamma_1 - 60\gamma_2 a + 2\gamma_3 a, \\ \alpha_5 &= \gamma_1 - 6\gamma_2 a - \gamma_3 a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \gamma_1 - 3\gamma_2 - \gamma_3, \\ \beta_2 &= 26\gamma_1 - 30\gamma_2 + 2\gamma_3, \\ \beta_3 &= 66\gamma_1, \\ \beta_4 &= 26\gamma_1 + 30\gamma_2 - 2\gamma_3, \\ \beta_5 &= \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\alpha_1\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3\delta_m^{n+1} + \alpha_4\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_4\sigma_{m-2}^{n+1} + 10\gamma_4\sigma_{m-1}^{n+1} \\ &- 10\gamma_4\sigma_{m+1}^{n+1} - \gamma_4\sigma_{m+2}^{n+1} = \alpha_5\delta_{m-2}^n + \alpha_4\delta_{m-1}^n + \alpha_3\delta_m^n + \alpha_2\delta_{m+1}^n + \alpha_1\delta_{m+2}^n \\ &- \gamma_4\sigma_{m-2}^n - 10\gamma_4\sigma_{m-1}^n + 10\gamma_4\sigma_{m+1}^n + \gamma_4\sigma_{m+2}^n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\beta_1\sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_2\sigma_{m-1}^{n+1} + \beta_3\sigma_m^{n+1} + \beta_4\sigma_{m+1}^{n+1} + \beta_5\sigma_{m+2}^{n+1} \\ &= \beta_5\sigma_{m-2}^n + \beta_4\sigma_{m-1}^n + \beta_3\sigma_m^n + \beta_2\sigma_{m+1}^n + \beta_1\sigma_{m+2}^n\end{aligned}$$

dir. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (66 + 2\cos(2\varphi) + 52\cos(\varphi))\gamma_1, \\ \rho_2 &= (-12\sin(2\varphi) - 120\sin(\varphi))a\gamma_2, \\ \rho_3 &= (-2\sin(2\varphi) + 4\sin(\varphi))a\gamma_3, \\ \rho_4 &= (-2\sin(2\varphi) - 20\sin(\varphi))\gamma_4, \\ \rho_5 &= (6\sin(2\varphi) + 60\sin(\varphi))\gamma_2, \\ \rho_6 &= (2\sin(2\varphi) - 4\sin(\varphi))\gamma_3, \\ c_1 &= \rho_2 + \rho_3, \\ c_2 &= \rho_5 + \rho_6\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} [(\rho_1 + c_1)q - (\rho_1 - c_1)]P + [(\rho_4 q + \rho_4)]W &= 0 \\ [(\rho_1 + c_2)q - (\rho_1 - c_2)]W &= 0 \end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W ' ya göre aşıkâr olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(\rho_1^2 + i\rho_1 c_1 + i\rho_1 c_2 - c_1 c_2)q^2 - (2\rho_1^2 + 2c_1 c_2)q + \rho_1^2 - i\rho_1 c_1 - i\rho_1 c_2 - c_1 c_2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\rho_1 - ic_1}{\rho_1 + ic_1}, \quad q_2 = \frac{\rho_1 - ic_2}{\rho_1 + ic_2}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen üç model problemin nümerik çözümleri elde edildi. Problem 1 için tüm hesaplamalar, $\lambda = 0.5$ olmak üzere, a ve b katsayılarının farklı değerleri için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında yapıldı. a ve b katsayılarının sırasıyla $a = 0.5$ ve $b = -3$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 3.1-3.7' de verildi. Tablo 3.1-3.2, $a = 0.5$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.1' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%0.579 \times 10^{-3}$ ve $\%0.562 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.093 \times 10^{-3}$ ve $\%0.415 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.2' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.199 \times 10^{-3}$

Tablo 3.1: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	-0.333333	0.021111	0.013470	0.009392	0.004447
	10.0	2.000002	-0.333333	0.043768	0.025648	0.019462	0.010740
	15.0	1.999996	-0.333332	0.065471	0.037995	0.026306	0.014083
	20.0	2.000012	-0.333331	0.056729	0.029653	0.029793	0.011300
0.1	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333334	0.001653	0.000871	0.005180	0.002787
	10.0	1.999999	-0.333333	0.005296	0.003500	0.008284	0.004428
	15.0	2.000000	-0.333333	0.008642	0.006090	0.012757	0.006106
	20.0	2.000002	-0.333332	0.005222	0.003439	0.019473	0.009960

Tablo 3.2: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000001	-0.333332	0.006516	0.003665	0.007169	0.002880
	10.0	2.000001	-0.333332	0.016043	0.008088	0.012867	0.005774
	15.0	1.999997	-0.333334	0.026132	0.013909	0.020043	0.010244
	20.0	2.000004	-0.333331	0.023682	0.013180	0.030593	0.015659
0.01	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333334	0.001653	0.000871	0.005180	0.002787
	10.0	1.999999	-0.333333	0.005296	0.003500	0.008284	0.004428
	15.0	2.000000	-0.333333	0.008642	0.006090	0.012757	0.006106
	20.0	2.000002	-0.333332	0.005222	0.003439	0.019473	0.009960

ve 0.780×10^{-3} ; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla 0.093×10^{-3} ve 0.415×10^{-3} olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıktır.

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 3.3' de verildi. Tablodan t ' nin artan değerleri için tek dalganın hemen hemen genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N çözümü için $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.499772 ($x = -1.4$) iken $t = 10$ ' da 0.499771 ($x = 1.1$) ve $t = 20$ ' de 0.499775 ($x = 3.6$); V_N çözümü için ise $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.353473 ($x = -1.4$) iken $t = 10$ ' da 0.353471 ($x = 1.1$) ve $t = 20$ ' de 0.353474 ($x = 3.6$) olarak hesaplandı.

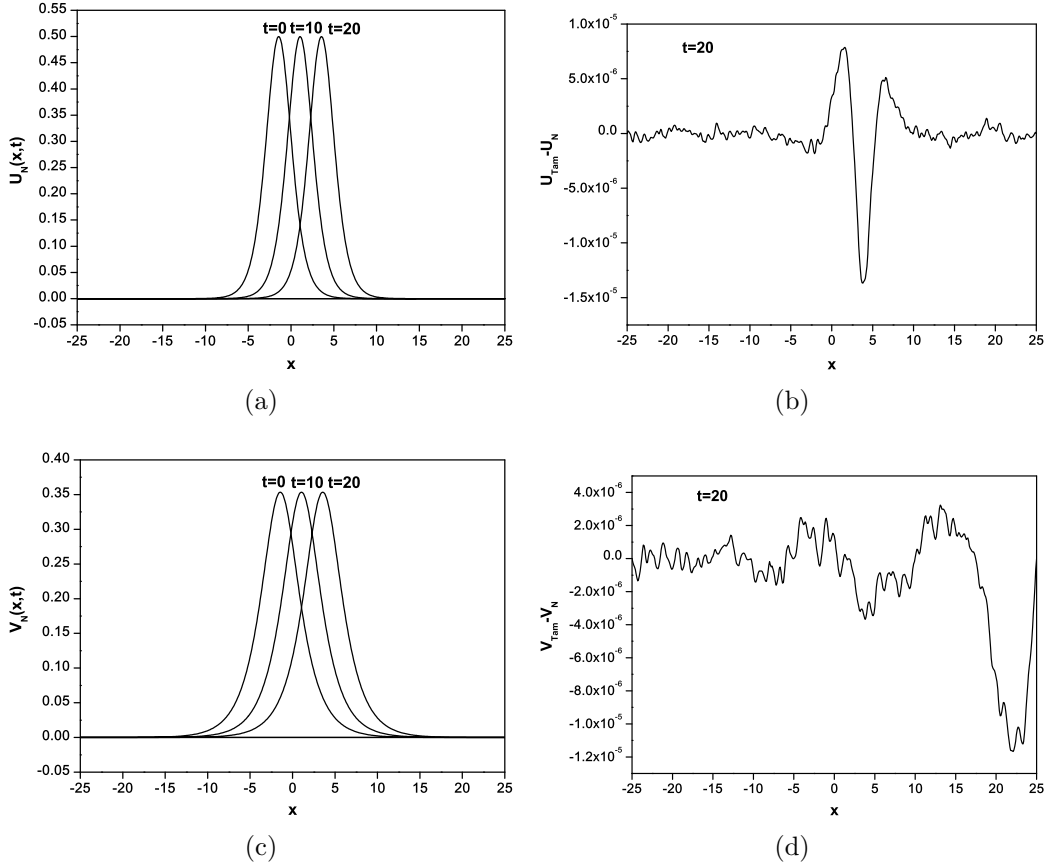
Tablo 3.3: $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik (U_N)	Genlik (V_N)
0.0	-1.4	0.499772	0.353473
5.0	-0.2	0.499993	0.353551
10.0	1.1	0.499771	0.353471
15.0	2.3	0.499990	0.353550
20.0	3.6	0.499775	0.353474

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ ve $t = 0, 10$ ve 20 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri ile $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları Şekil 3.1' de verildi. Şekil 3.1' den, t artarken dalganın genliğini hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiği, hata dağılımlarına bakıldığında U_N için genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında, V_N için ise sağ sınır civarında hata dağılımlarının büyük olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.4 ve 3.5' de, $a = -0.5$ ve $b = 3$ için farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte I_1 ve I_2 korunum sabitleri verildi. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır.

Tablo 3.4' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki



Şekil 3.1: Problem 1' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.

Tablo 3.4: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000001	1.000000	0.008026	0.005741	0.004186	0.001814
	10.0	1.999999	1.000000	0.010025	0.004786	0.007551	0.003250
	15.0	2.000001	1.000000	0.019918	0.012000	0.011007	0.004569
	20.0	1.999997	0.999999	0.023566	0.014667	0.017011	0.008244
0.1	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000000	0.001570	0.000777	0.003150	0.002053
	10.0	1.999999	1.000000	0.002180	0.001304	0.005177	0.002665
	15.0	1.999999	0.999999	0.002939	0.001294	0.008701	0.004710
	20.0	1.999999	0.999999	0.003737	0.001719	0.015142	0.008143

değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%0.170 \times 10^{-3}$ ve $\%0.093 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.070 \times 10^{-3}$ ve $\%0.103 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerinden I_1 ' deki değişimin azaldığı I_2 ' deki değişimin ise hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Tablo 3.5' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.017 \times 10^{-3}$ ve $\%0.193 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.070 \times 10^{-3}$ ve $\%0.103 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerinden I_1 ' deki değişimin arttığı I_2 ' deki değişimin ise azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.5: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	1.000001	0.006857	0.004350	0.003110	0.001771
	10.0	1.999998	1.000000	0.007069	0.004610	0.006219	0.003088
	15.0	1.999999	1.000001	0.007624	0.003867	0.009827	0.004899
	20.0	2.000000	1.000002	0.008409	0.004249	0.015735	0.008712
0.01	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000000	0.001570	0.000777	0.003150	0.002053
	10.0	1.999999	1.000000	0.002180	0.001304	0.005177	0.002665
	15.0	1.999999	0.999999	0.002939	0.001294	0.008701	0.004710
	20.0	1.999999	0.999999	0.003737	0.001719	0.015142	0.008143

Problem 1' in $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 3.6 ve 3.7' de verildi. a ve b katsayılarının bu değerleri için de konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Tablo 3.6' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%0.043 \times 10^{-3}$ ve $\%0.127 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.057 \times 10^{-3}$ ve $\%0.140 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Tablo 3.7' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ '

deki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.022 \times 10^{-3}$ ve $\%0.116 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.057 \times 10^{-3}$ ve $\%0.140 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin çok az oranda arttığı görülmektedir.

Tablo 3.6: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.002851	0.001822	0.002566	0.001309
	10.0	2.000000	0.500000	0.004240	0.002488	0.004368	0.002211
	15.0	2.000001	0.500001	0.007778	0.004328	0.007140	0.003498
	20.0	2.000001	0.500001	0.012679	0.006891	0.012727	0.006340
0.1	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.000991	0.000431	0.002202	0.001269
	10.0	1.999999	0.500000	0.001486	0.000705	0.004038	0.002272
	15.0	1.999999	0.499999	0.001870	0.000864	0.006696	0.003590
	20.0	1.999999	0.499999	0.002646	0.001337	0.011751	0.006171

Tablo 3.7: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.004031	0.002472	0.002734	0.001644
	10.0	2.000000	0.500000	0.009434	0.005743	0.005542	0.003071
	15.0	1.999999	0.500000	0.018614	0.010746	0.011172	0.005736
	20.0	2.000000	0.499999	0.037234	0.022425	0.021924	0.010717
0.01	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.000991	0.000431	0.002202	0.001269
	10.0	1.999999	0.500000	0.001486	0.000705	0.004038	0.002272
	15.0	1.999999	0.499999	0.001870	0.000864	0.006696	0.003590
	20.0	1.999999	0.499999	0.002646	0.001337	0.011751	0.006171

Tablo 3.8-3.10' da Problem 1' in $a = 0.5$ ve $b = -3$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için elde edilen korunum sabitleri ile L_∞ hata normu,

referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablolardan Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçların referans [55] de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 3.8: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Galerkin Yöntemi			[55]		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	2.000000	-0.333333	0.000
5.0	2.000000	-0.333334	0.000871	2.000000	-0.333333	0.004
10.0	1.999999	-0.333333	0.003500	2.000000	-0.333333	0.007
15.0	2.000000	-0.333333	0.006090	2.000000	-0.333333	0.014
20.0	2.000002	-0.333332	0.003439	2.000001	-0.333333	0.026

Tablo 3.9: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Galerkin Yöntemi			[55]		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	1.000000	0.000000	2.000000	1.000000	0.0
5.0	2.000000	1.000000	0.000777	2.000000	1.000000	0.003
10.0	1.999999	1.000000	0.001304	2.000000	1.000000	0.003
15.0	1.999999	0.999999	0.001294	1.999998	0.999999	0.005
20.0	1.999999	0.999999	0.001719	1.999999	0.999999	0.008

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 120$ aralığında $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$, $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için yapıldı. Tablo 3.11 ve 3.12, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmaları göstermektedir. Tablo 3.11' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.015 ve %0.264; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %4.657 $\times 10^{-3}$ ve %3.716 $\times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla %2.005 $\times 10^{-3}$ ve %1.773 $\times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.10: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Galerkin Yöntemi			[55]		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	0.500000	0.000000	2.000000	0.500000	0.0
5.0	1.999999	0.500000	0.000431	2.000000	0.500000	0.003
10.0	1.999999	0.500000	0.000705	1.999999	0.500000	0.003
15.0	1.999999	0.499999	0.000864	1.999999	0.500000	0.003
20.0	1.999999	0.499999	0.001337	1.999999	0.500000	0.004

Tablo 3.12' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ ' daki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%4.278 \times 10^{-3}$ ve $\%3.420 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%2.005 \times 10^{-3}$ ve $\%1.773 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.171 \times 10^{-3}$ ve $\%7.553 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımı $h = 0.2$ ' den $h = 0.1$ ' e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı, ancak $h = 0.05$ olduğunda ise $h = 0.1$ ' e göre I_1 deki değişimin azaldığı I_2 deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

Tablo 3.11: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $h = 0.1$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$		$\Delta t = 0.01$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.399930	-3.243751	6.399999	-3.242693	6.399998	-3.242675
20.0	6.400085	-3.244850	6.400025	-3.242688	6.400010	-3.242662
30.0	6.400259	-3.245970	6.400065	-3.242689	6.400025	-3.242657
40.0	6.398464	-3.247081	6.399711	-3.242722	6.399881	-3.242678
50.0	6.397809	-3.248153	6.399575	-3.242711	6.399826	-3.242689
60.0	6.400838	-3.248617	6.400174	-3.242697	6.400076	-3.242695
70.0	6.401932	-3.248917	6.400376	-3.242689	6.400174	-3.242689
80.0	6.399879	-3.249991	6.399969	-3.242711	6.400000	-3.242678
90.0	6.399074	-3.251013	6.399695	-3.242713	6.399877	-3.242683

Tablo 3.13' de Problem 2 için elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen

Tablo 3.12: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.399999	-3.242674	6.399998	-3.242675	6.399990	-3.242572
20.0	6.400071	-3.242679	6.400010	-3.242662	6.399986	-3.242584
30.0	6.400202	-3.242677	6.400025	-3.242657	6.400004	-3.242723
40.0	6.398900	-3.242693	6.399881	-3.242678	6.399950	-3.242710
50.0	6.398441	-3.242725	6.399826	-3.242689	6.399927	-3.242636
60.0	6.400494	-3.242631	6.400076	-3.242695	6.400049	-3.242416
70.0	6.401631	-3.242704	6.400174	-3.242689	6.400101	-3.242419
80.0	6.400228	-3.242689	6.400000	-3.242678	6.400064	-3.242469
90.0	6.399726	-3.242778	6.399877	-3.242683	6.399989	-3.242422

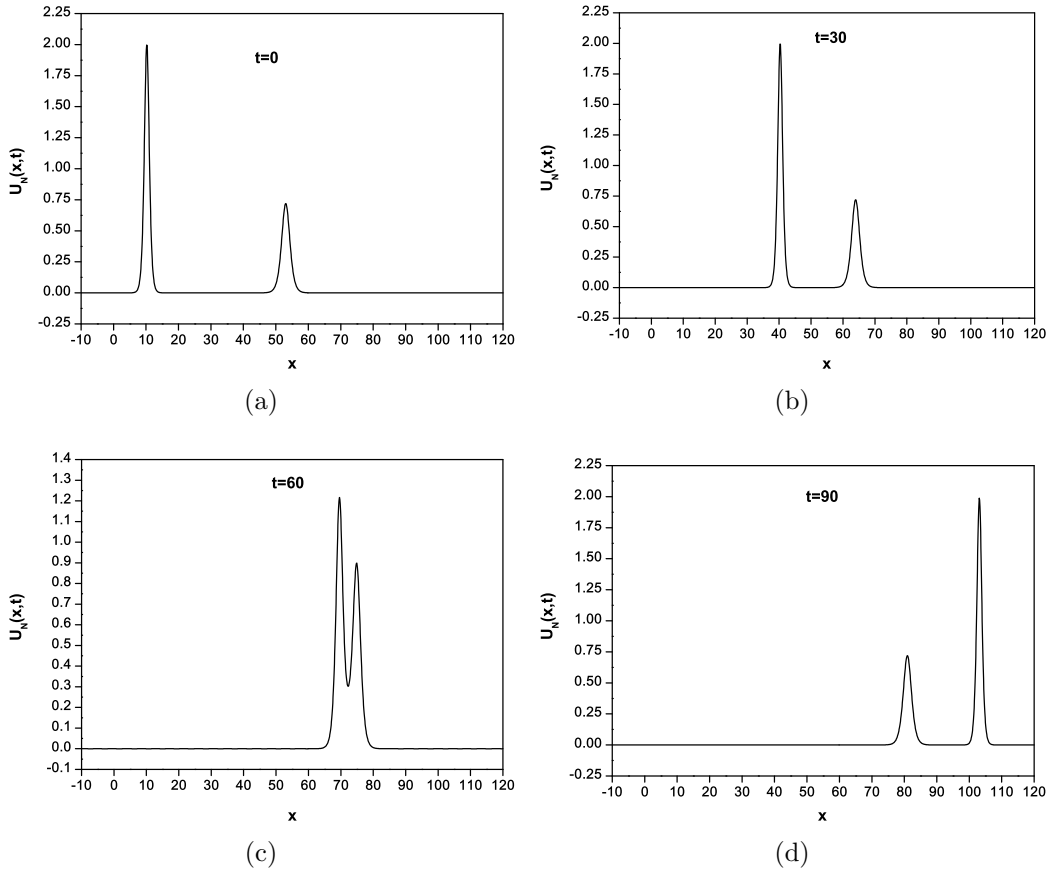
korunum sabitlerinin karşılaştırılmaları verildi. Tablo 3.13' den, Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] de elde edilenlerin uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 3.13: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

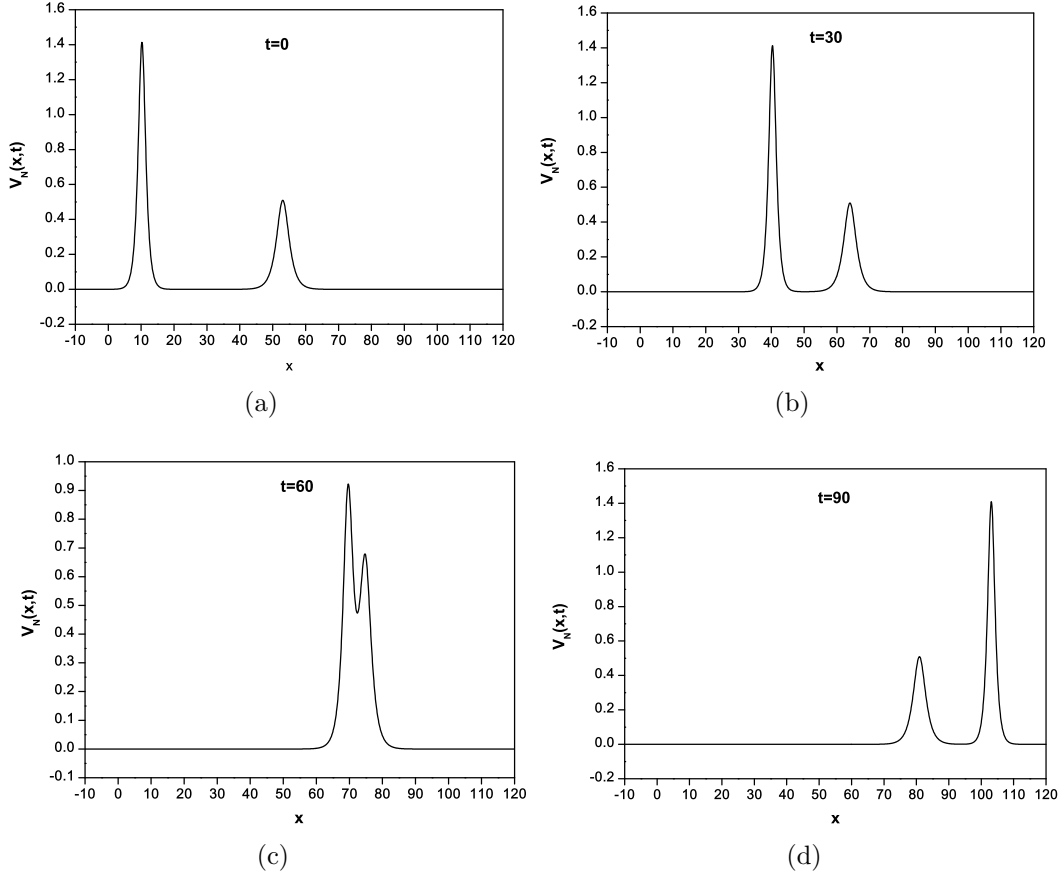
t	Galerkin Yöntemi		[55]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.243013
10.0	6.399998	-3.242675	6.400001	-3.243012
20.0	6.400010	-3.242662	6.399995	-3.243009
30.0	6.400025	-3.242657	6.399946	-3.243015
40.0	6.399881	-3.242678	6.399991	-3.243102
50.0	6.399826	-3.242689	6.399962	-3.243008
60.0	6.400076	-3.242695	6.399863	-3.243008
70.0	6.400174	-3.242689	-	-
80.0	6.400000	-3.242678	-	-
90.0	6.399877	-3.242683	-	-

Problem 2' nin $a = 0.5$, $b = -3$ ve $t = 0, 30, 60$ ve 90 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri Şekil 3.2 ve 3.3' de verildi. U_N ve V_N çözümleri için verilen grafiklerde iki pozitif tek dalganın girişimi görülmektedir.

Şekil 3.2' de U_N için verilen çözüm grafiğinde, $t = 0$ zamanında tek dalgalardan büyük dalganın genliği 1.996731 ve küçük dalganın genliği 0.719566 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = 10.2$ ve $x = 53.1$ dir. Grafiklerden görüldüğü üzere, $t = 0$ zamanında büyük genlikli dalga küçük genlikli diğer dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. Yaklaşık $t = 60$ ' da iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği görülmektedir. $t = 90$ zamanında ise büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği gözlemlendi. $t = 90$ zamanında küçük dalganın tepe noktasının $x = 80.9$ konumunda ve genliğinin 0.719579, büyük dalganın ise tepe noktasının $x = 103.1$ konumunda ve genliğinin 1.987528 olduğu görülmektedir.



Şekil 3.2: Problem 2' nin farklı t zamanlarında U için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.



Şekil 3.3: Problem 2' nin farklı t zamanlarında V için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

Şekil 3.3' de V_N için verilen çözüm grafiğinde, $t = 0$ zamanında büyük dalganın genliği 1.413057 ve küçük dalganın genliği 0.508964 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = 10.2$ ve $x = 53.1$ dir. Grafiklerden görüldüğü üzere, $t = 0$ zamanında büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. V_N için de yaklaşık $t = 60'$ da iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği görülmektedir. Zaman ilerledikçe büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği gözlemlendi. Bu durum $t = 90$ zamanı için grafikte gösterildi. $t = 90$ zamanında küçük dalganın tepe noktasının $x = 80.9$ konumunda ve genliğinin 0.508966, büyük dalganın ise tepe noktasının $x = 103.1$ konumunda ve genliğinin 1.409834 olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak Şekil 3.2 ve 3.3 aynı t zamanında aynı x konum noktasında farklı genliklere sahip iki pozitif dalganın girişimini göstermektedir.

Problem 3 için tüm hesaplamalar, a ve b parametrelerinin $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında yapıldı. Tablo 3.14 ve 3.15’ de farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmalar verildi.

Tablo 3.14: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3’ ün nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.02$		$\Delta t = 0.01$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.724517	-12.533817	17.724539	-12.533214
20.0	17.724436	-12.537647	17.724528	-12.533502
30.0	17.724235	-12.541628	17.724476	-12.533695
40.0	17.727083	-12.545628	17.725440	-12.533943
50.0	17.727015	-12.549471	17.725238	-12.533980

Tablo 3.15: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3’ ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.724575	-12.533963	17.724539	-12.533214	17.724537	-12.533605
20.0	17.724568	-12.534382	17.724528	-12.533502	17.724450	-12.533813
30.0	17.724072	-12.534597	17.724476	-12.533695	17.724403	-12.534732
40.0	17.727303	-12.534727	17.725440	-12.533943	17.724953	-12.535446
50.0	17.729995	-12.535070	17.725238	-12.533980	17.724570	-12.535522

Tablo 3.14’ de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %0.014 ve %0.130; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%3.946 \times 10^{-3}$ ve $\%6.687 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.15’ de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ ’ deki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla %0.031 ve %0.015; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%3.946 \times 10^{-3}$ ve $\%6.687 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla

$\%0.140 \times 10^{-3}$ ve $\%26.043 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımı $h = 0.2$ ' den $h = 0.1$ ' e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı, $h = 0.05$ olduğunda ise $h = 0.1$ ' e göre I_1 ' deki değişimin azaldığı I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

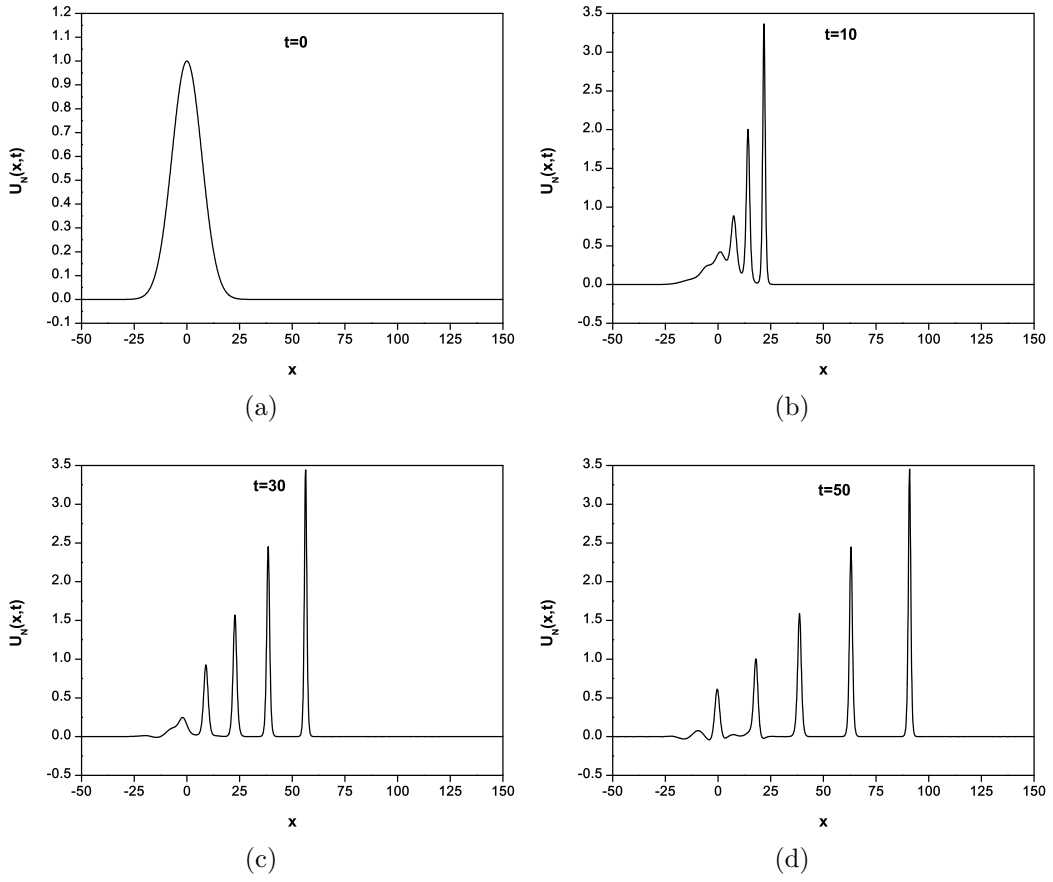
Tablo 3.16' da Problem 3 için elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] de elde edilen korunum sabitlerinin karşılaştırılması verildi. Tablo 3.16' dan, Galerkin sonlu eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] dekilerin uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 3.16: $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Galerkin Yöntemi		[55]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.72454	-12.53314
10.0	17.724539	-12.533214	17.72454	-12.53316
20.0	17.724528	-12.533502	17.72454	-12.53316
30.0	17.724476	-12.533695	17.72449	-12.53320
40.0	17.725440	-12.533943	17.72448	-12.53321
50.0	17.725238	-12.533980	17.72469	-12.53320

Problem 3' ün $a = 0.5$, $b = -3$ ve $t = 0, 30$ ve 50 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri Şekil 3.4 ve 3.5' de verildi. U_N ve V_N çözümlerini gösteren grafiklerde, $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumlarında 1.0 genliklere sahip birer tek dalga görülmektedir. $t = 50$ zamanına gelindiğinde bu tek dalgaların geride değişik genliklerde çok sayıda dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği gözlemlendi.

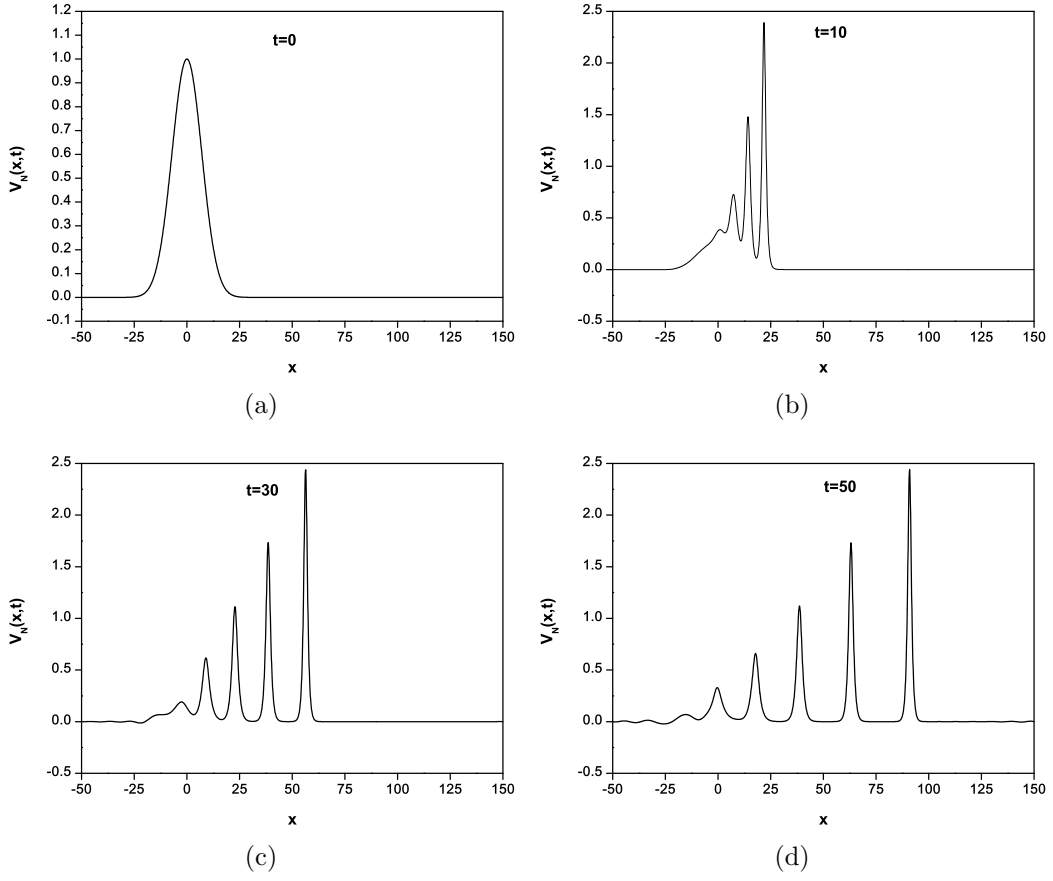
Problem 3 için $t = 50$ zamanında oluşan ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 3.17' de verildi.



Şekil 3.4: Problem 3' ün farklı t zamanlarında U için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

Tablo 3.17: $t = 50$, $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	90.9	3.457008	90.9	2.444029
İkinci Dalga	63.1	2.447592	63.1	1.731882
Üçüncü Dalga	38.7	1.587947	38.6	1.120752
Dördüncü Dalga	18.0	1.004435	17.8	0.660323
Beşinci Dalga	-0.4	0.612468	-0.4	0.329449



Şekil 3.5: Problem 3' ün farklı t zamanlarında V için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

3.2.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (3.1) ile verilen coupled KdV denkleminin Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. (3.2.3) ile verilen zayıf formda W ağırlık fonksiyonu yerine kuadratik B-spline fonksiyonlar ve yaklaşım fonksiyonlarını tanımlamak için baz fonksiyonları yerine kübik B-spline fonksiyonlar alındı. Bölüm 1' de (1.4.3.1) ile verilen $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa problemin $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ tam çözümlerine sırasıyla karşılık gelen $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ yaklaşımları

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.2.1)$$

olarak yazılabilir [8]. Burada δ_j ve σ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (1.4.3.1) ile verilen kübik B-Spline fonksiyonlarına

$$\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq h$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(x) &= (h - \xi)^3 / h^3, \\ \phi_m(x) &= (h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3) / h^3, \\ \phi_{m+1}(x) &= (h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3) / h^3, \\ \phi_{m+2}(x) &= \xi^3 / h^3 \end{aligned} \quad (3.2.2.2)$$

kübik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. Burada $0 \leq \xi \leq h$ dir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm B-spline değerleri sıfır olduğundan (3.2.2.1) yaklaşımları (3.2.2.2) denklemi ile verilen kübik baz fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.2.2) kübik B-spline fonksiyonları ve (3.2.2.3) yaklaşımları kullanılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x' e göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri, $\xi = 0$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= 1, \quad \phi_m = 4, \quad \phi_{m+1} = 1 \quad \phi_{m+2} = 0, \\ U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ V_N(x_m, t) &= V_m = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U'_m &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \\ V'_m &= \frac{3}{h}(\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}), \\ U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}), \\ V''_m &= \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1})\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir. Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen ağırlık fonksiyonları ve (3.2.2.3) yaklaşımları (3.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $i = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h Q_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^e - 6a \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h Q_i \phi'_k \phi_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \delta_k^e \\ & - 2b \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h Q_i \phi_k \phi'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right] \sigma_k^e + a \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h Q'_i \phi''_j d\xi \right) \delta_j^e = 0, \quad (3.2.2.4a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h Q_i \phi_j d\xi \right) \sigma_j^e + 3 \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h Q_i \phi'_k \phi_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \sigma_k^e - \\ & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h Q'_i \phi''_j d\xi \right) \sigma_j^e = 0\end{aligned} \quad (3.2.2.4b)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.2.2.4) denklemleri matris formunda,

$$\begin{aligned}A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i \phi_j d\xi, \\ B_{ikj}^e &= \int_0^h Q_i \phi'_k \phi_j d\xi, \\ B^1_{ikj} &= \int_0^h Q_i \phi_k \phi'_j d\xi, \\ C_{ij}^e &= \int_0^h Q'_i \phi''_j d\xi\end{aligned}$$

ve $i, k, j = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere,

$$A^e \delta^e - 6aB^e(\delta)\delta^e - 2bB1^e(\sigma)\sigma^e + aC^e\delta^e = 0,$$

$$A^e \sigma^e + 3B^e(\delta)\sigma^e - C^e\sigma^e = 0$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})$ dir.

W ağırlık fonksiyonları yerine kuadratik B-spline fonksiyonlar ve baz fonksiyonları yerine de kübik B-spline baz fonksiyonları alınır ve integraller hesaplanırsa eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i \phi_j d\xi = \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 10 & 71 & 38 & 1 \\ 19 & 221 & 221 & 19 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h Q_i' \phi_j'' d\xi = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{ikj}^e = \int_0^h Q_i \phi_k' \phi_j d\xi = \frac{1}{280} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

ve

$$B1_{ikj}^e = \int_0^h Q_i \phi_k \phi_j' d\xi = \frac{1}{280} \begin{bmatrix} b1_{11} & b1_{12} & b1_{13} & b1_{14} \\ b1_{21} & b1_{22} & b1_{23} & b1_{24} \\ b1_{31} & b1_{32} & b1_{33} & b1_{34} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$b_{11} = (-105, -633, -267, -3)\delta^e,$$

$$b_{12} = (-65, -643, -451, -17)\delta^e,$$

$$b_{13} = (165, 1197, 639, 15)\delta^e,$$

$$b_{14} = (5, 79, 79, 5)\delta^e,$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= (-170, -1276, -718, -20)\delta^e, \\
b_{22} &= (-172, -2918, -3476, -322)\delta^e, \\
b_{23} &= (322, 3476, 2918, 172)\delta^e, \\
b_{24} &= (20, 718, 1276, 170)\delta^e, \\
\\
b_{31} &= (-5, -79, -79, -5)\delta^e, \\
b_{32} &= (-15, -639, -1197, -165)\delta^e, \\
b_{33} &= (17, 451, 643, 65)\delta^e, \\
b_{34} &= (3, 267, 633, 105)\delta^e
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
b_{111} &= (-105, -65, 165, 5)\sigma^e, \\
b_{112} &= (-633, -643, 1197, 79)\sigma^e, \\
b_{113} &= (-267, -451, 639, 79)\sigma^e, \\
b_{114} &= (-3, -17, 15, 5)\sigma^e, \\
\\
b_{121} &= (-170, -172, 322, 20)\sigma^e, \\
b_{122} &= (-1276, -2918, 3476, 718)\sigma^e, \\
b_{123} &= (-718, -3476, 2918, 1276)\sigma^e, \\
b_{124} &= (-20, -322, 172, 170)\sigma^e, \\
\\
b_{131} &= (-5, -15, 17, 3)\sigma^e, \\
b_{132} &= (-79, -639, 451, 267)\sigma^e, \\
b_{133} &= (-79, -1197, 643, 633)\sigma^e, \\
b_{134} &= (-5, -165, 65, 105)\sigma^e
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eleman matrislerinin birleştirilmesiyle

$$A\dot{\delta} - 6aB(\delta)\delta - 2bB1(\sigma)\sigma + aC\delta = 0, \quad (3.2.2.5a)$$

$$A\dot{\sigma} + 3B(\delta)\sigma - C\sigma = 0 \quad (3.2.2.5b)$$

matris formundaki denklem sistemi bulunur. Burada δ ve σ global eleman parametreleri sırasıyla $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1})$ şeklindedir. A , B , $B1$ ve C matrislerinin genelleştirilmiş satırları,

$$\delta = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T,$$

$$\sigma = (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T$$

olmak üzere,

$$A : \frac{h}{30}(1, 57, 302, 302, 57, 1),$$

$$B : \frac{1}{280} \begin{bmatrix} (-5, -79, -79, -5, 0, 0)\delta, & (-15, -809, -2473, -883, -20, 0)\delta, \\ (17, 279, -2380, -4044, -589, -3)\delta, & (3, 589, 4044, 2380, -279, -17)\delta, \\ (0, 20, 883, 2473, 809, 15)\delta, & (0, 0, 5, 79, 79, 5)\delta \end{bmatrix},$$

$$B1 : \frac{1}{280} \begin{bmatrix} (-5, -15, 17, 3, 0, 0)\sigma, & (-79, -809, 279, 589, 20, 0)\sigma, \\ (-79, -2473, -2380, 4044, 883, 5)\sigma, & (-5, -883, -4044, 2380, 2473, 79)\sigma, \\ (0, -20, -589, -279, 809, 79)\sigma, & (0, 0, -3, -17, 15, 5)\sigma \end{bmatrix},$$

$$C : \frac{2}{h^2}(1, 1, -8, 8, -1, -1)$$

olarak bulunur. (3.2.2.5) denklemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} [A - \frac{a\Delta t}{2}(6B(\delta) - C)]\delta^{n+1} - [b\Delta t B1(\sigma)]\sigma^{n+1} \\ = [A + \frac{a\Delta t}{2}(6B(\delta) - C)]\delta^n + [b\Delta t B1(\sigma)]\sigma^n, \end{aligned} \quad (3.2.2.6a)$$

$$[A + \frac{\Delta t}{2}(3B(\delta) - C)]\sigma^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}(3B(\delta) - C)]\sigma^n \quad (3.2.2.6b)$$

formunda $(2N + 6)$ -bilinmeyenli $(2N + 4)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sınır şartları kullanılarak δ_{-1} , δ_{N+1} , σ_{-1} ve σ_{N+1} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu parametreler problemin verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki biçimde kolayca hesaplanabilir.

$t = 0$ için (3.2.2.3) yaklaşımları

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j^0 \phi_j(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^{N+1} \sigma_j^0 \phi_j(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının x_j düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_j, 0) = U(x_j, 0), \quad V_N(x_j, 0) = V(x_j, 0), \quad j = 0(1)N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 parametreleri

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1, \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2, \\ U(x_2, 0) &= \delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3, \\ &\vdots \\ U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N, \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde σ_j^0 parametreleri için de

$$\begin{aligned} V(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + 4\sigma_0 + \sigma_1, \\ V(x_1, 0) &= \sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2, \\ V(x_2, 0) &= \sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3, \\ &\vdots \\ V(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-2} + 4\sigma_{N-1} + \sigma_N, \\ V(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + 4\sigma_N + \sigma_{N+1} \end{aligned}$$

$(N+3)$ -bilinmeyenli $(N+1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinde U_m'' ve V_m'' sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-1} , δ_{N+1} , σ_{-1} ve σ_{N+1} sistemden yok edilerek $(N+1)$ -bilinmeyenli $(N+1)$ -tane denklemden oluşan karesel denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} 6 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (3.2.2.7)$$

ve

$$\begin{bmatrix} 6 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{N-1} \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} \quad (3.2.2.8)$$

olarak yazılabilir. Bu sistemler kolayca çözümlenerek başlangıç parametreleri bulunur. Böylece (3.2.2.6) denklem sistemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler hesaplanabilir.

(3.2.2.6) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi de Galerkin yöntemindekine benzer şekilde incelenir. Coupled KdV denkleminin lineer olmayan UU_x , VV_x ve UV_x terimlerini lineerleştirmek için U ve V yerine λ gibi bir sabit alınırsa B ve $B1$ matrislerinin genelleştirilmiş satırları $\frac{\lambda}{40}(-24, -600, -960, 960, 600, 24)$ olarak elde edilir. Böylece (3.2.2.6) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{60}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda \Delta t}{40}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \gamma_4 = \frac{b \Delta t}{20},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 10\gamma_1 + 72\gamma_2 a + \gamma_3 a, \\
\alpha_2 &= 57\gamma_1 + 1800\gamma_2 a + \gamma_3 a, \\
\alpha_3 &= 302\gamma_1 + 2880\gamma_2 a - 8\gamma_3 a, \\
\alpha_4 &= 302\gamma_1 - 2880\gamma_2 a + 8\gamma_3 a, \\
\alpha_5 &= 57\gamma_1 - 1800\gamma_2 a - \gamma_3 a, \\
\alpha_6 &= 10\gamma_1 - 72\gamma_2 a - \gamma_3 a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 10\gamma_1 - 36\gamma_2 - \gamma_3, \\
\beta_2 &= 57\gamma_1 - 900\gamma_2 - \gamma_3, \\
\beta_3 &= 302\gamma_1 - 1440\gamma_2 + 8\gamma_3, \\
\beta_4 &= 302\gamma_1 + 1440\gamma_2 - 8\gamma_3, \\
\beta_5 &= 57\gamma_1 + 900\gamma_2 + \gamma_3, \\
\beta_6 &= 10\gamma_1 + 36\gamma_2 + \gamma_3
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} + \alpha_6 \delta_{m+3}^{n+1} + 12\gamma_4 \sigma_{m-2}^{n+1} + 300\gamma_4 \sigma_{m-1}^{n+1} \\
&+ 480\gamma_4 \sigma_m^{n+1} - 480\gamma_4 \sigma_{m+1}^{n+1} - 300\gamma_4 \sigma_{m+2}^{n+1} - 12\gamma_4 \sigma_{m+3}^{n+1} = \alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_5 \delta_{m-1}^n + \alpha_4 \delta_m^n + \\
&\alpha_3 \delta_{m+1}^n + \alpha_2 \delta_{m+2}^n + \alpha_1 \delta_{m+3}^n - 12\gamma_4 \sigma_{m-2}^n - 300\gamma_4 \sigma_{m-1}^n - 480\gamma_4 \sigma_m^n + 480\gamma_4 \sigma_{m+1}^n + \\
&300\gamma_4 \sigma_{m+2}^n + 12\gamma_4 \sigma_{m+3}^n
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{m-1}^{n+1} + \beta_3 \sigma_m^{n+1} + \beta_4 \sigma_{m+1}^{n+1} + \beta_5 \sigma_{m+2}^{n+1} + \beta_6 \sigma_{m+3}^{n+1} \\
&= \beta_6 \sigma_{m-2}^n + \beta_5 \sigma_{m-1}^n + \beta_4 \sigma_m^n + \beta_3 \sigma_{m+1}^n + \beta_2 \sigma_{m+2}^n + \beta_1 \sigma_{m+3}^n
\end{aligned}$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\rho_1 = (302 + 10 \cos(3\varphi) + 67 \cos(2\varphi) + 359 \cos(\varphi) + 10i \sin(3\varphi) + 47i \sin(2\varphi) + 245i \sin(\varphi))\gamma_1,$$

$$\rho_2 = (2880 - 72 \cos(3\varphi) - 1728 \cos(2\varphi) - 1080 \cos(\varphi) - 72i \sin(3\varphi) - 1872i \sin(2\varphi) - 4680i \sin(\varphi))a\gamma_2,$$

$$\rho_3 = (-8 - \cos(3\varphi) + 9 \cos(\varphi) - i \sin(3\varphi) - 2i \sin(2\varphi) + 7i \sin(\varphi))a\gamma_3,$$

$$\rho_4 = (480 - 12 \cos(3\varphi) - 288 \cos(2\varphi) - 180 \cos(\varphi) + 12i \sin(3\varphi) - 312i \sin(2\varphi) - 780i \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$\rho_5 = (-1440 + 36 \cos(3\varphi) + 864 \cos(2\varphi) + 540 \cos(\varphi) + 36i \sin(3\varphi) + 936i \sin(2\varphi) + 2340i \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$\rho_6 = (8 + \cos(3\varphi) - 9 \cos(\varphi) + i \sin(3\varphi) + 2i \sin(2\varphi) - 7i \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$c_1 = \rho_2 + \rho_3,$$

$$c_2 = \rho_5 + \rho_6$$

olmak üzere

$$[(\rho_1 + c_1)q - (\rho_1 - c_1)]P + [(\rho_4q + \rho_4)]W = 0$$

$$[(\rho_1 + c_2)q - (\rho_1 - c_2)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(\rho_1^2 + i\rho_1c_1 + i\rho_1c_2 - c_1c_2)q^2 - (2\rho_1^2 + 2c_1c_2)q + \rho_1^2 - i\rho_1c_1 - i\rho_1c_2 - c_1c_2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\rho_1 - ic_1}{\rho_1 + ic_1}, \quad q_2 = \frac{\rho_1 - ic_2}{\rho_1 + ic_2}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, Petrov-Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen üç model problemin nümerik çözümleri bulundu. Problem 1 için tüm hesaplamalar, $\lambda = 0.5$ olmak üzere, a ve b katsayılarının farklı değerleri için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında yapıldı. Tablo 3.18-3.21' de, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablo 3.18 ve 3.19, $a = -0.5$ ve $b = 3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile hata normlarını göstermektedir. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının önemli ölçüde değişmediği görülmektedir. Tablo 3.18' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $h = 0.2$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.512 \times 10^{-3}$ ve $\%0.134 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.544 \times 10^{-3}$ ve $\%0.077 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin arttığı görülmektedir. Tablo 3.19' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%4.659 \times 10^{-3}$ ve $\%0.968 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%2.794 \times 10^{-3}$ ve $\%0.070 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, $h = 0.1$ için Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.18: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.2$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000000	0.008043	0.005264	0.053594	0.037449
	10.0	1.999999	1.000000	0.014508	0.008930	0.093799	0.057861
	15.0	1.999996	1.000000	0.026745	0.011594	0.127511	0.071811
	20.0	1.999990	1.000000	0.043317	0.019848	0.154101	0.078519
0.01	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000000	0.003610	0.002026	0.053590	0.037489
	10.0	1.999998	0.999999	0.011686	0.005890	0.093626	0.057792
	15.0	1.999995	0.999999	0.025914	0.011505	0.127092	0.071436
	20.0	1.999989	0.999999	0.042403	0.019621	0.153717	0.078497

Tablo 3.19: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999997	0.999997	0.009231	0.005450	0.106858	0.077220
	10.0	1.999986	0.999994	0.027396	0.012932	0.208712	0.140250
	15.0	1.999960	0.999993	0.054210	0.023597	0.330640	0.207621
	20.0	1.999907	0.999990	0.099254	0.051599	0.416295	0.221646
0.01	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999998	0.999999	0.005903	0.002652	0.107302	0.076676
	10.0	1.999992	0.999999	0.024341	0.010431	0.184385	0.116064
	15.0	1.999973	1.000000	0.053306	0.020889	0.249200	0.144942
	20.0	1.999944	0.999999	0.094503	0.038797	0.293443	0.151818

Tablo 3.20 ve 3.21, $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe hata normlarının azaldığı görülmektedir. Tablo 3.20' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.2$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.042 \times 10^{-3}$ ve $\%2.102 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.059 \times 10^{-3}$ ve $\%3.238 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin çok az oranda arttığı görülmektedir. Tablo 3.21' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.315 \times 10^{-3}$ ve $\%2.227 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.257 \times 10^{-3}$ ve $\%7.042 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, $h = 0.1$ için Δt zaman adımı küçüldükçe I_1 ' deki değişimin azaldığı, I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

Problem 1' in $a = -0.5$, $b = 3$ için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 3.22' de verildi. Tablodan t ' nin artan zamanları için tek dalganın hemen hemen genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N çözümü için $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.499781 ($x = -0.6$) iken $t = 10$ ' da 0.499788 ($x = 1.9$) ve $t = 20$ ' de 0.499815 ($x = 4.4$); V_N çözümü için ise $t = 0$ ' da

Tablo 3.20: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.2$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.004872	0.002666	0.041003	0.028652
	10.0	2.000000	0.500000	0.012843	0.007701	0.071503	0.043929
	15.0	2.000000	0.500000	0.029389	0.018901	0.097061	0.054241
	20.0	2.000001	0.500000	0.069759	0.039721	0.121801	0.060141
0.01	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.001597	0.001271	0.040942	0.028645
	10.0	2.000000	0.500000	0.005441	0.003418	0.071553	0.044134
	15.0	2.000000	0.500000	0.014676	0.009392	0.097342	0.054490
	20.0	2.000001	0.500000	0.034137	0.018911	0.118655	0.059896

Tablo 3.21: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.004833	0.002828	0.079847	0.055588
	10.0	2.000001	0.500000	0.015768	0.010203	0.131593	0.084375
	15.0	2.000003	0.500000	0.042695	0.025974	0.186782	0.109694
	20.0	2.000006	0.500000	0.088596	0.048678	0.236710	0.126405
0.01	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.002170	0.001481	0.081361	0.058229
	10.0	2.000001	0.500000	0.010746	0.006873	0.135380	0.083077
	15.0	2.000003	0.500000	0.030353	0.018515	0.172011	0.094619
	20.0	2.000005	0.500000	0.067188	0.036892	0.199799	0.098570

dalganın genliği 0.204079 ($x = -0.6$) iken $t = 10$ ' da 0.204083 ($x = 1.9$) ve $t = 20$ ' de 0.204084 ($x = 4.4$) olarak hesaplandı.

Tablo 3.22: $a = -0.5$, $b = 3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

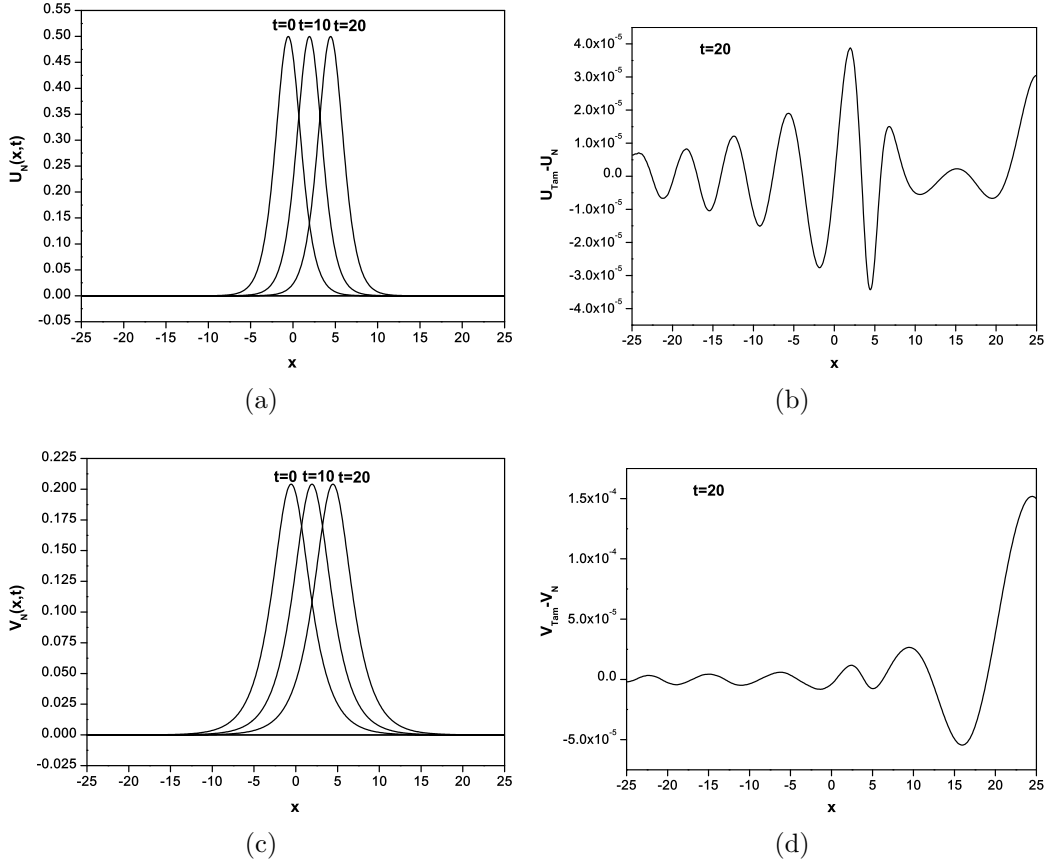
t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	-0.6	0.499781	0.204079
5.0	0.7	0.499994	0.204124
10.0	1.9	0.499788	0.204083
15.0	3.2	0.499983	0.204117
20.0	4.4	0.499815	0.204084

Problem 1' in $a = -0.5$, $b = 3$ ve $t = 0, 10$ ve 20 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri grafiksel olarak Şekil 3.6' da verildi. Şekil 3.6' dan, t artarken dalganın genliğini hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiği, hata dağılımları incelendiğinde, U_N için genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında, V_N için ise sağ sınır civarında hata dağılımlarının büyüdüğü görülmektedir.

Tablo 3.23 ve 3.24' de Problem 1' in $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için elde edilen korunum sabitleri ile L_∞ hata normu, referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kolokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı.

Tablo 3.23: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Petrov-Galerkin Yöntemi			[55]		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	1.000000	0.000000	2.000000	1.000000	0.0
5.0	1.999998	0.999999	0.002652	2.000000	1.000000	0.003
10.0	1.999992	0.999999	0.010431	2.000000	1.000000	0.003
15.0	1.999973	1.000000	0.020889	1.999998	0.999999	0.005
20.0	1.999944	0.999999	0.038797	1.999999	0.999999	0.008



Şekil 3.6: $a = -0.5$ ve $b = 3$ için Problem 1' in farklı zamanlarda Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.

Tablo 3.24: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$, $\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Petrov-Galerkin Yöntemi			[55]		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	0.500000	0.000000	2.000000	0.500000	0.0
5.0	2.000000	0.500000	0.001481	2.000000	0.500000	0.003
10.0	2.000001	0.500000	0.006873	1.999999	0.500000	0.003
15.0	2.000003	0.500000	0.018515	1.999999	0.500000	0.003
20.0	2.000005	0.500000	0.036892	1.999999	0.500000	0.004

Problem 2 için tüm hesaplamalar $0 \leq x \leq 65$ aralığında $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ değerleri için yapıldı. Tablo 3.25 ve 3.26' da farklı zamanlarda farklı konum adımları için hesaplanan korunum sabitleri karşılaştırıldı. Tablo 3.26' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 40$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.055 ve %0.079; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %0.152 ve %0.131; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla %0.153 ve %0.134 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin arttığı görülmektedir. Tablo 3.26' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 40$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.153 ve %0.134; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.149 ve %0.133 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.25: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $h = 0.1$ için $0 \leq x \leq 65$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$		$\Delta t = 0.01$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	9.728137	6.400000	9.728137	6.400000	9.728137
10.0	6.401407	9.732710	6.400025	9.728197	6.399997	9.728136
20.0	6.402611	9.736916	6.400039	9.728260	6.399984	9.728128
30.0	6.404432	9.741409	6.400458	9.728313	6.400394	9.728138
40.0	6.396472	9.735778	6.390296	9.715426	6.390217	9.715142

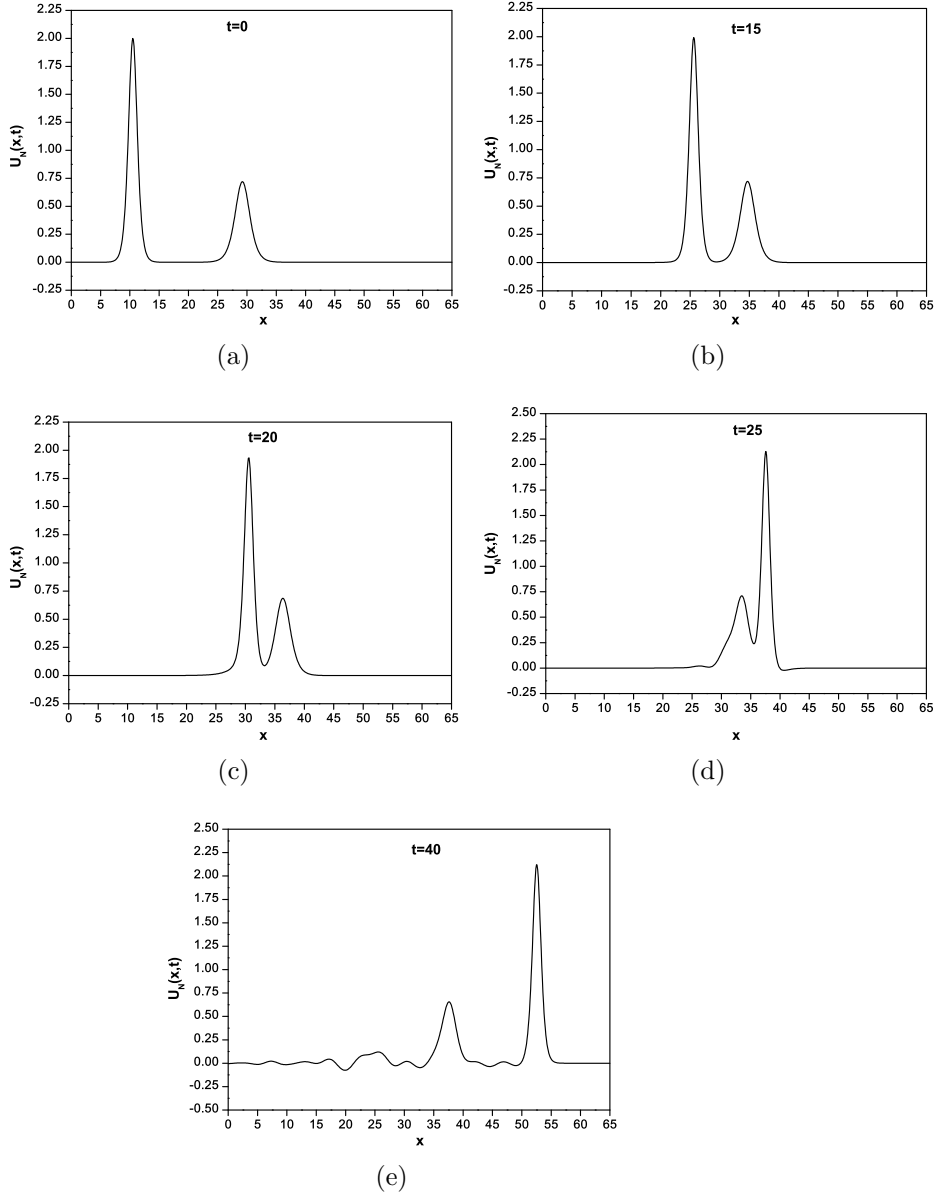
Tablo 3.26: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.01$ için $0 \leq x \leq 65$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	9.728137	6.400000	9.728137
10.0	6.399997	9.728136	6.399999	9.728172
20.0	6.399984	9.728128	6.399989	9.728136
30.0	6.400394	9.728138	6.400425	9.728167
40.0	6.390217	9.715142	6.390477	9.715162

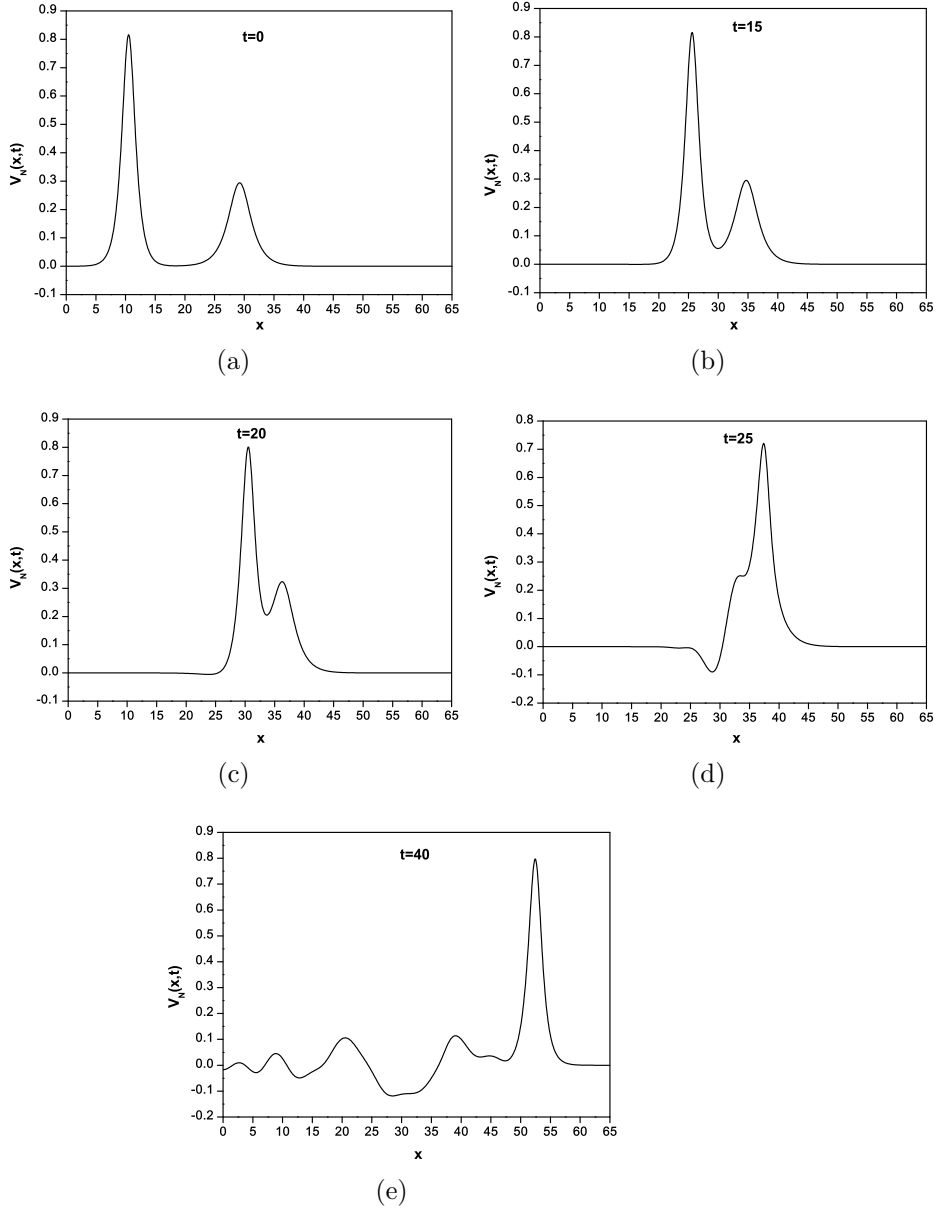
Problem 2' nin $a = -0.5$, $b = 3$ ve $t = 0, 15, 20, 25$ ve 40 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri grafiksel olarak Şekil 3.7 ve 3.8' de verildi. U_N ve V_N çözümleri için verilen grafiklerde iki pozitif tek dalganın girişimi gözlemlendi. Örneğin, U_N için verilen çözüm grafiğinde, $t = 0$ zamanında tek dalgalardan büyük dalganın genliği 1.999809 ve küçük dalganın genliği 0.719936 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = 10.5$ ve $x = 29.20$ dir. Grafiklerden görüldüğü üzere, $t = 0$ zamanında büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. Yaklaşık $t = 25$ zamanında iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği görülmektedir. Zaman ilerledikçe büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği gözlemlendi. Bu durum $t = 40$ zamanı için grafikte gösterildi. $t = 40$ zamanında küçük dalganın tepe noktasının $x = 37.60$ konumunda ve genliğinin 0.656262 , büyük dalganın ise tepe noktasının $x = 52.50$ konumunda ve genliğinin 2.121552 olduğu görülmektedir.

V_N için verilen çözüm grafiği incelendiğinde, $t = 0$ zamanında büyük dalganın genliği 0.816465 ve küçük dalganın genliği 0.293926 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = 10.5$ ve $x = 29.20$ dir. Grafiklerden görüldüğü üzere, $t = 0$ zamanında büyük genlikli dalga küçük genlikli diğer dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. Yaklaşık $t = 25$ zamanında iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği görülmektedir. Zaman ilerledikçe büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği gözlemlendi. Bu durum $t = 40$ zamanı için grafikte gösterildi. $t = 40$ zamanında küçük dalganın tepe noktasının $x = 39.1$ konumunda ve genliğinin 0.113989 , büyük dalganın ise tepe noktasının $x = 52.50$ konumunda ve genliğinin 0.796943 olduğu görülmektedir. U_N ve V_N çözüm grafikleri incelendiğinde her iki çözüm için iki pozitif dalganın girişiminden sonra dalgaların genliklerinde bozulmalar olduğu görülmektedir.

Problem 3 için tüm hesaplamalar, a ve b katsayılarının $a = -0.5$ ve $b = 3$ değerleri için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında yapıldı. Tablo 3.27 ve 3.28' de farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmalar verildi. Tablo 3.27' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki



Şekil 3.7: Problem 2' nin farklı t zamanlarında U için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.



Şekil 3.8: Problem 2' nin farklı t zamanlarında V için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %0.648 ve %3.910; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla %0.961 ve %3.802 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerinden I_2 ' deki değişimin azaldığı, I_1 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir. Tablo 3.28' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla %1.006 ve %3.694; $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.961 ve %3.802; $h = 0.0625$ iken sırasıyla %0.952 ve %3.807 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımı h küçüldüğünde I_1 ' deki değişimin azaldığı, I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

Tablo 3.27: $a = -0.5$, $b = 3$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

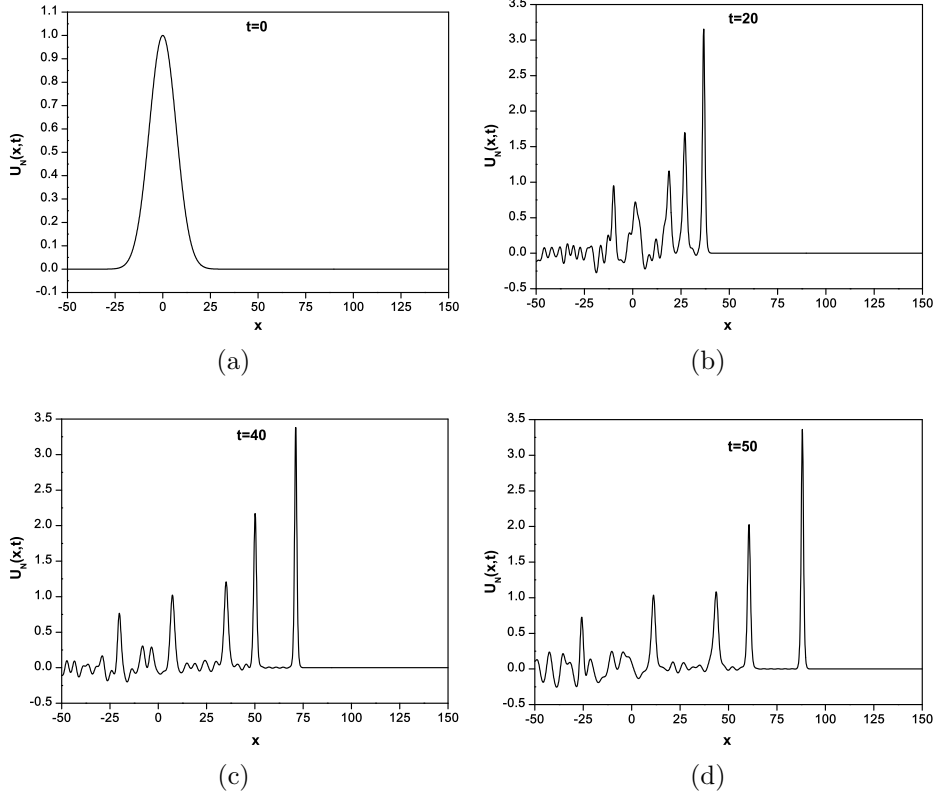
t	$\Delta t = 0.02$		$\Delta t = 0.01$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	37.599425	17.724539	37.599425
10.0	17.726449	37.574418	17.730068	37.595887
20.0	17.340983	37.141973	17.342614	37.165627
30.0	17.132643	36.760420	17.124056	36.794745
40.0	17.445640	36.277575	17.423566	36.346199
50.0	17.609657	36.129196	17.554265	36.170069

Tablo 3.28: $a = -0.5$, $b = 3$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$		$h = 0.1$		$h = 0.0625$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	37.599425	17.724539	37.599425	17.724539	37.599425
10.0	17.728577	37.596527	17.730068	37.595887	17.730612	37.595874
20.0	17.346872	37.160411	17.342614	37.165627	17.340419	37.167530
30.0	17.129037	36.785116	17.124056	36.794745	17.121112	36.796178
40.0	17.407057	36.364671	17.423566	36.346199	17.420679	36.347103
50.0	17.546287	36.210334	17.554265	36.170069	17.555830	36.167930

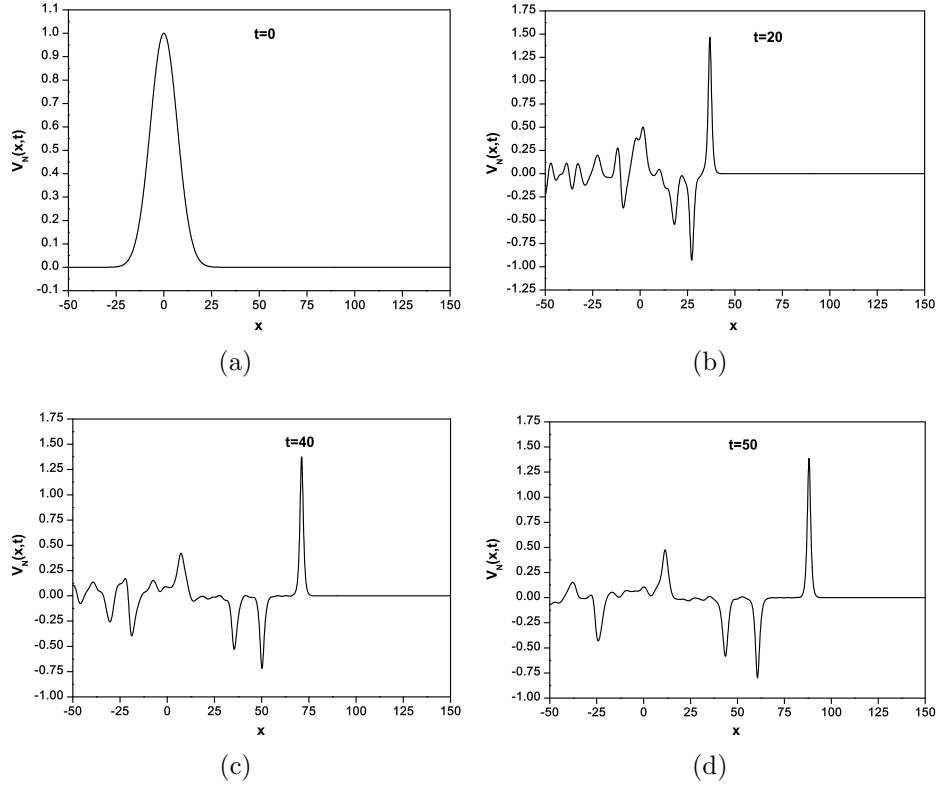
Problem 3' ün $a = -0.5$, $b = 3$ için $t = 0, 20, 40$ ve 50 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümleri grafiksel olarak Şekil 3.9 ve 3.10' da verildi. Bu grafiklerde, $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumlarında 1.0 genliklere sahip birer tek dalga görülmektedir.

$t = 50$ zamanına gelindiğinde bu tek dalgaların geride değişik genliklerde çok sayıda dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği gözlemlendi.



Şekil 3.9: Problem 3' ün farklı t zamanlarında U için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

Problem 3' ün $t = 50$ zamanında oluşan bu ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 3.29' da verildi.



Şekil 3.10: Problem 3' ün farklı t zamanlarında V için Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

Tablo 3.29: $t = 50$, $a = -0.5$, $b = 3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	88.10	3.363119	88.10	1.386289
İkinci Dalga	60.60	2.026796	60.70	-0.798583
Üçüncü Dalga	43.60	1.083213	43.60	-0.584241
Dördüncü Dalga	11.30	1.037089	11.50	0.475942
Beşinci Dalga	-25.80	0.725914	-24.20	-0.430341

3.2.3 Subdomain Yöntemi

Bu kısımda, (3.1) ile verilen coupled KdV denkleminin subdomain sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri bulundu. Göz önüne alınan problemin $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ tam çözümlerine sırasıyla karşılık gelen $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ yaklaşımları Bölüm 1' de (1.4.4.1) ile verilen $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+1} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.3.1)$$

şeklinde yazılabilir [8]. Burada δ_j ve σ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (1.4.4.1) ile verilen kuartik B-Spline fonksiyonlarına

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\ \phi_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4, \\ \phi_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4, \\ \phi_{m+1} &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4, \\ \phi_{m+2} &= \xi^4 \end{aligned} \quad (3.2.3.2)$$

kuartik B-spline baz fonksiyonlar elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm B-spline değerleri sıfır olduğundan (3.2.3.2) denklemi ile verilen kuartik baz fonksiyonları cinsinden (3.2.3.1) yaklaşımları

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.3.3)$$

olarak yazılabilir. (3.2.3.2) B-spline değerleri, (3.2.3.3) yaklaşımlarında yerlerine yazılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x' e göre birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1, \quad \phi_{m-1} = 11, \quad \phi_m = 11, \quad \phi_{m+1} = 1, \\ U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ V_N(x_m, t) &= V_m = \sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U'_m &= \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\
V'_m &= \frac{4}{h}(-\sigma_{m-2} - 3\sigma_{m-1} + 3\sigma_m + \sigma_{m+1}), \\
U''_m &= \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \\
V''_m &= \frac{12}{h^2}(\sigma_{m-2} - \sigma_{m-1} - \sigma_m + \sigma_{m+1}), \\
U'''_m &= \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\
V'''_m &= \frac{24}{h^3}(-\sigma_{m-2} + 3\sigma_{m-1} - 3\sigma_m + \sigma_{m+1})
\end{aligned} \tag{3.2.3.4}$$

olarak bulunur. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir.

Bölüm 2' de (2.2.3.1) ile verilen W_m ağırlık fonksiyonu (3.2.1) de yerine yazılırsa her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (U_t - 6aUU_x - 2bVV_x - aU_{xxx}) dx = 0, \tag{3.2.3.5a}$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (V_t + 3UV_x + V_{xxx}) dx = 0 \tag{3.2.3.5b}$$

denklemleri elde edilir. (3.2.3.5) denklem sisteminin birinci denklemindeki integralleri hesaplamak için önce $h\xi = x - x_m$ lokal koordinat dönüşümü uygulanır ve sonra U_N ve V_N yaklaşımlarındaki ϕ_j yerine (3.2.3.2) ile verilen kuartik baz fonksiyonları alınır, $\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx$ integrali,

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx &= h \int_0^1 U_t d\xi = h \int_0^1 [\dot{\delta}_{m-2}(1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) + \\
&\quad \dot{\delta}_{m-1}(11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4) + \\
&\quad \dot{\delta}_m(11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4) + \\
&\quad \dot{\delta}_{m+1}(1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4) + \dot{\delta}_{m+2}(\xi^4)] d\xi \\
&= \frac{h}{5}(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklemden $\dot{\delta}$ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.3) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx &= \frac{h}{5\Delta t}[(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) + 26(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 66(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + \\
&\quad 26(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n)]
\end{aligned}$$

bulunur. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} 6aUU_x dx$ integrali, $Z_m = U$ olmak üzere, hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} 6aUU_x dx &= 6aZ_m \int_0^1 U_\xi d\xi = 6aZ_m[U]_0^1 \\ &= 6aZ_m[(\delta_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) - \\ &\quad (\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1})] \\ &= 6aZ_m[-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}]\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikte δ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} 6aUU_x dx &= 3aZ_m[-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) - 10(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) + \\ &\quad 10(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)]\end{aligned}$$

bulunur. (3.2.3.5a) denklemindeki diğer terimler, $G_m = V$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} 2bVV_x dx &= 2bG_m \int_0^1 V_\xi d\xi = 2bG_m[V]_0^1 \\ &= 2bG_m[(\sigma_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} + \sigma_{m+2}) - \\ &\quad (\sigma_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \sigma_{m+1})]\end{aligned}$$

bu eşitlikte σ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} 2bVV_x dx &= bG_m[-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) - 10(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) + \\ &\quad 10(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)]\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} aU_{xxx} dx &= \frac{a}{h^2} \int_0^1 U_{\xi\xi\xi} d\xi = \frac{a}{h^2}[U_{\xi\xi}]_0^1 \\ &= \frac{12a}{h^2}[(\delta_{m-1} - \delta_m - \delta_{m+1} + \delta_{m+2}) - (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1})] \\ &= \frac{12a}{h^2}[(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})]\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte δ yerine (2.2.3.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_m}^{x_{m+1}} aU_{xxx} dx &= \frac{6a}{h^2}[-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) + 2(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) - 2(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + \\ &\quad (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)]\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (3.2.3.5a) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} + 3aZ_m + \frac{6a}{h^2} \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} + 30aZ_m - \frac{12a}{h^2} \right] + \delta_m^{n+1} \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \\
& \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{5\Delta t} - 30aZ_m + \frac{12a}{h^2} \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} - 3aZ_m - \frac{6a}{h^2} \right] + \sigma_{m-2}^{n+1} [bG_m] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1} [10bG_m] + \sigma_{m+1}^{n+1} [-10bG_m] + \sigma_{m+2}^{n+1} [-bG_m] \tag{3.2.3.6} \\
& = \delta_{m-2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} - 3aZ_m - \frac{6a}{h^2} \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} - 30aZ_m + \frac{12a}{h^2} \right] + \\
& \delta_m^n \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \delta_{m+1}^n \left[\frac{26}{5\Delta t} + 30aZ_m - \frac{12a}{h^2} \right] + \delta_{m+2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} + 3aZ_m + \frac{6a}{h^2} \right] + \\
& \sigma_{m-2}^n [-bG_m] + \sigma_{m-1}^n [-10bG_m] + \sigma_{m+1}^n [10bG_m] + \sigma_{m+2}^n [bG_m]
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde (3.2.3.5) denklem sisteminin ikinci denklemindeki integraller hesaplanırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_t dx = h \int_0^1 V_t d\xi = \frac{h}{5} (\dot{\sigma}_{m-2} + 26\dot{\sigma}_{m-1} + 66\dot{\sigma}_m + 26\dot{\sigma}_{m+1} + \dot{\sigma}_{m+2})$$

bulunur. Bu eşitlikte $\dot{\sigma}$ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.6) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_t dx &= \frac{h}{5\Delta t} [(\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n) + 26(\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) + 66(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n) + \\
& 26(\sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} - \sigma_{m+2}^n)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} 3UV_x dx$ integrali hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} 3UV_x dx &= 3Z_m \int_0^1 V_\xi d\xi = 3Z_m [V]_0^1 \\
&= 3Z_m [(\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + 11\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) - \\
& (\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1})] \\
&= 3Z_m [-\sigma_{m-2} - 10\sigma_{m-1} + 10\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte σ yerine (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} 3UV_x dx &= \frac{3}{2} Z_m [-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) - 10(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) + \\
& 10(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.3.5b) denklemindeki diğer terimler hesaplanırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{xxx} dx = \frac{1}{h^2} \int_0^1 V_{\xi\xi\xi} d\xi = [V_{\xi\xi}]_0^1 = \frac{12}{h^2} [-\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} - 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})$$

ve yine σ yerine (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{xxx} dx = \frac{6}{h^2} [-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) + 2(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) - 2(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)]$$

bulunur. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (3.2.3.5b) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{3}{2} Z_m - \frac{6}{h^2} \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} - 15Z_m + \frac{12}{h^2} \right] + \sigma_m^{n+1} \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \\ & \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{5\Delta t} + 15Z_m - \frac{12}{h^2} \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{3}{2} Z_m + \frac{6}{h^2} \right] \quad (3.2.3.7) \\ & = \sigma_{m-2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{3}{2} Z_m + \frac{6}{h^2} \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} + 15Z_m - \frac{12}{h^2} \right] + \\ & \sigma_m^n \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[\frac{26}{5\Delta t} - 15Z_m + \frac{12}{h^2} \right] + \sigma_{m+2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{3}{2} Z_m - \frac{6}{h^2} \right] \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} Z_m &= \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ G_m &= \sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1} \end{aligned}$$

dır. Z_m ve G_m 'nin lumped değeri

$$\frac{U_m + U_{m+1}}{2}, \quad \frac{V_m + V_{m+1}}{2}$$

kullanılarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} Z_m &= \frac{(\delta_{m-2} + 12\delta_{m-1} + 22\delta_m + 12\delta_{m+1} + \delta_{m+2})}{2}, \\ G_m &= \frac{(\sigma_{m-2} + 12\sigma_{m-1} + 22\sigma_m + 12\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})}{2} \end{aligned}$$

olur. Böylece $(2N + 10)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3.2.3.4) yaklaşımlarında U_m, V_m, U'_m ve V'_m sınırlardaki değerleri kullanılarak $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}$ ve σ_{N+2} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir.

(3.2.3.6) ve (3.2.3.7) denklemlerinin lineer olmayan terimlerine, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımın kararlılık analizinin incelenmesinde Galerkin ve Petrov-Galerkin yönteminde olduğu gibi von Neumann kararlılık analizi kullanıldı. (3.2.3.6) ve (3.2.3.7) denklem sistemlerinin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{5\Delta t}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{2}Z_m, \quad \gamma_3 = \frac{6}{h^2}, \quad \gamma_4 = bG_m,$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 + 2\gamma_2 a + \gamma_3 a,$$

$$\alpha_2 = 26\gamma_1 + 20\gamma_2 a - 2\gamma_3 a,$$

$$\alpha_3 = 66\gamma_1,$$

$$\alpha_4 = 26\gamma_1 - 20\gamma_2 a + 2\gamma_3 a,$$

$$\alpha_5 = \gamma_1 - 2\gamma_2 a - \gamma_3 a,$$

$$\beta_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

$$\beta_2 = 26\gamma_1 - 10\gamma_2 + 2\gamma_3,$$

$$\beta_3 = 66\gamma_1,$$

$$\beta_3 = 26\gamma_1 + 10\gamma_2 - 2\gamma_3,$$

$$\beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_4 \sigma_{m-2}^{n+1} + 10\gamma_4 \sigma_{m-1}^{n+1} \\ & - 10\gamma_4 \sigma_{m+1}^{n+1} - \gamma_4 \sigma_{m+2}^{n+1} = \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \\ & - \gamma_4 \sigma_{m-2}^n - 10\gamma_4 \sigma_{m-1}^n + 10\gamma_4 \sigma_{m+1}^n + \gamma_4 \sigma_{m+2}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & b_1 \sigma_{m-2}^{n+1} + b_2 \sigma_{m-1}^{n+1} + b_3 \sigma_m^{n+1} + b_4 \sigma_{m+1}^{n+1} + b_5 \sigma_{m+2}^{n+1} \\ & = b_5 \sigma_{m-2}^n + b_4 \sigma_{m-1}^n + b_3 \sigma_m^n + b_2 \sigma_{m+1}^n + b_1 \sigma_{m+2}^n \end{aligned}$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\rho_1 = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$\rho_2 = (-4 \sin(2\varphi) - 40 \sin(\varphi))a\gamma_2,$$

$$\rho_3 = (-2 \sin(2\varphi) + 4 \sin(\varphi))a\gamma_3,$$

$$\rho_4 = (-2 \sin(2\varphi) - 20 \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$\rho_5 = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$\rho_6 = (2 \sin(2\varphi) - 4 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$c_1 = \rho_2 + \rho_3,$$

$$c_2 = \rho_5 + \rho_6$$

olmak üzere

$$[(\rho_1 + c_1)q - (\rho_1 - c_1)]P + [(\rho_4 q + \rho_4)]W = 0$$

$$[(\rho_1 + c_2)q - (\rho_1 - c_2)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W' ya göre aşık olmaması için en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(\rho_1^2 + i\rho_1 c_1 + i\rho_1 c_2 - c_1 c_2)q^2 - (2\rho_1^2 + 2c_1 c_2)q + \rho_1^2 - i\rho_1 c_1 - i\rho_1 c_2 - c_1 c_2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\rho_1 - ic_1}{\rho_1 + ic_1}, \quad q_2 = \frac{\rho_1 - ic_2}{\rho_1 + ic_2}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, subdomain yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, subdomain sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen üç model problemin nümerik çözümleri elde edildi. Problem 1 için tüm hesaplamalar, $\lambda = 0.5$ olmak üzere, a ve b katsayılarının farklı değerleri için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında

yapıldı. Tablo 3.30-3.35, $a = 0.5$ ve $b = -3$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablo 3.30 ve 3.31, $a = 0.5$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitlerini ve hata normlarını göstermektedir. Tablo 3.30' dan konum adımı küçüldükçe hata normlarının azaldığı açıktır. Tablo 3.31' den ise zaman adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının kayda değer ölçüde değişmediği görülmektedir.

Tablo 3.30: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999997	-0.333334	1.056517	0.730588	0.573666	0.276848
	10.0	2.000005	-0.333323	2.560289	1.534362	1.007773	0.442830
	15.0	1.999990	-0.333311	3.388818	2.300894	1.236735	0.684441
	20.0	1.999964	-0.333328	3.732485	2.236111	1.014481	0.391266
0.1	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	-0.333333	0.265019	0.183003	0.143782	0.069565
	10.0	2.000001	-0.333333	0.643919	0.387081	0.252978	0.111876
	15.0	1.999997	-0.333332	0.854156	0.583990	0.311440	0.173970
	20.0	1.999992	-0.333333	0.939914	0.563296	0.252897	0.098361
0.05	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	-0.333333	0.067701	0.046524	0.036700	0.017969
	10.0	1.999998	-0.333333	0.162160	0.096139	0.064105	0.028324
	15.0	1.999998	-0.333333	0.208025	0.143019	0.076811	0.043135
	20.0	2.000002	-0.333333	0.214226	0.127705	0.056365	0.021197

Tablo 3.30' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%1.824 \times 10^{-3}$ ve $\%1.493 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.376 \times 10^{-3}$ ve $\%0.063 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.137 \times 10^{-3}$ ve $\%0.027 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.31' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.137 \times 10^{-3}$ ve $\%0.027 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%0.149 \times 10^{-3}$ ve $\%0.036 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken

Tablo 3.31: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	-0.333333	0.067701	0.046524	0.036700	0.017969
	10.0	1.999998	-0.333333	0.162160	0.096139	0.064105	0.028324
	15.0	1.999998	-0.333333	0.208025	0.143019	0.076811	0.043135
	20.0	2.000002	-0.333333	0.214226	0.127705	0.056365	0.021197
0.02	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	-0.333333	0.066070	0.045730	0.035834	0.017316
	10.0	2.000000	-0.333333	0.161108	0.097245	0.063184	0.028014
	15.0	2.000004	-0.333333	0.215255	0.147041	0.078303	0.043745
	20.0	2.000002	-0.333333	0.239607	0.143706	0.064569	0.025622
0.01	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333333	0.065865	0.045611	0.035715	0.017227
	10.0	2.000000	-0.333333	0.161020	0.097418	0.063078	0.027980
	15.0	2.000004	-0.333333	0.216430	0.147681	0.078584	0.043854
	20.0	1.999998	-0.333333	0.243296	0.145984	0.065825	0.026510

sırasıyla $\%0.054 \times 10^{-3}$ ve $\%0.036 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 3.32 ve 3.33' de, $a = -0.5$ ve $b = 3$ için farklı konum ve zaman adımları için L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1 ve I_2 korunum sabitleri verildi. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe hata normlarının azaldığı açıktır. Tablo 3.32' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%0.954 \times 10^{-3}$ ve $\%0.149 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.161 \times 10^{-3}$ ve $\%0.012 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.095 \times 10^{-3}$ ve $\%0.048 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımı $h = 0.2$ ' den $h = 0.1$ küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı ancak $h = 0.05$ olduğunda $h = 0.1$ ' e göre I_1 ' deki değişimin azaldığı I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir. Tablo 3.33' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.095 \times 10^{-3}$ ve $\%0.048 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%0.036 \times 10^{-3}$ ve $\%0.042 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.018 \times 10^{-3}$ ve $\%0.077 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. $\Delta t = 0.05$ ' den $\Delta t = 0.02$ ' ye küçüldüğünde

korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı, ancak $\Delta t = 0.01$ olduğunda $\Delta t = 0.02$ ' ye göre I_1 ' deki değişimin azaldığı, I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

Tablo 3.32: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.0	1.999999	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000001	0.405941	0.249974	0.316359	0.184119
	10.0	1.999993	1.000001	1.595413	0.903130	0.611931	0.359198
	15.0	1.999993	1.000000	2.861459	1.559130	0.782643	0.427208
	20.0	1.999980	0.999998	3.304344	1.755328	1.050628	0.498591
0.1	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	1.000000	0.101144	0.062934	0.080143	0.046650
	10.0	1.999999	1.000000	0.401171	0.228332	0.154988	0.091166
	15.0	1.999998	1.000000	0.721493	0.393774	0.196852	0.107933
	20.0	1.999997	1.000000	0.830116	0.441468	0.264377	0.125586
0.05	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.999999	0.025526	0.016940	0.020856	0.012170
	10.0	1.999998	0.999999	0.101119	0.057669	0.040139	0.023716
	15.0	2.000001	0.999999	0.183456	0.100001	0.049632	0.027621
	20.0	1.999998	0.999999	0.208463	0.110519	0.066440	0.031778

Problem 1' in $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 3.34 ve 3.35' de verildi. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Tablo 3.34' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.036 \times 10^{-3}$ ve $\%0.185 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.0 \times 10^{-15}$ ve $\%3.576 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin kayda değer şekilde azaldığı görülmektedir. Tablo 3.35' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.0 \times 10^{-15}$ ve $\%3.576 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%1.788 \times 10^{-5}$ ve $\%1.192 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.0 \times 10^{-15}$ ve $\%2.384 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı $\Delta t = 0.05$ ' den $\Delta t = 0.02$ ' ye küçüldüğünde I_1 ' deki değişimin arttığı I_2 ' deki

Tablo 3.33: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.999999	0.025526	0.016940	0.020856	0.012170
	10.0	1.999998	0.999999	0.101119	0.057669	0.040139	0.023716
	15.0	2.000001	0.999999	0.183456	0.100001	0.049632	0.027621
	20.0	1.999998	0.999999	0.208463	0.110519	0.066440	0.031778
0.02	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.999999	0.025269	0.015560	0.019962	0.011611
	10.0	1.999998	0.999999	0.100234	0.057053	0.038629	0.022715
	15.0	2.000001	0.999999	0.180029	0.098335	0.049182	0.026947
	20.0	1.999998	0.999999	0.207310	0.110289	0.066065	0.031355
0.01	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.999999	0.025328	0.015448	0.019840	0.011530
	10.0	1.999998	0.999999	0.100203	0.057040	0.038430	0.022578
	15.0	1.999999	0.999998	0.179698	0.098213	0.049158	0.026844
	20.0	2.000000	1.000000	0.207397	0.110434	0.066089	0.031327

değişimin ise azaldığı görülmektedir. $\Delta t = 0.01$ olduğunda ise $\Delta t = 0.02$ ' ye göre I_1 ' deki değişimin azaldığı I_2 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir.

Tablo 3.36-3.38' de Problem 1' in $a = 0.5$ ve $b = -3$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için elde edilen korunum sabitleri ile L_∞ hata normu, referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı.

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 3.39' da verildi. Tablodan t ' nin artan zamanları için tek dalganın hemen hemen genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N çözümü için $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.499772 ($x = -1.4$) iken $t = 10$ ' da 0.499975 ($x = 1.1$) ve $t = 20$ ' de 0.499759 ($x = 3.6$); V_N çözümü için ise $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.353473 ($x = -1.4$) iken $t = 10$ ' da 0.353548 ($x = 1.1$) ve $t = 20$ ' de 0.353433 ($x = 3.6$) olarak hesaplandı.

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 3.11' de gösterildi. Şekil 3.11' den

Tablo 3.34: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.050870	0.032899	0.064570	0.034889
	10.0	1.999999	0.500000	0.202087	0.120423	0.192484	0.089741
	15.0	1.999999	0.500000	0.579048	0.345192	0.431842	0.194053
	20.0	1.999999	0.499999	1.427728	0.853727	0.874145	0.405659
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.014324	0.008499	0.016855	0.009115
	10.0	1.999999	0.500000	0.056916	0.033529	0.050874	0.023555
	15.0	1.999999	0.500000	0.161022	0.095813	0.115119	0.051622
	20.0	2.000000	0.500000	0.391926	0.234043	0.234196	0.108881

Tablo 3.35: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.014324	0.008499	0.016855	0.009115
	10.0	1.999999	0.500000	0.056916	0.033529	0.050874	0.023555
	15.0	1.999999	0.500000	0.161022	0.095813	0.115119	0.051622
	20.0	2.000000	0.500000	0.391926	0.234043	0.234196	0.108881
0.02	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.500000	0.012577	0.008261	0.016063	0.008679
	10.0	1.999999	0.500000	0.049904	0.029823	0.047861	0.022335
	15.0	2.000000	0.500000	0.143255	0.085435	0.107362	0.048262
	20.0	1.999999	0.500000	0.354107	0.211801	0.217399	0.100911
0.01	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.012386	0.008255	0.015951	0.008613
	10.0	1.999999	0.500000	0.048947	0.029343	0.047433	0.022166
	15.0	2.000000	0.500000	0.140739	0.083981	0.106256	0.047794
	20.0	2.000000	0.500000	0.348713	0.208621	0.215001	0.099773

Tablo 3.36: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Subdomain Yöntemi ($h = 0.05$)			[55] ($h = 0.1$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	2.000000	-0.333333	0.000
5.0	2.000000	-0.333333	0.045611	2.000000	-0.333333	0.004
10.0	2.000000	-0.333333	0.097418	2.000000	-0.333333	0.007
15.0	2.000004	-0.333333	0.147681	2.000000	-0.333333	0.014
20.0	1.999998	-0.333333	0.145984	2.000001	-0.333333	0.026

Tablo 3.37: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Subdomain Yöntemi ($h = 0.05$)			[55] ($h = 0.1$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	0.999999	0.000000	2.000000	1.000000	0.0
5.0	1.999999	0.999999	0.015448	2.000000	1.000000	0.003
10.0	1.999998	0.999999	0.057040	2.000000	1.000000	0.003
15.0	1.999999	0.999998	0.098213	1.999998	0.999999	0.005
20.0	2.000000	1.000000	0.110434	1.999999	0.999999	0.008

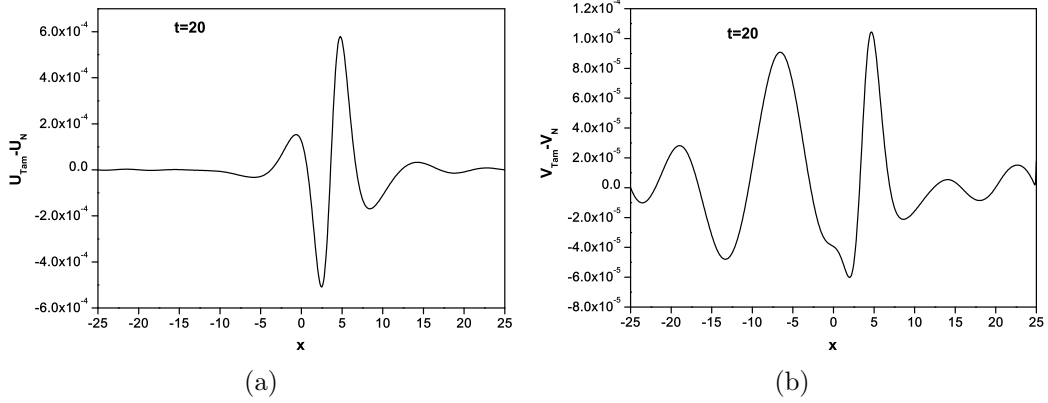
Tablo 3.38: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Subdomain Yöntemi ($h = 0.05$)			[55] ($h = 0.1$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	0.500000	0.000000	2.000000	0.500000	0.0
5.0	1.999999	0.500000	0.008255	2.000000	0.500000	0.003
10.0	1.999999	0.500000	0.029343	1.999999	0.500000	0.003
15.0	2.000000	0.500000	0.083981	1.999999	0.500000	0.003
20.0	2.000000	0.500000	0.208621	1.999999	0.500000	0.004

Tablo 3.39: $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	-1.4	0.499772	0.353473
5.0	-0.2	0.499889	0.353535
10.0	1.1	0.499975	0.353548
15.0	2.3	0.500582	0.353726
20.0	3.6	0.499759	0.353433

hata dağılımlarına bakıldığında, genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında hata dağılımlarının büyük olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 3.11: Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 120$ aralığında $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$, $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için yapıldı. Tablo 3.40 ve 3.41, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmaları göstermektedir. Tablo 3.40' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.055 ve %0.487; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla 2.216×10^{-3} ve 1.762×10^{-3} olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.41' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.05$

iken sırasıyla %0.055 ve %0.487; $h = 0.025$ iken sırasıyla %0.056 ve %0.498 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 3.40: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $h = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.400533	-3.240533	6.400014	-3.242683
20.0	6.401228	-3.238411	6.400024	-3.242650
30.0	6.402048	-3.236294	6.400043	-3.242601
40.0	6.400686	-3.234213	6.399903	-3.242595
50.0	6.401434	-3.232252	6.399933	-3.242569
60.0	6.404638	-3.232600	6.400180	-3.243871
70.0	6.404953	-3.231058	6.400158	-3.242891
80.0	6.402140	-3.229006	6.399948	-3.242649
90.0	6.403526	-3.226877	6.399858	-3.242724

Tablo 3.41: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.05$		$h = 0.025$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.400533	-3.240533	6.400542	-3.240479
20.0	6.401228	-3.238411	6.401250	-3.238316
30.0	6.402048	-3.236294	6.402068	-3.236173
40.0	6.400686	-3.234213	6.400566	-3.234016
50.0	6.401434	-3.232252	6.401378	-3.231958
60.0	6.404638	-3.232600	6.404725	-3.231397
70.0	6.404953	-3.231058	6.405122	-3.230651
80.0	6.402140	-3.229006	6.401965	-3.228647
90.0	6.403526	-3.226877	6.403605	-3.226516

Tablo 3.42' de Problem 2 için elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitlerinin karşılaştırılmaları verildi. Tablo 3.42' den subdomain sonlu

eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitleri ile referans [55] de elde edilenlerle uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 3.42: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$ ve $\gamma_2 = 30$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Subdomain Yöntemi ($h = 0.05$, $\Delta t = 0.02$)		[55] ($h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$)	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.243013
10.0	6.400014	-3.242683	6.400001	-3.243012
20.0	6.400024	-3.242650	6.399995	-3.243009
30.0	6.400043	-3.242601	6.399946	-3.243015
40.0	6.399903	-3.242595	6.399991	-3.243102
50.0	6.399933	-3.242569	6.399962	-3.243008
60.0	6.400180	-3.243871	6.399863	-3.243008
70.0	6.400158	-3.242891	-	-
80.0	6.399948	-3.242649	-	-
90.0	6.399858	-3.242724	-	-

Problem 2' nin $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 0$ ve 90 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri sırasıyla Tablo 3.43 ve Tablo 3.44' de verildi. Tablolardan her iki çözüm için de $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 90$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 3.43: Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(U_N)
0.0	10.25	1.999818	53.05	0.719979
90.0	103.15	1.908907	80.80	0.707996

Problem 3 için tüm hesaplamalar, a ve b katsayılarının $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için $-50 \leq x \leq 150$ aralığı üzerinde yapıldı. Tablo 3.45 ve 3.46' da farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmalar

Tablo 3.44: Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Genlik(V_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)	Konum(x)
0.0	10.25	1.414149	53.05	0.509109	
90.0	103.10	1.379639	80.85	0.508644	

verildi. Tablo 3.45' de I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.0625$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %1.060 ve %9.206; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %0.031 ve %0.353 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.46' da I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.02$ için $h = 0.0625$ iken sırasıyla %0.031 ve %0.353; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.032 ve %0.311 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe I_1 ' deki değişimin hemen hemen aynı kaldığı, I_2 ' deki değişimin ise azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.45: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $h = 0.0625$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.736154	-12.449325	17.724699	-12.520237
20.0	17.797603	-12.058982	17.725735	-12.509675
30.0	17.846005	-11.772863	17.727049	-12.502359
40.0	17.894858	-11.555172	17.729454	-12.495543
50.0	17.912438	-11.379352	17.729993	-12.488862

Tablo 3.47' de Problem 3 için elde edilen korunum sabitlerinin değeri ile referans [55] de elde edilen korunum sabitlerinin karşılaştırılmaları verildi. Tablo 3.47' den subdomain sonlu eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitlerinin değişimi ile referans [55] de elde edilenlerle uyum içerisinde olduğu görüldü.

Problem 3' ün $t = 50$ zamanında oluşan ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 3.48' de verildi.

Tablo 3.46: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.0625$		$h = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.724699	-12.520237	17.724700	-12.524511
20.0	17.725735	-12.509675	17.725744	-12.515258
30.0	17.727049	-12.502359	17.727071	-12.507990
40.0	17.729454	-12.495543	17.729663	-12.501056
50.0	17.729993	-12.488862	17.730173	-12.494176

Tablo 3.47: $a = 0.5$ ve $b = -3$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün subdomain yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Subdomain Yöntemi			
	$(h = 0.0625, \Delta t = 0.02)$		[55]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.72454	-12.53314
10.0	17.724699	-12.520237	17.72454	-12.53316
20.0	17.725735	-12.509675	17.72454	-12.53316
30.0	17.727049	-12.502359	17.72449	-12.53320
40.0	17.729454	-12.495543	17.72448	-12.53321
50.0	17.729993	-12.488862	17.72469	-12.53320

Tablo 3.48: $t = 50$, $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.0625$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	90.75	3.442405	90.75	2.434496
İkinci Dalga	63.0625	2.446931	63.0625	1.731032
Üçüncü Dalga	38.625	1.545951	38.625	1.105787
Dördüncü Dalga	18.00	0.992131	17.8125	0.654392
Beşinci Dalga	-0.375	0.624945	-0.375	0.333664

3.2.4 Kollokasyon Yöntemi

Bu kısımda, (3.1) ile verilen coupled KdV denkleminin kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bölüm 1' de (1.4.6.1) ile verilen $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak problemin $U(x, t)$ çözümüne bir $U_N(x, t)$ ve $V(x, t)$ çözümüne bir $V_N(x, t)$ yaklaşımı (1.4.6.1) septik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+4} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+4} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.4.1)$$

olarak yazılabilir [8]. Burada δ_j ve σ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (1.4.6.1) ile verilen septik B-Spline fonksiyonlarına

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \phi_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\ \phi_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\ \phi_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\ \phi_m &= 2416 - 1680\xi + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\ \phi_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\ \phi_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\ \phi_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7, \\ \phi_{m+4} &= \xi^7 \end{aligned} \quad (3.2.4.2)$$

septik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde diğer tüm B-spline değerleri sıfır olduğundan $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ yaklaşık çözümleri (3.2.4.2) denklemleri ile verilen septik baz fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \delta_j(t) \phi_j(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \sigma_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2.4.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.4.2) B-spline değerleri (3.2.4.3) yaklaşımlarında yerlerine yazılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x ' e göre birinci ve üçüncü

mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) = U_m &= \delta_{m+3} + 120\delta_{m+2} + 1191\delta_{m+1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m-1} + \\
&120\delta_{m-2} + \delta_{m-3}, \\
V_N(x_m, t) = V_m &= \sigma_{m+3} + 120\sigma_{m+2} + 1191\sigma_{m+1} + 2416\sigma_m + 1191\sigma_{m-1} + \\
&120\sigma_{m-2} + \sigma_{m-3}, \quad (3.2.4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
hU'_m &= 7(\delta_{m+3} + 56\delta_{m+2} + 245\delta_{m+1} - 245\delta_{m-1} - 56\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \\
hV'_m &= 7(\sigma_{m+3} + 56\sigma_{m+2} + 245\sigma_{m+1} - 245\sigma_{m-1} - 56\sigma_{m-2} - \sigma_{m-3}), \\
h^3U'''_m &= 210(\delta_{m+3} + 8\delta_{m+2} - 19\delta_{m+1} + 19\delta_{m-1} - 8\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \\
h^3V'''_m &= 210(\sigma_{m+3} + 8\sigma_{m+2} - 19\sigma_{m+1} + 19\sigma_{m-1} - 8\sigma_{m-2} - \sigma_{m-3})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir.

(3.2.4.4) yaklaşımları (3.1) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) + \\
&\frac{42a}{h}Z_m(\delta_{m-3} + 56\delta_{m-2} + 245\delta_{m-1} - 245\delta_{m+1} - 56\delta_{m+2} - \delta_{m+3}) + \\
\frac{14b}{h}G_m(\sigma_{m-3} + 56\sigma_{m-2} + 245\sigma_{m-1} - 245\sigma_{m+1} - 56\sigma_{m+2} - \sigma_{m+3}) + & \quad (3.2.4.5a) \\
&\frac{210a}{h^3}(\delta_{m-3} + 8\delta_{m-2} - 19\delta_{m-1} + 19\delta_{m+1} - 8\delta_{m+2} - \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\dot{\sigma}_{m-3} + 120\dot{\sigma}_{m-2} + 1191\dot{\sigma}_{m-1} + 2416\dot{\sigma}_m + 1191\dot{\sigma}_{m+1} + 120\dot{\sigma}_{m+2} + \dot{\sigma}_{m+3}) - \\
\frac{21}{h}Z_m(\sigma_{m-3} + 56\sigma_{m-2} + 245\sigma_{m-1} - 245\sigma_{m+1} - 56\sigma_{m+2} - \sigma_{m+3}) - & \quad (3.2.4.5b) \\
&\frac{210}{h^3}(\sigma_{m-3} + 8\sigma_{m-2} - 19\sigma_{m-1} + 19\sigma_{m+1} - 8\sigma_{m+2} - \sigma_{m+3}) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.4.5) denklem sistemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa sistemin geliştirilmiş satırları

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-3}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{21a}{h} Z_m + \frac{105a}{h^3} \right] + \delta_{m-2}^{n+1} \left[\frac{120}{\Delta t} + \frac{1176a}{h} Z_m + \frac{840a}{h^3} \right] + \\
& \delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{1191}{\Delta t} + \frac{5145a}{h} Z_m - \frac{1995a}{h^3} \right] + \delta_m^{n+1} \left[\frac{2416}{\Delta t} \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{1191}{\Delta t} - \frac{5145a}{h} Z_m + \frac{1995a}{h^3} \right] + \\
& \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{120}{\Delta t} - \frac{1176a}{h} Z_m - \frac{840a}{h^3} \right] + \delta_{m+3}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{21a}{h} Z_m - \frac{105a}{h^3} \right] + \sigma_{m-3}^{n+1} \left[\frac{7b}{h} G_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{392b}{h} G_m \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{1715b}{h} G_m \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[-\frac{1715b}{h} G_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[-\frac{392b}{h} G_m \right] + \\
& \sigma_{m+3}^n \left[-\frac{7b}{h} G_m \right] = \delta_{m-3}^n \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{21a}{h} Z_m - \frac{105a}{h^3} \right] + \tag{3.2.4.6a} \\
& \delta_{m-2}^n \left[\frac{120}{\Delta t} - \frac{1176a}{h} Z_m - \frac{840a}{h^3} \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{1191}{\Delta t} - \frac{5145a}{h} Z_m + \frac{1995a}{h^3} \right] + \delta_m^n \left[\frac{2416}{\Delta t} \right] + \\
& \delta_{m+1}^n \left[\frac{1191}{\Delta t} + \frac{5145a}{h} Z_m - \frac{1995a}{h^3} \right] + \delta_{m+2}^n \left[\frac{120}{\Delta t} + \frac{1176a}{h} Z_m + \frac{840a}{h^3} \right] + \\
& \delta_{m+3}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{21a}{h} Z_m + \frac{105a}{h^3} \right] + \sigma_{m-3}^{n+1} \left[-\frac{7b}{h} G_m \right] + \sigma_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{392b}{h} G_m \right] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{1715b}{h} G_m \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{1715b}{h} G_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{392b}{h} G_m \right] + \sigma_{m+3}^n \left[\frac{7b}{h} G_m \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{m-3}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{21}{2h} Z_m - \frac{105}{h^3} \right] + \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{120}{\Delta t} - \frac{1176}{2h} Z_m - \frac{840}{h^3} \right] + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{1191}{\Delta t} - \frac{5145}{2h} Z_m + \frac{1995}{h^3} \right] + \sigma_m^{n+1} \left[\frac{2416}{\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{1191}{\Delta t} + \frac{5145}{2h} Z_m - \frac{1995}{h^3} \right] + \\
& \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{120}{\Delta t} + \frac{1176}{2h} Z_m + \frac{840}{h^3} \right] + \sigma_{m+3}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{21}{2h} Z_m + \frac{105a}{h^3} \right] \tag{3.2.4.6b} \\
& = \sigma_{m-3}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{21}{2h} Z_m + \frac{105}{h^3} \right] + \sigma_{m-2}^n \left[\frac{120}{\Delta t} + \frac{1176}{2h} Z_m + \frac{840}{h^3} \right] + \\
& \sigma_{m-1}^n \left[\frac{1191}{\Delta t} + \frac{5145}{2h} Z_m - \frac{1995}{h^3} \right] + \sigma_m^n \left[\frac{2416}{\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[\frac{1191}{\Delta t} - \frac{5145}{2h} Z_m + \frac{1995}{h^3} \right] + \\
& \sigma_{m+2}^n \left[\frac{120}{\Delta t} - \frac{1176}{2h} Z_m - \frac{840}{h^3} \right] + \sigma_{m+3}^n \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{21}{2h} Z_m - \frac{105a}{h^3} \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$Z_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},$$

$$G_m = \sigma_{m-3} + 120\sigma_{m-2} + 1191\sigma_{m-1} + 2416\sigma_m + 1191\sigma_{m+1} + 120\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3}$$

dir. Böylece $(2N + 14)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3.2.4.2) B-spline değerleri (3.2.4.3) yaklaşımlarında yerlerine yazılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin x e göre ikinci mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$h^2 U_m'' = 42(\delta_{m+3} + 24\delta_{m+2} + 15\delta_{m+1} - 80\delta_m + 15\delta_{m-1} + 24\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \quad (3.2.4.7)$$

$$h^2 V_m'' = 42(\sigma_{m+3} + 24\sigma_{m+2} + 15\sigma_{m+1} - 80\sigma_m + 15\sigma_{m-1} + 24\sigma_{m-2} + \sigma_{m-3})$$

ile birlikte (3.2.4.4) yaklaşımlarında U_m , V_m , U_m' ve V_m' nin sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-3} , δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} , δ_{N+2} , δ_{N+3} , σ_{-3} , σ_{-2} , σ_{-1} , σ_{N+1} , σ_{N+2} ve σ_{N+3} parametreleri sistemden yok edilir. Böylece $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir.

İterasyona başlanabilmesi için δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri problemin verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki biçimde kolayca hesaplanabilir.

$t = 0$ için (3.2.4.1) yaklaşımları

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-3}^{N+4} \delta_j^0 \phi_j(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{j=-3}^{N+4} \sigma_j^0 \phi_j(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının x_j düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_j, 0) = U(x_j, 0), \quad V_N(x_j, 0) = V(x_j, 0), \quad j = 0(1)N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 ve σ_j^0 parametreleri için $(N + 7)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir. (3.2.4.4) ve (3.2.4.7) ile verilen yaklaşımlarda U_m' , V_m' , U_m'' , V_m'' , U_m''' ve V_m''' nin sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-3} , δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} , δ_{N+2} , δ_{N+3} , σ_{-3} , σ_{-2} , σ_{-1} , σ_{N+1} , σ_{N+2} ve σ_{N+3} parametreleri sistemlerden yok edilirse $(N + 1)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemleri matris formunda

$$Ad_1 = B_1 \quad \text{ve} \quad Ad_2 = B_2$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_1 + 2\gamma_2 a + \gamma_3 a, \\
\alpha_2 &= 120\gamma_1 + 112\gamma_2 a + 8\gamma_3 a, \\
\alpha_3 &= 1191\gamma_1 + 490\gamma_2 a - 19\gamma_3 a, \\
\alpha_4 &= 2416\gamma_1, \\
\alpha_5 &= 1191\gamma_1 - 490\gamma_2 a + 19\gamma_3 a, \\
\alpha_6 &= 120\gamma_1 - 112\gamma_2 a - 8\gamma_3 a, \\
\alpha_7 &= \gamma_1 - 2\gamma_2 a - \gamma_3 a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3, \\
\beta_2 &= 120\gamma_1 - 56\gamma_2 - 8\gamma_3, \\
\beta_3 &= 1191\gamma_1 - 245\gamma_2 + 19\gamma_3, \\
\beta_4 &= 2416\gamma_1, \\
\beta_5 &= 1191\gamma_1 + 245\gamma_2 - 19\gamma_3, \\
\beta_6 &= 120\gamma_1 + 56\gamma_2 + 8\gamma_3, \\
\beta_7 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&a_1\delta_{m-3}^{n+1} + a_2\delta_{m-2}^{n+1} + a_3\delta_{m-1}^{n+1} + a_4\delta_m^{n+1} + a_5\delta_{m+1}^{n+1} + a_6\delta_{m+2}^{n+1} + a_7\delta_{m+3}^{n+1} + \\
&\gamma_4\sigma_{m-3}^{n+1} + 56\gamma_4\sigma_{m-2}^{n+1} + 245\gamma_4\sigma_{m-1}^{n+1} - 245\gamma_4\sigma_{m+1}^{n+1} - 56\gamma_4\sigma_{m+2}^{n+1} - \gamma_4\sigma_{m+3}^{n+1} = \\
&a_7\delta_{m-3}^n + a_6\delta_{m-2}^n + a_5\delta_{m-1}^n + a_4\delta_m^n + a_3\delta_{m+1}^n + a_2\delta_{m+2}^n + a_1\delta_{m+3}^n - \\
&\gamma_4\sigma_{m-3}^n - 56\gamma_4\sigma_{m-2}^n - 245\gamma_4\sigma_{m-1}^n + 245\gamma_4\sigma_{m+1}^n + 56\gamma_4\sigma_{m+2}^n + \gamma_4\sigma_{m+3}^n
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\beta_1\sigma_{m-3}^{n+1} + \beta_2\sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_3\sigma_{m-1}^{n+1} + \beta_4\sigma_m^{n+1} + \beta_5\sigma_{m+1}^{n+1} + \beta_6\sigma_{m+2}^{n+1} + \beta_7\sigma_{m+3}^{n+1} = \\
&\beta_7\sigma_{m-3}^n + \beta_6\sigma_{m-2}^n + \beta_5\sigma_{m-1}^n + \beta_4\sigma_m^n + \beta_3\sigma_{m+1}^n + \beta_2\sigma_{m+2}^n + \beta_1\sigma_{m+3}^n
\end{aligned}$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\rho_1 = (2416 + 2 \cos(3\varphi) + 240 \cos(2\varphi) + 2382 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$\rho_2 = (-4 \sin(3\varphi) - 224 \sin(2\varphi) - 980 \sin(\varphi))a\gamma_2,$$

$$\rho_3 = (-2 \sin(3\varphi) - 16 \sin(2\varphi) - 38 \sin(\varphi))a\gamma_3,$$

$$\rho_4 = (-2 \sin(3\varphi) - 112 \sin(2\varphi) - 490 \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$\rho_5 = (2 \sin(3\varphi) + 112 \sin(2\varphi) + 490 \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$\rho_6 = (2 \sin(3\varphi) + 16 \sin(2\varphi) + 38 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$c_1 = \rho_2 + \rho_3,$$

$$c_2 = \rho_5 + \rho_6$$

olmak üzere

$$[(\rho_1 + c_1)q - (\rho_1 - c_1)]P + [(\rho_4q + \rho_4)]W = 0$$

$$[(\rho_1 + c_2)q - (\rho_1 - c_2)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin P ve W ' ya göre aşıkâr olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(\rho_1^2 + i\rho_1c_1 + i\rho_1c_2 - c_1c_2)q^2 - (2\rho_1^2 + 2c_1c_2)q + \rho_1^2 - i\rho_1c_1 - i\rho_1c_2 - c_1c_2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{\rho_1 - ic_1}{\rho_1 + ic_1}, \quad q_2 = \frac{\rho_1 - ic_2}{\rho_1 + ic_2}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, kollokasyon yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen üç model problemin nümerik çözümleri bulundu. Problem 1 için tüm hesaplamalar, $\lambda = 0.5$ olmak üzere, a ve b katsayılarının farklı değerleri için $-25 \leq x \leq 25$ aralığı üzerinde yapıldı. Problem 1 için a ve b katsayılarının sırasıyla $a = 0.5$ ve $b = -3$,

$a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 3.49-3.54' de verildi. Tablo 3.49 ve 3.50' de, $a = 0.5$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 ve I_2 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan konum ve zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Tablo 3.49' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.02$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.018 \times 10^{-3}$ ve $\%0.170 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.030 \times 10^{-3}$ ve $\%0.188 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin çok az oranda arttığı görülmektedir. Tablo 3.50' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.018 \times 10^{-3}$ ve $\%0.009 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%0.030 \times 10^{-3}$ ve $\%0.188 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.0 \times 10^{-15}$ ve $\%0.894 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı $\Delta t = 0.05$ ' den $\Delta t = 0.02$ ' ye küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin arttığı, ancak $\Delta t = 0.01$ olduğunda ise $\Delta t = 0.02$ ' ye göre korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.49: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999998	-0.333333	0.001005	0.000606	0.000371	0.000212
	10.0	1.999999	-0.333333	0.002321	0.001194	0.000974	0.000555
	15.0	1.999999	-0.333333	0.003924	0.002140	0.001569	0.000811
	20.0	2.000000	-0.333333	0.006199	0.008316	0.001971	0.001033
0.05	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333333	0.001004	0.000604	0.000370	0.000211
	10.0	1.999999	-0.333333	0.002318	0.001191	0.000973	0.000553
	15.0	2.000000	-0.333333	0.003918	0.002132	0.001567	0.000810
	20.0	2.000000	-0.333333	0.004938	0.003018	0.001939	0.001032

Tablo 3.51 ve 3.52, $a = -0.5$ ve $b = 3$ için farklı konum ve zaman adımları için hata normlarını ve korunum sabitlerini göstermektedir. Tablolardan konum ve

Tablo 3.50: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333333	0.006044	0.003674	0.002040	0.001116
	10.0	1.999999	-0.333333	0.013255	0.006856	0.005371	0.002984
	15.0	1.999998	-0.333333	0.024108	0.012487	0.009766	0.005102
	20.0	1.999999	-0.333333	0.034357	0.019812	0.013863	0.007361
0.02	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333333	0.001004	0.000604	0.000370	0.000211
	10.0	1.999999	-0.333333	0.002318	0.001191	0.000973	0.000553
	15.0	2.000000	-0.333333	0.003918	0.002132	0.001567	0.000810
	20.0	2.000000	-0.333333	0.004938	0.003018	0.001939	0.001032
0.01	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	-0.333333	0.000246	0.000149	0.000087	0.000049
	10.0	1.999999	-0.333333	0.000553	0.000277	0.000228	0.000129
	15.0	2.000000	-0.333333	0.000968	0.000516	0.000389	0.000203
	20.0	1.999999	-0.333333	0.001291	0.000763	0.000514	0.000274

zaman adımları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır. Tablo 3.51' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $\Delta t = 0.02$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.083 \times 10^{-3}$ ve $\%0.012 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.036 \times 10^{-3}$ ve $\%0.018 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe I_1 korunum sabitindeki değişimin azaldığı, ancak I_2 korunum sabitindeki değişimin arttığı görülmektedir. Tablo 3.52' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ' deki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.125 \times 10^{-3}$ ve $\%0.0 \times 10^{-15}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%0.036 \times 10^{-3}$ ve $\%0.018 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.012 \times 10^{-3}$ ve $\%0.0 \times 10^{-15}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı $\Delta t = 0.05$ ' den $\Delta t = 0.02$ ' ye küçüldüğünde I_1 korunum sabitindeki değişimin azaldığı, I_2 korunum sabitlerindeki değişimin arttığı, ancak $\Delta t = 0.01$ olduğunda ise $\Delta t = 0.02$ ' ye göre korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Problem 1' in $a = -0.125$ ve $b = -3$ için farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 3.53 ve 3.54' de verildi. a ve b katsayılarının bu değeri için de konum ve zaman adımları küçüldükçe

Tablo 3.51: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	1.000000	0.000911	0.000555	0.000281	0.000133
	10.0	2.000000	1.000000	0.000789	0.000588	0.000508	0.000242
	15.0	1.999999	1.000000	0.000622	0.000357	0.000355	0.000151
	20.0	2.000001	0.999999	0.016670	0.037036	0.000225	0.000072
0.05	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.999999	0.000911	0.000555	0.000281	0.000133
	10.0	1.999999	0.999999	0.000789	0.000587	0.000508	0.000242
	15.0	1.999999	0.999999	0.000622	0.000357	0.000355	0.000150
	20.0	1.999999	0.999999	0.000342	0.000122	0.000224	0.000072

Tablo 3.52: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	1.000000	0.005637	0.003528	0.001715	0.000794
	10.0	1.999998	0.999999	0.005016	0.003876	0.003061	0.001421
	15.0	1.999999	0.999999	0.004754	0.002843	0.002016	0.000942
	20.0	1.999997	0.999999	0.002385	0.001063	0.001250	0.000514
0.02	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.999999	0.000911	0.000555	0.000281	0.000133
	10.0	1.999999	0.999999	0.000789	0.000587	0.000508	0.000242
	15.0	1.999999	0.999999	0.000622	0.000357	0.000355	0.000150
	20.0	1.999999	0.999999	0.000342	0.000122	0.000224	0.000072
0.01	0.0	2.000000	0.999999	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	2.000000	0.999999	0.000227	0.000139	0.000069	0.000032
	10.0	2.000000	0.999999	0.000199	0.000151	0.000125	0.000058
	15.0	2.000000	0.999999	0.000172	0.000102	0.000084	0.000037
	20.0	2.000000	0.999999	0.000084	0.000029	0.000052	0.000018

L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Tablo 3.53' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%2.384 \times 10^{-5}$ ve $\%0.0 \times 10^{-15}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.192 \times 10^{-5}$ ve $\%1.192 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe I_1 korunum sabitindeki değişimin azaldığı, ancak I_2 korunum sabitindeki değişimin arttığı görülmektedir. Tablo 3.54' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.192 \times 10^{-5}$ ve $\%1.192 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%7.749 \times 10^{-5}$ ve $\%2.384 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin arttığı görülmektedir.

Tablo 3.53: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.004121	0.002513	0.001187	0.000533
	10.0	2.000000	0.500000	0.010467	0.006209	0.003883	0.001711
	15.0	1.999999	0.500000	0.022628	0.013341	0.009511	0.004451
	20.0	2.000000	0.500000	0.046000	0.027125	0.020201	0.009887
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.004095	0.002475	0.001177	0.000533
	10.0	1.999998	0.500000	0.010369	0.006113	0.003867	0.001689
	15.0	1.999999	0.500000	0.022437	0.013178	0.009494	0.004419
	20.0	1.999999	0.500000	0.045709	0.026939	0.020194	0.009851

Tablo 3.55-3.57' de, Problem 1 in $a = 0.5$ ve $b = -3$, $a = -0.5$ ve $b = 3$ ile $a = -0.125$ ve $b = -3$ için elde edilen korunum sabitleri ile L_∞ hata normu, referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablolardan kollokasyon sonlu eleman yöntemi her ne kadar daha büyük Δt zaman adımı için hesaplanırsa da sonuçların referans [55] de verilenlerden daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum

Tablo 3.54: $a = -0.125$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.004095	0.002475	0.001177	0.000533
	10.0	1.999998	0.500000	0.010369	0.006113	0.003867	0.001689
	15.0	1.999999	0.500000	0.022437	0.013178	0.009494	0.004419
	20.0	1.999999	0.500000	0.045709	0.026939	0.020194	0.009851
0.02	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5.0	1.999999	0.500000	0.000655	0.000396	0.000188	0.000085
	10.0	1.999999	0.500000	0.001659	0.000978	0.000619	0.000270
	15.0	1.999999	0.500000	0.003590	0.002109	0.001519	0.000707
	20.0	1.999998	0.500000	0.007314	0.004310	0.003231	0.001577

Tablo 3.55: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Kollokasyon Yöntemi ($\Delta t = 0.02$)			[55] ($\Delta t = 0.01$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	2.000000	-0.333333	0.000
5.0	1.999998	-0.333333	0.000606	2.000000	-0.333333	0.004
10.0	1.999999	-0.333333	0.001194	2.000000	-0.333333	0.007
15.0	1.999999	-0.333333	0.002140	2.000000	-0.333333	0.014
20.0	2.000000	-0.333333	0.008316	2.000001	-0.333333	0.026

Tablo 3.56: $a = -0.5$, $b = 3$, $\lambda = 0.5$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Kollokasyon Yöntemi ($\Delta t = 0.05$)			[55] ($\Delta t = 0.01$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	1.000000	0.000000	2.000000	1.000000	0.0
5.0	2.000000	1.000000	0.003537	2.000000	1.000000	0.003
10.0	1.999999	0.999999	0.003880	2.000000	1.000000	0.003
15.0	2.000000	1.000000	0.002842	1.999998	0.999999	0.005
20.0	2.000000	1.000000	0.001071	1.999999	0.999999	0.008

Tablo 3.57: $a = -0.125$, $b = -3$ ve $\lambda = 0.5$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Kollokasyon Yöntemi ($h = 0.05$, $\Delta t = 0.02$)			[55] ($h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$)		
	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	$L_\infty \times 10^3$
0.0	2.000000	0.500000	0.000000	2.000000	0.500000	0.0
5.0	1.999999	0.500000	0.000396	2.000000	0.500000	0.003
10.0	1.999999	0.500000	0.000978	1.999999	0.500000	0.003
15.0	1.999999	0.500000	0.002109	1.999999	0.500000	0.003
20.0	1.999998	0.500000	0.004310	1.999999	0.500000	0.004

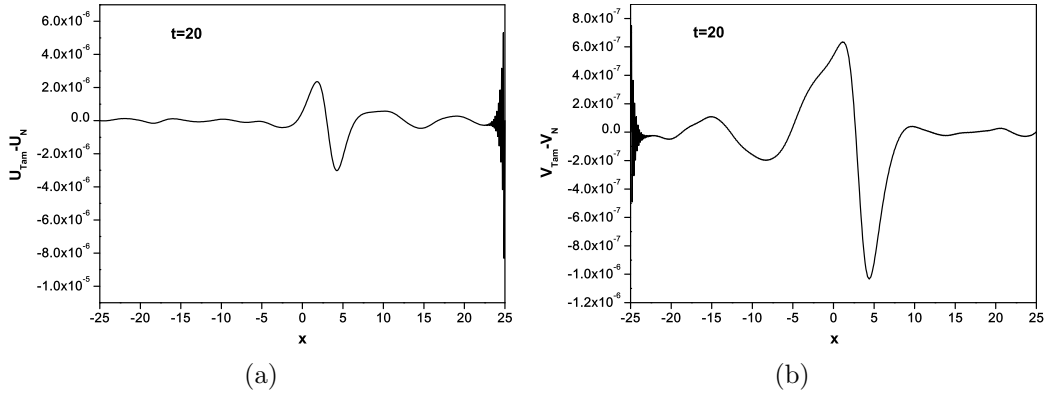
değişkeninin değerleri Tablo 3.58' de verildi. Tablodan t' nin artan zamanları için tek dalganın hemen hemen genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N çözümü için $t = 0'$ da dalganın genliği 0.499772 ($x = -1.4$) iken $t = 10'$ da 0.499975 ($x = 1.1$) ve $t = 20'$ de 0.499759 ($x = 3.6$); V_N çözümü için ise $t = 0'$ da dalganın genliği 0.353473 ($x = -1.4$) iken $t = 10'$ da 0.353548 ($x = 1.1$) ve $t = 20'$ de 0.353433 ($x = 3.6$) olarak hesaplandı.

Tablo 3.58: $a = 0.5$, $b = -3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-25 \leq x \leq 25$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	-1.4	0.499772	0.353473
5.0	-0.2	0.499993	0.353551
10.0	1.1	0.499771	0.353473
15.0	2.3	0.499993	0.353551
20.0	3.6	0.499774	0.353474

Problem 1' in $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 3.12' de gösterildi. Şekil 3.12' den, her iki çözüm için de genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında hata dağılımlarının büyüdüğü görülmektedir.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $-10 \leq x \leq 120$ aralığında $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$, $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için yapıldı. Tablo 3.59 ve



Şekil 3.12: Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hata dağılımları.

3.60, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmaları göstermektedir. Tablo 3.59' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.066 ve %0.507; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla $\%1.066 \times 10^{-3}$ ve $\%6.097 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.60' da verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 90$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.02$ için $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.066 \times 10^{-3}$ ve $\%6.097 \times 10^{-3}$; $h = 0.025$ iken sırasıyla $\%0.996 \times 10^{-3}$ ve $\%6.096 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.61' de Problem 2 için elde edilen korunum sabitlerinin değeri ile referans [55] de verilen kuintik B-spline kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen korunum sabitlerinin karşılaştırılmaları verildi. Tablodan sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Problem 2' nin $a = 0.5$, $b = -3$ için $t = 0$ ve 90 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri sırasıyla Tablo 3.62 ve Tablo 3.63' de verildi. Tablolardan her iki çözüm için de $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 90$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 3.59: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $h = 0.05$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.400549	-3.240469	6.400005	-3.242641
20.0	6.401117	-3.238276	6.400012	-3.242614
30.0	6.401522	-3.236106	6.399996	-3.242588
40.0	6.402756	-3.233945	6.400103	-3.242562
50.0	6.401944	-3.231815	6.399896	-3.242537
60.0	6.402313	-3.230877	6.399915	-3.242526
70.0	6.404053	-3.230403	6.400178	-3.242520
80.0	6.402526	-3.228359	6.399834	-3.242496
90.0	6.404216	-3.226227	6.400068	-3.242469

Tablo 3.60: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 30$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.05$		$h = 0.025$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.242667
10.0	6.400005	-3.242641	6.400005	-3.242641
20.0	6.400012	-3.242614	6.400013	-3.242614
30.0	6.399996	-3.242588	6.399996	-3.242588
40.0	6.400103	-3.242562	6.400106	-3.242562
50.0	6.399896	-3.242537	6.399894	-3.242537
60.0	6.399915	-3.242526	6.399911	-3.242526
70.0	6.400178	-3.242520	6.400180	-3.242520
80.0	6.399834	-3.242496	6.399829	-3.242496
90.0	6.400068	-3.242469	6.400064	-3.242469

Tablo 3.61: $a = 0.5$, $b = -3$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 10$ ve $\gamma_2 = 30$ için $-10 \leq x \leq 120$ aralığında Problem 2' nin kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Kollokasyon Yöntemi ($h = 0.05, \Delta t = 0.02$)		[55] ($h = 0.1, \Delta t = 0.01$)	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	6.400000	-3.242667	6.400000	-3.243013
10.0	6.400005	-3.242641	6.400001	-3.243012
20.0	6.400012	-3.242614	6.399995	-3.243009
30.0	6.399996	-3.242588	6.399946	-3.243015
40.0	6.400103	-3.242562	6.399991	-3.243102
50.0	6.399896	-3.242537	6.399962	-3.243008
60.0	6.399915	-3.242526	6.399863	-3.243008
70.0	6.400178	-3.242520	-	-
80.0	6.399834	-3.242496	-	-
90.0	6.400068	-3.242469	-	-

Tablo 3.62: Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(U_N)
0.0	10.25		1.999818	53.05	0.719979
90.0	103.0		1.998039	80.85	0.720234

Tablo 3.63: Problem 2' nin $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Konum(x)	Genlik(V_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)
0.0	10.25		1.414149	53.05	0.509109
90.0	103.0		1.413363	80.85	0.509106

Problem 3 için tüm hesaplamalar, a ve b parametrelerinin $a = 0.5$ ve $b = -3$ değerleri için $-50 \leq x \leq 150$ aralığı üzerinde yapıldı. Tablo 3.64 ve 3.65' de farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmalar verildi. Tablo 3.64' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %1.035 ve %9.235; $\Delta t = 0.02$ iken sırasıyla %0.031 ve %0.237 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 3.65' de verilen I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %1.042 ve %9.236; $h = 0.05$ iken sırasıyla %1.035 ve %9.235 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.64: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $h = 0.05$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.736336	-12.459482	17.724702	-12.532104
20.0	17.798609	-12.064351	17.725760	-12.525089
30.0	17.844872	-11.773855	17.726649	-12.517797
40.0	17.883890	-11.553413	17.728388	-12.510562
50.0	17.907999	-11.375676	17.730035	-12.503382

Tablo 3.65: $a = 0.5$, $b = -3$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.724539	-12.533142
10.0	17.736336	-12.459482	17.736336	-12.459482
20.0	17.798609	-12.064351	17.798609	-12.064351
30.0	17.845223	-11.773849	17.844872	-11.773855
40.0	17.883504	-11.553411	17.883890	-11.553413
50.0	17.909209	-11.375620	17.907999	-11.375676

Tablo 3.66' da Problem 3 için elde edilen korunum sabitlerinin değeri ile

referans [55] de elde edilen korunum sabitlerinin karşılaştırılmaları verildi. Tablodan sonuçların birbiri ile uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 3.66: $a = 0.5$ ve $b = -3$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün kollokasyon yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçları ile referans [55] dekilerin karşılaştırılması.

t	Kollokasyon Yöntemi ($h = 0.05, \Delta t = 0.02$)		[55]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0.0	17.724539	-12.533142	17.72454	-12.53314
10.0	17.724702	-12.532104	17.72454	-12.53316
20.0	17.725760	-12.525089	17.72454	-12.53316
30.0	17.726649	-12.517797	17.72449	-12.53320
40.0	17.728388	-12.510562	17.72448	-12.53321
50.0	17.730035	-12.503382	17.72469	-12.53320

Problem 3' ün $t = 50$ zamanında oluşan ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 3.67' de verildi.

Tablo 3.67: $t = 50, a = 0.5, b = -3, h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.02$ için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında Problem 3' ün kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	90.80	3.444966	90.80	2.435862
İkinci Dalga	63.10	2.449648	63.10	1.732626
Üçüncü Dalga	38.65	1.590160	38.65	1.122133
Dördüncü Dalga	17.95	1.006497	17.80	0.661111
Beşinci Dalga	-0.35	0.613452	-0.35	0.329718

3.2.5 Sonuç

Bu bölümde, farklı dereceden B-spline fonksiyonlar yardımıyla Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri kullanılarak coupled KdV denkleminin nümerik çözümleri elde edildi. Bu yöntemler üç model probleme uygulandı. Farklı konum ve zaman adımları için elde edilen sonuçlar

literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte I_1 ve I_2 korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Tablolar incelendiğinde Galerkin yönteminin diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verdiği görüldü. Model problemlerdeki a ve b katsayılarının aynı değerleri için Galerkin, subdomain ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olacağından sadece Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik çözümler grafiklerle verildi. Petrov-Galerkin yönteminde ise a ve b katsayılarının farklı değeri için elde edilen sonuçlar grafiksel olarak gösterildi. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelenirken karşılaşılan cebirsel işlemler Mathematica programı kullanılarak yapıldı.

Sonuç olarak, bu bölümde coupled KdV denkleminde uygulanan yöntemler ile elde edilen sonuçların mevcut analitik sonuçlar ve yayınlanmış sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görüldü.

BÖLÜM 4

B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE COUPLED mKdV DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde,

$$U_t + U_{xxx} + \alpha[(U^2 + V^2)U]_x + \beta V_x = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (4.1a)$$

$$V_t + V_{xxx} + \alpha[(U^2 + V^2)V]_x + \beta U_x = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (4.1b)$$

olarak verilen coupled mKdV denklemi göz önüne alındı [58]. Burada α ve β reel parametrelerdir.

Coupled mKdV denkleminin çözümleri farklı yöntem ve tekniklerle bazı araştırmacılar tarafından bulunmuştur. Örneğin, Cao vd. [41], homojen denge yöntemi fikrine dayalı doğrudan ve etkin trigonometrik dönüşüm yöntemi yardımıyla coupled mKdV denkleminin çok sayıda tam çözümlerini elde etmişlerdir. Halim ve Leble [52], sabit katsayılı keyfi sayıda denklemlerin Cauchy problemleri için fark denkleminin dayalı bir yöntemi kullanarak coupled KdV-MKdV denklemlerinin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Fan [59], coupled mKdV denkleminin soliton çözümlerini elde etmek için genişletilmiş tanh fonksiyon yöntemini kullanmıştır. Ali [60], coupled mKdV denklemini modifiye edilmiş genişletilmiş tanh fonksiyonu yardımıyla çözmüştür. Chen ve An [61], coupled mKdV denkleminin nümerik çözümlerini türetmek için homotopi pertürbasyon yöntemini uygulamışlardır. Khater vd. [62], coupled mKdV denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için konum türevleri için Lagrange polinomlarına dayalı bir spektral kollokasyon yöntemi sunmuşlardır. Triki ve Ismail [58], (4.1) coupled mKdV denklemini analitik ve nümerik olarak çözmüşlerdir. Ayrıca Triki ve Ismail bu çalışmalarında (4.1) coupled mKdV denkleminin tek dalga çözümlerini incelemiş ve sonlu fark yöntemini

kullanarak nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Khattak vd. [63], Kansa yöntemi olarak adlandırılan kollokasyon noktalarını kullanan düğüm noktasız radyal baz fonksiyonlarına dayalı yöntem yardımıyla coupled mKdV denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmişlerdir. Wazwaz [64], coupled mKdV denklem sisteminin çoklu soliton çözümlerini ve çoklu singular soliton çözümlerini Hirota' nın bilineer yöntemi ve Hietarinta yaklaşımını kullanarak türetmiştir. Zuo ve Zhang [65], G'/G -expansion yöntemi yardımıyla coupled mKdV denklemini çözmüşlerdir.

Bu bölümde (4.1) ile verilen coupled mKdV denkleminin, değişik dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi. Denklemin I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde verildi. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelendi.

4.1 Model Problemler

(4.1) ile verilen coupled mKdV denklemi,

$$U(a, t) = 0, U(b, t) = 0, V(a, t) = 0, V(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.1.1a)$$

$$U_x(a, t) = 0, U_x(b, t) = 0, V_x(a, t) = 0, V_x(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.1.1b)$$

sınır şartları ve aşağıdaki farklı başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Her bir problemin U_N nümerik çözümünün U analitik çözümüne ne kadar iyi yaklaştığını görmek için

$$L_2 = \|U^{tam} - U^n\|_2 = \left[h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - U_j^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$L_\infty = \|U^{tam} - U^n\|_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^n|$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. (4.1) coupled mKdV denkleminin

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + V^2) dx, \\
I_3 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(U^2 + V^2)^2 - 2(U_x^2 + V_x^2) - 2\beta UV] dx
\end{aligned}$$

ile tanımlanan üç korunum sabiti göz önüne alındı [58] öyleki bunlar t değıştikçe değışmeden kalan sabitlerdir.

4.1.1 Problem 1

İlk olarak, (4.1) coupled mKdV denkleminin simetrik tek dalga çözümü

$$U(x, 0) = V(x, 0) = \sqrt{\frac{c - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c - \beta}x)$$

başlangıç şartları ve (4.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = V(x, t) = \sqrt{\frac{c - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c - \beta}(x - ct))$$

dir [58].

4.1.2 Problem 2

İkinci olarak, (4.1) coupled mKdV denkleminin simetrik iki dalga çözümü

$$\begin{aligned}
U(x, 0) &= \sqrt{\frac{c_1 - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_1 - \beta}(x - s_1)) + \sqrt{\frac{c_2 - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_2 - \beta}(x - s_2)), \\
V(x, 0) &= \sqrt{\frac{c_1 - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_1 - \beta}(x - s_1)) + \sqrt{\frac{c_2 - \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_2 - \beta}(x - s_2))
\end{aligned}$$

başlangıç şartları ve (4.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı [58].

4.1.3 Problem 3

Üçüncü olarak, (4.1) coupled mKdV denkleminin antisimetrik tek dalga çözümü

$$U(x, 0) = -V(x, 0) = \sqrt{\frac{c + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c + \beta}x)$$

başlangıç şartları ve (4.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = -V(x, t) = \sqrt{\frac{c + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{c + \beta}(x - ct) \right)$$

dir [58].

4.1.4 Problem 4

Dördüncü olarak, (4.1) coupled mKdV denkleminin antisimetrik iki dalga çözümü

$$U(x, 0) = \sqrt{\frac{c_1 + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{c_1 + \beta}(x - s_1) \right) + \sqrt{\frac{c_2 + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{c_2 + \beta}(x - s_2) \right),$$

$$V(x, 0) = -\sqrt{\frac{c_1 + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{c_1 + \beta}(x - s_1) \right) - \sqrt{\frac{c_2 + \beta}{\alpha}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{c_2 + \beta}(x - s_2) \right)$$

başlangıç şartları ve (4.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı [58].

4.1.5 Problem 5

Son olarak, (4.1) coupled mKdV denklemi

$$U(x, 0) = Ae^{-\gamma x^2},$$

$$V(x, 0) = Be^{-\gamma x^2}$$

başlangıç şartları ve (4.1.1) sınır şartları ile göz önüne alındı [58].

4.2 Sonlu Eleman Yöntemleri

Bu kısımda, bir önceki kısımda verilen model problemlere Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri uygulandı. Bu sonlu eleman yöntemlerinin probleme uygulanması için önce (4.1) coupled mKdV denkleminin ağırlıklı integral formunun bulunması gerekir. Denklemden gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, denklem W ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve sonra bölge üzerinden integrali alınırsa denkleminin ağırlıklı integral formu

$$\int_a^b W[U_t + U_{xxx} + \alpha(3U^2 + V^2)U_x + (2\alpha UV + \beta)V_x] dx = 0, \quad (4.2.1a)$$

$$\int_a^b W[V_t + V_{xxx} + \alpha(3V^2 + U^2)V_x + (2\alpha UV + \beta)U_x] dx = 0 \quad (4.2.1b)$$

olarak elde edilir.(4.2.1) ağırlıklı integral formunda, kısmi integrasyon uygulanır ve sonra (4.1.1) sınır şartları kullanılırsa

$$\int_a^b [WU_t - W_x U_{xx} + \alpha W(3U^2 + V^2)U_x + W(2\alpha UV + \beta)V_x] dx = 0, \quad (4.2.2a)$$

$$\int_a^b [WV_t - W_x V_{xx} + \alpha W(3V^2 + U^2)V_x + W(2\alpha UV + \beta)U_x] dx = 0 \quad (4.2.2b)$$

bulunur. Böylece (4.1) coupled mKdV denkleminin her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde zayıf formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [WU_t - W_x U_{xx} + \alpha W(3U^2 + V^2)U_x + W(2\alpha UV + \beta)V_x] dx = 0, \quad (4.2.3a)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [WV_t - W_x V_{xx} + \alpha W(3V^2 + U^2)V_x + W(2\alpha UV + \beta)U_x] dx = 0 \quad (4.2.3b)$$

olarak elde edilir.

4.2.1 Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (4.1) coupled mKdV denkleminin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Ağırlık fonksiyonları yerine Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar seçilir ve Bölüm 2' de (2.2.6) ile verilen yaklaşımlar (4.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $Z1_m = \alpha(3U^2 + V^2)$, $Z2_m = 2\alpha UV + \beta$ ve $G_m = \alpha(3V^2 + U^2)$ olmak üzere,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e - \left(\int_0^h Q_i' Q_j'' d\xi \right) \delta_j^e + Z1_m \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\xi \right) \delta_j^e + Z2_m \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\xi \right) \sigma_j^e \right\} = 0, \quad i = m-1, m, m+1 \quad (4.2.1.1a)$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \sigma_j^e - \left(\int_0^h Q_i' Q_j'' d\xi \right) \sigma_j^e + G_m \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\xi \right) \sigma_j^e + Z2_m \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\xi \right) \delta_j^e \right\} = 0, \quad i = m-1, m, m+1 \quad (4.2.1.1b)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h Q_i' Q_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j' d\xi
\end{aligned}$$

olarak alınırsa (4.2.1.1) denklemleri matris formunda

$$A^e \delta^e - B^e \delta^e + Z1_m C^e \delta^e + Z2_m C^e \sigma^e = 0, \quad (4.2.1.2a)$$

$$A^e \sigma^e - B^e \sigma^e + G_m C^e \sigma^e + Z2_m C^e \delta^e = 0 \quad (4.2.1.2b)$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ dir. Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak (4.2.1.1) denklemlerindeki integraller hesaplandığında, $i, j = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere, A_{ij}^e, B_{ij}^e ve C_{ij}^e eleman matrisleri

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h Q_i' Q_j'' d\xi = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h Q_i Q_j' d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $Z1_m, Z2_m$ ve G_m eşitliklerinde U ve V yerine sırasıyla

$$\frac{U_m + U_{m+1}}{2} \text{ ve } \frac{V_m + V_{m+1}}{2}$$

alınır ve sonra U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki

$$\begin{aligned}
Z1_m &= \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} + \frac{(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} \right], \\
Z2_m &= \frac{\alpha(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})}{2} + \beta, \\
G_m &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} + \frac{(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

noktasal değerleri (4.2.1.2) ile verilen eleman denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra eleman matrisleri birleştirilirse

$$A\dot{\delta} - B\delta + C(Z1_m)\delta + C(Z2_m)\sigma = 0, \quad (4.2.1.3a)$$

$$A\dot{\sigma} - B\sigma + C(G_m)\sigma + C(Z2_m)\delta = 0 \quad (4.2.1.3b)$$

matris formundaki denklemler elde edilir. Burada global eleman parametreleri $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ dir. A , B , $C(Z1_m)$, $C(Z2_m)$ ve $C(G_m)$ matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$\begin{aligned}
A &: \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), \\
B &: \frac{2}{h^2}(1, -2, 0, 2, -1), \\
C(Z1_m) &: \frac{1}{6}(-Z1_{m1}, -2Z1_{m1} - 8Z1_{m2}, 3Z1_{m1} - 3Z1_{m3}, 8Z1_{m2} + 2Z1_{m3}, Z1_{m3}), \\
C(Z2_m) &: \frac{1}{6}(-Z2_{m1}, -2Z2_{m1} - 8Z2_{m2}, 3Z2_{m1} - 3Z2_{m3}, 8Z2_{m2} + 2Z2_{m3}, Z2_{m3}), \\
C(G_m) &: \frac{1}{6}(-G_{m1}, -2G_{m1} - 8G_{m2}, 3G_{m1} - 3G_{m3}, 8G_{m2} + 2G_{m3}, G_{m3})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $m = 1(1)N - 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Z1_{m1} &= \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + \delta_m)^2}{4} + \frac{(\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} + \sigma_m)^2}{4} \right], \\
Z1_{m2} &= \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} + \frac{(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} \right], \\
Z1_{m3} &= \alpha \left[\frac{3(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} + \frac{(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} \right], \\
Z2_{m1} &= \frac{\alpha(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + \delta_m)(\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} + \sigma_m)}{2} + \beta, \\
Z2_{m2} &= \frac{\alpha(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})}{2} + \beta, \\
Z2_{m3} &= \frac{\alpha(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})}{2} + \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{m1} &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} + \sigma_m)^2}{4} + \frac{(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + \delta_m)^2}{4} \right], \\
G_{m2} &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} + \frac{(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} \right], \\
G_{m3} &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} + \frac{(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

dir. (4.2.1.3) denklemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned}
& [A - \frac{\Delta t}{2}(B - C(Z1_m))] \delta^{n+1} + [\frac{\Delta t}{2}C(Z2_m)] \sigma^{n+1} \\
& = [A + \frac{\Delta t}{2}(B - C(Z1_m))] \delta^n + [-\frac{\Delta t}{2}C(Z2_m)] \sigma^n,
\end{aligned} \tag{4.2.1.4a}$$

$$\begin{aligned}
& [\frac{\Delta t}{2}C(Z2_m)] \delta^{n+1} + [A - \frac{\Delta t}{2}(B - C(G_m))] \sigma^{n+1} \\
& = [-\frac{\Delta t}{2}C(Z2_m)] \delta^n + [A + \frac{\Delta t}{2}(B - C(G_m))] \sigma^n
\end{aligned} \tag{4.2.1.4b}$$

formunda $(2N+4)$ -bilinmeyenli $(2N+4)$ -tane denklemden oluşan karesel bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. (4.1.1) sınır şartları kullanılarak $\delta_{-1}, \delta_N, \sigma_{-1}$ ve σ_N parametreleri sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu karesel bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri Bölüm 2' de (2.2.1.7) ve (2.2.1.8) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (4.2.1.4) ile verilen denklem sisteminde başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen herhangi bir t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir.

(4.2.1.4) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu kısımda, göz önüne alınan Galerkin sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelendi. (4.2.1.4) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{30}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t \hat{U}}{12}, \quad \gamma_4 = \frac{\Delta t Z 2_m}{12},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z 1_m, G_m\},$$

$$a_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

$$a_2 = 26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3,$$

$$a_3 = 66\gamma_1,$$

$$a_4 = 26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3,$$

$$a_5 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

olmak üzere,

$$a_1 \delta_{m-2}^{n+1} + a_2 \delta_{m-1}^{n+1} + a_3 \delta_m^{n+1} + a_4 \delta_{m+1}^{n+1} + a_5 \delta_{m+2}^{n+1} - \gamma_4 \sigma_{m-2}^{n+1} -$$

$$10\gamma_4 \sigma_{m-1}^{n+1} + 10\gamma_4 \sigma_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \sigma_{m+2}^{n+1} = a_5 \delta_{m-2}^n + a_4 \delta_{m-1}^n + a_3 \delta_m^n +$$

$$a_2 \delta_{m+1}^n + a_1 \delta_{m+2}^n + \gamma_4 \sigma_{m-2}^n + 10\gamma_4 \sigma_{m-1}^n - 10\gamma_4 \sigma_{m+1}^n - \gamma_4 \sigma_{m+2}^n$$

ve

$$- \gamma_4 \delta_{m-2}^{n+1} - 10\gamma_4 \delta_{m-1}^{n+1} + 10\gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+2}^{n+1} + a_1 \sigma_{m-2}^{n+1} + a_2 \sigma_{m-1}^{n+1} +$$

$$a_3 \sigma_m^{n+1} + a_4 \sigma_{m+1}^{n+1} + a_5 \sigma_{m+2}^{n+1} = \gamma_4 \delta_{m-2}^n + 10\gamma_4 \delta_{m-1}^n - 10\gamma_4 \delta_{m+1}^n -$$

$$\gamma_4 \delta_{m+2}^n + a_5 \sigma_{m-2}^n + a_4 \sigma_{m-1}^n + a_3 \sigma_m^n + a_2 \sigma_{m+1}^n + a_1 \sigma_{m+2}^n$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$a = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$b = (2 \sin(2\varphi) - 4 \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$c = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$d = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$c_1 = b + c$$

olmak üzere,

$$[(a + ic_1)q - (a - ic_1)]P + [(idq + id)]W = 0$$

$$[(idq + id)]P + [(a + ic_1)q - (a - ic_1)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin P ve W ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 + 2iac_1 - c_1^2 + d^2)q^2 - (2a^2 + 2c_1^2 - 2d^2)q + a^2 - 2iac_1 - c_1^2 + d^2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{a - i(c_1 - d)}{a + i(c_1 - d)},$$

$$q_2 = \frac{a - i(c_1 + d)}{a + i(c_1 + d)}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yukarıda göz önüne alınan beş model problemin nümerik çözümleri elde edildi. Problem 1 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında yapıldı. Tablo 4.1 ve 4.2 farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan Δt zaman adımı ve h konum adımı küçüldüğünde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarında kayda değer düşüşlerin olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 4.1' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%9.376 \times 10^{-3}$, $\%0.907 \times 10^{-3}$ ve $\%3.065 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%6.427 \times 10^{-3}$, $\%0.025 \times 10^{-3}$ ve $\%0.454 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%5.044 \times 10^{-3}$, $\%0.025 \times 10^{-3}$ ve $\%0.401 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.2' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%19.499 \times 10^{-3}$,

Tablo 4.1: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141580	2.828434	-0.236251	0.001988	0.001066
	10.0	3.141690	2.828441	-0.236249	0.003785	0.001981
	15.0	3.141487	2.828447	-0.236248	0.005578	0.002897
	20.0	3.141298	2.828453	-0.236246	0.007385	0.003818
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141557	2.828428	-0.236252	0.000460	0.000257
	10.0	3.141677	2.828428	-0.236252	0.000731	0.000411
	15.0	3.141516	2.828428	-0.236252	0.001001	0.000558
	20.0	3.141391	2.828428	-0.236252	0.001289	0.000703
0.01	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141549	2.828428	-0.236253	0.000305	0.000165
	10.0	3.141674	2.828428	-0.236252	0.000451	0.000266
	15.0	3.141522	2.828428	-0.236252	0.000616	0.000358
	20.0	3.141434	2.828428	-0.236253	0.000775	0.000443

$\%0.398 \times 10^{-3}$ ve $\%6.619 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%5.044 \times 10^{-3}$, $\%0.025 \times 10^{-3}$ ve $\%0.401 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.331 \times 10^{-3}$, $\%0.002 \times 10^{-3}$ ve $\%0.026 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Problem 1' in $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.3' de verildi. Tablodan t ' nin artan zamanları için tek dalganın hemen hemen genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.707107 ($x = 0$) iken $t = 10$ ' da 0.706951 ($x = 10$) ve $t = 20$ ' de 0.706966 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

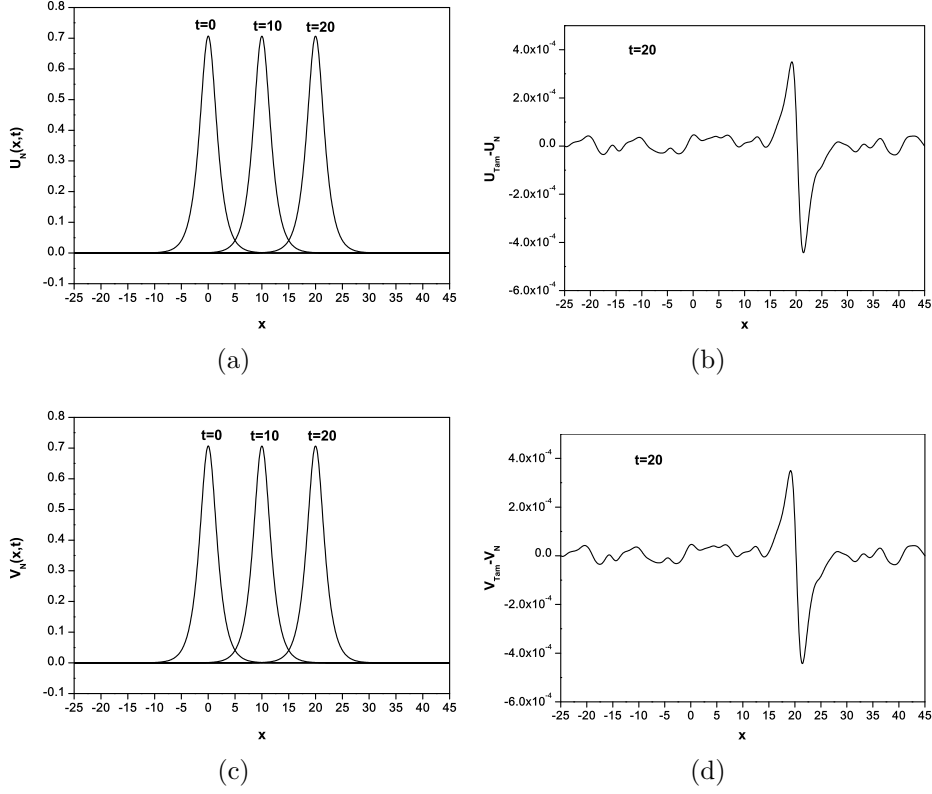
Problem 1' in $t = 0, 10$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümleri ile $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları Şekil 4.1' de verildi. Bu şekilden dalganın t ' nin artan değerlerine göre genliğini hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiği, hata dağılımlarına bakıldığında genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında hata dağılımlarının büyük olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.2: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	2.828427	-0.237922	0.000000	0.000000
	5.0	3.141461	2.828437	-0.237907	0.001236	0.000689
	10.0	3.141972	2.828439	-0.237906	0.001874	0.001110
	15.0	3.141362	2.828440	-0.237904	0.002602	0.001546
	20.0	3.140980	2.828438	-0.237906	0.003294	0.001878
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141549	2.828428	-0.236253	0.000305	0.000165
	10.0	3.141674	2.828428	-0.236252	0.000451	0.000266
	15.0	3.141522	2.828428	-0.236252	0.000616	0.000358
	20.0	3.141434	2.828428	-0.236253	0.000775	0.000443
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235840	0.000000	0.000000
	5.0	3.141582	2.828427	-0.235840	0.000071	0.000036
	10.0	3.141612	2.828427	-0.235840	0.000093	0.000051
	15.0	3.141574	2.828427	-0.235840	0.000117	0.000067
	20.0	3.141551	2.828427	-0.235840	0.000141	0.000081

Tablo 4.3: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	0	0.707107
5.0	5	0.706968
10.0	10	0.706951
15.0	15	0.706952
20.0	20	0.706966



Şekil 4.1: Problem 1' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ ' deki hata dağılımları.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında yapıldı. Tablo 4.4 ve 4.5 farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmaları göstermektedir. Tablo 4.4' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değişimi, $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarında $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%12.226 \times 10^{-3}$, $\%2.870 \times 10^{-3}$ ve $\%4.693 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%9.808 \times 10^{-3}$, $\%0.123 \times 10^{-3}$ ve $\%1.372 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Ayrıca Tablo 4.5' de $\Delta t = 0.1$, $h = 0.2$ için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sırasıyla $\%23.904 \times 10^{-3}$, $\%3.973 \times 10^{-3}$ ve $\%11.184 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum ve zaman adımlarının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu açıkça görülmektedir.

Problem 2' nin $t = 0, 50, 100$ ve 150 için elde edilen çözümleri Şekil 4.2' de verildi. Grafiklerden iki pozitif tek dalganın girişimi görülmektedir. $t = 0$

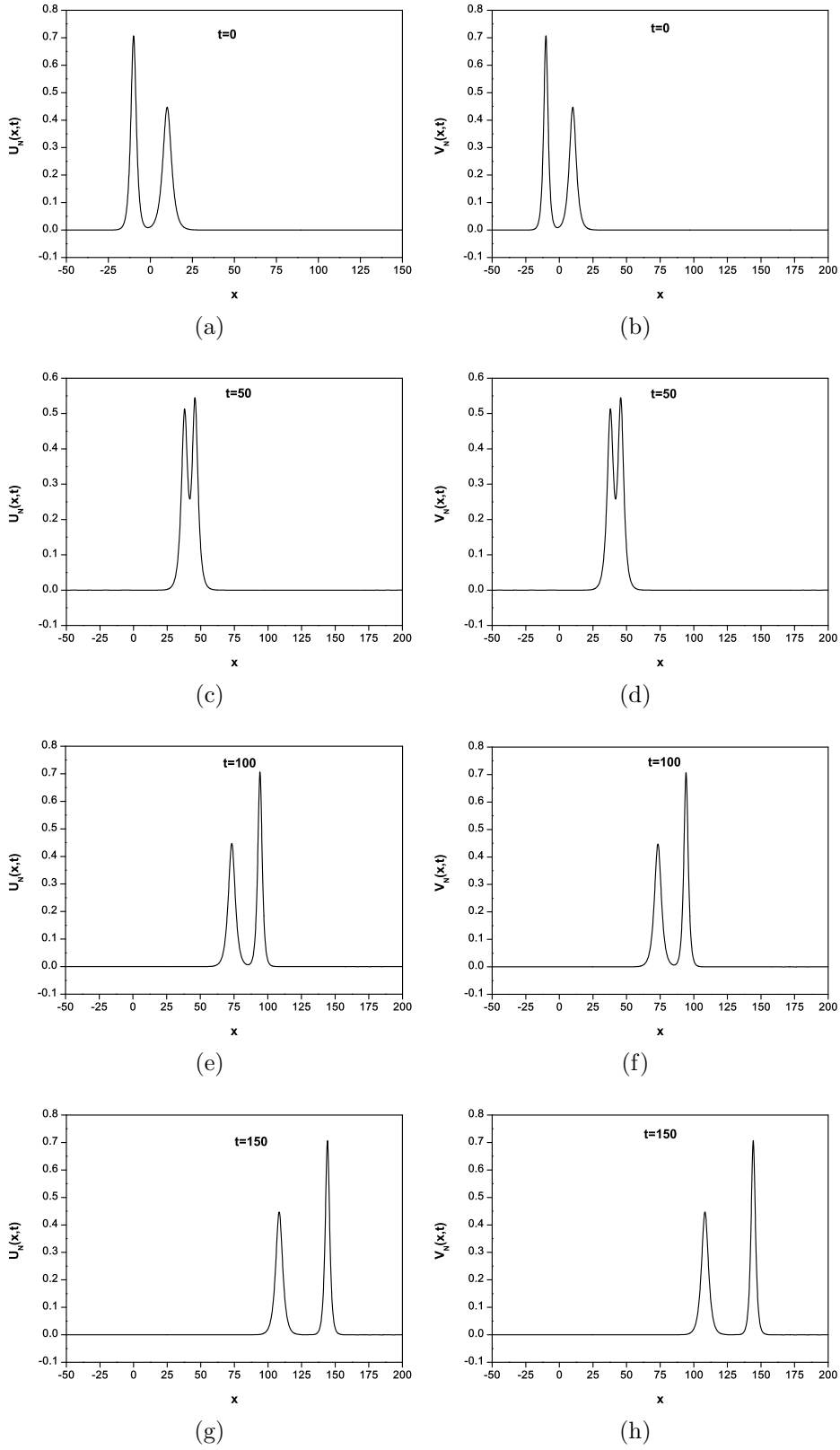
Tablo 4.4: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.563593	6.283185	4.619952	-0.563593
20.0	6.283124	4.620036	-0.563567	6.283122	4.620010	-0.563556
40.0	6.283664	4.620556	-0.563402	6.283558	4.620512	-0.563242
60.0	6.284047	4.620431	-0.563442	6.283869	4.620382	-0.563323
80.0	6.283831	4.620040	-0.563570	6.283776	4.619988	-0.563571
100.0	6.283838	4.620024	-0.563578	6.283761	4.619950	-0.563596
120.0	6.284026	4.620046	-0.563574	6.283831	4.619947	-0.563598
140.0	6.283949	4.620073	-0.563568	6.283811	4.619947	-0.563599
150.0	6.283953	4.620085	-0.563566	6.283802	4.619947	-0.563601

Tablo 4.5: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.565430	6.283185	4.619952	-0.563593
20.0	6.282932	4.620160	-0.565277	6.283083	4.619972	-0.563583
40.0	6.284167	4.622146	-0.564029	6.283590	4.620453	-0.563424
60.0	6.284942	4.621635	-0.564343	6.283965	4.620327	-0.563465
80.0	6.284213	4.620041	-0.565343	6.283731	4.619908	-0.563601
100.0	6.284266	4.619855	-0.565448	6.283697	4.619830	-0.563624
120.0	6.284601	4.619811	-0.565471	6.283836	4.619787	-0.563636
140.0	6.284424	4.619787	-0.565480	6.283714	4.619747	-0.563647
150.0	6.284687	4.619769	-0.565493	6.283697	4.619726	-0.563654

zamanında büyük dalganın genliği 0.707223 iken küçük dalganın genliği 0.447215 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = -10$ ve $x = 10$ dur. Grafiklerden görüldüğü üzere, $t = 0$ zamanında büyük genlikli dalga küçük genlikli diğer dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. Yaklaşık $t = 50$ zamanında iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği, zaman ilerledikçe büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği görülmektedir. Bu durum $t = 100$ ve $t = 150$ için grafiklerde gösterildi. $t = 150$ ' de küçük dalganın $x = 108.3$ konumunda ve genliğinin 0.447033, büyük dalganın ise $x = 144.3$ konumunda ve genliğinin 0.707112 olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2: Problem 2' nin farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

Problem 3 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında yapıldı. Tablo 4.6 ve 4.7, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan daha küçük konum ve zaman adımlarında L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır.

Tablo 4.6: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.122340	4.832638	3.551255	0.131194	0.093369
	10.0	3.105222	4.780567	3.463383	0.444406	0.305855
	15.0	3.089420	4.737891	3.392593	0.865217	0.578176
	20.0	3.083073	4.701752	3.333483	1.298242	0.838251
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.141344	4.896353	3.661063	0.007250	0.004896
	10.0	3.139297	4.893745	3.656530	0.023181	0.015885
	15.0	3.139039	4.891164	3.652045	0.047688	0.032521
	20.0	3.139481	4.888610	3.647617	0.080938	0.055102
0.01	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.142124	4.898990	3.665663	0.004001	0.003046
	10.0	3.140834	4.898990	3.665664	0.007714	0.005514
	15.0	3.141489	4.898986	3.665650	0.011581	0.008161
	20.0	3.142315	4.898985	3.665646	0.015380	0.010668

Tablo 4.6' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %1.863, %4.026 ve %9.060; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.067, %0.212 ve %0.491; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%22.994 \times 10^{-3}$, $\%0.110 \times 10^{-3}$ ve $\%1.169 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 4.7' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%69.955 \times 10^{-3}$, $\%3.995 \times 10^{-3}$ ve $\%28.779 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%22.994 \times 10^{-3}$, $\%0.110 \times 10^{-3}$ ve $\%1.169 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%5.297 \times 10^{-3}$, $\%0.058 \times 10^{-3}$ ve $\%0.072 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe

Tablo 4.7: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	4.898979	3.638975	0.000000	0.000000
	5.0	3.143643	4.899161	3.639915	0.016383	0.012221
	10.0	3.138688	4.899165	3.639926	0.031550	0.022081
	15.0	3.141415	4.899143	3.639842	0.047693	0.033705
	20.0	3.143790	4.899175	3.640023	0.063340	0.044316
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.142124	4.898990	3.665663	0.004001	0.003046
	10.0	3.140834	4.898990	3.665664	0.007714	0.005514
	15.0	3.141489	4.898986	3.665650	0.011581	0.008161
	20.0	3.142315	4.898985	3.665646	0.015380	0.010668
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.672088	0.000000	0.000000
	5.0	3.141717	4.898979	3.672090	0.000806	0.000621
	10.0	3.141405	4.898978	3.672089	0.001519	0.001097
	15.0	3.141578	4.898977	3.672086	0.002272	0.001608
	20.0	3.141759	4.898977	3.672085	0.003010	0.002118

korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görölmektedir. Yukarıdaki her iki tablo için verilen sonuçlardan, konum ve zaman adımlarının küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ hata normlarının düştüğü, korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı ve böylece korunum sabitlerinin daha fazla korunduğu açıkça görölmektedir.

Problem 3' ün $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.8' de verildi. Tablodan t' nin artan zamanları için tek dalganın, U_N için x -ekseninin üstünde, V_N için ise x -ekseninin altında sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N için $t = 0'$ da dalganın genliği 1.224745 ($x = 0$) iken $t = 10'$ da 1.223872 ($x = 10$) ve $t = 20'$ de 1.223900 ($x = 20$); V_N için ise $t = 0'$ da dalganın genliği -1.224745 ($x = 0$) iken $t = 10'$ da -1.223872 ($x = 10$) ve $t = 20'$ de -1.223900 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Problem 3' ün $t = 0, 10$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümleri ile $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları Şekil 4.3' de verildi. Bu şekilden dalganın t' nin artan değerlerine göre genliğini hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiği, hata dağılımlarına bakıldığında genliğin

Tablo 4.8: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	0	1.224745	-1.224745
5.0	5	1.223924	-1.223924
10.0	10	1.223872	-1.223872
15.0	15	1.223960	-1.223960
20.0	20	1.223900	-1.223900

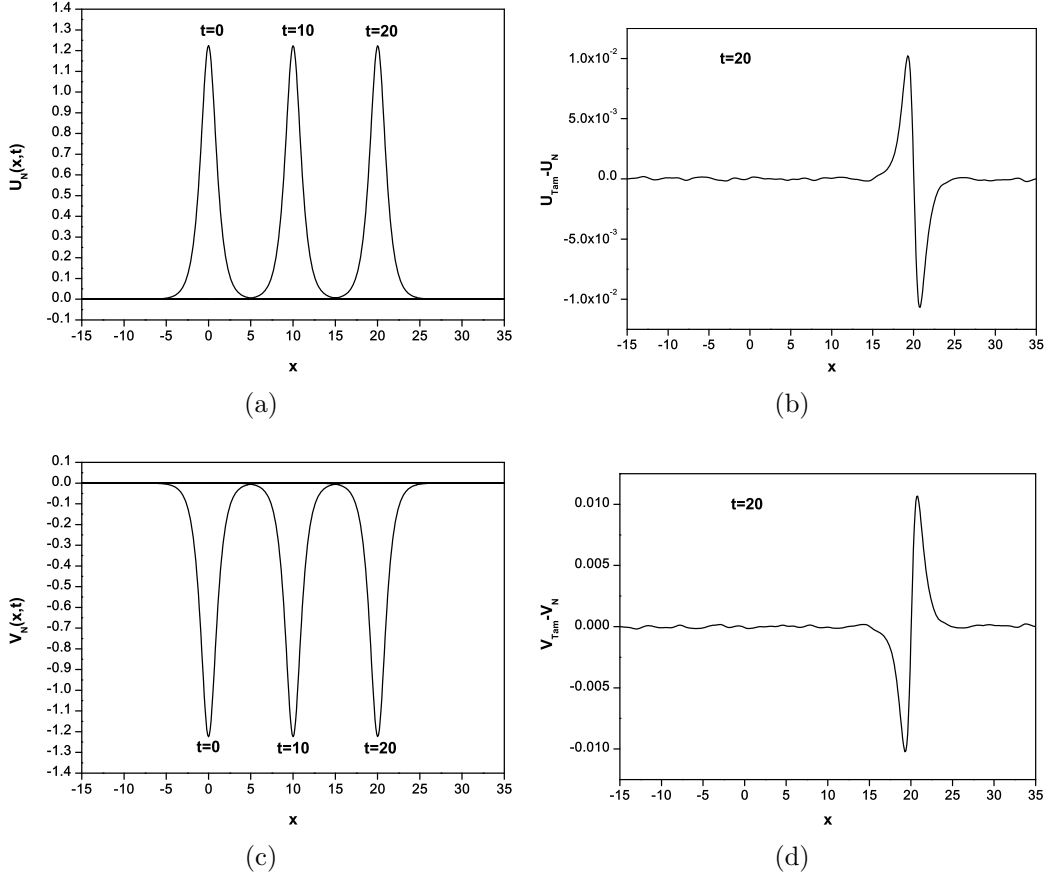
en yüksek olduğu x konumu civarında hata dağılımlarının büyük olduğu açıkça görülmektedir.

Problem 4 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.9' da, farklı konum adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tabloda verilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %5.016, %13.793 ve %31.161; $h = 0.05$ iken sırasıyla %5.022, %13.837 ve %31.288 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 4.9: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.1, s_1 = -10, s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.

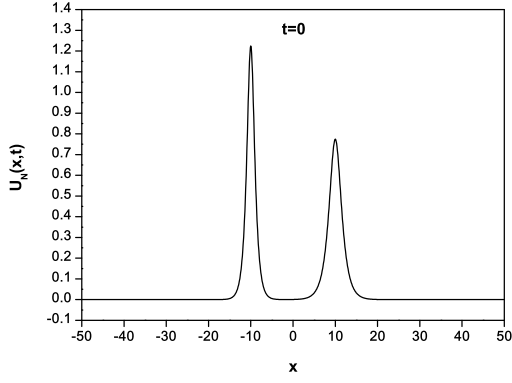
t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	7.997373	5.059019	6.283185	7.997373	5.066156
10.0	6.099440	7.391662	4.105350	6.098288	7.386825	4.102574
20.0	6.031535	7.212310	3.864775	6.030203	7.207273	3.861266
30.0	6.003725	7.163269	3.807666	6.002323	7.156713	3.801313
40.0	6.025853	7.097381	3.726581	6.025652	7.093361	3.724439
50.0	5.938879	7.013484	3.623511	5.938438	7.009742	3.621711
60.0	5.894674	6.947150	3.544209	5.893589	6.943413	3.542336
70.0	5.967992	6.894260	3.482587	5.967614	6.890754	3.481078

Problem 4' ün $t = 0, 30$ ve 70 için elde edilen U_N ve V_N çözümleri Şekil 4.4' de verildi. U_N için çizilen grafiklerde iki pozitif tek dalganın girişimi, V_N için çizilen grafiklerde iki negatif tek dalganın girişimi görülmektedir. U_N için çizilen grafiklerde

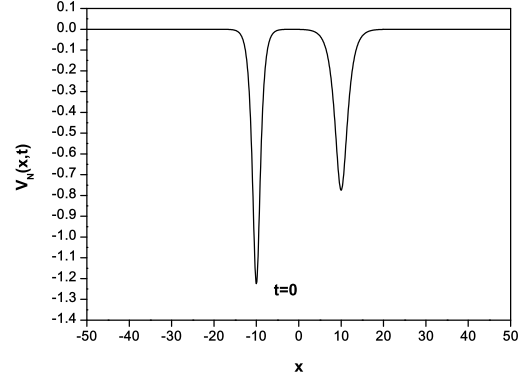


Şekil 4.3: Problem 3' ün farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ve $t = 20$ ' deki hata dağılımları.

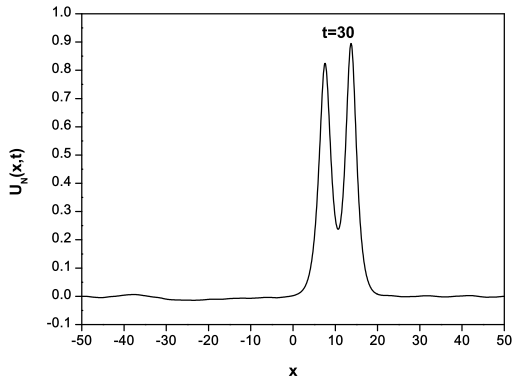
$t = 0$ zamanında büyük dalganın genliği 1.224745 iken küçük dalganın genliği 0.774597 dir. Bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = -10$ ve $x = 10$ dur. V_N için çizilen grafiklerde $t = 0$ zamanında büyük dalganın genliği -1.224745 ve küçük dalganın genliği -0.774597 dir. Yine bu dalgaların tepe noktalarının konumları sırasıyla $x = -10$ ve $x = 10$ dur. U_N için verilen grafiklerde, $t = 0$ zamanında büyük dalga küçük dalganın solundadır. Zaman arttıkça her iki dalga sağa doğru hareket etmektedir. Yaklaşık $t = 30$ ' da iki dalganın girişiminde büyük dalganın küçük dalgayı içerdiği, zaman ilerledikçe büyük dalganın, küçük dalgadan ayrılarak öne geçtiği ve her iki dalganın ilerlemeye devam ettiği görülmektedir. Bu durum $t = 70$ için grafikte gösterildi. $t = 70$ zamanında küçük dalganın tepe noktasının $x = 11.4$ konumunda ve genliğinin 0.771786, büyük dalganın tepe noktasının $x = 31.9$ konumunda ve genliğinin 0.959495 olduğu görülmektedir.



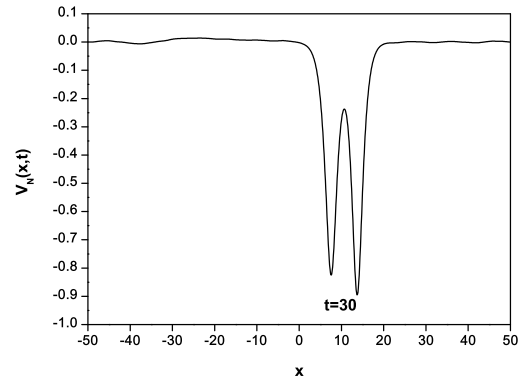
(a)



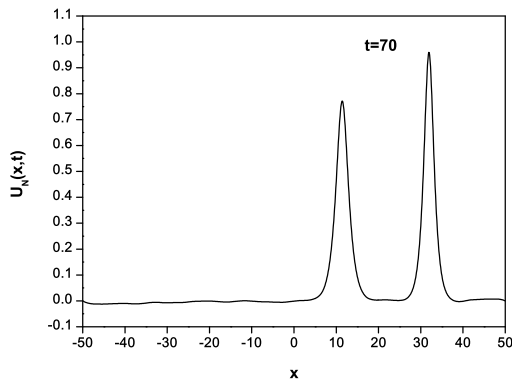
(b)



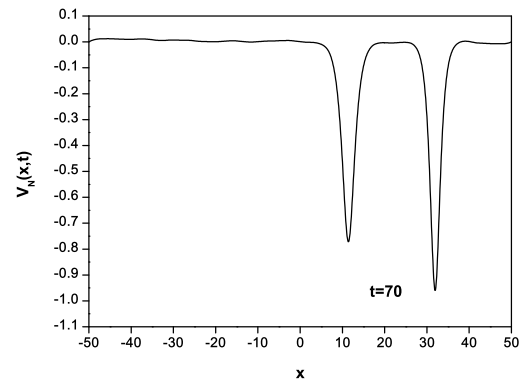
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 4.4: Problem 4' ün farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

V_N ' nin grafiği U_N ' nin grafiğinin x -eksenine göre simetriği olduğundan V_N için büyük ve küçük dalganın genliği U_N ' nin genliğinin negatiftir.

Problem 5 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.10 ve 4.11' de, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tablo 4.10' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %0.853, %0.037 ve %0.128; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.851, %0.039 ve %0.134 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin oldukça az olduğu görülmektedir. Tablo 4.11' de $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.853, %0.037 ve %0.128; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.859, %0.008 ve %0.029 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe her ne kadar I_1 ' de önemli bir değişim olmadıysa da I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Sonuç olarak konum adımlarının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu fakat zaman adımının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinde kayda değer değişimin olmadığı görülmektedir.

Tablo 4.10: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611757	8.862269	6.266571	2.611757
10.0	8.862111	6.265901	2.610849	8.862111	6.265902	2.610849
20.0	8.863096	6.264691	2.609000	8.863097	6.264700	2.609003
30.0	8.875093	6.264378	2.608534	8.875061	6.264347	2.608497
40.0	8.833952	6.264280	2.608427	8.833888	6.264188	2.608331
50.0	8.937851	6.264258	2.608416	8.937708	6.264103	2.608257

Problem 5' in $t = 0$, 20 ve 50 için elde edilen U_N ve V_N zmleri Şekil 4.5' de verildi. $t = 0$ zamanında U_N ve V_N dalgalarının maksimum genlik değerleri sırasıyla 0.5 ($x = 0$) ve -0.5 ($x = 0$)' dir. Bu tek dalgaların $t = 50$ zamanına ulaşıldığında geride değerli genliklerde iki dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği gözlendi.

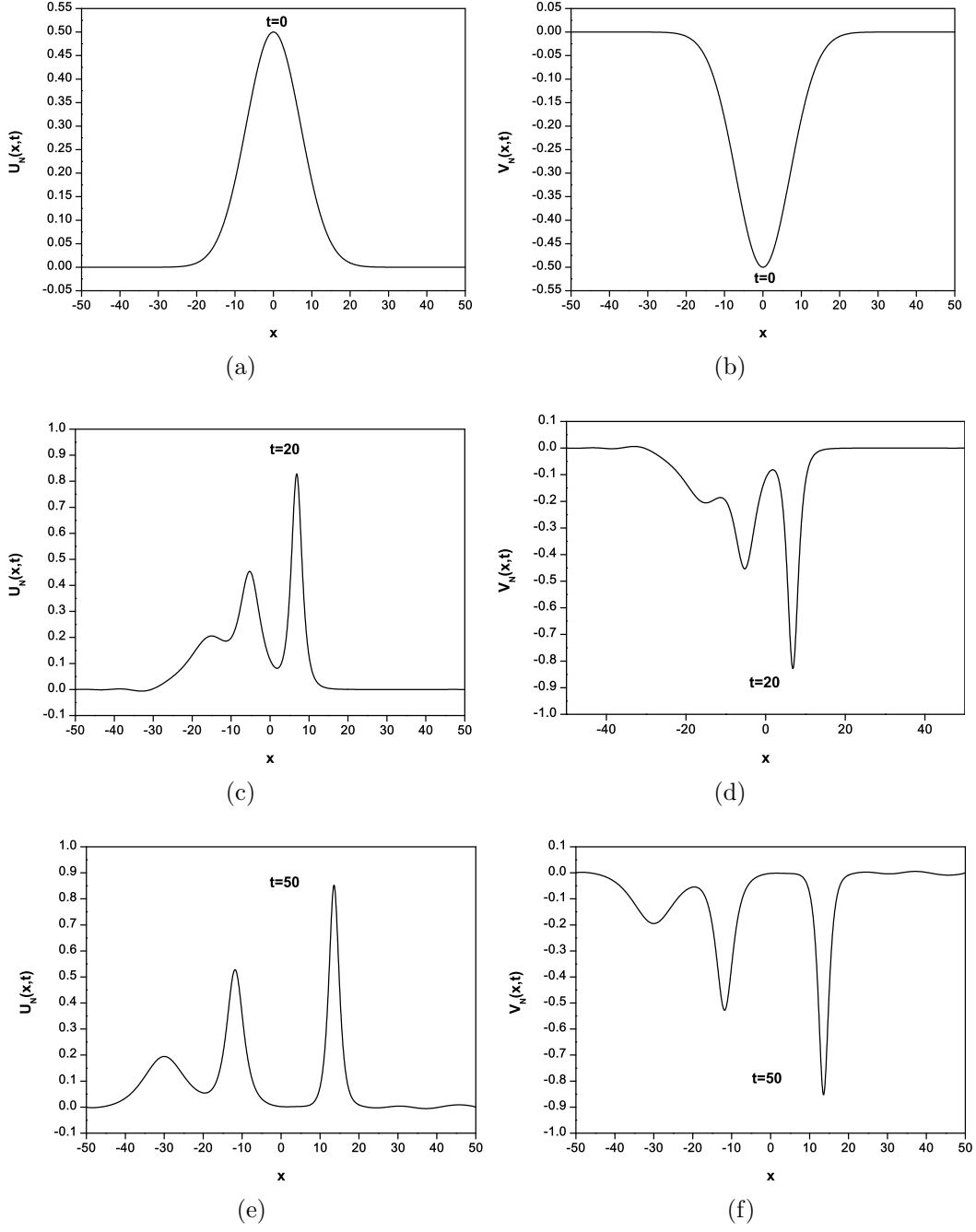
Tablo 4.11: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611757	8.862269	6.266571	2.611760
10.0	8.862111	6.265901	2.610849	8.862225	6.266402	2.611533
20.0	8.863096	6.264691	2.609000	8.863422	6.266092	2.611066
30.0	8.875093	6.264378	2.608534	8.875498	6.266049	2.610985
40.0	8.833952	6.264280	2.608427	8.834431	6.266045	2.610984
50.0	8.937851	6.264258	2.608416	8.938374	6.266066	2.611011

Problem 5 için $t = 50$ zamanında oluşan bu ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 4.12' de verildi.

Tablo 4.12: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	13.6	0.852728	- 0.852728
İkinci Dalga	-11.8	0.528138	-0.528138
Üçüncü Dalga	-30.0	0.194686	-0.194686



Şekil 4.5: Problem 5' in farklı t zamanlarında Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri.

4.2.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

Bu kısımda, (4.1) coupled mKdV denkleminin Petrov-Galerkin yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bunun için (4.1) sisteminin (4.2.3) ile verilen zayıf formunda, U_N ve V_N yaklaşımlarındaki Q_j yerine Bölüm 2' de (2.2.5) ile verilen kuadratik baz fonksiyonları ve W ağırlık fonksiyonu yerine de Bölüm 2' de (2.2.2.1) ile verilen lineer B-spline fonksiyonlar yazılırsa, $Z1_m = \alpha(3U^2 + V^2)$, $Z2_m = 2\alpha UV + \beta$ ve $G_m = \alpha(3V^2 + U^2)$ olmak üzere,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h L_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e - \left(\int_0^h L'_i Q''_j d\xi \right) \delta_j^e + Z1_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e + Z2_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e \right\} = 0, \quad i = m, m+1 \quad (4.2.2.1a)$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h L_i Q_j d\xi \right) \sigma_j^e - \left(\int_0^h L'_i Q''_j d\xi \right) \sigma_j^e + G_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e + Z2_m \left(\int_0^h L_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e \right\} = 0, \quad i = m, m+1 \quad (4.2.2.1b)$$

denklem sistemi bulunur. Burada

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h L_i Q_j d\xi, \\ B_{ij}^e &= \int_0^h L'_i Q''_j d\xi, \\ C_{ij}^e &= \int_0^h L_i Q'_j d\xi \end{aligned}$$

olarak alınırsa (4.2.2.1) denklemleri matris formunda

$$A^e \delta^e - B^e \delta^e + Z1_m C^e \delta^e + Z2_m C^e \sigma^e = 0, \quad (4.2.2.2a)$$

$$A^e \sigma^e - B^e \sigma^e + G_m C^e \sigma^e + Z2_m C^e \delta^e = 0 \quad (4.2.2.2b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ dir. Lineer ve kuadratik B-spline fonksiyonlar ile basit integral alma kuralları kullanılırsa,

$i = m, m + 1$ ve $j = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere, A_{ij}^e , B_{ij}^e ve C_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h L_i Q_j d\xi = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h L_i' Q_j'' d\xi = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h L_i Q_j' d\xi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $Z1_m$, $Z2_m$ ve G_m eşitliklerinde U ve V yerine sırasıyla

$$\frac{U_m + U_{m+1}}{2} \text{ ve } \frac{V_m + V_{m+1}}{2}$$

alınır ve sonra U_N ve V_N ' nin x_m noktasındaki

$$Z1_m = \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} + \frac{(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} \right],$$

$$Z2_m = \frac{\alpha(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})}{2} + \beta,$$

$$G_m = \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} + \frac{(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} \right]$$

noktasal değerleri (4.2.2.2) ile verilen eleman denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra eleman matrisleri birleştirilirse

$$A\dot{\delta} - B\delta + C(Z1_m)\delta + C(Z2_m)\sigma = 0, \quad (4.2.2.3a)$$

$$A\dot{\sigma} - B\sigma + C(G_m)\sigma + C(Z2_m)\delta = 0 \quad (4.2.2.3b)$$

matris formundaki denklem sistemi elde edilir. Burada global eleman parametreleri $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ dir. A , B , $C(Z1_m)$, $C(Z2_m)$ ve $C(G_m)$ matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$A : \frac{h}{12}(1, 11, 11, 1),$$

$$B : \frac{2}{h^2}(1, -3, 3, -1),$$

$$C(Z1_m) : \frac{1}{3}(-Z1_{m1}, -Z1_{m1} - 2Z1_{m2}, 2Z1_{m1} + Z1_{m2}, Z1_{m2}),$$

$$C(Z2_m) : \frac{1}{3}(-Z2_{m1}, -Z2_{m1} - 2Z2_{m2}, 2Z2_{m1} + Z2_{m2}, Z2_{m2}),$$

$$C(G_m) : \frac{1}{3}(-G_{m1}, -G_{m1} - 2G_{m2}, 2G_{m1} + G_{m2}, G_{m2})$$

olarak bulunur. Burada $m = 0(1)N - 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Z1_{m1} &= \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} + \frac{(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} \right], \\
Z1_{m2} &= \alpha \left[\frac{3(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} + \frac{(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} \right], \\
Z2_{m1} &= \frac{\alpha(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})}{2} + \beta, \\
Z2_{m2} &= \frac{\alpha(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})}{2} + \beta, \\
G_{m1} &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-1} + 2\sigma_m + \sigma_{m+1})^2}{4} + \frac{(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2}{4} \right], \\
G_{m2} &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} + \frac{(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

dir. (4.2.2.3) denklemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left[A - \frac{\Delta t}{2}(B - C(Z1_m)) \right] \delta^{n+1} + \left[\frac{\Delta t}{2} C(Z2_m) \right] \sigma^{n+1} &= \left[A + \frac{\Delta t}{2}(B - C(Z1_m)) \right] \delta^n + \\
&\quad \left[-\frac{\Delta t}{2} C(Z2_m) \right] \sigma^n, \quad (4.2.2.4a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\Delta t}{2} C(Z2_m) \right] \delta^{n+1} + \left[A - \frac{\Delta t}{2}(B - C(G_m)) \right] \sigma^{n+1} &= \left[-\frac{\Delta t}{2} C(Z2_m) \right] \delta^n + \\
&\quad \left[A + \frac{\Delta t}{2}(B - C(G_m)) \right] \sigma^n \quad (4.2.2.4b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(2N + 4)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane cebirsel denklemden oluşan denklem sistemi bulunur. Sınır şartları kullanılarak $\delta_{-1}, \delta_N, \sigma_{-1}$ ve σ_N parametreleri sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri Bölüm 2' de (2.2.1.7) ve (2.2.1.8) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (4.2.2.4) denklem sistemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler hesaplanabilir.

(4.2.2.4) denklem sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi de Galerkin yöntemindekine benzer şekilde incelenir. (4.2.2.4) denklem sisteminin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{12}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta t \hat{U}}{6}, \quad \gamma_4 = \frac{\Delta t Z 2_m}{6},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z 1_m, G_m\},$$

$$a_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

$$a_2 = 11\gamma_1 + 3\gamma_2 - 3\gamma_3,$$

$$a_3 = 11\gamma_1 - 3\gamma_2 + 3\gamma_3,$$

$$a_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

olmak üzere,

$$a_1 \delta_{m-1}^{n+1} + a_2 \delta_m^{n+1} + a_3 \delta_{m+1}^{n+1} + a_4 \delta_{m+2}^{n+1} - \gamma_4 \sigma_{m-1}^{n+1} -$$

$$3\gamma_4 \sigma_m^{n+1} + 3\gamma_4 \sigma_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \sigma_{m+2}^{n+1} = a_4 \delta_{m-1}^n + a_3 \delta_m^n +$$

$$a_2 \delta_{m+1}^n + a_1 \delta_{m+2}^n + \gamma_4 \sigma_{m-1}^n + 3\gamma_4 \sigma_m^n - 3\gamma_4 \sigma_{m+1}^n - \gamma_4 \sigma_{m+2}^n$$

ve

$$- \gamma_4 \delta_{m-1}^{n+1} - 3\gamma_4 \delta_m^{n+1} + 3\gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+2}^{n+1} + a_1 \sigma_{m-1}^{n+1} +$$

$$a_2 \sigma_m^{n+1} + a_3 \sigma_{m+1}^{n+1} + a_4 \sigma_{m+2}^{n+1} = \gamma_4 \delta_{m-1}^n + 3\gamma_4 \delta_m^n - 3\gamma_4 \delta_{m+1}^n -$$

$$\gamma_4 \delta_{m+2}^n + a_4 \sigma_{m-1}^n + a_3 \sigma_m^n + a_2 \sigma_{m+1}^n + a_1 \sigma_{m+2}^n$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a &= (11 + \cos(2\varphi) + 12 \cos(\varphi))\gamma_1 + (3 + \cos(2\varphi) - 4 \cos(\varphi))\gamma_2 \\
&\quad + (-3 + \cos(2\varphi) + 2 \cos(\varphi))\gamma_3, \\
b &= (\sin(2\varphi) + 10 \sin(\varphi))\gamma_1 + (\sin(2\varphi) - 2 \sin(\varphi))\gamma_2 \\
&\quad + (\sin(2\varphi) + 4 \sin(\varphi))\gamma_3, \\
c &= (-3 + \cos(2\varphi) + 2 \cos(\varphi))\gamma_4, \\
d &= (\sin(2\varphi) + 4 \sin(\varphi))\eta
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
[(a + ib)q - (a - ib)]P + [(c + id)q - (c - id)]W &= 0 \\
[(c + id)q - (c - id)]P + [(a + ib)q - (a - ib)]W &= 0
\end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin P ve W ' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$\begin{aligned}
(a^2 + 2iab - b^2 - c^2 - 2icd + d^2)q^2 - (2a^2 + 2b^2 - 2c^2 - 2d^2)q + \\
a^2 - 2iab - b^2 - c^2 + 2icd + d^2 = 0
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{(a - c) - i(b - d)}{(a - c) + i(b - d)}, \\
q_2 &= \frac{(a + c) - i(b + d)}{(a + c) + i(b + d)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, Petrov-Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı sartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen model problemlerin nümerik çözümleri elde edildi.

Problem 1 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında yapıldı. Tablo 4.13 problemin $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$ zaman adımlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablodan Δt zaman adımı küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%13.791 \times 10^{-3}$, $\%0.978 \times 10^{-3}$ ve $\%3.504 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%12.770 \times 10^{-3}$, $\%0.070 \times 10^{-3}$ ve $\%1.080 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%12.185 \times 10^{-3}$, $\%0.110 \times 10^{-3}$ ve $\%1.248 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı $\Delta t = 0.1$ ' den $\Delta t = 0.05$ ' e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir. Ancak $\Delta t = 0.01$ olduğunda $\Delta t = 0.05$ ' e göre I_1 ' deki değişimin azaldığı, I_2 ve I_3 ' de değişimin çok az oranda arttığı görülmektedir. Tablo 4.14, problemin $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.1, 0.05, 0.01$ konum adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile hata normlarını göstermektedir. Tablodan h konum adımı küçüldüğünde hesaplanan hata normlarında kayda değer düşüşlerin olduğu açıkça görülmektedir. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%48.858 \times 10^{-3}$, $\%1.734 \times 10^{-3}$ ve $\%19.722 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%12.185 \times 10^{-3}$, $\%0.110 \times 10^{-3}$ ve $\%1.248 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%3.060 \times 10^{-3}$, $\%0.007 \times 10^{-3}$ ve $\%0.078 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin oldukça azaldığı görülmektedir.

Problem 1' in $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.15' de verildi. Tablodan t ' nin artan zamanları için tek dalganın sağa doğru hareket ettiği anlaşılmaktadır. Örneğin $t = 0$ ' da dalganın genliği 0.707107 ($x = 0$) iken $t = 10$ ' da 0.706502 ($x = 10$) ve $t = 20$ ' de 0.706464 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Problem 1' in $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.6' da gösterildi. Bu şekilden, hata dağılımlarının genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında büyük olduğu açıkça görülmektedir.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 =$

Tablo 4.13: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141533	2.828436	-0.236250	0.003419	0.001940
	10.0	3.141782	2.828443	-0.236248	0.006288	0.003406
	15.0	3.141436	2.828449	-0.236247	0.009196	0.004904
	20.0	3.141159	2.828455	-0.236245	0.012135	0.006415
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141518	2.828430	-0.236251	0.001934	0.001138
	10.0	3.141771	2.828430	-0.236251	0.003258	0.001843
	15.0	3.141440	2.828429	-0.236251	0.004644	0.002568
	20.0	3.141191	2.828429	-0.236251	0.006072	0.003310
0.01	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141516	2.828430	-0.236251	0.001512	0.000887
	10.0	3.141773	2.828430	-0.236251	0.002336	0.001351
	15.0	3.141448	2.828430	-0.236251	0.003228	0.001834
	20.0	3.141210	2.828430	-0.236251	0.004166	0.002327

-10 ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında yapıldı. Tablo 4.16 ve 4.17 farklı konum ve zaman adımları için elde edilen korunum sabitlerini göstermektedir. Tablo 4.16' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%8.768 \times 10^{-3}$, $\%2.700 \times 10^{-3}$ ve $\%5.763 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%6.491 \times 10^{-3}$, $\%0.197 \times 10^{-3}$ ve $\%0.121 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımlarının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca Tablo 4.17' de $\Delta t = 0.1$ için, $h = 0.2$ iken I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sırasıyla $\%17.471 \times 10^{-3}$, $\%3.594 \times 10^{-3}$ ve $\%1.292 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%8.768 \times 10^{-3}$, $\%2.700 \times 10^{-3}$ ve $\%5.763 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımının küçülmesi durumunda I_1 ve I_2 korunum sabitlerinde değişimin azaldığı ancak I_3 korunum sabitinde değişimin arttığı görülmektedir.

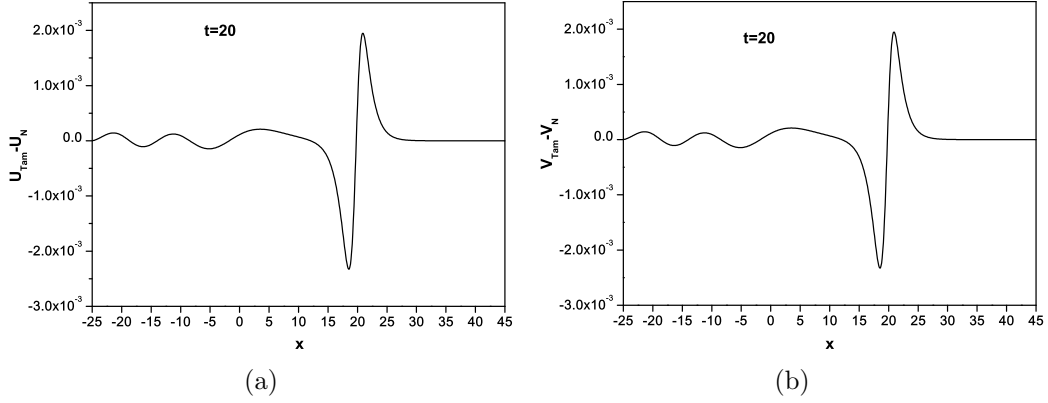
Problem 2' nin $t = 0$ ve 150 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.18' de verildi. Tablodan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda

Tablo 4.14: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	2.828427	-0.237922	0.000000	0.000000
	5.0	3.141270	2.828468	-0.237886	0.005976	0.003501
	10.0	3.142308	2.828474	-0.237879	0.009186	0.005316
	15.0	3.140998	2.828475	-0.237876	0.012659	0.007178
	20.0	3.140058	2.828476	-0.237875	0.016320	0.009087
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.236253	0.000000	0.000000
	5.0	3.141516	2.828430	-0.236251	0.001512	0.000887
	10.0	3.141773	2.828430	-0.236251	0.002336	0.001351
	15.0	3.141448	2.828430	-0.236251	0.003228	0.001834
	20.0	3.141210	2.828430	-0.236251	0.004166	0.002327
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235840	0.000000	0.000000
	5.0	3.141574	2.828427	-0.235840	0.000391	0.000230
	10.0	3.141638	2.828427	-0.235840	0.000613	0.000354
	15.0	3.141556	2.828427	-0.235840	0.000852	0.000482
	20.0	3.141496	2.828427	-0.235840	0.001103	0.000614

Tablo 4.15: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	0	0.707107
5.0	5	0.706562
10.0	10	0.706502
15.0	15	0.706478
20.0	20	0.706464



Şekil 4.6: Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.

Tablo 4.16: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.563593	6.283185	4.619952	-0.563593
20.0	6.283060	4.620037	-0.563581	6.283048	4.620012	-0.563569
40.0	6.283609	4.620555	-0.563540	6.283537	4.620512	-0.563382
60.0	6.283995	4.620433	-0.563549	6.283878	4.620385	-0.563428
80.0	6.283676	4.620040	-0.563577	6.283621	4.619990	-0.563577
100.0	6.283684	4.620022	-0.563575	6.283606	4.619950	-0.563592
120.0	6.283891	4.620042	-0.563569	6.283743	4.619946	-0.563593
140.0	6.283701	4.620065	-0.563563	6.283576	4.619944	-0.563593
150.0	6.283736	4.620077	-0.563560	6.283593	4.619943	-0.563594

Tablo 4.17: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.565430	6.283185	4.619952	-0.563593
20.0	6.282613	4.620192	-0.565314	6.283060	4.620037	-0.563581
40.0	6.284399	4.622142	-0.564583	6.283609	4.620555	-0.563540
60.0	6.285581	4.621693	-0.564746	6.283995	4.620433	-0.563549
80.0	6.284353	4.620084	-0.565343	6.283676	4.620040	-0.563577
100.0	6.284390	4.619891	-0.565410	6.283684	4.620022	-0.563575
120.0	6.284935	4.619843	-0.565423	6.283891	4.620042	-0.563569
140.0	6.284184	4.619805	-0.565433	6.283701	4.620065	-0.563563
150.0	6.284283	4.619786	-0.565437	6.283736	4.620077	-0.563560

yer aldığı, $t = 150$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.18: Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	-10.0	0.707223	10.0	0.447215
150.0	144.2	0.707005	108.3	0.447001

Problem 3 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında yapıldı. Tablo 4.19 ve 4.20, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablo 4.19' da, problemin $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$, 0.05 , 0.01 zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile hata normları verildi. Tablodan zaman adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 4.19' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %1.746, %3.895 ve %8.773; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.018, %0.201 ve %0.464; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla 67.783×10^{-3} , 0.619×10^{-3} ve 4.965×10^{-3} olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı $\Delta t = 0.1$ ' den $\Delta t = 0.05$ ' e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir. Ancak $\Delta t = 0.01$ olduğunda ise $\Delta t = 0.05$ ' e göre I_2 ve I_3 ' deki değişimin azaldığı, I_1 ' deki değişimin ise arttığı görülmektedir. Tablo 4.20' de problemin $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$, 0.1 , 0.05 konum adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablodan konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla %0.243, %0.056 ve %0.072; $h = 0.1$ iken sırasıyla 67.783×10^{-3} , 0.619×10^{-3} ve 4.965×10^{-3} ; $h = 0.05$ iken sırasıyla 17.015×10^{-3} , 0.060×10^{-3} ve 0.079×10^{-3} olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Problem 3' ün $t = 0$, 5 , 10 , 15 ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin

Tablo 4.19: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.123792	4.835339	3.555938	0.149611	0.104794
	10.0	3.105878	4.785054	3.470981	0.471178	0.322385
	15.0	3.093289	4.743524	3.401951	0.892319	0.593619
	20.0	3.086752	4.708165	3.344003	1.319672	0.849806
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.141915	4.896503	3.661399	0.031176	0.021929
	10.0	3.138599	4.894015	3.657082	0.069994	0.048072
	15.0	3.139395	4.891553	3.652807	0.117131	0.079763
	20.0	3.141023	4.889113	3.648577	0.172284	0.116697
0.01	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.142621	4.899022	3.665791	0.020702	0.015012
	10.0	3.140089	4.899018	3.665790	0.040590	0.028563
	15.0	3.141576	4.899014	3.665788	0.060665	0.042154
	20.0	3.143722	4.899010	3.665785	0.080775	0.055762

Tablo 4.20: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

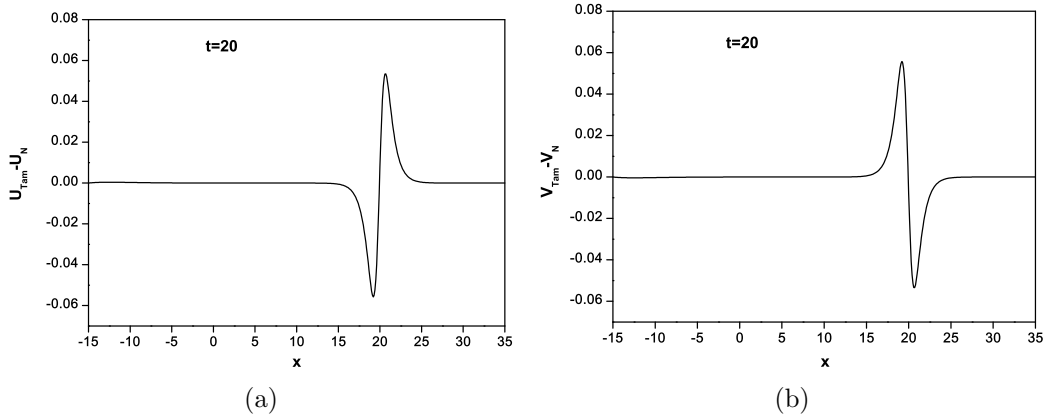
h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	4.898979	3.638975	0.000000	0.000000
	5.0	3.145565	4.898828	3.640533	0.081660	0.058609
	10.0	3.135265	4.897959	3.639155	0.162179	0.112686
	15.0	3.140989	4.897103	3.637746	0.245624	0.167261
	20.0	3.149230	4.896243	3.636345	0.331101	0.224584
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.665603	0.000000	0.000000
	5.0	3.142621	4.899022	3.665791	0.020702	0.015012
	10.0	3.140089	4.899018	3.665790	0.040590	0.028563
	15.0	3.141576	4.899014	3.665788	0.060665	0.042154
	20.0	3.143722	4.899010	3.665785	0.080775	0.055762
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.672088	0.000000	0.000000
	5.0	3.141848	4.898981	3.672097	0.005406	0.003916
	10.0	3.141212	4.898979	3.672095	0.010625	0.007465
	15.0	3.141585	4.898978	3.672093	0.015894	0.011038
	20.0	3.142127	4.898977	3.672091	0.021177	0.014621

değerleri Tablo 4.21’ de verildi. Tablodan t ’ nin artan zamanları için tek dalganın, U_N için x -ekseninin üstünde, V_N için ise x -ekseninin altında sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, $t = 0$ ’ da dalganın genliği 1.224745 ($x = 0$) iken $t = 10$ ’ da 1.220261 ($x = 10$) ve $t = 20$ ’ de 1.216660 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Tablo 4.21: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3’ ün Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	0	1.224745	-1.224745
5.0	5	1.221177	-1.221177
10.0	10	1.220261	-1.220262
15.0	15	1.218759	-1.218759
20.0	20	1.216660	-1.216662

Problem 3’ ün $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.7’ de gösterildi. Bu şekilden, hata dağılımlarının genliğinin en yüksek olduğu x konumu civarında büyüdüğü görülmektedir.



Şekil 4.7: Problem 3’ ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ’ deki hata dağılımları.

Problem 4 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.22’ de, farklı konum adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tabloda verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken

sırasıyla %5.280, %13.732 ve %31.013; $h = 0.05$ iken sırasıyla %5.323, %13.838 ve %31.254 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerinde değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 4.22: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	7.997373	5.059019	6.283185	7.997373	5.066156
10.0	6.100678	7.399410	4.116289	6.097736	7.388763	4.105349
20.0	6.037293	7.219842	3.874621	6.034074	7.209104	3.863778
30.0	6.013175	7.171170	3.817463	6.009903	7.158526	3.803818
40.0	6.012203	7.104128	3.735519	6.009934	7.094882	3.726912
50.0	5.952460	7.019474	3.631580	5.951268	7.010723	3.623780
60.0	5.923474	6.953273	3.552393	5.920535	6.944646	3.544853
70.0	5.951404	6.899183	3.490071	5.948746	6.890672	3.482760

Problem 4' ün $t = 0$ ve 70 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri sırasıyla Tablo 4.23 ve Tablo 4.24' de verildi. Tablolardan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 70$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.23: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(U_N)
0.0	-10.0	1.224745	10.0	0.774597
70.0	32.0	0.955830	11.4	0.768835

Problem 5 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.25 ve 4.26, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitlerini vermektedir. Tablo 4.25' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ ' deki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %0.422, %0.056 ve %0.102; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.421,

Tablo 4.24: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Genlik(V_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)	Konum(x)
0.0	-10.0	-1.224745	10.0	-0.774597	
70.0	32.0	-0.955851	11.4	-0.768841	

%0.058 ve %0.108 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Tablo 4.26' da de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.422, %0.056 ve %0.102; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.426, %0.034 ve %0.041 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe her ne kadar I_1 ' de değişim olmadıysa da I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.25: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611757	8.862269	6.266571	2.611757
10.0	8.862114	6.265902	2.611035	8.862114	6.265903	2.611034
20.0	8.862461	6.264694	2.609614	8.862461	6.264703	2.609617
30.0	8.868421	6.264331	2.609271	8.868389	6.264301	2.609235
40.0	8.847926	6.263987	2.609210	8.847857	6.263897	2.609117
50.0	8.899666	6.263083	2.609098	8.899536	6.262931	2.608944

Tablo 4.26: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611757	8.862269	6.266571	2.611760
10.0	8.862114	6.265902	2.611035	8.862228	6.266403	2.611580
20.0	8.862461	6.264694	2.609614	8.862781	6.266082	2.611208
30.0	8.868421	6.264331	2.609271	8.868763	6.265878	2.611050
40.0	8.847926	6.263987	2.609210	8.848171	6.265472	2.610916
50.0	8.899666	6.263083	2.609098	8.899982	6.264451	2.610684

$t = 0$ zamanında U_N ve V_N dalgalarının maksimum genlik değerleri sırasıyla 0.5 ($x = 0$) ve -0.5 ($x = 0$)' dir. Bu tek dalgaların $t = 50$ zamanına ulaşıldığında geride değişik genliklerde iki dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği anlaşılmaktadır. $t = 50$ zamanında oluşan bu ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 4.27' de verildi.

Tablo 4.27: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in Petrov-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	13.6	0.851700	- 0.851700
İkinci Dalga	-11.8	0.527344	-0.527344
Üçüncü Dalga	-30.0	0.194734	-0.194734

4.2.3 Subdomain Yöntemi

Bu kısımda, (4.1) coupled mKdV denkleminin subdomain sonlu eleman yöntemi ile nümerik çözümleri bulundu. Bölüm 2' de (2.2.3.1) ile verilen W_m ağırlık fonksiyonu (4.2.1) de yerine yazılırsa her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (U_t + U_{xxx} + \alpha[3U^2 + V^2]U_x + [2\alpha UV + \beta]V_x) dx = 0, \quad (4.2.3.1a)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (V_t + V_{xxx} + \alpha[3V^2 + U^2]V_x + [2\alpha UV + \beta]U_x) dx = 0 \quad (4.2.3.1b)$$

denklemleri elde edilir. (4.2.3.1) denklem sistemindeki integraller Bölüm 3' deki subdomain yöntemindekine benzer şekilde hesaplanır. Bunun için önce sisteme $h\xi = x - x_m$ lokal koordinat dönüşümü uygulanır ve sonra U_N ve V_N yaklaşımlarındaki ϕ_j yerine Bölüm 3' de (3.2.3.2) ile verilen kuartik baz fonksiyonları yazılır. Şimdi, (4.2.3.1) denklem sisteminin birinci denklemindeki integralleri terim terim hesaplayalım: $\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx$ integrali hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx &= h \int_0^1 U_t d\xi = h \int_0^1 [\dot{\delta}_{m-2}(1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) + \\ &\quad \dot{\delta}_{m-1}(11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4) + \\ &\quad \dot{\delta}_m(11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4) + \\ &\quad \dot{\delta}_{m+1}(1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4) + \dot{\delta}_{m+2}(\xi^4)] d\xi \\ &= \frac{h}{5}(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklemden $\dot{\delta}$ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.3) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx &= \frac{h}{5\Delta t} [(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) + 26(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 66(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + \\ &\quad 26(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n)] \end{aligned}$$

bulunur. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_{xxx} dx$ integrali hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} U_{xxx} dx &= \frac{1}{h^2} \int_0^1 U_{\xi\xi\xi} d\xi = \frac{1}{h^2} [U_{\xi\xi\xi}]_0^1 \\ &= \frac{12}{h^2} [(\delta_{m-1} - \delta_m - \delta_{m+1} + \delta_{m+2}) - (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1})] \\ &= \frac{12}{h^2} [(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikte δ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_{xxx} dx = \frac{6}{h^2} [-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) + 2(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) - 2(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)]$$

bulunur. (4.2.3.1a) denklemindeki $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha(3U^2 + V^2)U_x dx$ integrali, $Z1_m = \alpha(3U^2 + V^2)$ olmak üzere, hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha(3U^2 + V^2)U_x dx &= Z1_m \int_0^1 U_\xi d\xi = Z1_m [U]_0^1 \\ &= Z1_m [(\delta_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) - \\ &\quad (\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1})] \\ &= Z1_m [-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte δ yerine (2.2.3.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha[3U^2 + V^2]U_x dx = \frac{Z1_m}{2} [-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) - 10(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) + 10(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)]$$

bulunur. Son olarak $\int_{x_m}^{x_{m+1}} (2\alpha UV + \beta)V_x dx$ integrali, $Z2_m = 2\alpha UV + \beta$ olmak üzere, hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (2\alpha UV + \beta)V_x dx &= Z2_m \int_0^1 V_\xi d\xi = Z2_m [V]_0^1 = \\ &= Z2_m [(\sigma_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} + \sigma_{m+2}) - \\ &\quad (\sigma_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \sigma_{m+1})] \\ &= Z2_m [-\sigma_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \sigma_{m+2}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte σ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (2\alpha UV + \beta)V_x dx = \frac{Z2_m}{2} [-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) - 10(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) + 10(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)]$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (4.2.3.1a) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{6}{h^2} - \frac{Z1_m}{2} \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} + \frac{12}{h^2} - 5Z1_m \right] + \\
& \delta_m^{n+1} \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} - \frac{12}{h^2} + 5Z1_m \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{6}{h^2} + \frac{Z1_m}{2} \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{5Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{5Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{Z2_m}{2} \right] = \quad (4.2.3.2) \\
& \delta_{m-2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{6}{h^2} + \frac{Z1_m}{2} \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} - \frac{12}{h^2} + 5Z1_m \right] + \delta_m^n \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \\
& \delta_{m+1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} + \frac{12}{h^2} - 5Z1_m \right] + \delta_{m+2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{6}{h^2} - \frac{Z1_m}{2} \right] + \sigma_{m-2}^n \left[\frac{Z2_m}{2} \right] + \\
& \sigma_{m-1}^n \left[-\frac{5Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[-\frac{5Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m+2}^n \left[-\frac{Z2_m}{2} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de (4.2.3.1) denklem sisteminin ikinci denklemindeki integralleri terim terim hesaplayalım: $\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_t dx$ integrali hesaplanırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_t dx = h \int_0^1 V_t d\xi = \frac{h}{5} (\dot{\sigma}_{m-2} + 26\dot{\sigma}_{m-1} + 66\dot{\sigma}_m + 26\dot{\sigma}_{m+1} + \dot{\sigma}_{m+2})$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\dot{\sigma}$ yerine Bölüm 2' de (2.2.3.6) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_t dx &= \frac{h}{5\Delta t} [(\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n) + 26(\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) + 66(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n) + \\
& 26(\sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} - \sigma_{m+2}^n)]
\end{aligned}$$

bulunur. $\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{xxx} dx$ integrali hesaplanırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{xxx} dx = \frac{1}{h^2} \int_0^1 V_{\xi\xi\xi} d\xi = \frac{1}{h^2} [V_{\xi\xi}]_0^1 = \frac{12}{h^2} [-\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} - 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})$$

olur. Bu eşitlikte σ yerine (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} V_{xxx} dx &= \frac{6}{h^2} [-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) + 2(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) - 2(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + \\
& (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $G_m = \alpha(3V^2 + U^2)$ olmak üzere, $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha[3V^2 + U^2]V_x dx$ integrali

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha(3V^2 + U^2)V_x dx &= G_m \int_0^1 V_\xi d\xi = G_m[V]_0^1 \\ &= G_m[(\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + 11\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) - \\ &\quad (\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1})] \\ &= G_m[-\sigma_{m-2} - 10\sigma_{m-1} + 10\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}] \end{aligned}$$

dir. σ yerine (2.2.3.7) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \alpha(3V^2 + U^2)V_x dx &= \frac{G_m}{2} [-(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n) - 10(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n) + \\ &\quad 10(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + (\sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n)] \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\int_{x_m}^{x_{m+1}} [2\alpha UV + \beta]U_x dx$ integrali hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (2\alpha UV + \beta)U_x dx &= Z2_m \int_0^1 U_\xi d\xi = Z2_m[U]_0^1 \\ &= Z2_m[(\delta_{m-1} + 11\sigma_m + 11\sigma_{m+1} + \delta_{m+2}) - \\ &\quad (\delta_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \delta_{m+1})] \\ &= Z2_m[-\delta_{m-2} - 10\sigma_{m-1} + 10\sigma_{m+1} + \delta_{m+2}] \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte δ yerine (2.2.3.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (2\alpha UV + \beta)U_x dx &= \frac{Z2_m}{2} [-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) - 10(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) + \\ &\quad 10(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan tüm integraller (4.2.3.1b) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{Z2_m}{2} \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{5Z2_m}{2} \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{5Z2_m}{2} \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{Z2_m}{2} \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{6}{h^2} - \frac{G_m}{2} \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} + \frac{12}{h^2} - 5G_m \right] + \\
& \sigma_m^{n+1} \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26h}{5\Delta t} - \frac{12}{h^2} + 5G_m \right] + \\
& \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{6}{h^2} + \frac{G_m}{2} \right] = \delta_{m-2}^n \left[\frac{Z2_m}{2} \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{5Z2_m}{2} \right] + \\
& \delta_{m+1}^n \left[-\frac{5Z2_m}{2} \right] + \delta_{m+2}^n \left[-\frac{Z2_m}{2} \right] + \sigma_{m-2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} + \frac{6}{h^2} + \frac{G_m}{2} \right] + \\
& \sigma_{m-1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} - \frac{12}{h^2} + 5G_m \right] + \sigma_m^n \left[\frac{66}{5\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[\frac{26h}{5\Delta t} + \frac{12}{h^2} - 5G_m \right] + \\
& \sigma_{m+2}^n \left[\frac{h}{5\Delta t} - \frac{6}{h^2} - \frac{G_m}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4.2.3.3}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
Z1_m &= \alpha(3U^2 + V^2), \\
Z2_m &= 2\alpha UV + \beta, \\
G_m &= \alpha(3V^2 + U^2)
\end{aligned}$$

olup U ve V yerine sırasıyla

$$\frac{U_m + U_{m+1}}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{V_m + V_{m+1}}{2}$$

yazılır ve sonra U_m ve V_m değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Z1_m &= \alpha \left[\frac{3(\delta_{m-2} + 12\delta_{m-1} + 22\delta_m + 12\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} + \right. \\
& \quad \left. \frac{(\sigma_{m-2} + 12\sigma_{m-1} + 22\sigma_m + 12\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} \right], \\
Z2_m &= \left[\frac{\alpha(\delta_{m-2} + 12\delta_{m-1} + 22\delta_m + 12\delta_{m+1} + \delta_{m+2})(\sigma_{m-2} + 12\sigma_{m-1} + 22\sigma_m + 12\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})}{2} + \beta \right], \\
G_m &= \alpha \left[\frac{3(\sigma_{m-2} + 12\sigma_{m-1} + 22\sigma_m + 12\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2}{4} + \right. \\
& \quad \left. \frac{(\delta_{m-2} + 12\delta_{m-1} + 22\delta_m + 12\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(2N + 10)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bölüm 3' de (3.2.3.4) ile verilen yaklaşımlarda U_m , V_m , U'_m ve V'_m sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} , δ_{N+2} , σ_{-2} , σ_{-1} , σ_{N+1} ve

σ_{N+2} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu karesel bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

δ_m^{n+1} ve σ_m^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri Bölüm 3' de (3.2.3.8) ve (3.2.3.9) ile verilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Böylece (4.2.3.2) ve (4.2.3.3) denklem sistemlerinde başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir.

(4.2.3.2) ve (4.2.3.3) denklemlerinin lineer olmayan terimlerine, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu kısımda elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi de Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemlerinde olduğu gibi incelendi. (4.2.3.2) ve (4.2.3.3) denklem sistemlerinin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{h}{5\Delta t}, \quad \gamma_2 = \frac{6}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\hat{U}}{2}, \quad \gamma_4 = \frac{Z2_m}{2},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z1_m, G_m\},$$

$$a_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

$$a_2 = 26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3,$$

$$a_3 = 66\gamma_1,$$

$$a_4 = 26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3,$$

$$a_5 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & a_1\delta_{m-2}^{n+1} + a_2\delta_{m-1}^{n+1} + a_3\delta_m^{n+1} + a_4\delta_{m+1}^{n+1} + a_5\delta_{m+2}^{n+1} - \gamma_4\sigma_{m-2}^{n+1} - \\ & 5\gamma_4\sigma_{m-1}^{n+1} + 5\gamma_4\sigma_{m+1}^{n+1} + \gamma_4\sigma_{m+2}^{n+1} = a_5\delta_{m-2}^n + a_4\delta_{m-1}^n + a_3\delta_m^n + \\ & a_2\delta_{m+1}^n + a_1\delta_{m+2}^n + \gamma_4\sigma_{m-2}^n + 5\gamma_4\sigma_{m-1}^n - 5\gamma_4\sigma_{m+1}^n - \gamma_4\sigma_{m+2}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -\gamma_4\delta_{m-2}^{n+1} - 5\gamma_4\delta_{m-1}^{n+1} + 5\gamma_4\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4\delta_{m+2}^{n+1} + a_1\sigma_{m-2}^{n+1} + a_2\sigma_{m-1}^{n+1} + \\
& a_3\sigma_m^{n+1} + a_4\sigma_{m+1}^{n+1} + a_5\sigma_{m+2}^{n+1} = \gamma_4\delta_{m-2}^n + 5\gamma_4\delta_{m-1}^n - 5\gamma_4\delta_{m+1}^n - \\
& \gamma_4\delta_{m+2}^n + a_5\sigma_{m-2}^n + a_4\sigma_{m-1}^n + a_3\sigma_m^n + a_2\sigma_{m+1}^n + a_1\sigma_{m+2}^n
\end{aligned}$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$a = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$b = (2 \sin(2\varphi) - 4 \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$c = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$d = (2 \sin(2\varphi) + 10 \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$c_1 = b + c$$

olmak üzere,

$$[(a + ic_1)q - (a - ic_1)]P + [(idq + id)]W = 0$$

$$[(idq + id)]P + [(a + ic_1)q - (a - ic_1)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin P ve W ' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 + 2iac_1 - c_1^2 + d^2)q^2 - (2a^2 + 2c_1^2 - 2d^2)q + a^2 - 2iac_1 - c_1^2 + d^2 = 0$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{a - i(c_1 - d)}{a + i(c_1 - d)}, \\
q_2 &= \frac{a - i(c_1 + d)}{a + i(c_1 + d)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, subdomain yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, subdomain sonlu eleman yöntemiyle yukarıda göz önüne alınan beş model problemin nümerik çözümleri elde edildi. Problem 1 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında yapıldı. Tablo 4.28 ve 4.29, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan Δt zaman adımı ve h konum adımı küçüldüğünde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarında kayda değer düşüşlerin olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 4.28’ de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ ’deki değişimleri, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%2.419 \times 10^{-3}$, $\%0.850 \times 10^{-3}$ ve $\%2.111 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.410 \times 10^{-3}$, $\%0.005 \times 10^{-3}$ ve $\%0.055 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin oldukça azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 4.29’ da $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%4.829 \times 10^{-3}$, $\%0.974 \times 10^{-3}$ ve $\%2.220 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%2.419 \times 10^{-3}$, $\%0.850 \times 10^{-3}$ ve $\%2.111 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.513 \times 10^{-3}$, $\%0.829 \times 10^{-3}$ ve $\%2.239 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı $h = 0.2$ ’den $h = 0.1$ ’e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı, $h = 0.05$ olduğunda ise $h = 0.1$ ’e göre I_1 ve I_2 ’deki değişimin azaldığı ancak I_3 ’deki değişimin çok az oranda arttığı görülmektedir. Problem 1’ in $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.30’ da verildi. Tablodan t ’nin artan zamanları için tek dalganın sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin $t = 0$ ’da dalganın genliği 0.707107 ($x = 0$) iken $t = 10$ ’da 0.707038 ($x = 10$) ve $t = 20$ ’de 0.707010 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Problem 1’ in $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.8’ de gösterildi. Bu şekilde, hata dağılımlarının genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında büyük olduğu kolayca görülmektedir.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında yapıldı. Tablo 4.31 ve 4.32’ de farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tablo 4.31’ de verilen I_1 ,

Tablo 4.28: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

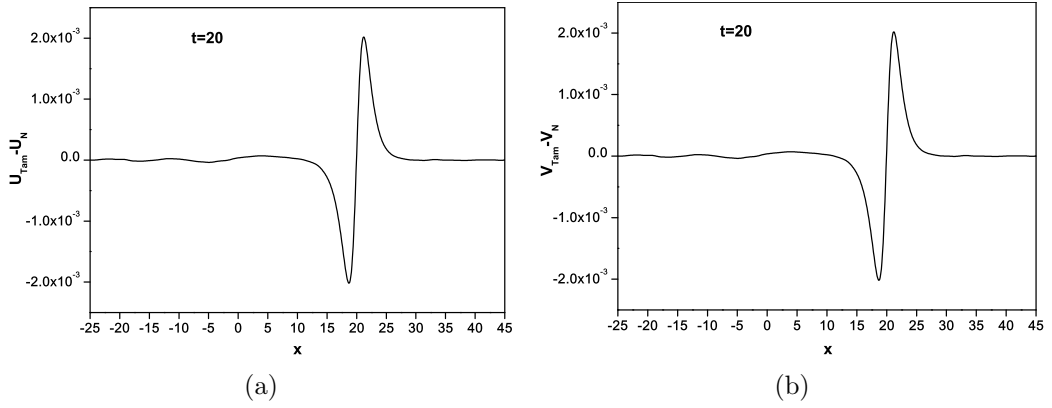
Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141626	2.828433	-0.235701	0.002612	0.001379
	10.0	3.141614	2.828439	-0.235700	0.005091	0.002645
	15.0	3.141553	2.828445	-0.235699	0.007565	0.003903
	20.0	3.141517	2.828451	-0.235697	0.010043	0.005184
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141598	2.828427	-0.235702	0.001016	0.000532
	10.0	3.141595	2.828427	-0.235702	0.001983	0.001024
	15.0	3.141569	2.828427	-0.235703	0.002950	0.001517
	20.0	3.141548	2.828427	-0.235703	0.003923	0.002019

Tablo 4.29: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	2.828427	-0.235705	0.000000	0.000000
	5.0	3.141622	2.828435	-0.235704	0.004048	0.002112
	10.0	3.141617	2.828442	-0.235702	0.007888	0.004073
	15.0	3.141509	2.828449	-0.235701	0.011726	0.006034
	20.0	3.141441	2.828455	-0.235699	0.015576	0.008030
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141626	2.828433	-0.235701	0.002612	0.001379
	10.0	3.141614	2.828439	-0.235700	0.005091	0.002645
	15.0	3.141553	2.828445	-0.235699	0.007565	0.003903
	20.0	3.141517	2.828451	-0.235697	0.010043	0.005184
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141628	2.828433	-0.235701	0.002248	0.001192
	10.0	3.141614	2.828439	-0.235700	0.004381	0.002285
	15.0	3.141573	2.828445	-0.235698	0.006509	0.003365
	20.0	3.141545	2.828451	-0.235697	0.008639	0.004461

Tablo 4.30: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	0	0.707107
5.0	5	0.707064
10.0	10	0.707038
15.0	15	0.707020
20.0	20	0.707010



Şekil 4.8: Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.

I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%4.929 \times 10^{-3}$, $\%2.722 \times 10^{-3}$ ve $\%5.657 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%3.101 \times 10^{-3}$, $\%0.073 \times 10^{-3}$ ve $\%0.031 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Ayrıca Tablo 4.32' de $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.2$ iken I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sırasıyla $\%5.227 \times 10^{-3}$, $\%2.762 \times 10^{-3}$ ve $\%5.746 \times 10^{-3}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%4.929 \times 10^{-3}$, $\%2.722 \times 10^{-3}$ ve $\%5.657 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum ve zaman adımlarının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.31: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.562986	6.283185	4.619952	-0.562986
20.0	6.283221	4.619996	-0.563003	6.283211	4.619972	-0.562991
40.0	6.283517	4.620182	-0.563192	6.283427	4.620139	-0.563034
60.0	6.283659	4.620140	-0.563146	6.283522	4.620097	-0.563023
80.0	6.283476	4.620011	-0.562991	6.283431	4.619964	-0.562989
100.0	6.283414	4.620020	-0.562970	6.283347	4.619951	-0.562986
120.0	6.283560	4.620042	-0.562963	6.283399	4.619950	-0.562986
140.0	6.283486	4.620066	-0.562957	6.283367	4.619949	-0.562986
150.0	6.283495	4.620078	-0.562954	6.283380	4.619949	-0.562986

Tablo 4.32: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2' nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.562988	6.283185	4.619952	-0.562986
20.0	6.283237	4.620056	-0.563003	6.283221	4.619996	-0.563003
40.0	6.284031	4.620738	-0.563168	6.283517	4.620182	-0.563192
60.0	6.284097	4.620580	-0.563129	6.283659	4.620140	-0.563146
80.0	6.283511	4.620053	-0.562991	6.283476	4.620011	-0.562991
100.0	6.283411	4.620023	-0.562972	6.283414	4.620020	-0.562970
120.0	6.283624	4.620043	-0.562965	6.283560	4.620042	-0.562963
140.0	6.283475	4.620068	-0.562959	6.283486	4.620066	-0.562957
150.0	6.283514	4.620080	-0.562956	6.283495	4.620078	-0.562954

Problem 2' nin $t = 0$ ve 150 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.33' de verildi. Tablodan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 150$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.33: Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Genlik(U_N ve V_N)	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)	Konum(x)
0.0	-10.0	0.707223	10.0	0.447215	
150.0	144.2	0.707554	108.3	0.447137	

Problem 3 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında yapıldı. Tablo 4.34 ve 4.35, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablolardan daha küçük konum ve zaman adımları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır. Tablo 4.34' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.05$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %1.840, %4.113 ve %9.275; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.079, %0.219 ve %0.510; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla 7.646×10^{-3} , 0.072×10^{-3} ve 0.171×10^{-3} olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Tablo 4.35' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.05$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla %0.030, %0.196 ve %0.457; $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.055, %0.214 ve %0.499; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.079, %0.219 ve %0.510 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Yukarıdaki her iki tablo için verilen sonuçlardan, konum ve zaman adımlarının küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıktır.

Problem 3' ün $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin

Tablo 4.34: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $h = 0.05$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.674234	0.000000	0.000000
	5.0	3.121753	4.830761	3.556092	0.140417	0.099978
	10.0	3.103971	4.777542	3.465914	0.466360	0.320930
	15.0	3.089323	4.734129	3.393674	0.897637	0.599971
	20.0	3.083796	4.697502	3.333437	1.333640	0.858554
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.674234	0.000000	0.000000
	5.0	3.140883	4.896253	3.669462	0.013775	0.009611
	10.0	3.139814	4.893555	3.664747	0.036630	0.025249
	15.0	3.139300	4.890887	3.660090	0.068452	0.046950
	20.0	3.139124	4.888246	3.655484	0.109130	0.074661
0.01	0.0	3.141593	4.898979	3.674234	0.000000	0.000000
	5.0	3.141646	4.898979	3.674233	0.002701	0.001831
	10.0	3.141485	4.898978	3.674231	0.005400	0.003664
	15.0	3.141624	4.898977	3.674229	0.008097	0.005484
	20.0	3.141833	4.898976	3.674228	0.010799	0.007315

Tablo 4.35: $\alpha = 1, \beta = 0.5, c = 1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

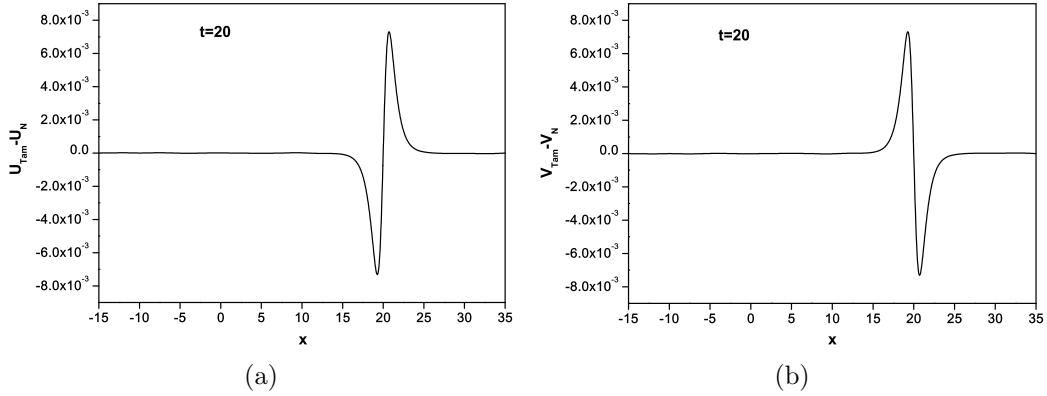
h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	4.898979	3.674112	0.000000	0.000000
	5.0	3.141695	4.896561	3.669864	0.047644	0.032192
	10.0	3.141695	4.894152	3.665649	0.103162	0.069839
	15.0	3.139933	4.891755	3.661444	0.166384	0.112879
	20.0	3.142550	4.889390	3.657327	0.237130	0.160901
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.674228	0.000000	0.000000
	5.0	3.141056	4.896315	3.669564	0.020794	0.014332
	10.0	3.139547	4.893679	3.664957	0.050426	0.034587
	15.0	3.139439	4.891069	3.660393	0.088774	0.060587
	20.0	3.139869	4.888487	3.655895	0.135723	0.092277
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.674234	0.000000	0.000000
	5.0	3.140883	4.896253	3.669462	0.013775	0.009611
	10.0	3.139814	4.893555	3.664747	0.036630	0.025249
	15.0	3.139300	4.890887	3.660090	0.068452	0.046950
	20.0	3.139124	4.888246	3.655484	0.109130	0.074661

değerleri Tablo 4.36’ da verildi. Tablodan t ’ nin artan zamanları için tek dalganın, U_N için x -ekseninin üstünde, V_N için ise x -ekseninin altında sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, U_N için $t = 0$ ’ da dalganın genliği 1.224745 ($x = 0$) iken $t = 10$ ’ da 1.224656 ($x = 10$) ve $t = 20$ ’ de 1.224605 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Tablo 4.36: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3’ ün subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	0	1.224745	-1.224745
5.0	5	1.224682	-1.224682
10.0	10	1.224656	-1.224656
15.0	15	1.224649	-1.224649
20.0	20	1.224605	-1.224605

Problem 3’ ün $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.9’ da gösterildi. Hata dağılımları incelendiğinde, genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında hata dağılımlarının büyük olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 4.9: Problem 3’ ün $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ’ deki hata dağılımları.

Problem 4 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.37, farklı konum adımları için hesaplanan korunum sabitleri ile ilgili karşılaştırmaları göstermektedir.

Tabloda verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %4.683, %13.804 ve %31.632; $h = 0.05$ iken sırasıyla %4.693, %13.840 ve %31.690 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 4.37: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	7.997373	5.059019	6.283185	7.997373	5.068520
10.0	6.099603	7.390158	4.108538	6.098513	7.386455	4.103336
20.0	6.034599	7.210556	3.864369	6.033423	7.206852	3.859193
30.0	6.003070	7.160254	3.806169	6.001316	7.155954	3.800890
40.0	6.024140	7.096342	3.728201	6.023188	7.093131	3.724521
50.0	5.931767	7.012798	3.621498	5.930807	7.009764	3.619829
60.0	5.902380	6.946431	3.542238	5.901222	6.943431	3.537086
70.0	5.988974	6.893414	3.465218	5.988340	6.890543	3.462285

Problem 4' ün $t = 0$ ve 70 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri sırasıyla Tablo 4.38 ve Tablo 4.39' da verildi. Tablolardan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 70$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.38: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(U_N)
0.0	-10.0	1.224745	10.0	0.774597
70.0	31.8	0.960049	11.4	0.771906

Problem 5 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.40 ve 4.41' de, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tablo 4.40' da $t = 0$ ve $t = 50$

Tablo 4.39: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Genlik(V_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)	Konum(x)
0.0	-10.0	-1.224745	10.0	-0.774597	
70.0	31.8	-0.960049	11.4	-0.771906	

zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %0.917, %0.010 ve %0.098; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.915, %0.013 ve %0.105 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Tablo 4.41' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.917, %0.010 ve %0.098; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.923, %0.001 ve %0.085 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe her ne kadar I_1 ' de değişim olmadıysa da I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir. Sonuç olarak konum adımlarının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu fakat zaman adımının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinde kayda değer değişimin olmadığı görülmektedir. $t = 0$ zamanında U_N ve V_N ' nin maksimum genlik değerleri sırasıyla

Tablo 4.40: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611761	8.862269	6.266571	2.611761
10.0	8.862105	6.266346	2.611631	8.862104	6.266348	2.611631
20.0	8.862531	6.265936	2.611320	8.862528	6.265945	2.611322
30.0	8.872112	6.265855	2.610531	8.872073	6.265824	2.610488
40.0	8.843130	6.265873	2.604696	8.843069	6.265781	2.604593
50.0	8.943510	6.265925	2.609190	8.943362	6.265767	2.609030

0.5 ($x = 0$) ve -0.5 ($x = 0$)' dir. Bu tek dalgaların $t = 50$ zamanına ulaşıldığında geride değişik genliklerde iki dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği gözlemlendi. $t = 50$ zamanında oluşan bu ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 4.42' de verildi.

Tablo 4.41: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611761	8.862269	6.266571	2.611761
10.0	8.862105	6.266346	2.611631	8.862218	6.266513	2.611729
20.0	8.862531	6.265936	2.611320	8.862844	6.266404	2.611603
30.0	8.872112	6.265855	2.610531	8.872451	6.266413	2.610850
40.0	8.843130	6.265873	2.604696	8.843710	6.266463	2.605007
50.0	8.943510	6.265925	2.609190	8.944035	6.266526	2.609552

Tablo 4.42: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in subdomain yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	13.6	0.852039	- 0.852039
İkinci Dalga	-11.8	0.528067	-0.528067
Üçüncü Dalga	-30.0	0.194780	-0.194780

4.2.4 Kollokasyon Yöntemi

Bu kısımda, (4.1) ile verilen coupled mKdV denkleminin kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bölüm 2' de (2.2.4.2) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları ve yine Bölüm 2' de (2.2.4.3) ile verilen yaklaşımlar kullanılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin kendilerinin ve x' e göre birinci ve üçüncü mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$

$$V_N(x_m, t) = V_m = \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2},$$

$$U'_m = \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}),$$

$$V'_m = \frac{5}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \quad (4.2.4.1)$$

$$U'''_m = \frac{60}{h^3}(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}),$$

$$V'''_m = \frac{60}{h^3}(\sigma_{m+2} - 2\sigma_{m+1} + 2\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2})$$

şeklinde elde edilir. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi gösterir. (4.1) denklemlerinde yaklaşımlar yerlerine yazılırsa, $Z1_m = \alpha(3U^2 + V^2)$, $Z2_m = 2\alpha UV + \beta$ ve $G_m = \alpha(3V^2 + U^2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) + \frac{60}{h^3}(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) + \\ & \frac{5Z1_m}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) + \frac{5Z2_m}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.4.2a)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\sigma}_{m-2} + 26\dot{\sigma}_{m-1} + 66\dot{\sigma}_m + 26\dot{\sigma}_{m+1} + \dot{\sigma}_{m+2}) + \frac{60}{h^3}(\sigma_{m+2} - 2\sigma_{m+1} + 2\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) + \\ & \frac{5G_m}{h}(\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) + \frac{5Z2_m}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.4.2b)$$

elde edilir. (4.2.4.2) denklem sistemlerinde δ ve σ yerine Bölüm 2' de (2.2.1.4) ile verilen sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ yerine de yine Bölüm 2' de (2.2.1.5) ile verilen

sonlu fark yaklaşımları yazılırsa sistemin genelleştirilmiş satırları

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{30}{h^3} - \frac{5}{2h} Z1_m \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{60}{h^3} - \frac{25}{h} Z1_m \right] + \\
& \delta_m^{n+1} \left[\frac{66}{\Delta t} \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{60}{h^3} + \frac{25}{h} Z1_m \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{30}{h^3} + \frac{5}{2h} Z1_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{5}{2h} Z2_m \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{25}{h} Z2_m \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{25}{h} Z2_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{5}{2h} Z2_m \right] = \quad (4.2.4.3) \\
& \delta_{m-2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{30}{h^3} + \frac{5}{2h} Z1_m \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{60}{h^3} + \frac{25}{h} Z1_m \right] + \\
& \delta_m^n \left[\frac{66}{\Delta t} \right] + \delta_{m+1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{60}{h^3} - \frac{25}{h} Z1_m \right] + \delta_{m+2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{30}{h^3} - \frac{5}{2h} Z1_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^n \left[\frac{5}{2h} Z2_m \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{25}{h} Z2_m \right] + \sigma_{m+1}^n \left[-\frac{25}{h} Z2_m \right] + \sigma_{m+2}^n \left[-\frac{5}{2h} Z2_m \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2}^{n+1} \left[-\frac{5}{2h} Z2_m \right] + \delta_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+1}^{n+1} \left[\frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+2}^{n+1} \left[\frac{5}{2h} Z2_m \right] \\
& \sigma_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{30}{h^3} - \frac{5}{2h} G_m \right] + \sigma_{m-1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{60}{h^3} - \frac{25}{h} G_m \right] + \\
& \sigma_m^{n+1} \left[\frac{66}{\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^{n+1} \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{60}{h^3} + \frac{25}{h} G_m \right] + \sigma_{m+2}^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{30}{h^3} + \frac{5}{2h} G_m \right] = \quad (4.2.4.4) \\
& \delta_{m-2}^n \left[\frac{5}{2h} Z2_m \right] + \delta_{m-1}^n \left[\frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+1}^n \left[-\frac{25}{h} Z2_m \right] + \delta_{m+2}^n \left[-\frac{5}{2h} Z2_m \right] + \\
& \sigma_{m-2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{30}{h^3} + \frac{5}{2h} G_m \right] + \sigma_{m-1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} - \frac{60}{h^3} + \frac{25}{h} G_m \right] + \\
& \sigma_m^n \left[\frac{66}{\Delta t} \right] + \sigma_{m+1}^n \left[\frac{26}{\Delta t} + \frac{60}{h^3} - \frac{25}{h} G_m \right] + \sigma_{m+2}^n \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{30}{h^3} - \frac{5}{2h} G_m \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$Z1_m = \alpha [\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}]^2 + (\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2,$$

$$Z2_m = 2\alpha(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) + \beta,$$

$$G_m = \alpha [\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}]^2 + (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2]$$

dir. Böylece $(2N + 10)$ -bilinmeyenli $(2N + 2)$ -tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. (4.2.4.1)' de verilen U_m, V_m, U'_m ve V'_m yaklaşımlarının sınırlardaki değerleri kullanılarak $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}$ ve σ_{N+2} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ -boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir.

İterasyona başlanabilmesi için δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 parametreleri problemin verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki biçimde kolayca hesaplanabilir.

$t = 0$ için Bölüm 2' de (2.2.4.1) ile verilen yaklaşımlar

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-2}^{N+3} \delta_j^0 \phi_j(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{j=-2}^{N+3} \sigma_j^0 \phi_j(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının x_j düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_j, 0) = U(x_j, 0), \quad V_N(x_j, 0) = V(x_j, 0), \quad j = 0(1)N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 ve σ_j^0 parametreleri için $(N + 5)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir. Bölüm 2' de (2.2.4.2) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları yine Bölüm 2' de (2.2.4.3) ile verilen yaklaşımlarda yerlerine yazılırsa x_m noktasında U_N ve V_N ' nin x ' e göre ikinci mertebeden türevlerinin δ_m ve σ_m parametrelerine göre

$$U_m'' = \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}),$$

$$V_m'' = \frac{20}{h^2}(\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2})$$

noktasal değerleri ile birlikte (4.2.4.1) yaklaşımlarında U_m' ve V_m' nin sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} , δ_{N+2} , σ_{-2} , σ_{-1} , σ_{N+1} ve σ_{N+2} bilinmeyenleri sistemden yok edilirse $(N + 1)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 \\ & & & & & 6 & 60 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 \\ & & & & & 6 & 60 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu sistemlerin çözülmesiyle başlangıç parametreleri bulunur. Böylece (4.2.4.3) ve (4.2.4.4) denklemlerinde başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir.

(4.2.4.3) ve (4.2.4.4) denklemlerinin lineer olmayan terimlerine, her bir zaman adımında Bölüm 2' de (2.2.1.9) ve (2.2.1.10) ile verilen iterasyon formülleri 3-5 defa uygulanarak U_N ve V_N yaklaşık çözümleri iyileştirildi.

Kararlılık Analizi

Bu yöntemle elde edilen yaklaşımın kararlılık analizi de yukarıdaki diğer yöntemlerde olduğu gibi incelenir. (4.2.4.3) ve (4.2.4.4) denklem sistemlerinin m . genelleştirilmiş satırları,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta t}, \quad \gamma_2 = \frac{30}{h^3}, \quad \gamma_3 = \frac{5\alpha\hat{U}}{2h}, \quad \gamma_4 = \frac{5Z2_m}{2h},$$

$$\hat{U} = \max_m \{Z1_m, G_m\},$$

$$a_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

$$a_2 = 26\gamma_1 + 2\gamma_2 - 10\gamma_3,$$

$$a_3 = 66\gamma_1,$$

$$a_4 = 26\gamma_1 - 2\gamma_2 + 10\gamma_3,$$

$$a_5 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & a_1\delta_{m-2}^{n+1} + a_2\delta_{m-1}^{n+1} + a_3\delta_m^{n+1} + a_4\delta_{m+1}^{n+1} + a_5\delta_{m+2}^{n+1} - \gamma_4\sigma_{m-2}^{n+1} - \\ & 10\gamma_4\sigma_{m-1}^{n+1} + 10\gamma_4\sigma_{m+1}^{n+1} + \gamma_4\sigma_{m+2}^{n+1} = a_5\delta_{m-2}^n + a_4\delta_{m-1}^n + a_3\delta_m^n + \\ & a_2\delta_{m+1}^n + a_1\delta_{m+2}^n + \gamma_4\sigma_{m-2}^n + 10\gamma_4\sigma_{m-1}^n - 10\gamma_4\sigma_{m+1}^n - \gamma_4\sigma_{m+2}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & -\gamma_4\delta_{m-2}^{n+1} - 10\gamma_4\delta_{m-1}^{n+1} + 10\gamma_4\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4\delta_{m+2}^{n+1} + a_1\sigma_{m-2}^{n+1} + a_2\sigma_{m-1}^{n+1} + \\ & a_3\sigma_m^{n+1} + a_4\sigma_{m+1}^{n+1} + a_5\sigma_{m+2}^{n+1} = \gamma_4\delta_{m-2}^n + 10\gamma_4\delta_{m-1}^n - 10\gamma_4\delta_{m+1}^n - \\ & \gamma_4\delta_{m+2}^n + a_5\sigma_{m-2}^n + a_4\sigma_{m-1}^n + a_3\sigma_m^n + a_2\sigma_{m+1}^n + a_1\sigma_{m+2}^n \end{aligned}$$

dır. Bu genelleştirilmiş satırlarda Bölüm 2' de (2.2.1.11) ile verilen eşitlikleri yerlerine yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$a = (66 + 2 \cos(2\varphi) + 52 \cos(\varphi))\gamma_1,$$

$$b = (2 \sin(2\varphi) - 4 \sin(\varphi))\gamma_2,$$

$$c = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_3,$$

$$d = (2 \sin(2\varphi) + 20 \sin(\varphi))\gamma_4,$$

$$c_1 = b + c$$

olmak üzere

$$[(a + ic_1)q - (a - ic_1)]P + [(idq + id)]W = 0$$

$$[(idq + id)]P + [(a + ic_1)q - (a - ic_1)]W = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin P ve W ' ya göre aşikar olmayan en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart sistemin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(a^2 + 2iac_1 - c_1^2 + d^2)q^2 - (2a^2 + 2c_1^2 - 2d^2)q + a^2 - 2iac_1 - c_1^2 + d^2 = 0$$

olup buradan

$$q_1 = \frac{a - i(c_1 - d)}{a + i(c_1 - d)},$$

$$q_2 = \frac{a - i(c_1 + d)}{a + i(c_1 + d)}$$

bulunur. Böylece $|q_1| = 1$ ve $|q_2| = 1$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, kollokasyon yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle yukarıda verilen model problemlerin nümerik çözümleri elde edildi. Problem 1 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında yapıldı. Tablo 4.43' de problemin $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$ zaman adımlarında hesaplanan I_1, I_2 ve I_3

korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan Δt zaman adımı küçüldüğünde L_2 ve L_∞ hata normlarının oldukça azaldığı açıktır. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.606 \times 10^{-3}$, $\%0.825 \times 10^{-3}$ ve $\%2.253 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%0.013 \times 10^{-3}$, $\%0.014 \times 10^{-3}$ ve $\%0.055 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%1.212 \times 10^{-5}$, $\%0.002 \times 10^{-5}$ ve $\%0.008 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı Δt küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin kayda değer şekilde azaldığı görülmektedir. Tablo 4.44, problemin $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.1, 0.05, 0.01$ konum adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%40.069 \times 10^{-5}$, $\%0.013 \times 10^{-5}$ ve $\%0.093 \times 10^{-5}$; $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%1.212 \times 10^{-5}$, $\%0.002 \times 10^{-5}$ ve $\%0.008 \times 10^{-5}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%1.010 \times 10^{-5}$, $\%0.002 \times 10^{-5}$ ve $\%0.008 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Tablodan h konum adımı küçüldüğünde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarında düşüşlerin olmadığı, ancak korunum sabitlerindeki değişimin oldukça azaldığı görülmektedir.

Problem 1' in $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri Tablo 4.45' de verildi. Tablodan t' nin artan zamanları için tek dalganın genliğini koruyarak sağa doğru hareket ettiği anlaşılmaktadır. Örneğin $t = 0'$ da dalganın genliği 0.707107 ($x = 0$) iken $t = 10'$ da 0.707106 ($x = 10$) ve $t = 20'$ de 0.707106 ($x = 20$) olarak hesaplandı. Problem 1' in $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.10' da gösterildi. Bu şekilden, hata dağılımlarının genliğin en yüksek olduğu x konumu civarında büyük olduğu açıktır.

Problem 2 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında yapıldı. Tablo 4.46 ve 4.47' de farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tablo 4.46' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değişimi, $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarında $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla $\%88.459 \times 10^{-3}$, $\%2.908 \times 10^{-3}$ ve $\%5.267 \times 10^{-3}$; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla $\%32.866 \times 10^{-3}$, $\%0.031 \times 10^{-3}$ ve $\%0.073 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu

Tablo 4.43: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

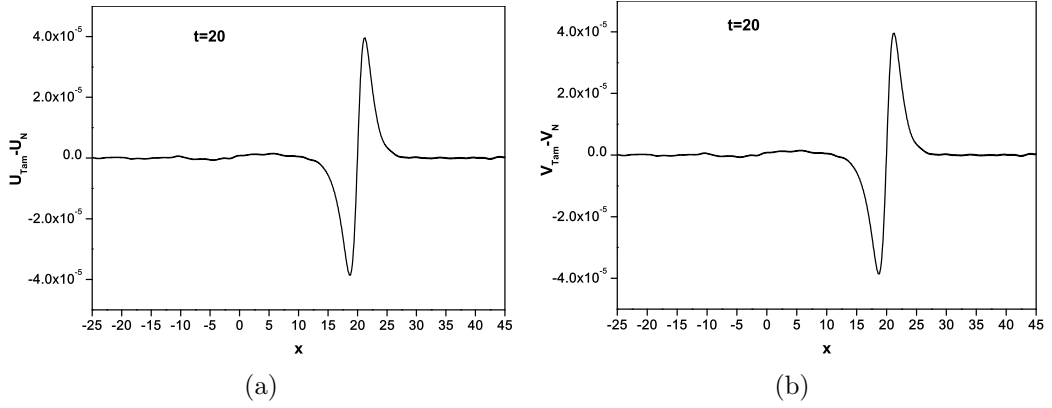
Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141562	2.828433	-0.235701	0.002135	0.001151
	10.0	3.141641	2.828439	-0.235700	0.004147	0.002180
	15.0	3.141696	2.828445	-0.235698	0.006166	0.003238
	20.0	3.141612	2.828450	-0.235697	0.008164	0.004228
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141584	2.828427	-0.235702	0.000528	0.000286
	10.0	3.141602	2.828427	-0.235702	0.001030	0.000543
	15.0	3.141608	2.828427	-0.235702	0.001531	0.000798
	20.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.002032	0.001051
0.01	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141592	2.828427	-0.235702	0.000020	0.000011
	10.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000038	0.000021
	15.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000057	0.000030
	20.0	3.141592	2.828427	-0.235702	0.000076	0.000040

Tablo 4.44: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in nümerik sonuçları.

h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141589	2.828427	-0.235702	0.000025	0.000012
	10.0	3.141591	2.828427	-0.235702	0.000018	0.000012
	15.0	3.141586	2.828427	-0.235702	0.000019	0.000010
	20.0	3.141580	2.828427	-0.235702	0.000051	0.000017
0.1	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141592	2.828427	-0.235702	0.000020	0.000011
	10.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000038	0.000021
	15.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000057	0.000030
	20.0	3.141592	2.828427	-0.235702	0.000076	0.000040
0.05	0.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000000	0.000000
	5.0	3.141592	2.828427	-0.235702	0.000021	0.000011
	10.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000041	0.000021
	15.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000061	0.000032
	20.0	3.141593	2.828427	-0.235702	0.000081	0.000042

Tablo 4.45: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-25 \leq x \leq 45$ aralığında Problem 1' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	0	0.707107
5.0	5	0.707107
10.0	10	0.707106
15.0	15	0.707106
20.0	20	0.707106



Şekil 4.10: Problem 1' in $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ' deki hata dağılımları.

sonuçlardan, zaman adımının küçülmesi durumunda korunum sabitlerinin daha iyi korunduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca Tablo 4.47’ de $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim sırasıyla $\%88.459 \times 10^{-3}$, $\%2.908 \times 10^{-3}$ ve $\%5.267 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%89.000 \times 10^{-3}$, $\%2.907 \times 10^{-3}$ ve $\%5.266 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, konum adımının küçülmesi durumunda korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir.

Tablo 4.46: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2’ nin nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.562986	6.283185	4.619952	-0.562986
20.0	6.283152	4.619976	-0.563004	6.283123	4.619952	-0.562992
40.0	6.282980	4.619997	-0.563200	6.283249	4.619953	-0.563042
60.0	6.282495	4.619998	-0.563152	6.283751	4.619954	-0.563029
80.0	6.281439	4.620005	-0.562993	6.284261	4.619952	-0.562990
100.0	6.280221	4.620026	-0.562972	6.284441	4.619951	-0.562986
120.0	6.279317	4.620050	-0.562965	6.284787	4.619952	-0.562986
140.0	6.278169	4.620075	-0.562959	6.285095	4.619951	-0.562986
150.0	6.277627	4.620087	-0.562956	6.285250	4.619951	-0.562986

Tablo 4.47: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.7$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 200$ aralığında Problem 2’ nin nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	4.619952	-0.562986	6.283185	4.619952	-0.562986
20.0	6.283152	4.619976	-0.563004	6.283153	4.619976	-0.563004
40.0	6.282980	4.619997	-0.563200	6.282978	4.619997	-0.563200
60.0	6.282495	4.619998	-0.563152	6.282493	4.619998	-0.563152
80.0	6.281439	4.620005	-0.562993	6.281437	4.620004	-0.562992
100.0	6.280221	4.620026	-0.562972	6.280220	4.620025	-0.562971
120.0	6.279317	4.620050	-0.562965	6.279304	4.620049	-0.562965
140.0	6.278169	4.620075	-0.562959	6.278141	4.620076	-0.562959
150.0	6.277627	4.620087	-0.562956	6.277593	4.620087	-0.562956

Problem 2’ nin $t = 0$ ve 150 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri

Tablo 4.48' de verildi. Tablodan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 150$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.48: Problem 2' nin $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)	Konum(x)	Genlik(U_N ve V_N)
0.0	-10.0	0.707223	10.0	0.447215
150.0	144.2	0.707562	108.3	0.446934

Problem 3 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ve $c = 1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında yapıldı. Tablo 4.49 ve 4.50, farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablo 4.49, problemin $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$ zaman adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normlarını göstermektedir. Tablodan zaman adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının kayda değer şekilde azaldığı görülmektedir. Tablo 4.49' da verilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %2.042, %4.130 ve %9.316, $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.153, %0.254 ve %0.595; $\Delta t = 0.01$ iken sırasıyla $\%0.043 \times 10^{-3}$, $\%0.076 \times 10^{-3}$ ve $\%0.178 \times 10^{-3}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir. Tablo 4.50' de problemin $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2, 0.1, 0.05$ konum adımlarında hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim, $\Delta t = 0.01$ için $h = 0.2$ iken sırasıyla $\%2.949 \times 10^{-3}$, $\%0.071 \times 10^{-3}$ ve $\%0.190 \times 10^{-3}$, $h = 0.1$ iken sırasıyla $\%0.043 \times 10^{-3}$, $\%0.076 \times 10^{-3}$ ve $\%0.178 \times 10^{-3}$; $h = 0.05$ iken sırasıyla $\%13.832 \times 10^{-5}$, $\%7.611 \times 10^{-5}$ ve $\%17.764 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıktır.

Problem 3' ün $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin

Tablo 4.49: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $h = 0.1$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

Δt	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.674235	0.000000	0.000000
	5.0	3.120893	4.830317	3.555365	0.138784	0.098610
	10.0	3.107093	4.776845	3.464745	0.464478	0.318907
	15.0	3.091644	4.733220	3.392152	0.896696	0.598034
	20.0	3.077436	4.696629	3.331929	1.333876	0.857510
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.674235	0.000000	0.000000
	5.0	3.142760	4.902035	3.679584	0.004045	0.002837
	10.0	3.143850	4.905129	3.685006	0.002743	0.002302
	15.0	3.144940	4.908265	3.690508	0.019310	0.013625
	20.0	3.146395	4.911444	3.696091	0.046800	0.032591
0.01	0.0	3.141593	4.898979	3.674235	0.000000	0.000000
	5.0	3.141594	4.898979	3.674233	0.000203	0.000144
	10.0	3.141594	4.898978	3.674231	0.000410	0.000287
	15.0	3.141592	4.898977	3.674230	0.000619	0.000429
	20.0	3.141591	4.898976	3.674228	0.000830	0.000571

Tablo 4.50: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3' ün nümerik sonuçları.

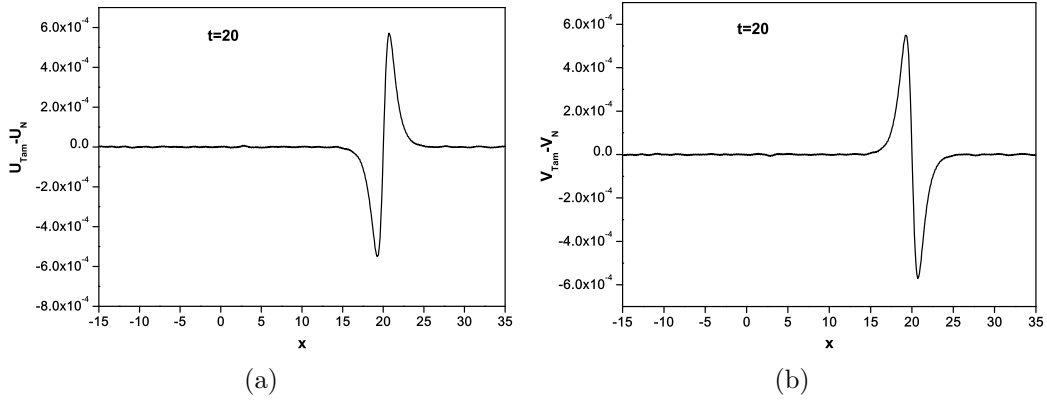
h	t	I_1	I_2	I_3	$U_N(x, t) = V_N(x, t)$	
					L_2	L_∞
0.2	0.0	3.141593	4.898979	3.674241	0.000000	0.000000
	5.0	3.141611	4.898979	3.674239	0.001039	0.000786
	10.0	3.141587	4.898978	3.674237	0.001994	0.001413
	15.0	3.141692	4.898977	3.674235	0.002995	0.002130
	20.0	3.141685	4.898976	3.674234	0.003991	0.002755
0.1	0.0	3.141593	4.898979	3.674235	0.000000	0.000000
	5.0	3.141594	4.898979	3.674233	0.000203	0.000144
	10.0	3.141594	4.898978	3.674231	0.000410	0.000287
	15.0	3.141592	4.898977	3.674230	0.000619	0.000429
	20.0	3.141591	4.898976	3.674228	0.000830	0.000571
0.05	0.0	3.141593	4.898979	3.674235	0.000000	0.000000
	5.0	3.141593	4.898979	3.674233	0.000278	0.000191
	10.0	3.141594	4.898978	3.674231	0.000560	0.000384
	15.0	3.141587	4.898977	3.674230	0.000845	0.000578
	20.0	3.141588	4.898976	3.674228	0.001132	0.000772

değerleri Tablo 4.51’ de verildi. Tablodan t ’ nin artan zamanları için tek dalganın, U_N için x -ekseninin üstünde, V_N için ise x -ekseninin altında sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Örneğin, $t = 0$ ’ da dalganın genliği 1.224745 ($x = 0$) iken $t = 10$ ’ da 1.224761 ($x = 10$) ve $t = 20$ ’ de 1.224761 ($x = 20$) olarak hesaplandı.

Tablo 4.51: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $-15 \leq x \leq 35$ aralığında Problem 3’ ün kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
0.0	0	1.224745	-1.224745
5.0	5	1.224760	-1.224760
10.0	10	1.224761	-1.224761
15.0	15	1.224759	-1.224759
20.0	20	1.224761	-1.224761

Problem 3’ ün $t = 20$ zamanında tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımları grafiksel olarak Şekil 4.11’ de gösterildi. Hata dağılımlarının genliğinin en yüksek olduğu x konumu civarında büyük olduğu kolayca görülmektedir.



Şekil 4.11: Problem 3’ ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 20$ ’ deki hata dağılımları.

Problem 4 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$ ve $s_2 = 10$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.52’ de, farklı konum adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tabloda verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.2$ iken

sırasıyla %6.313, %13.425 ve %31.043, $h = 0.1$ iken sırasıyla %6.297, %13.419 ve %31.029 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerinin değişiminde kayda değer farklılıkların olmadığı görülmektedir.

Tablo 4.52: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $s_1 = -10$, $s_2 = 10$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 4' ün nümerik sonuçları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	6.283185	7.997373	5.068526	6.283185	7.997373	5.068520
10.0	6.093962	7.384995	4.101087	6.094209	7.385401	4.101699
20.0	6.030563	7.206649	3.860239	6.030601	7.207067	3.860767
30.0	6.019192	7.154280	3.798719	6.018651	7.154590	3.799191
40.0	5.994802	7.092015	3.723768	5.995325	7.092322	3.724173
50.0	5.985097	7.022016	3.626897	5.984470	7.020855	3.626701
60.0	5.927667	6.947751	3.544746	5.927016	6.950180	3.546070
70.0	5.886528	6.923725	3.495125	5.887553	6.924212	3.495787

Problem 4' ün $t = 0$ ve 70 zamanlarında elde edilen U_N ve V_N çözümlerinin maksimum genlik değerleri ve bu değerleri aldığı x konum değişkeninin değerleri sırasıyla Tablo 4.53 ve Tablo 4.54' de verildi. Tablolardan $t = 0$ ' da büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, $t = 70$ olduğunda büyük dalganın küçük dalganın sağına geçtiği görülmektedir.

Tablo 4.53: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
	Konum(x)	Genlik(U_N)	Konum(x)	Genlik(U_N)
0.0	-10.0	1.224745	10.0	0.774597
70.0	31.8	0.959361	11.4	0.778231

Problem 5 için tüm hesaplamalar $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında yapıldı. Tablo 4.55 ve 4.56' da, farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum sabitleri verildi. Tablo 4.55' de verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $h = 0.1$ için $\Delta t = 0.1$ iken sırasıyla %0.184, %0.116 ve %0.115; $\Delta t = 0.05$ iken sırasıyla %0.183, %0.120 ve

Tablo 4.54: Problem 4' ün $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

t	Konum(x)	Büyük Dalga		Küçük Dalga	
		Genlik(V_N)	Konum(x)	Genlik(V_N)	Konum(x)
0.0	-10.0	-1.224745	10.0	-0.774597	
70.0	31.8	-0.959361	11.4	-0.778231	

%0.125 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, Δt zaman adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen aynı kaldığı görülmektedir. Tablo 4.56' da verilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarındaki değişimi, $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.1$ iken sırasıyla %0.184, %0.116 ve %0.115; $h = 0.05$ iken sırasıyla %0.181, %0.115 ve %0.115 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan, h konum adımı küçüldükçe korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.55: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $h = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611761	8.862269	6.266571	2.611761
10.0	8.862284	6.266571	2.611762	8.862285	6.266571	2.611761
20.0	8.863033	6.266574	2.611756	8.863051	6.266595	2.611772
30.0	8.865413	6.266727	2.611793	8.865469	6.266823	2.611879
40.0	8.848005	6.272345	2.614180	8.848068	6.272530	2.614351
50.0	8.845955	6.273836	2.614756	8.846055	6.274114	2.615017

Tablo 4.56: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$, $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.1$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in nümerik sonuçları.

t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	8.862269	6.266571	2.611761	8.862269	6.266571	2.611761
10.0	8.862284	6.266571	2.611762	8.862284	6.266571	2.611763
20.0	8.863033	6.266574	2.611756	8.863032	6.266575	2.611757
30.0	8.865413	6.266727	2.611793	8.865423	6.266740	2.611800
40.0	8.848005	6.272345	2.614180	8.848155	6.272413	2.614218
50.0	8.845955	6.273836	2.614756	8.846241	6.273807	2.614755

$t = 0$ zamanında U_N ve V_N dalgalarının maksimum genlik değerleri sırasıyla

0.5 ($x = 0$) ve -0.5 ($x = 0$)' dir. Bu tek dalgaların $t = 50$ zamanına ulaşıldığında geride değişik genliklerde iki dalga oluşturarak sağa doğru ilerlediği anlaşılmaktadır. $t = 50$ zamanında oluşan bu ardışık dalgaların konumları ve genlikleri Tablo 4.57' de verildi.

Tablo 4.57: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $A = 0.5$, $B = -0.5$ ve $\gamma = 0.01$ için $-50 \leq x \leq 50$ aralığında Problem 5' in kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları.

	Konum(x)	Genlik(U_N)	Genlik(V_N)
Birinci Dalga	13.6	0.858499	- 0.858499
İkinci Dalga	-11.8	0.533366	-0.533366
Üçüncü Dalga	-30.0	0.201157	-0.201157

4.2.5 Sonuç

Bu bölümde, coupled mKdV denkleminin Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri bulundu. Göz önüne alınan beş farklı model problem, konum ve zaman adımlarının değişik değerleri için çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri tablolar halinde verildi. Tablolar incelendiğinde Galerkin ve kollokasyon yöntemlerinin, Petrov-Galerkin ve subdomain yöntemlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği görüldü. Ayrıca her bir yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi incelenirken karşılaşılan cebirsel işlemler Mathematica programı yardımı ile yapıldı.

Model problemlerin her bir yöntemle elde edilen nümerik çözümlerinin grafikleri ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olacağından sadece Galerkin yöntemiyle elde edilen nümerik çözümleri grafiklerle verildi. Ayrıca tüm yöntemler için tam ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımlarını gösteren grafikler ve farklı t zamanlarında dalganın hareketini gösteren tablolar verildi.

KAYNAKLAR

- [1] J. N. Reddy, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2004.
- [2] M. A. Bhatti, *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica and Matlab Computations*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [3] N. Otteson and H. Petterson, *Introduction to The Finite Element Method*, Prentice Hall International (UK) Ltd., 1992.
- [4] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)*, Thomson, 2007.
- [5] F. L. Stasa, *Applied Finite Element Analysis for Engineers*, CBS College Publishing, New York, 1985.
- [6] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing (Sixth Edition)*, Thomson, 2008, 2004.
- [7] İ. Dağ, “*Studies of B-spline Finite Elements*”, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.
- [8] P. M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiles, New York, 1975.
- [9] J. Nee and J. Duan, *Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers’ equations*, **Appl. Math. Lett.**, 11:1(1998) 57–61.
- [10] S. E. Esipov, *Coupled Burgers’ equations: a model of polydisperse sedimentation*, **Phys. Rev. Lett.**, 52(1995) 3711-3718.
- [11] P. C. Jain and M. K. Kadalbajoo, *Invariant embedding for the solution of coupled Burgers’ equations*, **J. Math. Anal. Appl.**, 72:1(1979) 1-16.
- [12] D. Kaya, *An Explicit solution of coupled viscous Burgers’ equation by the decomposition method*, **Int. J. Math. Math. Sci.**, 27:11 (2001) 675-680.
- [13] M. Dehghan, A. Hamidi and M. Shakourifar, *The solution of coupled Burgers’ equations using Adomian–Pade technique*, **Appl. Math. and Comput.**, 189 (2007) 1034–1047.
- [14] A. H. Khater, R. S. Temsah and M. M. Hassan, *A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers’-type equations*, **J. Comput. Appl. Math.**, 222:2(2008) 333-350.

- [15] A. R. Ghotbi, A. Avaei, A. Barari and M. A. Mohammadzade, *Assessment of He's Homotopy Perturbation Method in Burgers and Coupled Burgers' Equations*, **J. Applied. Sci.**, 8:2(2008) 322-327.
- [16] A. Rashid and A.I.B.M. Ismail, *A Fourier Pseudospectral Method For Solving Coupled Viscous Burgers Equations*, **Comp. Methods in Appl. Math.**, 9:4(2009) 412-420.
- [17] R. Abazari and A. Borhanifar, *Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method*, **Comput. Math. Appl.**, 59 (2010) 2711-2722.
- [18] R. C. Mittal and G. Arora, *Numerical solution of the coupled viscous Burgers' equation*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 16 (2011) 1304–1313.
- [19] Siraj-ul-Islam, S. Haq and M. Uddin, *A mesh free interpolation method for the numerical solution of the coupled nonlinear partial differential equations*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 33 (2009) 399–409.
- [20] I. E. Inan, D. Kaya and Y. Ugurlu, *Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for coupled Burger's equation*, **Appl. Math. and Comput.**, 216 (2010) 2507–2511.
- [21] A. Kelleci and A. Yildirim, *An efficient numerical method for solving coupled Burgers' equation by combining homotopy perturbation and pade techniques*, **Numer. Meth. Part. Diff. Equ.**, 27:4(2011), 982-995.
- [22] J. Liu and G. Hou, *Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2011) 7001–7008.
- [23] M. Ghoreishi, A.I.B.Md. Ismail and A. Rashid, *The Coupled Viscous Burgers Equations with Fractional-Time Derivative by the Homotopy Perturbation Method*, **J. Comput. Anal. Appl.**,13:6(2011),1054-1066.
- [24] A. A. Soliman, *On the solution of two-dimensional coupled Burgers' equations by variational iteration method*, **Chaos, Solitons and Fractals**, 40:3(2007) 1146-1155.
- [25] Z. Lian and S. Y. Lou, *Symmetry study of the coupled Burgers system*, **Chaos, Solitons and Fractals**, 27 (2006) 51-55.
- [26] M. A. Abdou and A. A. Soliman, *Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations*, **J. Comput. Appl. Math.**, 181(2005) 245-251.
- [27] A. A. Soliman, *The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations*, **Physica A.**, 361 (2006) 394-404.

- [28] T. A. Abassy, M. A. El-Tawil and H. El-Zoheiry, *Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Pad'e technique*, **Comput. Math. Appl.**, 54 (2007) 940–954.
- [29] N.H. Sweilam and M.M. Khader, *Exact solutions of some coupled nonlinear partial differential equations using the homotopy perturbation method*, **Comput. Math. Appl.**, 58 (2009) 2134–2141.
- [30] N. Liu, *Similarity reduction and explicit solutions for the variable-coefficient coupled Burger's equations*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2010) 4178–4185.
- [31] Z. Jin-Ming and Z. Yao-Ming, *The Hirota bilinear method for the coupled Burgers equation and the high-order Boussinesq Burgers equation*, **Chin. Phys. B**, 20:1 (2011) 010205-1-7.
- [32] A. Esen, “*Termistör probleminin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile çözümleri*”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2003.
- [33] M. Shashkov, *Conservative finite difference methods on general grids*, CRC, USA, 1996.
- [34] B. Saka, “*RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri*”, Doktora tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2002.
- [35] R. Hirota and J. Satsuma, *Soliton solution of the coupled KdV system*, **Phys. Lett. A.**, 85 (1981), 407–408.
- [36] H. W. Tam, W. Ma, X.-B. Hu and D-Wang, *The Hirota-Satsuma coupled KdV equation and coupled Ito system Revisited*, **J. Phys. Soc. Jpn.**, 69 (2000), 45–52.
- [37] Bo Tian and Yi-Tian Gao, *Exact solutions for the Bogoyavlenskii coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A.**, 208 (1995) 193-196.
- [38] E. Fan and H. Zhang, *New exact solutions to a system of coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A**, 245 (1998) 389-392.
- [39] P. Kumar Roy, *On coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A.**, 249 (1998) 55-58.
- [40] S. Zhu, *A Difference Scheme for the Coupled KdV Equation*, **Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 4:1 (1999) 60-63.
- [41] D. Bo Cao, J. Ren Yan and Y. Zhang, *Exact solutions for a new coupled MKdV equations and a coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A.**, 297 (2002) 68–74.
- [42] Y. Zhou, M. Wang and Y. Wang, *Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients*, **Phys. Lett. A.**, 308(2003) 31–36.

- [43] A. Karasu (Kalkanlı) and T. Kılıç, *Integrability of a Nonautonomous Coupled KdV System*, **IJMPC**, 15:5 (2004) 609-617.
- [44] S. Qian and L. Tian, *Nonlocal Lie-Bäcklund symmetries of the coupled KdV system*, **Phys. Lett. A.**, 364 (2007) 235–238.
- [45] I. E. Inan, *Exact solutions for coupled KdV equation and KdV equations*, **Phys. Lett. A.**, 371 (2007) 90–95.
- [46] Z. Ma and J. Zhu, *Jacobian elliptic function expansion solutions for the Wick-type stochastic coupled KdV equations*, **Chaos, Solitons and Fractals**, 32(2007) 1679–1685.
- [47] L. M. B. Assas, *Variational iteration method for solving coupled-KdV equations*, **Chaos, Solitons and Fractals**, 38(2008) 1225-1228.
- [48] S. Abbasbandy, *The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation*, **Phys. Lett. A.**, 361 (2007) 478–483.
- [49] Kamel Al-Khaled, Mohammed Al-Refai and Ameen Alawneh, *Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations*, **Appl. Math. Comput.**, 202 (2008) 233–242.
- [50] E. Fan, *Traveling Wave Solutions for Nonlinear Equations Using Symbolic Computation*, **Comput. Math. Appl.**, 43 (2002) 671-680.
- [51] A. A. Halim, S. P. Kshevetskii and S. B. Leble, *On numerical integration of coupled Korteweg-de Vries System*, **Comput. Math. Appl.**, 45:4-5 (2003) 581-591.
- [52] A. A. Halim and S. B. Leble, *Analytical and numerical solution of coupled KdV-MKdV system*, **Chaos, Solitons and Fractals**, 19 (2004) 99–108.
- [53] D. Kaya and I. E. Inan, *Exact and numerical traveling wave solutions for nonlinear coupled equations using symbolic computation*, **Appl. Math. Comput.**, 151 (2004) 775–787.
- [54] B. Alvarez-Samaniego and X. Carvajal, *On the local well-posedness for some systems of coupled KdV equations*, **Nonlinear Anal.**, 69(2008) 692-715.
- [55] M.S. Ismail, *Numerical Solution of a Coupled Korteweg-de Vries Equations by Collocation Method*, **Numer. Meth. Part. Diff. Equ.**, 25:2(2009) 275-291.
- [56] A. S. Abdel Rady, E. S. Osman and Mohammed Khalfallah, *Multi soliton solution for the system of Coupled Korteweg-de Vries equations*, **Appl. Math. Comput.**, 210 (2009) 177–181.
- [57] A. Rashid and A.I.B.M. Ismail, *Error Estimates of Spectral Collocation Method for the Coupled Korteweg-de Vries Equations*, **Journal of Applied Functional Analysis**, 6:1(2011)17-25.

- [58] H. Triki and M. S. Ismail, *Solitary wave solutions for a coupled pair of mKdV equations*, **Appl. Math. Comput.**, 217:4 (2010) 1540-1548.
- [59] E. Fan, *Soliton solutions for a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation*, **Phys. Lett. A.**, 282 (2001) 18–22.
- [60] A. H. A. Ali, *The modified extended tanh-function method for solving coupled MKdV and coupled Hirota–Satsuma coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A.**, 363 (2007) 420–425.
- [61] Y. Chen and H. An, *Homotopy perturbation method for a type of nonlinear coupled equations with parameters derivative*, **Appl. Math. Comput.**, 204 (2008) 764–772.
- [62] A. H. Khater, R. S. Temsah and D. K. Callebaut, *Numerical solutions for some coupled nonlinear evolution equations by using spectral collocation method*, **Math. Comput. Model.**, 48 (2008) 1237–1253.
- [63] A. JanKhattak, S. I. A. Tirmizi and Siraj-ul-Islam, *Application of mesh free collocation method to a class of nonlinear partial differential equations*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 33(2009)661–667.
- [64] A. Wazwaz, *A Completely Integrable System of Coupled Modified KdV Equations*, **JNOPM**, 19:1 (2010) 145–151.
- [65] J. Zuo and Y. Zhang, *Application of the G'/G -expansion method to solve coupled MKdV equations and coupled Hirota–Satsuma coupled KdV equations*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2011) 5936–5941.

ÖZGEÇMİŞ

09.08.1975 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya' da tamamladı. 1997 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde yüksek lisansını tamamladı. Halen İnönü Üniversitesi Akçadağ Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Teknolojileri bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.